

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»

УДК _____

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

_____ Клесов О.І.

«__» _____ 20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 111 «Математика»

**на тему: «Нерівність Лебега-Ландау на класах функцій, що мають
дробову похідну»**

Виконала:

студентка VI курсу, групи ОМ-81 мп

Пилипака Анна Олександрівна _____

Керівник:

Доктор фізико-математичних наук, професор

Задерей Петро Васильович _____

Рецензент:

Провідний науковий співробітник

Інституту математики НАН України,

доктор фізико-математичних наук,

старший науковий співробітник

Сердюк Анатолій Сергійович _____

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.

Студентка _____

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність (спеціалізація) – 111 Математика («Страхова та фінансова математика»)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Клесов О.І.

«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Пилипаці Анні Олександрівні

1. Тема дисертації «Нерівність Лебега-Ландау на класах функцій, що мають дробову похідну», науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, професор Задерей Петро Васильович, затверджені наказом по університету від «7» листопада 2019 р. №3850с.
2. Термін подання студентом дисертації 10 грудня 2019р.
3. Об'єктом дослідження є класи функцій $C^{\bar{\psi}}C^0$, $C(T)_+$, $A(\bar{D})$, H_{∞}^{ψ} , ряди Фур'є та степеневі ряди.
4. Перелік завдань, які потрібно виконати:
 - 1) навести нерівності типу Лебега, які були доведені попередниками;
 - 2) встановити нерівність типу Лебега на деяких класах 2π -періодичних диференційовних в узагальненому розумінні функцій;

3) довести теорему про нерівність типу Лебега-Ландау на класі функцій H_{∞}^{ψ} , що має два головних члени;

4) навести приклади функцій, для яких більшим за порядком в доведеній нерівності буде другий доданок.

5. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: 20 слайдів.

6. Дата видачі завдання 2 вересня 2019р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Огляд літератури	2.09.19-24.09.19	виконано
2	Написання основних означень, тверджень, нерівності Лебега та сталої Лебега	25.09.19-08.10.19	виконано
3	Знаходження r -тої похідної в сенсі Вейля, введення простору $C^{\bar{\psi}}C^0$	09.10.19-22.10.19	виконано
4	Означення ψ -похідної з класу H_{∞} , розглядання умов Сідона-Теляковського на коефіцієнти степеневого ряду	23.10.19-5.11.19	виконано

5	Доведення теореми про нерівність типу Лебега на класі функцій H_{∞}^{ψ} , де є два головних члени	6.11.19-19.11.19	виконано
6	Привести приклади, для яких більшим за порядком в доведеній нерівності буде другий доданок	20.11.19-26.11.19	виконано
7	Оформлення результатів	27.11.19-09.12.19	виконано

Студент

А.О.Пилипака

Науковий керівник дисертації

П.В.Задерей

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 48 сторінок, 20 слайдів презентації, 22 першоджерела.

Дисертаційна робота присвячена встановленню нерівності Лебега та Лебега-Ландау для класів функцій, що мають ψ -похідну, яка була введена О.І.Степанцем.

Метою даної роботи є встановлення нерівності типу Лебега-Ландау на класі функцій H_{∞}^{ψ} .

Об'єктом дослідження є класи функцій $C^{\bar{\psi}}C^0$, $C(T)_+$, $A(\bar{D})$, H_{∞}^{ψ} , ряди Фур'є та степеневі ряди.

Дисертація носить теоретичне значення, її результати можуть використовуватися при одержанні інших результатів що стосуються нерівностей типу Лебега.

Ключові слова: тригонометричний ряд, ряд Фур'є, коефіцієнти ряду Фур'є, нерівність типу Лебега, нерівність типу Лебега-Ландау.

ABSTRACT

Master degree thesis contains: 48 pages, 20 presentation slides, 22 primary sources.

The dissertation is devoted to establishing the inequality of Lebesgue-Landau for classes of functions that have ψ -derivative, which was introduced by Stepanets.

The purpose of this work is to establish the inequality of Lebesgue-Landau for classes of functions H_{∞}^{ψ} .

The object of study is the classes of functions $C^{\bar{\psi}}C^0$, $C(T)_+$, $A(\bar{D})$, H_{∞}^{ψ} , Fourier series, and power series.

The thesis is of theoretical significance, its results can be used to obtain other results concerning Lebesgue inequalities.

Keywords: trigonometric series, Fourier series, coefficients of Fourier series, Lebesgue inequality, Lebesgue-Landau inequality.

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень.....	8
Вступ.....	9
Розділ 1. Основні означення, позначення та допоміжні твердження	
1.1. Основні означення.....	12
1.2. Класи узагальнено-диференційовних функцій.....	18
Розділ 2. Нерівність Лебега-Ландау на класах функцій, що мають дробову похідну	
2.1. Означення ψ -похідної функції з H_∞	26
2.2. Умови інтегровності тригонометричних рядів та асимптотичні формули для інтегралу від модуля функції, заданої тригонометричним рядом.....	29
2.3. Згортка двох сумовних функцій.....	36
2.4. Нерівності Лебега та Лебега-Ландау.....	38
Розділ 3. Приклади функцій, що мають в нерівності Лебега-Ландау другий член, який визначає порядок спадання.....	
Висновок.....	45
Список використаних джерел.....	46

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{C}$ – множина комплексних функцій;

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел;

$\exists$ – квантор існування, «існує»;

$\forall$ – квантор загальності, «для будь-якого»;

$[a]$ – ціла частина числа a , що не перевищує a ;

$\{a_k\} = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ – послідовність дійсних чисел;

$\Delta a_k := a_k - a_{k+1}, k = 0, 1, 2, \dots;$

$\Delta^2 a_k := \Delta a_k - \Delta a_{k+1} = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}, k = 0, 1, 2, \dots;$

$a_k \searrow 0$ – монотонно спадна до нуля послідовність дійсних чисел $\{a_k\}$;

L_p – простір 2π -періодичних сумовних в p -тому степені функцій (див. с.12);

$\|f\|_p$ – норма функцій f у просторі L_p (див. с.12);

C – простір неперервних функцій (див. с.12);

$\|f\|_C$ – норма функцій f у просторі C (див. с.12);

H_{∞} – простір аналітичних в одиничному крузі комплексної області функцій (див. ст. 26);

$\|f\|_{\infty}$ – норма функцій f у просторі H_{∞} (див. с.26);

$C(T)_+$ – простір неперервних функцій $f(e^{it})$ на колі одиничного радіуса комплексної області (див. с. 26);

$L_{\infty}(T)_+$ – простір суттєво обмежених функцій $f(e^{it})$ на колі одиничного радіуса комплексної області (див. с. 26);

$\|f\|_{L_{\infty}}$ – норма функцій f у просторі $L_{\infty}(T)_+$ (див. с.27);

$L_1(T)_+$ – простір сумовних функцій $f(e^{it})$ на колі одиничного радіуса комплексної області (див. с. 26);

$\|f\|_{L_1}$ – норма функцій f у просторі $L_1(T)_+$ (див. с.27);

$A(\bar{D})$ – простір функцій аналітичних у відкритому крузі одиничного радіуса комплексної області і неперервних в замкненому крузі одиничного радіуса комплексної області (див. с.27);

$\|f\|_{A(\bar{D})}$ – норма функцій f у просторі $A(\bar{D})$ (див. с.27);

H_{∞}^{ψ} – клас функцій з H_{∞} (див. с.39);

$S - T$ – множина послідовностей, які задовольняють умови Сідона-Теляковського;

$(S - T)^*$ – множина послідовностей, які задовольняють узагальнені умови Сідона-Теляковського.

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена встановленню нерівності Лебега та Лебега-Ландау для класів функцій, що мають ψ -похідну, яка була введена О.І.Степанцем [4].

Теорія тригонометричних рядів, зокрема, теорія рядів Фур'є, відіграє важливу роль в розвитку теорії функцій. Найбільш природним апаратом наближення періодичних неперервних, або аналітичних в крузі функцій є частинні суми їх рядів Фур'є, або, відповідно, рядів Тейлора. Також, в ряді питань теорії тригонометричних рядів, або теорії наближення функцій тригонометричними поліномами є потреба в асимптотичних формулах для інтеграла від модуля функції, представленої рядом Фур'є.

Дана магістерська дисертація складається із 3-х розділів.

У першому розділі дисертаційної роботи, а саме в пункті 1.1, наведені основні означення, позначення та нерівність А.Лебега [2], яка була доведена в 1909 році. Також тут, в пункті 1.2, означені класи узагальнено-диференційовних функцій, $\bar{\psi}$ -похідна функції і записано нерівності типу Лебега для дійсного випадку, які були доведені К.І.Осколковим [3], О.І.Степанцем [8; 9], П.В.Задереєм [10].

У другому розділі, в пункті 2.1, означено ψ -похідну функції з класу функцій H_{∞} . У пункті 2.2 розглянуто умови Сідона-Теляковського та узагальнені умови Сідона-Теляковського, записано асимптотичну формулу для інтеграла від модуля функції, представленої рядом Фур'є в дійсному випадку і з комплексними коефіцієнтами, скориставшись умовою типу Сідона-Теляковського для коефіцієнтів ряду. У пункті 2.3 записано теорему А.Зигмунда [1] про згортку двох функцій, і доведено лему про згортку для елементів множини $C_{\infty}^{\psi}(T)_{+}$. У наступному пункті 2.4 наведено огляд результатів О.І.Степанця [6], В.В.Савчука [20], А.М.Швецової [22] в

комплексному випадку. Тут же доведена теорема про нерівність типу Лебега для класів H_∞^ψ з двома головними членами.

В третьому розділі розглянуто і розв'язано приклади, для яких другий доданок доведеної нерівності буде більшим за порядком ніж перший.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ, ОЗНАЧЕННЯ І ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

1.1. Основні означення

В даному підрозділі приведемо необхідні означення, які будемо використовувати в подальшому, розглянемо нерівність Лебега та Осколкова.

Нехай $L_p, 1 \leq p < \infty$ – простір 2π - періодичних сумовних в p -тому степені функцій $f(\cdot)$ із скінченною нормою

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

а C – простір, який складається з неперервних функцій $f(\cdot)$ з нормою

$$\|f\|_C = \max_x |f(x)|.$$

Послідовність $\{a_k\}$ називається випуклою, якщо

$$\Delta^2 a_k \geq 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots,$$

де

$$\Delta^2 a_k = \Delta(\Delta a_k) = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots.$$

Послідовність $\{a_k\}$ називається квазівипуклою, якщо

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 a_k| < \infty.$$

Тригонометричним рядом називається ряд виду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(f; x). \quad (1.1)$$

Тут через x позначено дійсну змінну, а коефіцієнти $a_0, a_1, b_1, \dots$ не залежать від x , є деякими числами. При бажанні ми можемо припускати, що

коефіцієнти дійсні, а якщо вони комплексні, то дійсна і уявна частини ряду (1.1) можуть розглядатися окремо.

Оскільки всі члени ряду (1.1) мають період 2π , то достатньо розглядати тригонометричні ряди на відрізку довжини 2π , наприклад, на $[0; 2\pi]$ або $[-\pi; \pi]$.

Розглянемо степеневий ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) z^k \quad (1.2)$$

на одиничному колі

$$z = e^{ix}.$$

Оскільки

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx,$$

то ряд (1.2) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k)(\cos kx + i \sin kx) = \\ & = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + i \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx). \end{aligned}$$

Ряд (1.1) являє собою дійсну частину ряду (1.2). Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \quad (1.3)$$

представляє собою уявну частину ряду (1.2) і називається рядом, спряженим з рядом (1.1). Якщо S – ряд (1.1), то спряжений з ним ряд позначимо $\tilde{S}$. Рядом, спряженим з $\tilde{S}$, буде ряд $-S$ без вільного члена.

Скінченна тригонометрична сума

$$t_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

називається тригонометричним поліномом порядку n . Якщо

$$|\alpha_n| + |\beta_n| \neq 0,$$

то кажуть, що поліном $t_n(x)$ має точний порядок n . Поліном $t_n(x)$ є дійсною частиною звичайного (ступеневого) многочлена $P(z)$ степеня n , де $z = e^{ix}$,

$$P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$$

В даній роботі замість терміну «тригонометричний поліном» будемо говорити «поліном».

Якщо задана функція $f(\cdot) \in L_1$, то можна обчислити величини

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Ряд (1.1), в якому коефіцієнти обчислюються за формулами (1.4) і (1.5) називають рядом Фур'є функції $f(\cdot)$, а коефіцієнти (1.4), (1.5) називаються коефіцієнтами Фур'є функції $f(\cdot)$.

Дюбуа-Реймон побудував приклад неперервної функції, ряд Фур'є якої розбігається в окремих точках. А.М.Колмогоров привів приклад інтегровної за Лебегом функції, ряд Фур'є якої розбігається майже скрізь.

Оскільки ряд Фур'є може розбігатися в окремих точках, навіть якщо функція неперервна, то ми можемо лише формально розглядати ряд Фур'є даної функції $f(\cdot)$, але не завжди можемо стверджувати, що він збігається до функції $f(\cdot)$. Його зв'язок із функцією $f(\cdot)$ прийнято позначати

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (1.6)$$

Через $S_n(f; x)$ позначають частинну суму порядку n ряду (1.1), а $\rho_n(f; x)$ – відхилення частинної суми $S_n(f; x)$ від функції $f(\cdot)$, тобто

$$S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\rho_n(f; x) = f(x) - S_n(f; x).$$

П.Л.Чебишевим [1] було введено величину

$$E_n(f)_X = \inf_{t_n \in T_n} \|f(x) - t_n(x)\|_X, \quad (1.7)$$

– найкраще наближення функції $f(x)$ тригонометричними поліномами $t_n(\cdot)$ з T_n , де T_n – множина тригонометричних поліномів порядку не вище n , а X означає або простір L_1 , або C .

У 1909 році А.Лебег [2] довів, що має місце нерівність

$$\|\rho_n(f; x)\|_C \leq (L_n + 1)E_n(f)_C, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

Тут L_n – норма оператора $S_n(f; x)$, яка рівна

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx,$$

де

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Величини

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| dx$$

називають константами Лебега.

Оскільки

$$L_n = \frac{4}{\pi^2} \ln n + r_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |r_n| \leq 3,$$

то співвідношення (1.8) можна записати у вигляді

$$\|\rho_n(f; x)\|_C \leq \left(\frac{4}{\pi^2} \ln n + R_n \right) E_n(f)_C, \quad |R_n| \leq 4. \quad (1.9)$$

Нерівність (1.9) є асимптотично точною (з константою $\frac{4}{\pi^2}$) на всьому просторі неперервних функцій C , але вона не є точною, навіть за порядком, на деяких підмножинах множини C .

Дійсно, нехай візьмемо функцію

$$g(x) = \cos(n+1)x.$$

Тоді n -та частинна сума буде

$$S_n(g; x) \equiv 0,$$

а відхилення частинної суми тоді буде дорівнювати

$$\rho_n(g; x) = \cos(n+1)x,$$

звідси

$$\|\rho_n(g; x)\|_C = \max_x |\cos(n+1)x| = 1,$$

$$E_n(g)_C = 1.$$

Ліва частина нерівності (1.9) для функції $f_0(x)$ рівна 1, а права росте так само, як $\ln n$ при $n \rightarrow \infty$.

Приведений приклад показує, що на деяких підмножинах неперервних функцій нерівність Лебега не є точною.

К.І.Осколков [3] уточнив нерівність (1.9), довівши таке твердження

Теорема 1 [3]. Якщо $f \in C$, то

$$\|\rho_n(f; x)\|_C \leq K \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} E_{n+k}(f)_C. \quad (1.10)$$

Тут і надалі через K позначено абсолютні додатні сталі, можливо, неоднакові в різних формулах.

Якщо $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}, k \in \mathbb{N}$ – послідовність невід’ємних чисел, що монотонно прямує до нуля, то позначимо через C_ε множину неперервних функцій таких, що

$$E_n(f)_C \leq \varepsilon_n,$$

тобто

$$C_\varepsilon := \{f \in C : E_n(f)_C \leq \varepsilon_n \forall n \in \mathbb{N}\},$$

то існують дві абсолютні сталі K_1 і K_2 такі, що

$$K_1 \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon_{n+k}}{k+1} \leq \sup_{f \in C_\varepsilon} \|\rho_n(f; x)\|_C \leq K_2 \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon_{n+k}}{k+1}. \quad (1.11)$$

Співвідношення (1.10) та (1.11) уточнюють за порядком нерівність (1.9).

К.І.Осколковим [3] встановлено наступне твердження

Теорема 2 [3]. Нехай $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ – послідовність невід’ємних чисел, монотонно прямує до нуля при $k \rightarrow \infty$ і нехай

$$C(\varepsilon) = \{f \in C: E_k(f) \leq \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, \dots\},$$
$$S_n(\varepsilon) = \sup_{f \in C(\varepsilon)} \|R_n(f)\|, \quad n = 0, 1, \dots$$

Тоді

$$S_n(\varepsilon) \sim \sum_{k=n}^{2n} \frac{\varepsilon_k}{k - n + 1}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

тобто існують дві такі абсолютні сталі $C_1 > 0$ та $C_2 > 0$, що для всіх $n = 0, 1, \dots$

$$C_2 \sum_{k=n}^{2n} \frac{\varepsilon_k}{k - n + 1} \leq S_n(\varepsilon) \leq C_1 \sum_{k=n}^{2n} \frac{\varepsilon_k}{k - n + 1}.$$

Метою даної роботи є встановлення нерівностей типу (1.9) на деяких класах 2π -періодичних диференційовних в узагальненому розумінні функцій.

1.2. Класи узагальнено-диференційовних функцій

В даному підрозділі ми знайдемо r -ту похідну функції $f(\cdot)$, яка задана рядом Фур'є, покажемо, що ряд Фур'є сумовної функції можна почленно інтегрувати, визначимо класи функцій, диференційовних в сенсі Вейля та Вейля-Надя, запишемо означення $\bar{\psi}$ -похідної.

Нехай функція $f(\cdot)$ має $(r + 2)$ - неперервну похідну, $r \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(-a_k \sin kx + b_k \cos kx) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \left(a_k \cos(kx + \frac{\pi}{2}) + b_k \sin(kx + \frac{\pi}{2}) \right). \\ f''(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \left(-ka_k \sin(kx + \frac{\pi}{2}) + kb_k \cos(kx + \frac{\pi}{2}) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k \cos(kx + \pi) + b_k \sin(kx + \pi)). \end{aligned}$$

Запишемо r -ту похідну функції $f(\cdot)$

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k \cos(kx + \frac{r\pi}{2}) + b_k \sin(kx + \frac{r\pi}{2}) \right). \quad (1.12)$$

Позначимо через A^r множину функцій $f \in L_1$ у яких існують і є абсолютно неперервні похідні до $(r - 1)$ -го ($r \in \mathbb{N}$) порядку включно, а через $\mathfrak{N}$ – деякий інший клас функцій з L_1 . Тоді якщо при деяких $r \in \mathbb{N}$, $f \in A^r$, і крім того, $f^{(r)} \in \mathfrak{N}$, будемо говорити, що $f(\cdot) \in A^r \mathfrak{N}$. Наприклад, $A^r S_M$ – клас 2π -періодичних функцій, r -ті похідні яких по модулю не

перевищують M майже скрізь. Зокрема, якщо $M = 1$, то $A^r S_1$. Цей клас прийнято позначати через W^r .

Нехай L^0 – множина функцій $f \in L_1$ з середнім значенням на періоді рівним нулю

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

В монографії О.І.Степанця [4] приведено таке твердження

Теорема 3 [4]. Множина $A^r, r \in \mathbb{N}$ співпадає з множиною $\bar{A}^r$ функцій $f \in L_1$, що зображаються рівністю

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \cos(kt - \frac{r\pi}{2}) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.13)$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt,$$

а $\varphi(\cdot)$ – деяка функція з L^0 .

З того, що $A^r = \bar{A}^r$ слідує, що на множині A^r (або $\bar{A}^r$) оператор D^r диференціювання порядку $r \in \mathbb{N}$ можна також визначити як оператор, який ставить у відповідність кожній функції $f \in A^r$ функцію $\varphi \in L^0$. Такий підхід дозволяє розширити операцію диференціювання і на дробові $r, r > 0$ наступним чином.

Нехай $\varphi(x) \in L^0$, а її ряд Фур'є має вигляд

$$\varphi(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(\varphi) \cos kx + b_k(\varphi) \sin kx) \quad (1.14)$$

В монографії І.П.Натансона [5] доведено таке твердження

Теорема 4 [5]. Нехай на проміжку $[-\pi; \pi]$ задана сумовна функція $f(x)$, для якої ряд (1.1) є її рядом Фур'є. Якщо $[A; B] \subset [-\pi; \pi]$, то

$$\int_A^B f(x)dx = \int_A^B \frac{a_0}{2} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_A^B (a_k \cos kx + b_k \sin kx) dx.$$

Іншими словами, можна почленно інтегрувати ряд Фур'є сумовної функції. Цей факт дуже цікавий, оскільки ряд Фур'є для функції $f(x)$ може і не збігатися.

Користуючись цією теоремою проінтегруємо ряд (1.14), одержимо

$$\int \varphi(x)dx \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(\varphi) \frac{1}{k} \cos \left(kx - \frac{\pi}{2} \right) + b_k(\varphi) \frac{1}{k} \sin \left(kx - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

або після r разів інтегрування будемо мати

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(\varphi) \frac{1}{k^r} \cos \left(kx - \frac{r\pi}{2} \right) + b_k(\varphi) \frac{1}{k^r} \sin \left(kx - \frac{r\pi}{2} \right) \right) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) \cos ku du \frac{1}{k^r} \cos \left(kx - \frac{r\pi}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) \sin ku du \frac{1}{k^r} \sin \left(kx - \frac{r\pi}{2} \right) \right) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) \left(\cos ku \cos \left(kx - \frac{r\pi}{2} \right) + \sin ku \sin \left(kx - \frac{r\pi}{2} \right) \right) du = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos k(x-u) - \frac{r\pi}{2} \right) du. \end{aligned}$$

Зробивши заміну інтегрування $t = x - u$, знайдемо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \cos \left(kt - \frac{r\pi}{2} \right) dt.$$

Ряд (1.13) має сенс для будь-яких $r > 0$ і $\varphi \in L^0$. При фіксованому $r > 0$ позначимо через J_r^r множину функцій $f \in L_1$, для яких $S[f]$ співпадає з правою частиною (1.13), і назовемо її множиною r -тих періодичних інтегралів

функції $\varphi \in L^0$. На множині $\mathcal{J}_r^r$ визначимо оператор D_r^r , як оператор, що ставить у відповідність функції $f \in \mathcal{J}_r^r$ функцію $\varphi \in L^0$ згідно з формулою

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \cos(kt - \frac{r\pi}{2}) dt. \quad (1.15)$$

Таким чином визначається оператор диференціювання D_r^r при будь-якому $r > 0$.

При цьому функцію $\varphi(\cdot)$ будемо називати r -тою похідною в сенсі Вейля і використовувати наступне позначення: $\varphi(\cdot) = D_r^r(f) = f_r^r(\cdot)$.

Разом із функцією $f(\cdot)$ до множини $\mathcal{J}_r^r$ належить будь-яка функція, яка відрізняється від неї на будь-якій множині міри нуль. Тому, при $r \in \mathbb{N}$, взагалі кажучи, $\mathcal{J}_r^r \supset A^r$. Домовимося надалі у випадку збіжності ряду в (1.15) в якості функції $f(\cdot)$, як елемента множини $\mathcal{J}_r^r$, брати його суму. Тоді, очевидно, при $r \in \mathbb{N}$ $\mathcal{J}_r^r = A^r$, $D_r^r = D^r$ і $f_r^r(\cdot) = f^r(\cdot)$.

Класи функцій, диференційовних в сенсі Вейля, визначаються так само, як і класи функцій, які допускають звичайне диференціювання. Якщо $f \in \mathcal{J}_r^r$ і, крім того, $f_r^r \in \mathfrak{N}$, то кажуть, що функція f належить класу $\mathcal{J}_r^r \mathfrak{N}$. Якщо $\mathfrak{N}$ – який-небудь конкретний клас функцій, то $\mathcal{J}_r^r \mathfrak{N} = W_r^r \mathfrak{N}$. Наприклад, $W_r^r H_\omega$ – клас функцій $f(\cdot)$, у яких $f_r^r \in H_\omega$, $W_r^r S_M$ – клас функцій $f(\cdot)$, для яких майже всюди виконується нерівність $|f_r^r(\cdot)| \leq 1$, і т.д. Останній клас позначають ще через W_r^r . У випадках, коли це не викликає непорозумінь, нижній індекс r у позначеннях D_r^r , W_r^r , $\mathcal{J}_r^r$ і f_r^r опускають.

Зрозуміло, що при $r \in \mathbb{N}$ класи $W_r^r \mathfrak{N}$ співпадають з класами $W^r \mathfrak{N}$. Тому, якщо $f \in \mathcal{J}_r^r$ при $r \geq 1$, то вона, принаймні, абсолютно неперервна. Якщо ж $r \in (0; 1)$, то $f(\cdot) \in \mathcal{J}_r^r$ не гарантує, навіть, звичайної неперервності.

Розглянемо множини $\mathcal{J}_\beta^r$ функцій $f(\cdot)$, для яких при фіксованих $r > 1$ і $\beta \in (-\infty, \infty)$

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \cos(kt - \frac{\beta\pi}{2}) dt = \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_0(f)}{2} + \cos \frac{(\beta - r)\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x - t) \cos(kt - \frac{rt}{2}) dt + \\
&+ \sin \frac{(\beta - r)\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x - t) \cos(kt - \frac{r+1}{2}\pi) dt, \quad (1.17)
\end{aligned}$$

де $\varphi \in L^0$, і введення оператора D_β^r , діючого з $\mathcal{I}_\beta^r$ в L^0 згідно рівності (1.16).

Ясно, що при

$$\beta = r + 2k, k \in \mathbb{Z},$$

множина $\mathcal{I}_\beta^r$ співпадає з множиною $\mathcal{I}_r^r$, а при

$$\beta = r + 1 + 2k$$

функції, які утворюють множину $\mathcal{I}_\beta^r$ і множину $\mathcal{I}_{\beta+1}^r$ можуть відрізнитися лише на постійний доданок. При інших значеннях β функції із множин $\mathcal{I}_\beta^r$ являються лінійними комбінаціями пари спряжених функцій, які належать відповідно до $\mathcal{I}_r^r$ і $\mathcal{I}_{r+1}^r$.

Множини $\mathcal{I}_\beta^r$ вперше розглянув Б.Надь. Тому функцію $\varphi(\cdot)$ з (1.16) ми називаємо (r, β) -похідною в сенсі Вейля-Надя; надалі її інколи будемо позначати через $f_\beta^r(\cdot)$, так що $f_\beta^r = D_\beta^r f$ і

$$S[f_\beta^r] = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \left(a_k(f) \cos \left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + b_k(f) \sin \left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right). \quad (1.18)$$

Множина $\mathcal{I}_\beta^r$ складається із функцій $f(\cdot)$, для яких ряд (1.18) є рядом Фур'є деякої сумовної функції. Щоб переконатися в цьому. Достатньо в рівності (1.16) замість $\varphi(\cdot)$ підставити (1.18) і виконати елементарні перетворення. Отже, $\forall r > 0, \beta \in (-\infty, \infty)$

$$\mathcal{I}_\beta^r = \{f(\cdot): D_\beta^r f = f_\beta^r(\cdot) \in L^0\}. \quad (1.19)$$

Класи функцій, диференційовних в сенсі Вейля-Надя, вводяться звичайним нам способом. Якщо $f \in \mathcal{I}_\beta^r$ і при цьому $f_\beta^r \in \mathfrak{N}$, то кажуть, що

$f(\cdot)$ належить класу $\mathcal{I}_\beta^r \mathfrak{N}$. Якщо $\mathfrak{N}$ – деякий конкретний клас функцій, то $\mathcal{I}_\beta^r \mathfrak{N} = W_\beta^r \mathfrak{N}$.

Зрозуміло, що при

$$\beta = r + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad W_\beta^r \mathfrak{N} = W_r^r \mathfrak{N},$$

а при

$$r = \beta + 1 + 2k \quad W_\beta^r \mathfrak{N} = W_{r+1}^r \mathfrak{N} = \widetilde{W_r^r \mathfrak{N}}.$$

О.І.Степанець (див. [6;7], а також [8], розділ III, §11) ввів поняття $\bar{\psi}$ -похідних і таким чином визначив класи $C^{\bar{\psi}} C^0$.

Нехай $f \in L$ і її ряд Фур'є має вигляд (1.1), $\bar{\psi} = (\psi_1; \psi_2)$ – пара довільних послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ така, що задовольняє умову

$$\bar{\psi}^2(k) = \psi_1^2 + \psi_2^2 \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Функцію φ назовемо $\bar{\psi}$ -похідною функції f якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)} A_k(f; x) - \frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)} \widetilde{A}_k(f; x) \right),$$

де

$$\widetilde{A}_k(f; x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx,$$

є рядом Фур'є функції $\varphi \in L$ і будемо позначати $\varphi(\cdot) = f^{\bar{\psi}}(\cdot)$. Підмножину неперервних функцій $f \in C$, які мають $\bar{\psi}$ -похідні, позначимо через $C^{\bar{\psi}}$.

Якщо $f \in C^{\bar{\psi}}$ і при цьому

$$f^{\bar{\psi}} \in C^0 = \left\{ \varphi \in C : \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = 0 \right\},$$

то множину таких функцій позначимо через $C^{\bar{\psi}} C^0$.

Через $\mathfrak{M}$ позначається множина опуклих донизу при $k \geq 1$ функцій $\psi(k)$, для яких

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(k) = 0,$$

а $\mathfrak{M}_0$ – підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, що задовольняють умову

$$0 < \mu(\psi; t) := \frac{t}{\eta(t) - t} \leq K < \infty,$$

де

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right).$$

Через $\mathfrak{M}'$ позначають підмножину функцій $\psi(\cdot) \in \mathfrak{M}$ таких, що

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t} dt \leq K < \infty,$$

а $\mathfrak{L}$ – множина пар $\bar{\psi} = (\psi_1; \psi_2)$ така, що ряд

$$\sum_{k=1}^\infty (\psi_1(k) \cos kx + \psi_2(k) \sin kx)$$

є рядом Фур'є деякої функції $\psi(x)$.

О.І.Степанець (див. [9], а також [8], розділ V) встановив такий аналог нерівності Лебега (1.9).

Якщо $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$, то для будь-якої функції $f \in C^{\bar{\psi}}C^0$ при довільному $n \in \mathbb{N}$

$$\|\rho_n(f; x)\|_C \leq \left(\frac{4}{\pi^2} \bar{\psi}(n) \ln n + \frac{2}{\pi} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + O(1) \bar{\psi}(n) \right) E_n(f^{\bar{\psi}})_C,$$

де $O(1)$ – величина, рівномірно обмежена по $n \in \mathbb{N}$ і по $f \in C^{\bar{\psi}}C^0$, $\bar{\psi} = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}$.

Позначимо через $C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon^0$ множину неперервних функцій $f(\cdot)$, $\bar{\psi}$ -похідні, яких належать до $C_\varepsilon^0 = C_\varepsilon C^0$.

У даній роботі ми замінимо множину $\mathfrak{M}$ більш широкою множиною, а саме, замість опуклості послідовностей $\psi_i, i = 1, 2$, будемо вимагати квазіопуклість. П.В.Задереєм [10] доведено наступну теорему

Теорема 5 [10]. Нехай

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_1(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_2(k) = 0, \quad (1.20)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k(|\Delta^2 \psi_1(k-1)| + |\Delta^2 \psi_2(k-1)|) < \infty, \quad (1.21)$$

де

$$\Delta^2 \psi_i(k-1) = \psi_i(k-1) - 2\psi_i(k) + \psi_i(k+1), i = 1, 2.$$

Тоді для будь-якої функції $f \in C^{\bar{\psi}} C^0$ при $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} \|\rho_n(f; x)\|_C &\leq \left(\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sqrt{\psi_1^2(n+k) + \psi_2^2(n+k)} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} + \right. \\ &\left. + O(1) \sum_{k=1}^{\infty} k(|\Delta^2 \psi_1(n+k-1)| + |\Delta^2 \psi_2(n+k-1)|) \right) E_n(f^{\bar{\psi}})_C, \end{aligned} \quad (1.22)$$

крім того,

$$\begin{aligned} \sup_{f \in C^{\bar{\psi}} C_{\varepsilon}^0} \|\rho_n(f; x)\|_C &= \left(\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sqrt{\psi_1^2(n+k) + \psi_2^2(n+k)} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} + \right. \\ &\left. + O(1) \sum_{k=1}^{\infty} k(|\Delta^2 \psi_1(n+k-1)| + |\Delta^2 \psi_2(n+k-1)|) \right) \varepsilon_n. \end{aligned} \quad (1.23)$$

РОЗДІЛ 2

НЕРІВНІСТЬ ЛЕБЕГА-ЛАНДАУ НА КЛАСАХ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ ДРОБОВУ ПОХІДНУ

2.1. Означення ψ -похідної функції з H_∞

В даному підрозділі магістерської роботи ми запишемо означення просторів $C(T)_+$, $L_\infty(T)_+$, $L_1(T)_+$, H_∞ , $C^\psi(T)_+$, $C_\infty^\psi(T)_+$, H_∞^ψ .

Через $A(D)$ будемо позначати множину аналітичних в одиничному крузі комплексної області

$$D = \{z: |z| < 1\}$$

функцій $f(z)$, а через H_∞ – простір функцій $f \in A(D)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{H_\infty} = \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty.$$

Якщо функція аналітична в точці, то це означає що вона диференційовна в цій точці і в деякому околі цієї точки.

Якщо функція диференційовна в кожній точці області, то вона є аналітичною в цій області.

Нехай $S_n(f; z)$ – частинні суми ряду Тейлора-Маклорена функцій $f \in H_\infty$,

$$S_n(f; z) = S_n(f) = \sum_{k=0}^n C_k z^k, \quad z \in D, \quad C_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

а $C(T)_+$, $L_\infty(T)_+$, $L_1(T)_+$ – простори функцій $f(e^{it})$, відповідно, неперервних, суттєво обмежених та сумовних на колі одиничного радіуса

$$T = \{z: |z| = 1\}$$

з нормами

$$\|f\|_C = \max_{z \in T} |f(z)|,$$

$$\|f\|_{L_\infty} = \text{vraisup}_{z \in T} |f(z)|,$$

$$\|f\|_{L_1} = \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})| dt$$

і таких, що їх коефіцієнти Фур'є

$$\hat{f}(-k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{ikt} dt = 0 \text{ при } k = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

О.І.Степанцем [4] було введено поняття ψ -похідної таким чином.

Нехай $\psi = \{\psi(k)\}_{k=0}^\infty$, $\psi(0) = 1$ – довільна послідовність комплексних чисел, а функція $f \in L_1(T)_+$ і

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt}$$

її ряд Фур'є. Якщо ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi(k) \hat{f}(k) e^{ikt}$$

є рядом Фур'є деякої функції $g \in L_1(T)_+$ то її називають ψ -інтегралом функції f і позначають $\mathcal{I}^\psi f$. Множину ψ -інтегралів всіх функцій $f \in L_1(T)_+$ позначають через $L^\psi(T)_+$. Якщо для заданої функції $F \in L^\psi(T)_+$ вказано функцію $f \in L_1(T)_+$ таку, що майже скрізь на T виконується рівність

$$F(e^{it}) = \mathcal{I}^\psi f(e^{it})$$

то функцію f називають ψ -похідною функції F і позначають $f = F^\psi$.

Нехай, у подальшому,

$$C^\psi(T)_+ = L^\psi(T)_+ \cap C(T)_+;$$

$A(\bar{D})$ – простір функцій аналітичних в крузі D і неперервних в замкнутому крузі $\bar{D} = \{z: |z| \leq 1\}$ з нормою

$$\|f\|_{A(\bar{D})} = \max_{z \in \bar{D}} |f(z)|,$$

а

$$C^\psi_\infty(T)_+ = \{f \in C^\psi(T)_+ : \|f^\psi\|_\infty \leq 1\}.$$

$$E_n(f)_{A(\bar{D})} = \inf_{p_n \in P_n} \|f(z) - p_n(z)\|_{A(\bar{D})}$$

– найкраще наближення функції f многочленами

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \in P_n$$

– множина многочленів степеня не вище n ;

$$r_n(f) = f(z) - S_n(f; z).$$

2.2. Умови інтегровності тригонометричних рядів та асимптотичні формули для інтегралу від модуля функції, заданої тригонометричним рядом

В цьому підрозділі розглянемо умови Сідона-Теляковського, розглянемо умови на коефіцієнти степеневого ряду, при яких цей ряд буде рядом Фур'є.

Кажуть, що послідовність $\{\psi(k)\}_{k=0}^{\infty}$, $\psi(k) \in \mathbb{C}$ задовольняє узагальнені умови типу Сідона-Теляковського, (умови $(S - T)^*$), якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(k) = 0 \quad (2.2)$$

та існують такі числа $A_k \searrow 0$, що

$$|\Delta\psi(k)| := |\psi(k) - \psi(k+1)| \leq A_k, \quad \forall k = 0, 1, \dots, \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| < \infty, \quad (2.4)$$

а також збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} < \infty. \quad (2.5)$$

Умови $(S - T)^*$, як було встановлено Л.Лейндлером [11], еквівалентні (тобто визначають одну й ту ж множину рядів) таким умовам:

- 1) існують числа $A_k \searrow 0$, що виконуються нерівності (2.3);
- 2) збігається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty;$$

3) має місце нерівність (2.5).

Ці умови називають умовами Сідона-Теляковського і позначають $S - T$.

Вперше ці умови встановив С.Сідон [11] і пізніше вдосконалив С.О.Теляковський [12] при вивченні умов інтегровності тригонометричних рядів

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad (2.6)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad (2.7)$$

де $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Якщо для коефіцієнтів ряду (2.6) виконуються умови (2.2) - (2.4), то С.О.Теляковський [12] встановив, що цей ряд є рядом Фур'є сумовної функції і виконується нерівність

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \right| dx \leq K \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |A_k|, \quad (2.8)$$

де K – деяка абсолютна стала.

Якщо для коефіцієнтів ряду (2.7) виконуються умови (2.2) - (2.4), то цей ряд є рядом Фур'є сумовної функції тоді і тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} \quad (2.9)$$

і справедлива оцінка

$$\int_{\frac{\pi}{(m+1)}}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \right| dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} + O \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |A_k| \right). \quad (2.10)$$

В дипломній роботі Д.Р.Хомутиної [13] «Умови інтегровності комплекснозначних тригонометричних рядів» встановлено наступне твердження

Теорема 6 [13]. Якщо послідовність $\{\psi(k), k = 1, 2, \dots\}$, де $\psi(0) = 1$, задовольняє умови $(S - T)^*$ та

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} < \infty,$$

то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi(k) e^{ikt}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\psi(\cdot) \in L(T)_+$.

В ряді задач використовуються не оцінки (2.8), а асимптотичні рівності типу (2.9). Такі асимптотичні рівності були знайдені С.О.Теляковським [14].

Нехай коефіцієнти тригонометричного ряду (1.1) прямують до нуля і збігаються ряди (ми вважаємо $b_0 = 0$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k|, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta b_k|, \quad (2.11)$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \frac{\Delta a_{i-k} - \Delta a_{i+k}}{k} \right|, \quad \sum_{i=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \frac{\Delta b_{i-k} - \Delta b_{i+k}}{k} \right| \quad (2.12)$$

Тоді ряд (1.1) збігається для всіх $x \in [0; 2\pi]$, за виключенням, можливо, точки $x = 0$, а його сума неперервна для всіх $x \neq 0$ та інтегровна.

Оскільки ряди (2.11) та (2.12) збігаються, то для будь-якого натурального m будуть збігатися ряди

$$\sum_{i=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \frac{\Delta a_{m+i-k} - \Delta a_{m+i+k}}{k} \right|$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \frac{\Delta b_{m+i-k} - \Delta b_{m+i+k}}{k} \right|.$$

Тому для кожного m

$$\begin{aligned} J_m = & \sum_{i=2}^{m-2} \left| \sum_{k=1}^{q_{i,m}} \frac{\Delta a_{i-k} - \Delta a_{i+k}}{k} \right| + \sum_{i=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \frac{\Delta a_{m+i-k} - \Delta a_{m+i+k}}{k} \right| + \\ & + \sum_{i=2}^{m-2} \left| \sum_{k=1}^{q_{i,m}} \frac{\Delta b_{i-k} - \Delta b_{i+k}}{k} \right| + \sum_{i=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \frac{\Delta b_{m+i-k} - \Delta b_{m+i+k}}{k} \right|, \end{aligned} \quad (2.13)$$

де

$$q_{i,m} = \min \left(\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor; \left\lfloor \frac{m-i}{2} \right\rfloor \right).$$

Введемо позначення

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| + \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta b_k| \quad (2.14)$$

і

$$H_m = J + J_m. \quad (2.15)$$

Теорема 7 [14]. Нехай коефіцієнти ряду (1.1) прямують до нуля і збігаються ряди (2.9), (2.11), (2.12). Тоді для інтегралу

$$I = \int_0^{2\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| dx \quad (2.16)$$

рівномірно відносно $m = 0, 1, 2, \dots$ справедлива оцінка

$$\left| I - 2 \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{\xi_k}{k} + \sum_{k=2m+1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} \right\} \right| \leq c H_m, \quad (2.17)$$

де

$$\xi_k = \xi \left(b_k, \sqrt{(a_{m-k} - a_{m+k})^2 + (b_{m-k} - b_{m+k})^2} \right),$$

а функція $\xi(t, u)$ визначається рівністю

$$\xi(t, u) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}|t|, & \text{при } |u| \leq |t|, \\ |t| \arcsin \left| \frac{t}{u} \right| + \sqrt{u^2 - t^2}, & \text{при } |t| < |u|. \end{cases}$$

Ці асимптотичні рівності були отримані С.О.Теляковським для функцій, заданих дійсними тригонометричними рядами. Нам будуть потрібні подібні результати у випадку комплекснозначних тригонометричних рядів.

Нехай коефіцієнти $\psi_k \in \mathbb{C}$ інтегралу

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k e^{ikt} \right| dt \quad (2.18)$$

задовольняють умову типу Сідона-Теляковського [11; 12], які будемо позначати $(S - T)^*$.

Розглянемо умови інтегровності $(S - T)^*$ для послідовності $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$, де $c_k \in \mathbb{C}$. Покладемо

$$c_k = a_k - ib_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad c_0 = \frac{a_0}{2},$$

тобто є комплексними числами, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + i \sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kt + a_k \sin kt),$$

і враховуючи нерівності

$$|\Delta a_k| \leq |\Delta c_k|,$$

$$|\Delta b_k| \leq |\Delta c_k|$$

можна стверджувати, що ряд в (2.18) при виконанні умов (2.2) - (2.7) буде рядом Фур'є деякої функції

$$f(\cdot) \in L_+ = \{g \in L: c_{-k} = 0, k = 1, 2, \dots\}.$$

Харлі-Літтвудом [1, с.454] було встановлено оцінку

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k+1} \leq K \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} \right| dt,$$

де $f \in L_+$ будь-яка функція з рядом Фур'є

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

Пізніше Л.Фейєр [15] показав, що $K = \pi$.

Г.М.Голузин [16] покращив цю оцінку

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k|}{k + \frac{1}{2}} \leq \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} \right| dt.$$

У статті О.В.Єфімова [17] доведено, що

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^n c_k e^{ikt} \right| dt \leq K \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k)}{n+1} |\Delta^2 c_k| + \sum_{k=1}^n \frac{|c_k| + |c_{n-k}|}{k} \right).$$

М.В.Гаєвським і П.В.Задереєм [18] було встановлено асимптотичну рівність для інтегралу від модуля тригонометричного полінома

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikt} \right| dt &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} (|c_k| + |c_{n-k}|) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 4 \frac{|c_k| \cdot |c_{n-k}|}{(|c_k| + |c_{n-k}|)^2} \sin^2 t} dt + \\ &+ O \left(\sum_{k=1}^{k(n-k)} |\Delta^2 c_{k-1}| \right). \end{aligned}$$

Асимптотичні рівності для інтеграла від модуля комплексного тригонометричного ряду були отримані П.В.Задереєм, М.В.Гаєвським та М.А.Веремієм в роботі [19]

Теорема 7 [19]. Якщо коефіцієнти ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

задовольняють умови

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$;
- 2) існують такі числа A_k такі, що

$$|\Delta c_k| := |c_k - c_{k+1}| \leq A_k, \quad \forall k = 0, 1, \dots;$$

$$3) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| < \infty;$$

$$4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} < \infty,$$

то для інтеграла

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} \right| dt$$

рівномірно відносно $m = 0, 1, \dots$ справедлива асимптотична рівність

$$I = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^m (|c_k| + |c_{m-k} - c_{m+k}|) J_{m,k}(c) + 2 \sum_{k=2m+1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} + o(T_m(A)),$$

де

$$J_{m,k}(c) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 4 \frac{|c_k| \cdot |c_{m-k} - c_{m+k}|}{(|c_k| + |c_{m-k} - c_{m+k}|)^2} \sin^2 t} dt, \quad (2.19)$$

а

$$T_m(A) := \sum_{k=0}^m (k+1) |\Delta A_k| + \sum_{k=m+1}^{\infty} (k-m+1) |\Delta A_k|.$$

2.3. Згортка двох сумовних функцій

Тут буде наведено означення згортки двох сумовних функцій, а також показано зображення згортки для функцій з класу $C_{\infty}^{\psi}(T)_{+}$.

А.Зигмундом [1] було доведено наступну теорему

Теорема 8 [1]. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ є інтегровними і періодичними, то функція

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t) dt \quad (2.20)$$

називається згорткою функцій $f(\cdot)$ та $g(\cdot)$. Ця функція є інтегровною і періодичною.

Якщо

$$\begin{aligned} f &\sim \sum c_{\nu} e^{i\nu x}, \\ g &\sim \sum d_{\nu} e^{i\nu x}, \end{aligned}$$

то

$$h(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_{\nu} d_{\nu} e^{i\nu x}. \quad (2.21)$$

Нам потрібне представлення функцій з класу $C_{\infty}^{\psi}(T)_{+}$ у вигляді згортки. Ми приведемо це зображення у наступному твердженні, яке має і самостійний інтерес

Лема 1. Якщо послідовність комплексних чисел $\psi = \{\psi(k)\}_{k=0}^{\infty}$, $\psi(0) = 1$, є такою, що тригонометричний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi(k) e^{ikt}$$

є рядом Фур'є деякої функції $\Psi(\cdot) \in L(T)_+$, а функція $\varphi(t) \in L_{\infty}(T)_+$ та $\|\varphi\|_{\infty} \leq 1$, то елементи множини $C_{\infty}^{\psi}(T)_+$ зображаються згорткою

$$f(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\tau}) \Psi(t - \tau) d\tau, \quad (2.22)$$

де $\varphi(\cdot)$ майже скрізь співпадає з $f^{\psi}(e^{it})$.

Доведення лема 1. Нехай ряд Фур'є функції $\varphi(\cdot)$ має вигляд

$$S[\varphi] = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k e^{ikt}$$

тоді, як відомо, згідно теореми 8 [1] (див. формулу (2.21)) ряд Фур'є згортки (2.22) має вигляд

$$S[f] = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \widehat{\varphi}_k e^{ikt}.$$

Тобто функція f є ψ -інтегралом функції φ , тому $f \in C_{\infty}^{\psi}(T)_+$. Лема доведена.

2.4. Нерівності Лебега та Лебега-Ландау

В цьому підрозділі буде наведено нерівність в комплексному випадку, яку довів О.І.Степанець, В.В.Савчук та А.М.Швецова, а також сформульована і доведена нова нерівність типу Лебега.

О.І.Степанцем [6] було встановлено, що для будь-якого $f \in A(\bar{D})$ при довільному $n \in \mathbb{N}$

$$\|r_n(f)\|_{A(\bar{D})} \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1) \right) E_n(f)_{A(\bar{D})}. \quad (2.23)$$

Ця рівність є аналогом відомої нерівності Лебега (1.8) і її називають нерівністю Лебега-Ландау для функцій $f \in A(\bar{D})$.

Метою даної роботи є одержання нерівностей Лебега-Ландау для функцій з класів $C^\psi(T)_+$.

Для дійснозначних ψ нам будуть потрібні, в подальшому, множини $\mathfrak{M}$ та $\mathfrak{M}_0$, які означені в попередньому розділі (див. ст.23).

В.В.Савчуком [20] встановлено такий аналог нерівності Лебега-Ландау (2.1): якщо

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad \text{і} \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0,$$

то для будь-якої функції $f \in C^\psi(T)_+$ при будь-яких $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність

$$\|r_n(f)\|_{C(T)_+} \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1) \right) |\psi(n)| E_n(f^\psi)_{C(T)_+}, \quad (2.24)$$

де $O(1)$ – величина, яка рівномірно обмежена по n . Для будь-якої функції $f \in C^\psi(T)_+$ при кожному $n \in \mathbb{N}$ знайдеться функція

$$F = (e^{it}) = F(e^{it}, n)$$

така, що

$$E_n(F^\psi)_{C(T)_+} = E_n(f^\psi)_{C(T)_+}$$

і для цієї функції співвідношення (2.24) стає рівністю.

Нехай

$$V_{n+1}^\infty(\psi) = \int_{n+1}^{\infty} \text{vraisup}_{k \geq t} |\psi'(t)| dt,$$

а H_∞^ψ – клас функцій з H_∞ для яких ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} C_k z^k = f^\psi(z)$$

є рядом Тейлора функції f^ψ і $\|f^\psi\|_\infty \leq 1$. Подібний клас функцій був введений Ж.Шейком [21].

А.М.Швецовою [22] було встановлено, що якщо $n \in \mathbb{N}$, $\psi(\cdot): (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ локально абсолютно неперервна на $[n+1, \infty)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(k) = 0$, $\psi(k) \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, $\tilde{V}_{n+1}^\infty(\psi) < \infty$, то

$$\begin{aligned} \sup_{f: f^\psi \in H_\infty} \frac{\|f - S_n(f)\|_\infty}{E_n(f^\psi)_\infty} &= \sup_{f \in H_\infty^\psi} \|f - S_n(f)\|_\infty = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{|\psi(n+k)|}{k} + \theta \tilde{V}_{n+1}^\infty(\psi), \end{aligned} \quad (2.25)$$

де $|\theta| \leq K$.

В даній роботі буде уточнене співвідношення (2.25), а саме виділено ще один член, який при деяких досить малих $\psi(\cdot)$ буде більшим, ніж

$$\sum_{k=1}^n \frac{|\psi(n+k)|}{k}.$$

Теорема 9. Нехай послідовність

$$\{\psi(k)\}_{k=0}^\infty = \{\psi_1(k) + i\psi_2(k)\} \in (S - T)^*,$$

тобто для $\psi(k)$ виконуються умови (2.2) – (2.5). Тоді для будь-якої функції $f \in H_\infty^\psi$ при $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність

$$\begin{aligned} \|f(z) - S_n(f, z)\|_C &\leq \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{|\psi(n+k)|}{k} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} + \right. \\ &\quad \left. + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| \right) \cdot E_n(f^\psi)_{A(\overline{D})}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Нехай $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}, k \in \mathbb{N}$, послідовність невід'ємних чисел, що монотонно прямує до нуля і

$$C_\varepsilon = \{f \in C(T)_+ : E_n(f)_{C(T)_+} \leq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

і нехай $C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon$ – множина неперервних на T функцій, $\bar{\psi}$ – похідні яких належать до C_ε .

Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{f \in C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon} \|f(z) - S_n(f; z)\|_C = \\ = \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{|\psi(n+k)|}{k} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| \right) \cdot \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Доведення теореми 9. Оскільки послідовність $\{\psi(k)\}_{k=1}^\infty$, $\psi(0) = 1$ задовольняє умови $(S - T)^*$ та

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} < \infty,$$

то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi(k) e^{ikt}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\Psi(\cdot) \in L(T)_+$ (див. [13]).

На основі леми 1 функція $f(e^{it})$, що зображається згортокою (2.22) належить множині $C_\infty^\psi(T)_+$. А тому

$$\|f(e^{it}) - S_n(f, e^{it})\|_\infty = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^\psi(e^{i\tau}) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) e^{ik(t-\tau)} d\tau \right\|_\infty =$$

$$= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(e^{i\tau}) - t_n^*(e^{i\tau})) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) e^{ik(t-\tau)} d\tau \right\|_{\infty},$$

де $t_n^*(e^{i\tau})$ – тригонометричний поліном n -го порядку, який найкраще наближає функцію $f(e^{i\tau}) \in C_{\infty}^{\psi}(T)_+$. Тому

$$\begin{aligned} \|\rho_n(e^{it})\|_{\infty} &= \|f(e^{it}) - S_n(f, e^{it})\|_{\infty} \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(e^{i\tau}) - t_n^*(e^{i\tau})\| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) e^{ik(t-\tau)} \right| d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) e^{ik(t-\tau)} \right| d\tau E_n(f)_{\infty} = \left| \begin{array}{l} \text{зробимо заміну} \\ t - \tau = u, \\ d\tau = -du \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_t^{t-2\pi} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) e^{iku} \right| du E_n(f)_{\infty} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) e^{iku} \right| du E_n(f)_{\infty}. \end{aligned}$$

Як відомо з теореми 7 [19]

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} \right| dt = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^m (|c_k| + |c_{m-k} - c_{m+k}|) \mathcal{J}_{m,k}(c) + 2 \sum_{k=2m+1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} + \\ &+ O(T_m(A)), \end{aligned}$$

де

$$\mathcal{J}_{m,k}(c) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 4 \frac{|c_k| \cdot |c_{m-k} - c_{m+k}|}{(|c_k| + |c_{m-k} - c_{m+k}|)^2} \sin^2 t} dt.$$

Теорема доведена.

РОЗДІЛ 3

ПРИКЛАДИ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ В НЕРІВНОСТІ ЛЕБЕГА-ЛАНДАУ ДРУГИЙ ЧЛЕН, ЯКИЙ ВИЗНАЧАЄ ПОРЯДОК СПАДАННЯ

В даному розділі магістерської дисертації приведемо приклад функції $f_*(e^{it})$, для якої визначальним, тобто більшим за порядком, в нерівності (2.26) буде член

$$\sum_{k=2n}^{\infty} \frac{|\psi_*(k)|}{k}.$$

Іншими словами в цьому розділі будуть розглянуті деякі приклади функції $\psi_*(k)$ такої, що сума

$$\sum_{k=2n}^{\infty} \frac{|\psi_*(k)|}{k}$$

буде по порядку більшою ніж сума

$$\sum_{k=1}^n \frac{|\psi_*(n+k)|}{k}.$$

Наприклад, якщо в якості $\psi_*(k)$ взяти функцію

$$\psi_*(k) = \frac{1+i}{\ln^2(k+1)}$$

то

$$\sum_{k=1}^n \frac{|\psi_*(n+k)|}{k} \approx \int_1^n \frac{|\psi_*(n+t)|}{t} dt = \int_1^n \frac{|1+i|}{t |\ln^2(n+t+1)|} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^n \frac{\sqrt{2}}{t \ln^2(n+t+1)} dt \leq \sqrt{2} \int_1^n \frac{d(\ln(n+t+1))}{\ln^2(n+t+1)} = \\
&= \left| \text{зробимо заміну} \right|_{\ln(n+t+1)=u} = \sqrt{2} \int_{n+2}^{2n+1} \frac{du}{u^2} = -\sqrt{2} \frac{1}{u} \Big|_{n+2}^{2n+1} = \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2n+1} + \frac{\sqrt{2}}{n+2} = \frac{\sqrt{2}(n-1)}{(2n+1)(n+2)} \leq \frac{\sqrt{2}}{2n+1},
\end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2n}^{\infty} \frac{|\psi_*(k)|}{k} &\approx \int_{2n}^{\infty} \frac{|\psi_*(t)|}{t} dt = \int_{2n}^{\infty} \frac{|1+i|}{t|\ln^2(t+1)|} dt = \int_{2n}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{t \ln^2(t+1)} dt = \\
&= \sqrt{2} \int_{2n}^{\infty} \frac{d(\ln(t+1))}{\ln^2(t+1)} = \left| \text{зробимо заміну} \right|_{\ln(t+1)=u} = \sqrt{2} \int_{\ln(2n+1)}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \\
&= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{u} \right) \Big|_{\ln(2n+1)}^{\infty} = \frac{\sqrt{2}}{\ln(2n+1)}.
\end{aligned}$$

Ясно, що

$$\frac{1}{\ln(2n+1)} > \frac{1}{2n+1},$$

а якщо

$$\psi_*(k) = \frac{1+i}{\ln(k+3) (\ln \ln(k+3))^2},$$

то

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{|\psi_*(n+k)|}{k} &\approx \int_1^n \frac{|\psi_*(n+t)|}{t} dt = \\
&= \int_1^n \frac{|1+i|}{t \ln(n+t+3) (\ln \ln(n+t+3))^2} dt \geq \\
&\geq \int_1^n \frac{\sqrt{2}}{t \ln(n+t+3) (\ln \ln(n+t+3))^2} dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2} \int_1^n \frac{d(\ln(n+t+3))}{t \ln(n+t+3) (\ln \ln(n+t+3))^2} = \\
&= \left| \text{зробимо заміну} \right|_{\ln(n+t+3)=u} = \sqrt{2} \int_{\ln(n+4)}^{\ln(2n+3)} \frac{du}{u \ln^2 u} = \\
&= \sqrt{2} \int_{\ln(n+4)}^{\ln(2n+3)} \frac{d(\ln u)}{\ln^2 u} = \left| \text{зробимо заміну} \right|_{\ln u = t} = \\
&= \sqrt{2} \int_{\ln \ln(n+4)}^{\ln \ln(2n+3)} \frac{dt}{t^2} = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_{\ln \ln(n+4)}^{\ln \ln(2n+3)} = \\
&= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln \ln(n+4)} - \frac{1}{\ln \ln(2n+3)} \right) = \\
&= \sqrt{2} \frac{\ln \ln(2n+3) - \ln \ln(n+4)}{\ln \ln(n+4) \cdot \ln \ln(2n+3)} = \\
&= \sqrt{2} \frac{\ln \frac{\ln(2n+3)}{\ln(n+4)}}{\ln \ln(n+4) \cdot \ln \ln(2n+3)}.
\end{aligned}$$

Тепер

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2n}^{\infty} \frac{|\psi_*(k)|}{k} &\approx \int_{2n}^{\infty} \frac{|\psi_*(t)|}{t} dt = \int_{2n}^{\infty} \frac{|1+i|}{t \ln(t+3) (\ln \ln(t+3))^2} dt = \\
&= \int_{2n}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{t \ln(t+3) (\ln \ln(t+3))^2} dt = \\
&= \sqrt{2} \int_{2n}^{\infty} \frac{d(\ln(t+3))}{\ln(t+3) (\ln \ln(2n+3))^2} = \left| \text{зробимо заміну} \right|_{\ln(t+3)=u} = \\
&= \sqrt{2} \int_{\ln(2n+3)}^{\infty} \frac{du}{u \ln^2 u} = \sqrt{2} \int_{\ln(2n+3)}^{\infty} \frac{d \ln u}{\ln^2 u} = \left| \text{зробимо заміну} \right|_{\ln u = t} = \\
&= \sqrt{2} \int_{\ln \ln(2n+3)}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_{\ln \ln(2n+3)}^{\infty} = \sqrt{2} \frac{1}{\ln \ln(2n+3)}.
\end{aligned}$$

Звідси слідує, що

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2}}{k \ln(n+k+3) (\ln \ln(n+k+3))^2} \leq \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{k \ln(k+3) (\ln \ln(k+3))^2}.$$

ВИСНОВОК

В магістерській дисертації розглядалися тригонометричні ряди і ряди Фур'є, а також нерівність Лебега та Лебега-Ландау. Були приведені попередні результати, що стосуються нерівності Лебега в дійсному і в комплексному випадку різними авторами.

Під час написання дисертації було отримано нерівність Лебега-Ландау на класах H_{∞}^{ψ} , яка містить два члени в головній частині, а в авторів, які отримували нерівність Лебега-Ландау раніше, в головному члені містився лише один доданок.

В останньому розділі були розглянуті приклади, для яких другий доданок нерівності (2.26) буде більшим за порядком ніж перший доданок.

Результати даної роботи будуть використовуватися при одержанні інших результатів, що стосуються нерівностей Лебега та Лебега-Ландау.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. В 2-х т. Т.1. / А.Зигмунд.- М.: Мир, 1965.-615 с.
2. *Lebesgue H.* Sur la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull.Soc.Math.France.-1910.-**38**.-P.210.
3. *Осколков К.И.* К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры // Мат.заметки.-1975.-**18**, №4.-С.515-526.
4. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2-х т. Т.1 / А.И.Степанец.-К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002.-427 с.
5. *Натансон І.П.* Основи теорії функцій дійсної змінної / І.П.Натансон.-Х.: Радянська школа, 1950.-424 с.
6. *Степанец А.И.* Приближение $\bar{\psi}$ -интегралов периодических функций суммами Фурье.-К.-1996.-70 с. (Предпринт / НАН Украины. Ин-т математики; 96-11).
7. *Степанец А.И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar{\psi}$ -интегралов // Укр. мат. журн.-1997.-**49**, №8.-с.1069-1113.
8. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2-х т. Т.2 / А.И.Степанец.-К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002.-468 с.

9. *Степанец А.И.* Приближение $\bar{\psi}$ -интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость).1 // Укр. мат. журн.-1998.-**50**, №2.-с.274-291.
10. *Задерей П.В.* Про нерівність Лебега на класах $\bar{\psi}$ -диференційовних функцій / П.В.Задерей, Н.М.Задерей // Укр. мат. журн.-2013. т.65, №6.-с.844-849.
11. *Garrett J.W.* L_1 -convergence of Fourier series with bounded variation / J.W.Garrett, C.S.Rees, C.V.Stanojevic // Proc.Amer.Math.Soc.-1980.-Vol.80.-P.423-430.
12. *Теляковский С.А.* Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов / С.А.Теляковский // Матем.Заметки.-1973.-Т14.-№3.С.317-328.
13. *Хомутинська Д.Р.* Умови інтегровності комплекснозначних тригонометричних рядів: магістер. дис.: 10.12.19 / Д.Р.Хомутинська.-К., 2019.-38 с.
14. *Теляковский С.А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации // Тр. Мат. Ин-та АН СССР. – 1971.-**109**, с.65–97.
15. *Fejer L.* Über gewisse Minimumprobleme der Funktionentheorie / L.Fejer // Math.Ann.-1926.-Vol.97.-P.104-123.
16. *Голузин Г.М.* Некоторые неравенства для аналитических функций// Г.М.Голузин // Изв. АН Казахской ССР.Сер.Матем.и мех.-1949.-№3.-С.101-105.
17. *Ефимова А.В.* Оценка интеграла от модуля многочлена единичной окружности / А.В.Ефимов // Успехи мат.наук.-1980.-Т.15, №4.-С.215-218.
18. *Гаєвський М.В.* Оцінки інтеграла від модуля многочлена на одиничному колі / М.В.Гаєвський, П.В.Задерей // Всеукраїнська літня науково-методична мат.шк. «Математичний аналіз та теорія

ймовірностей» 4-7 липня 2013 р., с.Плюти, Україна: Тези доповідей.-К.:НТУУ «КПІ ім.І.Сікорського», 2013.

19. *Задерей П.В.* Асимптотична формула для інтеграла від модуля функції, заданої рядом Фур'є / П.В.Задерей, М.В.Гаєвський, М.А.Веремій // Вісник КНУ ім.Т.Шевченка.-2017.-11 с.
20. *Савчук В.В.* Швидкість збіжності ряду Тейлора для деяких класів аналітичних функцій // Укр. мат. журн.-1998.-т.50, №7. – с.1001-1003.
21. *Sheik J.T.* Polynomial approximation of functions analytic in analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc., -1966.-Т.17, №6-Р. 1238-1243.
22. *Швецова А.М.* Приближения частыми суммами ряда Тейлора и наилучшее приближение некоторых классов функций, аналитических в единичном круге // Вісник Харківського нац.університету. Серія Математика, прикладна математика і механіка.-2000, №475, с.208-217.