

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ**  
**«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**  
**імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**  
Фізико-математичний факультет  
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»

УДК \_\_\_\_\_

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ Клесов О.І.

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

## **Магістерська дисертація**

**на здобуття ступеня магістра**

**зі спеціальності 111 «Математика»**

**на тему: «Умови інтегровності комплекснозначних тригонометричних  
рядів »**

Виконала:

студентка VI курсу, групи ОМ-81 мп

Хомути́нська Дар'я Романівна

\_\_\_\_\_

Керівник:

Доктор фізико-математичних наук, професор

Задерей Петро Васильович

\_\_\_\_\_

Рецензент:

Посада, науковий ступінь, вчене звання,

Прізвище, ініціали

\_\_\_\_\_

Засвідчую, що у цій магістерській  
дисертації немає запозичень з праць  
інших авторів без відповідних  
посилань.

Студентка \_\_\_\_\_

**Національний технічний університет України**  
**«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

**Фізико-математичний факультет**

**Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей**

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність (спеціалізація) – 111 Математика («Страхова та фінансова математика»)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ Клесов О.І.

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

**ЗАВДАННЯ**

**на магістерську дисертацію студенту**

**Хомутинській Дар'ї Романівні**

1. Тема дисертації «Умови інтегровності комплекснозначних тригонометричних рядів», науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, професор Задерей Петро Васильович, затверджені наказом по університету від «7» листопада 2019 р. №3850с.
2. Термін подання студентом дисертації 10 грудня 2019р.
3. Об'єктом дослідження є одновимірні тригонометричні ряди Фур'є.
4. Перелік завдань, які потрібно виконати:
  - 1) Ознайомитися літературою та навести о значення тригонометричного ряду та ряду Фур'є.

2) навести класичні теореми, що забезпечують збіжність тригонометричних рядів і умови інтегровності дійсних тригонометричних рядів;

3) довести теорему та наслідок про умови на коефіцієнти комплексних тригонометричних рядів при виконанні яких даний тригонометричний ряд буде рядом Фур'є.

4) навести приклади тригонометричних рядів, які є рядами Фур'є.

5. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: 14 слайдів.

6. Дата видачі завдання 2 вересня 2019р.

#### Календарний план

| № з/п | Назва етапів виконання магістерської дисертації                                                                                   | Термін виконання етапів магістерської дисертації | Примітка |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|----------|
| 1     | Огляд літератури                                                                                                                  | 02.09.19-24.09.19                                | виконано |
| 2     | Написання основних означень, тверджень                                                                                            | 25.09.19-08.10.19                                | виконано |
| 3     | Написання Класичних теорем, що забезпечують збіжність тригонометричних рядів і умови інтегровності дійсних тригонометричних рядів | 09.10.19-22.10.19                                | виконано |

|   |                                                                                               |                   |          |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|----------|
| 4 | Формулювання та доведення теорема про умови на коефіцієнти комплексних тригонометричних рядів | 23.10.19-5.11.19  | виконано |
| 5 | Формулювання та доведення наслідку з теореми                                                  | 06.11.19-19.11.19 | виконано |
| 6 | Наведення прикладів тригонометричних рядів, які є рядами Фур'є                                | 20.11.19-26.11.19 | виконано |
| 7 | Оформлення результатів                                                                        | 27.11.19-09.12.19 | виконано |

Студент

Д.Р. Хомути́нська

Науковий керівник дисертації

П.В.Задерей

## РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 38 сторінок, 14 слайдів презентації, 21 першоджерел.

Дисертаційна робота присвячена встановленню умов на коефіцієнти комплексних тригонометричних рядів.

Метою дослідження моєї дипломної роботи є знаходження умов на коефіцієнти комплексних тригонометричних рядів, при виконанні яких дані ряди будуть рядами Фур'є сумовних комплекснозначних функцій.

Об'єктом дослідження є одновимірні тригонометричні ряди Фур'є.

Предметом дослідження є інтегровність комплексних тригонометричних рядів.

Дисертація носить теоретичне значення, її результати можуть використовуватися при одержанні інших результатів що стосуються умов інтегровності комплекснозначних тригонометричних рядів Фур'є.

Ключові слова: тригонометричний ряд, ряд Фур'є, коефіцієнти ряду Фур'є, умови інтегровності.

## **ABSTRACT**

Master degree thesis contains: 38 pages, 14 presentation slides, 21 primary sources.

The dissertation is devoted to establishing the conditions for the coefficients of complex trigonometric series.

The purpose of research of my diploma work is to find conditions for coefficients of complex trigonometric series, in which case these series will be Fourier series of nouns of complex complex-valued functions.

The object of the study is one-dimensional trigonometric Fourier series.

The subject of the study is the integrability of complex trigonometric series.

The dissertation is of theoretical importance, its results can be used in obtaining other results concerning the conditions of integrability of complex-valued Fourier trigonometric series.

Keywords: trigonometric series, Fourier series, coefficients of Fourier series, integrability conditions.

## ЗМІСТ

|                                                                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Перелік умовних позначень.....                                                                                                    | 8  |
| Вступ.....                                                                                                                        | 9  |
| <b>Розділ 1. Основні означення, позначення і допоміжні твердження</b>                                                             |    |
| 1.1. Основні означення.....                                                                                                       | 11 |
| 1.2. Класичні теореми, що забезпечують збіжність тригонометричних рядів і умови інтегровності дійсних тригонометричних рядів..... | 14 |
| <b>Розділ 2. Умови інтегровності комплекснозначних тригонометричних рядів</b>                                                     |    |
| 2.1. Умови інтегровності комплексних тригонометричних рядів.....                                                                  | 24 |
| 2.2. Наслідки.....                                                                                                                | 2  |
| 9                                                                                                                                 |    |
| <b>Розділ 3. Приклади тригонометричних рядів, які є рядами Фур'є.....</b>                                                         |    |
| Висновок.....                                                                                                                     | 36 |
| Список використаних джерел.....                                                                                                   | 37 |

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$  – множина натуральних чисел;

$\exists$  - квантор існування, «існує»;

$\forall$  – квантор загальності, «для будь-якого»;

$[a]$  – ціла частина числа  $a$ , що не перевищує  $a$  ;

$\{a_k\} = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  – послідовність дійсних чисел;

$\Delta a_k := a_k - a_{k+1}, k = 0, 1, 2, \dots;$

$\Delta^2 a_k := \Delta a_k - \Delta a_{k+1} = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}, k = 0, 1, 2, \dots;$

$a_k \downarrow 0$  – монотонно спадна до нуля послідовність дійсних чисел  $\{a_k\}$ ;

$L_p$  – простір  $2\pi$ -періодичних сумовних в  $p$ -тому степені функцій;

$\|f\|_p$  – норма функцій  $f$  у просторі  $L_p$ ;

$C_0$  – нуль-послідовність;

$BV$  – послідовність обмеженої варіації;

$Y$  – випукла послідовність;

$K$  –квазівипукла послідовність;

$S - T$  – множина, яка задовольняє умови Сідона-Теляковського;

$S - T^*$  – множина, яка задовольняє узагальнені умови Сідона-Теляковського.

## ВСТУП

Магістерська дисертація присвячена встановленню умов на коефіцієнти тригонометричних комплекснозначних рядів Фур'є.

Актуальність роботи. Однією з важливих задач теорії тригонометричних рядів є встановлення умов на коефіцієнти тригонометричного ряду при виконанні яких даний ряд є рядом Фур'є сумовної функції. Ці умови виконуються при представленні інтегралів від модулів функцій, що зображаються, своїми рядами Фур'є.

Теорія тригонометричних рядів, відіграє важливу роль в розвитку теорії функцій. Найбільш природним апаратом наближення періодичних неперервних, або аналітичних в крузі функцій є частинні суми їх рядів Фур'є.

Дана магістерська дисертація складається із 3-х розділів.

У першому розділі дисертаційної роботи, а саме в пункті 1.1, наведені основні означення, позначення і допоміжні твердження. Також тут, в пункті 1.2, наведені класичні теореми, що забезпечують збіжність тригонометричних рядів і умови інтегровності дійсних тригонометричних рядів. Основними теоремами є теореми: В. Юнга [5], Рісса-Фіщера [1], А.М. Колмогоровам [8], С.О. Теляковського [9].

Перша робота, в якій знайдені умови на коефіцієнти тригонометричного ряду, при виконанні яких даний ряд збігається скрізь, за виключенням, можливо, однієї точки, до інтегровної функції, належить В. Юнга [5]. Він довів, що одновимірний тригонометричний ряд з косинусів буде рядом Фур'є сумовної функції, якщо його коефіцієнти утворюють випуклу послідовність.

Після роботи В. Юнга [5] з'явилися публікації, в яких на коефіцієнти тригонометричного ряду накладались більш загальні умови. В одновимірному випадку відомі роботи С. Сідона [6], Л. Тонеллі [7], А.М. Колмогорова [8], С.О. Теляковського [9, 15, 18, 19], Ч. Мура [10, 11], Л. Чезарі [12], Р.П. Боаса [13], С.В. Станоєвича [14], Т. Кано [16] та інших.

У другому розділі, в пункті 2.1, сформульовано та доведено теорему про умови на коефіцієнти комплексних тригонометричних рядів. У пункті 2.2 наведені наслідки, які випливають з деяких класичних теорем, що забезпечують збіжність тригонометричних рядів.

В третьому розділі розглянуто і розв'язано приклади тригонометричних рядів, які є, або не є рядами Фур'є.

# РОЗДІЛ 1

## ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ, ОЗНАЧЕННЯ І ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

### 1.1. Основні означення

Наведемо необхідні означення, позначення, а також огляд літератури, який стосується нашої теми.

Позначимо через  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , множину  $2\pi$ - періодичних сумовних в  $p$ -тому степені функцій  $f$  із скінченною нормою

$$\|f\|_p = \left( \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$L_\infty$ - множина суттєво обмежених функцій, із скінченною нормою

$$\|f\|_\infty = \text{vraisup} |f(t)|$$

Іншими словами існує стала  $M$  така, що:

$$|f(x)| \leq M$$

майже скрізь, тобто скрізь за виключенням множини, мірою Лебега рівною 0.

На множині з мірою Лебега рівною 0 функція  $f \in L_\infty$  може бути необмеженою.

Ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1.1)$$

де  $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$  — коефіцієнти даного ряду, є деякими дійсними числами, називають тригонометричним рядом.

при виконанні яких ряд (1.1) буде рядом Фур'є функції з простору  $L_p$ .

Тригонометричний ряд (1.1) є рядом Фур'є, якщо існує функція  $f \in L_1$  така, що коефіцієнти ряду (1.1) обчислюються за формулами Фур'є:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

Важливою, але складною задачею теорії тригонометричних рядів є задача про знаходження умов на коефіцієнти  $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$  ряду (1.1) при виконанні яких даний тригонометричний ряд буде рядом Фур'є функції з простору  $L_1$ .

При розв'язуванні лінійних рівнянь другого і вищих порядків з граничними умовами методом Фур'є розв'язки одержують, як правило, у вигляді тригонометричних рядів. Причому невідомо до якого простору належить сума цього ряду.

В подальшому будемо використовувати такі означення і позначення.

Послідовність  $\{a_k\}$  називається:

1) нуль-послідовністю, якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0;$$

(1.4)

2) послідовністю обмеженої варіації, якщо

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| < \infty; \quad (1.5)$$

3) випуклою, якщо

$$\Delta^2 a_k = \Delta(\Delta a_k) \geq 0,$$

де

$$\Delta a_k = a_k - a_{k+1} \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots;$$

4) квазівипуклою, якщо

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 a_k| < \infty.$$

Для зручності множини послідовностей 1)-4) будемо позначати відповідно  $C_0, BV, Y, K$ . Для нуль-послідовностей, які монотонно прямують до нуля, тобто якщо

$$\{a_k\} \in C_0$$

і

$$a_k \geq a_{k+1} \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots,$$

будемо використовувати позначення  $a_k \downarrow 0$ .

## 1.2. Класичні теореми, що забезпечують збіжність тригонометричних рядів і умови інтегровності дійсних тригонометричних рядів.

Одним із перших важливих результатів є Теорема Рісса-Фішера, яка дозволяє встановити, чи належить функція, що є сумою тригонометричного ряду, до простору  $L_2$ .

### Теорема Рісса-Фішера [1]

Якщо

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty$$

— збігається, то

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

є рядом Фур'є функції  $f \in L_2$  і має місце рівність

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Таким чином, для того, щоб ряд (1.1) був рядом Фур'є функції  $f(x) \in L_2$  необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty.$$

Саме це робить теорему Рісса-Фішера настільки важливим фактом теорії тригонометричних рядів. Природньо запитати: чи не можна довести щонебудь таке ж просте і для класів  $L_p$ , з  $p \neq 2$ .

Надалі замість ряду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

будемо розглядати окремо два ряди

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (1.2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx, \quad (1.3)$$

де  $a_k, b_k = 0, 1, 2, \dots$  — дійсні числа, які досліджують окремо, оскільки умови інтегровності рядів (1.2) і (1.3) різні. Більш того. Відрізняються не тільки умови інтегровності, а і методи досліджень. Доведення теорем для рядів з косинусів досить прості, а для рядів з синусів, як правило, вимагають більш тонких міркувань.

Спочатку розглянемо питання, при яких умовах на коефіцієнти одновимірні тригонометричні ряди (1.2), (1.3) збігаються.

**Теорема 1.1.1**[2, гл. 1, § 30; 2, гл.1, § 2; 3, § 7.2].

Нехай  $a_k \downarrow 0$ , тоді:

- 1) ряд (1.2) збігається майже скрізь, крім можливо точок  $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ;
- 2) ряд (1.3) збігається скрізь на  $\mathbb{R}$ ;
- 3) для довільного  $\delta > 0$  ряди (1.2), (1.3) збігаються рівномірно на  $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$ .

**Зауваження 1.1.1.**

Відомо [2, гл. X, § 1], що послідовність коефіцієнтів  $\{a_k\}$  з множини  $BV \cap C_0$  можна представити у вигляді різниці двох монотонно спадних послідовностей. Таким чином, якщо умову  $a_k \downarrow 0$  замінити на  $\{a_k\} \in BV \cap C_0$ , то твердження теореми 1.1.1 залишається справедливим.

**Зауваження 1.1.2.**

Умови (1.4) і (1.5) не є достатніми для того, щоб ряди (1.2), (1.3) були рядами Фур'є. Приклад ряду (1.2) з коефіцієнтами з множини  $BV \cap C_0$ , який не є рядом Фур'є, першим навів С.Сідон [2, гл. X, § 1].

Нехай  $a_k \downarrow 0$  і  $c(x), s(x)$  — суми рядів (1.2), (1.3) відповідно:

$$c(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx,$$

Тоді для того, щоб ряди (1.2), (1.3) були рядами Фур'є, необхідно і достатньо, щоб функції  $c, s \in L_1$  [2, гл. X, § 2].

Згідно узагальненою теоремою Дюбуа-Реймона [2, гл. XIV, § 4], якщо тригонометричний ряд збігається до інтегровної функції, і вона скрізь скінченна, крім можливо зліченної множини точок, то даний ряд є рядом Фур'є цієї функції. Таким чином, задача про знаходження умов, при виконанні яких ряди (1.2), (1.3) будуть рядами Фур'є, зводиться до дослідження інтегровності сум тригонометричних рядів (1.2), (1.3).

Наведемо огляд відомих результатів, які стосуються інтегровності одновимірних тригонометричних рядів (1.2) і (1.3).

Перша робота, в якій знайдені умови на коефіцієнти тригонометричного ряду, при виконанні яких даний ряд збігається скрізь, за виключенням, можливо, однієї точки, до інтегровної функції, належить В. Юнгу [5].

Він довів, що:

1) у випадку, коли  $\{a_k\} \in Y \cap C_0$ , ряд (1.2) збігається до деякої невід'ємної інтегровної функції  $c(x)$  скрізь, за виключенням, можливо, точки  $x=0$ , і є рядом Фур'є своєї суми;

2) для ряду з синусів (1.3), коефіцієнти якого монотонно прямують до нуля, умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < \infty \quad (1.6)$$

є необхідною і достатньою для інтегровності ряду (1.3).

Відзначимо, що для ряду з косинусів (1.2), коефіцієнти якого монотонно прямують до нуля, умова (1.6) є достатньою, але не є необхідною для інтегровності ряду [2, гл. X, § 2]. Отже, з того, що ряд (1.3) з  $a_k \downarrow 0$  є рядом Фур'є впливає, що і ряд (1.2) теж є рядом Фур'є.

С. Сідон [6] показав, що ряд з косинусів (1.2) буде рядом Фур'є інтегровної функції, якщо

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| \log(k+2) < \infty. \quad (1.7)$$

Л. Тонеллі [7] довів, що умова (1.7) є достатньою для інтегровності суми ряду з синусів (1.3). Результат Л. Тонеллі узагальнює твердження В. Юнга [5] для ряду з синусів, оскільки для монотонно спадних послідовностей умови (1.6) і (1.7) еквівалентні.

Має місце включення  $Y \cap C_0 \subset K \cap C_0$  [2, с. 20].

А.М. Колмогоров [8] узагальнив результат В. Юнга [5] для ряду з косинусів, замінивши умову випуклості послідовності  $\{a_k\}$  умовою квазівипуклості, тобто якщо  $\{a_k\} \in K \cap C_0$ , то ряд (1.2) рядом Фур'є деякої функції  $s \in L_1$ , причому справедлива нерівність

$$\int_0^{2\pi} |c(x)| dx \leq \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 a_k|.$$

Набагато пізніше С.О. Теляковський [9] одержав твердження для ряду з синусів (1.3), коефіцієнти якого утворюють квазівипуклу нуль-послідовність: нехай  $\{a_k\} \in K \cap C_0$ , тоді для того, щоб ряд (1.3) був рядом Фур'є деякої функції  $s \in L_1$ , необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < \infty. \quad (1.8)$$

Якщо ряд (1.8) збігається, то справедлива оцінка

$$\left| \int_0^{2\pi} |s(x)| dx - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} \right| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 a_k|.$$

В [9] доведено, що умову (1.8) неможна замінити умовою (1.6).

Результат А.М. Колмогорова [8] узагальнили Ч.Н. Мур [10,11] і Л. Чезарі [12]. Теорема, доведена Ч.Н. Муром і Л. Чезарі, стверджує, що ряд (1.2) буде рядом Фур'є інтегровної функції, якщо  $\{a_k\} \in C_0$  і для деякого  $r > 0$ , збігається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^r |\Delta^{k+1} a_k| < \infty, \quad (1.9)$$

де

$$\Delta^r a_k = \sum_l^{\infty} \binom{l-r-1}{l} a_{k+l},$$

а

$$\binom{l-r-1}{l} = \frac{(1-(r-1))(2-(r-1)) \dots (l-(r-1))}{l!}.$$

Множину послідовностей, які задовольняють умову (1.9), будемо позначати через  $M$ . Можна показати, що у випадку, коли послідовність коефіцієнтів  $\{a_k\} \in M \cap C_0$  при деякому  $r > 0$ , то для  $0 < l \leq r$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^l |\Delta^{l+1} a_k| < \infty.$$

Чим менше параметр  $r$  в означенні класу  $M$ , тим ширший клас послідовностей охоплює сформульована теорема. При  $r = 1$  з твердження Ч. Мура і Л. Чезарі випливає теорема А.М. Колмогорова [8].

Р. Боас [13] (наслідок з теореми 6) довів, що ряд (1.2) є рядом Фур'є сумовної функції, якщо коефіцієнти ряду (1.2) належать класу  $BV \cap C_0$  і

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{|\Delta a_{n-k} - \Delta a_{n+k}|}{k} < \infty. \quad (1.10)$$

Результат Р. Боаса узагальнює всі згадані вище твердження, які стосуються інтегровності рядів з косинусів [15].

Якщо коефіцієнти ряду з косинусів (1.2) можна представити у вигляді  $a_k = a_k \beta_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , де послідовності  $\{a_k\}$  і  $\{\beta_k\}$  задовольняють умови:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| &< \infty, \quad \forall k \geq 0, \\ |\beta_k| &\leq C < \infty, \quad \forall k \geq 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 \beta_k| &< \infty, \\ \sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k \Delta a_k| \log(k+2) &< \infty, \end{aligned}$$

то ряд (1.2) є рядом Фур'є [14]. Зауважимо, що при  $\beta_k = 1$  з теореми С.В. Станоевича випливає теорема С. Сідона [6], а при  $a_k = 1$  – теорема А.М. Колмогорова [8]. Результат С.В. Станоевича [14] також є наслідком з зазначеної вище теореми Р. Боаса [13].

Використовуючи метод, запропонований Р. Боасом, С.О. Теляковський послабив умову (1.10).

**Теорема 1.1.2** (С.О. Теляковський [15]). Нехай послідовність коефіцієнтів  $a = \{a_k\}$  ряду (1.2) належить множині  $BV \cap C_0$  і

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{\Delta a_{k-l} - \Delta a_{k+l}}{l} \right| < \infty. \quad (1.11)$$

Тоді ряд (1.2) є рядом Фур'є функції  $c \in L_1$  і справедлива оцінка

$$\int_0^{\pi} |c(x)| dx \leq CT(a),$$

де

$$T(a) := \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{\Delta a_{k-l} - \Delta a_{k+l}}{l} \right|.$$

**Теорема 1.1.3** (С.О. Теляковський [15]). Нехай послідовність коефіцієнтів  $a = \{a_k\}$  ряду з косинусів (1.3) належить множині  $BV \cap C_0$  і задовольняє умову (1.11). Тоді ряд (1.3) є рядом Фур'є функції  $s \in L_1$  тоді і тільки тоді, коли має місце (1.8). Якщо ряд (1.8) збігається, то справедлива оцінка

$$\int_0^{\pi} |s(x)| dx \leq C \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} + T(a) \right).$$

Умови (1.5) і (1.11)

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| < \infty, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{\Delta a_{k-l} - \Delta a_{k+l}}{l} \right| < \infty.$$

Називають умовами Боаса-Теляковського інтегровності одновимірних тригонометричних рядів (1.2), (1.3). Множини послідовностей, для яких  $T(a) < \infty$ , будемо позначати через  $B - T$ .

Таким чином, С.О. Теляковський одержав досить загальні умови на коефіцієнти рядів (1.2) і (1.3), при виконанні яких ряди (1.2) і (1.3) будуть рядами Фур'є сумовних функцій. Теорема 1.1.2 узагальнює результат Р. Боаса для рядів з косинусів, а також всі попередні результати, які стосуються інтегровності рядів (1.2). Всі твердження про умови інтегровності рядів з синусів є наслідками теореми 1.1.3 [15].

Підсумовуючи, можна сказати, що умови інтегровності рядів (1.2), (1.3) послаблювались, однак ставали більш громіздкими. В застосуваннях, як правило, потрібні умови на коефіцієнти зручні для перевірки. Тому після роботи С.О. Теляковського [15] з'явилися роботи з менш загальними умовами на коефіцієнти, але разом з тим більш простими.

Т. Кано [16] для доведення теорем про інтегровність представив ряд з синусів як почленно продиференційований ряд з косинусів і довів, що для ряду (1.3) з коефіцієнтами  $\{a_k\} \in C_0$ , для яких справедлива нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left| \Delta^2 \left( \frac{a_k}{k} \right) \right| < \infty, \quad (1.12)$$

Ряд (1.3) є рядом Фур'є сумовної функції. Такий прийом спрощує доведення достатньої частини теореми С.О. Теляковського [9] про інтегровність рядів з синусів, коефіцієнти яких утворюють квазівиуклу нуль-послідовність. Т. Кано також показав, що для квазівиуклих послідовностей умови (1.8) і (1.12) еквівалентні.

С. Сідон [17] встановив, що ряд (1.2) буде рядом Фур'є інтегрової функції, якщо його коефіцієнти  $a_k$  можна представити у вигляді

$$a_k = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{p_l}{l} \sum_{i=k}^l a_i, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.13)$$

де

$$|a_i| < 1, \quad \forall i \geq 1,$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} |p_l| < \infty.$$

Умови (1.13) називають умовами Сідона.

Аналізуючи роботу С. Сідона [17], С.О. Теляковський [18] знайшов умови на послідовність  $\{a_k\}$  еквівалентні умовам Сідона (1.13).

**Теорема 1.1.4** (С.О. Теляковський [18]).

Нехай  $\{a_k\} \in C_0$  і існують такі числа  $A_k$ , що

$$A_k \downarrow 0, \quad |\Delta a_k| \leq A_k \quad \forall k \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty, \quad (1.14)$$

Тоді ряд (1.2) є рядом Фур'є функції  $c \in L_1$ , і справедлива оцінка

$$\int_0^{\pi} |c(x)| dx \leq C \sum_{k=0}^{\infty} A_k.$$

**Теорема 1.1.5** (С.О. Теляковський [18]).

Нехай  $\{a_k\} \in C_0$  і задовольняють (1.14), тоді для ряду (1.3) рівномірно відносно  $p = 1, 2, \dots$  справедлива оцінка

$$\int_{\frac{\pi}{p+1}}^{\pi} |s(x)| dx = \sum_{k=1}^p \frac{|a_k|}{k} + o\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Ряд (1.3) буде рядом Фур'є тоді і тільки тоді, коли збігається ряд (1.8).

Умови (1.14) називають умовами Сідона-Теляковського інтегровності тригонометричних рядів (1.2), (1.3). Множину послідовностей, які задовольняють (1.14), будемо позначати через  $S - T$ .

Умови Сідона-Теляковського (1.14) достатньо прості, і їх перевірка не складніше, ніж скажімо, перевірка квазівипуклості. Зокрема, послідовність  $\{A_k\}$  можна обрати таким чином

$$A_k := \max_{k \leq l} |\Delta a_l|.$$

Має місце співвідношення  $K \cap C_0 \subset S - T \cap C_0$ . Дійсно, для того щоб переконатися в справедливості включення, достатньо покласти

$$A_k := \sum_{l=k}^{\infty} |\Delta^2 a_l| \text{ [18].}$$

Більш того, легко показати, що  $M \cap C_0 \subset S - T \cap C_0$ ; для доведення достатньо покласти

$$A_k := C_r \sum_{l=k}^{\infty} l^{r-l} |\Delta^{r+l} a_l|,$$

де  $C_r$  — додатна константа, яка залежить від  $r$ .

В [19] С.О. Теляковський одержав просте доведення достатньої частини теореми 1.1.5 про інтегровність з синусів, коефіцієнти якого належать множині  $S - T \cap C_0$ , представивши ряд з синусів, як продиференційований ряд з косинусів, як Т. Кано в [16].

В [20] визначено клас  $S - T^*$  — клас послідовностей, які задовольняють умови типу Судона-Теляковського, тобто  $\{a_k\} \in S - T^*$ , якщо існують такі числа  $A_k$ , що

$$A_k \rightarrow 0, |\Delta a_k| \leq A_k \quad \forall k \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| < \infty, \quad (1.15)$$

У випадку, коли послідовність коефіцієнтів ряду (1.2) належить  $S - T^* \cap C_0$ , то ряд з косинусів є рядом Фур'є сумовної функції [20]. Очевидно, що  $(S - T) \cap C_0 \subset (S - T^*) \cap C_0$ .

Множина  $S - T$  була розширена Г.О. Фомінім [21] до множини  $F_p$ , яка визначається таким чином:  $\{a_k\} \in F_p, p > 1$ , якщо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} \sum_{l=k}^{\infty} |\Delta a_l|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (1.16)$$

Для будь-якого фіксованого числа  $p > 1$  умова (1.16) еквівалентна умові

$$\sum_{j=0}^{\infty} (2^j)^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} |\Delta a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1.17)$$

де

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad [21].$$

## РОЗДІЛ 2

### УМОВИ ІНТЕГРОВНОСТІ КОМПЛЕКСНОЗАЧНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ

#### 2.1. Умови інтегровності комплексних тригонометричних рядів

Знайдемо умови інтегровності тригонометричного ряду коефіцієнти якого є комплексними числами.

Будемо розглядати тригонометричні ряди виду

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad (2.1)$$

де

$$c_k = a_k - ib_k.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - ib_k)(\cos kt + i \sin kt) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + i \sum_{k=0}^{\infty} (-b_k \cos kt + a_k \sin kt) \end{aligned}$$

Дійсна частина ряду (2.1) є рядом виду (1.1), а уявна частина ряду (2.1) є рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-b_k \cos kt + a_k \sin kt),$$

який називають рядом спряженим до ряду (1.1).

Нехай послідовності  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  і  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$  є квазівишуклими, тобто виконується:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 a_k| < \infty,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 b_k| < \infty.$$

Крім того, нехай

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} < \infty.$$

Згідно результатів А.М. Колмогорова [8] і С.О. Теляковського ряд [9] ряд (1.1) буде рядом Фур'є деякої функції, яку позначимо  $f(t)$ .

Метою даної роботи є встановлення умов на коефіцієнти тригонометричного ряду (2.1) при виконанні яких даний ряд буде рядом Фур'є сумовної функції. Отриманий результат є аналогом результату А.М. Колмогорова [8].

### Теорема

Нехай послідовність  $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$  задовольняє такі умови

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 C_k| < \infty \tag{2.2}$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|C_k|}{k} < \infty. \tag{2.3}$$

Тоді ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{ikt}$$

є рядом Фур'є деякої функції:

$$(f(t) + i\tilde{f}(t)) \in L_1 := \left\{ g(e^{it}) : \int_0^{2\pi} |g(e^{it})| dt < \infty \right\}.$$

Доведення.

Нехай послідовність  $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$  задана, тоді

$$\Delta^2 C_k = C_k - 2C_{k+1} + C_{k+2} = a_k - ib_k - 2(a_{k+1} - ib_{k+1}) + (a_{k+2} - ib_{k+2}) = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} - ib_k + 2ib_{k+1} - ib_{k+2} = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} - i(b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2}) = \Delta^2 a_k - i\Delta^2 b_k.$$

Тоді справедливі співвідношення:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 C_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \sqrt{(\Delta^2 a_k)^2 + (\Delta^2 b_k)^2} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \sqrt{(|\Delta^2 a_k| + |\Delta^2 b_k|)^2} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) (|\Delta^2 a_k| + |\Delta^2 b_k|) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 b_k| \end{aligned} \quad (2.4)$$

Крім того мають місце нерівності:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 C_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \sqrt{(|\Delta^2 a_k| + |\Delta^2 b_k|)^2} \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 a_k| \end{aligned} \quad (2.5)'$$

Справедлива аналогічна нерівність:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 C_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \sqrt{(|\Delta^2 a_k| + |\Delta^2 b_k|)^2} \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 b_k| \end{aligned} \quad (2.6)'$$

Додаючи нерівності (2.5)' і (2.6)', одержимо

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 C_k| \geq \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 b_k|.$$

Тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)|\Delta^2 c_k| \geq \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)|\Delta^2 a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)|\Delta^2 b_k| \right). \quad (2.5)$$

З нерівностей (2.3) і (2.4) слідує, що ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)|\Delta^2 a_k| \text{ і } \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)|\Delta^2 b_k|$$

– збігаються тоді і тільки тоді, коли збігається ряд (2.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} \quad (2.6)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} \geq \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} \right) \quad (2.7)$$

А з нерівностей (2.6) і (2.7) витікає, що із збіжності ряду (2.3) слідує збіжність рядів

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} < \infty.$$

На основі результатів А. М. Колмагорова і С.О. Теляковського ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

є рядом Фур'є сумовної функції  $f(t)$ , бо із збіжності ряду (2.2) слідує збіжність рядів

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)|\Delta^2 a_k| < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)|\Delta^2 b_k| < \infty,$$

а із (2.3) слідує збіжність ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} < \infty.$$

Аналогічно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kt + a_k \sin kt)$$

є рядом Фур'є функції, спряженої до  $f(t)$ . Позначимо її  $\tilde{f}(t)$ .

Теорема доведена.

## 2.2. Наслідки

### Наслідок 1.

Якщо

$$\Delta^2 a_k \geq 0,$$

то з результату А.М. Колмогорова слідує результат В. Юнга [5].

*Доведення:*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \Delta^2 a_k &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+2} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k - 2 \sum_{\gamma=1}^{\infty} \gamma a_{\gamma} + \sum_{\gamma=1}^{\infty} \gamma a_{\gamma+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_{k+1} = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k + a_0 + a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_{k+1} = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k + a_0 + a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_{k+1} = \\ &= a_0 + a_1 - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) a_{k+1} = \\ &= a_0 + a_1 - a_1 - 2a_2 - 3a_3 - \dots + 2a_2 + 3a_3 \dots = a_0 \end{aligned}$$

Отримали скінченну величину  $a_0$ , тобто

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \Delta^2 a_k < \infty.$$

### Наслідок 2.

Аналогічно, якщо

$$\Delta^2 b_k \geq 0$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} < \infty,$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

є рядом Фур'є сумовної функції.

Цей наслідок слідує з результату С.О. Теляковського [9].

### **Наслідок 3.**

Якщо

$$\Delta^2 a_k \geq 0,$$

$$\Delta^2 b_k \geq 0$$

та

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k| + |b_k|}{k} < \infty,$$

то тригонометричний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad (2.1)$$

є рядом Фур'є сумовної функції.

*Доведення:*

Якщо використати представлення ряду (2.1) у вигляді тригонометричних рядів, що є дійсною і уявною частинами цього ряду (дивись першу формулу на сторінці 24), то на основі наслідків 1 і 2 будемо мати, що ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

є рядом Фур'є, а також і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx)$$

є рядом Фур'є сумовної функції. Що й доводить наслідок 3.

### РОЗДІЛ 3

#### ПРИКЛАДИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ, ЯКІ Є РЯДАМИ ФУР'Є

**Приклад 1.** Тригонометричний ряд

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \cos kx \quad (3.1)$$

згідно результату В. Юнга [5] є рядом Фур'є сумовної функції, бо

$$\begin{aligned} \Delta^2 \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{k}} - 2 \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{\sqrt{k+2}} = \\ &= \frac{\sqrt{k+1}\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k(k+2)} + \sqrt{k}\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}} = \\ &= \frac{\sqrt{k+1}(\sqrt{k} + \sqrt{k+2}) - 2\sqrt{k}\sqrt{k+2}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}} \end{aligned}$$

Оскільки

$$(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})^2 > 0,$$

то

$$k+2+k \geq 2\sqrt{k+2}\sqrt{k}$$

і

$$k+1 \geq \sqrt{k+2}\sqrt{k} \Rightarrow \sqrt{k+1} \geq \sqrt[4]{k+2}\sqrt[4]{k}$$

Використовуючи останню нерівність, будемо мати

$$\begin{aligned} \Delta^2 \frac{1}{(\sqrt{k})^2} &\geq \\ &\geq \frac{\sqrt[4]{k+2}\sqrt[4]{k}(\sqrt{k+2} + \sqrt{k}) - 2\sqrt{k}\sqrt{k+2}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}} = \\ &= \frac{(\sqrt[4]{k+2} - \sqrt[4]{k})^2}{\sqrt[4]{k}\sqrt[4]{k+2}\sqrt{k+1}} > 0. \end{aligned}$$

Слід відмітити, що ряд (3.1) не є рядом Фур'є функції з  $L_2$ , бо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{k})^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

## Приклад 2.

Візьмемо послідовність  $\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}, n = 2, 3, \dots$

Покажемо, що ця послідовність випукла.

Дійсно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\ln n} - \frac{2}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} = \\ &= \frac{\ln(n+2)\ln(n+1) - 2\ln n \ln(n+2) + \ln n \ln(n+1)}{\ln n \ln(n+1) \ln(n+2)}. \end{aligned}$$

Потрібно довести, що

$$\ln(n+2)\ln(n+1) - 2\ln n \ln(n+2) + \ln n \ln(n+1) \geq 0. \quad (3.2)$$

Запишемо ліву частину останньої нерівності таким чином

$$\begin{aligned} & \ln(n+2)\ln(n+1) - \ln n \ln(n+2) + \\ & + \ln n \ln(n+1) - \ln n \ln(n+2) = \\ &= \ln(n+2)(\ln(n+1) - \ln n) - \\ & - \ln n (\ln(n+2) - \ln(n+1)) = \\ &= \ln(n+2) \ln \frac{n+1}{n} - \ln n \ln \frac{n+2}{n+1} = \\ &= \ln(n+2) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n \ln \left(1 + \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\ln(n+2) > \ln n$$

і

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \ln \left(1 + \frac{1}{n+1}\right),$$

то

$$\ln(n+2) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n \ln \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0.$$

Нерівність (3.2) доведена.

Згідно теореми В. Юнга [5] тригонометричний ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\ln k}$$

є рядом Фур'є сумовної функції.

Перевіримо чи є рядом Фур'є ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}. \quad (3.2)$$

Знову використаємо теорему В. Юнга [5].

Очевидно, що послідовність  $\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$  прямує до нуля і є монотонною. Потрібно перевірити, чи збігається ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k}{k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}.$$

Цей ряд є знакододатним. Використаємо ознаку Маклорена-Коші. Очевидно, що

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \infty.$$

Тому ряд (3.2) не є рядом Фур'є сумовної функції.

### Приклад 3.

Нехай задано послідовність

$$\{a_k\} = \left\{ \frac{k \ln k - 1}{k^2} \right\}, k = 2, 3, \dots$$

Вияснимо, чи є тригонометричний ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \ln k - 1}{k^2} \cos kx \quad (3.3)$$

Рядом Фур'є сумовної функції.

Задана послідовність не є випуклою послідовністю, бо є різницею двох випуклих послідовностей

$$\frac{k \ln k - 1}{k^2} = \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{k^2}$$

Можна показати, що ця послідовність є квазівипуклою, тобто

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 a_k| < \infty.$$

Однак ми скористуємось однією відомою теоремою (див. А. Зигмунд [3], сторінка 131): Для того, щоб послідовність  $\{a_k\}$  була квазівиукла, необхідно і достатньо, щоб вона була різницею двох виуклих послідовностей, які прямують до нуля. На основі цієї теореми робимо висновок, що ряд (3.3) є рядом Фур'є сумовної функції.

Однак ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \ln k - 1}{k^2} \sin kx$$

не є рядом Фур'є, бо ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$$

—розбіжний.

## ВИСНОВОК

- 1) Наведені означення тригонометричного ряду та ряду Фур'є.  
Розглянуто теорему Рісса-Фішера.
- 2) Також приведенні класичні теореми, що забезпечують збіжність тригонометричних рядів і умови інтегровності дійсних тригонометричних рядів.
- 3) Доведено теорему та деякі наслідки про умови на коефіцієнти комплексних тригонометричних рядів, при виконанні яких даний тригонометричний ряд буде рядом Фур'є.
- 4) Наведено приклади тригонометричних рядів, які будуть, або не будуть рядами Фур'є.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Патонсон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.  
—481с.
2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды.-М.: Физматгиз, 1961.-936с.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т. Т.1.-М.: Мир, 1965.-615с.
4. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении: В 2-хт. Т.1.-М.: Мир, 1985.-264с.
5. Young W.H. On the Fourier series of bounded functions // Proc. London Math. Soc.-1913.-12, №1.-P.41-70.
6. Sidon S. Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen // Mathematische Zeitschrift.-1921.-10.-P.121-127.
7. Tonelli L. Serie trigonometriche.-1928.
8. Колмогоров А.Н. Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la serie de Fourier-Lebesgue // Bull.Acad.pol.sci.(A).-1923.-P.83-86.
9. Теляковский С. А. Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб.-1964.-63, №3.-С.426-444.
10. Moore C. N. On criteria for Fourier constants of L integrable functions // Proc. National Academy of Sciences USA.-1933.-19, №9.-P.846-848.
11. Moore C. N. On the use of Cesaro means in determining criteria for Fourier constants // Bull. Amer. Math. Soc.-1933.-39, №12.-P.907-913.
12. Cesari L. Sulle condizioni sufficienti per le successioni di Fourier // Annali della Scuola Normale Sup. Di Pisa (2).-1934.-3.-P.105-134.
13. Boas R.P. Absolute convergence and integrability of trigonometric series // Journal of rational mechanics and analysis.-1956.-5, №4.-P.621-632.
14. Станојевић Ч.В. О интегральности неких тригонометрических рядов // Сборник рядов Српска Акад. наука, к. 55.-Математички институт к. 6.-1957.-С.53-57.

15. Теляковский С.А. Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН. СССР, серия матем.-1964.-28.-С.1209-1236.
16. Kano T. Coefficients of some trigonometric series // J. Fac. Sci. Shinshu Univ.-1968.-3, №2.-P.153-162.
17. Sidon S. Hinreichende Bedingungen für den Fourier-Charakter einer trigonometrischen Reihe // J. London Math. Soc.-1939.-14, №2.-P.158-160.
18. Теляковский С.А. Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов // Мат. заметки.-1973.-14, №3.-С.317-328.
19. Теляковский С.А. Об интегрируемости рядов по синусам // Тр. Мат. ин-та АН СССР.-1984.-163.-С.229-233.
20. Garrett J.W., Rees C.S., Stanojevic C.V.  $L_1$ -convergence of Fourier series with coefficients of bounded variation // Proc. Amer Math. Soc.-1980.-80.-P.423-430.
21. Фомин Г.А. Об одном классе тригонометрических рядов // Мат.заметки.-1978.-23, №2.-С.213-222.