**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК __________

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
________ Клесов О.І.
«___»________20___ р.

Магістерська дисертація

**на здобуття ступеня магістра
зі спеціальності 111 «Математика»
на тему: «Застосування стохастичних диференціальних рівнянь
у фінансовій математиці»**

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-81мп
Колеснік Вікторія Олегівна ________

Керівник:
к.ф.-м.н., доц. Буценко Юрій Павлович ________

Рецензент:
к.ф.-м.н., доц. Каніовська Ірина Юріївна ________

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних посилань.

Студентка ______________

Київ - 2019 року

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти: другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою.
Спеціальність: 111 «Математика».

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
________ Клесов О.І.
«___»________20___ р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Колеснік Вікторії Олегівні

1. Тема дисертації: «Застосування стохастичних диференціальних рівнянь у фінансовій математиці»,
науковий керівник дисертації: к.ф.-м.н., доц. Буценко Юрій Павлович
затверджені наказом по університету від «7» листопада 2019 р. № 3850с

2. Термін подання студентом дисертації: 10.12.2019

3. Об'єкт дослідження: Дифузійні стохастичні процеси в економічних системах

4. Предмет дослідження: Оцінка накопичувальних характеристик дифузійних процесів та їх моделювання

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:
1) Ознайомлення з літературою зі стохастичних диференціальних рівнянь.
2) Освоєння практичних навичок розв'язання стохастичних диференціальних рівнянь та знаходження характеристик отриманих процесів
3) Отримання статистичних оцінок для параметрів переносу та волатильності
4) Розробка програмного забезпечення для моделювання стохастичних процесів та обрахування накопичувальних характеристик

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: приклади роботи комп'ютерної програми, що моделює розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь, а також графічні зображення статистичних параметрів процесів

7. Подано тези на Восьму міжнародну науково-практичну конференцію «Математика в сучасному технічному університеті», що відбудеться 26-27 грудня у м. Києві

8. Консультанти розділів дисертації (відсутні)

9. Дата видачі завдання: 02.09.2019

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Ознайомлення з літературою	02.09.2019 – 03.10.2019	
2	Отримання розв'язків деяких стохастичних диференціальних рівнянь та формул для математичного сподівання та дисперсії	04.10.2019 – 11.10.2019	
3	Отримання статистичних оцінок для параметрів моделі логарифмічного блукання, перевірка незміщенності та оцінка дисперсії	12.10.2019 – 7.11.2019	
4	Моделювання стохастичних процесів та перевірка попередніх теоретичних розрахунків	8.11.2019 – 18.11.2019	
5	Оформлення роботи	19.11.2019 – 5.12.2019	

Студент Колеснік В.О.

Науковий керівник дисертації Буценко Ю.П.

Реферат

Магістерська дисертація: 37 сторінок, 6 першоджерел, 10 ілюстрацій, 15 слайдів для проектору.

Дана робота складається з вступу , чотирьох основних розділів, висновків та додатку лістингу програмного коду.

Метою роботи було дослідити актуальні альтернативні методи до аналізу даних у фінансовій математиці та розробити на основі теорії стохастичної фінансової математики практичні програмні інструменти.

Об'єктом для дослідження було вибрано клас дифузійних процесів, оскільки їх поведінку можна теоретично визначати моментами перших порядків, що дає змогу упоратись із подальшими поставленими задачами оцінки параметрів дифузійних моделей за наявними даними.

Предметом дослідження стали оцінки параметрів моделей блукання з переносом та логарифмічного і зв'язок між ними. Також нами були засвоєні практичні навички моделювання процесів, програмування та візуалізації даних.

В першому розділі ми розглянемо основні теоретичні поняття теорії стохастичних диференціальних рівнянь, економічної теорії, наведемо теореми, на яких будуть базуватися подальші доведення та результати роботи. Основними першоджерелами для розділу були праці [1]. [2] А.Н. Ширяєва та Б. Оксендаля з теорії фінансової математики та класичної теорії стохастичних рівнянь відповідно.

У другому розділі буде розглянуто важливі типи стохастичних диференціальних рівнянь, що знадобляться для аналізу моделей реального світу. Розглянуто задачу оцінювання параметрів та зв'язок між логарифмічним блуканням та блуканням з перенесенням, точніше зв'язок між оцінками їх параметрів. Сформульовані та доведені відповідні теореми. У цьому розділі ми спиралися на працю [5] Ліпцера та Ширяєва зі статистики випадкових процесів.

Третій розділ присвячено практичній реалізації теоретичних знань та моделюванню розв'язків стохастичних рівнянь. Буде розглянуто моделювання рівнянь із другого розділу та проаналізована поведінка їх розв'язків при різних співвідношеннях параметрів. Проведено обґрунтування методу моделювання. На змодельованих процесах перевірені оцінки для параметрів моделей та визначено межі їх застосування. Враховуючи скінченність вибірки та відсутність загальноприйнятої теорії щодо оцінювання параметрів важливо було з'ясувати межі застосування. Тут нам допомогла робота [3] С.С. Степанова, який дуже гарно пов'язав теорію та практичне застосування знань на практиці.

У попередніх розділах була проведена підготовка до реалізації нових ідей для застосування на практиці. Були проаналізовані проблеми, що виникають при обробці реальних даних. Розглянуто приклад індексу біржі та проведено аналіз історії еволюції показника. Запропоновано метод формування бази даних режимів процесу, у яких можна наближувати та моделювати процес блуканнями з деякими параметрами. Відповідно було запропоновано напрям подальших досліджень бази даних режимів процесу та виявлення закономірностей їх чергування.

Результати роботи також будуть представлені на Восьмій міжнародній науково-практичній конференції «Математика в сучасному технічному університеті», що пройде у м. Києві 26-27 грудня. Також буде можливість представити результати подальшого аналізу режимів процесу, які не увійшли до основної частини, оскільки ще не мають достатніх обґрунтувань.

Abstract

Master's Thesis: 37 pages, 6 primary sources, 10 illustrations, 15 slides for the projector. This paper consists of an introduction, four main sections, conclusions and code listing application. The purpose of this work was to investigate current alternative methods for the analysis of data in financial mathematics and to develop on the basis of the theory of stochastic financial mathematics practical software tools.

The object of the study was the class of diffusion processes, since their behavior can be theoretically determined by the moments of the first order it gives be able to cope with further tasks of estimating the diffusion model parameters based on available data.

The subject of the study has been the estimation of the parameters of the walk-through and logarithmic models and the relationships between them. We have also learned practical ones skills in process modeling, programming and data visualization.

In the first section we look at the basic theoretical concepts of stochastic theory- of the differential differential equations, the economic theory, we present the theorems on which further proofs and results will be based. The main first- sources for the section were works [1]. [2] A.N. Shiryaev and B. Oxendal from theory financial mathematics and classical theory of stochastic equations, respectively.

The second section discusses the important types of stochastic differential equations needed to analyze real-world models. Considered the task of parameter estimation and the relation between logarithmic walks and walks with the transfer, more precisely the relation between the estimates of their parameters. The corresponding theorems are formulated and proved. In this section we have relied on work [5] Lipzer and Shiryaev on statistics of random processes.

The third section deals with the practical implementation of theoretical knowledge and the modeling of solutions of stochastic equations. Simulation of equations from of the second section and the behavior of their solutions at different parameter ratios is analyzed. The justification of the modeling method is carried out. The simulated processes tested the parameters for the model parameters and determined the limits of their application. Given the finality of the sample and the lack of conventional it was important to understand the limits of application theory. Here we were helped by [3] S.S. Stepanov, who very well connected the theory and the practical application of knowledge in practice.

In the previous sections, the preparation for the implementation of new ideas was carried out for practical application. Problems encountered with real data processing. An example of stock exchange index is considered and analysis is made history of indicator evolution. A method of forming a mode database is proposed a process where you can approximate and model the process by walking with some parameters. Accordingly, the direction of further research was suggested a database of process modes and revealing patterns of alternation.

The results of the work will also be presented at the Eighth International Scientific the practical conference "Mathematics in the modern technical university which will

be held in Kyiv on December 26-27. It will also be possible to present the results further analysis of non-mainstream process modes as they do not yet have sufficient justification.

Зміст

Вступ

Сучасна фінансова математика активно використовує інструментарій теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Поява інтегралу Іто, як нового типу інтеграла дозволила побудувати плідну платформу для вивчення стохастичних процесів у фізиці, біології, соціології та , звичайно, фінансах.

У нашій роботі буде розглядатися практичне застосування вже перевірених часом класичних моделей стохастичних процесів, що зарекомендували себе у фінансах. Зокрема найбільше уваги буде приділено моделі логарифмічного блукання, що стала основою для виведення формули Блека та Шоулза справедливої ціни опціонів. Також будуть обговорені проблеми, що виникають при реальному аналізі даних. Нестаціонарність ринків, оцінка їх волатильності та інших параметрів є не менш важливими задачами, ніж побудова моделі, що описує їх еволюцію.

У теоретичних дослідженнях ми будемо спиратися на роботи з фінансової математики Ширяєва А.Н., теорії стохастичних диференціальних рівнянь Б. Оксендаля, праці Ліпцера та Ширяєва для знаходження статистичних оцінок процесів та на інших авторів і їх праці.

Більш конкретно, ми будемо поетапно підводити теоретичну базу до реалізації моделей на комп'ютері та подальшій оцінці параметрів цих процесів. Ми дослідимо деякі оцінки, та знайдемо границі їх застосування на практиці. Нарешті, ми прийдемо до спроб аналізу реальних даних та запропонуємо метод їх обробки, спираючись на поняття накопиченої волатильності. Нашою подальшою ціллю буде навчитися найбільш ефективно оцінювати значення параметрів та формувати бази даних з еволюції процесів, які можливо буде використовувати для їх подальшого моделювання та прогнозів.

1 Теоретична частина

1.1 Вінерівський процес

Основоположним поняттям для побудови теорії стохастичних диференціальних рівнянь є броунівський рух, або вінерівський процес. В першу чергу це пов'язано з тим, що за допомогою приростів цього процесу успішно побудовано новий тип інтегралів. Окрім інтегралів Іто, які будуть нами використовуватись, існують аналоги, наприклад інтеграл Стратоновича. Докладніше теорію можна розглянути в підручнику Б. Оксендаля.

Означення 1. Процес $w_t, t \geq 0$ називається вінерівським, якщо:
1) w_t є гаусовим, тобто
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1, t_2, ..., t_n : (w_{t_1}, w_{t_2}, ..., w_{t_n})^T$ — гаусовий вектор.
2) $\mathbb{E}w_t = 0,\ t \geq 0$
3) $cov(w_t, w_s) = min(t, s),\ t, s \geq 0$

Основні властивості:
1) $w_t \sim N(0, t)$
2) w_t має неперервну за t модифікацію, тобто існує процес $\tilde{w}_t$ – вінерівський і неперервний за часом такий, що:

$$P(w_t = \tilde{w}_t) = 1$$

3) Незалежність приростів. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$ незалежними у сукупності є випадкові величини

$$w_{t_1}, w_{t_2} - w_{t_1}, \ldots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}}$$

4) Однорідність приростів .

$$\forall s, t \geq 0 : w_{t+s} - w_t \sim w_s$$

5) Вінерівський процес недиференційовний м.н., тобто

$$\forall t \geq 0\ P(\exists w_t^{'}) = 0$$

1.2 Інтеграл Іто

Нехай F_t потік σ-алгебр:
$\forall\ t_1 \le t_2 : F_{t_1} \subset F_{t_2}$

Означення 2. Вінерівський процес $w_t,\ t \ge 0$ називається узгодженим з потоком F_t, якщо:
1) $\forall t \ge 0 : w_t — F_t$ - вимірна в.в.
2) $\forall t \ge 0, s \ge 0 : w_{t+s} - w_t$ незалежні від F_t

Спочатку інтеграл Іто будується для простих процесів вигляду:

$$\xi_t = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k I_{t \in (t_k, t_{k+1}]},$$

де випадкові величини α_k обмежені та вимірні відносно F_{t_k}, $0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n = T$. Клас таких процесів будемо позначати $\mathcal{L}_0$.

Означення 3. Нехай $\xi_t \in \mathcal{L}_0, w_t$–узгоджений вінерівський процес.
Інтегралом Іто від простого процесу будемо називати випадкову величину

$$\int_0^T \xi_t dw_t := \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (w_{t_{k+1}} - w_{t_k})$$

Основні властивості:
Якщо $\xi_t, \eta_t \in \mathcal{L}_0; a, b \in \mathbb{R}$, то

$$1) \int_0^T (a\xi_t + b\eta_t) dw_t = a \int_0^T \xi_t dw_t + b \int_0^T \eta_t dw_t$$

$$2) \mathbb{E} \int_0^T \xi_t dw_t = 0$$

$$3) \mathbb{E} \left(\int_0^T \xi_t dw_t \right)^2 = \mathbb{E} \int_0^T \xi_t^2 dw_t$$

$$4) \mathbb{E} \left(\int_0^T \xi_t dw_t \int_0^T \eta_t dw_t \right) = \mathbb{E} \int_0^T \xi_t \eta_t dw_t = \int_0^T \mathbb{E}(\xi_t \eta_t) dw_t$$

Остання властивість говорить про те, що Інтеграл Іто зберігає норму. Якщо деякий процес можна наблизити простими процесами, то можна зробити граничний перехід у просторі L_2. Таким чином інтеграл Іто продовжується на замикання $\mathcal{L}_0$. Для процесів із замикання будемо використовувати ті ж самі позначення інтегралу. Властивості 1-4 звичайно зберігаються.

1.3 Стохастичні диференціальні рівняння

Означення 4. Процес $\xi_t = \xi(\omega, t)$ називається прогресивно-вимірним, якщо $\forall t \in [0, T] : \xi(\circ, \circ)$ є $F_t \times \mathcal{B}([0, t])$-вимірним відображенням

Означення 5. Стохастичним диференціалом для прогресивно-вимірного процесу ξ_t, $t \in [0, T]$ будемо називати $d\xi_t = a(t)dt + b(t)dw_t$, якщо:
1) a, b – прогресивно-вимірні
2)

$$\int_0^T |a(t)|dt < \infty, \int_0^T b^2(t)dt < \infty$$

м.н.
3)

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dw_s$$

м.н.

Наступна теорема,вперше доведена К. Іто є центральною у стохастичному диференціальному численні. Її доведення можна знайти у працях [2][3][6]

Теорема 1. *Формула Іто*
Нехай $f = f(t, x) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$
Також припустимо, що

$$d\xi_t = a(t)dt + b(t)dw_t$$

Тоді

$$df(t, \xi_t) = f_t^{'}(t, \xi_t)dt + f_x^{'}(t, \xi_t)a(t)dt + f_x^{'}(t, \xi_t)b(t)dw_t + \frac{1}{2}f_{xx}^{''}(t, \xi_t)b^2(t)dt$$

Формула Іто дозволяє зводити одні рівняння до інших, розв'язки яких нам відомі. Одночасно вона є дуже цікавим фактом стохастичного диференційного числення, оскільки ми бачимо, як коефіцієнт при стохастичному члені рівняння проникає у детермінований зі своїм квадратом.

Означення 6. Випадковий процес $\xi_t, t \in [0,T]$ є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$d\xi_t = a(t,\xi_t)dt + b(t,\xi_t)dw_t, t \in [0,T]$$

з початковою умовою $\xi(0) = \xi_0$, якщо
1)$\forall t \in [0,T] : \xi_t - F_t$-вимірний
2)ξ_t – неперервний по t м.н.
3)

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t a(s,\xi_s)ds + \int_0^t b(s,\xi_s)dw_s \ \ \forall t \in [0,T]$$

м.н.

Наведемо теорему інування і єдиності розв'язку стохастичного диференціального рівняння. Її можна знайти, наприклад, у роботі [2].

Теорема 2. *Припустимо, що*
1) $\mathbb{E}(\xi_0)^2 < \infty$
2)a, b *задовольняють умову Ліпшиця по* x
3)a, b *задовольняють умову лінійного росту по* x
Тоді існує розв'язок СДР такий, що

$$1) \ \ \mathbb{E}\max_{t\in[0,T]} \xi_t^2 < \infty$$

2) Для будь-якого розв'язку $\eta_t, t \in [0,T]$ *такого, що* $\mathbb{E}\max_{t\in[0,T]} \eta_t^2 < \infty$ *виконується:*

$$P(\xi_t = \eta_t, t \in [0,T]) = 1$$

1.4 Відомості з економічної теорії

Для довідки означимо основні типи фінансових ринків та контрактів, які досліджує фінансова математична теорія.

Умовно фінансові ринки можна поділити на 4 основні групи:

Ринок акцій, або фондовий ринок являє собою біржову або позабіржову торгівлю корпоративними правами. Акціонерні спільноти за допомогою проведення додаткових емісій можуть залучати кошти для розвитку свого бізнесу. Молоді компанії отримують стартовий капітал продавши частину статутного фонду (IPO). Акціонери компанії розраховують на те, що вартість їх акцій з часом підвищиться, а частина прибутку буде виплачуватися у якості дивідендів.

Ринок облігацій дозволяє компанії та державі отримувати грошові засоби у інвесторів під фіксований відсоток. Процентна ставка, яка виникає на ринку облігацій, визначає вартість грошей, які направляються на розширення бізнесу компанії. Випуск облігацій – це дорогший спосіб залучених коштів, ніж емісія акцій, але при цьому не відбувається розмивання капіталу вже наявних інвесторів. Покупець облігації отримує фіксований дохід, за виключенням випадків банкрутства компанії або об'явлення дефолту державою.

Валютний ринок являє собою спілку банків та інших фінансових організацій, які виконують операції по конвертації однієї валюти в іншу. Валютний ринок працює цілодобово. Три основні групи учасників ринку - це імпортери, які купують іноземну валюту, та експортери, які її продають. Окрім них в сучасному світі вагому роль грають фінансові компанії, які змінюють зміст своїх портфелів, приходячи з ринку однієї країни на ринок іншої. Їх вплив на курс валют дуже великий.

Товарні ринки – це організовані майданчики по торгівлі стандартизованими видами товарів. До яких відносяться нафта, золото, срібло, зерно, кава і так далі. Кожний вид товару має чіткий стандарт якості, за яким слідкує біржа. Саме стандартизація перетворює товарний контракт у фінансовий інструмент з якостями, які присвоюється усім іншим фінансовим активам.

На фінансових ринках торгують як "спотовими"фінансовими інструментами (акції, валюта та інші), так і похідними від них деривативами (ф'ючерсами та опціонами).

Ф'ючерс – це контракт (зобов'язання) на покупку або продаж активу у визначений час у майбутньому. Якщо акція сьогодні коштує 100$, то два контрагенти можуть домовитися про те, що один купить, а інший продасть цю акцію за ціною, наприклад, 110 $(ф'ючерсна ціна) з постачанням через один рік. Інколи реальна передача акції може не відбутися. Тоді ф'ючерсний контракт стає різновидом парі, при якому одна сторона виплачує іншій суму, рівну різниці між ф'ючерсною та фактичною ціною акції на момент виконання контракту. Наприклад, через рік ціна акції буде рівною 90$. В цьому випадку покупець повинен буде виплатити продавцю чисту різницю в 20$=110$-90$.

Опціон – це контракт, який дає його власникові право купити (опціон call) або продати (опціон put) деякий актив по договірній ціні виконання x_s (strike price) у визначений час у майбутньому. На відміну від ф'ючерса, опціон – це право, а не зобов'язання, тому покупець може від нього відмовитися. Той, хто продав (виписав) опціон, бере на себе зобов'язання виконати його на вимогу власника опціону. У випадку європейського опціону дата реалізації права фіксована. Для американського – власник може скористатися своїм правом у будь-який момент до дати закінчення. Обидва види опціонів можуть торгуватися у довільній країні.

2 Моделі та їх параметри

У цьому розділі буде розглянуто основні типи рівнянь, які будуть необхідні у подальшому дослідженні, та будуть проаналізовані методи оцінки коефіцієнтів, що визначають поведінку їх розв'язку.

2.1 Вінерівський процес з переносом

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами вигляду:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dw_t$$

Надалі коефіцієнт μ будемо називати коефіцієнтом переносу, а σ – коефіцієнтом волатильності, або просто переносом і просто волатильністю.
Необхідно задати початкову умову для цього рівняння. Ми будемо вважати, що початкова умова є константою $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$.
Насправді, ця модель є модифікацією звичайного броунівського руху, якщо ми помістимо частинку у середовище, яке рухається з постійною швидкістю і при цьому надалі на частинку впливають випадкові удари, що можуть, як трохи змінити її рух, так і кардинально впливати на траєкторію. Баланс цих впливів регулюється співвідношенням між коефіцієнтами моделі.
Розв'язок явно записується через вінерівський процес:

$$X_t = x_0 + \mu t + \sigma w_t$$

Вважаючи $x_0 = 0$ математичне сподівання та мішаний другий момент цього процесу легко знаходяться. Вони знадобляться у майбутньому, тому наведемо їх:

$$\mathbb{E}X_t = \mu t$$

$$\mathbb{E}X_s X_t = \sigma^2 \min(s,t) + \mu^2 st$$

Даним процесом з деякими коефіцієнтами нами будуть наближатись інші процеси. Дійсно, якщо в деяких моделях стохастичних диференціальних рівнянь функції при dt та dw_t на деяких часових інтервалах не сильно змінюються, то наближення їх константами – це перший крок до побудови деякої апроксимації. Слід також зауважити, що вінерівський процес з переносом є стаціонарним у тому сенсі, що його коефіцієнти не змінюються у часі. Враховуючи це, ми могли б вести відлік від будь-якого моменту часу, просто лінійно змістивши час та скорегувавши початкову умову.

2.2 Оцінка параметрів переносу та волатильності

Задача оцінки параметрів полягає у визначенні значень μ, σ на основі спостереження лише однієї траєкторії процесу, його деякої реалізації. На відміну від сукупності незалежних однаково розподілених випадкових величин та вибірки від них, спостерігаючи за процесом ми маємо деякий часовий ряд, хоча теоретично розглядаємо неперервні модифікації процесів. Тому, при моделюванні буде приділено увагу коректності дискретизації. Для блукання ми маємо дуже корисну властивість незалежності приростів вінерівського процесу та знаємо їх розподіл, тому розподіли у дискретні моменти часу будуть визначатись статистично еквівалентно.

У оцінюванні параметрів ми спирались на роботу Ліпцера та Ширяєва "Статистика випадкових оцінок".
Нехай $X_i = X_{t_i}$ - послідовні спостереження реалізації процесу у рівновіддалені моменти $t_i = \frac{iT}{n}, i = 1..n$ на інтервалі $[0, T]$. Тоді оцінками для параметрів μ та σ^2 будуть:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \frac{6}{(n+1)(2n+1)} \sum_{i=1}^{n} iX_i$$

$$\hat{\sigma^2} = \frac{10n}{(n-1)(n+1)} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \hat{\mu} \frac{iT}{n} \right)^2$$

Доведемо просте твердження про незміщеність оцінки переносу.

Твердження 1. *Оцінка $\hat{\mu}$ є незміщеною оцінкою параметра μ*

Доведення. Незміщеність означає, що математичне сподівання оцінки збігається з оцінюваним параметром.

$$\mathbb{E}\hat{\mu} = \mathbb{E}\left(\frac{1}{T} \frac{6}{(n+1)(2n+1)} \sum_{i=1}^{n} iX_i \right) =$$

$$= \frac{1}{T} \frac{6}{(n+1)(2n+1)} \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{E}X_{\frac{iT}{n}} =$$

$$= \frac{1}{T} \frac{6}{(n+1)(2n+1)} \sum_{i=1}^{n} i\mu \frac{iT}{n} =$$

$$= \frac{6\mu}{n(n+1)(2n+1)} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \mu$$

$\square$

2.3 Логарифмічне блукання

Однією з найважливіших моделей у фінансовій математиці є модель логарифмічного блукання. Її ідею і динаміку дуже просто зрозуміти у застосуванні до моделі росту економічного показника. Ми розуміємо, що чим більший маємо капітал, тим більше маємо можливостей для зростання і розширення. Але також і те, що при зростанні капіталів зростають і ставки та ризики, отже зростає волатильність. Тому перше, що хочеться зробити, це додати залежність переносу та волатильності від значення процесу.

Означення 7. Логарифмічним блуканням називається випадковий процес X_t, який задовольняє стохастичне диференціальне рівняння:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dw_t$$

Додавши початкову умову $X_0 = x_0$, застосувавши формулу Іто для $\ln X_t$ приходимо до стохастичного диференціального рівняння:

$$d \ln X_t = \left(\mu - \sigma^2/2\right) dt + \sigma dw_t$$

Ми прийшли до звичайного блукання з переносом. Розв'язок вихідного рівняння запишеться у вигляді

$$X_t = x_0 \exp\left(\left(\mu - \sigma^2/2\right) t + \sigma w_t\right)$$

Зауважимо, що логарифмічне блукання при додатній початковій умові залишається додатнім. З одного боку це видно із розв'язку, а з іншого якщо ми уявимо, що процес наближається до нуля, то перетнути його йому не вдасться, оскільки тоді перенос і волатильність прямують також до нуля і динаміка процесу немов заморожується. Надалі є тільки один варіант, це якось з допомогою флуктуацій знову вибратися до великих значень.

Також наведемо формулу для математичного сподівання логарифмічного блукання:

$$\mathbb{E} X_t = x_0 \exp(\mu t)$$

Що цікаво, математичне сподівання не залежить від σ. Цього ще можна було очікувати у блуканні з переносом оскільки там вінерів процес лінійно входить до розв'язку, а тут виявляється, що так побудовані інтеграли Іто дають саме такий результат. Це було зауважено, оскільки інтеграли Стратоновича, що є альтернативою дають інше середнє, але дають більш класичний розв'язок, де волатильність не переходить до переносу.

2.4 Оцінка параметрів логарифмічного блукання

Теорема 3. *Нехай Y_t є розв'язком стохастичного диференціального рівняння з константною початковою умовою*

$$dY_t = \mu Y_t dt + \sigma Y_t dw_t,$$

$$Y_0 = y_0 > 0,$$

$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. *Задамо процес X_t наступним чином:*

$$X_t = \ln \frac{Y_t}{y_0}$$

Тоді процес X_t є розв'язком рівняння

$$dX_t = \alpha dt + \sqrt{\beta} dw_t,$$

$$X_0 = 0,$$

де $\alpha = \mu - \sigma^2/2, \beta = \sigma^2$.

Доведення. Зрозуміло, що процес X_t задовольняє початкову умову

$$X_0 = \ln \frac{Y_0}{y_0} = \ln 1 = 0$$

Оскільки рівняння для Y_t задовольняє умовам теореми про існування і єдиність розв'язку, то Y_t є прогресивно-вимірним та неперервним процесом. Ми вже знаємо, що це рівняння задовольняє логарифмічне блукання, тому $Y_t > 0$. Оскільки ln неперервна, а отже вимірна функція на $(0, \infty)$, то процес X_t також є прогресивно-вимірним та неперервним, отже може бути розв'язком стохастичного диференціального рівняння Іто.

Оскільки коефіцієнти рівняння для X_t тим паче задовольняють теорему існування та єдиності, і ми знаємо, що другому рівнянню задовольняє вінерівський процес з переносом, то ми можемо просто перевірити, чи є узгодженими параметри двох процесів.

Це є очевидним із вигляду розв'язків цих процесів, які були наведені вище, із зауваженнями деяких переозначень параметрів, що знадобиться нам в подальших викладках. □

Зауваження 1. Дане доведення відрізняється тим, що використовує фактично тільки теорему існування та єдиності. Альтернативою було б використання формули Іто, але тоді б замовчувалися класи функцій, до яких належать процеси, що є важливим, особливо неперервність, точніше існування неперервної модифікації.

Теорема 4. *Нехай в умовах попередньої теореми маємо спостереження процесу $\{Y_t\}$ у дискретні послідовні моменти часу. Нехай $\{X_t\}$ - відповідні значення процесу X_t. Якщо за даними спостереженнями маємо незміщені оцінки параметрів $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$, то незміщеними оцінками параметрів $\hat{\mu}, \hat{\sigma^2}$ будуть $\hat{\mu} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}/2$ та $\hat{\sigma^2} = \hat{\beta}$.*

Доведення. Строго кажучи, коли ми маємо вибірку, то досліджуючи теоретично незміщеність вважаємо, що X_i – це все ще випадкові величини із розподілом, який залежить від процесу. Наші процеси, згідно з попередньою теоремою мають прямий зв'язок між своїми параметрами у прямому функціональному сенсі. Тож, ми маємо функціональний зв'язок між процесами для кожної елементарної події з простору Ω. Зауваживши це, можемо рахувати математичне сподівання від оцінок процесу Y_t, що визначаються через оцінки X_t на загальному просторі.

$$\mathbb{E}\hat{\mu} = \mathbb{E}(\hat{\alpha} + \hat{\beta}/2) = \mathbb{E}\hat{\alpha} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\hat{\beta} =$$

$$= \alpha + \beta/2 = |th\ 3| = \ mu - \sigma^2/2 + \sigma^2/2 = \mu$$

$$\mathbb{E}\hat{\sigma^2} = \mathbb{E}\hat{\beta} = \beta = \sigma^2$$

$\square$

3 Комп'ютерне моделювання

З розвитком обчислювальної техніки стає дедалі простіше використовувати комп'ютерне моделювання для дослідження стохастичних процесів, їх прогнозування, обрахунку параметрів. Якщо раніше для використання обмежених ресурсів необхідно було сильно оптимізувати алгоритми перед їх використанням, то зараз вже на апаратному рівні існує купа різних інструкцій процесора, що дозволяють, використовуючи готові програмні пакети швидко моделювати стохастичні диференціальні рівняння.

3.1 Моделювання загального процесу

Щоб змоделювати процес необхідно знайти деяку його дискретну форму, оскільки тільки таку розуміє машина. Ми можемо знайти цю форму у теорії побудови стохастичного інтеграла Іто. Справді з теоретичної частини видно, що інтеграл Іто є граничним переходом від простих процесів. Дуже важливим є те, що на кожному інтервалі де процес має постійне випадкове значення, випадкова величина вимірна відносно історії до цього інтервалу часу, тобто не діє на випередження. Якщо звернутися до інтеграла Стратоновича ми бачимо іншу історію, тож описаний надалі метод, який можна назвати методом Ейлера для стохастичних диференціальних рівнянь, не дивлячись на свою простоту та природність має бути обґрунтованим.

Наша задача полягає у моделюванні траєкторії процесу X_t , що задовольняє стохастичне диференціальне рівняння:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dw_t$$

Якщо задана початкова умова $X_0 = x_0$, то значення процесу $X_i = X_{t_i}$ у послідовні моменти часу $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots$ можуть бути обраховані за наступною ітераційною схемою:

$$X_{k+1} = X_k + a(t_k, X_k)\Delta t + b(t_k, X_k)\varepsilon_k\sqrt{\Delta t},$$

де ε_k - незалежні $N(0, 1)$ випадкові величини. Якщо записувати розв'язок рівняння в інтегральному вигляді, то доданок $a(t_k, X_k)\Delta t$ являє собою частину звичайної інтегральної суми , а доданок $b(t_k, X_k)\varepsilon_k\sqrt{\Delta t}$ – частину інтегральної суми Іто, де приріст вінерівського процесу записано через статистичну еквівалентну гаусівську величину з дисперсією Δt. Всі ці доданки накопичуються на кожному кроці, змінюючи значення процесу. Як вже було сказано, основним для нас процесом буде вінерівський процес з переносом. Він вирізняється тим, що має постійні функції переносу та волатильності. Тому для нього ця схема навіть є статистично точною. Це також можна легко побачити з того, що розв'язок містить в собі лінійне входження вінерівського процесу, а моделювати процес з незалежними приростами із відомим розподілом легко.

Також слід зауважити, що комп'ютер оперує псевдовипадковими числами. Ми будемо використовувати мову програмування Python 3 та модуль для наукових обчислень numpy. Його генератори ,написані мовою Сі, відповідають стандартам та є кращими за генератор, що вбудований у Python. Тож брати на себе генерування псевдовипадкових чисел не будемо.

3.2 Приклади реалізації

Наведемо приклади реалізацій різних типів процесів, розглянутих раніше. У кожному з випадків ми будемо генерувати багато траєкторій, що мають однакові початкові умови. Це дозволить нам оцінити зрізи процесів у часі та перевірити розподіли. Зауважимо, що сприймати графіки траєкторій необхідно окремо на різних рисунках, оскільки проводиться автоматичне масштабування. Будемо моделювати процеси на часовому інтервалі в 1 секунду та з кроком 0.0001 секунди

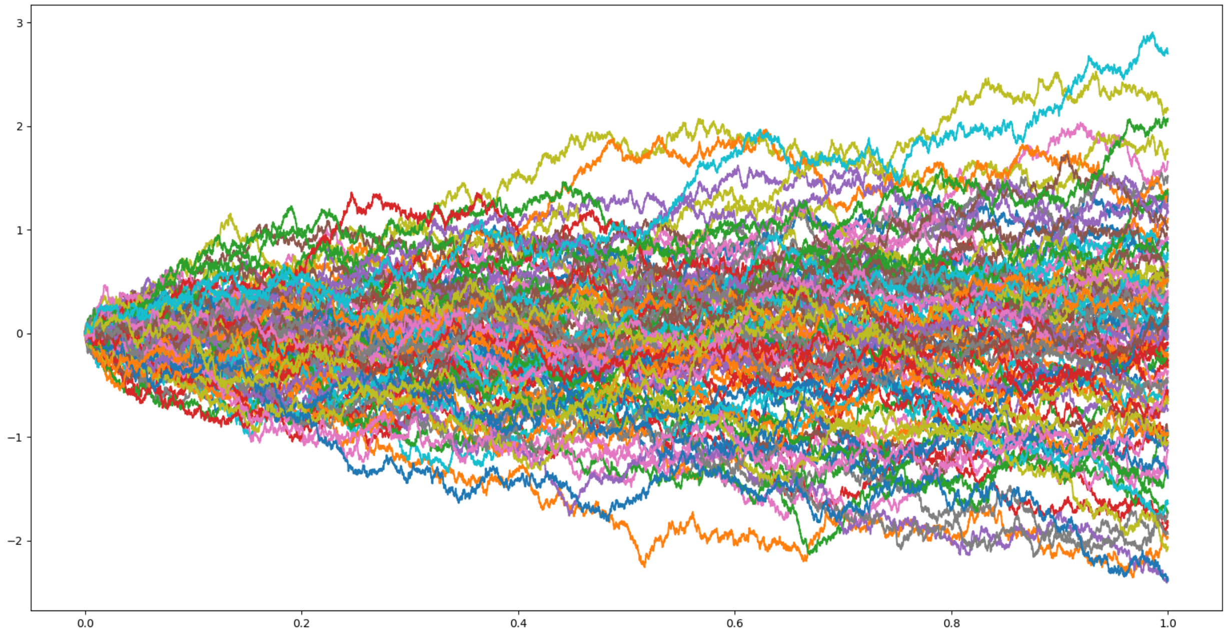

Рис. 1 Звичайний вінерівський процес

На рисунку 1 ми можемо бачити характерні риси гаусового процесу. Враховуючи, що $w_1 \sim N(0, 1)$, то із ймовірністю більше 98% ми будемо спостерігати процес в інтервалі $\pm 3\sigma$, що ми і бачимо.

Наступним розглянемо вінерівський процес з переносом. Необхідно зрозуміти, що співвідношення між параметрами переносу та волатильності може дати нам зовсім не схожі на перший погляд траєктторії однієї і тієї ж моделі.

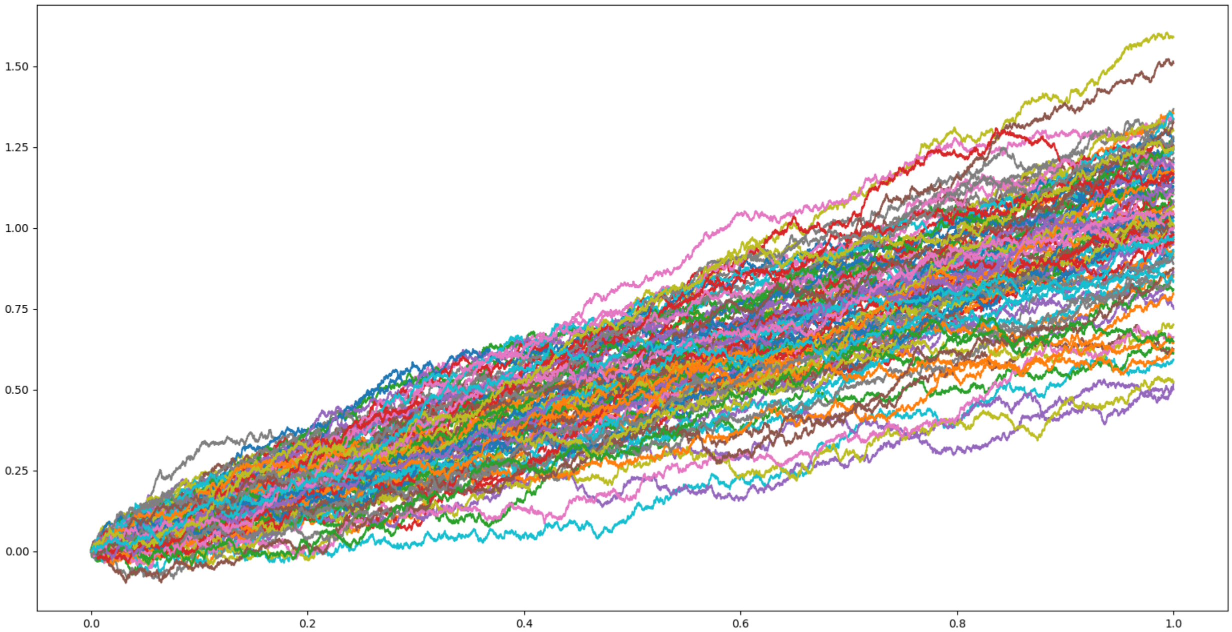

Рис. 2 Вінерівський процес з переносом $\mu = 1, \sigma = 0.2$

На рис. 2 ми бачимо явно виражений перенос процесу вгору. Теоретично ми могли очікувати на значення математичного сподівання через одну секунду (при старті в нульовому значенні) у районі одиниці. Дійсно, дивлячись на траєкторії ми можемо бачити це незбройним оком.

Але такі реалізації не здаються нам чимось із реального світу. Може здатися, що при додатному переносі процес приречений на зростання, але ж теоретично навіть вінерівське блукання без переносу осцилює між нескінченностями, тобто може як далеко заходити вгору , так і вниз. Давайте спробуємо змінити параметри.

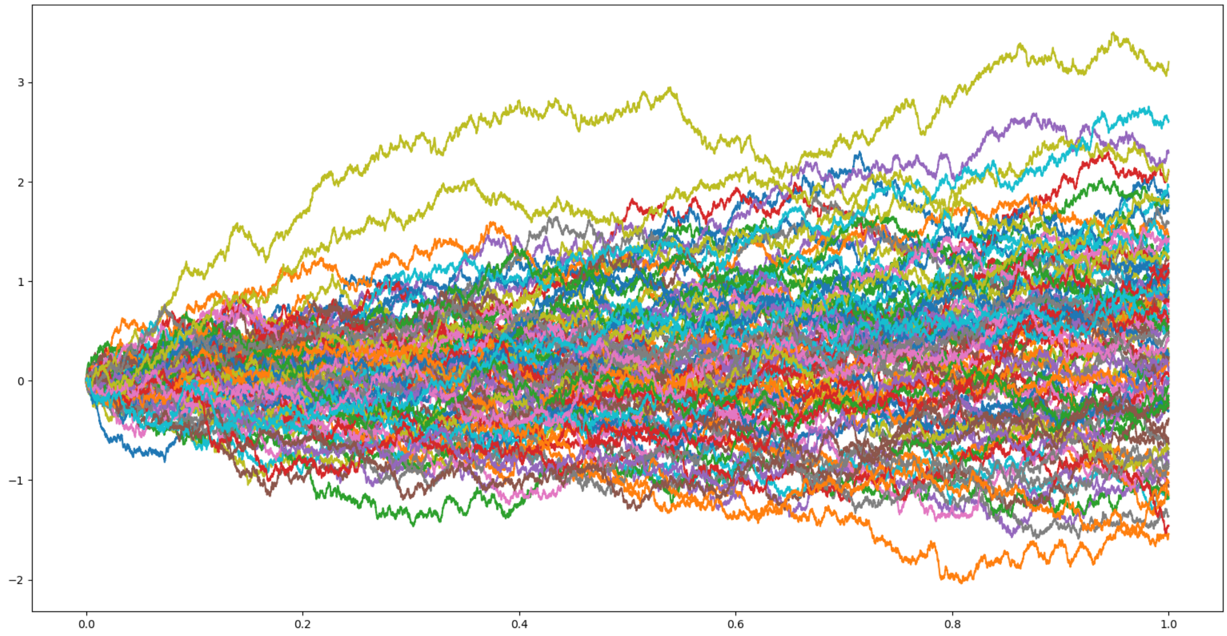

Рис. 3 Вінерівський процес з переносом $\mu = 0.5, \sigma = 1$

На рисунку 3 ми вже бачимо дуже серйозний вплив волатильності процесу, яка в два рази вища за перенос. Якби нам надали не пучок траєкторії, а лише одну, то відрізнити її від звичайного блукання було б дуже складно. Однак , придивившись, можна помітити що вище нуля траєкторії розташовані щільніше, а саме в околі значення 0.5, що є теоретичним значенням математичного сподівання через секунду. Тобто вплив переносу і його оцінку отримати важче. Ми переконаємось у цьому ще раз, коли будемо випробовувати наведені нами оцінки. А поки що робимо проміжний висновок, що високоволатильні процеси оцінювати складніше.

Вище розглянуті процеси звичайно дають деяке уявлення про співвідношення між стохастичною і детермінованою частиною рівняння, але ми розуміємо, що в реальному світі вимірювана величина може впливати свойм значенням на поведінку системи. Дійсно, у роздумах звичайної середньостатистичної людини може виникнути помилкове уявлення про те, що умовний олігарх вже нічим не ризикує, має достатньо грошей і надалі буде тільки збагачуватись. Можливо при встановленні деяких монополій так воно і є, але треба розуміти одну річ. Чим більші капітали, тим більші ставки.

Постає питання, як врахувати цю залежність від величини процесу у даний момент часу? Нам на допомогу приходить модель логарифмічного блукання. Дійсно, дуже природно почати з лінійної залежності переносу та волатильності від поточного значення процесу. Помноживши їх на коефіцієнти μ та σ вже маємо ,насправді, дуже гнучку модель. Особливо, якщо навчимося добре оцінювати ці коефіцієнти всього лише за однією реалізацією процесу, як це є у реальному житті. Тепер дослідімо динаміку логарифмічного блукання при різних співвідношеннях між параметрами. Звичайно у ході роботи над дисертацією були перебрані десятки значень. Для порівняння із попереднім процесом з переносом використаємо такі ж параметри. Стартувати тепер будемо з додатного значення – з одиниці.

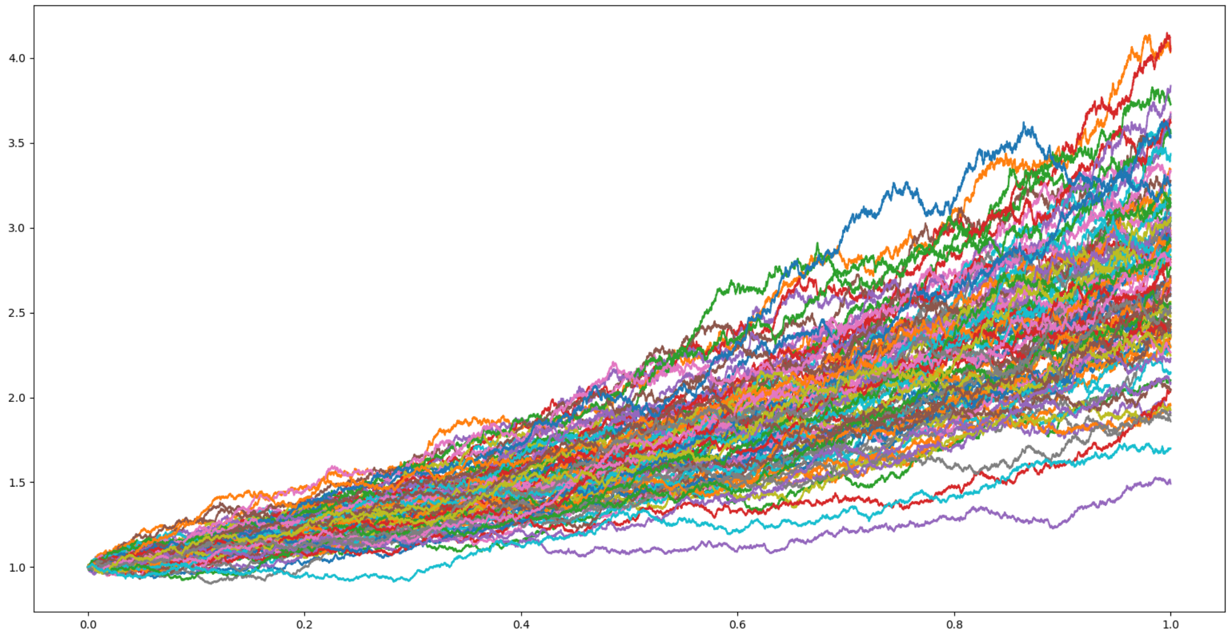

Рис. 4 Логарифмічне блукання $\mu = 1, \sigma = 0.2$

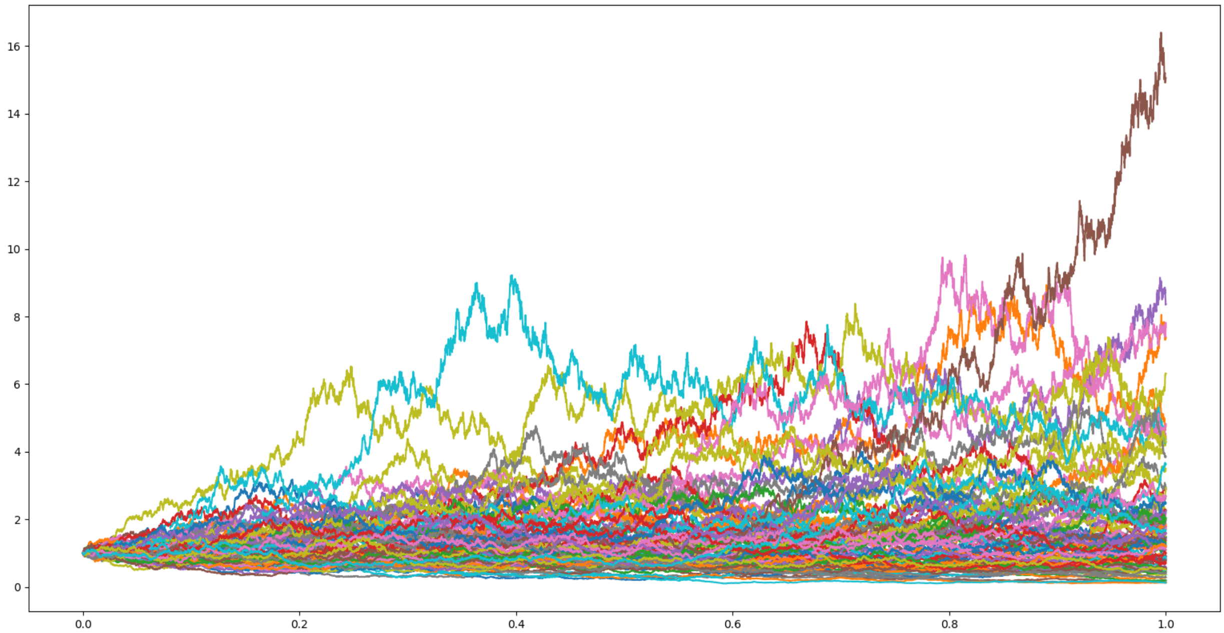

Рис. 5 Логарифмічне блукання $\mu = 0.5, \sigma = 1$

На перший погляд, коли ми бачимо у розв'язку логарифмічного блукання швидку експоненційну функцію, а також подивимось на математичне сподівання процесу, то може здатися, що це якийсь процес неухильного та невідворотного росту. Але ж подивіться на графіки траєкторій. Дійсно, у випадку низької волатильності (рис. 4) маємо чітко виражене зростання. Нам навіть пощастило, що всі траєкторії в першу секунду є вищими за стартовий капітал в одиницю. Якось не схоже на реальну ситуацію. На рисунку 5 маємо іншу картину. З одного боку купа траєкторій не змогли вийти у дохідність і блукають біля нуля, але висока волатильність дозволяє нам отримувати і траєкторії, які значно перевищують, навіть при меншому коефіцієнті переносу, свої аналоги на рисунку 4. На рисунку 4 у нас багато траєкторій досягають четвірки, а на рис. 5 є одна, що досягає 16, і декілька у районі 6 – 8 пунктів.

3.3 Обчислення статистичних параметрів, перевірка теоретичних результатів

Маючи розуміння, що розглянуті вище двопараметричні моделі можуть дійсно описувати різноманітні ситуації поведінки частинки у рідині, чи індексу фінансової біржі, можемо сподіватись на те, що природа підготувала для нас такі співвідношення параметрів, що дані моделі дійсно будуть першим наближенням до описання процесів, які відбуваються у реальному світі. То ж тепер необхідно навчитися якось оцінювати параметри таких процесів.

Вище нами вже була проведена робота по оцінці параметрів вінерівського блукання з переносом. Також були доведені теореми, щодо можливості оцінки параметрів логарифмічного блукання через його деформацію у відповідний процес блукання з переносом, оцінки його парамерів і можливості отримання за ними незміщених оцінок логарифмічного блукання. Слід зауважити, що під час дослідження та пошуку гарних оцінок для блукання ми зіштовхнулися із великими труднощами, оскільки навіть знайдені нами оцінки, як виявилося, мають велику дисперсію, що не сильно зменшується при збільшенні обсягу спостережень.

Було встановлено, що найкраще оцінки себе поводять при малій волатильності відносно переносу. Наведемо один із прикладів процедури моделювання логарифмічного блукання, її деформації до звичайного блукання та середні значення оцінок при відомих нами модельованих параметрів логарифмічного блукання.

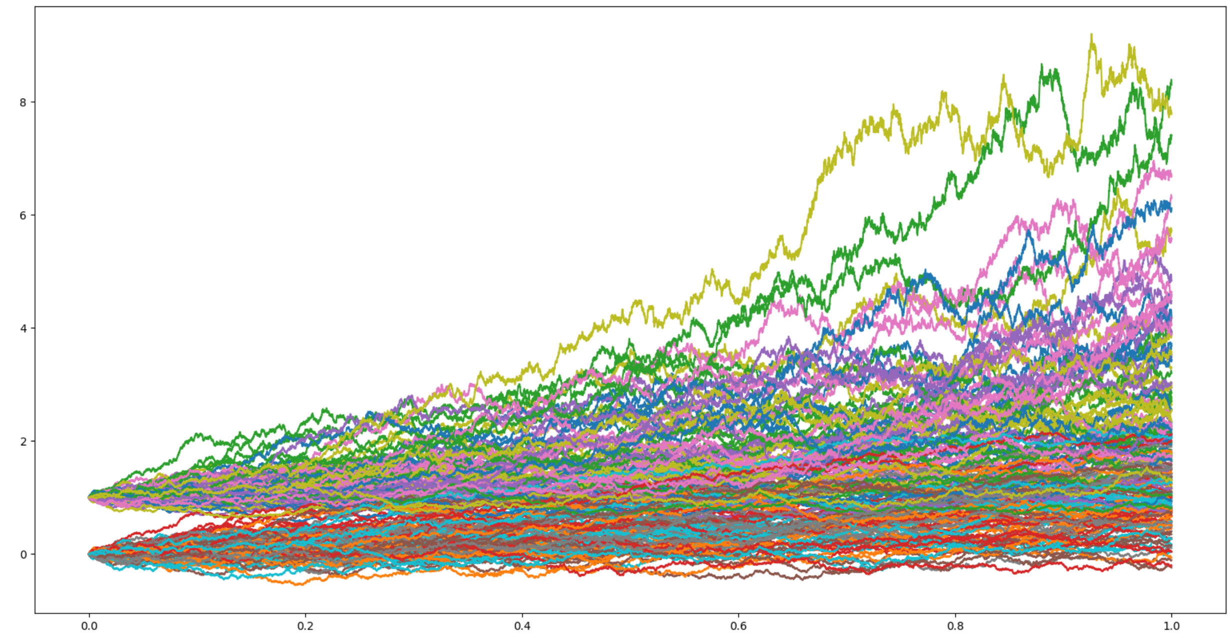

Рис. 6 Логарифмічне блукання $\mu = 1, \sigma = 0.5$ та його деформація

Обраховані середні значення по всім траєкторіям 1.022 та 0.493, отже, використовуючи деформацію логарифмічного блукання ми можемо оцінювати його параметри. Ще раз зазначимо, що загальної теорії, яка всих задовольняє, для оцінювання цих параметрів поки що просто не побудовано.

4 Дослідження реальних даних

4.1 Накопичена волатильність та її оцінка

Як тільки постає необхідність досліджувати процеси реального світу ми зустрічаємось із багатьма факторами, що нам заважають.

Перша група факторів, як для математиків, що намагаються застосовувати теорію на практиці полягає в тому, що люди, які професійно займаються питаннями економіки чи фізики часто віддають перевагу простим та зрозумілим правилам, які вони роками збирають із досвіду професійної діяльності, а не складним математичним моделям. При цьому вони отримують необхідні їм результати хоча б методом спроб та помилок. Не маючи великого досвіду нам доведеться дуже спрощувати моделі, якими ми описуємо економічні процеси. Але ж статистичні дані ми все ж таки візьмемо з реального світу, а не з модельованого.

Друга група факторів вже має більш математичну природу. Відомо, що розподіли дохідностей фінансових інструментів дуже часто мають важкі хвости. Тобто малоймовірні з точки зору гаусового розподілу, яким ми часто наближаємо дані, події відбуваються і при тому регулярно. То ж спираючись на гаусовий вінерівський процес ми сильно згладжуємо реальний світ. Також, ми не можемо гарантувати, що природа не змінює своїх правил із плином часу. Фізичних законів може й ні, а от параметри економічних, соціальних процесів не є стаціонарними. Тож постає питання: у який момент часу ми повинні перераховувати параметри моделей, якими користуємось.

На даний момент ми маємо свободу обирати, як ми хочемо обробляти дані. Запропонувати свій метод, спираючись звичайно на математичні структури та інтерпретацію, яку ми їм надамо. Одним із цікавих інструментів для нас є накопичувальна характеристика випадкового процесу — накопичена дисперсія.

Означення 8. Накопиченою дисперсією нестаціонарного випадкового процесу із функцією волатильності $\sigma(t)$ називається функція часу

$$G(t) = \int_0^t \sigma^2(u)du$$

Із властивостей інтеграла Іто ми бачимо, що це є фактично математичне сподівання стохастичного доданку у диференціальному рівнянні Іто. У роботі Ширяєва даний інтеграл використовується для проведення заміни часу таким чином, щоб волатильність процесу у новому часі була постійною. Це могло би спростити аналіз даних, але як тоді робити прогнози, знаходячись у заміненому часі, що залежить від внурішніх параметрів системи. У роботі Ширяєва такий час називається операційним. На прикладі економічної мови, скажемо показнику біржі торгівлі, можна розуміти це наступним чином:
1) У періоди активного ринку на показник впливають дуже багато випадкових факторів і це спричиняє підвищення його волатильності, у нього є більше можливостей відреагувати на операції купівлі-продажу, бо просто таких операцій

більше. Тобто в цей момент функція G зростає швидше.
2) Симетрична ситуація. Ринок не активний і функція G зростає повільніше. Заміна часу, розглянута у Ширяєві пропонує прискорювати та уповільнювати час використовуючи обернену до G функцію. Ми будемо використовувати накопичену дисперсію, як міру того наскільки багато операцій пройшло на ринку, і відповідно приймати рішення, щодо необхідності переглянути параметри, якими зараз оцінюється ринок.

Маючи лише спостереження у дискретні моменти часу необхідно навчитися оцінювати цей параметр. У статті Нікітіна пропонується кілька підходів до оцінки цієї величини. Якщо наші дані не є сильно зашумленими, то ми можемо оцінювати накопичену дисперсію за допомогою емпіричної волатильності, або реальної волатильності (realized volatility). Тут волатильність використовується не в тому ж сенсі, що в нашій роботі. Для рівновіддалених спостережень маємо $X_i = X_{t_i}, t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n = T$:

$$\hat{G}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$$

Тут ми говоримо про рівновіддалені спостереження, оскільки будемо мати саме такі. Звичайно, для того, щоб оцінка мала асимптотичний сенс необхідно просто прямування до нуля часових відстаней, але максимум, що ми можемо зробити – це взяті дані на фіксованій відстані, інтерполювати їх ми не будемо. Зауважимо також, що ми не претендуємо саме на точність вимірювання параметру накопиченої волатильності. Головна ідея полягає у тому, щоб порівнювати різні часові інтервали саме за цим параметром, який ми інтерпретуємо, як накопичену активність ринку.

4.2 Метод формування наближень вінерівським процесом з переносом

Нарешті, опишемо, у чому полягає суть обробки наявних даних та їх використання. Ми будемо формувати базу режимів поведінки фінансового показника, тобто часові проміжки еволюції, на яких будемо наближати процес вінерівським процесом з переносом, для чого вже була проведена підготовча робота. Запропонований нами метод обробки даних для подальшого формування бази режимів процесу ми будемо називати методом кейсів. Опишемо, як ми будемо виділяти окремий випадок (режим, кейс) в історії процесу.

Означення 9. Кейсом ми будемо називати частину еволюції процесу разом з оцінками переносу та волатильності блукання з переносом на цих даних.

Тож ми боремося із нестаціонарністю процесів тим, що регулярно перераховуємо параметри моделі. Дане означення дає тільки перше наближене описання кейсу. Більш важливим буде те, як ми приймаємо рішення щодо фіксації частини даних. Послідовно рухаючись у часі ми будемо відтинати часові інтервали виходячи з накопиченої волатильності на них. Тож, якщо розглянути такі інтервали разом з оцінками переносу та волатильності, ми будемо мати кейси з приблизно однаковими накопиченими волатильностями. Тут постає багато питань про те, скільки треба накопичувати волатильність, яка похибка наближень, чому саме такі часові інтервали є важливими для аналізу процесу. Щоб не наводити загальний алгоритм з усіма обмовками через абстрактність даних, продемонструємо ідею на конкретному прикладі.

4.3 Застосування до даних індексу Dow Jones

Із відкритих джерел в інтернеті ми знайшли щоденну еволюцію індексу американської біржі DowJones від 2009 року протягом більш ніж 2500 днів. Тут наводяться дані індексу при щоденному закритті торгів. Час вимірюється у днях.

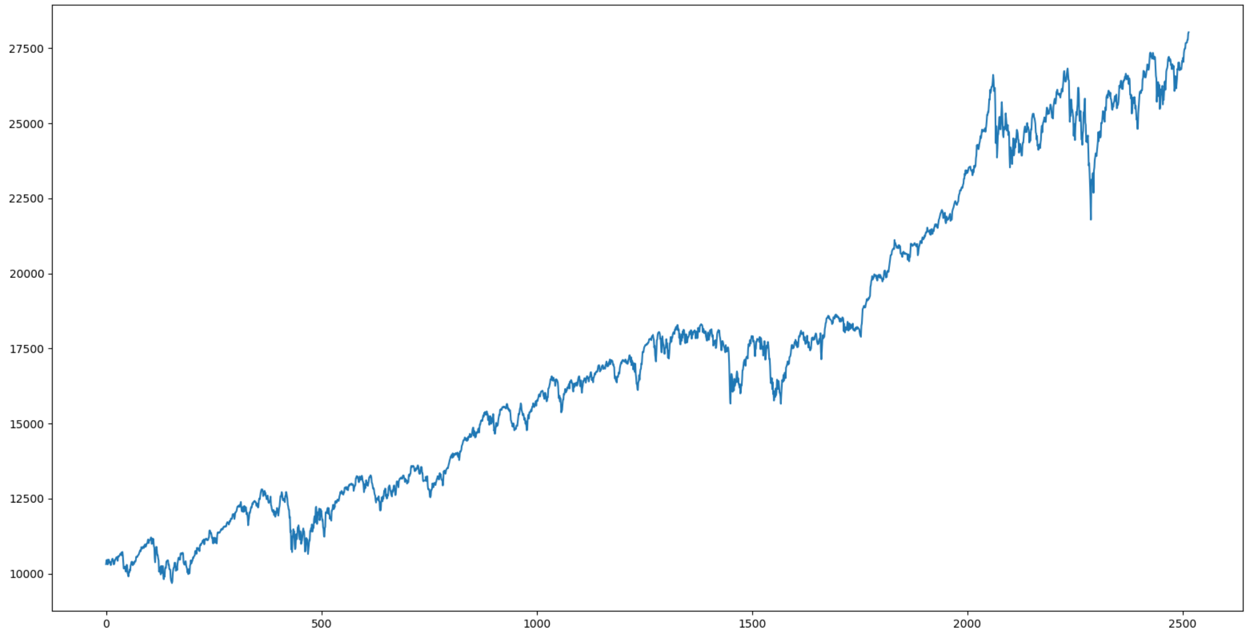

Рис. 7 Dow Jones

Ми явно спостерігаємо деяку тенценцію росту індексу за ці вісім років. Можна було б навіть намагатися наблизити це вінерівським блуканням з переносом, але ми також розуміємо, що такі економічні показники в першу чергу описуються логарифмічним блуканням, оскільки явним чином у ринку з'являється більше можливостей для росту чи обвалу при більших капіталах. Тому першим кроком буде перехід від таких даних до логарифму від них, а отже від апріорного логарифмічного блукання до звичайного з переносом.

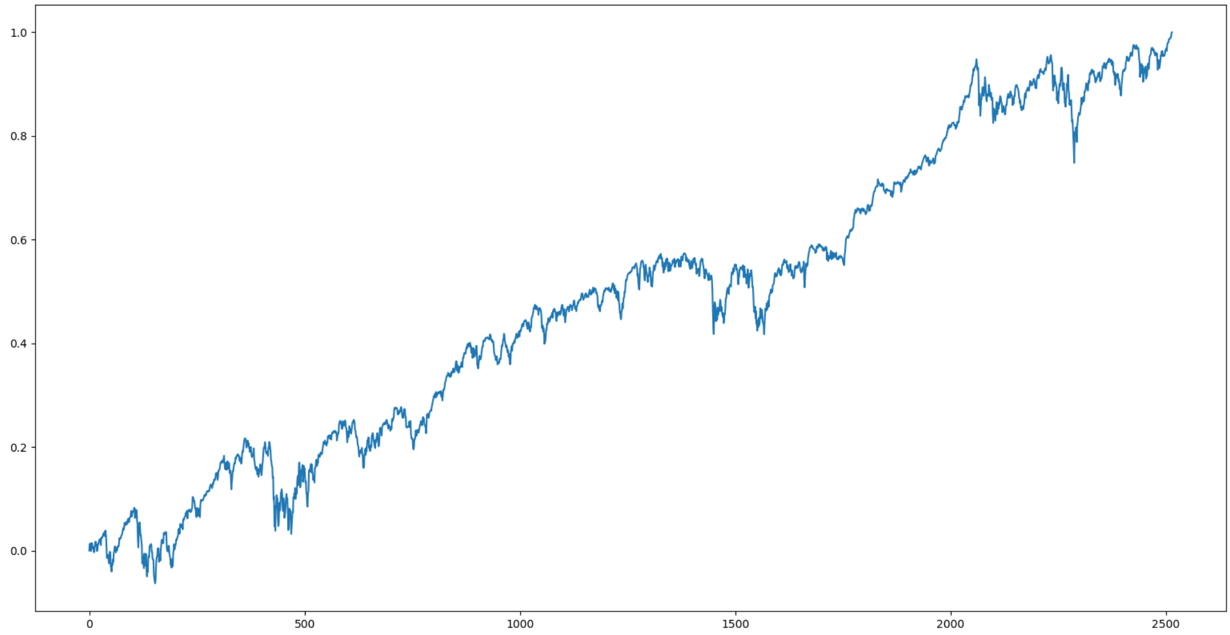

Рис. 8 Dow Jones деформований до відповідного блукання

Тепер ми умовно бачимо показник експоненти у деякій реалізації логарифмічного блукання. Звичайно було б недоречно допускати, що протягом всього періоду були одні і ті ж самі коефіцієнти переносу і волатильності, тому будемо застосовувати нашу методику розбиття історії процесу на проміжки з рівною накопиченою волатильністю і з'ясуємо, чи можеми ми почати робити якісь змістовні висновки. На даному етапі дослідження дуже важливою буде візуалізація даних, а потім на основі цього ми опишемо нашу пропозицію, щодо загального підходу.

Перше, що необхідно зробити, це порахувати загальну накопичену волатильність. Потім необхідно зрозуміти, на яку кількість інтервалів ми будемо розбивати наш процес. І нарешті зробити деякі проміжні висновки про те, що може надати таке розбиття.

Рис. 9 Dow Jones деформований до відповідного блукання розбитий на 12 кейсів

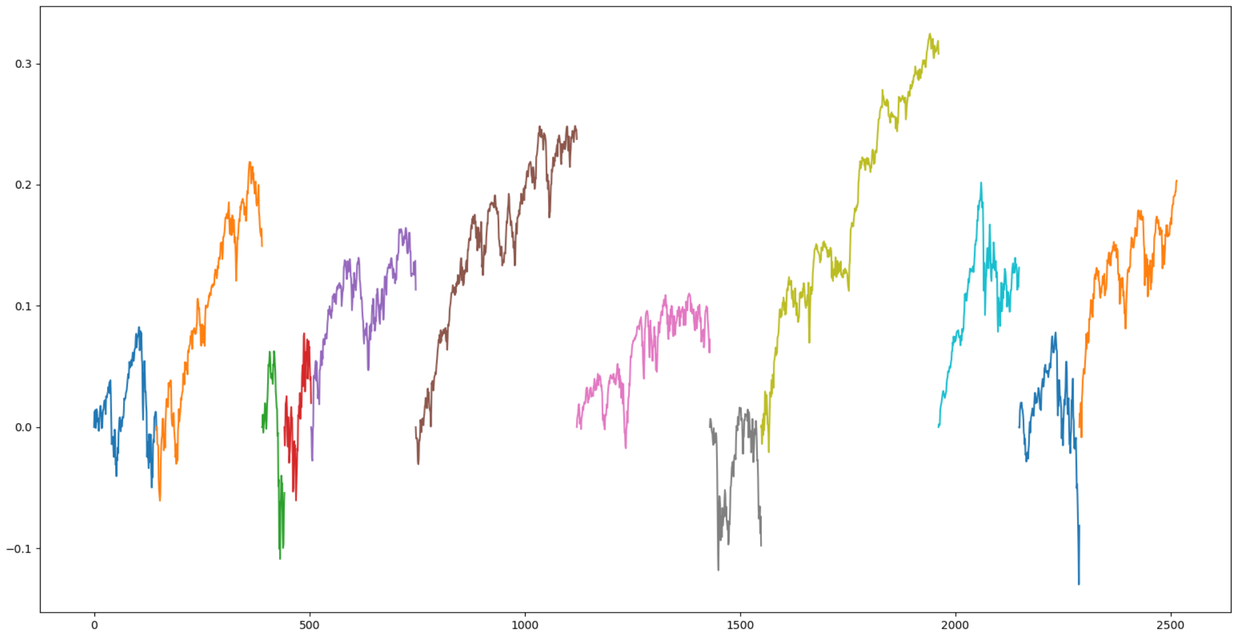

Рис. 10 Кейси співставлені між собою

На основному рис. 10 , який ми будемо обговорювати кейси приведені так, ніби вони стартують із нуля. Дійсно, для блукання стартова точна не важлива, це не впливає на параметри.

Перше, що хочеться сказати, це вберегти себе від передчаних суджень про чергування кейсів та їх схожість. Такої кількості даних достатньо для наочної демонстрації, але не для глибокого аналізу. Тим не менш ми бачимо, що формуються деякі трійки та пари схожих зовнішньо, та як нами було обраховано, за параметрами блукання кейсів. Деякі з них можна назвати інтенсивним зростанням, деякі післядією після інтенсивного, а деякі спонтанними провалами індексу біржі. Так, перше, що хочеться помітити – це чергування цих режимів. Не забуваємо про те, що всі вони мають однакову накопичену волатильність, тож окрім параметрів процесу, як наближеного блуканням, ми бачимо схожі у тривалості режими. Наприклад, різкі провали з великою волатильністю довго не тривають. Цьому може бути поясненням те, що ринки не можуть бути занадто довго у стані невизначеності, включаються регулятори та стабілізують процес. Також відповідні роздуми можна застосовувати до інших режимів. Так чи інакше необхідно мати більш чіткі критерії оцінки невипадковості слідування кейсів один за одним у часі. Наприклад, можна рахувати кореляції між параметрами моделей, та з'ясовувати, чи випадково після падіння іде зростання, або після зростання – помірене зростання. Також можна робити двовимірні карти параметрів переносу та волатильності на кейсах та об'єднувати їх за близкістю на площині. Можливо навіть формування деяких груп, пов'язаних з політикою запровадженою на ринках.

Нами проведено більше досліджень на більших даних, але на жаль їх візуалізація дуже складна для паперу А4. Набагато простіше це робити в інтерактивному режимі побудови графіків і траєкторій. Також можна було б, окрім обрахування кореляцій, застосовувати штучний інтелект для аналізу залежностей між кейсами та їх чередуваннями. Це потребує більших знань у цій галузі, тому на цьому ми поки що зупиняємо свої дослідження.

5 Висновки

У даній роботі ми намагалися сфокусуватись на практичних аспектах застосування стохастичних диференціальних рівнянь у фінансовій математиці. Ми зрозуміли, що на даний момент сучасний стан теорії фінансової математики є динамічним і враховуючи прикладний аспект дозволяє проводити експериментальні дослідження, застосовуючи сучасні обчислювальні потужності.

Нами проведено роботу по моделюванню стохастичних процесів, оцінюванню їх параметрів та виокремлювання станів фінансового ринку, що мають важливу інформацію для передбачення поведінки нестаціонарних даних.

Були отримані теореми про зв'язок оцінок логарифмічного блукання та блукання з переносом і відповідний метод оцінки. Подальший розвиток оцінювання волатильності процесу та застосування інших оцінок не змінює наші результати.

Отриманий досвід роботи з літературою, реалізації комп'ютерних алгоритмів та візуалізації даних дозволить продовжувати працю в обраному напрямку. А використання сучасних інформаційних технологій актуалізує роботу і дозволяє розвивати подальші дослідження.

6 Список літератури

[1] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики: Т. 1: Факты, модели. Электронное издание М. МЦНМО, 2016 - 440 с.

[2]Oksendal B., Stochastic differential equations, Springer, 2000 - 332 p.

[3] Степанов С.С. Стохастический мир, Электронное издание, 2012 - 376 с.

[4] Никитин Я.Ю. "Статистические оценки параметров диффузионных процессов и накопленной волатильности". Наука, Физматлит, 2007-31с.

[5] Липцер Р.Ш. Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов,М.: Наука, 1974 - 696 с.

[6] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения, К.: Наукова думка, 1982 - 612с.

[7] Arnold, L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications, John Willey and Sons, London, 1974-271p.

7 Додатки

Додаток А. Лістинг коду програми(наведені саме реалізації необхідних функцій, а не їх використання для побудови окремих діаграм чи оцінок)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import csv
def winner(mu,sigma):
    def a(x,t):
            return mu
        def b(x,t):
            return sigma
        return a,b
def blackshouls(mu,sigma):
        def a(x,t):
            return mu * x
        def b(x,t):
            return sigma * x
        return a,b
def ornsteinulenbek(alpha,beta,sigma):
        def a(x,t):
            return -beta * (x - alpha)
        def b(x,t):
            return sigma
        return a,b
def trajectory(model,x0,T):
        a = model[0]
        b = model[1]
        X = [x0]
        for i in range(len(T) - 1):
            X.append(X[-1] + a(X[-1],T[i]) *
             (T[i + 1] - T[i]) +
             b(X[-1],T[i]) * np.sqrt(T[i + 1] - T[i]) *
             np.random.standard_normal())
        return np.array(X)
def groupmean(data,n):
        k = len(data) // n
        for i in range(n):
        srez = data[i * k:(i + 1) * k]
        print(srez, srez.mean(),srez.var())
def muestimatemnk(x,T):
        n = len(x) - 1
        I = np.arange(1,n + 1,1)
```

```
        return np.sum(I * x[1:]) * 6 / T / (n + 1) / (2 * n + 1)
def sigmaestimate(x,T):
        n = len(x) - 1
        I = np.arange(1,n + 1,1)
        return np.sum((x[1:] - muestimatemnk(x,T) *
        T / n * I) ** 2) *      10 * n / (n - 1) / (n + 1)
def RVn(x):
    return np.sum((x[1:] - x[:-1]) ** 2)
```