

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Матеріали
VIII Міжнародної
науково-практичної конференції
Київ, 26–27 грудня 2019 року

Вінниця
2020

УДК 51(082)
МЗ4

Матеріали VIII Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 27–28 грудня 2019 р. — Вінниця: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2020. — 336 с. — Укр., рос., англ., білорус.

Материалы VIII Межд. науч.-практ. конф. «Математика в современном техническом университете», Киев, 27–28 декабря 2019 г. — Винница: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2020. — 336 с. — Укр., рус., англ., белорус.

Proceedings of Eighth International Scientific-Practical Conference “Mathematics in Modern Technical University”, Kyiv, December, 27–28, 2019. Vinnytsia: Publisher FOP Kushnir Yu. V., 2020. 336 pp.

ISBN 978-617-7721-27-6

Програмний комітет

VIII Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»:

Проф. О. І. Клесов (Київ, Україна), (голова)
Проф. Н. О. Вірченко (Київ, Україна)
Проф. О. В. Іванов (Київ, Україна)
Проф. П. В. Задерей (Київ, Україна)
Доц. О. О. Диховичний (Київ, Україна)

Організаційний комітет

Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»

Доц. В. О. Гайдей (Україна), голова
В. В. Бовсуновська (Київ, Україна)
Ю. Є. Приходько (Київ, Україна)

УДК 51(082)

Матеріали подано в авторській редакції

ISBN 978-617-7721-27-6

©Автори

©КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020



ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В СУМІЖНИХ НАУКАХ

Stochastic mutualism model of population dynamics

O. V. Borysenko

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

olga_borisenko@ukr.net

It is proved existence and uniqueness of the global positive solution to the system of stochastic differential equations describing a two-species mutualism model disturbed by white noise, centered and non-centered Poisson noises. We obtain the sufficient conditions of stochastic ultimate boundedness, stochastic permanence and extinction of the solution to the considered system.

Key words: stochastic mutualism model, global solution, stochastic ultimate boundedness, stochastic permanence, extinction.

The construction of the mutualism model and its properties are presented in Gopalsamy (1992). Mutualism occurs when one species provides some benefit in exchange for some benefit. A deterministic two-species mutualism model is described by the system

$$\begin{aligned}\frac{dN_1(t)}{dt} &= r_1(t)N_1(t) \left[\frac{K_1(t) + \alpha_1(t)N_2(t)}{1 + N_2(t)} - N_1(t) \right], \\ \frac{dN_2(t)}{dt} &= r_2(t)N_2(t) \left[\frac{K_2(t) + \alpha_2(t)N_1(t)}{1 + N_1(t)} - N_2(t) \right],\end{aligned}$$

where $N_1(t)$ and $N_2(t)$ denote population densities of each species at time t , $r_i(t) > 0, i = 1, 2$, denotes the intrinsic growth rate of species $N_i, i = 1, 2$, and $\alpha_i(t) > K_i(t) > 0, i = 1, 2$. The carrying capacity of species $N_i(t)$ is $K_i(t), i = 1, 2$, in the absence of other species.

In the paper Qiu and Wang (2013) it is considered the stochastic mutualism model of the form

$$\begin{aligned}dx(t) &= x(t) \left[\frac{a_1(t) + a_2(t)y(t)}{1 + y(t)} - c_1(t)x(t) \right] + \sigma_1(t)x(t)dw_1(t), \\ dy(t) &= y(t) \left[\frac{b_1(t) + b_2(t)x(t)}{1 + x(t)} - c_2(t)y(t) \right] + \sigma_2(t)y(t)dw_2(t),\end{aligned}\tag{1}$$

where $a_i(t), b_i(t), c_i(t), \sigma_i(t), i = 1, 2$, are all positive, continuous and bounded functions on $[0, +\infty)$, and $w_1(t), w_2(t)$ are independent Wiener processes. The authors show that the stochastic system (1) has a unique global (no explosion in a finite time) solution for any positive initial value, and that this stochastic model is stochastically ultimately bounded. The sufficient conditions for stochastic permanence and persistent in the mean of solution to the system (1) are obtained.

Population systems may suffer abrupt environmental perturbations, such as epidemics, fires, earthquakes, etc. So, it is natural to introduce Poisson noises into the

population model for describing such discontinuous systems. In Li et al. (2016) the authors consider the stochastic mutualism model with white and centered Poisson noises

$$\begin{aligned} dx(t) &= x(t^-) \left[\left(r_1(t) - \frac{b_1(t)x(t)}{K_1(t) + y(t)} - \varepsilon_1(t)x(t) \right) dt + \alpha_1(t)dw_1(t) + \int_{\mathbb{Y}} \gamma_1(t, z)\tilde{\nu}(dt, dz) \right], \\ dy(t) &= y(t^-) \left[\left(r_2(t) - \frac{b_2(t)y(t)}{K_2(t) + x(t)} - \varepsilon_2(t)y(t) \right) dt + \alpha_2(t)dw_2(t) + \int_{\mathbb{Y}} \gamma_2(t, z)\tilde{\nu}(dt, dz) \right], \end{aligned}$$

where $x(t^-)$, $y(t^-)$ are the left limit of $x(t)$ and $y(t)$ respectively, $r_i(t), b_i(t), K_i(t), \alpha_i(t), i = 1, 2$, are all positive, continuous and bounded functions, $\mathbb{Y}$ is measurable subset of $(0, +\infty)$, $w_i(t), i = 1, 2$, are independent standard one-dimensional Wiener processes, $\tilde{\nu}(t, A) = \nu(t, A) - t\Pi(A)$ is the centered Poisson measure independent on $w_i(t), i = 1, 2$, $E[\nu(t, A)] = t\Pi(A)$, $\Pi(\mathbb{Y}) < \infty$, $\gamma_i(t, z), i = 1, 2$, are random, measurable, bounded, continuous on t . The global existence and uniqueness of the positive solution to this problem are proved. The sufficient conditions of stochastic boundedness, stochastic permanence, persistence in mean and extinction of the solution are obtained.

In this paper, we consider the stochastic mutualism model with jumps driven by the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= x_i(t) \left[\frac{a_{i1}(t) + a_{i2}(t)x_{3-i}(t)}{1 + x_{3-i}(t)} - c_i(t)x_i(t) \right] dt + \\ &+ \sigma_i(t)x_i(t)dw_i(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_i(t, z)x_i(t)\tilde{\nu}_1(dt, dz) + \int_{\mathbb{R}} \delta_i(t, z)x_i(t)\nu_2(dt, dz), \quad (2) \\ x_i(0) &= x_{i0} > 0, i = 1, 2, \end{aligned}$$

where $w_i(t), i = 1, 2$, are independent standard one-dimensional Wiener processes, $\tilde{\nu}_1(t, A) = \nu_1(t, A) - t\Pi_1(A)$, $\nu_i(t, A), i = 1, 2$, are independent Poisson measures, which are independent on $w_i(t), i = 1, 2$, $E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A), i = 1, 2$, $\Pi_i(A), i = 1, 2$, are a finite measures on the Borel sets A in $\mathbb{R}$.

In the following we will use the notations:

$$\begin{aligned} X(t) &= (x_1(t), x_2(t)), \quad X_0 = (x_{10}, x_{20}), \quad |X(t)| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}, \\ \mathbb{R}_+^2 &= \{X \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}, \text{ for } i = 1, 2 \\ \beta_i(t) &= \frac{\sigma_i^2(t)}{2} + \int_{\mathbb{R}} [\gamma_i(t, z) - \ln(1 + \gamma_i(t, z))]\Pi_1(dz) - \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \delta_i(t, z))\Pi_2(dz). \end{aligned}$$

For the bounded, continuous functions $f_i(t), t \in [0, +\infty), i = 1, 2$, let us denote

$$(f_i)_{\sup} = \sup_{t \geq 0} f_i(t), \quad (f_i)_{\inf} = \inf_{t \geq 0} f_i(t), \quad i = 1, 2,$$

$$f_{\max} = \max\{(f_1)_{\sup}, (f_2)_{\sup}\}, \quad f_{\min} = \min\{(f_1)_{\inf}, (f_2)_{\inf}\}.$$

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space, $w_i(t), i = 1, 2, t \geq 0$ are independent standard one-dimensional Wiener processes on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, and $\nu_i(t, A), i = 1, 2$, are independent Poisson measures defined on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ independent on $w_i(t), i = 1, 2$. Here

$E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A), i = 1, 2$, $\tilde{\nu}_i(t, A) = \nu_i(t, A) - t\Pi_i(A), i = 1, 2$, $\Pi_i(\cdot), i = 1, 2$, are finite measures on the Borel sets in $\mathbb{R}$. On the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ we consider an increasing, right continuous family of complete sub- σ -algebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, where $\mathcal{F}_t = \sigma\{w_i(s), \nu_i(s, A), s \leq t, i = 1, 2\}$.

We need the following assumption.

Assumption 1. It is assumed, that $a_{ij}(t), i, j = 1, 2$, $c_i(t), \sigma_i(t), i = 1, 2$, are bounded, continuous on t functions, $a_{ij}(t) > 0, i, j = 1, 2$, $c_{\min} > 0$, $\gamma_i(t, z), \delta_i(t, z), i = 1, 2$, are continuous on t functions and $\ln(1 + \gamma_i(t, z)), \ln(1 + \delta_i(t, z)), i = 1, 2$, are bounded, $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty, i = 1, 2$.

For any initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$ there exists a unique local solution $X(t)$ to the equation (2) on $[0, \tau_e)$, where $\sup_{t < \tau_e} |X(t)| = +\infty$ (Gikhman & Skorokhod, p. 246, Theorem 6). We prove that there exists a unique positive global solution to the equation (2).

Theorem 1. *Let Assumption 1 be fulfilled. Then there exists a unique global (no explosion) solution $X(t)$ to the equation (2) for any initial value $X_0 > 0$, and $P\{X(t) \in \mathbb{R}_+^2\} = 1$.*

Let us present the definition of stochastically ultimate boundedness (Li & Mao, 2009).

Definition 1. The solution $X(t)$ to the system (2) are said to be *stochastically ultimately bounded*, if for any $\varepsilon \in (0, 1)$, there is a positive constant $\chi = \chi(\varepsilon) > 0$, such that for any initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$, the solution to the system (2) has the property that

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} P\{|X(t)| > \chi\} < \varepsilon.$$

Theorem 2. *Under Assumption 1 the solution $X(t)$ to the system (2) is stochastically ultimately bounded for any initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$.*

The property of stochastic permanence is important since it means the long time survival in a population dynamics. From Le et al. (2016) we have following definition.

Definition 2. The solution $X(t)$ to the equation (2) is said to be *stochastically permanent* if for any $\varepsilon > 0$, there exists positive constants $H = H(\varepsilon)$, $h = h(\varepsilon)$ such that for $i = 1, 2$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} P\{x_i(t) \leq H\} \geq 1 - \varepsilon, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} P\{x_i(t) \geq h\} \geq 1 - \varepsilon,$$

for any initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$.

Theorem 3. Let Assumption 1 be fulfilled. If $\min_{i=1,2} \inf_{t \geq 0} (a_{i \min}(t) - \beta_i(t)) > 0$, where $a_{i \min}(t) = \min_{j=1,2} a_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, then the solution $X(t)$ to the equation (2) with initial condition $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$ is stochastically permanent.

Definition 3. The solution $X(t)$ to the equation (2) is said to be *extinct with probability 1* if, for every initial data $X_0 > 0$, the solution $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \geq 0$ has the property $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ almost surely (a.s.), $i = 1, 2$.

Theorem 4. Let Assumption 1 be fulfilled. If

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (a_{i \max}(s) - \beta_i(s)) ds < 0,$$

where $a_{i \max}(t) = \max_{j=1,2} a_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, then the solution $X(t)$ to the equation (2) will go to extinction a.s.

References

- Gikhman, I. I. & Skorokhod, A. V. (1982). *Stochastic differential equations and its applications*. Kiev: Naukova Dumka.
- Gopalsamy, K. (1992). *Stability and oscillation in delay differential equations of population dynamics*. Kluwer Academic Publishers.
- Li, M., Gao, H., & Wang, B. (2016). Analysis of a non-autonomous mutualism model driven by Levy jumps. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 21(4), 1189–1202. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2016.21.1189>
- Li, X., & Mao, X. (2009). Population dynamical behavior of non-autonomous Lotka–Volterra competitive system with random perturbation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 24(2), 523–545. <https://doi.org/10.3934/dcds.2009.24.523>
- Qiu, H. Lv, J. & Wang, K. (2013). Two types of permanence of a stochastic mutualism model. *Advances in Difference Equations*, (37), 1–17. <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-37>

Passive identification of the plant time response for an acting control system

I. Golinko, I. Galytska

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

irinagalicka@gmail.com

A numerical method for calculating the dynamic characteristics of the plant in an automatic control system is considered. The method allows numerically calculating the impulse and transition characteristics of the plant according to the reaction of the control system to a change in the task. The proposed method for the numerical solution of the problem is implemented using the Duhamel integral. An example of software implementation for the proposed method is considered when modeling transients in a control system. The method can be used by developers of automatic control systems to identify the plant and adaptively configure a control system.

Key words: automatic control system, impulse response, transient response, plant, digital controller.

A promising direction for tuning automatic control systems (ACS) is to use the impulse or transition characteristics of the plant (Golinko & Kovrigo, 2010; Kubrak et al., 2010) as input information about the inertial properties of the plant, since this approach eliminates the subjectivity of the search stage for an approximate dynamic plant model. The purpose of the work is to develop a numerical method of passive identification to determine the impulse or transient characteristics of a plant for single-circuit ACS. The scheme of the classic ACS consists of: plant; adder; controller, which in general implements the PID law of regulation:

$$W_P(p) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I p} + T_D p \right), \quad (1)$$

where K_R, T_I, T_D are PID Controller setup parameters. The following notation is accepted: $y_z(t)$ is the regulator's task, $e(t)$ is the unbalance signal, $x(t)$ is the control signal, $y(t)$ is the output signal plant. We assume that the ACS is already functioning. The controller is configured in a certain way, that is, the parameters K_R, T_I, T_D are known. Over time, plant can change its dynamic properties, so we assume that they are uncertain and are identified during the operation of the control system. Current identification is implemented on an industrial controller. During operation, the controller measures the adjustable variable $y(t)$ with a sampling step $d\tau$ and generates an output signal data array:

$$y_z = Hs[z]. \quad (2)$$

The task is to determine the impulse c with the same step $d\tau$:

$$g_z = G[z]. \quad (3)$$

Mathematically, the output variable plant $y(t)$ can be represented as a convolution of the signal $x(t)$ with the impulse response $g(t)$ plant:

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)x(\tau)d\tau. \quad (4)$$

Let us consider the formation of the impulse response plant for a ACS with a PID controller at zero initial conditions $y_0 = 0$.

For $t = 0$ we have:

$$\begin{cases} e_{-1} = 0, \\ e_0 = y_* - y_0 = y_*, \\ I_0 = 0, \\ x_0 = K_R \left(e_0 + \frac{I_0}{T_I} + T_D \frac{e_0 - e_{-1}}{d\tau} \right). \end{cases} \quad (5)$$

The output characteristic plant is $y_1 = x_0 g_1 d\tau$, from where $g_1 = \frac{y_1}{x_0 d\tau}$.

For $t = d\tau$ we have:

$$\begin{cases} e_1 = y_* - y_1, \\ I_1 = I_0 + e_1 d\tau, \\ x_1 = K_R \left(e_1 + \frac{I_1}{T_I} + T_D \frac{e_1 - e_0}{d\tau} \right). \end{cases} \quad (6)$$

The output characteristic plant is

$$y_2 = \frac{x_0 g_2 + x_1 g_1}{d\tau},$$

from where

$$g_2 = \frac{y_2 d\tau - x_1 g_1}{x_0}.$$

Thus, in the general case:

$$g_z = \frac{y_z d\tau - \sum_{s=1}^z x_s \cdot g_{z-s}}{x_0}, \quad 1 \leq z \leq L. \quad (7)$$

The relationship between the transient and impulse responses is determined by the dependence

$$h(t) = \int_0^\infty g(t)dt,$$

which allows you to numerically determine the transient response plant from the known array for the impulse response g_z , using the recurrence dependence:

$$h_z = h_{z-1} + g_z d\tau. \quad (8)$$

Thus, for an existing control system, by based on the control in time of the change in the task and the output parameter, according to dependence (7) or (8), it is possible to determine the impulse or transition characteristic of the plant, respectively.

For the proposed numerical method for identifying plant, the authors conducted studies with various signals of changing the task. As examples of the method's application, the impulse and transient characteristics of the plant are calculated:

- 1) with a unit step change in the task for the ACS;
- 2) with a impulse change in the task with a unit amplitude, a duration of 30 units;
- 3) a group of modeling tests for a harmonic change in the task for the ACS.

The resulting transient process is provided by the following characteristics of the dynamic links in the control system:

$$W_P(p) = 0.8 \left(1 + \frac{1}{15p} \right), W_{OK}(p) = \frac{1}{25p^2 + 10p + 1} e^{-10p}.$$

In Fig. 1. presents one of the transients in the control system with a harmonic change in the task. The identification results are presented in Fig. 2. and Fig. 3. Attention should be paid to one essential feature of the method under consideration.

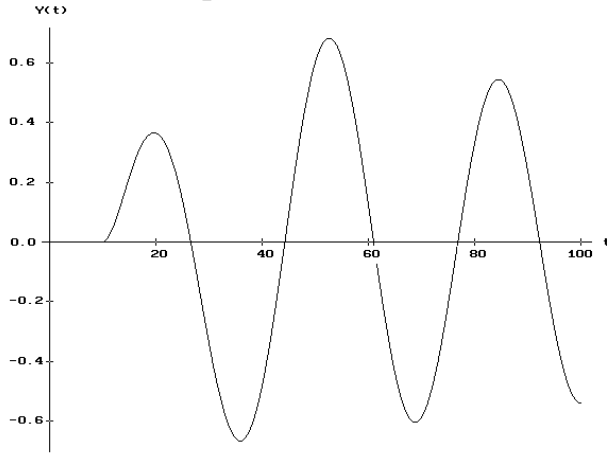


Fig. 1. The transition process in the ACS with a harmonic change in the task

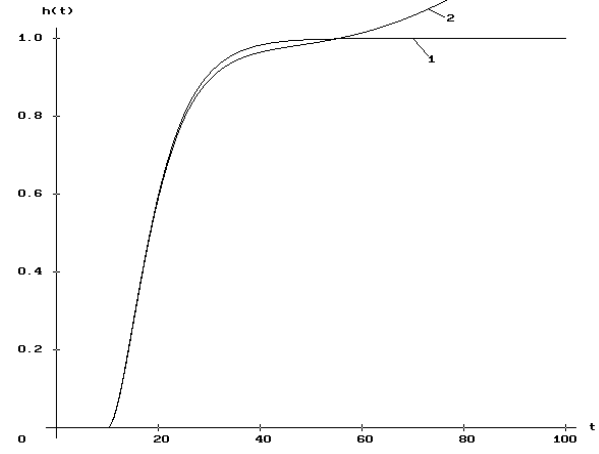


Fig. 2. Transient characteristic plant, 1 is defined for $W_{OK}(p)$, 2 is calculated by dependence (8) upon harmonic change in the task

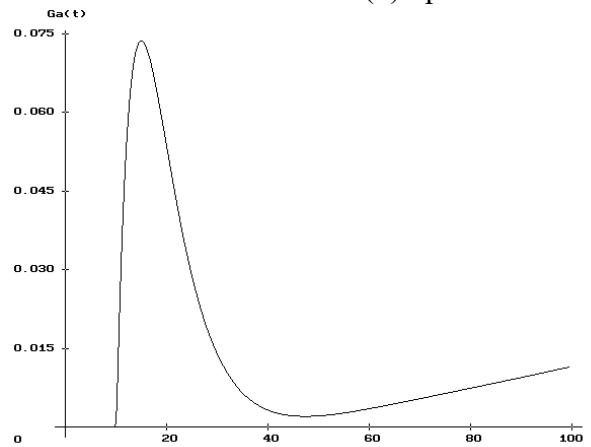


Fig. 3. The impulse response of the plant is determined by the dependence (7) upon harmonic change in the task for ACS

As can be seen from (5), the value x_0 for $T_D \neq 0$ substantially depends on the accuracy of the approximation of the derivative

$$\frac{T_D(e_0 - e_{-1})}{d\tau}.$$

Theoretically, when $t = 0$ there is an abrupt increase in the imbalance signal e from $e_{-1} = 0$ to $e_0 = y_*$. So, the derivative of e for $t = 0$ is equal to infinity, resulting in $x_0 = \infty$, but we evaluate it as

$$\frac{e_0 - e_{-1}}{d\tau}.$$

At the same time, the value of x_0 appears in the resulting formula (7), so that the infelicity in the determination of x_0 inversely affects all values g_z . Hence the practical recommendation. With passive identification, the differential component in the law of regulation must be eliminated ($T_D = 0$). It is also advisable for reasons of decreasing the influence of high-frequency interference, which the differential component in the experiment can enhance, which is undesirable. To increase the accuracy of identification, it is desirable to have a relatively large jump in the task at $t = 0$, since even a small absolute infelicity in determining small x_0 will significantly distort g_z (dependence (7)).

It is obviously impossible to completely eliminate the accumulation of infelicities in the implementation of algorithm (7). This, in particular, is evidenced by the “sliding” of the impulse response of the object with an increase in the observation time in Fig. 3 (time for which the impulse response of the object is calculated). This effect can be weakened or even eliminated if we consider the apriori known properties of the object. For example, has plant self-alignment or not. If it has, then over time the impulse response will decay to zero. And if so, then the impulse response, such as shown in Fig. 3, it is necessary to “bring to zero” somewhere in the time interval from $t = 50$ to $t = 60$. A small accuracy that can be allowed with “artificial zeroing” will have a less negative impact on the quality of identification than growth $g(t)$ at $t > 50$, which clearly does not correspond to the physics of the object’s behavior.

We should also not forget that when we intend to use the obtained impulse response to calculate transients in a closed-loop control system, then in the mode when the system setting is close to optimal, the duration of the transient process will be minimal. Under these conditions, infelicities in the “tail” part of the impulse response of the plant will not have time to manifest themselves significantly. Consequently, the influence of these infelicities on the result of modeling the system as a whole will be minimal.

According to the research results, we can conclude that this numerical method is effective for any law of task change, and the identification time should be no less than the time of the transition process plant. In the future, a modification of the identification method is planned, which makes it possible to obtain a transition characteristic from

the input and output plant signals. This will allow to exclude the regulator from the identification algorithm, the parameters of which may be known with infelicities; in addition, the hardware implementation of a real controller may differ from (1). Also promising is the development of an adaptation algorithm for the control system using the proposed identification method.

References

- Golinko, I. M., & Kovrigo, U. M. (2010). Analysis of a hybrid control system by the impulse response of the plant. *Research Bulletin of NTUU "KPI"*, (2), 30–33. <http://old.bulletin.kpi.ua/files/2010-2-5.pdf>
- Kubrak, N. A., Golinko, I. M., & Kovrigo, U. M. (2010). Computer analysis of ASR by impulse response of the plant. *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: New solutions in modern technology*, (57), 128–132. <http://vestnik2079-5459.khpi.edu.ua/article/view/46650>

Jacobsthal number identities using the generalized Brioschi formula

T. Goy

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

taras.goy@pnu.edu.ua

In this paper, we consider some families of Hessenberg determinants the entries of which are Jacobsthal numbers. These determinant formulas may also be rewritten as identities that involve products of multinomial coefficients and powers of Jacobsthal numbers.

Keywords: Jacobsthal sequence, Jacobsthal number, Brioschi's formula, Hessenberg matrix, multinomial coefficient.

1. Introduction. The *Jacobsthal sequence* is considered as one of the important sequences among the well-known integer sequences. The *Jacobsthal sequence* $\{J_n\}_{n \geq 0}$ is defined by recurrence

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2},$$

with $J_0 = 0$, $J_1 = 1$, for $n \geq 2$. The number J_n is called the n th Jacobsthal number.

The list of the 12 terms of the Jacobsthal sequence is given in Table 1.

Table 1: Terms of J_n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
J_n	0	1	1	3	5	11	43	85	171	341	683	1365	2731

The Jacobsthal numbers have many interesting properties and applications in many fields of mathematics, as geometry, number theory, combinatorics, and probability theory; see entry A001045 in the On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (Sloane, 2019).

As examples of recent works involving the Jacobsthal numbers and its various generalizations, see Akbulak and Öteleş (2014), Aktaş and Köse (2015), Aydın (2018), Catarino et al. (2015), Cilasun (2016), Daşdemir (2019), Goy (2018a), Goy (2018b), Goy (2019b), Köken and Bozkurt (2008), Öteleş et al. (2018), Zatorsky and Goy (2016) and related references contained therein. For example, in Akbulak and Öteleş (2014) defined two n -square upper Hessenberg matrices one of which corresponds to the adjacency matrix a directed pseudo graph and investigated relations between determinants and permanents of these Hessenberg matrices and sum formulas of the Jacobsthal sequences. In Köken and Bozkurt (2008) defined the n -square Jacobsthal matrix and using this matrix derived some properties of Jacobsthal numbers. In Öteleş et al. (2018) investigated the relationships between the Hessenberg matrices and the Jacobsthal numbers. In Cilasun (2016) introduced recurrence relation for multiple-counting Jacobsthal sequences and showed their application with Fermat's little theorem. In Daşdemir (2019) extended the Jacobsthal numbers to the terms with negative subscripts and presented many identities for new forms of these numbers. In

Catarino et al. (2015) presented new families of sequences that generalize the Jacobsthal numbers and established some identities.

The purpose of the present paper is to study the Jacobsthal numbers. We investigate some families of Hessenberg determinants the entries of which are Jacobsthal numbers with successive, odd and even subscripts. Consequently, we obtain for these numbers new combinatorial identities involving multinomial coefficients.

2. Hessenberg matrices and determinants. Consider the *Hessenberg matrix* of order n having the form

$$H_n^{(k)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} k_1 a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_2 a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{n-1} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & 1 \\ k_n a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

where $a_0 \neq 0$ and $a_i \neq 0$ for at least one $i \geq 1$.

The following lemma gives the multinomial extension for $\det(H_n)$. This result directly follows from Theorem 2 in Zatorsky (2013).

Lemma 1. *Let n be a positive integer. Then*

$$\det(H_n^{(k)}) = \sum_{s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n} \frac{(-1)^{n-\sigma_n}}{\sigma_n} \left(\sum_{i=1}^n s_i k_i \right) m_n(s) a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}, \quad (1)$$

where the summation is over integers $s_j \geq 0$ satisfying Diophantine equation

$$s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n, \quad \sigma_n = s_1 + \cdots + s_n, \quad \text{and} \quad m_n(s) = \frac{(s_1 + \cdots + s_n)!}{s_1! \cdots s_n!} \text{ is the}$$

multinomial coefficient.

In the case $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 1$ we have *Brioschi's formula* (Muir, 1960).

Many combinatorial identities involving sums over integer partitions can be generated in this way. For example, similar results for Fibonacci, Lucas, Mersenne, Pell, Catalan, Oresme numbers have been recently discovered in Goy (2018c), Goy (2019b), Goy (2019c), Goy and Shattuck (2019a), Goy and Shattuck (2019b), Goy and Shattuck (2019c).

3. Determinant formulas for Jacobsthal numbers. In this section, we investigate a particular case of determinants $\det(H_n^{(k)})$, in which $k_i = i$. To simplify our notation, we write $\det(a_1, a_2, \dots, a_n)$ in place of $\det(H_n^{(k)}(a_1, a_2, \dots, a_n))$.

Recall that the *Fibonacci sequence* $\{F_n\}_{n \geq 0}$ is defined by the initial values $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ and the recurrence

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Theorem 2. For $n \geq 1$, the following identities hold

$$\det(J_0, J_1, \dots, J_{n-1}) = (-1)^n (2F_{n+1} - F_n) - (-2)^n - 1,$$

$$\det(J_1, J_2, \dots, J_n) = (-1)^{n-1} (2^{n/2} - 1)(2^{n/2} - (-1)^n),$$

$$\det(J_2, J_3, \dots, J_{n+1}) = -(-2)^n - 1,$$

$$\det(J_3, J_4, \dots, J_{n+2}) = 2^n - (-2)^n - 1,$$

$$\det(J_4, J_5, \dots, J_{n+3}) = 2^{n+1} - (-2)^n - 1,$$

$$\det(J_3, J_5, \dots, J_{2n+1}) = (-1)^n (4^n - 2^n + 1),$$

$$\det(J_2, J_4, \dots, J_{2n}) = (-1)^{n-1} (2^n - 1)^2,$$

$$\det(J_4, J_6, \dots, J_{2n+2}) = (-1)^{n-1} (4^n - 1),$$

where F_n is the n^{th} Fibonacci number.

Next, we focus on multinomial extension of Theorems 2. Formula (1), coupled with Theorem 2 above, yields the following combinatorial identities for Jacobsthal numbers.

Theorem 3. Let $n \geq 1$, $\sigma_n = s_1 + \dots + s_n$, $s_i \geq 0$, and

$m_n(s) = \frac{(s_1 + \dots + s_n)!}{s_1! \dots s_n!}$ denotes the multinomial coefficient. Then

$$\sum_{2s_1 + \dots + s_{n-1} = n} \frac{(-1)^{\sigma_{n-1}}}{\sigma_{n-1}} m_{n-1}(s) J_1^{s_1} J_2^{s_2} \dots J_{n-1}^{s_{n-1}} = \frac{2F_{n+1} - F_n - 2^n - (-1)^n}{n},$$

$$\sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + s_n = n} \frac{(-1)^{\sigma_n}}{\sigma_n} m_n(s) J_1^{s_1} J_2^{s_2} \dots J_n^{s_n} = \frac{(1 - 2^{n/2})(2^{n/2} - (-1)^n)}{n},$$

$$\sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n} \frac{(-1)^{\sigma_n}}{\sigma_n} m_n(s) J_2^{s_1} J_3^{s_2} \dots J_{n+1}^{s_n} = -\frac{2^n + (-1)^n}{n},$$

$$\sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n} \frac{(-1)^{\sigma_n}}{\sigma_n} m_n(s) J_3^{s_1} J_4^{s_2} \dots J_{n+2}^{s_n} = \frac{(-2)^n - 2^n - (-1)^n}{n},$$

$$\sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n} \frac{(-1)^{\sigma_n}}{\sigma_n} m_n(s) J_4^{s_1} J_5^{s_2} \dots J_{n+3}^{s_n} = \frac{2(-2)^n - 2^n - (-1)^n}{n},$$

$$\sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n} \frac{(-1)^{\sigma_n}}{\sigma_n} m_n(s) J_3^{s_1} J_5^{s_2} \dots J_{2n+1}^{s_n} = \frac{4^n - 2^n + 1}{n},$$

$$\sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n} \frac{(-1)^{\sigma_n}}{\sigma_n} m_n(s) J_2^{s_1} J_4^{s_2} \dots J_{2n}^{s_n} = -\frac{(2^n - 1)^2}{n},$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\dots+n s_n=n} \frac{(-1)^{\sigma_n}}{\sigma_n} m_n(s) J_4^{s_1} J_6^{s_2} \dots J_{2n+2}^{s_n} = \frac{1-4^n}{n}.$$

References

- Akbulak, M., & Öteleş, A. P. (2014). On the sums of Pell and Jacobsthal numbers by matrix method. *Bull. Iranian Math. Soc.*, 40(4), 1017–1025. <https://www.sid.ir/FileServer/JE/87820140415.pdf>
- Aktaş İ., & Köse, H. (2015). Hessenberg matrices and the Pell-Lucas and Jacobsthal numbers. *Int. J. Pure Appl. Math.*, 101(3), 425–432. <https://doi.org/10.12732/ijpam.v101i3.11>
- Aydın, F. T. (2018). On generalizations of the Jacobsthal sequence. *Notes Number Theory Discrete Math.*, 24(1), 120–135. <https://doi.org/10.7546/nntdm.2018.24.1.120-135>
- Catarino, P., Vasco, P., Campos, H., Aires, A. P., & Borges, A. (2015). New families of Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers. *Algebra Discrete Math.*, 20(1), 40–54. <http://mi.mathnet.ru/adm530>
- Cilasum, M. H. (2016). Generalized multiple counting Jacobsthal sequences of Fermat pseudoprimes. *J. Integer Seq.*, 19, Article 16.2.3. <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL19/Cilasun/cila5.pdf>
- Daşdemir, A. (2019). Mersenne, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers with negative subscripts. *Acta Math. Univ. Comenianae*, 88(1), 145–156. <http://www.iam.fmph.uniba.sk/amuc/ojs/index.php/amuc/article/view/906/645>
- Goy, T. (2018a). On combinatorial identities for Jacobsthal polynomials. *Proceedings of the Sixth Intern. Conf. on Analytic Number Theory and Spartial Tessellations “Voronoi’s Impact on Modern Science”*, (Vol. 1, pp. 41–47). Kyiv: Natl Pedagog. Dragomanov Univ. Publ.
- Goy, T. (2018b). On determinants and permanents of some Toeplitz-Hessenberg matrices whose entries are Jacobsthal numbers. *Eurasian Math. J.*, 9(4), 61–67. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2018-9-4-61-67>
- Goy, T. (2018c). On new identities for Mersenne numbers. *Appl. Math. E-Notes*, 18, 100–105. <https://www.emis.de/journals/AMEN/2018/AMEN-170424.pdf>
- Goy, T. (2019a). On generalized Brioschi’s formula and its applications. In *Proceedings of 5th Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova* (pp. 100–105). Chisinau: V. Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science. https://ibn.idsi.md/sites/default/files/imag_file/Proceedings_IMCS_55.pdf
- Goy, T. (2019b). On new families of the Jacobsthal identities. В *Сборнике трудов Международной научной конференции «Современные проблемы прикладной математики, информатики и механики»*, (Т. 3, с. 93–97). Нальчик: Изд-во КБГУ.
- Goy, T. (2019c). Pell numbers identities from Toeplitz-Hessenberg determinants. *Novi Sad J. Math.*, 49(2), 87–94. <https://doi.org/10.30755/NSJOM.08406>
- Goy, T., & Shattuck, M. (2019a). Determinant formulas of some Toeplitz-Hessenberg matrices with Catalan entries. *Proceedings Mathematical Sciences*, 129(4), 46. <https://doi.org/10.1007/s12044-019-0513-9>
- Goy, T., & Shattuck, M. (2019b). Determinants of Toeplitz-Hessenberg matrices with generalized Fibonacci entries. *Notes Number Theory Discrete Math.*, 25(4), 83–95. <https://doi.org/10.7546/nntdm.2019.25.4.83-95>
- Goy, T., & Shattuck, M. (2019c). Fibonacci and Lucas identities using Toeplitz-Hessenberg matrices. *Appl. Appl. Math.*, 14(2), 699–715. http://www.pvamu.edu/aam/wp-content/uploads/sites/182/2019/12/05-R1320_AAM_Shattuck_MS_082819_Published_121119.pdf
- Goy, T., & Zatorsky, R. (2019). On Oresme numbers and their connection with Fibonacci and Pell numbers. *Fibonacci Quart.*, 57(3), 238–245. <https://www.fq.math.ca/Papers/57-3/goy06022019.pdf>

- Köken, F., & Bozkurt, D. (2008). On the Jacobsthal numbers by matrix methods. *Int. J. Contemp. Math. Sci.* 3(13), 605–614. <http://www.m-hikari.com/ijcms-password2008/13-16-2008/kokenIJCMS13-16-2008.pdf>
- Muir, T. (1960). *The theory of determinants in the historical order of development*. (Vol. 3). New York: Dover Publications.
- Öteleş, A., Karatas, Z. Y., & Zangana, D. O. M. (2018). Jacobsthal numbers and associated Hessenberg matrices. *J. Integer Seq.*, 21, Article 18.2.5. <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL21/Oteles/ote5.pdf>
- Sloane, N. J. A. (2019). The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. <http://oeis.org>.
- Zatorsky, R., & Goy, T. (2016). Parapermanents of triangular matrices and some general theorems on number sequences. *J. Integer Seq.*, 19, Article 16.2.2. <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL19/Goy/goy2.pdf>

Lagrange's equation for a triple inverted pendulum

V. V. Kovalchuk

State University of Infrastructure and Technologies, Kyiv, Ukraine

kovaltchukvv@ukr.net

In this paper, a Lagrangian-based mathematical approach for the triple inverted pendulum with follower force on the upper pole is proposed. The purpose of this paper is to present the design and program implementation of a general procedure that yields the mathematical model in generalized coordinates to investigate the dynamic behavior of pendulum and analyze influence the follower force on the stability of the equilibrium state.

Keywords: inverted pendulum, follower force, mathematical model, stability of the equilibrium state, bifurcation.

The inverted pendulum is a mechanical idealization which poses an interesting and, with an arbitrary level of degree of freedom, difficult problem in control. This model has been a very popular benchmark for teaching and research in theoretical mechanics, control theory and robotics for the last decades (Šetka et al., 2017). Triple link inverted pendulum is also a very good model for investigation of the many real-world systems, for instance, missile launchers, human walking, Segway, automatic aircraft landing system, biped locomotive machines, flexible space structures, and of many more industrial applications (Sharma & Sahu, 2016).

Inverted pendulum systems represent a significant class of non-linear and under-actuated mechanical systems which exhibit numerous problems present in industrial applications, such as a variety of external disturbances or nonlinear behaviors under different operation conditions (Jadlovský & Sarnovský, 2013). As such they allow to analyze the features of the dynamic behavior of the system and provide an excellent test bench for evaluation and comparison of different control strategies.

The influence of essential (control) parameters of the pendulum on the dynamic behavior of the system for a two-link pendulum is analyzed in detail in (Kovalchuk, 2019). The triple pendulum has a middle link, which is affected on both sides by the adjacent links (lower and upper). Therefore, for research, a triple pendulum is a better representative of a multi-link pendulum than a double pendulum.

The purpose of this paper is to develop a mathematical model of an inverted three-link pendulum, loaded at the upper end by a follower force, which is in general asymmetric. The asymmetry of this force is determined by the orientation parameter k and angular eccentricity δ . The possible displacement of the point of application of force $\vec{P}$ is taken into account by linear eccentricity ϵ (Lobas & Koval'chuk, 2008).

The pendulum system we will investigate consists of three links with different lengths l_i . These links are considered weightless rods, and all masses m_i are considered to be concentrated at points at the upper ends A_i of the rods. The rods of the pendulum are interconnected and supported in point O by elastic-viscous hinges. The

upper end A_3 of the pendulum is elastically secured by a horizontal cylindrical spring. At a vertical position of the links, this spring is considered undeformed.

Nomenclature and parameter values are given in Table 1.

Table 1. Nomenclature and parameter values

Symbol	Description
l_i	length of i -th link (1 – lower, 2 – middle, 3 – upper)
m_i	mass of i -th material point
φ_i	angle of i -th link from the vertical line
c_i	stiffness coefficient of the spiral (in the joints O , in A_1 , in A_2)
c	stiffness coefficient of the horizontal cylindrical spring (in A_3)
P	value of the follower force
$\alpha = k\varphi_3 + \delta$	angle of the follower force from the vertical line (k — follower force's orientation parameter, δ — angular eccentricity)
ε	linear eccentricity
g	acceleration of gravity 9.81 m/s^2

The angles φ_i ($i = 1, 2, 3$) between the pendulum links and the vertical axis are chosen as generalized coordinates and summarized in the vector

$$q^T = [q_1, q_2, q_3] = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3].$$

The mathematical model of the triple inverted pendulum is established by the *Lagrange formalism*. This approach was chosen for several reasons: it is by definition suitable for generalizations and provides a more direct and less error-prone model design than e.g. force summation based on Newton's 2nd law (Jadlovský & Sarnovský, 2013). The implementation of the method is straightforward with the aid of symbolic software tools, for instance, Maple or MATLAB.

The condensed vector form of the equations is:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad (1)$$

where the total kinetic energy of the system is given by the sum of individual kinetic energies:

$$T = \sum_{i=1}^3 T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2).$$

In the generalized coordinates we get:

$$T_1 = \frac{m_1 l_1^2}{2} \dot{\varphi}_1^2,$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2} (l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$T_3 = \frac{m_3}{2} (l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + l_3^2 \dot{\varphi}_3^2) + m_3 (l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_1 l_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + l_2 l_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3))$$

In vector notation, the equations of motion due to (1) read as:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + G(q) = V(q, P). \quad (2)$$

Here we have the positive definite mass matrix $M(q)$, the Coriolis matrix $C(q, \dot{q})$, the damping matrix D , the vector of gravity $G(q)$ and the vector of the control V :

$$V(q, P) = P \begin{bmatrix} l_1 \sin(\varphi_1 - k\varphi_3 - \delta), \\ l_2 \sin(\varphi_2 - k\varphi_3 - \delta), \\ l_3 \sin(\varphi_3(1 - k) - \delta) + \varepsilon \cos(\varphi_3(1 - k) - \delta) \end{bmatrix}.$$

The follower force $\vec{P}$ is a non-conservative positional force. Therefore, equation (2) shows that the studied mechanical system is under the action of potential forces, non-conservative position forces and linear forces of viscous friction.

Linearizing (2) about the upright position (with zero angles $\varphi_i = 0$) yields the state space representation:

$$\ddot{x} = Ax(t) + B,$$

where $x = [\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2, \varphi_3, \dot{\varphi}_3]^T$.

The eigenvalues associated with matrix A of the linearized differential equations determine the stability of the position of the equilibrium of the pendulum.

Having obtained a mathematical model that considers the features of the system, we need to analyze the stability, controllability, and observability of the system to further understand the characteristics of the system. Design calculations and analyses are carried out using *MATLAB/toolboxes* and additional *M-files* developed by the author (Kovalchuk, 2019). The author also developed a Maple program for the automated formation of equations (2) at different pendulum parameters.

Analytical calculations and numerical simulations show that the follower force is a key factor in the dynamic behavior of the system (Kovalchuk, 2019). From the viewpoint of the qualitative theory of ODEs, follower force P appears as a bifurcation parameter on whose values the altered (stable or unstable) behavior of the model depends.

If the value of the follower force is smaller than bifurcation one, the steady state is unstable. In contrast, a follower force bigger than bifurcation one would provoke damped oscillations around a stable steady state. We can say that in this situation follower forces have a stabilizing role.

References

- Jadlovský, S., & Sarnovský, J. (2013). Modelling of classical and rotary inverted pendulum systems—a generalized approach. *Journal of Electrical Engineering*, 64(1), 12–19. <https://doi.org/10.2478/jee-2013-0002>
- Kovalchuk, V. (2019). Bifurcation analysis of the stability of one dynamical system with a follower force. *Транспортні системи і технології*, 2(33), 38–49. <https://doi.org/10.32703/2617-9040-2019-33-2-4>
- Lobas, L. G., & Koval'chuk, V. V. (2008). Stability domains of the vertical equilibrium state of a triple simple pendulum. *International Applied Mechanics*, 44(10), 1180–1190. <https://doi.org/10.1007/s10778-009-0133-7>
- Šetka, V., Čečil, R., & Schlegel, M. (2017, May). Triple inverted pendulum system implementation using a new ARM/FPGA control platform. In *2017 18th International Carpathian Control Conference (ICCC)* (pp. 321–326). IEEE. <https://doi.org/10.1109/CarpathianCC.2017.7970419>
- Sharma, K., & Sahu, V. (2016). Modeling and stabilization of cart triple link inverted pendulum using LQR controller incorporating degree of stability. *International Research Journal of Advanced Engineering and Science*, 1(4), 148–152. <http://www.irjaes.com/pdf/IRJAES-V1N4Y16/IRJAES-V1N4P198Y16.pdf>

Про один підхід до розв'язання осесиметричної задачі теплопровідності для багатошарової основи з неідеальним тепловим контактом між шарами

Н. М. Антоненко¹, І. Г. Ткаченко², Ю. В. Морозов²

¹Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна

²Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна

antonenkonina.ua@gmail.com, tig.phd81@gmail.com

Метод функцій податливості застосовано до розв'язання осесиметричної стаціонарної задачі теплопровідності для багатошарової основи з неідеальним тепловим контактом між шарами.

Ключові слова: шар, багатошарова основа, температура, осесиметрична деформація, функція податливості.

Під багатошаровою основою розумітимемо пакет зчеплених між собою шарів, що лежать на абсолютно жорсткому півпросторі. На верхній межі основи задано температуру. На нижній межі пакета підтримується нульова температура. Між шарами неідеальний тепловий контакт. Треба знайти розподіл температури в точках основи.

Шари нумеруватимемо зверху вниз, починаючи з одиниці. Півпростору присвоїмо номер $n + 1$. У кожному шарі розглянемо локальну циліндричну систему координат $O_k \rho_k z_k$ як показано на рис. 1.

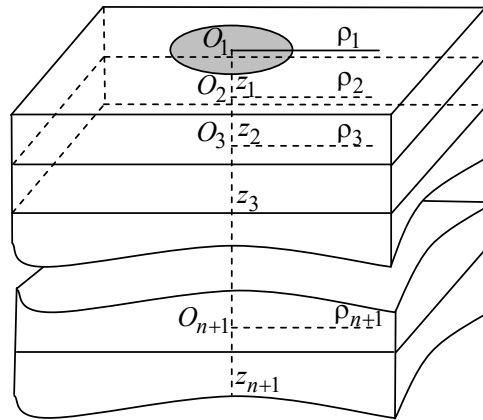


Рис. 1. Багатошарова основа

Крайові умови: $T_1(\rho, 0) = f(\rho)$, $T_n(\rho, h_n) = 0$.

Умови на спільних межах шарів (Боли & Уэйнер, 1964):

$$k_{T_k} \frac{\partial T_k}{\partial z}(\rho, h_k) = R_k^{-1} (T_{k+1}(\rho, 0) - T_k(\rho, h_k)),$$

$$k_{T_{k+1}} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}(\rho, 0) = k_{T_k} \frac{\partial T_k}{\partial z}(\rho, h_k), k = \overline{1, n},$$

де R_k — коефіцієнт теплового опору, k_{T_k} — коефіцієнт теплопровідності.

Визначення розподілу осесиметричного стаціонарного температурного поля в точках окремого шару основи зводиться до розв'язання рівняння теплопровідності (Коваленко, 1975):

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_k}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Для розв'язання поставленої задачі використано інтегральне перетворення Ганкеля нульового порядку:

$$\bar{f}^0(p) = \int_0^\infty \rho f(\rho) J_0(p\rho) d\rho, \quad f(\rho) = \int_0^\infty p \bar{f}^0(p) J_0(p\rho) dp,$$

де $J_0(x)$ — функція Бесселя нульового порядку, $p \in (0; \infty)$ — параметр інтегрального перетворення.

У кожному шарі запроваджено дві допоміжні функції:

$$\eta_k = \bar{T}_k(p, 0), \quad \varepsilon_k = \frac{1}{p} \frac{\partial \bar{T}_k}{\partial z}(p, 0).$$

Розв'язок рівняння (1) отримано в (Величко & Ткаченко, 2009):

$$\bar{T}_k(p, z) = \operatorname{ch} pz \cdot \eta_k + \operatorname{sh} pz \cdot \varepsilon_k.$$

Отже, задача зводиться до знаходження пари допоміжних функцій для кожного з шарів основи.

У роботі показано, що допоміжні функції сусідніх шарів пов'язані співвідношеннями:

$$\eta_{k+1} = (C_k + pL_k S_k) \eta_k + (S_k + pL_k C_k) \varepsilon_k, \quad \varepsilon_{k+1} = \Delta_k (S_k \eta_k + C_k \varepsilon_k), \quad (2)$$

де $S_k = \operatorname{sh} p_k$, $C_k = \operatorname{ch} p_k$, $p_k = ph_k$, $\Delta_k = k_{T_k} / k_{T_{k+1}}$, $L_k = k_{T_k} R_k$, $k = \overline{1, n}$.

Використовуючи умови на нижній межі пакета та рекурентні співвідношення (2), доведено, що допоміжні функції пов'язані співвідношенням:

$$\varepsilon_k = -r_k \eta_k, \quad (3)$$

де функції r_k називаються функціями податливості багат шарової основи.

Отримано рекурентні співвідношення для обчислення цих функцій:

$$r_n = \operatorname{cth} p_n, \quad r_k = \frac{\Delta_k S_k + r_{k+1} (C_k + pL_k S_k)}{\Delta_k C_k + r_{k+1} (S_k + pL_k C_k)}, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (4)$$

Таким чином, *алгоритм розв'язання* поставленої задачі наступний:

- 1) за рекурентними співвідношеннями (4) знаходимо функції податливості шарів, починаючи з нижнього шару;
- 2) із граничних умов визначаємо допоміжну функцію першого шару η_1 ;
- 3) знаходимо допоміжні функції інших шарів за формулами (2) та (3);

4) знаходимо трансформанту Ганкеля температури $\bar{T}_k(p, z)$;

5) за допомогою оберненого перетворення Ганкеля знаходимо значення температури в точках потрібного шару.

Список літератури

Боли, Б., & Уэйнер, Дж. (1964). *Теория температурных напряжений*. Москва: Мир.

Величко, И. Г., & Ткаченко, И. Г. (2009). Аналитическое решение осесимметрической задачи термоупругости для многослойного основания. *Вісник Східноукраїнського нац. ун-ту ім. В. Даля*, 4.

Коваленко, А. Д. (1975). *Термоупругость*. Киев: Вища школа.

Керування поточкорозподілом інженерної мережі в аварійній ситуації

О. І. Баліна¹, І. С. Безклубенко¹, Ю. П. Буценко²

¹Київський національний університет будівництва і архітектури,
Київ, Україна

²Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Київ, Україна

i.bezklubenko@gmail.com, elena.i.balina@gmail.com,
armchairdoc@ukr.net

За допомогою теорії графів побудовано дві математичні моделі, які дозволяють ще на стадії проектування врахувати можливість аварійної ситуації і відключити аварійний вузол, оперативно змінити структуру й параметри магістральних та розподільчих мереж і забезпечити функціонування мережі.

Проведено порівняльний аналіз цих математичних моделей і визначені умови для їх застосування.

Ключові слова: інженерна мережа, графи, проектування, оптимізація.

Задача проектування інженерної мережі полягає у визначенні розташування підсистем мережі (Євдокимов, 1976), значень її параметрів і змінних, а також такі схеми з'єднання цих підсистем, що будуть забезпечувати (без обмежень на параметри і змінні) бажаний поточкорозподіл у підсистемах споживання при мінімізації деякого критерія.

Під час експлуатації мережевих систем виникає необхідність керування поточкорозподілом у мережі. Задача керування поточкорозподілом в аварійній ситуації полягає у виборі таких координат регулюючих органів, які дозволяють відключити аварійний вузол і забезпечити функціонування мережі. Таку ситуацію бажано враховувати на стадії проектування мережевої системи. Мова йде про те, щоб спроектувати мережу таким чином, щоб непрацюючий вузол вимикався за допомогою мінімальної кількості засувки, зменшуючи при цьому втрати від неподання цільового продукту користувачам.

Під інженерною мережею, у її класичному сенсі (Євдокимов, 1976), розуміють мережу (газову, водопровідну, вентиляційну і т.п.) для процесів поточкорозподілу або транспортування цільового продукту якої визначені перший і другий закони Кірхгофа. Уважаємо, що топологія мережі, розташування джерел і споживачів відомі. Припускаємо, що витік цільового продукту відбувається в k -й вершині і нам відомі всі шляхи, які ведуть до k -ї вершини ($i = 1, N$). Граф мережі містить L ребер; кожному j -му ребру графа ($j = 1, L$) відповідає деяка змінна величина x_j , яка може набувати тільки двох значень:

$$x_j = \begin{cases} 0, & \text{якщо є засувка на } j\text{-му ребрі,} \\ 1, & \text{якщо немає засувки на } j\text{-му ребрі.} \end{cases} \quad (1)$$

Тоді умову відсутності цільового продукту можемо записати таким чином:

$$\sum_{i=1} \prod_{j \in J_i} x_j(k) = 0 \quad (2)$$

де J_i — множина тих ребер j , які входять до i -го шляху, що веде до k -ї вершини.

Нехай $\sum_{j \in J_i} (1 - x_j(k))$ загальна кількість засувов, яку необхідно мінімізувати.

Виключаючи з цього виразу сталу і змінюючи напрям оптимізації, отримаємо першу цільову функцію задачі:

$$\sum_{j \in J_i} x_j(k) \rightarrow \max \quad (3)$$

Через $F(x)$ позначимо, алгоритмічно задану функцію збитків від недопостачання цільового продукту користувачам системи, яку необхідно мінімізувати. Функція $F(x)$ є різницею між кількістю цільового продукту, що має бути подано користувачам мережі $F^{*\bullet}(x)$ і кількістю цільового продукту, що подано користувачам $F^\bullet(x)$, тобто

$$F(x) = F^{*\bullet}(x) - F^\bullet(x).$$

Очевидно, що мінімізація функції $F(x)$ рівносильна максимізації функції $F^\bullet(x)$:

$$F^\bullet(x) \rightarrow \max \quad (4)$$

Інакше кажучи, $F^\bullet(x)$ — функція, яка визначається кількістю невідключених користувачів, відповідаючих визначеної комбінації перекритих ребер. Задача полягає у знаходженні таких значень x_j , які будуть максимізувати (3), (4) при обмеженнях (1), (2).

Розгляньмо інший підхід до побудови математичної моделі тієї ж задачі.

Задано граф, який має m вершин і L дуг. Кожній дузі графа поставлені у відповідність послідовна (q) і паралельна (h) змінні, що задовольняють законам Кірхгофа, а також дискретна змінна

$$x_j = \begin{cases} 0, & \text{якщо засувка закрита на } j\text{-му ребрі,} \\ 1, & \text{якщо відкрита на } j\text{-му ребрі.} \end{cases}$$

Математична модель потокорозподілу, що встановився, з урахуванням нової змінної x_j запишеться так:

$$Aqx = 0, Bh = 0, h = Sq^2x \quad (1^*)$$

Умова відсутності потоку в k -й вершині виглядає так:

$$\sum_{j \in I_k} q_j = 0, \quad (2^*)$$

де I_k — множина ребер, що входять у k -ту вершину, q_j — потік у j -му ребрі, з'єднаним з k -ю вершиною.

Цільова функція (3) для цієї моделі виглядає так само:

$$\sum_{j \in J_i} x_j(k) \rightarrow \max \quad (3^*)$$

Функція $F^*(x)$ тут визначає сумарний тиск усіх користувачів системи. Ураховуючи, що тиск в i -й вершині складається із суми тисків у ребрах, що в неї входять, отримаємо:

$$F^*(x) = \sum_{i=1}^m C_i \sum_{j \in I_i} q_j^2 x_j r_j \rightarrow \max \quad (4^*)$$

де C_i — ваговий коефіцієнт i -ї вершини, I_i — множина ребер, що входять до i -ї вершини, r_j — опір j -го ребра.

Задача полягає в знаходженні таких значень x_j , які б максимізували (3*) і (4*) при обмеженнях (1*), (2*).

Перша математична модель системи дає стійкій щодо змін параметрів мережі (тисків, потоків на аварійних ділянках) розв'язок, але застосування її для великих мереж пов'язане зі значними обчислювальними труднощами, бо вона формалізується у вигляді задачі дискретної оптимізації.

Друга математична модель формалізується як задача неперервного опуклого програмування і може бути ефективно розв'язана існуючими методами (Хедли, 1967; Безклубенко, 2017) для відносно великих мереж, але дає нестійкий розв'язок, оскільки вимикання аварійного вузла відбувається за рахунок встановлення динамічної рівноваги в мережі. Треба зауважити, що внаслідок проведених обчислювальних експериментів, кількість необхідних регулюючих пристроїв (засувки) у першому випадку завжди перевищує їх кількість в другому.

Тому можна зробити висновок, що застосування моделі першого типу доцільне для малих мереж, де потрібна стійкість до збурення вимкнень аварійного вузла і не висуваються особливі вимоги до кількості регулюючих органів.

Застосування моделі другого типу можливо для складніших, але стабільних мереж.

Список літератури

- Безклубенко, І. С. (2017). Завдання вектора переваги критеріїв при виборі варіанту проекту інженерної мережі. *Управління розвитком складних систем*, 30, 132–135. <http://urss.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-30/19.pdf>
- Безклубенко, І. С., & Лесько, В. І. (2014). Застосування теорії графів до задач проектування інженерних мереж. У *Матеріалах III Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 12–15). Київ: НТУУ «КПІ». <http://matan.kpi.ua/public/files/mvstu3/mvstu3-abstracts.pdf>
- Евдокимов, А. Г. (1976). *Оптимальные задачи на инженерных сетях*. Харьков: Высшая школа.
- Хедли, Д. (1967). *Нелинейное и динамическое программирование*. Москва: Мир.

Про нерівність Лебега — Ландау на класах ψ -диференційовних функцій

В. В. Бовсуновська, П. В. Задерей, Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

valeri0202@ukr.net, zadereypv@ukr.net, zadereynm@gmail.com,

g.nefyodova@gmail.com

У статті отримано нерівність Лебега — Ландау на класах ψ -диференційовних функцій. Доведено нерівності Лебега — Ландау, де головний член містить два доданки, що є узагальненням результатів О. І. Степанця, В. В. Савчука та А. М. Швецової.

Ключові слова: найкраще наближення аналітичних функцій у крузі, частинна сума ряду Тейлора, умови Сідона — Теляковського, ψ -похідна за Степанцем.

Через $A(D)$ позначимо множину аналітичних в $D = \{z : |z| < 1\}$ функцій $f(z)$, а через H_∞ — простір функцій $f \in A(D)$ із скінченною нормою

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{H_\infty} = \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty.$$

Нехай $S_n(f; z)$ — частинні суми ряду Тейлора — Маклорена функцій $f \in H_\infty$

$$S_n(f; z) = S_n(f) = \sum_{k=0}^n c_k z^k, \quad z \in D, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

а $C(T)_+$, $L_\infty(T)_+$, $L_1(T)_+$ — простори функцій $f(e^{it})$, відповідно, неперервних, суттєво обмежених та сумовних на $T = \{z : |z| = 1\}$ з нормами

$$\|f\|_c = \max_{z \in T} |f(z)|, \quad \|f\|_{L_\infty} = \text{vraisup}_{z \in T} |f(z)|, \quad \|f\|_{L_1} = \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z)| |dz|$$

і таких, що їх коефіцієнти Фур'є

$$\tilde{f}(-k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{ikt} dt = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

О. І. Степанцем (2002, ст. 261) було запроваджено поняття ψ -похідної таким чином. Нехай $\psi = \{\psi(k)\}_{k=0}^\infty$, $\psi(0) = 1$, — довільна послідовність комплексних чисел, а функція $f \in L_1(T)_+$ і

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt}$$

її ряд Фур'є. Якщо ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi(k) \hat{f}(k) e^{ikt}$$

є рядом Фур'є деякої функції $g \in L_1(T)_+$, то її називають ψ -інтегралом функції f і позначають $\mathcal{I}^\psi f$. Множину ψ -інтегралів усіх функцій $f \in L_1(T)_+$ позначають через $L^\psi(T)_+$.

Якщо для заданої функції $F \in L^\psi(T)_+$ вказано функцію $f \in L_1(T)_+$ таку, що майже скрізь на T виконується рівність $F(e^{it}) = \mathcal{I}^\psi f(e^{it})$, то функцію f називають ψ -похідною функції F і позначають $f = F^\psi$.

Нехай, далі $C^\psi(T)_+ = L^\psi(T)_+ \cap C(T)_+$; $A(\bar{D})$ — простір функцій аналітичних у крузі D і неперервних у замкнутому крузі $\bar{D} = \{z : |z| \leq 1\}$ з нормою $\|f\|_{A(\bar{D})} = \max_{z \in \bar{D}} |f(z)|$; $E_n(f)_{A(\bar{D})} = \inf_{p_n \in P_n} \|f(z) - p_n(z)\|_{A(\bar{D})}$ — найкраще наближення функції f многочленами

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k \in P_n$$

— множина многочленів степеня не вище n ; $r_n(f) = f(z) - S_n(f; z)$.

Відомо, що $\forall f \in A(\bar{D})$ при довільному $n \in \mathbb{N}$ (Степанец, 2002, с. 287):

$$\|r_n(f)\|_{A(\bar{D})} \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1) \right) E_n(f)_{A(\bar{D})}. \quad (2)$$

Ця нерівність є аналогом відомої нерівності Лебега (Степанец, 2002) і її називають *нерівністю Лебега — Ландау* для функцій $f \in A(\bar{D})$.

Метою даної роботи є отримання нерівностей Лебега — Ландау для функцій з класів $C^\psi(T)_+$.

Запровадимо такі позначення: $\mathfrak{M}$ — множина опуклих донизу при $\nu \geq 1$ функцій $\psi(\nu)$ таких, що $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi(\nu) = 0$; $\mathfrak{M}_0$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, що справджують умову

$$0 < \mu(\psi, t) := \frac{t}{\eta(t) - t} \leq K < \infty, \quad \eta(t) = \psi^{-1} \left(\frac{1}{2} \psi(t) \right).$$

Савчуком (1998) встановлено такий аналог нерівності Лебега — Ландау (1): якщо $\psi = \psi_1 + \psi_2$ і $\psi_1, \psi_2 \in m_0$, то $\forall f \in C^\psi(T)_+$ при $\forall n \in \mathbb{N}$ правдива нерівність

$$\|r_n(f)\|_{C(T)_+} \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1) \right) |\psi(n)| E_n(f^\psi)_{C(T)_+}, \quad (3)$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена за n ; для $\forall f \in C^\psi(T)_+$ при кожному $n \in \mathbb{N}$ знайдеться функція $F(e^{it}) = F(e^{it}, n)$ така, що

$$E_n(F^\psi)_{C(T)_+} = E_n(f^\psi)_{C(T)_+}$$

і для цієї функції співвідношення (3) стає рівністю.

Нехай

$$V_{n+1}^\infty(\psi) = \int_{n+1}^\infty \text{vrai sup}_{\nu \geq t} |\psi'(t)| dt,$$

H_∞^ψ — клас функцій з H_∞ для яких ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\psi(k)} c_k z^k = f^\psi(z)$$

є рядом Тейлора функції f^ψ і $\|f^\psi\|_\infty \leq 1$. Подібний клас функцій був введений Ж. Шейком (Scheick, 1966).

Швецовою (2000) було встановлено, що якщо $n \in \mathbb{N}$, $\psi(\cdot) : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ — локально абсолютно неперервна на $[n+1; \infty)$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi(\nu) = 0$,

$\psi(k) \neq 0 \forall k \in \mathbb{N}$, $\tilde{V}_{n+1}^\infty(\psi) < \infty$, то

$$\sup_{f: f^\psi \in H_\infty} \frac{\|f - S_n(f)\|_\infty}{E_n(f^\psi)_\infty} = \sup_{f \in H_\infty^\psi} \|f - S_n(f)\|_\infty = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{|\psi(n+k)|}{k} + \theta \tilde{V}_{n+1}^\infty(\psi), \quad (4)$$

де $|\theta| \leq K$.

Кажуть, що послідовність $\{c_k\}_{k=0}^\infty, c_k \in \mathbb{C}$, справджує умови типу Сідона — Теляковського (умови $(S-T)^*$), якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0, \quad (5)$$

та існують такі числа A_k , що

$$|\Delta c_k| := |c_k - c_{k+1}| \leq A_k, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

і

$$\sum_{k=0}^\infty (k+1) |\Delta A_k| < \infty, \quad (7)$$

а також збігається ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{|c_k|}{k} < \infty \quad (8)$$

Умови $(S-T)^*$, як було встановлено Л. Лейндлером (Leindler, 2000), еквівалентні (тобто визначають одну й ту ж множину рядів) таким умовам: існують числа $A_k \downarrow 0$, що виконуються нерівності (6); збігається ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty$, а також має місце (8). Останні умови називають *умовами Сідона — Теляковського* і позначають $S - T$.

Уточнімо співвідношення (4), а саме виділімо ще один член, який при деяких досить малих $\psi(\cdot)$ буде більшим, ніж $\sum_{k=1}^n \frac{|\psi(n+k)|}{k}$.

Теорема. Нехай послідовність $\{\psi(k)\}_{k=0}^{\infty} \in (S - T)$, тобто для $\psi(k)$ виконано умови (5)–(8). Тоді для $\forall f \in H_{\infty}^{\psi}$ при $n \in \mathbb{N}$ правдива нерівність:

$$\begin{aligned} & \|f(z) - S_n(f, z)\|_c \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{|\psi(n+k)|}{k} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| \right) E_n(f^{\psi})_{A(\bar{D})} \end{aligned}$$

Нехай $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}, k \in \mathbb{N}$, послідовність невід'ємних чисел, що монотонно прямує до нуля і

$$C_{\varepsilon} = f \in C(T)_{+} : E_n(f)_{C(T)_{+}} \leq \varepsilon_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

і нехай $C^{\bar{\psi}} C_{\varepsilon}$ — множина неперервних на T функцій, $\bar{\psi}$ — похідні яких належать до C_{ε} .

Тоді

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in C^{\bar{\psi}} C_{\varepsilon}} \|f(z) - S_n(f; z)\|_c \asymp \\ & \asymp \left(\sum_{k=1}^n \frac{|\psi(n+k)|}{k} + \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| \right) \varepsilon_n \end{aligned}$$

Список літератури

- Leindler, L. (2000). On the equivalence of classes of numerical sequences. *Analysis Mathematica*, 26(3), 227–234. <https://doi.org/10.1023/A:1005657203064>
- Scheick, J. T. (1966). Polynomial approximation of functions analytic in analytic in a disk. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17(6), 1238–1243. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1966-0206303-8>
- Савчук, В. В. (1998). Швидкість збіжності ряду Тейлора для деяких класів аналітичних функцій. *Укр. мат. журн.*, 50(7), 1001–1003.
http://umj.imath.kiev.ua/archiv/1998/07/umj_1998_07_8250_97102.pdf
- Степанец, А. И. (2002). *Методы теории приближений*. Киев: Ин-т математики НАН України.
- Швецова, А. М. (2000). Приближение частными суммами ряда Тейлора и наилучшее приближение некоторых классов функций, аналитических в единичном круге. *Вісник Харківського нац. університету. Серія Математика, прикладна математика і механіка*, (475), 208–217.

Кластерний підхід до діагностування складних систем

Ю. П. Буценко, В. А. Лабжинський

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

armchairdoc@ukr.net

Сформульовані завдання процедури діагностування стану складних систем, перераховані переваги централізованого підходу до технічного діагностування, вказані методи підвищення вірогідності діагностичної інформації.

Ключові слова: діагностування стану, складні системи, розпізнавання надзвичайних ситуацій, аналіз багатовимірних часових рядів.

При діагностуванні стану систем, які містять розподілену у просторі сукупність елементів (наприклад, парогенеруючих та енергогенеруючих) традиційно використовують датчики механічних та акустичних коливань. У багатьох випадках набір таких датчиків, з одного боку, дозволяє отримувати вірогіднішу інформацію завдяки дублюванню, а іншого боку утруднює її інтерпретацію через взаємозалежність вхідних сигналів для різних датчиків. Отже, виникають, окрім традиційних задач виділення трендів динамічних сигналів, установлення швидкостей зростання амплітуд та виявлення відхилень у амплітудних і фазових спектрах, такі додаткові задачі (Белов, 2003):

- виділення з інформації, що надходить від кожного конкретного датчика, складових, які походять від кожного конкретного елемента системи;
- використання сигналів, які мають одне джерело, але надходять від різних датчиків, для більш вірогідного визначення характеру їх походження;
- установлення зв'язків між сигналами, отримуваними від одного джерела, у різних частотних діапазонах;
- визначення взаємозалежностей між сигналами, отримуваними від різних елементів системи, з точки зору їх взаємного розташування та технологічних зв'язків. Під час розв'язання вказаного комплексу задач є доцільним використання нейронної мережі, навчання якої здійснюють, використовуючи тестові та перевіірочні набори даних, отримувані в різних режимах роботи системи.

Ураховуючи значну кількість датчиків, які «обслуговують» систему, у першу чергу підлягає розв'язанню проблема їхньої кластеризації, тобто виявлення сукупностей датчиків, що отримують вірогідну інформацію від того самого елемента системи. Для цього найбільш природним є використання методу виявлення структур, що ґрунтується на кластерному аналізі та методах теорії графів (Катаев & Катаев, 2012).

Розгляньмо граф, вершинами якого є всі існуючі датчики та можливі джерела сигналів, що сприймаються ними. В останньому випадку «вершини» насправді суть просторові об'єкти, але це не виключає можливості побудови ребер графа з вартостями, що відповідають відстаням між вершинами (під відстанями між просторовими об'єктами M та N розуміємо величину

$$D(M, N) = \min_{x \in M, y \in N} d(x, y),$$

де $d(x, y)$ — традиційна відстань між точками x, y відповідних об'єктів. Визначивши певний поріг відстані, видалимо з графа ребра з вартостями, які перевищують цей поріг, якщо це стосується відстаней між датчиками та джерелами інформації, та меншими, якщо йдеться про відстані між датчиками. В останньому випадку формують граф, що складається з відповідних датчиків, інформація, знята з вершин якого, використовується для взаємоперевірки, тобто підвищення вірогідності отримуваної інформації. Поступово зменшуючи порогове значення для ребер першого типу та збільшуючи для ребер другого типу, отримаємо в першому випадку незв'язний граф, розклад якого на підграфи визначить первинну кластеризацію системи, у другому ж випадку отримаємо граф, сукупність вершин якого, що є датчиками, визначатиме можливість «перехресної» (у тому числі з використанням мажоритарних процедур) перевірки вірогідності отриманих результатів. Проведення такого роду кластеризації для об'єднання, з одного боку джерел інформації та її одержувачів, та, з іншого боку, одержувачів інформації з аналогічних джерел, дозволяє, з одного боку, формувати обґрунтовану стратегію розвитку мережі датчиків, а з іншого боку — отримувати від них найбільш вірогідну та убезпечену від можливої втрати частини датчиків інформацію. Подальше дослідження інформації здійснюється шляхом використання багатовимірного узагальнення сингулярного спектрального аналізу (метод МССА) (Степанов & Голяндина, 2005). Серед іншого, використання такого методу дозволяє «продовжувати» ряд спостережень, тобто прогнозувати подальшу інформацію від системи, зокрема, запобігати виникненню аварійних ситуацій.

Головною метою використання вказаного методу є виділення трендів (у першу чергу, лінійних або експонентних), періодичних компонент та шумів. Важливо, що при цьому не є необхідною інформація про параметричний вигляд тренду, існування та періодичність коливальних компонент. Зазначимо, що теоретичні дослідження системи, як правило, дозволяють визначити як «природні» (робочі) частоти коливань, так і «критичні» (пов'язані з відхиленням від нормальних режимів функціонування). Виявлення останніх є обов'язковим завданням для задіяних систем оброблення інформації.

Список літератури

- Белов, П. Г. (2003). *Системный анализ и моделирование опасных процессов в техносфере*. Москва: Академия.
- Катаев, С. Г., & Катаев, М. Ю. (2012). Математический метод и алгоритм сжатия многомерных временных рядов. *Доклады ТУСУР*, (1.2), 208–212. <https://journal.tusur.ru/storage/45773/208.pdf>
- Степанов, Д. В., & Голяндина, Н. Э. (2005). Варианты метода «гусеница»-SSA для прогноза многомерных временных рядов. В *Трудах IV Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления»* (с. 1831–1847). Москва: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. http://gistatgroup.com/cat/mssa_forecast_ru.pdf

Марківська модель технічного стану в електронних пристроях із структурною надлишковістю

Ю. П. Буценко, Ю. Г. Савченко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Сьогодні застосування структурної надлишковості для забезпечення надійності електронного обладнання перестало бути чимось екзотичним і застосовується не лише в апаратурі критичного призначення (для керування реальними фізичними об'єктами), але й у системах комерційної та банківської сфери. Таке розширення сфери застосування можна пояснити принаймні двома факторами: досягненнями мікро- та наноелектроніки, що практично звело до мінімуму значення масо-габаритних факторів, та, як наслідок зменшення цінового фактору.

Мажоритарний метод залишається одним з найбільш популярних щодо реального практичного застосування завдяки його простоті та ефективності з точки зору суттєвого підвищення показників надійності апаратури або електронних систем у цілому. Ідея методу Джона фон Неймана (von Neumann, 1956) доволі проста й полягає у використанні структурної надлишковості шляхом заміни одного компонента системи n компонентами, а сигнал на виході структури утворювати як результат «голосування» вихідних сигналів компонентів за принципом простої більшості. Компонентами структури можуть бути пристрої різноманітної складності від найпростіших логічних схем до комп'ютерів або сегментів телекомунікаційних мереж, окремих серверів тощо (Федухин & Сеспедес Гарсія, 2018). За аналогічним принципом побудовані кластери «високої готовності», що широко застосовують у банківській сфері. Одна з найбільш поширених технологій забезпечення надійності, яка підтримується фірмою Tandem, побудови так званих промислових комп'ютерів, базується саме на застосуванні мажоритарного методу. Для утворення відповідних сигналів які блокують автоматичне керування об'єктом або попереджають про відмову частини обладнання (зменшення запасу надійності) окрім схем власне відновлення керуючого сигналу y структура повинна бути доповнена логічними схемами, що реалізують функції голосування за простою більшістю, логічною суми та логічного добутку. Зазначимо тут, що наведенні міркування відповідають припущенню, що поява несправностей у компонентах є подіями незалежними, тому ситуації, коли одночасно виникає дві або три несправності є малоімовірною подією і тому нею можна знехтувати. Звичайно, таке припущення не завжди відповідає дійсності, але заради спрощення аналізу його можна прийняти. Для відновлюваних електронних систем (тобто таких, які допускають обслуговування в період виконання системою заданих функцій) надійність, очевидно, повинна визначатись з урахуванням не лише функції розподілу ймовірності безвідмовної роботи компонентів, а й функції розподілу часу відновлення (заміни несправних компонентів у «жовтій» та «червоній» зоні технічних станів). У цьому випадку наявність допоміжної сигналізації може суттєво поліпшити за-

гальні показники надійності за рахунок кардинального скорочення часу пошуку несправних компонентів. Із практики обслуговування електронної апаратури добре відомо, що в більшості випадків левова частина часу на відновлення припадає саме на пошук несправного компонента, а сама процедура відновлення шляхом заміни несправного компонента справним забирає порівняно мало часу. Тому, коли мова йде не лише про ймовірність безвідмовної (безпомилкової) роботи, але й коефіцієнт готовності, який за існуючими стандартами є основним показником надійності для систем цього класу, то фактор часу відновлення справного технічного стану виявляється, по суті, вирішальним.

Розгляньмо структуру з точки зору організації контролю за її ТС. Вважатимемо, що початковою конфігурацією системи є «тандем»: дві пари однакових компонентів, рішення про ТС контрольованої системи приймається за умови, що в початковий момент обидві пари видають на своїх виходах однакові сигнали. Одночасно система знаходиться під впливом потоку відмов, який уважатимемо пуассонівським однорідним, інтенсивності, залежної від кількості елементів у системі (структурі). Алгоритм функціонування тандему відрізняється від традиційного алгоритму вимикання пари компонентів, у яких не збігаються сигнали на виходах: після відмови одного із компонентів пари система переходить у мажоритарну структуру «2 з 3» (триканального резервування з голосуванням виходів).

З теоретичної точки зору можна було б розглядати й процес подальшої деградації системи, тобто переходу до двоканальних та одноканальних структур. Але практично вже двоканальну структуру слід вважати фінальною, у тому розумінні, що поява на входах ВО двох різних сигналів унеможливорює відновлення правильного сигналу і свідчить про відмову структури в цілому. Тобто двоканальний варіант має право на життя лише як спосіб підвищення вірогідності отриманого результату обробки інформації, а не ймовірності безвідмовної роботи. Очевидно, у ситуації, коли на виходах пари компонентів, які ще залишилися, умовно кажучи, «живими», сигнали відрізняються, без додаткової інформації про їх технічний стан неможливо віддати перевагу жодному із двох сигналів як правильному. (До речі, таку додаткову інформацію можна отримати лише від засобів апаратного самоконтролю компонента структури, але такі конфігурації у доповіді ми не розглядаємо). Тобто, якщо вважати, що інформація про технічний стан компонента структури обмежена для ВО лише значеннями інформаційних сигналів на його виході, то слід обмежити розгляд деградаційного процесу переходом структури у двоканальний режим.

Нехай існує N режимів функціонування структури $R_1, R_2, \dots, R_N$, для кожного з яких характерний стаціонарний потік подій з інтенсивністю $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ відповідно, що викликає відмову одного з компонентів структури протягом одного проміжку часу з ймовірностями $p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_N^{(k)}, k = 2, 3, 4$ є кількість функціонуючих на даному проміжку часу компонентів. Припустимо, що на довільному проміжку дискретного часу ймовірність роботи в у одному з вказаних

режимі складає $q_1, q_2, \dots, q_N$ відповідно. Зазначимо, що такий підхід дозволяє уникнути розгляду системи у припущенні про переключення режимів керуючим ланцюгом Маркова, що веде до невиправданого збільшення фазового простору задачі. На практиці можна стверджувати існування у вищезгаданого керуючого ланцюга стаціонарного розподілу $\bar{S} = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N\}$. У такому випадку функціонування структури описується ланцюгом Маркова з дискретним часом та станами A_1, A_2, A_3, A_4 (описують функціонування структури з чотирма, трьома, двома, та одним працездатним компонентом відповідно), матриця перехідних ймовірностей якого наводиться у повному варіанті даної роботи.

Стан A_4 є поглинаючим, середній час еволюції системи до потрапляння в нього є сумою математичних сподівань часів, необхідних для переходу з A_1 до A_2 , з A_2 до A_3 та A_3 до A_4 .

Аналогічно до попереднього, може бути розглянута марківська модель відновлення структури. Виходячи з попередньо розглянутого, можна припустити, що «відновлюючий» компонент починає виконувати свої функції в момент, коли структура містить один, два чи три непрацездатні компоненти. Відповідна матриця перехідних ймовірностей наведена в повному варіанті даної роботи, еволюція такого ланцюга вважається незалежною від попереднього. Поглинаючим станом для цієї ситуації буде «нульові»-елементи, які підлягають відновленню відсутні, структура переходить у непрацюючий («сплячий») стан. Випадок наявності «гарячого резерву» ми не розглядаємо, оскільки у випадку необмеженості такого ресурсу він збігається з попереднім, а у випадку наявності обмежень є детально дослідженим (Дружинин, 1986).

Висновки. Зазначмо, що використовуючи термін «деградація», ми надаємо процесу функціонування пристрою або обладнання дещо песимістичного забарвлення, хоча можна цей процес розглядати з іншого боку. Насправді ж, якщо функціонування електронного пристрою із структурною надлишковою розглядати разом із засобами відновлення, то можна говорити про *адаптацію* пристрою до відмов, і переходу, по суті, до реконфігурації структури залежно від зміни її технічного стану (частини обладнання, яка вже відмовила). Такий погляд дозволяє оптимістично дивитися на процес зміни технічних станів апаратури. З цієї точки зору можна зробити такі висновки.

1. Традиційно методи використання структурної надлишковості застосовувались здебільшого як інструмент забезпечення надійності (безвідмовності) електронної апаратури, компоненти якої не можуть бути відновлені під час експлуатації (замінені новими та справними) з конструктивних або експлуатаційних причин. Тому основний ефект, що визначав доцільність та ефективність використання надлишковості обґрунтовано мав оцінюватись збільшенням ймовірності безвідмовної роботи обладнання. Застосування ж структурної надлишковості до відновлюваної апаратури відкриває нові, і доволі перспективні, мож-

ливості покращення основного показника надійності апаратури цього класу, а саме коефіцієнта готовності.

2. До функції ВО, яка полягає у власне відновленні інформаційних сигналів, доцільно додати функції визначення реального технічного стану структури із надлишковістю. Цей технічний стан слід визначати в термінах «запасу міцності» структури, тобто в кількості компонентів, що утворюють структуру, які залишаються працездатними. Такі можливості виникають саме в надлишкових структурах та розширюються зі зростанням рівня надлишковості.

3. У разі, коли обладнання обслуговується (відновлюване) у процесі експлуатації, така інформація є ключовою для мінімізації часу відновлення і дозволяє суттєво збільшити коефіцієнт готовності апаратури за рахунок зменшення часу на пошук компонентів, які необхідно замінити (відновити).

4. Слід також зазначити, що основна частина наведених розміркувань та попередніх висновків може бути застосована не лише до цифрової апаратури, що обробляє двійкову інформацію, але й до аналогових пристроїв, які обробляють аналогові сигнали. Цей висновок ґрунтується на тому, що дві основні функції ВО — порівняння значень сигналів та визначення більшості співпадаючих значень — можуть бути досить просто реалізовані у випадку, коли сигнали є неперервними.

5. І, нарешті, найголовніше, на думку авторів — це створення умов для виявлення прихованих помилок у сигналах на виходах структури в цілому. Це набуває першорядного значення у випадках, коли такі сигнали використовують для безпосереднього керування реальними фізичними об'єктами. Саме наявність «накладеної» на структуру електронної системи мережі сигналізації технічних станів компонентів дає можливість превентивно (до появи критичних станів) запобігти виникненню аварійних станів).

Список літератури

- von Neumann, J. (1956). Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components. *Automata studies*, 34, 43–98.
- Дружинин, Г. В. (1986). *Надежность автоматизированных производственных систем*. Москва: Энергоатомиздат.
- Федухин, А. В., & Сеспедес Гарсия, П. Д. (2018). К вопросу о структурах отказоустойчивых компьютеров фирмы Stratus Computer Inc. *Математичні машини і системи*, (4), 87–100. <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/150671>

Определение параметров ядер наследственности в линейной теории вязкоупругости методом интегрального преобразования Лапласа — Карсона

В. П. Голуб

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина
creep@inmech.kiev.ua

Решается задача определения параметров ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при одноосном напряженном состоянии. Решение строится численно на основе интегрального преобразования Лапласа — Карсона. Рассчитаны и апробированы экспериментально значения параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности арамидных волокон СВМ, параполиамидных нитей, стеклопластика ТС8/3-250 и полимербетона.

Ключевые слова: линейная вязкоупругость, уравнения Больцмана-Вольтерра, интегральное преобразование Лапласа — Карсона, параметры ядер наследственности, дробно-экспоненциальное ядро.

Введение. Одной из основных задач наследственной теории вязкоупругости считается задача выбора ядер интегральных уравнений теории, нахождение их резольвент и достоверное определение параметров ядер (Кристенсен, 1974; Работнов, 1977).

В линейной теории вязкоупругости в качестве ядер наследственности чаще всего используются степенные, экспоненциальные и дробно-экспоненциальные функции, а также различные комбинации этих функций. Параметры ядер определяются, как правило, по результатам математической обработки данных испытаний образцов материала на ползучесть или на релаксацию. Эта задача решается чаще всего, аппроксимацией дискретных значений функций ползучести и функций подобия (Кристенсен, 1974; Работнов, 1977; Голуб и др., 2005), а также с использованием функции Миттаг-Леффлера (Розовский, 1961).

В настоящей работе задача определения параметров ядер наследственности линейно-вязкоупругих материалов решается с использованием интегрального преобразования Лапласа — Карсона.

1. Постановка задачи. Исходные соотношения. Рассматриваются процессы ползучести и релаксации напряжений изотропных линейно-вязкоупругих материалов при одноосном напряженном состоянии. Определяющие уравнения линейной теории вязкоупругости, задающие зависимость между растягивающими напряжениями σ_{11} , продольными деформациями ε_{11} и временем t записываются в виде

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}(t) = \frac{1}{E} \left(\sigma_{11}(t) + \lambda \int_0^t K_{11}(t - \tau, \alpha, \beta) \sigma_{11}(\tau) d\tau \right); \\ \sigma_{11}(t) = E \left(\varepsilon_{11}(t) - \lambda \int_0^t R_{11}(t - \tau, \alpha, \beta) \varepsilon_{11}(\tau) d\tau \right), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $K_{11}(\cdot)$, $R_{11}(\cdot)$ — ядра ползучести и релаксации; E — модуль упругости; α , β , λ — параметры ядер; t — время наблюдения; τ — время, предшествующее моменту наблюдения.

Задача заключается в разработке методики определения параметров ядер линейной наследственности на основе интегрального преобразования Лапласа — Карсона и в определении параметров ядер ряда конструкционных материалов.

2. Методика определения параметров ядер наследственности. Методика основана на обработке численно преобразованных экспериментальных кривых ползучести преобразованным уравнением ползучести (1.1) с заданной структурой ядра ползучести $K_{11}(\cdot)$ в пространстве изображений Лапласа — Карсона. Параметры ядер определяются непосредственно в пространстве изображений без перехода к оригиналу.

Методика включает процедуру преобразования исходного уравнения ползучести, численные преобразования экспериментальных кривых ползучести и определение параметров ядер ползучести по результатам аппроксимации преобразованных экспериментальных данных преобразованным уравнением ползучести.

Выбирая в качестве ядра ползучести $K_{11}(\cdot)$ в (1.1) дробно-экспоненциальную функцию Работнова (Работнов, 1977):

$$K_{11}(t - \tau) = \frac{1}{(t - \tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^n (t - \tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}, \quad (2.1)$$

уравнение ползучести $\varepsilon_{11}(t)$ в (1.1) в пространстве изображений Лапласа — Карсона преобразуется к виду

$$\varepsilon_{11}^*(p) = p \int_0^{\infty} \varepsilon_{11}(t) e^{-pt} dt = \frac{\sigma_{11}}{E} \left[1 + \frac{\lambda}{\beta + p^{1+\alpha}} \right], \quad (2.2)$$

где p — параметр преобразования; α , β , λ — параметры ядра ползучести.

Исходная экспериментальная кривая ползучести $\varepsilon_{\text{exp}}(t)$ задается дискретно в виде совокупности табличных значений t_i и ε_i и в пространстве изображений Лапласа — Карсона преобразуется у виду

$$\varepsilon_{\text{exp}}^*(p_j) = p_j \int_0^{\infty} \varepsilon_{\text{exp}}(t) e^{-p_j t} dt = p_j \int_0^{t_*} \varepsilon_{\text{exp}}(t) e^{-p_j t} dt + p_j \int_{t_*}^{\infty} \varepsilon_{\text{exp}}(t) e^{-p_j t} dt, \quad (2.3)$$

а при условии, что $t_* \rightarrow \infty$ — преобразуется к интегралу

$$\varepsilon_{\text{exp}}^*(p_j) = p_j \int_0^{\infty} \varepsilon_{\text{exp}}(t) e^{-p_j t} dt = p_j \int_0^{t_*} \varepsilon_{\text{exp}}(t_i) e^{-p_j t} dt; \quad i = \overline{0, \ell}; \quad j = \overline{1, s}, \quad (2.4)$$

вычисление которого позволяет построить изображение $\varepsilon_{\text{exp}}^*(p_j)$ исходной экспериментальной кривой ползучести $\varepsilon_{\text{exp}}(t_i)$ в виде таблицы значений (p_j, ε_j) .

Задача определения параметров дробно-экспоненциальных ядер (2.1) сводится к определению таких значений α , β и λ , которые в пространстве изображений обеспечивают минимальное отклонение кривой, задаваемой уравнением (2.2), от полученной на основе (2.4) совокупности значений (p_j, ε_j^*) .

Для численного преобразования экспериментальной кривой ползучести $\varepsilon(t_i)$ разобьем интервал интегрирования в (2.4) на ℓ частей, так что интеграл (2.4) запишется в виде

$$\varepsilon_{\text{exp}}^*(p_j) = p_j \sum_{i=0}^{\ell-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon(t_i) e^{-p_j t} dt; \quad j = \overline{1, s}, \quad (2.5)$$

где значения функции $\varepsilon(t_i)$ известны только на концах промежутков интегрирования $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.

Для вычисления интегралов, входящих в (2.5), на каждом интервале $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ функция $\varepsilon_{\text{exp}}(t) = \varepsilon_i(t)$ в (2.4) аппроксимируется полиномом 2-й степени, так что интеграл в (2.5) конкретизируется в виде

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon(t_i) e^{-p_i t} dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} A_{0,i} e^{-p_i t} dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} A_{1,i} e^{-p_i t} dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} A_{2,i} e^{-p_i t} dt, \quad (2.6)$$

где i — как и выше, число участков разбиения экспериментальной кривой ползучести; A_{qi} — коэффициенты полинома, определяемые из условия прохождения функции $\varepsilon_i(t)$ через r последовательно заданных экспериментальных точек ($r < n - 1$) с координатами (t_i, ε_i) .

Интегрируя далее (2.6) по частям и используя рекуррентное соотношение

$$\int t^q e^{at} dt = \frac{1}{a} t^q e^{at} - \frac{q}{a} \int t^{q-1} e^{at} dt,$$

для задания численных значений функции $\varepsilon_{\text{exp}}(p_j)$ получаем соотношение

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{exp}}^*(p_j) = & \left[A_{0,i} \left(\frac{e^{-p_j t_{i+1}} - e^{-p_j t_i}}{-p_j} \right) \right] + \left[A_{1,i} \left(\frac{t_{i+1} e^{-p_j t_{i+1}} - t_i e^{-p_j t_i}}{-p_j} - \frac{e^{-p_j t_{i+1}} - e^{-p_j t_i}}{p_j^2} \right) \right] + \\ & + \left[A_{2,i} \frac{(t_i^2 e^{-p_j t_i} - t_{i+1}^2 e^{-p_j t_{i+1}})}{p_j} + 2A_{2,i} \frac{(t_i e^{-p_j t_i} - t_{i+1} e^{-p_j t_{i+1}})}{p_j^2} - 2A_{2,i} \frac{(e^{-p_j t_i} + e^{-p_j t_{i+1}})}{p_j^3} \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

которое позволяет вычислять интегралы Лапласа — Карсона (2.4) при надлежащем выборе чисел p_j .

Значения параметров α , β и λ дробно-экспоненциального ядра наследственности (2.1) определяются из условия минимума функционала

$$F(\alpha, \beta, \lambda) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^s \left[\varepsilon_k^*(p_j) - \frac{\sigma_k}{E} \left(1 + \frac{\lambda}{\beta + p_j^{1+\alpha}} \right) \right]^2, \quad (2.8)$$

где функция $\varepsilon_k^*(p_j)$ задает изображение совокупности экспериментальных точек в плоскости « $\varepsilon^* - p$ », рассчитанных по формуле (2.7). В (2.8) предусмотрено также осреднение исходных экспериментальных данных по m кривых ползучести для m уровней напряжений.

Задача определения параметров ядра в (2.8) решается с использованием итерационного метода Левенберга — Маркардта.

3. Численная реализация методики. Вычисление дискретных значений функции $\varepsilon_{\text{exp}}^*(p_j)$ в (2.7), которые используются при определении параметров α , β , λ дробно-экспоненциальных ядер наследственности (2.1) из условия минимизации функционала (2.8), связано с необходимостью задания значений p_1 и p_s параметра преобразования p_j ($j = \overline{1, s}$).

Пренебрегая вторым слагаемым в (2.3) и считая, что при $t > t_*$ величина деформации $\varepsilon(t_*)$, накопленная к моменту времени t_* , остается постоянной, для p_1 из (2.3) получаем соотношение

$$p_1 \geq \frac{1}{t_*} \ln \left[1 + \frac{\varepsilon(t_*)}{\delta \varepsilon_e} \right], \quad (3.1)$$

откуда, полагая $\varepsilon(t_*) = \varepsilon_e$ и $\delta = 0,63 \cdot 10^{-4}$, следует

$$p_1 = \frac{10}{t_*} \quad \text{при} \quad p_j = p_{j-1} + \frac{p_s - p_1}{s - 1}. \quad (3.2)$$

Здесь величина t_* соответствует фактической длительности испытаний на ползучесть; ε_e — начальная упругая компонента деформации; $\varepsilon(t_*)$ — деформа-

ция, накопленная к моменту времени t_* , а δ задает погрешность оценки функции $\varepsilon_{\text{exp}}^*(p_j)$ по формуле (2.7), в которой не учитывается второе слагаемое при вычислении интегралов в (2.3).

Величина параметра p_s в (3.2) задавалась как максимальная абсцисса верхнего участка зависимости $\varepsilon_{\text{exp}}^*(p_j)$.

Значения параметров α , β , λ дробно-экспоненциальных ядер наследственности для некоторых линейно-вязкоупругих материалов, рассчитанных по изложенной в разделах 2 и 3 методике, приведены в таблице.

Параметры ядра	Вязкоупругие материалы			
	aramидное во- локно СВМ $\sigma_k = 1000$ МПа	параполи- амидная нить $\sigma_k = 1000$ МПа	стеклопластик ТС8/3-250 $\sigma_k = 273$ МПа	полимербетон $\sigma_k = 30$ МПа
α	– 0,825632	– 0,92816	– 0,936953	– 0,922557
β , час ^{-(1+α)}	0,575644	0,963951	0,604732	0,41293
λ , час ^{-(1+α)}	0,893828	1,006342	0,441018	0,473555
σ_k/E	$6,295 \cdot 10^{-3}$	0,013459	$7,19 \cdot 10^{-3}$	$8,345 \cdot 10^{-4}$

Закключение. Метод определения параметров ядер наследственности, основанный на использовании преобразования Лапласа — Карсона позволяет определять параметры ядер непосредственно по изображению без перехода к оригиналу.

Список литературы

- Голуб, В. П., Кобзарь, Ю. М., & Фернати, П. В. (2005). К расчету деформаций линейной ползучести вязкоупругих армирующих волокон при растяжении. *Прикладная механика*, 41(5), 97–106.
- Кристенсен, Р. М. (1974). *Введение в теорию вязкоупругости*. Москва: Мир.
- Работнов, Ю. Н. (1977). *Элементы наследственной механики твердых тел*. Москва: Наука.
- Розовский, М. И. (1961). О некоторых особенностях упруго-наследственных сред. *Изв. АН СССР. Механика и машиностроение*, (2), 30–36.

Рух рятувальної шлюпки вільного падіння при сходженні з похилої рамп

Є. Т. Горалік, М. М. Крюков, Т. О. Лупіна

Державний університет інфраструктури та технологій, Київ, Україна
et_gor@ukr.net

Розглянуто задачу про рух рятувальної шлюпки вільного падіння, яка моделюється однорідним стрижнем, при сходженні з похилої рамп. Отримано розв'язувальну систему звичайних диференціальних рівнянь і сформульовано відповідну задачу Коші, яка розв'язується чисельно за допомогою методу Рунге — Кутти. Диференціальні рівняння руху стрижня складені за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду. На основі запропонованого підходу проведено чисельні експерименти для аналізу впливу початкової швидкості й довжини шлюпки та кута нахилу рамп на параметри руху.

Ключові слова: плоско-паралельний рух, стрижень, похила рамп, рівняння Лагранжа другого роду, звичайні диференціальні рівняння, задача Коші, чисельне моделювання, метод Рунге — Кутти.

Рятувальні шлюпки вільного падіння, які використовують на морських судах та нафтодобувних платформах, при сходженні з похилої рамп та подальшому вільному падінні до поверхні води рухаються плоско-паралельно.

Під час дослідження плоско-паралельного руху тіл його зазвичай представляють як суму двох рухів: поступального разом з центром мас та обертального навколо цієї точки (Павловський, 2002). При цьому реальні тіла в багатьох випадках з достатньою точністю можуть моделюватися однорідним стрижнем.

Найбільш складним і малодослідженим етапом руху рятувальної шлюпки вільного падіння при її сходженні з напрямних опорної рамп є перша фаза падіння з наростаючим кутом нахилу (Микитюк & Миронов, 2010) з моменту, коли центр мас опиняється над краєм опори (крайнім роликом рамп) до моменту сходу з рамп опорних поверхонь шлюпки (рис. 1).

Розглянемо саме цей етап — сходження з похилої рамп однорідного стрижня масою m довжиною L , що мав у початковий момент початкову швидкість V_0 в полярній системі координат (r, ϕ) (рис. 1).

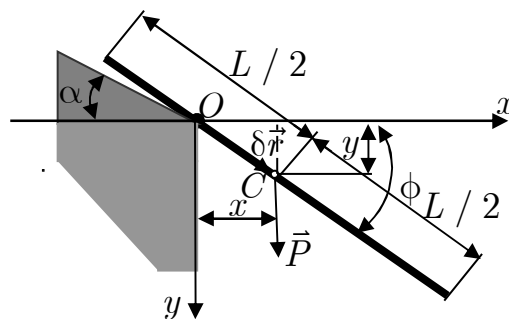


Рис. 1. Сходження однорідного стрижня з похилої опори

Переміщення центру мас стрижня за край опори на довжину відрізка $r = OC$ під дією сили тяжіння $P = mg$ викликає появу обертового моменту $M = Px = mgr \cos \phi$, під дією якого стрижень обертається з кутовим прискоренням у вертикальній площині.

Для складання диференціальних рівнянь руху тіла застосуємо рівняння Лагранжа другого роду. При цьому силами тертя знехтуємо.

За узагальнені координати візьмімо радіус $r = OC$ — відстань від центру мас стрижня до краю опори й полярний кут ϕ між горизонтальною віссю x і напрямком OC — віссю стрижня.

Тоді рівняння Лагранжа другого роду матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{r}} \right) - \frac{\delta T}{\delta r} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{\phi}} \right) - \frac{\delta T}{\delta \phi} &= Q_2,\end{aligned}$$

де T — кінетична енергія тіла, $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ — модуль радіальної швидкості центру

мас, $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$ — модуль кутової швидкості стрижня, $\ddot{\phi} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$ — модуль кутового прискорення стрижня, Q_1 і Q_2 — узагальнені сили.

Кінетична енергія стрижня під час його руху визначається з виразу:

$$T = \frac{I_{zc} \dot{\phi}^2}{2} + \frac{m V_c^2}{2},$$

де I_{zc} — момент інерції стрижня відносно центру мас, V_c — модуль вектора швидкості центру мас.

З урахуванням відомих формул для моменту інерції стрижня відносно цен-

тру мас $I_{zc} = \frac{mL^2}{12}$ і модуля вектора швидкості точки в полярній системі координат $V = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}$ отримаємо вираз для кінетичної енергії стрижня:

$$T = \frac{mL^2}{12} \cdot \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2)}{2}.$$

Знайшовши вирази для похідних, що входять у ліві частини рівнянь Лагранжа, отримаємо:

$$\begin{aligned}\frac{\delta T}{\delta \dot{r}} &= m\dot{r}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{r}} \right) = m\ddot{r}; \quad \frac{\delta T}{\delta r} = mr\dot{\phi}^2; \quad \frac{\delta T}{\delta \dot{\phi}} = (I_{zc} + mr^2)\dot{\phi}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{\phi}} \right) &= (I_{zc} + mr^2)\ddot{\phi}; \quad \frac{\delta T}{\delta \phi} = 0.\end{aligned}$$

Визначимо узагальнену силу Q_1 за координатою $q_1 = r$. Для цього розглянемо можливе переміщення системи, зумовлене можливим приростом узагальненої координати δr (рис. 2).

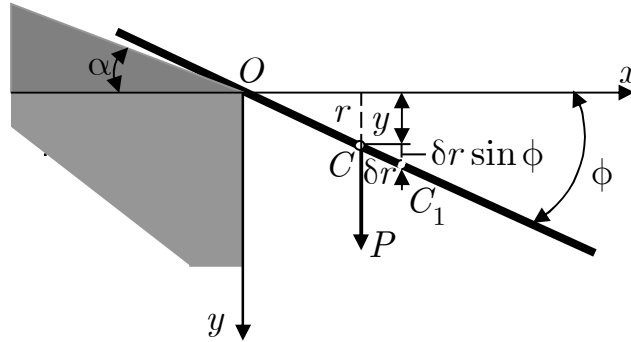


Рис. 2. Можливе переміщення системи, зумовлене можливим приростом узагальненої координати δr

Сума елементарних робіт усіх активних сил, прикладених до системи на цьому переміщенні дорівнює:

$$\delta A = P \delta r \sin \phi = mg \delta r \sin \phi.$$

З іншого боку $\delta A = Q_1 \delta q_1 = Q_1 \delta r$. Отже, $Q_1 = mg \sin \phi$. Так само визначимо узагальнену силу Q_2 по координаті $q_2 = \phi$.

Розглянемо можливе переміщення системи, зумовлене можливим приростом узагальненої координати $\delta \phi$ (рис. 3).

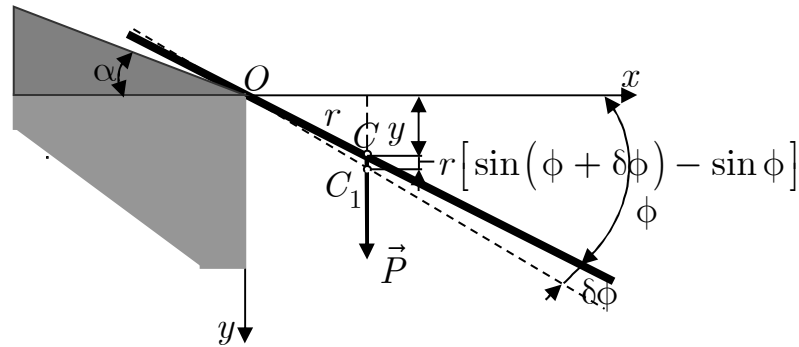


Рис. 3. Можливе переміщення системи, зумовлене можливим приростом узагальненої координати $\delta \phi$

Сума елементарних робіт всіх активних сил, прикладених до системи на цьому переміщенні дорівнює

$$\delta A = Pr[\sin(\phi + \delta \phi) - \sin \phi] = mgr[\sin \phi \cos \delta \phi + \cos \phi \sin \delta \phi - \sin \phi].$$

Оскільки $\cos \delta \phi \approx 1$ і $\sin \delta \phi \approx \delta \phi$, можна записати $\delta A = mgr \cos \phi \delta \phi$. З іншого боку $\delta A = Q_2 \delta q_2 = Q_2 \delta \phi$. Отже, $Q_2 = mgr \cos \phi$.

Підставляючи отримані вище вирази в рівняння Лагранжа, отримаємо наступну розв'язувальну систему диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= g \sin \phi; \\ \left(\frac{L^2}{12} + r^2 \right) \ddot{\phi} &= gr \cos \phi.\end{aligned}\tag{1}$$

Для формулювання задачі Коші для отриманої системи диференціальних рівнянь (1) необхідно додати початкові умови

$$r(0) = 0, \dot{r}(0) = V_0, \phi(0) = \alpha, \dot{\phi}(0) = 0.\tag{2}$$

Приведемо отриману систему диференціальних рівнянь до нормальної форми Коші

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_1 y_4^2 + g \sin y_3, \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_4, \\ \frac{dy_4}{dt} &= g \frac{y_1 \cos y_3}{a + y_1^2}.\end{aligned}\tag{3}$$

Тут $y_1 = r$, $y_2 = \dot{r}$, $y_3 = \phi$, $y_4 = \dot{\phi}$, $a = \frac{L^2}{12}$. Початкові умови мають вигляд

$$y_1(0) = 0, y_2(0) = V_0, y_3(0) = \alpha, y_4(0) = 0.\tag{4}$$

Записуємо задачу Коші (3), (4) у векторній формі

$$\frac{d\vec{Y}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{Y}), \quad \vec{Y}(0) = \vec{Y}_0,\tag{5}$$

де $\vec{Y} = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}^T$. Розв'язуватимемо задачу (5) за допомогою чисельного методу Рунге — Кутти четвертого порядку точності за схемою (Березин & Жидков, 1962):

$$\vec{Y}_{n+1} = \vec{Y}_n + \vec{\Lambda}_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

де

$$\begin{aligned}\vec{\Lambda}_n &= \frac{1}{6} \left(\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4 \right), \quad \vec{K}_1 = h\vec{F}(t_n, \vec{Y}_n), \\ \vec{K}_2 &= h\vec{F}\left(t_n + \frac{h}{2}, \vec{Y}_n + \frac{\vec{K}_1}{2}\right), \quad \vec{K}_3 = h\vec{F}\left(t_n + \frac{h}{2}, \vec{Y}_n + \frac{\vec{K}_2}{2}\right), \\ \vec{K}_4 &= h\vec{F}\left(t_n + h, \vec{Y}_n + \vec{K}_3\right), \quad t_n = nh \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad h > 0 \text{ — крок в часі} \\ \Delta t_n &= t_{n+1} - t_n = h.\end{aligned}$$

На основі запропонованого підходу проведено серію чисельних експериментів для визначення часу скочування стрижня, горизонтальної та вертикальної складової швидкості центру мас, кутів повороту та кутової швидкості стрижня в момент відриву від рампи при значеннях кута нахилу рампи $\alpha = 25, 35, 45^\circ$ та різних значеннях початкової швидкості центру мас у діапазоні від 1 до 10 м/с і довжини стрижня в діапазоні від 5 до 15 м. Отримані на основі цих розрахунків залежності для стрижня довжиною 5 м представлені на рис. 4.

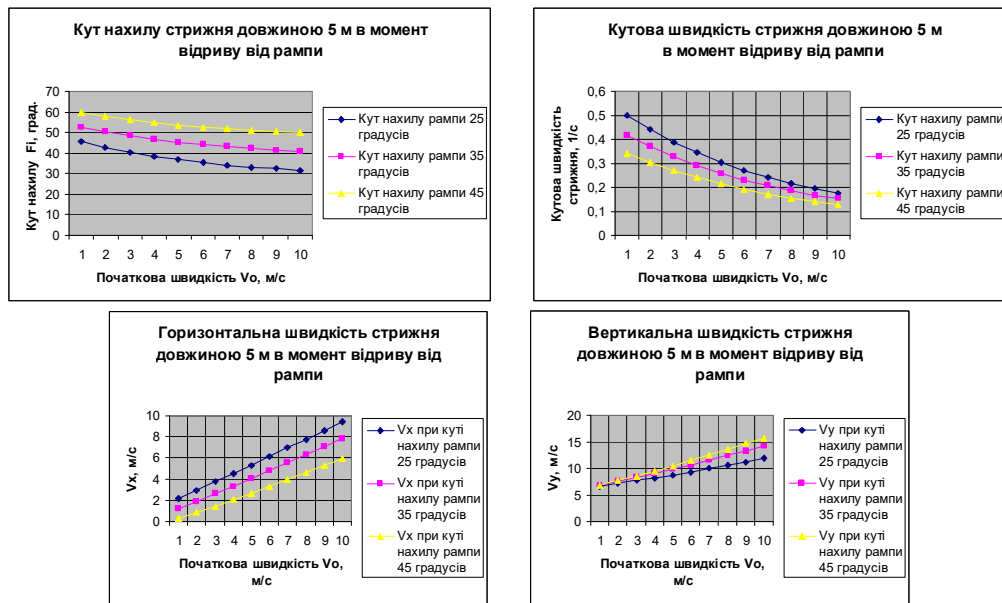


Рис 4. Параметри руху стрижня довжиною 5 м

Висновок. Запропонований підхід дозволяє за допомогою чисельних експериментів на основі отриманої розв’язувальної системи звичайних диференціальних рівнянь отримувати та аналізувати параметри руху шлюпки, що сходить з похилої опорної поверхні.

Список літератури

- Березин, И. С., & Жидков, Н. П. (1962). *Методы вычислений*. (Том 2). Москва: Физматгиз.
- Микитюк, В. Е., & Миронов, Д. А. (2010). Параметри движения шлюпки свободного падения перед приводнением. У *Матеріалах I Міжнародної науково-технічної конференції «Інновації в суднобудуванні та океанотехніці»* (с. 84–89). Миколаїв: НУК.
- Павловський, М. А. (2002). *Теоретична механіка*. Київ: Техніка.

До обернення теореми Гріна

С. В. Горленко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
svagor7@gmail.com

У статті досліджено необхідні умови теореми Остроградського — Гріна.

Ключові слова: формула Гріна, необхідна умова, достатня умова.

У підручниках з математичного аналізу відома формула Остроградського — Гріна

$$\oint_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_d \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

доводиться за умов, що $P(x,y), Q(x,y)$ — неперервно диференційовні функції в деякій однозв'язній області $D \subset \mathbb{R}^2$, l — довільний гладкий або кусково гладкий контур з цієї області, а d — обмежена ним область.

Очевидно, що ці достатні умови не є необхідними. Ідеальними необхідними умовами були б такі, які б не вимагали більше, ніж потрібно для запису формули Гріна. А саме: функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ повинні мати частинні похідні

$\frac{\partial Q}{\partial x}$ та $\frac{\partial P}{\partial y}$ і бути такими, щоб існували інтеграли в обох частинах формули. І

чи буде за цих умов правдива формули Гріна?

Мета статті — наблизитись до цих природних необхідних умов.

Розгляньмо адитивну функцію $F(J)$ сегмента (прямокутника) $J = [x_0, x; y_0, y]$, яку задано формулою

$$F(J) = \int_{\partial J} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

де ∂J — межа сегмента J .

Нас цікавлять необхідні та достатні умови абсолютної неперервності функції $F(J)$ і, у зв'язку з цим, необхідні та достатні умови правдивості формули Гріна.

Теорема 1. Нехай $P(x,y)$ — дійсна, вимірна функція, означена в області $D \subset \mathbb{R}^2$ і така, що для кожного y функція $P(x,y)$ сумовна за x . Тоді для того, щоб $F_1(J) = \int_{\partial J} P dx$ було абсолютно неперервна, необхідно й достатньо щоб:

- 1) функція $P(x,y)$ була абсолютно неперервна за y для майже всіх x ;
- 2) майже скрізь в області D існувала й була сумовною $\frac{\partial P}{\partial y}$.

Наслідок 1. Нехай $Q(x,y)$ — дійсна вимірна функція, означена в області $D \subset \mathbb{R}^2$ і сумовна для кожного фіксованого x за y . Тоді для того, щоб

$$F_2(J) = \int_{\partial J} Q dy$$

була абсолютно неперервна, необхідно й достатньо, щоб:

- 1) $Q(x, y)$ була абсолютно неперервна за x для майже всіх y ;
- 2) майже скрізь в D існувала й була сумовною $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Умови теореми 1 та наслідку 1 достатні для абсолютної інтегровності

$$F(J) = \int_{\partial J} Pdx + Qdy.$$

Справді:

$$\begin{aligned} F(J) &= \int_{\partial J} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{x_0}^x [P(\xi, y_0) - P(\xi, y)]d\xi + \int_{y_0}^y [Q(x, \eta) - Q(x_0, \eta)]d\eta = \\ &= - \int_{x_0}^x d\xi \int_{y_0}^y \frac{\partial P}{\partial \eta} d\eta + \int_{y_0}^y d\eta \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial \xi} d\xi = \iint_J \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Природно виникає питання, чи не є умови теореми 1 та наслідку 1 майже необхідними. Тобто, якщо в цих умовах замінити умову існування та сумовності майже скрізь в D похідних $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ умовою сумовності $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, чи не отримаємо ми необхідні умови для абсолютної неперервності функції

$$F(J) = \int_{\partial J} Pdx + Qdy?$$

Відповідь **негативна**. У статті Fesq (1965) подано приклад функцій $P(x, y)$ та $Q(x, y)$, неперервних у квадраті $K = [0, 1; 0, 1]$ і таких, що $P(x, y)$ є абсолютно неперервною за y для всіх x , $Q(x, y)$ абсолютно неперервна за x для всіх y , існують $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ скрізь у K , причому $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ сумована, але

$$\int_{\partial K} Pdx + Qdy \neq \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Причиною є те, що в цьому прикладі частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ не є сумовними в K і, навіть, повторно інтегровними (Толстов, 1950). Тому суттєва, принаймні повторна інтегровність $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$, але, очевидно її недостатньо для абсолютної неперервності $F(J)$. Можна показати, що суттєвою є також умова 1) теореми 1.

З цього випливає, що якщо ми хочемо, щоб

$$F(J) = \int_{\partial J} Pdx + Qdy$$

виражалась через інтеграл за площею саме від функції $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, то ми повинні зв'язати клас функцій $P(x, y)$ та $Q(x, y)$. У зв'язку з цим зауваженням подаємо критерій абсолютної неперервності функції

$$F(J) = \int_{\partial J} Pdx + Qdy.$$

Теорема 2. Нехай $P(x, y), Q(x, y)$ — дійсні вимірні функції, означені в області $D \subset \mathbb{R}^2$ і такі, що:

1) для будь-якого y $P(x, y)$ — сумовна за x ;

для будь-якого x $Q(x, y)$ — сумовна за y ;

2) $P(x, y)$ — абсолютно неперервна за y для x ;

$Q(x, y)$ за x для майже всіх y ;

3) хоча б одна з частинних похідних $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ існує майже скрізь у D і є сумовною.

Тоді для того, щоб $F(J) = \int_{\partial J} Pdx + Qdy$ була абсолютно неперервною, необхідно й достатньо, щоб $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ була сумовна в D . При цьому для будь-якого $J \subset D$ правдива формула

$$\int_{\partial J} Pdx + Qdy = \iint_J \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Зауваження. З теореми 2 випливає, що якщо хоча б одна з частинних похідних $\frac{\partial Q}{\partial x}$ чи $\frac{\partial P}{\partial y}$ є сумовною, то для виконання формули Гріна необхідно й достатньо, щоб сумовною була також інша похідна. Якщо ж обидві частинні похідні не є сумовними, то, як показує поданий вище приклад із статті Fesq (1965), формула Гріна може не виконуватись, навіть за умов сумовності різниці

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Список літератури

- Fesq, R. M. (1965). Green's formula, linear continuity and Hausdorff measure. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 118(6), 105–112. <https://doi.org/10.2307/1993946>
- Толстов, Г. П. (1950). О криволинейном и повторном интеграле. *Тр. МИАН СССР*, 35, 3–102. <http://mi.mathnet.ru/rus/tm1099>

Використання методу Понтрягіна в задачі оптимального керування дволанковим маніпулятором

М. В. Демидюк, В. М. Демидюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, Львів
demydyuk@iapmm.lviv.ua

Досліджуємо задачу оптимального керування дволанковим маніпулятором, який під дією керувань (моментів сил у шарнірах) виконує транспортну операцію в горизонтальній площині: за заданий час переносить вантаж із заданого початкового положення в задане кінцеве. Якість процесу керування оцінюємо квадратичним (за керуваннями) функціоналом. Розв'язок задачі побудовано за допомогою процедури принципу максимуму Понтрягіна. Вихідна задача оптимального керування зводиться до розв'язання відповідної красової задачі для системи восьми нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Розв'язок останньої будуємо за допомогою методики пристрілки в поєднанні з числовими алгоритмами методу Рунге — Кутти та нелінійного програмування.

Ключові слова: дволанковий маніпулятор, оптимальне керування, принцип максимуму Понтрягіна, чисельні методи, нелінійне програмування.

Серед маніпуляційних робіт важливе місце посідають дволанкові маніпулятори. Такі маніпулятори є складовими частинами конструкцій багатьох роботів, у яких довжини двох суміжних ланок помітно перевищують розміри решти ланок. Тому дволанкові маніпулятори та різноманітні задачі оптимізації їх руху вже тривалий час привертають увагу дослідників. Зокрема, Черноусько та ін. (1989), Формальський (1996) дослідили ряд задач оптимального за швидкістю керування дволанковим маніпулятором, Аветисян та Болотник (1990) запропонували процедуру побудови субоптимального за швидкістю режиму керування дволанковим маніпулятором з електромеханічними приводами. У своїй праці Лутманов та ін. (2013) розв'язали задачу про повернення робочого органу дволанкового маніпулятора на задану траєкторію, від якої він трохи відхилився під час руху. Огляд та аналіз низки публікацій по використанню методики нечітких множин у задачах оптимального керування дволанковим маніпулятором зробили Lochan та Roy (2015). Задачі параметричної оптимізації керованого руху дволанкового маніпулятора дослідили Демидюк та Широко (2007), Демидюк та Гошовська (2016а; 2016б).

Нижче розглядаємо дволанковий маніпулятор, схематично зображений на рис. 1. Тут OA , AB — тверді тіла, з'єднані між собою циліндричним шарніром A . Ланка OA за допомогою циліндричного шарніра O зв'язана з нерухомою основою, на кінці другої ланки — захоплювач з вантажем. Осі шарнірів O і A спрямовані по вертикалі. Шарніри вважаємо ідеальними, захоплювач (з вантажем) моделюємо точковою масою m . Мані-

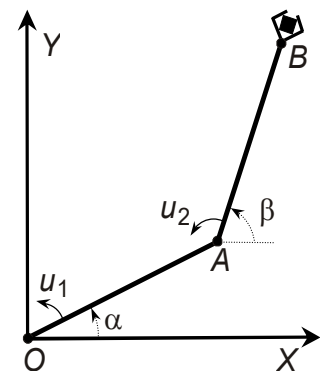


Рис. 1

пулятор під дією моментів сил $u_1(t)$, $u_2(t)$ виконує плоскопаралельний рух у горизонтальній площині OXY .

Рівняння руху маніпулятора подамо у вигляді:

$$\begin{aligned} K_a \ddot{\alpha} + K[\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta)] &= u_1 - u_2, \\ K_b \ddot{\beta} + K[\ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta)] &= u_2, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — кути повороту ланок OA , AB відносно осі OX інерційної системи відліку OXY ; $K_a = J_a + a^2(m_b + m)$, $K_b = J_b + mb^2$, $K = a(rm_b + mb)$; $a = |OA|$, $b = |AB|$ — довжини ланок маніпулятора; J_a , J_b — моменти інерції ланок OA , AB відносно осей шарнірів O , A відповідно; m_b , r — маса ланки AB і відстань від її центра маси до шарніра A . Тут і далі крапкою (зверху над величиною) позначено диференціювання за часом t .

Нехай досліджуваний маніпулятор протягом заданого часу T переносить вантаж з початкового положення

$$\alpha(0) = \alpha_0, \beta(0) = \beta_0, \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = 0, \quad (2)$$

у кінцеве

$$\alpha(T) = \alpha_T, \beta(T) = \beta_T, \dot{\alpha}(T) = \dot{\beta}(T) = 0, \quad (3)$$

де α_0 , β_0 , α_T , β_T — задані значення кутових координат ланок маніпулятора в початковий $t = 0$ та кінцевий $t = T$ моменти часу. Кутові швидкості ланок маніпулятора на початку та у кінці руху задаємо нульовими.

Сформулюємо **задачу**: знайти такі керування $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, $t \in [0, T]$, які забезпечать переміщення маніпулятора з початкового положення (2) у кінцеве (3) з мінімальним значенням функціонала

$$E = \int_0^T [u_1^2(t) + u_2^2(t)] dt. \quad (4)$$

Квадратичний функціонал виду (4) часто використовують у задачах оптимального керування механічними системами. За певних припущень цей функціонал оцінює енерговитрати системи на переміщення.

Для розв'язання сформульованої задачі використаємо методику принципу максимуму Понтрягіна (Понтрягин и др., 1983). Для зручності застосування цієї методики зробимо перетворення рівнянь руху маніпулятора (1). Запроваджуємо нові змінні $x_1 = \alpha$, $x_2 = \dot{\alpha}$, $x_3 = \beta$, $x_4 = \dot{\beta}$, у яких рівняння руху набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{g}[K_b u_1 - (K_b + K f_1)u_2 - K K_b f_2 x_4^2 - K^2 f_1 f_2 x_2^2], \\
\dot{x}_3 &= x_4, \\
\dot{x}_4 &= -\frac{1}{g}[K f_1 u_1 - (K_a + K f_1)u_2 - K K_b f_2 x_2^2 - K^2 f_1 f_2 x_4^2]
\end{aligned} \tag{5}$$

де позначено

$$f_1 = \cos(x_1 - x_3), \quad f_2 = \sin(x_1 - x_3), \quad f_3 = f_1^2 - f_2^2, \quad g = K_a K_b - K^2 f_1^2.$$

Запишемо функцію Гамільтона

$$\begin{aligned}
H &= -u_1^2 - u_2^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 \frac{1}{g}[K_b u_1 - (K_b + K f_1)u_2 - K K_b f_2 x_4^2 - K^2 f_1 f_2 x_2^2] + \\
&+ \psi_3 x_4 - \psi_4 \frac{1}{g}[K f_1 u_1 - (K_a + K f_1)u_2 - K K_b f_2 x_2^2 - K^2 f_1 f_2 x_4^2]
\end{aligned} \tag{6}$$

Тут $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ — спряжені змінні, які згідно з принципом максимуму Понтрягіна, повинні задовольняти такій системі диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_1 &= -\frac{(g z_1 + z_3)}{g^2} \psi_2 - \frac{(g z_2 + z_4)}{g^2} \psi_4, \\
\dot{\psi}_2 &= -\psi_1 + \frac{2 K f_2 x_2}{g} (K f_1 \psi_2 - K_a \psi_4), \\
\dot{\psi}_3 &= -\psi_1, \\
\dot{\psi}_4 &= -\psi_3 + \frac{2 K f_2 x_4}{g} (K_b \psi_2 - K f_1 \psi_4),
\end{aligned} \tag{7}$$

де

$$\begin{aligned}
z_1 &= -K(K f_3 x_2^2 + K_b f_1 x_4^2 - f_2 u_2), \\
z_2 &= K[K_a f_1 x_2^2 + K f_3 x_4^2 + f_2(u_1 - u_2)], \\
z_3 &= 2 K^2 f_1 f_2 [K f_2 (K_a x_2^2 + K f_1 x_4^2) - K f_1 u_1 + (K_a + K f_1)u_2], \\
z_4 &= 2 K^2 f_1 f_2 [K f_2 (f_1 x_2^2 + K_b x_4^2) - K_b u_1 + (K_b + K f_1)u_2].
\end{aligned}$$

Згідно методики принципу максимуму із (6) отримуємо вирази для оптимальних керувань:

$$u_1^* = \frac{1}{2g} (K_b \psi_2 - K f_1 \psi_4), \quad u_2^* = -u_1^* - \frac{1}{2g} (K f_1 \psi_2 - K_a \psi_4). \tag{8}$$

Для розрахунку оптимальних керувань (8) необхідно знайти розв'язок системи рівнянь (5), (7) із заданими краєвими умовами (2), (3). Для цього застосуюмо метод стрільби (Маринець та ін., 2013). Використовуючи чисельний метод Рунге — Кутти, розв'язуємо систему рівнянь (5), (7) з такими початковими умовами:

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= \alpha_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = 0, \\ \psi_1(0) &= c_1, \quad \psi_2(0) = c_2, \quad \psi_3(0) = c_3, \quad \psi_4(0) = c_4.\end{aligned}\quad (9)$$

де параметри c_1, c_2, c_3, c_4 знаходимо в результаті мінімізації функції нев'язки

$$[x_1(T) - \alpha_T]^2 + x_2^2(T) + [x_3(T) - \beta_T]^2 + x_4^2(T) \xrightarrow{c_1, c_2, c_3, c_4} \min \quad (10)$$

Для мінімізації нев'язки (10) використовуємо стандартні процедури нелінійного програмування (Бартіш, 2006).

Наведемо окремі результати розв'язання сформульованої вище задачі, отримані за допомогою методу максимуму Понтрягіна. Параметри маніпулятора, а також початкове і кінцеве значення кутових координат маніпулятора та тривалість руху задавали рівними відповідним параметрам у (Демидюк & Гошовська, 2016). Обчислення проводили на комп'ютері Intel Core i7-3630QM (2.40 ГГц, ОЗУ 8 ГБ). Для мінімізації функції нев'язки (10) використовували метод спряжених градієнтів, у якому за початкове значення параметрів оптимізації приймали $c_i = 0$, $i = 1, 4$, точність за значенням цільової функції (10) — 10^{-8} . Отримане мінімальне значення функціонала (4) становить $E^* = 4,332$, час розв'язання — 1,6 с.

Порівняльний аналіз оптимальних процесів, побудованих описаною вище процедурою максимуму Понтрягіна та методикою параметричної оптимізації (Демидюк & Гошовська, 2016), свідчить про повну ідентичність отриманих кінематичних та динамічних характеристик дволанкового маніпулятора.

Список літератури

- Lochan, K., & Roy, B. K. (2015). Control of two-link 2-dof robot manipulator using fuzzy logic techniques: A review. In *Proc. Fourth International Conference on Soft Computing for Problem Solving (SocProS 2014)* (Vol. 1, pp. 499–511). New Delhi: Springer. https://doi.org/10.1007/978-81-322-2217-0_41
- Аветисян, В. В., & Болотник, Н. Н. (1990). Субоптимальное управление электромеханическим манипулятором с высокой точностью позиционирования. *Изв. АН СССР. МТТ*, (5), 32–41.
- Бартіш, М. Я. (2006). *Методи оптимізації. Теорія і алгоритми*. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Ів. Франка.
- Демидюк, М. В., & Гошовська, Н. В. (2016а). Параметрична оптимізація руху дволанкового маніпулятора з використанням ортогональних поліномів. *Прикл. проблеми механіки і математики*, 14, 140–147. <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM/article/view/2233/2453>
- Демидюк, М. В., & Гошовська, Н. В. (2016б). Параметрична оптимізація транспортних операцій дволанкового маніпулятора. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 59(4), 142–152. <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/2426/2721>

- Демидюк, М. В., & Ширко, М. І. (2017). Оптимізація режимів руху та параметрів дволанкового маніпулятора з активними і пасивними приводами. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 50(2), 183–190. <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/2186/2399>
- Лутманов, С. В., Куксенко, Л. В., & Попова, Е. С. (2013). Задачи управления двухзвенным манипулятором с вращательными кинематическими парами. *Фундаментальные исследования*, (6.4), 886–891. <https://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=31656>
- Маринець, В. В., Рего, В. Л., & Маринець, К. В. (2013). *Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь*. Ужгород: Вид-во УжНУ «Говерла».
- Понтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., & Мищенко, Е. Ф. (1983). *Математическая теория оптимальных процессов* (4-е изд.). Москва: Наука.
- Формальский, А. М. (1996). Об оптимальном по быстродействию управлении поворотом плоского двухзвенника. *Прикладная математика и механика*, 60(2), 250–259.
- Черноусько, Ф. Л., Болотник, Н. Н., & Градецкий, В. Г. (1989). *Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация*. Москва: Наука.

Система для аналізу й побудови психологічних опитувальників та визначення точних цільових психологічних профілів

О. О. Диховичний, Н. В. Круглова
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
a.dyx@ukr.net

У роботі представлено експериментальну версію системи для аналізу й побудови психологічних опитувальників та визначення точних цільових психологічних профілів із застосуванням мови статистичного програмування R.

Ключові слова: психологічні тести, психологічний профіль, КТТ, IRT, мова R.

Тестове психологічне опитування використовують для дослідження психологічного стану людини в багатьох галузях людської діяльності: психології, психіатрії, професійному відборі тощо. Мета такого тестування є визначення певних кількісних психологічних показників. Очевидно, що таких психологічних показників може бути достатньо багато, причому вони можуть мати зовсім різну та, навіть, суперечливу спрямованість.

Психологічний профіль людини — це набір психологічних показників, отриманих у результаті проведення психологічного тестування. Побудований за тестовим опитуванням психологічний профіль людини використовується: при професійному відборі; при прийомі на роботу; при наборі в військові ЗВО; при наборі в силові структури; під час призову на військову службу.

Для визначення психологічного профілю можна використовувати:

- батарею тестів загальних здібностей для професійного відбору на вакантні робочі місця (**GATB**);
- батарею тестів спеціальних здібностей (**SATB**) для консультантів в державних установах (**SATB**) (Собчик, 2009);
- для комплексної діагностики було розроблено ММРІ (Мінесотський багатопрофільний опитувальник);
- ММИЛ в модифікації Ф. Б. Березіна;
- СМИЛ в модифікації Л. Н. Собчик (2009).

Такі багатопрофільні опитувальники та батареї тестів мають ряд переваг, а саме:

- відображають: самопочуття опитуваного, його чесність, особисті якості, рівень активності;
- визначають напрямленість інтересів;
- мають факторну структуру, градацію шкал і підшкал;
- володіють високою розрізняльною здатністю;
- дозволяють додавати тест по виявленню необхідної риси характеру;
- мають можливість модифікації в залежності від цілей тестування.

Але водночас мають і ряд недоліків, приміром, таких (Dykhovychnyi et al., 2018):

- занадто велика кількість питань;
- наявність ключів до тестів у загальному доступі;
- недостатнє використання сучасних математичних методів у вітчизняній психології, як наслідок, не завжди об'єктивний аналіз запропонованих питань з точки зору їх значущості та відповідності цілям тестування;
- ускладненість розробки шкал для нових методик;
- недосконалість використання існуючих інтегральних показників для точного «калібрування» психологічного профілю відповідно до цілей тестування.

Методики опитування вочевидь є достатньо розробленими. Нами ставиться питання про удосконалення процедури аналізу результатів психологічного тестування із застосуванням сучасного математичного апарату аналізу тестів та методів багатокритеріальної оптимізації.

Моделі IRT (Van der Linden & Hambleton, 1997) разом із класичною теорією тестів (КТТ) формують найбільш поширений математичний апарат аналізу результатів тестування для визначення психологічних рис та психометричних характеристик психологічного опитувальника, дозволяють точніше розділяти як досліджуваних осіб, так і давати точнішу оцінку якості питань (індикаторів) тестів (Духовичний et al., 2018), а також моделювати, тобто прогнозувати результати тестування (Dykhovychnyi & Kruglova, 2018).

Разом з цим задача ранжування респондентів за психологічними профілями, побудованими на підставі IRT, передбачає визначення певного інтегрального показника респондента, який складається із суперечливих психологічних показників, що доречно здійснювати за допомогою сучасних ефективних алгоритмів багатокритеріального прийняття рішень **TOPSIS** і **VIKOR** (Opricovic & Tzeng, 2004; Духовичний та ін., 2019).

Тому на підставі вищезазначеного пропонується створення нової автоматизованої системи для аналізу й побудови психологічних опитувальників та визначення точних цільових психологічних профілів з використання методів IRT із застосування сучасних математичних методів багатокритеріального прийняття рішень.

Оскільки у середовищі R (<https://www.r-project.org>) існує велика кількість уже створених ефективних програм з статистичного аналізу тестів як засобами IRT так і КТТ, то програмна реалізація системи зроблена у середовищі R.

На нашу думку, створення такої системи забезпечить наступні переваги:

- автоматизовану й точнішу оцінку психологічних рис респондентів та характеристик тестових питань на основі IRT та КТТ методів;
- визначення суттєвих показників респондентів для нових методик з ще нерозробленими шкалами;
- аналіз нових опитувальників та зменшення кількості питань без втрати інформативності;
- алгоритми багатокритеріального прийняття рішень дозволять гнучко змінювати й аналізувати інтегральний психологічний показник та точніше розрізняти респондентів за психологічними профілями;

- програмна реалізація системи в середовищі R дозволить використовувати найефективніші сучасні статистичні алгоритми та їхні програмні рішення;
 - можливість моделювання результатів психологічного тестування.
- Створена система буде корисною для:
- проведення соціологічних опитувань;
 - HR спеціалістів та агенцій;
 - створення точнішого єдиного рейтингу учнів на основі ЗНО, ДПА та інших тестувань по багатьох предметах;
 - моделювання (прогнозування) результатів соціологічних, маркетингових опитувань, педагогічних тестувань.

Список літератури

- Dykhovychnyi, O. O., & Kruglova, N. V. (2018). Imitational modeling and analysis of matrixes containing primary grading obtained in educational testing by the means of language R. *Information Technologies and Learning Tools*, 67 (5), 148–160. <https://doi.org/10.33407/itlt.v67i5.2104>
- Dykhovychnyi, O. O., Kruglova, N. V., & Moskalov, I. O. (2018). Using of mathematical models for analyzing of the results in psychological Guilford test. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 75–89. <https://doi.org/10.20535/mmtu-2018.1-075>
- Dykhovychnyi, O., Zlyvkov, V., Kruglova, N., Lukomska, S., & Kotukh, O. (2018). Using the multidimensional models to the teacher authenticity scale adaptation. *Actual Problems of Psychology*, 14(1), 132–141. <http://www.apppsychology.org.ua/data/jrn/v14/i1/15.pdf>
- Opricovic, S., & Tzeng, G.-H. (2004). Compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS. *European Journal of Operational Research*, 156(2), 445–455. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(03\)00020-1](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(03)00020-1)
- Van der Linden, W. J., & Hambleton, R. K. (Eds.). (1997). *Handbook of modern item response theory*. New York: Springer.
- Диховичний, О. О., Круглова, Н. В., & Алексєєва, І. В. (2019). Застосування IRT-моделей та методів багатокритеріальної оптимізації до аналізу психологічного профілю. *Математичні машини і системи*, (1), 131–142. http://www.immsp.kiev.ua/publications/articles/2019/2019_1/01_2019_Dykhovychny.pdf
- Собчик, Л. Н. (2009). *Стандартизированный многофакторный метод исследования личности (СМИЛ): Практическое руководство к традиционному и компьютерному вариантам теста*. Москва: Боргес.

Оцінка розв'язків неавтономної системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

В. В. Довгай

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

valerdov@gmail.com

Розглянуто неавтономна система диференціальних рівнянь другого порядку. Для розв'язку задачі Коші цієї системи за допомогою узагальненого методу диференціального інваріанту встановлюється оцінка зверху.

Ключові слова: лінійна система, диференціальні рівняння, оцінка зверху розв'язків, достатні умови стійкості.

Дослідження задач, що стосуються асимптотичної поведінки розв'язків системи неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку, є актуальними з точки зору їх можливого практичного застосування. У цій роботі розглядається одна з таких задач — оцінка зверху розв'язків наступної задачі Коші

$$y'' + R(t)y' + P(t)y = S(t)y, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0. \quad (1)$$

Тут y — n -вимірний вектор, $R(t) = [r_k(t)]$, $P(t) = [p_k(t)]$ — діагональні $n \times n$ матриці з елементами $r_k(t)$, $p_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), що мають відповідно неперервні похідні третього та другого порядку при $t \geq t_0$, $n \times n$ матриця $S(t)$ має своїми елементами неперервні при $t \geq t_0$ функції. Задача Коші (1) для диференціального рівняння другого порядку еквівалентна наступній задачі для рівняння першого порядку

$$x' + A(t)x = G(t)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

де позначено

$$x = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}, \quad x_0 = [y_0, y'_0]^T, \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & -E_n \\ P(t) & R(t) \end{bmatrix}, \quad G(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S(t) & 0 \end{bmatrix},$$

у яких 0 та E_n — нульова та одинична $n \times n$ матриці відповідно.

Нехай для функцій $q_k(t) = p_k(t) - \frac{1}{2}r'_k(t) - \frac{1}{4}r_k^2(t)$ виконується умова $q_k(t) > 0$ при всіх $t \geq t_0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тоді згідно з узагальненим методом диференціального інваріанту (Довгай, 2016) розв'язок задачі (2) буде розв'язком наступного інтегрального рівняння

$$x(t) = U(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t U(t, \tau)F(\tau)x(\tau)d\tau, \quad (3)$$

де застосовано такі позначення:

$$U(t, t_0) = \begin{bmatrix} U_{11}(t, t_0) & U_{12}(t, t_0) \\ U_{21}(t, t_0) & U_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S(t) + \eta(t) & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_{11}(t, t_0) = V(t, t_0)[-V'(t_0, t_0)T_1(t, t_0) + V^{-1}(t_0, t_0)T_2(t, t_0)],$$

$$U_{12}(t, t_0) = V(t, t_0)V(t_0, t_0)T_1(t, t_0), \quad U_{21}(t, t_0) = U'_{11}(t, t_0), \quad U_{22}(t, t_0) = U'_{12}(t, t_0),$$

$\eta(t)$, $V(t, t_0)$, $T_1(t, t_0)$, $T_2(t, t_0)$ — діагональні $n \times n$ матриці з елементами $\eta_k(t)$, $v_k(t, t_0)$, $\sin \varphi_k(t, t_0)$, $\cos \varphi_k(t, t_0)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), відповідно, у яких

$$\eta_k(t) = \frac{1}{4}q_k^{-1}(t)q_k''(t) - \frac{5}{16}[q_k^{-1}(t)q_k'(t)]^2, \quad q_k(t) = p_k(t) - \frac{1}{2}r'_k(t) - \frac{1}{4}r_k^2(t)$$

$$\varphi_k(t, t_0) = \int_{t_0}^t \sqrt{q_k(s)} ds, \quad v_k(t, t_0) = q_k^{-\frac{1}{4}}(t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t r_k(s) ds \right\}.$$

Перейдімо тепер у (3) до оцінки за нормою

$$|x(t)| \leq |U(t, t_0)| |x_0| + \int_{t_0}^t |U(t, \tau)| |S(\tau) + \eta(\tau)| |x(\tau)| d\tau. \quad (4)$$

Нехай існують такі сталі числа $r_0 > 0$, $a > 0$, для яких виконано умови:

$$r_k(t) \geq r_0, \quad \left| U(t, \tau) \exp \left\{ \frac{1}{2} r_0(t - \tau) \right\} \right| \leq a \quad (5)$$

при всіх $k = 1, 2, \dots, n$ та $t \geq \tau \geq t_0$. Тоді на основі (4) матимемо

$$|x(t)| \leq a \exp \left\{ -\frac{1}{2} r_0(t - t_0) \right\} |x_0| + a \int_{t_0}^t \exp \left\{ -\frac{1}{2} r_0(t - \tau) \right\} |S(\tau) + \eta(\tau)| |x(\tau)| d\tau.$$

Перепишемо останнє співвідношення у вигляді

$$|x(t)| \exp \left\{ \frac{1}{2} r_0(t - t_0) \right\} \leq a |x_0| + a \int_{t_0}^t |S(\tau) + \eta(\tau)| |x(\tau)| \exp \left\{ \frac{1}{2} r_0(\tau - t_0) \right\} d\tau$$

та застосуємо до одержаного результату лему Гронуолла — Беллмана (Павлюк, 1971). Одержимо нерівність

$$|x(t)| \exp \left\{ \frac{1}{2} r_0(t - t_0) \right\} \leq a |x_0| \exp \left\{ a \int_{t_0}^t |S(\tau) + \eta(\tau)| d\tau \right\},$$

з якої випливає наступна важлива оцінка як для самих розв'язків задачі Коші (1), так і для їх похідних при всіх $t \geq t_0$ та довільних початкових умовах

$$x(t_0) = x_0 = [y_0, y'_0]^T$$

$$|x(t)| \leq a|x_0| \exp \left\{ a \int_{t_0}^t \left| S(\tau) + \eta(\tau) \right| - \frac{r_0}{2a} d\tau \right\}. \quad (6)$$

Важливість оцінки (6) полягає ще й у тому, що вона дозволяє сформулювати достатні умови стійкості за Ляпуновим тривіального розв'язку задачі Коші (1). Справді, нехай існує таке $T \geq t_0$, що при всіх $t \geq T$ виконано нерівність

$$\left| S(\tau) + \eta(\tau) \right| - \frac{r_0}{2a} \leq b < 0, \quad (7)$$

де r_0, a задовольняють умовам (5), b — дійсне число. Тоді функція

$$\exp \left\{ a \int_{t_0}^t \left| S(\tau) + \eta(\tau) \right| - \frac{r_0}{2a} d\tau \right\}$$

буде обмеженою на проміжку $[x_0, +\infty)$, а отже на основі (6) для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що коли $|x_0| < \delta$, то $|x(t)| < \varepsilon$, що й означає стійкість тривіального розв'язку задачі Коші (1) за Ляпуновим. Крім того, з (6) і (7) випливає, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, а отже даний розв'язок буде ще й асимптотично стійким.

Так само можна встановити оцінку зверху самого лише розв'язку $y(t)$ задачі Коші (1), ураховуючи, що для нього з (3) випливає наступне інтегральне рівняння

$$y(t) = U_{11}(t, t_0)y_0 + U_{12}(t, t_0)y'_0 + \int_{t_0}^t U_{12}(t, \tau) [S(\tau) + \eta(\tau)] y(\tau) d\tau.$$

Переходимо тут до оцінки за нормою:

$$|y(t)| \leq |U_{11}(t, t_0)| |y_0| + |U_{12}(t, t_0)| |y'_0| + \int_{t_0}^t |U_{12}(t, \tau)| |S(\tau) + \eta(\tau)| |y(\tau)| d\tau. \quad (8)$$

Якщо існують такі сталі числа $r_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$, для яких виконуються умови

$$r_k(t) \geq r_0, \quad \left| U_{11}(t, \tau) \exp \left\{ \frac{1}{2} r_0(t - \tau) \right\} \right| \leq a_1, \quad \left| U_{12}(t, \tau) \exp \left\{ \frac{1}{2} r_0(t - \tau) \right\} \right| \leq a_2$$

при всіх $k = 1, 2, \dots, n$ та $t \geq \tau \geq t_0$, то тоді на основі (8) матимемо таку інтегральну нерівність

$$|y(t)| \leq \left[a_1 |y_0| + a_2 |y'_0| \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} r_0 (t - t_0) \right\} + \\ + a_2 \int_{t_0}^t \exp \left\{ -\frac{1}{2} r_0 (t - \tau) \right\} |S(\tau) + \eta(\tau)| |y(\tau)| d\tau.$$

Перепишучи її у вигляді

$$|y(t)| \exp \left\{ \frac{1}{2} r_0 (t - t_0) \right\} \leq a_1 |y_0| + a_2 |y'_0| + \\ + a_2 \int_{t_0}^t |S(\tau) + \eta(\tau)| |y(\tau)| \exp \left\{ \frac{1}{2} r_0 (\tau - t_0) \right\} d\tau$$

та застосовуючи лему Гронуолла — Беллмана, одержуємо наступну оцінку зверху розв'язку $y(t)$ задачі Коші (1)

$$|y(t)| \leq \left[a_1 |y_0| + a_2 |y'_0| \right] \exp \left\{ a_2 \int_{t_0}^t \left[|S(\tau) + \eta(\tau)| - \frac{r_0}{2a_2} \right] d\tau \right\}.$$

Список літератури

- Довгай, В. В. (2016). Поширення узагальненого методу диференціального інваріанту на системи диференціальних рівнянь другого порядку. У *Матеріалах Сімнадцятої Міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука* (Т. 1, с. 98–100). Київ: НТУУ «КПІ». <http://matan.kpi.ua/public/files/kk2016/kravchuk2016-volume1.pdf>
- Павлюк, І. А. (1971). *Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку*. Київ: Вид-во Київського університету.

Співіснування атракторів у системі генератор-п'єзокерамічний випромінювач

С. В. Донецький

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

dsvshka@gmail.com

Проведено вивчення динаміки неідеальної за Зоммерфельдом — Кононенком системи «генератор — п'єзокерамічний випромінювач». Знайдено пари співіснуючих атракторів. Встановлено існування рідкісних і прихованих атракторів.

Ключові слова: рідкісний атрактор, прихований атрактор, граничний цикл, хаотичний атрактор.

Для більшості динамічних систем існування декількох атракторів може виявитись катастрофою, коли мове йде про практичні застосування. Це пов'язано з тим, що зазвичай лише один атрактор гарантує бажану поведінку та є достатньо вивченим. Через це в останні роки почали з'являтися нові класифікації атракторів, які ділять їх залежно від складності їх пошуку.

Однією з таких класифікацій є та, що ділить атрактори на приховані та самозбуджувані (Leonov & Kuznetsov, 2013). Атрактор називають *самозбуджуваним*, якщо його басейн притягання перетинається з будь-яким околom деякого положення рівноваги. Атрактор називають *прихованим*, якщо він не є самозбуджуваним. Для більшості динамічних систем головну увагу приділяють вивченню самозбуджуваних атракторів. Це пов'язано з тим, що наразі встановлення існування прихованих атракторів є, взагалі кажучи, надзвичайно складною задачею.

Ще один клас атракторів, що запропонований у роботах Chudzik та ін. (2011), Shvets та Donetskyi (2019) є клас рідкісних атракторів. Ці атрактори в загальному випадку характеризуються тим, що мають у деякому сенсі малий басейн притягання. Тобто, у разі, якщо доведеться обирати початкову точку навмання, ми маємо малу ймовірність потрапити на цей атрактор.

Метою даної роботи є пошук прихованих та рідкісних атракторів.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \zeta; \\ \dot{\zeta} = -\xi + \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \zeta^2 - \alpha_3 \zeta^3 + \alpha_4 \beta; \\ \dot{\beta} = \gamma; \\ \dot{\gamma} = \alpha_5 \xi + \alpha_6 \zeta - \alpha_0 \beta - \alpha_7 \gamma, \end{cases} \quad (1)$$

де $\xi, \zeta, \beta, \gamma$ — фазові змінні, $\alpha_i, i = \overline{0, 7}$ — параметри системи.

Ця система отримана в роботах Krasnopol'skaya та Shvets (2006), Швець та Краснопольська (2006), Balthazar та ін. (2006). Вона використовується як математична модель неідеальної за Зоммерфельдом — Кононенком системи генератор — п'єзокерамічний випромінювач (Кононенко, 1964). Фізичний зміст, як фазових координат, так і параметрів системи (1), детально описаний у вище згаданих роботах. У цих роботах доведено, що неідеальність збудження є причиною виникнення

детермінованого хаосу в системі (1), та описано декілька типів хаотичних атракторів цієї системи.

Оскільки система (1) є нелінійною системою звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку, то всі подальші пошуки атракторів цієї системи проводились за допомогою чисельних методів. Методика проведення таких чисельних досліджень детально описана в Krasnopol'skaya та Shvets (1991), Krasnopol'skaya та Shvets (2009), Shvets та Sirenko (2012).

Нехай $\alpha_0 = 0.995$, $\alpha_1 = 0.0535$, $\alpha_3 = 9.95$, $\alpha_4 = -0.103$, $\alpha_5 = -0.0604$, $\alpha_6 = -0.12$, $\alpha_7 = 0.01$, а параметр α_2 оберемо за біфуркаційний. При таких значеннях параметрів система (1) має єдине положення рівноваги ($\xi = 0$; $\zeta = 0$; $\beta = 0$; $\gamma = 0$) (Krasnopol'skaya & Shvets, 2006; Швець & Краснопольська, 2006; Balthazar et al, 2006).

Покладаємо $\alpha_2 = 8.623$ і досліджуємо еволюцію існуючих атракторів рухаючись у напрямку збільшення цього параметра. При таких значеннях параметрів у системі (1) існує єдиний атрактор (граничний цикл). Оскільки цей атрактор єдиний в околі нульового нестійкого положення рівноваги, то він є самозбуджуваним і не є рідкісним. При $\alpha_2 = 8.624$ до уже існуючого граничного циклу додається ще один граничний цикл. Проекції фазових портретів цих граничних циклів, побудовані при $\alpha_2 = 8.625$, зображені на рис. 1 (уже існуючий граничний цикл) та рис. 2 (новонароджений граничний цикл). Причому на рис. 3 раніше існуючий граничний цикл позначений чорним кольором, а щойно виниклий — червоним.

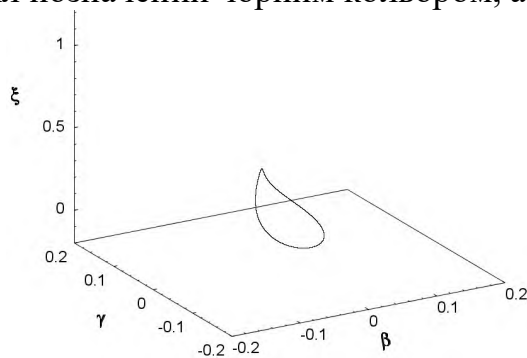


Рис. 1

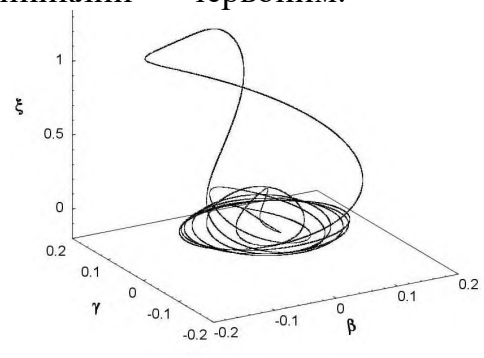


Рис. 2

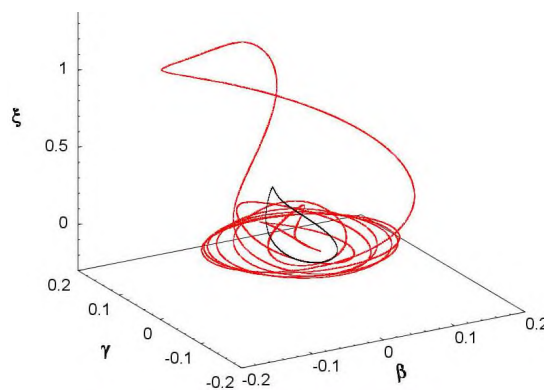


Рис. 3

Проекції фазових портретів граничних циклів при $\alpha_2 = 8.625$: раніше існуючий граничний цикл (рис. 1); виниклий граничний цикл (рис. 2); обидва цикли одночасно (рис. 3).

Червоний граничний цикл займає більшу область локалізації фазового простору ніж чорний граничний цикл. Незважаючи на цей факт, низка чисельних експериментів доводять, що новонароджений граничний цикл має дуже малий басейн притягання, що класифікує його як прихований. Крім того, при будь-якій початковій умові з околу нульового положення рівноваги усталена траєкторія притягається саме до чорного граничного циклу, що свідчить про те, що червоний граничний цикл є ще й прихованим атрактором.

При $\alpha_2 > 8.625$ описана ситуація вже не має місця. Червоний атрактор збільшує свій басейн притягання. Тепер майже всі траєкторії, які стартують з околу початку координат, притягуються до червоного атрактора. Цей атрактор перестає бути рідкісним і стає самозбуджуваним атрактором. Навпаки, чорний атрактор (граничний цикл) втрачає статуси самозбуджуваного й перетворюється на рідкісний і прихований граничний цикл.

Описана ситуація є вірною аж до $\alpha_2 = 8.659$, при якому червоний атрактор зникає і єдиним атрактором у системі залишається чорний граничний цикл, який втрачає ознаки як рідкісності, так і прихованості й перетворюється на самозбуджуваний атрактор.

Таким чином, у роботі знайдені й побудовані рідкісні та приховані атрактори розглянутої неідеальної динамічної системи.

Список літератури

- Balthazar, J. M., Felix, J. L., Brasil, R. M. L. R. F., Krasnopol'skaya, T. S., & Shvets, A. Y. (2009). Nonlinear interactions in a piezoceramic bar transducer powered by a vacuum tube generated by a nonideal source. *J. Comput. Nonlinear Dynam*, 4(1), 011013. <https://doi.org/10.1115/1.3007909>
- Chudzik, A., Perlikowski, P., Stefanski, A., & Kapitaniak, T. (2011). Multistability and rare attractors in van der Pol–Duffing oscillator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(7), 1907–1912. <https://doi.org/10.1142/S0218127411029513>
- Krasnopol'skaya, T. S., & Shvets, A. Y. (1991). Chaos in dynamics of machines with a limited power supply. In M. Okrouglick, L. Pust (Eds.), *Proceeding of the 8th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms* (Vol. 1, pp. 181–184), Prague.
- Krasnopol'skaya, T. S., & Shvets, A. Y. (2006). Детерминированный хаос в системе генератор-пьезокерамический излучатель. *Нелинейная динамика*, 2(1), 55–74. <https://doi.org/10.20537/nd0601003>
- Krasnopol'skaya, T. S., & Shvets, A. Y. (2009). Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks. *Journal of Sound and Vibration*, 322(3), 532–553. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.09.007>
- Leonov, G., & Kuznetsov, N. (2013). Hidden attractors in dynamical systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23(1), 1330002. <https://doi.org/10.1142/S0218127413300024>
- Shvets, A. Y., & Sirenko, V. O. (2012). Peculiarities of transition to chaos in nonideal hydrodynamics systems. *Chaotic Modeling and Simulation*, 2012(2), 303–310. http://www.cmsim.eu/papers_pdf/april_2012_papers/All_2012_April.pdf

- Shvets, A., & Donetskyi, S. (2018) Transition to deterministic chaos in some electroelastic systems. In *Chaotic Modeling and Simulation International Conference* (pp. 257–264). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15297-0_23
- Кононенко, В. О. (1964). *Колебательные системы с ограниченным возбуждением*. Москва: Наука.
- Швець, О. Ю., & Краснопольська, Т. С. (2006). Динамічний хаос в п'єзокерамічних системах обмеженої потужності. Частина 1. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (2), 150–158.
- Швець, О. Ю., & Краснопольська, Т. С. (2006). Динамічний хаос в п'єзокерамічних системах обмеженої потужності. Частина 2. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (4), 147–154.

Застосування фракталів в інформаційній та кібернетичній безпеці

Ю. Д. Жданова, С. О. Спасітелєва, С. М. Шевченко

Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ, Україна

y.zhdanova@kubg.edu.ua, s.spasitielieva@kubg.edu.ua,

s.shevchenko@kubg.edu.ua

У доповіді розглянуті підходи до застосування фрактального аналізу в інформаційній та кібернетичній безпеці, які можуть бути використані при підготовці фахівців у процесі науково-дослідної роботи.

Ключові слова: фрактал, властивості фракталів, моделі фракталів, інформаційна та кібернетична безпека, захист інформації.

Сучасний захист інформації виходить за рамки детермінованої системи з визначеними характеристиками. Відбувається це у зв'язку з тим, що система обробки інформації належить до самоорганізуючих систем, і, з точки зору синергетики, найменші відхилення середніх показників приводить не тільки до нових властивостей системи сучасні, але й до появи нової системи в цілому, до так званого «детермінованого хаосу». Для дослідження таких систем активно застосовують сучасні методи і підходи, зокрема ті, що пов'язані з математичною теорією фракталів.

Одною з характерних ознак фрактальних структур є самоподібність, що може проявлятися не тільки через фізичні форми, а й через фрактальну поведінку. Фрактали дозволяють моделювати складні природні форми та процеси за допомогою простих ітераційних процедур. Тому теорія фракталів на сьогодні є актуальною та затребуваною у різних галузях наукових досліджень.

Спектр застосування теорії фракталів є надзвичайно широким. Її активно використовують у комп'ютерній графіці для зображення об'єктів природи. Базою для побудови таких фракталів є математична формула в пам'яті комп'ютера. У фізиці цей інструментарій використовують для моделювання нелінійних процесів: хмари, турбулентність, вогонь тощо; у біології — для моделювання популяцій.

В останні часи фрактальну геометрію широко використовують в економіці та фінансах, наприклад, для аналізу біржових ринків.

У часи цифрового суспільства, у сфері інформаційної безпеки фрактальну геометрію застосовують для генерації складних об'єктів на дисплеях, стисканні даних, опису соціальних процесів тощо.

Застосування фракталів у задачах забезпечення захисту інформації розглянуто у працях Локтев та Залетдинов (2010), Никонов та Зобов (2017).

Є очевидним, що розвиток суспільства з кожним днем стає залежним від розвитку інформаційно-комунікаційних технологій, від зростаючої ролі інформації в життєвому просторі людства. Тому саме захист цієї інформації є першочерговим завданням у сучасному світі. Для вирішення поставленого завдання необхідно постійно розвивати професійні компетенції фахівців інформаційної та

кібернетичної безпеки, що неможливе без удосконалення змісту їх освіти, перенесення сучасного математичного апарату, зокрема фрактального аналізу, у підготовку майбутніх спеціалістів.

На сучасному етапі у зв'язку з недостатньою надійністю програмних реалізацій криптографічних алгоритмів, наукові кола світу ведуть розробки по створенню та впровадженню альтернативних методологій захисту інформації, зокрема таких, які ґрунтуються на використанні перспективних напрямів математики, — фрактального моделювання.

Розгляньмо різні підходи застосування теорії фракталів в інформаційній та кібернетичній безпеці, які можуть бути впровадженні в навчальний процес підготовки майбутніх фахівців у даній галузі.

У дослідженні (Локтев & Залетдинов, 2010) пропонується розглядати безпеку кожного автоматизованого робочого місця мережі за допомогою набору властивостей, які можуть бути представлені у вигляді фракталів. Потім, використовуючи їх самоподібність, спроектувати одержані результати на всю систему захисту інформації. Учені пропонують використовувати фрактали на трьох етапах:

- 1) перший фрактал розкриває можливості нанесення шкоди інформації;
- 2) другий фрактал описує вимоги по захисту інформації;
- 3) третій фрактал представляє можливості захисту інформації у комп'ютерній мережі.

Надалі вводиться топологічне дерево, яке описує зв'язок між окремими автоматизованими робочими місцями персоналу. Кожне місце містить чотири частини: технічне забезпечення, програмне забезпечення, інформаційне забезпечення, організаційно-методичне забезпечення. Таким чином, визначивши параметри одного автоматизованого робочого місця, можна змодельовати систему захисту інформації у вигляді набору фракталів для корпоративної мережі. Даний підхід описує симетричні системи захисту інформації, де до кожного елементу системи висуваються однакові вимоги.

Аналіз наукової роботи Никонов та Зобов (2017) дозволив виділити приклади можливого застосування фрактальних відображень для породження довгих неперіодичних послідовностей, які використовують в теорії шифрування. Як відомо, фрактальні об'єкти, одержані за допомогою нелінійних динамічних функцій, за своєю складністю наближаються до об'єктів природних. Це дозволяє використовувати ці функції як надійних датчиків псевдовипадкових послідовностей будь-якої довжини. Фрактальні функції, маючи вхідні аргументи у вигляді набору символів, можуть відобразити їх на числову послідовність. Здійснити аналіз цієї послідовності практично неможливо. Проте, знаючи вихідну функцію та її початкові параметри, можливо легко відновити початковий набір символів. Розв'язання оберненої задачі не є можливим. У статті представлені різні методи побудови фракталів як уже відомих, так і нових фрактальних конструкцій, зокрема з використанням порогових операцій.

Взагалі, слід відмітити, що теорія фракталів саме найчастіше застосовується

в алгоритмах шифрування. Наприклад, для реалізації шифрів заміни та підстановки; як фактор, що вносить додаткову невизначеність при використанні генератора псевдовипадкових чисел або використаний замість генератора псевдовипадкових чисел; для зниження ймовірності одержання ключа та інші. Найчастіше використовують добре досліджені й вивчені множини Мандельброта та Жюліа (Зайцева & Скобелев, 2007).

Наукове дослідження Назаркевич та ін. (2015) присвячене розробці методу захисту документів латентними елементами на основі фракталів. Ученими представлено спеціальні графічні побудови, на основі яких створено латентні елементи, що підвищують ефективність та надійність захисту. Спосіб захисту полягає в тому, що у векторному форматі утворюють графічні елементи захисної сітки, які копіюють, розмножують та утворюють захисну сітку на основі фракталу за допомогою рекурсивної процедури. Фрактали будуються рекурсивною процедурою, де кожен одиничний графічний елемент постає в ролі генератора, який задає величину захисного елемента. Величина захисного елемента будується мінімально можливою для відтворення в друкованому виді, а потім ініціатором заповнюється площа сітки. Побудова сітки починається із задання параметрів фракталу. На основі створеного фракталу можна створити велику кількість варіантів фрактальних сіток, змінюючи масштаб, поворот, а також збільшуючи або зменшуючи кількість ітерацій. Фрактальні фонові сітки є складними для відтворення, адже при цьому необхідно використати алгоритм побудови вибраного типу фракталу, шаблон якого відомий тільки розробнику.

Детальніше з аналізом існуючих підходів до використання фрактального аналізу в області захисту інформації можна ознайомитися у статті Шевченко та ін. (2019).

Останнім часом для підвищення рівня безпеки IoT, зокрема пристроїв розумного будинку, визначають застосування технології Блокчейн (Dorri et al., 2017; Fan et al., 2018)

Блокчейн інтегрує такі технології, як розподілене зберігання даних, однорангова передача, механізм консенсусу та алгоритм шифрування. Очікується, що це дозволить не тільки усунути слабкість безпеки IoT, але й знизити експлуатаційні та кредитні витрати централізованої мережі, підвищити операційну ефективність та використання промислових активів. Науковою школою студентів та викладачів кафедри Інформаційної та кібернетичної безпеки Київського університету імені Бориса Грінченка ведуться розробки системи безпеки пристроїв розумного будинку на основі технології Блокчейн із застосуванням фрактального аналізу.

Потужні математичні розробки, добра алгоритмізація функцій дозволяє ефективно використовувати теорію фракталів для захисту інформації. На сьогодні існує достатня кількість уже реалізованих алгоритмів фрактального моделювання у вигляді програмного забезпечення. Проте, використання різних моделей фракталів для створення надійних систем захисту інформації потребує подальшого вивчення.

Розглянуті підходи до застосування фрактального аналізу в інформаційній та кібернетичній безпеці можуть бути використані при підготовці фахівців у процесі науково-дослідної роботи або при написанні курсової чи дипломної роботи.

Список літератури

- Dorri, A., Kanhere, S. S., Jurdak, R., & Gauravaram, P. (2017, March). Blockchain for IoT security and privacy: The case study of a smart home. In *2017 IEEE international conference on pervasive computing and communications workshops (PerCom workshops)* (pp. 618–623). IEEE. <https://allquantor.at/blockchainbib/pdf/dorri2017blockchain.pdf>
- Fan, S., Song, L., & Sang, C. (2019, October). Research on Privacy Protection in IoT System Based on Blockchain. In *International Conference on Smart Blockchain* (pp. 1–10). Cham: Springer. https://easychair.org/publications/preprint_download/Vg7v
- Зайцева, Э. Е. & Скобелев, В. Г. (2007). Шифр на основе отображения Мандельброта. *Вестник Томского университета. Приложение*, (23). 107–113.
- Локтев, А. А., & Залетдинов, А. В. (2010) Использование фракталов в задачах обеспечения информационной безопасности. *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*, 15(2), 599–604. <http://journals.tsutmb.ru/go/1810-0198/2010/2/599-604/>
- Назаркевич, М. А., Дронюк, І. М., Троян, О. А. & Томащук, Т. Ю. (2015). Розробка методу захисту документів латентними елементами на основі фракталів. *Захист інформації*, 17(1), 21–26. <https://doi.org/10.18372/2410-7840.17.7505>
- Никонов, В. Г., & Зобов, А. И. (2017). О возможности применения фрактальных моделей при построении систем защиты информации. *Computational nanotechnology*, (1), 39–49.
- Шевченко, С. М., Жданова, Ю. Д., Спасітєлева, С. О., Негоденко, О. В., Мазур, Н. П. & Кравчук, К. В. (2019). Математичні методи кібербезпеки: фрактали та їх застосування в інформаційній та кібербезпеці. *Кібербезпека: наука, освіта, техніка*, 1(5), 31–39. <https://doi.org/10.28925/2663-4023.2019.5.3139>

Про ряди Фур'є обмежених функцій

П. В. Задерей, Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова, С. С. Хрипко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

zadereypv@ukr.net, zadereynm@gmail.com, g.nefyodova@gmail.com,
khrypikoss@gmail.com

У статті встановлено необхідні та достатні умови стосовно коефіцієнтів тригонометричного ряду, при виконанні яких, заданий ряд буде рядом Фур'є обмеженої функції.

Ключові слова: тригонометричний ряд, ряд Фур'є, рівномірна збіжність ряду, теорема Рісса — Фішера.

Множину 2π -періодичних функцій $f(x)$, що справджують умову

$$|f(x)| \leq C < \infty,$$

де C — абсолютна константа, позначимо $B[0, 2\pi]$, а множину 2π -періодичних функцій $f(x)$, що задовольняють умові

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

позначимо $L_2[0, 2\pi]$.

Нехай задано тригонометричний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{ikt}. \quad (1)$$

Поліноми

$$Z_n^{(s)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n} \right)^s \right) C_k e^{ikt}, \quad s > 0,$$

називають сумами Зигмунда, а при $s = 1$ сумами Феєра (Степанец, 2002).

Однією з основних задач теорії тригонометричних рядів є задача встановлення умов на коефіцієнти тригонометричного ряду, при яких даний ряд є рядом Фур'є функції із заданого класу.

Зокрема, теорема Рісса — Фішера (Зигмунд, 1965) стверджує, що якщо справджується умова

$$\sum_{k=0}^{\infty} |C_k|^2 < \infty,$$

то ряд (1) є рядом Фур'є функції $f(x) \in L_2[0, 2\pi]$.

Зауважмо, що для інших класів функцій таких простих умов не існує.

Метою даної роботи є встановлення наступного твердження.

Теорема. Для того, щоб ряд (1) був рядом Фур'є функції з множини $B[0, 2\pi]$ необхідно і достатньо, щоб поліноми $Z_n^{(s)}(t)$ були рівномірно обмеженими, тобто

$$\left| Z_n^{(s)}(t) \right| \leq C.$$

Необхідність умов теореми випливає з леми, встановленої в Бари (1961, с. 139).

Доведімо достатність:

Нехай

$$\left| Z_n^{(s)}(t) \right| \leq C.$$

Тоді правдива наступна оцінка:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| Z_n^{(s)}(t) \right|^2 dt = \sum_{k=0}^{n-1} |C_k|^2 \left(1 - \left(\frac{k}{n} \right)^s \right)^2 \geq \sum_{k=0}^m |C_k|^2 \left(1 - \left(\frac{k}{n} \right)^s \right)^2,$$

де $m \in \mathbb{N}, m < n$.

В останній нерівності перейдімо до границі, коли $n \rightarrow \infty$. Отримаємо співвідношення

$$\sum_{k=0}^m |C_k|^2 < C^2,$$

правдиве для будь-якого $m \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} |C_k|^2 < C^2.$$

Тому майже скрізь $Z_n^{(s)}(t) \rightarrow f(t)$, а з нерівності $\left| Z_n^{(s)}(t) \right| \leq C$ випливає, що нерівність $\left| f(t) \right| \leq C$ виконується майже скрізь.

Зауважмо, що при $s = 1$ ця теорема наведена в Бари (1961) та Гофман (1963).

Список літератури

- Бари, Н. К. (1961). *Тригонометрические ряды*. Москва: Физматгиз.
 Гофман, К. (1963). *Банаховы пространства аналитических функций*. Москва: Издательство иностранной литературы.
 Зигмунд, А. (1965). *Тригонометрические ряды*. (Т. 1). Москва: Мир.
 Степанец, А. И. (2002). *Методы теории приближений*. (Т. 1.). Киев: Институт математики НАН Украины.

Застосування математики в розрахунках однорідних і тришарових прямокутних пластин на згин

А. Г. Зеленський, Є. Д. Побігай, А. Ю. Томін, О. С. Фомін

Придніпровська державна академія будівництва та архітектури,

Дніпро, Україна

a.zelensky@ukr.net

Отримані основні співвідношення та рівняння для задач згину тонких жорстких однорідних і тришарових прямокутних пластин у рамках навчально-дослідницької роботи зі студентами з курсу «Основи теорії пружності». Отримані теоретичні результати можуть бути використані у практиці наближеного розрахунку на міцність і жорсткість прямокутних плит.

Ключові слова: прямокутна жорстка однорідна і тришарова пластини, крайова задача, диференціальні рівняння, метод колокації.

У курсі лекцій «Основи теорії пружності», який читають студентам будівельного факультету ПДАБА в 5-му семестрі, висвітлюється тема «Розрахунок на міцність і жорсткість однорідних прямокутних і круглих пластин на згин» за класичною теорією. На її основі студентами виконується проектувальний розрахунок шарнірно-обіпєртих прямокутних і жорстко защемлених круглих пластин. Для розуміння студентами розрахунку пластин середньої товщини ми знайомимо їх також із некласичною теорією — математичною теорією розв'язування граничних задач з використанням рядів Фур'є — Лежандра й варіаційного принципу Рейснера. Ефективність використання тришарових елементів конструкцій демонструється розв'язуванням на лекції задачі про згин шарнірно-обіпєртої тришарової пластини на основі класичних гіпотез. Аналітичне розв'язування крайових задач згину однорідних і тришарових прямокутних пластин з різним закріпленням сторін залишається за межами навчального курсу. Це й слугувало розгляду задач згину вказаних елементів при жорсткому защемленні країв.

1. Постановка задачі. Розглядається лінійно пружна однорідна або тришарова пластинка ($a \times b \times h$), на яку діє поперечне навантаження

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (1)$$

де q_0 — відома стала; m, n уважатимемо відомими непарними натуральними числами; $x \in [0; a]$, $y \in [0; b]$, $z \in [-h / 2; h / 2]$.

Крайові умови:

$$w(x = 0; y) = w(x = a; y) = 0; \frac{\partial w}{\partial x}(x = 0; y) = \frac{\partial w}{\partial x}(x = a; y) = 0; \quad (2a)$$

$$w(x; y = 0) = w(x; y = b) = 0; \frac{\partial w}{\partial y}(x; y = 0) = \frac{\partial w}{\partial y}(x; y = b) = 0, \quad (2b)$$

Отримаємо аналітично повну систему рівнянь при дослідженні напружено-деформованого стану жорстко защемлених однорідних і тришарових пластин, які мають важливе практичне значення в будівництві.

2. Основні рівняння для однорідної тонкої пластини. Диференціальне рівняння зігнутої поверхні тонкої жорсткої пластини згідно з класичною постановкою має вигляд (Тимошенко & Войновский-Кригер, 1963):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}; \quad (3)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (4)$$

де E, ν — механічні сталі; $w(x, y)$ — шукана функція прогину пластини.

Розв'язок рівняння (3), який задовольняє крайовим умовам (2а), (2b), шукаємо у вигляді ряду:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \left(1 - \cos \frac{2i\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2j\pi y}{b} \right), \quad (5)$$

де w_{ij} — сталі, які визначають з певних умов.

Коефіцієнти w_{ij} потрібно визначити так, щоб ряд (5) задовольняв рівнянню (3) при навантаженні (1). Це можна зробити чисельним методом колокації (Демидович и др., 1967). Візьмемо скінченну кількість членів ряду (5). Для інженерних розрахунків урахуємо чотири члени. Тоді

$$w(x, y) = w_{11} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + w_{12} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{4\pi y}{b} \right) + \\ + w_{21} \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + w_{22} \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{4\pi y}{b} \right). \quad (6)$$

Вимагаємо, щоб ліва і права частини рівняння (3) були рівні у деяких точках. Таких точок потрібно взяти стільки, скільки невідомих у рівності (6) — чотири. З урахуванням симетрії прогину відносно центра пластини візьмемо точки з такими координатами: $A_1 \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2} \right)$, $A_2 \left(\frac{2a}{3}; \frac{b}{2} \right)$, $A_3 \left(\frac{5a}{6}; \frac{b}{2} \right)$, $A_4 \left(\frac{a}{2}; \frac{3b}{4} \right)$. Тоді система чотирьох лінійних алгебричних рівнянь для визначення w_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2$) буде такою:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_{ij} \left(\left(\frac{2i\pi}{a} \right)^4 \cos \frac{2i\pi x}{a} B(y) - 2 \left(\frac{2i\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{2j\pi}{b} \right)^2 \cos \frac{2i\pi x}{a} \cos \frac{2j\pi y}{b} + \right. \\ \left. + \left(\frac{2j\pi}{b} \right)^4 \cos \frac{2j\pi y}{b} A(x) \right) = -\frac{q_0}{D} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (7)$$

де $A(x) = 1 - \cos \left(\frac{2i\pi x}{a} \right)$; $B(y) = 1 - \cos \left(\frac{2j\pi y}{b} \right)$, а координати (x, y) беруться для чотирьох точок A_i ($i = 1, \dots, 4$).

Зі збільшенням кількості членів у ряді (5) зростає кількість точок колокації та кількість рівнянь і підвищується точність розв'язку задачі.

Знайшовши w_{ij} , отримаємо наближено прогин $w(x, y)$ і за нижченаведеними формулами дістанемо напруження і моменти в пластині.

Напруження:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), (x \rightarrow y, y \rightarrow x); \tau_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (8)$$

Згинальні та крутний моменти виражаються через $w(x, y)$ таким чином:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), (x \rightarrow y, y \rightarrow x); H = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (9)$$

Система залежностей (4), (6)–(9) є повною для визначення поперечних переміщень $w(x, y)$, напружень $\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), \tau_{xy}(x, y)$ і моментів M_x, M_y, H , які необхідні для розрахунку на міцність і жорсткість пластин.

2. Основні рівняння для тришарової тонкої пластини. Розглянемо тришарову пластину симетричної структури: зовнішні — несучі шари товщини δ , модуль Юнга матеріалу E_n ; внутрішній шар — заповнювач товщини $2t$, модуль Юнга матеріалу E_3 . Зовнішні шари набагато міцніші внутрішнього ($E_n \gg E_3$) і тонші внутрішнього ($\delta < t$). Приймаючи для тришарової пластини класичні гіпотези, як і для одношарової, та покладаючи рівність коефіцієнтів Пуассона матеріалів несучих шарів і заповнювача ($\nu_n = \nu_3 \equiv \nu$), дістанемо циліндричну жорсткість D_T тришарової пластини:

$$D_T = \frac{2(E_n \delta (3t^2 + 3t\delta + \delta^2) + E_3 t^3)}{3(1-\nu^2)}. \quad (10)$$

Замінюючи у (8) E на E_n для несучих шарів, E на E_3 для заповнювача, дістанемо напруження в зовнішніх і внутрішньому шарах. У (9) $D \rightarrow D_T$. Система залежностей (10), (6)–(9) буде повною для визначення поперечних переміщень $w(x, y)$, напружень $\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), \tau_{xy}(x, y)$ і моментів M_x, M_y, H у тришарових пластинках.

Наведені вище повні системи залежностей можуть використовуватися для наближених практичних розрахунків однорідних і тришарових плит, які використовуються в будівельній галузі.

Список літератури

- Демидович, Б. П., Марон, И. А., & Шувалова, Э. З. (1967). *Численные методы анализа* (3-е изд.). Москва: Наука.
Тимошенко, С. П., & Войновский-Кригер, С. (1963). *Пластинки и оболочки*. Москва: Наука.

Динамика взаимодействия вирусов и иммунной системы

А. О. Игнатьев

Институт прикладной математики и механики, Донецк, Украина
aoignat@mail.ru

Рассмотрена система двух дифференциальных уравнений относительно переменных, представляющих собой популяции вирусов и иммунных клеток. Найдены положения равновесия этой системы и изучена их устойчивость по Ляпунову.

Ключевые слова: вирусная инфекция, иммунная система, математическая модель, система обыкновенных дифференциальных уравнений, положение равновесия, устойчивость, функция Ляпунова.

Взаимоотношения иммунитета и инфекции определяют развитие очень многих заболеваний. Как указано в статье Марчук (2012), суть иммунной реакции на вторжение генетически чужеродного материала (антигена), в том числе и возбудителей болезни, состоит в производстве специфических материальных субстратов (антител, клеток-киллеров), способных нейтрализовать антигены. Исходя из этого, будем рассматривать инфекционное заболевание как конфликт между популяцией возбудителей болезни и иммунной системой организма. Простая математическая модель может быть полезной для лучшего понимания болезни и выработки лекарственной терапии, используемой при лечении.

В настоящей статье изучается математическая модель, предложенная в работе Komarova и др. (2003). Эта же модель была получена ранее в работе de Boer и Boerlijst (1994). В статье Komarova и др. (2003) авторы делают достаточно общие предположения. Модель содержит две переменные: популяцию вируса y и популяцию иммунных клеток z . Точная идентичность иммунных клеток остается открытой. Предполагается, что степень иммунного ответа зависит от вирусной нагрузки, и что иммунный ответ препятствует росту популяции вирусов. Таким образом, иммунные клетки могут соответствовать любой ветви адаптивной иммунной системы. Это могут быть клетки CD4, также называемые клетками T4, которые являются «вспомогательными» клетками и ведут атаку против инфекций. Это могут быть антитела, а также клетки CD8 (клетки T8), являющиеся «супрессорными» клетками, которые завершают иммунный ответ. Клетки CD8 + также могут быть «киллерами» которые убивают раковые клетки и другие клетки, инфицированные вирусом. Математическая модель задается следующей парой дифференциальных уравнений:

$$\dot{y} = yg_r(y) - pyz, \quad (1)$$

$$\dot{z} = zf(y). \quad (2)$$

Популяция вирусов растет со скоростью, описываемой функцией $g_r(y)$. Эта функция зависит от количества вирусов y и от параметра r , определяющего скорость размножения вирусов. Размножение (репликация) вирусов — процесс, в ходе которого вирус, используя собственный генетический материал и синтетический

аппарат клетки-хозяина, воспроизводит подобное себе потомство. Популяция вируса подавляется иммунным ответом со скоростью pyz , где p — положительная константа. Рост иммунитета определяется вирусной нагрузкой y и описывается функцией $f(y)$. В работе Komarova и др. (2003) показано, что функции $g_r(y)$ и $f(y)$ должны удовлетворять следующим условиям:

- 1) $g_r(0) > 0$;
- 2) $\frac{\partial g_r}{\partial y} < 0$ для любого y ;
- 3) существует y_* , такое, что $g_r(y_*) = 0$;
- 4) $\frac{\partial g_r(y)}{\partial r} > 0$ для всех r и y ;
- 5) существуют только два значения $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$, такие, что $f(y_1) = f(y_2) = 0$;
- 6) $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ при $y = y_1$, и $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$ при $y = y_2$.

В качестве примера такой системы, удовлетворяющей сформулированным выше условиям, авторы статьи Komarova и др. (2003) предложили систему

$$\dot{y} = ry \left(1 - \frac{y}{k} \right) - ay - pyz, \quad (3)$$

$$\dot{z} = \frac{c y z}{1 + \varepsilon y} - q y z - b z, \quad (4)$$

рассмотренную ранее в работе de Boer и Boerlijst (1994).

Популяция вирусов растет со скоростью $ry \left(1 - \frac{y}{k} \right)$. Параметр r определяет скорость, с которой происходит размножение вирусов, а параметр k представляет собой предельное возможное значение количества вирусов, т. е. $0 \leq 1 - \frac{y}{k} \leq 1$ для любого y . Популяция вирусов умирает со скоростью ay и подавляется иммунной системой со скоростью pyz . Иммунитет растет со скоростью $\frac{c y z}{1 + \varepsilon y}$. Таким образом, рост иммунитета представляет собой функцию насыщения по отношению к имеющейся популяции вируса (при $y \rightarrow \infty$ функция $\frac{c y z}{1 + \varepsilon y}$ остается ограниченной). Иммунные клетки могут быть ингибированы вирусом со скоростью $q y z$. И, наконец, при отсутствии антигенной стимуляции иммунный ответ снижается со скоростью bz . Фазовые переменные $y(t)$ и $z(t)$ в системе дифференциальных

уравнений (3), (4) неотрицательны (в противном случае они бы не имели биологического смысла), все константы $r, k, a, p, c, \varepsilon, q, b$ — положительны. В дальнейшем, когда мы будем говорить о решениях этой системы, мы будем подразумевать лишь неотрицательные решения.

Система (3), (4) представляет собой систему (1), (2), в которой

$$g_r(y) = r \left(1 - \frac{y}{k} \right) - a, \quad f(y) = \frac{cy}{1 + \varepsilon y} - qy - b.$$

Приравняв нулю правые части уравнений (3), (4), находим положения равновесия этой системы:

$$\mathfrak{B}_0 : \quad y = 0, \quad z = 0,$$

$$\mathfrak{B}_1 : \quad y = y_1, \quad z = z_1,$$

$$\mathfrak{B}_2 : \quad y = y_2, \quad z = z_2,$$

$$\mathfrak{B}_3 : \quad y = y_*, \quad z = 0,$$

где

$$y_1 = \frac{c - q - b\varepsilon - \sqrt{D}}{2q\varepsilon}, \quad y_2 = \frac{c - q - b\varepsilon + \sqrt{D}}{2q\varepsilon}, \quad D = (c - q - b\varepsilon)^2 - 4bq\varepsilon,$$

$$z_1 = \frac{1}{p} \left[r \left(1 - \frac{y_1}{k} \right) - a \right], \quad z_2 = \frac{1}{p} \left[r \left(1 - \frac{y_2}{k} \right) - a \right], \quad y_* = k \left(1 - \frac{a}{r} \right).$$

$\mathfrak{B}_0$ соответствует ситуации, когда вирусы в организме-хозяине и иммунный ответ на них отсутствуют; в случаях $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ вирусы и клетки иммунитета уравнивают друг друга, что соответствует хроническому течению болезни; и, наконец, $\mathfrak{B}_3$ соответствуют случаю, когда иммунные клетки полностью подавлены вирусом.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Положение равновесия $\mathfrak{B}_0$ системы (3), (4) глобально асимптотически устойчиво при $r \leq a$ и неустойчиво при $r > a$.*

Теорема 2. *В системе дифференциальных уравнений (3), (4) положение равновесия $\mathfrak{B}_1$ локально асимптотически устойчиво, а положение равновесия $\mathfrak{B}_2$ неустойчиво.*

Теорема 3. *Положение равновесия $\mathfrak{B}_3$ системы (3), (4) асимптотически устойчиво при $y_* \in (0, y_1) \cup (y_2, +\infty)$ и неустойчиво при $y_* \in (y_1, y_2)$.*

Используя полученные результаты, мы можем утверждать следующее.

Если $0 < r \leq a$, то в этом случае существует лишь одно положение равновесия $\mathfrak{B}_0$, которое глобально асимптотически устойчиво.

Если $a < r < r_1 = \frac{a}{1 - \frac{y_1}{k}}$, то в этом случае существует одно положение

равновесия $\mathfrak{B}_3$, которое асимптотически устойчиво.

Если $r_1 < r < r_2 = \frac{a}{1 - \frac{y_2}{k}}$, то существует асимптотически устойчивое поло-

жение равновесия $\mathfrak{B}_1$ и неустойчивое положение равновесия $\mathfrak{B}_3$.

Если $r > r_2$, то существуют два асимптотически устойчивых положения равновесия $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_3$, и одно неустойчивое положение равновесия $\mathfrak{B}_2$.

Полученные результаты приведены в следующей таблице.

	$0 < r \leq a$	$a < r < r_1$	$r_1 < r < r_2$	$r > r_2$
Асимптотически устойчивые положения равновесия	$\mathfrak{B}_0$	$\mathfrak{B}_3$	$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_3$
Неустойчивые положения равновесия			$\mathfrak{B}_3$	$\mathfrak{B}_2$

Из приведенного анализа можно сделать следующий практический вывод: если в случаях $r \in (r_1; r_2)$ и $r \in (r_2; +\infty)$ популяции вирусов и иммунных клеток с помощью лекарственной терапии организма-хозяина возможно привести в какой-то момент времени t_0 в такое состояние, что соответствующие им переменные y и z окажутся в области притяжения положения равновесия $\mathfrak{B}_1$, то начиная с этого момента времени переменные $y(t)$ и $z(t)$ будут в дальнейшем принадлежать некоторой окрестности $\mathfrak{B}_1$ и стремиться к этому положению равновесия без дальнейшего использования лекарств.

Список литературы

- de Boer, R. J., & Boerlijst, M. C. (1994). Diversity and virulence thresholds in AIDS. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 91(2), 544–548. <https://doi.org/10.1073/pnas.91.2.544>
- Komarova, N. L., Barnes, E., Klenerman, P., & Wodarz, D. (2003). Boosting immunity by antiviral drug therapy: a simple relationship among timing, efficacy, and success. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 100(4), 1855–1860. <https://doi.org/10.1073/pnas.0337483100>
- Марчук, Г. И. (2012). Математическое моделирование в медицине. *Медицина и высокие технологии*, (2), 3–6.

Математичне моделювання інвестиційного проєкту як функції n змінних

Т. В. Іваненко, О. А. Тимошенко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

tivanenko2015@gmail.com, elena_timoshenko2008@ukr.net

У статті розглянуто задачу оцінювання ризикованості інвестиційного проєкту із застосуванням математичної моделі, в основу якої покладено функцію n змінних, її частинних похідних та градієнта.

Ключові слова: аналіз чутливості функції до зміни параметрів, коефіцієнти еластичності, критичне значення параметра, межа безпеки.

Для прийняття обґрунтованого рішення про впровадження або відмову від певного інвестиційного проєкту розраховують низку показників ефективності. Такі показники значною мірою залежать від правильності розрахунку елементів грошового потоку CF_k , ставки дисконту r та інших параметрів, а також від можливої їхньої зміни протягом терміну реалізації проєкту. Тому після встановлення базового значення показника ефективності слід визначити його чутливість до зміни основних параметрів.

Основною ідеєю аналізу чутливості є складання математичної моделі, яка описує залежність обраного показника ефективності проєкту від зміни різноманітних чинників з метою виявлення найнебезпечніших з них. Для цього використовують функцію багатьох змінних: $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ й досліджують ступінь впливу зміни кожної змінної x_i ($i = 1, \dots, n$) на функцію u , за умови, що значення решти змінних зафіксовано. Такий вплив характеризується коефіцієнтом еластичності. Коефіцієнтом еластичності $E_{x_i}(u)$ функції u за аргументом x_i

називають частинну похідну функції u по аргументу x_i , взяту із множником $\frac{x_i}{u}$ для нормування, що дає змогу обчислювати $E_{x_i}(u)$ у відносних одиницях. Коефіцієнт еластичності функції u за аргументом x_i розраховують за формулою (1):

$$E_{x_i}(u) = \frac{x_i}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (1)$$

Отже, коефіцієнт еластичності функції показує на скільки відсотків зміниться функція, якщо аргумент зміниться на 1%. Якщо $|E_{x_i}(u)| > 1$, то це означає, що при зміні x_i на 1% u зросте більше, ніж на 1%, тобто u є еластичною відносно x_i , отже даний параметр є небезпечним. Якщо ж $|E_{x_i}(u)| < 1$, це означає, що u нееластична відносно x_i і цей чинник є безпечним. Знак коефіцієнта еластич-

ності показує напрямок зміни функції (зростання чи спадання) при зміні аргументу. У випадку, коли всі аргументи функції u змінюються одночасно, чутливість u характеризується градієнтом:

$$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right),$$

а коефіцієнт еластичності визначають за формулою (2):

$$E(u) = \frac{1}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \Delta x_n \right) \quad (2)$$

Формулу (2) використовують для порівняння кількох альтернативних проєктів; вона дає можливість оцінити загальний ступінь ризикованості проєкту.

Під час реалізації аналізу чутливості слід провести наступні розрахунки.

1. Обрати показник ефективності проєкту. Зазвичай це NPV , але може бути й IRR . Визначити параметри, що впливають на значення NPV , наприклад

$$NPV = NPV(INV, q, p, Z, M, r),$$

де INV — обсяг інвестицій, q — обсяг продажу, p — ціна продукції, Z — заробітна плата працівників, M — матеріальні витрати, r — ставка дисконтування.

2. Розрахувати еластичність NPV за кожним параметром.

3. Визначити граничне значення параметра, при якому NPV відхиляється від свого базового значення на критичну величину, тобто до досягнення нульового значення, та межу безпеки.

4. Проранжувати параметри за еластичністю: чим вища чутливість, тим важливіша змінна.

Проілюструємо це на такому прикладі: початкові інвестиції проєкту складають 20 млн. грн., ціна реалізації продукції — 50 грн., витрати на оплату праці за виготовлення одиниці продукції — 15 грн., витрати на сировину — 10 грн./шт. Постійні витрати складають 5 млн. грн. на рік. При нормальному завантаженні виробничих потужностей підприємство зможе виробляти 600 тис. одиниць продукції на рік. Термін реалізації проєкту складає 4 роки, дисконтна ставка 12%. Виконаємо аналіз чутливості проєкту щодо зміни вартості капіталу, початкових вкладень та ціни товару.

1. Показником ефективності проєкту обираємо NPV та розраховуємо її за формулою:

$$NPV = -INV + CF_k \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(1+r)^k}, \quad (3)$$

де $CF_k = pq - VC - FC = 50 \cdot 600 - (15 + 10) \cdot 600 - 5000 = 10$ (млн. грн.);

$NPV = -20 + 10 \cdot (0,893 + 0,797 + 0,712 + 0,636) = 10,38$ (млн. грн.) — початкове значення NPV .

Нехай $NPV = NPV(r; INV; p)$. Знайдемо частинні похідні функції NPV по усіх змінних, значення цих похідних у точці $x_0 = (0,12; 20\,000\,000; 50)$ та коефіцієнти еластичності NPV по усіх змінних за формулою (1):

$$E_r(NPV) = \frac{\partial NPV}{\partial r} \cdot \frac{r}{NPV} = (pq - VC - FC) \sum_{k=1}^4 \frac{-k}{(1+r)^{k+1}} \Big|_{x_0} \cdot \frac{r}{NPV} =$$

$$= -63,963 \cdot \frac{0,12}{10,38} = -0,74,$$

тобто NPV слабо еластична по r , тому ставка дисконтування є безпечною для проєкту змінною;

$$E_{INV}(NPV) = \frac{\partial NPV}{\partial INV} \cdot \frac{INV}{NPV} = -1 \cdot \frac{20}{10,38} = -1,93.$$

Отже, NPV еластична за INV , тому початкова інвестиція є небезпечною для проєкту.

$$E_p(NPV) = \frac{\partial NPV}{\partial p} \cdot \frac{p}{NPV} = q \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(1+r)^k} \Big|_{x_0} \cdot \frac{p}{NPV} = 1,82 \cdot \frac{50}{10,38} = 8,78.$$

Отже, NPV сильно еластична за p , ціна продукції найнебезпечніша змінна й потребує найбільшої уваги. Зниження ринкової ціни лише на один відсоток призведе до зниження чистої теперішньої вартості проєкту на майже 9%. Інвестору слід завчасно подбати про недопущення такої ситуації, наприклад, укласти угоди з майбутніми споживачами на поставку продукції за зафіксованими в контракті цінами.

2. Тепер обчислимо коефіцієнти еластичності за всіма параметрами за формулою (2). Для цього задаємо відхилення в межах 5% усіх параметрів, тоді

$$r_0 = 12\%, \quad r_1 = 12,6\%, \quad \Delta r = 0,6\%;$$

$$INV_0 = 20 \text{ млн. грн.}, \quad INV_1 = 21 \text{ млн. грн.}, \quad \Delta INV = 1 \text{ млн. грн.};$$

$$p_0 = 50 \text{ грн.}, \quad p_1 = 52,5 \text{ грн.}, \quad \Delta p = 2,5 \text{ грн.}$$

$$E(NPV) = \frac{1}{NPV} \left(\frac{\partial NPV}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial NPV}{\partial INV} \Delta INV + \frac{\partial NPV}{\partial p} \Delta p \right) =$$

$$= \frac{1}{10,38} (-63,969 \cdot 0,006 - 1 \cdot 1 + 1,82 \cdot 2,25) = 0,26.$$

Для наочного зображення побудуємо графік чутливості до невизначених факторів, який називають Spider Graph (рис. 1). Чим менше пряма на графіку відхиляється від горизонталі, тим менш чутливим буде проєкт до зміни відповідного параметра.

3. Критичною вважатимемо таку величину параметру, при якій $NPV = 0$.

$$INV = CF_k \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(1+r)^k} = CF_k \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}.$$

Розрахуємо критичні значення x_i :

для r :

$$20 = 10 \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(1+r)^k} \Rightarrow \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} = 2 \Rightarrow r = 34,5\%.$$

для INV :

$$INV = 10 \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(1,12)^k} \Rightarrow INV = 30,38 \text{ (млн. грн.)}$$

для p :

$$20 = (p \cdot 600 - 25 \cdot 600 - 5) \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(1,12)^k} \Rightarrow 20 = (600p - 15005) \cdot 3,038 \Rightarrow p = 25,019 \text{ (грн.)}$$

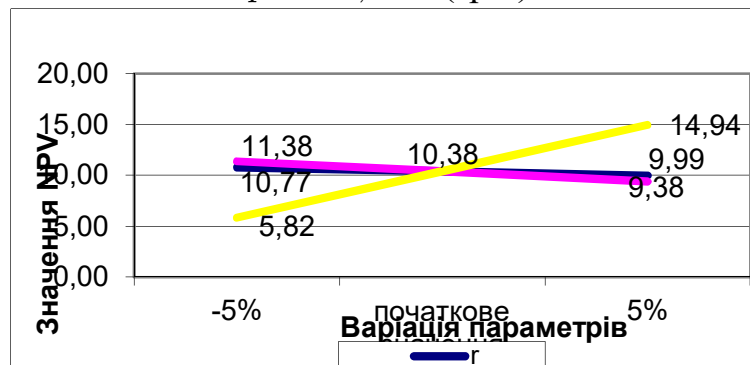


Рис. 1. Чутливість проєкту до зміни параметрів (Spider Graph)

Розрахуємо межі безпеки (MB) кожного параметра:

– дисконтної ставки $MB_r = \frac{34,5 - 12}{12} \cdot 100\% = 187,5\%$, тобто r може ма-

ксимально зрости на 187,5% або на 22,5 процентних пункти, після чого проєкт стане збитковим;

– початкової інвестиції $MB_{INV} = \frac{30,38 - 20}{20} \cdot 100\% = 51,9\%$, тобто INV

може максимально зрости на 51,9%;

– ціни продукції $MB_p = \frac{25,019 - 50}{50} \cdot 100\% = -49,96\%$, тобто p може

знизитись на 49,96%, після чого проєкт стане збитковим.

Усі отримані результати занесемо в табл. 1.

Таблиця 1. Результати аналізу чутливості $NPV = NPV(r; INV; p)$ до зміни аргументів

Аргумент x_i	$E_{x_i}(u)$	Критичне значення x_i	Межа безпеки, %	Чутливість параметра
Дисконтна ставка (r)	-0,74	34,5%	187,5	Низька
Початкова інвестиція (INV)	-1,93	30,38 млн. грн.	51,9	Середня
Ціна прдукції (p)	+ 8,78	25,019 грн.	-49,96	Висока

Список літератури

- Іваненко, Т. В. (2019). *Основи фінансової математики*. Київ: Видавництво Ліра-К.
- Капустян, В. О., Пасенченко, Ю. А. (2013). *Фінансова математика* (2-ге вид.). Київ: Прінт-Сервіс.
- Шарп, У., Александер, Г., & Бэйли, Д. (1997). *Инвестиции*. Москва: Инфра-М.

Детермінована задача прийняття оптимального рішення при виборі інвестиційного проєкту

Т. В. Іваненко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

tivanenko2015@gmail.com

У статті розроблено математичну модель прийняття багатоцільового багато-критеріального рішення інвестором при виборі інвестиційного проєкту. Застосовано метод аналізу ієрархій. На підставі моделі проведено розрахунок, зроблено висновки із отриманих результатів та сформульовано рекомендації інвестору.

Ключові слова: метод аналізу ієрархій, критерії оцінки, матриці парних порівнянь, множина стратегій, функціонал оцінювання, множина експертних оцінок.

Інвестиційна діяльність завжди пов'язана із проблемою обмеженості інвестиційних ресурсів. Тому інвестор змушений приймати рішення, обираючи ту стратегію, яка найкраще відповідає його цілям та критеріям відбору. Задача прийняття багатоцільового рішення полягає у визначенні та одночасній оптимізації кількох параметрів, що впливають на кожну поставлену ціль. Ці параметри часто є не лише взаємопов'язаними, але й суперечливими.

Проблемам прийняття оптимальних рішень в умовах невизначеності й ризику присвячено багато робіт, наприклад, математичні моделі, що використовують при обґрунтуванні доцільності рішення, досліджено Волошиним та Мащенко (2010). Особливості прийняття інвестиційних рішень розглянуто в підручнику Пересади та ін. (2003).

Розгляньмо задачу прийняття рішення з вибору інвестиційного проєкту (ІП) в умовах обмеженості капіталу. Нехай існує можливість реалізувати один із трьох ІП, які характеризується різними обсягами очікуваного прибутку, а також різним ступенем ризику. Інвестор має на меті досягнення двох цілей: максимізації прибутку та одночасної мінімізації ризику. По кожному з проєктів розраховано основні показники ефективності, які виступають критеріями оцінки: чиста приведена вартість проєкту (NPV), дисконтований період окупності інвестицій (DPP), гранична норма дохідності (IRR) та індекс прибутковості (PI). Інвестор звертається за консультацією до трьох експертів, кожний з яких висловлює свою суб'єктивну думку щодо розглядуваних ІП, порівнюючи їх за цими чотирма критеріями. Водночас для інвестора думки експертів не є однаково важливими, оскільки залежать від авторитету експерта з точки зору інвестора.

Таким чином постановка задачі визначається трьома множинами:

- 1) множиною стратегій інвестора $S = (S_1, S_2, S_3)$, де S_i — прийняти i -й проєкт та відхилити решту проєктів ($1 \leq i \leq 3$);
- 2) функціоналом оцінювання $F = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, що визначає кількість критеріїв, за якими здійснюється вибір;

3) множиною експертних оцінок $E = (e_1, e_2, e_3)$, кожна з яких визначає оцінки всіх альтернативних рішень за всіма критеріями.

Побудуємо ієрархію, яка за даних умов буде дворівневою (рис. 1). Критерії першого рівня — «експерти», їх позначимо e_1, e_2 та e_3 , а другого — «показники ефективності ІП»: NPV, DPP, IRR та PI . Альтернативними рішеннями є прийняття одного із трьох проєктів, їх позначимо I ІП, II ІП та III ІП відповідно.

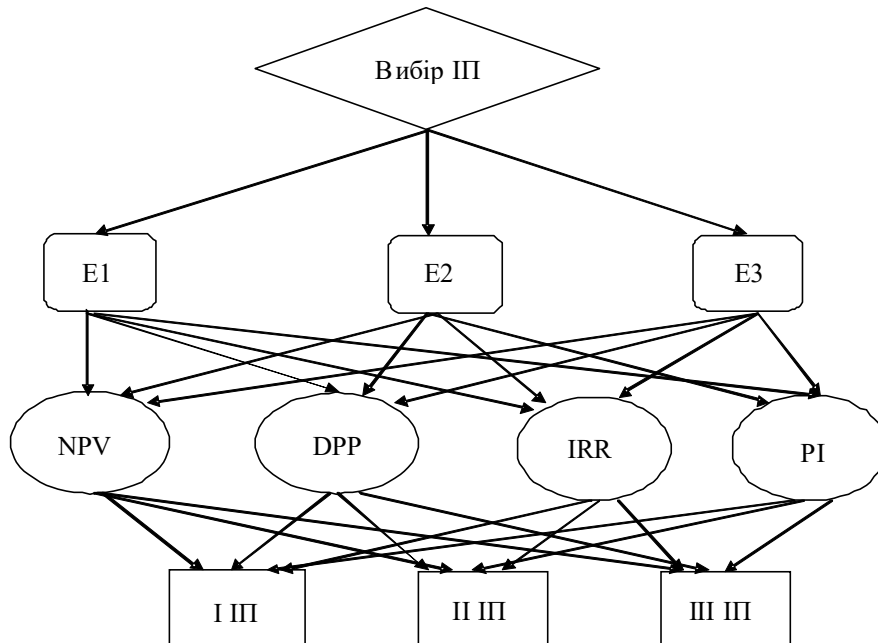


Рис. 1. Ієрархія прийняття рішення з вибору інвестиційного проєкту

Для кожного з критеріїв як першого, так і другого рівнів складемо матриці парних порівнянь згідно з методом Сааті (Сааті, 1993). Усі матриці є обернено симетричними. Для забезпечення узгодженості матриць складаємо їх шляхом наступного розрахунку: $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$, де w_i та w_j кількість балів, яку присвоює

експерт i -му та j -му об'єктам відповідно, що оцінюється за 9-бальною шкалою. Вищий бал означає більшу важливість. Після створення матриць парних порівнянь проводимо їх нормалізацію, яка полягає в діленні кожного елемента стовпця на суму елементів стовпця. У випадку узгодженої матриці парних порівнянь нормалізована матриця матиме три однакових стовпці, елементи яких є ваговими коефіцієнтами, що відображують локальні пріоритети альтернатив за відповідними критеріями.

Почнімо з першого рівня ієрархії — експертів. Інвестор надав їм такі бали: e_1 — 8, e_2 — 9, e_3 — 7. Матриця парних порівнянь важливості думок експертів показана на рис. 2 (ліворуч).

У свою чергу кожний з експертів оцінює важливість критеріїв шляхом присвоєння їм балів від 1 до 4. Наприклад, перший експерт оцінив їх так:

NPV —4, PI —3, IRR —2, DPP —1. Матриця парних порівнянь важливості критеріїв на думку експерта e_1 наведена на рис. 2 (праворуч).

$E =$		e_1	e_2	e_3
	e_1	1	8/9	8/7
	e_2	9/8	1	9/7
	e_3	7/8	7/9	1

 $e_1 =$

	NPV	DPP	IRR	PI
NPV	1	4	2	4/3
DPP	1/4	1	1/2	1/3
IRR	1/2	2	1	2/3
PI	3/4	3	3/2	1

Рис. 2. Матриця парних порівнянь важливості думок експертів та важливості критеріїв за оцінкою експерта e_1

Наступним кроком є оцінка кожним експертом кожного із трьох проєктів за кожним з чотирьох критеріїв, за результатами якої побудовано матриці парних порівнянь ІІ та проведено їх нормалізацію.

На заключному етапі обчислено глобальні пріоритети альтернатив відносно мети шляхом лінійної згортки локальних пріоритетів усіх елементів (Волошин & Машенко, 2010, с. 118). Одержано наступні результати: перший інвестиційний проєкт отримав ваговий коефіцієнт 0,1974, другий — 0,3850, третій — 0,4176. Отже, інвестору слід прийняти третій інвестиційний проєкт, який є оптимальним для досягнення двох цілей: максимізації прибутку та мінімізації ризику.

Список літератури

- Волошин, О. Ф., & Машенко, С. О. (2010). *Моделі та методи прийняття рішень* (2-ге). Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет».
- Пересада, А. А., Коваленко, Ю. М., & Онікієнко, С. В. (2003). *Інвестиційний аналіз*. Київ: КНЕУ.
- Саати, Т. (1993). *Принятие решений. Метод анализа иерархий*. Москва: Радио и связь.

Моделювання процесу руйнування внаслідок втоми за умов багато циклового навантаження з допомогою рекурентних співвідношень

Ю. М. Кобзар

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
creep@inmech.kiev.ua

Запропонована рекурентна процедура, яка дозволяє на кожному півциклі кожного циклу зміни симетричного розтягу стиску визначати залежно від початкових фізико-механічних властивостей стрижня, структурні зміни, які кількісно характеризуються змінами маси, щільності, напружень, модуля пружності на кожному півциклі з урахуванням їх обчислених значень на попередньому півциклі. Критерієм руйнування при втомі є виконання енергетичної нерівності. Процедура реалізована в середовищі комп'ютерної алгебри.

Ключові слова: рекурентна процедура, енергетичний критерій руйнування при втомі.

У моделі багатоциклової втоми стрижня під дією симетричного навантаження розтягу-стиску на кожному циклі перераховуються характерні величини процесу, а деякі з них на кожному пів циклі поточного циклу (Кобзар, 2019). Досліджується крихке руйнування матеріалів, коли змінюється несучий об'єм зразка і не враховуються малі зміни форми. На кожному циклі навантаження відбуваються структурні зміни, які спричиняють зміни маси, щільності, напруження, модуля пружності. Особливостями такого рекурентного процесу є розділення розрахунків характерних величин процесу в циклі навантаження на пів цикли стиску та розтягу, де в попередньому визначаються маса, амплітудне напруження, модуль пружності, які є початковими для наступного пів циклу розтягу в якому визначаються щільність та амплітудне напруження і ці процедури по чергово повторюються на кожному наступному циклі. Критерієм втомного руйнування є не виконання на якомусь циклі енергетичної нерівності, що характеризує процес. Ця нерівність отримана з балансу енергій стрижня — за помпованої пружної та енергії, яку викликає дія зовнішнього навантаження. Межа втоми досягається, коли перевищується умовна база випробувань без руйнувань. Ця модель є розвитком попереднього підходу в якому не враховувалась рівність енергій (Кобзар, 2015).

Критерієм крихкого руйнування є виконання нерівності

$$\frac{P_{\text{в}}^2}{m_1 \omega^2} - \frac{\sigma_{xaj}(i)^2}{E_j(i)} \frac{m_j(i)}{\rho_j(i)} < 0, \quad (1)$$

на i -му циклі j -го пів циклу і цей цикл $i = N_a < N_0$ є межею довготривалої міцності при початковій напрузі σ_1 викликаній навантаженням P_a , де

$U_0 = \frac{P_B}{m_1 \omega^2}$ енергія руйнування. Критерієм досягнення межі втоми є не виконання нерівності (1) для $i \geq N_0$ за межею прийнятої бази випробувань N_0 .

Нехай на ізотропний стрижень з коефіцієнтом Пуасона μ , межею міцності σ_B і початковими — модулем пружності E_1 , масою m_1 , щільністю ρ_1 , довжиною l_1 , площею перетину F_1 , діє симетричне періодичне розтяг-стискуjące навантаження P_i , з частотою Ω та амплітудним значенням $P_a = \text{const}$. Напруження $\sigma_1 = \frac{P_a}{F_1}$ менше межі $\sigma_{\text{пц}}$ пропорційності. Кількість циклів умовної бази випробувань — $N_0 = 10 \cdot 10^6$. Циклічні напруження

$$\sigma_j(i) = \sigma_{aj}(i) \sin \Omega t,$$

де $\sigma_{aj}(i) = \frac{P_a}{F_{aj}(i)}$, $F_{aj}(i)$ — амплітудне значення поперечного перетину стрижня,

що виникають у стрижні з початковим об'ємом $V_1 = \frac{m_1}{\rho_1}$ викликають на кож-

ному i -му циклі стиск у першому $j = 1$ та розтяг у другому $j = 2$ пів циклах. Коли частота Ω циклічної прикладеної сили набагато менша власної початкової частоти ω стрижня, тобто коли $\Omega \ll \omega$ тоді в енергії, що запомповується у стрижень можна знехтувати частотою прикладеної сили. З балансу енергій тієї, що подається та тієї, що приймає стрижень знаходимо початкову власну початкову

частоту $\omega = \frac{P_a \sqrt{E_1 \rho_1}}{\sigma_{xa1} m_1}$ стрижня.

Розгляньмо рекурентний процес накопичення втоми на довільному i -му циклі. У першому пів циклі $j = 1$ при стисковій прийнято, що щільність не змінюється $\rho_2(i-1) = \rho_1(i)$, а для маси виконується

$$m_1(i-1) = m_2(i-1). \quad (2)$$

Стан стрижня на цьому й попередньому пів циклах зв'язують рівності

$$1 = \frac{\rho_2(i-1)V_2(i-1)}{m_2(i-1)} = \frac{\rho_1(i)V_1(i)}{m_1(i)} = \frac{\rho_1(i)(V_2(i-1) - \Delta V_1(i))}{m_1(i)}. \quad (3)$$

З допомогою рівнянь (3) залежність між напруженнями $\sigma_{xa1}(i)$ та $\sigma_{xa2}(i-1)$ буде

$$\sigma_{xa1}(i) = \left(\frac{m_2(i-1)}{m_1(i)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa2}(i-1), \quad (4)$$

де $m_1(i)$ — невідома маса. Після серії перетворень, з допомогою рівнянь (3),

залежності середнього напруження $\sigma_{\text{сеп1}}(i)$ від лінійного напруження $\sigma_{xa2}(i-1)$, модуля пружності $E_2(i-1)$, об'ємного модуля $K_2(i-1)$ та мас цього та попереднього циклу, будуть

$$\sigma_{\text{сеп1}}(i) = \frac{1}{3} \left(\left(1 - \frac{4\mu G_2(i-1)}{E_2(i-1)} \right) \left(\frac{m_2(i-1)}{m_1(i)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \times \right. \\ \left. \times \sigma_{xa2}(i-1) + 2\lambda_2(i-1) \left(1 - \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} \right) \right) \quad (5)$$

та

$$\sigma_{\text{сеп1}}(i) = K_2(i-1) \left(1 - \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} \right). \quad (6)$$

З рівнянь (5) та (6), шляхом виключення середнього напруження, отримано рівняння

$$E_2(i-1) \left(\frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} \right)^2 - (E_2(i-1) + \sigma_{xa2}(i-1)) \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} + \\ + 2(1-\mu) \sigma_{xa2}(i-1) = 0. \quad (7)$$

Із квадратного рівняння (7) можна знайти відношення мас $\frac{m_1(i)}{m_1(i-1)}$, яке дозволяє із залежності (4) визначити амплітудне напруження $\sigma_{xa1}(i)$. З балансу енергії

$$U = \frac{P_a^2}{m_1(i)\omega^2} = \frac{(\sigma_{xa1}(i))^2}{E_1(i)} \frac{m_1(i)}{\rho_j(i)},$$

ураховуючи (2) визначається новий модуль пружності $E_1(i)$. Знайдені на цьому пів циклі маса $m_1(i)$, напруження $\sigma_{xa1}(i)$ (4), модуль пружності $E_1(i)$ є початковими даними для наступного циклу. Перевіряється виконання нерівності (1), у разі виконання, руйнування відбулося і обчислення припиняються. У другому пів циклі $j=1$ при розтягові прийнято, що маса не змінюється, тобто $m_1(i) = m_2(i)$, а для щільності виконується рівність

$$\rho_1(i) = \rho_2(i-1). \quad (8)$$

Стан стрижня на цьому та попередньому пів циклах зв'язують рівності

$$1 = \frac{\rho_1(i)V_1(i)}{m_1(i)} = \frac{\rho_2(i)V_2(i)}{m_2(i)} = \frac{\rho_2(i)(V_1(i) - \Delta V_2(i))}{m_1(i)}. \quad (9)$$

З рівнянь (9) знаходимо залежність між напруженнями $\sigma_{xa2}(i)$ та $\sigma_{xa1}(i)$:

$$\sigma_{xa2}(i) = \left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa1}(i), \quad (10)$$

де $\rho_2(i)$ — невідома щільність.

Після серії перетворень, використовуючи рівняння (9), залежності середнього напруження $\sigma_{\text{сер}2}(i)$ від лінійного напруження $\sigma_{xa1}(i)$, модуля пружності $E_1(i)$, об'ємного модуля $K_1(i)$ та щільності цього та попереднього циклу, будуть

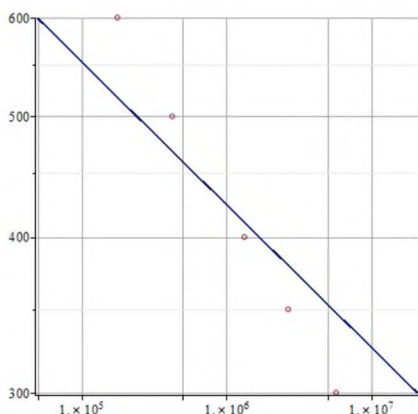
$$\sigma_{\text{сер}2}(i) = \frac{1}{3} \left(\left(1 - \frac{4\mu G_1(i)}{E_1(i)} \right) \left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa1}(i) + \right. \\ \left. + 2\lambda_1(i) \left(1 - \frac{\rho_2(i-1)}{\rho_2(i)} \right) \right) \quad (11)$$

та

$$\sigma_{\text{сер}2}(i) = K_1(i) \left(1 - \frac{\rho_2(i-1)}{\rho_2(i)} \right). \quad (12)$$

Після виключення з рівнянь (11), (12) середнього напруження отримуємо

$$2(1-\mu)\sigma_{xa1}(i) \left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \right)^2 - (E_1(i) + \sigma_{xa1}(i)) \frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} + E_1(i) = 0. \quad (13)$$



Із квадратного рівняння (13) можна знайти відношення щільностей $\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)}$, яке дозволяє із залежності (10) визначити амплітудне напруження $\sigma_{xa2}(i)$. Знайдені на цьому пів циклі щільність $\rho_2(i)$, напруження $\sigma_{xa2}(i)$ є початковими даними для наступного циклу. Як уже сказано, у наступному циклі перевіряється виконання нерівності (1) і, у разі її виконання, вважається, що руйнування стрижня відбулося і обчислення припиняються. Модель апробовано на прикладі розрахунку кривої втоми стрижня при різних рівнях прикладених циклічних навантажень з частотою 30 Гц. Стрижень має форму циліндричного прутика діаметром 7,5 мм, виготовлений з жаростійкого нікелевого сплаву ЭИ867 (Голуб & Погребняк, 1994). Фізико-механічні характеристики матеріалу стрижня наступні:

$$\sigma_B = 1200 \text{ МПа}, \mu = 0,294, E_1 = 2,28 \cdot 10^{11} \text{ МПа}, m_1 = 0,151367625 \text{ кг}, \\ \rho_1 = 8570 \text{ кг/м}^3, l_1 = 0,04 \text{ м}, F_1 = 0,00004415625 \text{ м}^2.$$

Розрахункові (пряма) та експериментальні (крапки) криві Велера приведені на рисунку. Вперше запропонований прогноз руйнування від втоми, при симетричному циклічному навантаженні, стрижня без його лабораторних випробовувань. Відмінності між результатами розрахунків та експериментальними даними цілком прийнятні для практики (Когаев, 1977).

Список літератури

- Голуб, В. П., & Погребняк, А. Д. (1994). *Высоко-температурное разрушение материалов при циклическом нагружении*. Киев: Наукова думка.
- Кобзар, Ю. М. (2019). Модель структурних змін та руйнування гладких циліндричних стрижнів при одновісному симетричному розтягу-стиску. *МНТК «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта»* (с. 46–49). Київ: НТУУ «КПІ».
<http://conf.mmi.kpi.ua/proc/article/view/173384>
- Кобзарь, Ю. М. (2015). К оценке усталостной долговечности гладких цилиндрических стержней при одноосном симметричном растяжении сжатии. *Авиационно-космическая техника и технология*, (9), 6–14.
- Когаев, В. П. (1977). *Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени*. (Б-ка расчетчика). Москва: Машиностроение.

Аналіз даних у фінансовій математиці методом кейсів

В. О. Колеснік

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

kolesnikvikky@gmail.com

У статті розглянуто стохастичні диференціальні моделі для дослідження історії еволюції фінансових процесів. Розглянуто метод обробки даних історії еволюції процесу для використання в подальшому прогнозуванні. Дана робота є витягом із магістерської дисертації автора на тему: «Застосування стохастичних диференціальних рівнянь у фінансовій математиці», Київ, 2019 р.

Ключові слова: стохастичні диференціальні рівняння, тренд, волатильність, метод кейсів.

З розвитком інформаційних технологій людство акумулює все більше інформації. Аналіз цих даних та їх використання є актуальною задачею. Підходи до цього аналізу можуть мати найрізноманітнішу природу. Ми користуватимемося простими моделями стохастичних диференціальних рівнянь, для яких визначимо параметри та сформуємо базу даних еволюції процесу у новому представленні.

Одними з найпростіших моделей є вінерівське блукання з перенесенням та логарифмічне блукання, яке є деформацією першого в деякому сенсі. Визначимо рівняння моделі та її параметри. Вінерівський процес з переносом може визначатись, як розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$dX_t = \mu dt + \sigma dw_t,$$

де $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ — коефіцієнти переносу (або тренду) та волатильності.

Важливість цієї моделі полягає в тому, що вона є наближенням будь-якого стохастичного диференціального рівняння за умови, що функції, які стоять перед диференціалами є достатньо гладкими і не ростуть дуже швидко. Однак, було б дуже грубо використовувати цю модель у економіці, оскільки показники фінансових активів сильно залежать від ціни активу. Тому можна також розглянути модель логарифмічного блукання з лінійною залежністю від ціни. Така модель справджує рівняння

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dw_t,$$

де $a \in \mathbb{R}, b > 0$ — переозначені коефіцієнти переносу та волатильності, щоб не множити поняття.

Це вже краще підходить для описання процесу росту ринку, але складніше в моделюванні та з часом накопичує похибку при використанні дискретних моделей моделювання.

Щоб змодельовати процес треба знайти деяку його дискретну форму, оскільки тільки таку розуміє машина. Ми можемо знайти цю форму в теорії побудови стохастичного інтеграла Іто. Справді, з теоретичної частини видно, що інтеграл Іто є граничним переходом від простих процесів. Дуже важливим є те, що на кожному інтервалі, де процес має постійне випадкове значення, випадкова величина вимірна відносно історії до цього інтервалу часу, тобто не діє на

випередження. Якщо звернутися до інтеграла Стратоновича ми бачимо іншу ситуацію, тож описаний надалі метод, який можна назвати методом Ойлера для стохастичних диференціальних рівнянь, не зважаючи на його простоту та природність, має бути обґрунтованим.

Наша задача полягає в моделюванні траєкторії процесу X_t , що справджує стохастичне диференціальне рівняння:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dw_t$$

Якщо задано початкову умову $X_0 = x_0$, то значення процесу $X_i = X_{t_i}$ в послідовні моменти часу $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ можуть бути обраховані за наступною ітераційною схемою:

$$X_{k+1} = X_k + a(t_k, X_k)\Delta t + b(t_k, X_k)\varepsilon_k\sqrt{\Delta t},$$

де ε_k — незалежні $N(0,1)$ випадкові величини. Якщо записувати розв’язок рівняння в інтегральному вигляді, то доданок $a(t_k, X_k)\Delta t$ є частиною звичайної інтегральної суми, а доданок $b(t_k, X_k)\varepsilon_k\sqrt{\Delta t}$ — частину інтегральної суми Іто, де приріст вінерівського процесу записано через статистичну еквівалентну гаусівську величину з дисперсією Δt . Усі ці доданки накопичуються на кожному кроці, змінюючи значення процесу. Як уже було сказано, основним для нас процесом буде вінерівський процес з переносом. Він вирізняється тим, що має постійні функції переносу та волатильності. Тому для нього ця схема навіть є статистично точною. Це також можна легко побачити з того, що розв’язок містить лінійне входження вінерівського процесу, а моделювати процес з незалежними приростами з відомим розподілом легко.

На цей момент ми маємо свободу обирати, як ми хочемо обробляти дані. Запропонувати свій метод, спираючись звичайно на математичні структури та інтерпретацію, яку ми їм надамо. Одним із цікавих інструментів для нас є накопичувальна характеристика випадкового процесу — накопичена дисперсія.

Накопиченою дисперсією нестационарного випадкового процесу з функцією волатильності $\sigma(t)$ називають функцію часу

$$G(t) = \int_0^t \sigma^2(u)du$$

Із властивостей інтеграла Іто ми бачимо, що це є фактично математичне сподівання стохастичного доданку в диференціальному рівнянні Іто. У роботі Ширяєва даний інтеграл використовується для проведення заміни часу таким чином, щоб волатильність процесу у новому часі була постійною. Це могло би спростити аналіз даних, але як тоді робити прогнози, знаходячись у заміненному часі, що залежить від внутрішніх параметрів системи. У роботі Ширяєва (Ширяев, 2016) такий час називається операційним. На прикладі економічної мови, наприклад, показнику індексу біржі, можна розуміти це так.

1. У періоди активного ринку на показник впливають дуже багато випадкових факторів і це спричиняє підвищення його волатильності, у нього є більше можливостей відреагувати на операції купівлі-продажу, бо просто таких операцій більше. Тобто в цей момент функція G зростає швидше.

2. Симетрична ситуація. Ринок не активний і функція G зростає повільніше.

Заміна часу, розглянута в Ширяев (2016) пропонує прискорювати та уповільнювати час використовуючи обернену до G функцію. Ми використовуватимемо накопичену дисперсію, як міру того, наскільки багато операцій пройшло на ринку, і відповідно приймати рішення, щодо необхідності переглянути параметри, якими зараз оцінюється ринок.

Маючи лише спостереження в дискретні моменти часу необхідно навчитися оцінювати цей параметр. У статті Нікітіна (Никитин, 2007) пропонується кілька підходів до оцінки цієї величини. Якщо наші дані не є сильно зашумленими, то ми можемо оцінювати накопичену дисперсію за допомогою емпіричної волатильності, або реальної волатильності (realized volatility). Тут волатильність використовується не в тому ж сенсі, що в нашій роботі. Для рівновіддалених спостережень маємо $X_i = X_{t_i}, t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = T$:

$$\hat{G}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$$

Головна ідея полягає в тому, щоб порівнювати різні часові інтервали саме за цим параметром, який ми інтерпретуємо, як накопичену активність ринку.

Нарешті, після проведеної підготовчої роботи, ми можемо означити підходи методу кейсів та їх використання. Алгоритм обробки даних полягає в наступних етапах.

0. За необхідності деформувати статистичні дані, щоб вони краще описувались моделлю блукання з перенесенням. Наприклад, можна використовувати зв'язок між логарифмічним і звичайним блуканням.

1. Виділити в еволюції процесу інтервали з рівнонакопиченими волатильностями, тобто розбити дані на кейси.

2. У кожному кейсі оцінити параметри переносу та волатильності та об'єднати кейси у групи за схожими параметрами.

3. Дослідити чергування параметрів кейсів у часі. Даний пункт потребує використання аналізу часових рядів, підрахунків кореляції між параметрами, або використання штучного інтелекту для встановлення закономірностей у чергуванні режимів процесу, тобто кейсів.

4. Моделювання процесу в обраному режимі, тобто використання кейсу, та відповідно прогнозування поведінки процесу.

Була проведена робота з використання можливостей сучасних комп'ютерних технологій до аналізу еволюції економічних процесів.

Список літератури

- Arnold, L. (1974). *Stochastic differential equations: Theory and applications*. London: John Willey and Sons.
- Øksendal, B. (2003). *Stochastic differential equations*. Springer Verlag.
- Гихман, И. И., & Скороход, А. В. (1982). *Стохастические дифференциальные уравнения*. Киев: Наукова думка.
- Липцер, Р.Ш., & Ширяев, А. Н. (1974). *Статистика случайных процессов*. Москва: Наука.
- Никитин, Я. Ю. (2007). Статистические оценки параметров диффузионных процессов и накопленной волатильности.
<https://gsom.spbu.ru/files/upload/niim/news/2007/230407/Nikitin.pdf>
- Степанов, С. С. (2012). *Стохастический мир*. <http://synset.com/pdf/ito.pdf>
- Ширяев, А. Н. (2016). *Основы стохастической финансовой математики*. (Т. 1. Факты, модели). Москва: МЦНМО.

Застосування В-сплайнів до розв'язання задачі про деформацію тонких конічних оболонок зі скісними контурами

М. М. Крюков¹, О. М. Шутовський², О. В. Ляшко¹, А. Ю. Андрейцев¹

¹Державний університет інфраструктури та технологій, Київ, Україна

²Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна

mmkryukov@ukr.net, olgaliashko@ukr.net, shutovsk@ukr.net, andr7765@i.ua

Дано розв'язання задачі про згин тонких колових конічних оболонок зі скісними контурами. Воно базується на параметризації поверхні конічної оболонки і зведенні двовимірної крайової задачі до одновимірної за допомогою методу сплайн-колокацій та розв'язання останньої стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

Ключові слова: деформація, тонкі колові конічні оболонки, скісні контури, параметризація поверхні, періодичні В-сплайни, метод сплайн-колокацій.

Широке застосування тонких оболонок у різноманітних областях техніки стимулює необхідність розроблення ефективних методів розв'язання різних класів задач для дослідження їх напружено-деформованого стану. До тепер найбільш повно досліджено напружено-деформований стан оболонок канонічних форм. У багатьох важливих випадках елементи різних конструкцій є тонкими циліндричними й конічними оболонками зі складною конфігурацією контурів, зокрема, замкнені оболонки вздовж напрямної зі скісними контурами. Разом з тим практично всі наближені аналітичні й чисельні методи розв'язання двовимірних задач теорії оболонок і пластин найпростіше реалізуються, коли контури оболонки або пластини збігаються з координатними лініями на поверхні. Як правило, розглядаються прямокутні області інтегрування систем диференціальних рівнянь із частинними похідними. Для подолання труднощів, зв'язаних зі складною областю інтегрування, можна використовувати параметризацію поверхні (Корнишин и др., 1989). У роботах Крюков та Яковенко (2004), Григоренко та ін. (2009), Крюков та ін. (2017) запропонована параметризація областей складних форм для пластин і колових і неколових циліндричних оболонок. Параметризація дозволяє перейти до такої системи координат, у якій область інтегрування двовимірної крайової задачі є прямокутником. Це приводить, з одного боку, до ускладнення вихідних диференціальних рівнянь, але, з іншого боку, дозволяє застосовувати апробовані ефективні методи. У розвиток цього пропонується використовувати параметризацію середньої поверхні тонкої колової конічної оболонки, замкненої вздовж напрямної зі скісними контурами.

У статті запропоновано підхід до дослідження деформування тонких колових конічних оболонок зі скісними контурами. Методика базується на переході до такої криволінійної системи координат, де область інтегрування є прямокутником, використанні методу сплайн-колокації вздовж напрямної і чисельному розв'язанні одновимірної крайової задачі високого порядку методом ортогональ-

ного прогонки вздовж твірної.

Розгляньмо ортотропну замкнену конічну оболонку колового поперечного перерізу зі скісними контурами під дією поверхневого або контурного навантаження. За вихідні візьмімо співвідношення теорії тонких ортотропних оболонок змінної товщини у класичній постановці (Григоренко & Василенко, 1981). Уважаємо, що в кожній точці оболонки є три взаємноортогональні площини пружної симетрії. Тоді розв'язувальна система рівнянь має вид:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial s} = B_0 \bar{Y} + B_1 \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \theta} + B_2 \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial \theta^2} + B_3 \frac{\partial^3 \bar{Y}}{\partial \theta^3} + B_4 \frac{\partial^4 \bar{Y}}{\partial \theta^4} + \bar{g}_0, \quad (1)$$

$$\bar{Y} = \{u, v, w, \vartheta_s, N_s, S, Q_s, M_s\},$$

$$B_1 = \{b_{i,j}^{(p)}(s, \theta)\} \quad (i, j = \overline{1,8}; \quad p = \overline{0,4}),$$

$$g_0 = \{g_1^{(0)}(s, \theta), \dots, g_8^{(0)}(s, \theta)\}.$$

Тут серединна поверхня оболонки віднесена до криволінійної ортогональної системи координат s, θ , де s — довжина дуги твірної, θ — центральний кут у поперечному перерізі; u, v, w, ϑ_s — переміщення вздовж твірної, напрямної і нормалі до серединної поверхні й кут повороту нормального елемента; N_s, S, Q_s, M_s — зусилля та момент. До цих рівнянь необхідно долучити по чотири крайові умови на кожному контурі відповідно до порядку системи.

Розгляньмо випадок, коли косі зрізи нахилені до поперечного перерізу оболонки під різними кутами α_1 і α_2 ($\alpha_1 \neq \alpha_2$). Твірна задана в параметричному вигляді $r = R + s \sin \beta$, $z = s \sin \beta$, де s — довжина твірної, R — радіус поперечного перерізу при $z = 0$ (рис. 1).

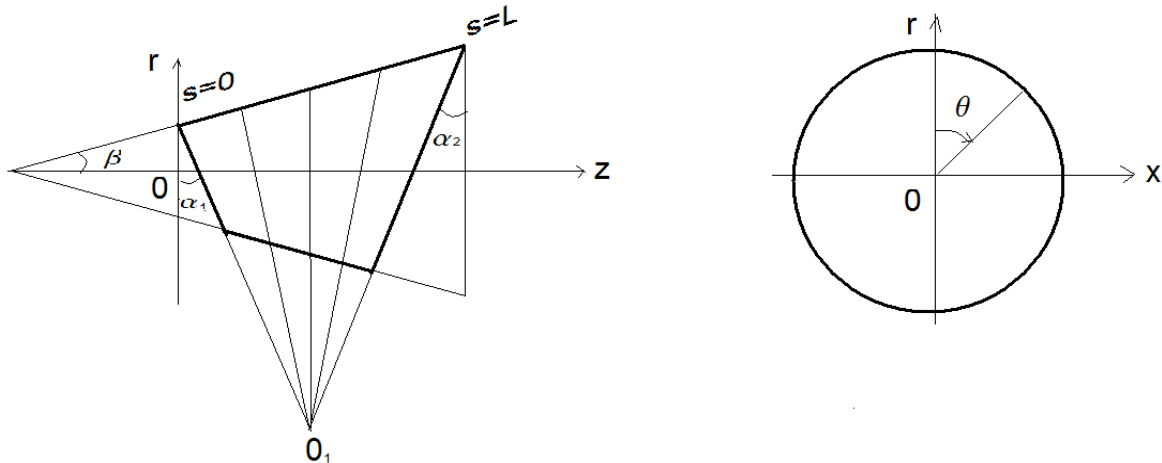


Рис. 1

Перейдімо в рівняннях (1) до нової криволінійної системи координат ξ, ζ , яка зв'язана з попередньою наступними співвідношеннями:

$$\xi = \frac{s - R(1 - \cos \theta) \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{1}{\cos \beta}}{L - R(1 - \cos \theta) \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{1}{\cos \beta} - (R + L \sin \beta)(1 - \cos \theta) \operatorname{tg} \alpha_2 \frac{1}{\cos \beta}}, \quad \zeta = \theta. \quad (2)$$

Координатними лініями в цій системі є лінії $\zeta = \text{const}$ — твірні конуса, які зміщені і стиснуті в напрямі осі Os , а також лінії $\xi = \text{const}$ — лінії перетину конічної поверхні й пучка площин, які перпендикулярні до площини rOs і проходять через точку O_1 .

У новій системі координат ξ, ζ двовимірною крайовою задачею вже розглядається у прямокутній області $\{0 \leq \xi \leq L; 0 \leq \zeta \leq 2\pi\}$.

Система рівнянь (1) у координатах ξ, ζ набуває вигляду:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \xi} = C_0 \bar{Y} + C_1 \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \zeta} + C_2 \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial \zeta^2} + C_3 \frac{\partial^3 \bar{Y}}{\partial \zeta^3} + C_4 \frac{\partial^4 \bar{Y}}{\partial \zeta^4} + \bar{f}_0 \quad (3)$$

$$(0 \leq \xi \leq L, 0 \leq \zeta \leq 2\pi).$$

Відповідно до діючих на оболонку контурних і поверхневих навантажень та умов закріплення її контурів $\xi = 0$ і $\xi = L$, необхідно перетворити відповідні граничні умови.

Розв'язок крайової задачі будемо шукати у вигляді (Григоренко & Крюков 1995):

$$\begin{aligned} &\{u(\xi, \zeta), v(\xi, \zeta), w(\xi, \zeta), \vartheta_s(\xi, \zeta), N_s(\xi, \zeta), S(\xi, \zeta), Q_s(\xi, \zeta), M_s(\xi, \zeta)\} = \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \{u_i(\xi), v_i(\xi), w_i(\xi), \vartheta_{si}(\xi), N_{xi}(\xi), \hat{S}_i(\xi), Q_{si}(\xi), M_{si}(\xi)\} \psi_i(\zeta), \end{aligned} \quad (4)$$

де $u_i(\xi), v_i(\xi), w_i(\xi), \vartheta_{si}(\xi), N_{xi}(\xi), \hat{S}_i(\xi), Q_{si}(\xi), M_{si}(\xi)$ ($i = 0, N-1$) — невідомі функції, а $\psi_i(\zeta)$ ($i = 0, N-1, N > 6$) — лінійні комбінації В-сплайнів 5-го степеня на рівномірній сітці точок $0 = \zeta_0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_N = 2\pi$, які задовольняють умови періодичності розв'язку (Крюков, 2010). У цьому випадку функції $\psi_i(\zeta)$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Psi_0(\zeta) &= 2B_5^0(\zeta); \Psi_1(\zeta) = 2B_5^1(\zeta); \Psi_2(\zeta) = 2B_5^2(\zeta); \Psi_i(\zeta) = B_5^i(\zeta) \\ (i &= 3, N-3); \Psi_{N-2}(\zeta) = 2B_5^{N-2}(\zeta); \Psi_{N-1}(\zeta) = 2B_5^{N-1}(\zeta). \end{aligned}$$

Застосуємо метод колокацій і отримаємо наступну крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь у формі Коші, яка містить $8N$ рівнянь першого порядку:

$$\frac{dZ(\xi)}{d\xi} = AZ(\xi) + F(\xi), \quad (5)$$

де

$$\vec{Z}^T(\xi) = \{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, v_0, v_1, \dots, v_{N-1}, w_0, w_1, \dots, w_{N-1}, \\ \vartheta_{s0}, \vartheta_{s1}, \dots, \vartheta_{sN-1}, Q_{s0}, Q_{s1}, \dots, Q_{sN-1}, M_{s0}, M_{sx}, \dots, M_{sN-1}\}.$$

Крайові умови на скісних контурах $\xi = \text{const}$ з урахуванням представлення розв'язку у вигляді (4) можна записати у вигляді

$$A_1 \bar{Z}(0) = \bar{a}_1, \quad A_2 \bar{Z}(L) = \bar{a}_2. \quad (6)$$

Крайова задача (5), (6) розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації (Григоренко & Василенко, 1981; Григоренко и др., 2002).

Після розв'язання задачі (5), (6) шукані функції підставляємо відповідно до розв'язків (4), а потім за їх допомогою знаходимо всі фактори напружено-деформованого стану розглядуваних оболонок.

Список літератури

- Григоренко, Я. М., & Василенко, А. Т. (1981). *Теория оболочек переменной жесткости: Т. 4. Методы расчета оболочек*. Киев: Наукова думка.
- Григоренко, Я. М., Крюков, Н. Н., & Холкина, Н. С. (2009). Решение задач о напряженно-деформированном состоянии цилиндрических оболочек с косыми срезами на основе сплайн-аппроксимации. *Прикл. механика*, 45(12), 116–123.
- Григоренко, Я. М., & Крюков, Н. Н. (1995). Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (обзор). *Прикл. механика*, 31(6), 3–27.
- Григоренко, Я. М., Шевченко, Ю. Н., Василенко, А. Т., Гузь, И. А., Коханенко, Ю. В., & Крюков, Н. Н. и др. (2002). *Механика композитов: Т. 11. Численные методы*. Киев: «А.С.К».
- Корнишин, М. С., Паймушин, В. Н., & Снигирев, В. Ф. (1989). *Вычислительная геометрия в задачах механики оболочек*. Москва: Наука.
- Крюков, М. М. (2009). Застосування В-сплайнів до розв'язання задач теорії пластин і оболонок. *У Зб. наук. праць ДЕТУТ. Серія «Транспортні системи і технології»*, (14), 106–112.
- Крюков, М. М. (2010). Застосування періодичних В-сплайнів до розв'язання задачі про згин пластин змінної товщини в двох координатних напрямках. *У Зб. наук. праць ДЕТУТ. Серія «Транспортні системи і технології»*, (17), 166–171.
- Крюков, М. М., & Яковенко, Н. С. (2004). Дослідження згину кільцевих та секторіальних пластин змінної товщини на основі сплайн-апроксимації. *У Зб. наук. праць КУЕТТ. Серія «Транспортні системи і технології»*, (6), 40–47.
- Крюков, М. М., Ляшко, О. В., Шутовський, О. М., & Андрейцев, А. Ю. (2017). Застосування В-сплайнів до розв'язання задачі про деформацію неколових циліндричних оболонок зі скісними контурами. *У Матеріалах Вісімнадцятої міжнародної наукової конф. імені академіка М. Кравчука* (Т. 1, с. 95–98). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського. <http://matan.kpi.ua/uk/kravchuk-conf2017.html>

Об одном алгоритме кластерного анализа сеточного типа

А. В. Кузьмин¹, Н. Н. Кузьмина²

¹Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,
Киев, Украина

²Национальный педагогический университет имени М. П. Драгоманова,
Киев, Украина

kuzmin_a_b@ukr.net

Рассматривается универсальный быстрый алгоритм кластерного анализа, сеточного типа, использующий параметр плотности точек в ячейке сетки и отношение соседства для объединения ячеек в кластеры. Алгоритм может использоваться для обработки больших массивов данных большой пространственной размерности, в том числе спутниковых снимков. Алгоритм не требует предварительного задания количества кластеров и данных о характере распределения точек исходного множества. Для работы алгоритма требуется задание шага сетки и связанного с ним параметра плотности отсекаемых ячеек.

Ключевые слова: алгоритм кластеризации, спутниковые космические снимки, сетка, ячейка, плотность точек, отношение соседства.

1. Введение. Процедуры кластеризации относятся к наиболее важным задачам интеллектуального анализа (Data Mining), которые предполагают разбиение некоторого множества элементов на условно непересекающиеся подмножества — кластеры на основе свойства однородности и схожести их характеристик.

Следует отметить, что в практических задачах кластеризации кластеры часто плохо делимы, имеют сложную форму, а области их значений пересекаются, что делает применение многих известных алгоритмов неэффективными.

Особенно важной сферой применения методов кластеризации является сегментация мультиспектральных спутниковых изображений (Кузьмін та ін., 2017; Sarmah & Bhattacharyya, 2012). В таких прикладных задачах данные характеризуются:

- большим объемом $10^5 - 10^7$ объектов;
- высокой пространственной размерностью данных и разнородностью их характеристик;
- отсутствием априорной информации о количестве кластеров и вероятностной их характеристике;
- наличием шума и выбросов в исходных данных.

Все это приводит к актуальности разработки эффективных методов кластерного анализа для решения прикладных задач такого типа.

Приемлемый алгоритм кластерного анализа для задач сегментации спутниковых изображений должен удовлетворять следующим требованиям (Пестунов & Синявский, 2012):

- низкая вычислительная сложность;
- возможность выделять кластеры различной структуры;
- выделение заранее неизвестного числа кластеров;

- возможность обрабатывать данные при наличии шума;
- простота параметров настройки алгоритма.

В данной работе рассматривается алгоритм кластеризации сеточного типа, использующий характеристики плотности ячейки сетки и принцип соседства ячеек с высокой плотностью. Алгоритм не требует начального задания исходного числа кластеров и использует в своей работе два настраиваемых и связанных между собой параметра:

- h — максимально допустимый шаг сетки, который определяет масштаб выделяемых кластеров;
- M_0 — плотность отсекаемых ячеек.

Метод, описанный ниже, может быть назван как *Метод объединения соседствующих ячеек* или *Method of Uniting Neighboring Cells — MUNC*.

Пусть в n -мерном евклидовом пространстве задано конечное множество векторов

$$\Omega = \{\vec{X}^{(i)} = x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}, i = \overline{1, N},$$

$$\overline{X}_{\max} = \left\{ \max_{i=1, N} x_{i,j}, j = \overline{1, n} \right\}, \overline{X}_{\min} = \left\{ \min_{i=1, N} x_{i,j}, j = \overline{1, n} \right\}.$$

Множество точек Ω принадлежит n -мерному параллелепипеду $\Pi = [x_{\min,1}, x_{\max,1}] \times \dots [x_{\min,n}, x_{\max,n}]$.

2. Построение сетки. Зададим параметр дискретизации сетки h и вычислим количество разбиений параллелепипеда Π в направлении каждой координаты:

$$m_j = \left\lfloor \frac{x_{\max,j} - x_{\min,j}}{h} \right\rfloor + 1, j = \overline{1, n},$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть числа. Таким образом, общее количество ячеек, покрываю-

щих параллелепипед Π , равно $M = \prod_{j=1}^n m_j$.

Уточним шаг сетки по каждой координате

$$h_j = \frac{x_{\max,j} - x_{\min,j}}{m_j}, j = \overline{1, n}.$$

Каждая ячейка сетки характеризуется своим целочисленным векторным индексом размерности n , $R = \{(r_1, r_2, \dots, r_n), 1 \leq r_i \leq m_i, i = \overline{1, n}\}$. Множество векторных индексов ячеек сетки R взаимно однозначно отображается на множество натуральных чисел: $R \Leftrightarrow Z = \{1, 2, \dots, M\}$.

3. Распределение точек множества Ω по ячейкам. Последовательно для каждой точки множества Ω вычисляем многомерный индекс ячейки, которой она принадлежит:

$$R^{(i)} = \left\{ r_j^i = \left\lfloor \frac{x_{i,j} - x_{\min,j}}{h_j} \right\rfloor + 1, j = \overline{1, n} \right\} \quad \forall i = \overline{1, N},$$

а также его одномерный образ $Z^{(i)}$.

В результате такого вычисления формируется двумерный список

$$\Omega_Z = \left\langle \left\langle Z^{(i)}, i \right\rangle, i = \overline{1, N} \right\rangle,$$

устанавливающий принадлежность каждой точки множества Ω одной из ячеек сетки. Очевидно, что значительная часть ячеек сетки при этом могут оставаться пустыми, а количество непустых ячеек определяется множеством:

$$Z_F = \left\{ Z^{(i_1)}, Z^{(i_2)}, \dots, Z^{(i_m)} \right\},$$

где каждый элемент повторяется лишь один раз, $|Z_F|$ — количество элементов этого множества. Как правило, $|Z_F| \ll M$.

Предварительно список Ω_Z сортируем по ключу первого элемента и формируем группирующий список следующей структуры:

$$\Omega_{ZG} = \left\langle Z^{(i)}, \Omega^{(i)}, N^{(i)}, \mu^{(i)}, i = \overline{1, |Z_F|} \right\rangle,$$

где $\Omega^{(i)}$ — множество номеров точек, принадлежащих ячейке $Z^{(i)}$, $N^{(i)}$ — множество соседей ячейки $Z^{(i)}$, $\mu^{(i)}$ — плотность ячейки (количество точек попавших в ячейку).

Список Ω_{ZG} сортируем по убыванию ключа $\mu^{(i)}$:

$$\Omega_{ZG} = \left\langle Z^{(s_i)}, \Omega^{(s_i)}, N^{(s_i)}, \mu^{(s_i)}, i = \overline{1, |Z_F|} \right\rangle,$$

где $\mu^{(s_i)} \geq \mu^{(s_{i+1})}$.

4. Объединение ячеек в кластеры. Объединение ячеек в кластеры однозначно определяет кластеризацию множества точек Ω . Поэтому достаточно объединить в кластеры одномерные индексы ячеек $Z^{(s_i)}, i = \overline{1, |Z_F|}$ с использованием отношения соседства $N^{(s_i)}$ и значений плотности $\mu^{(s_i)}$.

Индекс самой плотной ячейки $Z^{(s_1)}$ заносится в первый кластер $K_1 = \left\{ Z^{(s_1)} \right\}$.

Выбираем следующую ячейку с индексом $Z^{(s_2)}$, проверяем выполнение условия $K_1 \cap N^{(s_2)} = \emptyset$. При выполнении этого условия, ячейка $Z^{(s_2)}$ порождает новый кластер $K_2 = \left\{ Z^{(s_2)} \right\}$, в противном случае $K_1 = K_1 \cup \left\{ Z^{(s_1)} \right\}$.

Предположим, что совершено m шагов, в результате которых ячейки с индексами $Z^{(s_1)}, Z^{(s_2)}, \dots, Z^{(s_m)}$ отнесены к одному из кластеров $K_1, K_2, \dots, K_r$.

Определим порядок принадлежности ячейки с номером $Z^{(s_{m+1})}$ к некоторому кластеру.

Вычислим $K_i \cap N^{(s_{m+1})}$, $i = \overline{1, r}$ и проверим условие

$$\bigcup_{i=1}^r (K_i \cap N^{(s_{m+1})}) = \bigotimes.$$

При выполнении этого условия ячейка с индексом $Z^{(s_{m+1})}$ образует новый кластер $K_{r+1} = \{Z^{(s_{m+1})}\}$.

При нарушении этого условия существуют $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_l$ — номера уже существующих кластеров, для которых $K_{i_j} \cap N^{(s_{m+1})} \neq \bigotimes$, $j = \overline{1, l}$. В этом случае эти кластеры объединяются в один кластер K_{i_1} и присоединяют ячейку с номером $Z^{(s_{m+1})}$, т. е.

$$K_{i_1} = K_{i_1} \cup K_{i_2} \cup \dots \cup K_{i_l} \cup \{Z^{(s_{m+1})}\}.$$

Кластеры $K_{i_2}, K_{i_3}, \dots, K_{i_l}$, вошедшие в K_{i_1} удаляются, а нумерация остальных $r - r_l + 1$ кластеров сдвигается.

Процесс объединения ячеек в кластеры заканчивается на шаге m_0 , когда

$$\mu^{(m_0)} \leq M_0.$$

Оставшееся множество ячеек с малой плотностью точек, не отнесенных к одному из кластеров, можно оставить некластеризованными, воспринимая их как выбросы или шум.

Второй вариант завершения процедуры кластеризации можно выполнить методом классификации (обучения с учителем), где в качестве обучающих множеств использовать уже сформированные кластеры, например используя метод минимума расстояния или метод ближайших соседей.

5. Тестовая проверка работоспособности алгоритма. Тестирование алгоритма проводилась на искусственно сгенерированных точечных множествах в двумерном пространстве.

Множество 1 содержит 300000 точек, представляющих 7 нелинейно разделимых кластеров различного размера, формы и плотности. Смоделированная кластерная структура была искусственно зашумлена равномерно распределенным множеством из 2000 точек, покрывающих все пространство, занимаемое кластерами (рис. 1).

Процедура кластеризации проводилась для различных значений настраиваемых параметров h и M_0 . Ожидаемые и наилучшие результаты получены для значений $h \leq 0.7$ и $3 \leq M_0 \leq 10$ (рис. 2). В результате выполнения процедуры 299545 точек были кластеризованы.

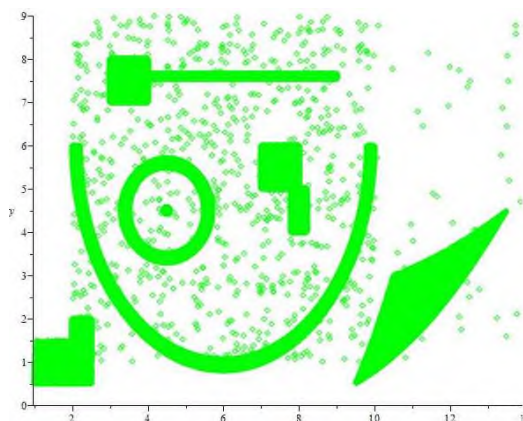


Рис. 1

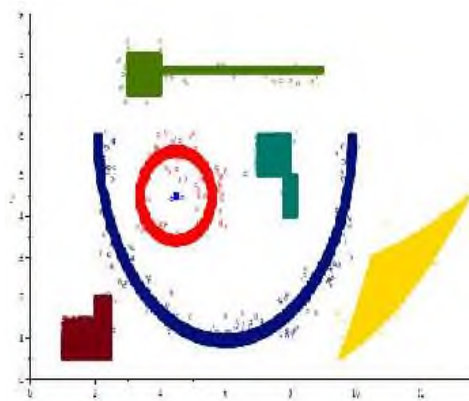


Рис.2

Множество 2 содержит 100000 точек, объединенных в 3 искусственно смоделированных кластера эллиптической формы, имеющих зоны перекрытия. Каждый кластер представляет собой множества точек на плоскости двумерного распределения Гаусса с различными векторами средних, дисперсий и нулевой ковариацией (рис. 3).

Учитывая, что кластеры имели зоны перекрытия, особенно значительную между вторым и третьим кластерами (синим и зеленым), алгоритм позволил четко выделить ядра каждого кластера, которые являются наиболее плотными их частями. Наилучшие результаты получены для значений настраиваемых параметров $h \approx 0.6$ и $M_0 \approx 25$. При этом к кластерам было отнесено около 85% всех точек множества (рис. 4).

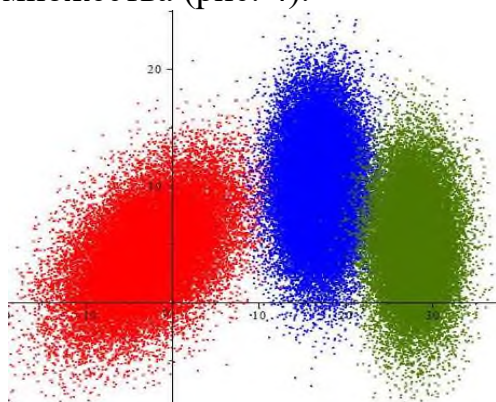


Рис. 3

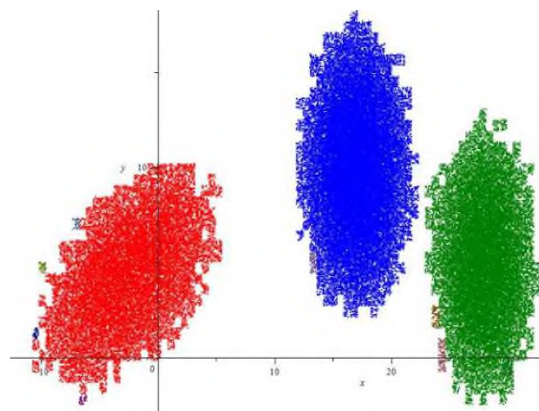


Рис. 4

Список литературы

- Sarmah, S., & Bhattacharyya, D. K. (2012). A grid-density based technique for finding clusters in satellite image. *Pattern Recognition Letters*, 33(5), 589–604. <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2011.11.021>
- Кузьмін, А. В., Греков, Л. Д., Петров, О. А., & Медведенко, О. М. (2017). Обчислювальні процедури тематичної обробки космічних знімків в інтересах моніторингу аграрних ресурсів (Частина 1). *Екологічна безпека та природокористування*, 21(1–2), 70–78. <https://doi.org/10.32347/2411-4049.2017.1>
- Пестунов, И. А., & Синявский, Ю. Н. (2012). Алгоритм кластеризации в задачах сегментации спутниковых изображений. *Вестник Кемеровского государственного университета*, (4.2), 110–125. <https://vestnik.kemsu.ru/jour/article/view/3587>

Математичні аспекти методу аналітичної ієрархії

Б. Р. Кушлик, О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

bodo_kush@hotmail.com, olgakushlyk64@gmail.com,

nvpoliniv@gmail.com

Описано використання методу аналітичної ієрархії (МАІ), класичних математичних обґрунтувань та програмних продуктів. Показано використання МАІ на прикладі, проведено ієрархічний синтез.

Ключові слова: теорія прийняття рішень, метод аналітичної ієрархії, парні порівняння, матриця, вектор локальних пріоритетів, власні числа, узгодженість, друкарська машина.

Метод аналітичної ієрархії (Кушлик & Кушлик-Дивульська, 2014) ґрунтується на принципах декомпозиції та синтезу, реалізація яких дає змогу зменшити кількість можливих помилок у процесі отримання інформації від експерта. За допомогою МАІ отримують ієрархічну структуру, що дозволяє уникнути складних порівнянь, замінивши їх попарними. Цей метод дає змогу перевіряти послідовність (несуперечливість) тверджень експерта.

У роботі Кушлик та ін. (2018) показано використання критеріїв Вальда, Лапласа, Севіджа, Гурвіца прийняття рішень в умовах повної невизначеності, причому матрицю інвестування розглянуто як матрицю втрат.

Метод аналітичної ієрархії (метод аналізу), розроблений відомим американським математиком Томасом Сааті, з успіхом використовується для розв'язання багатьох практичних задач, як економічного змісту, так і при плануванні виробничих процесів, їх удосконалення. Вибір пріоритетних рішень здійснюється за допомогою парних порівнянь, метод є безрозмірним і не виникає проблем при приведенні до однакових одиниць виміру.

Відома послідовність етапів МАІ (Катренко та ін., 2009):

- 1) формулювання проблеми, яку потрібно розв'язати;
- 2) постановка проблеми загалом — включення її (якщо це необхідно) до більшої системи;
- 3) ідентифікація критеріїв, за якими буде оцінено якість розв'язання проблеми;
- 4) побудова ієрархії спільних критеріїв, окремих критеріїв, властивостей альтернатив і самих альтернатив;
- 5) задання пріоритетів первинних критеріїв (сил) щодо їх впливу на генеральну мету;
- 6) чітке формулювання питання для попарних порівнянь у кожній матриці, орієнтація кожного питання (наприклад, вартість має зменшуватись, а ефективність збільшуватись);
- 7) задання пріоритетів часткових критеріїв щодо загальних; збір результатів попарних порівнянь;

8) опрацювання зібраних даних згідно з алгоритмом МАІ для обчислення глобальних пріоритетів і глобальної узгодженості результатів.

У МАІ порівнюють пари елементів задачі попарно щодо їх впливу (дії, ваги, інтенсивності) на спільну для них характеристику будують у разі ієрархічного подання проблем матрицю. Далі складають для порівняння відносної важливості критеріїв другий рівень відносно загальної мети першого рівня (кореня ієрархії), а потім будують такі ж самі матриці попарних порівнянь наступного рівня відносно елементів попереднього.

Попарні порівняння виконують у шкалі відношень за бальною системою: 1 — однакова важливість, 3 — помірна перевага, 5 — суттєва перевага, 7 — значна перевага, 9 — дуже велика перевага; 2, 4, 6, 8 — проміжні значення (використовують у перехідних ситуаціях), $\frac{1}{k}$ — обернені величини.

Локальні пріоритети отримують, визначивши множину головних власних векторів для кожної з обернено симетричних матриць ієрархії та нормалізувавши результат. Таким чином, обчислюють складові вектора за формулою

$$x_i = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}}}{\sum_{i=1}^n \left(\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}} \right)}, \quad (1)$$

При розробці СППР «Decisioner» використано модифікований метод, суть якого: при точному процесі визначення вектора локальних пріоритетів за формулою (1) задача зводиться до знаходження власного вектора матриці попарних порівнянь. Вектор локальних пріоритетів може бути обчислений спрощеним способом:

1) для кожного рядка матриці попарних порівнянь знаходять середнє геометричне її елементів (зручно за функцією СРГЕОМ(число1; число2;...), Microsoft Excel);

2) обчислюють суму всіх середніх геометричних (СУММ(число1; число2;...), Microsoft Excel, категорія «математичні функції»), кожне середнє геометричне ділять на їх суму (нормування).

Другим етапом є оцінка узгодженості оцінок експерта, де значення індексу узгодженості для випадкових матриць наведено нижче в табл.1.

Таблиця 1

Розмір матриці	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Випадкова узгодженість	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Розглянемо на прикладі використання методу МАІ.

Для порівняння та вибору найкращого варіанту придбання для поліграфічної галузі проаналізовано 3 друкарські машини офсетного способу друку В2

формату: Speedmaster CX 75, Speedmaster SX 74, Speedmaster XL 75, які позначені надалі, як *A*, *B* та *C*, відповідно.

У табл. 2 наведено характеристики друкарських машин для офсетного друку (B2 формату), за якими побудовано ієрархічну структуру задачі їх придбання.

Таблиця 2

Характеристики	Speedmaster CX 75	Speedmaster SX 74	Speedmaster XL 75
Швидкість друку л/год (Q1)	14000	15000	18000
Товщина матеріалу, мм (Q2)	0,5	0,6	0,8
Макс. формат листа, мм ² (Q3)	397500	392200	453750
Мін. формат листа, мм ² (Q4)	98000	78400	84000
Габарити, м ² (Q5)	66,8	55,7	70,2
Ціна, € (Q6)	150000	105000	550000

Побудовано таку матрицю попарних порівнянь (табл. 3) для рівня 2 — критеріїв.

Таблиця 3

Критерій	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
Q1	1	5	1/3	3	9	7
Q2	1/5	1	1/3	5	7	5
Q3	3	3	1	5	7	7
Q4	1/3	1/5	1/5	1	3	3
Q5	1/9	1/7	1/7	1/3	1	1/5
Q6	1/7	1/5	1/7	1/3	5	1

Після цього, порівнюючи попарно три друкарські машини (*A*, *B*, *C*) за кожним із критеріїв (рівень 3), отримано вісім матриць (для кожного із критеріїв) розміром 3×3 (за кількістю альтернатив до вибору). Матриці подано в табл. 4.

Таблиця 4

Q1	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	Q2	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	Q3	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>A</i>	1	1/3	1/7	<i>A</i>	1	1/3	1/7	<i>A</i>	1	3	1/5
<i>B</i>	3	1	1/5	<i>B</i>	3	1	1/4	<i>B</i>	1/3	1	1/7
<i>C</i>	7	5	1	<i>C</i>	7	4	1	<i>C</i>	5	7	1

Визначення узгодженості матриці критеріїв, дані яких наведено в табл. 5, показало, що максимальний формат листа є найважливішим у виборі друкарської машини, друге місце посідає швидкість руху, а третє — товщина матеріалу, яка безпосередньо пов'язується з форматом листа. У реальній практичній ситуації за результатами такого аналізу несуттєві критерії можна було б відкинути (габарити — критерій Q5, табл.2), але з ілюстративною метою залишено всі.

Таблиця 5

Критерій	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Вектор пріоритетів
Q1	1	5	1/3	3	9	7	0,2869
Q2	1/5	1	1/3	5	7	5	0,1657
Q3	3	3	1	5	7	7	0,3969
Q4	1/3	1/5	1/5	1	3	3	0,0773
Q5	1/9	1/7	1/7	1/3	1	1/5	0,0254
Q6	1/7	1/5	1/7	1/3	5	1	0,0479

Для оцінювання індексу узгодженості оцінок експерта, висновків для кожної із таблиць очислюють величини:

1) вектор власних чисел матриці

$$\lambda_i = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot V_j}{V_i}, \text{ де } V_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}};$$

2) максимальне власне число матриці

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i;$$

3) індекс узгодженості

$$I_n = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

та відношення узгодженості $I_0 = \frac{I_n}{M(I_n)}$, значення $M(I_n)$ — значення індексу

узгодженості для випадкових матриць (із таблиці). Якщо отримане значення I_0 менше 10% — рівень узгодженості можна вважати задовільним (інколи доводиться задовольнятися значенням 20%).

Отримано обчислені значення локальних пріоритетів для альтернатив, які подано нижче (табл. 6–8), причому наведені результати показують рівень узгодженості як задовільний.

Таблиця 6

Q1	A	B	C	Вектор пріоритетів	Q2	A	B	C	Вектор пріоритетів
A	1	1/3	1/7	0,0810	A	1	1/3	1/7	0,0841
B	3	1	1/5	0,1884	B	3	1	1/4	0,2109
C	7	5	1	0,7306	C	7	4	1	0,7049
			I _{max}	3,065				I _{max}	3,032
			I _n	0,0325				I _n	0,016
			I _o	0,056				I _o	0,0275

Таблиця 7

Q3	A	B	C	Вектор пріоритетів	Q4	A	B	C	Вектор пріоритетів
A	1	3	1/5	0,1884	A	1	1/5	1/3	0,1047
B	1/3	1	1/7	0,0810	B	5	1	3	0,6370
C	5	7	1	0,7306	C	3	1/3	1	0,2583
			Imax	3,065				Imax	3,039
			In	0,0325				In	0,0195
			Io	0,056				Io	0,0336

Таблиця 8

Q5	A	B	C	Вектор пріоритетів	Q6	A	B	C	Вектор пріоритетів
A	1	1/3	4	0,2797	A	1	1/3	6	0,2785
B	3	1	5	0,6267	B	3	1	9	0,6631
C	1/4	1/5	1	0,0936	C	1/6	1/9	1	0,0585
			Imax	3,086				Imax	3,054
			In	0,043				In	0,027
			Io	0,0741				Io	0,0465

Глобальні пріоритети обчислюють на наступному етапі МАІ — ієрархічного синтезу (Приймак, 2008). Із цією метою для виявлення складених або глобальних пріоритетів вибору друкарської машини виконують зворотній хід: із передостаннього рівня рухаємось до кореня ієрархії, збираючи вектори локальних пріоритетів у матриці та множачи їх на вектори локальних пріоритетів безпосередніх предків, доки не досягнемо кореня ієрархії. У наведеному прикладі ця процедура зводиться до збирання матриці з векторів локальних пріоритетів альтернатив за критеріями — матриця A та множення її на матрицю B — вектор-стовпець локальних пріоритетів. Зручно використовувати функцію Microsoft Excel МУМНОЖ(масив1;масив2), результатом дії якої є матриця з кількістю рядків масиву 1 та стовпців, як у масиві 2. Можна використати й математичну функцію СУММПРОИЗВ(масив1; масив2; масив3;...), масиви у якій повинні мати однаковий розмір та послідовно виконувати дії множення відповідного рядка на стовпець. Для наведеного прикладу отримано матрицю C вигляду

$$C = \begin{pmatrix} 0.143271 \\ 0.218066 \\ 0.641532 \end{pmatrix}.$$

Отже, найкращим варіантом є третя друкарська машина Speedmaster XL 75.

Список літератури

- Катренко, А. В., Пасічник, В. В., & Пасько, В. П. (2009). *Теорія прийняття рішень*. Київ: Видавнича група ВНУ.
- Кушлик, Б. Р., & Кушлик-Дивульська, О. І. (2014). *Основи теорії прийняття рішень*. Київ: НТУУ «КПІ». <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/2838>.
- Кушлик, Б. Р., Кушлик-Дивульська, О. І. & Поліщук, Н. В. (2018). Задача прийняття рішення з мінімізацією можливих втрат. У *Матеріалах Сьомої Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 85–87). Вінниця: Видавець ФОП Кушнір Ю. В. <http://matan.kpi.ua/public/files/2018/mvstu7/MCTY7.pdf>
- Приймак, В. М. (2008). *Прийняття управлінських рішень*. Київ: Атіка.

Проблеми викладання у вищій школі в умовах постнекласичної науки

С. М. Лапач

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

lapach@ukr.net

Розглядаються проблеми викладання у вищій школі пов'язані з особливостями постнекласичного етапу розвитку науки і її парадигмою. Особливу увагу приділяється конфліктам, які викликані невідповідністю змісту, форми та методології викладання сучасній науковій парадигмі і стану суспільства.

Ключові слова: класична наука, постнекласична наука, вища освіта.

Наш час — це час кризи класичної і становлення постнекласичної науки (Грушевицкая & Садохин, б. д.). Перехід науки до нових станів викликаний ускладненням досліджуваних предметів і явищ, підвищеними вимогами до точності опису, а також неможливістю спрощення опису без вихолощення сутності досліджуваного явища. Розглянемо деякі особливості постнекласичної науки, які мають вплив на освіту і формування світогляду майбутніх (і сучасних) науковців (Алиева, 2008; Шор & Архипова, 2013). До таких особливостей можна віднести наступні: глобальність — зв'язок усього з усім: окремих наук, окремих сфер людської діяльності; розгляд не ізольованих об'єктів і систем, а як частину деяких загальних процесів; місце людини — спостерігач/дослідник (прилади, методика) є частиною досліджуваного світу, його вплив на експеримент і результати; дослідник формує образ дійсності із привнесенням суб'єктивності; динаміка й синергізм — розглядання процесів у динаміці, еволюційність, синергетика, самоорганізація, нелінійність; недетермінізм — випадковість і хаотичність є невід'ємними елементами досліджуваного світу; «людино розмірність» — об'єктом дослідження все більше виступають системи, де людина є невід'ємною частиною системи: у медицині екології, транспорті, генетична інженерія, будь які інформаційні системи, у яких людина є елементом; міждисциплінарність — об'єкти дослідження є складними системами, які вимагають відмови від вузькодисциплінарності для можливості їх розуміння і опису; зміна логічних основ — відмова від класичної (аристотелівської) логіки, використання багатозначних, ймовірнісної, нечіткої логік; філософія — повернення філософії до активної участі в наукових процесах у зв'язку з необхідністю зрозуміти процеси, які відбуваються з точки зору теорії пізнання і ролі науки в суспільстві; втрата ідеалу абсолютної достовірності — відмова від класичного ідеалу точного строгого в нескінченно чисельно деталізованого знання; перехід до відносно істинного, яке постійно оновлюється і змінюється знання, знання про як сукупності теорій, які частково перетинаються, знання як деякий переріз об'єктивної реальності, придатне для певних умов; віртуалізація математичного моделювання — розвиток математичного моделювання і теорій з високим рівнем абстракції привів до ситуації, коли значна кількість проводиться не з реальними си-

стемами, а з їх математичними моделями. Розвиток науки, техніки та технологій зробив можливим життя звичайної людини в повному незнанні про те, як облаштований навколишній світ. Додатково це призвело до зникнення мотивації для навчання. Можемо відзначити ряд суперечностей, як пов'язані з особливостями сучасної наукової кризи і впливають на якість навчання:

- суперечність між тим, що вчать (класична наука) і тим, що на лезі застосування;

- предмети сприймаються студентами як деякі окремі, практично не зв'язані елементи навчання, які потрібно з мінімальними затратами здати і забути, а наука як деяка збірка фактів, правил і прийомів. Виконання вимог встановлення зв'язків між предметами зупиняється (за деякими винятками) на записах у документах (робочі і навчальні програми). Тобто, системність відсутня. Відсутнє розуміння єдності світу;

- кожен предмет має вигляд (з точки зору студента) набору фактів і методів розрахунку. Відсутнє розуміння науки як системи знань і розвитку науки розуміння місця науки в суспільстві і проблем з розвитком і впровадженням наукових знань;

- невідповідність методології викладання сучасному стану інформаційної насиченості суспільства і психології студентів;

- неврахування особливостей використання обчислювальних методів і математичних моделей з використанням комп'ютерної техніки.

Загалом освіта орієнтована на викладання дисциплін класичної науки, що викликає відчуття застарілості й навіть непотрібності навчання в частини студентів. Тому завдання виховання наукового світогляду й розуміння що таке наука і її місце в суспільстві університетами не виконується. На ці невідповідності накладаються проблеми співпраці студент-викладач (частково перетинаючись зі вказаними вище суперечностями).

До них належать наступні:

- невідповідність освіти, яку дає середня школа вимогам часу. Справа зовсім не достатньому рівні знань з окремих предметів, особливо математики й мови, що найчастіше згадують у дискусіях. Справа в тому, що вчорашні школярі, а нині студенти не вміють вчитись і працювати з абстрактними поняттями;

- відсутність мотивації у студентів. Мотиви побоювання і відповідальності практично відсутні. Зрозуміти, що це корисно, неможливо за браком знань про навколишнє життя і під пресингом суспільства про непотрібність знань для особистого успіху. Зацікавити людину, якщо предмет лежить за межами його інтересів дуже важко і ненадовго. Щось може бути «круто», «прикольно», «несподівано», але при відсутності відчуття загальної потреби в цьому через тиждень уже стирається з пам'яті;

- культурний конфлікт викладач-студент, викликаний відсутністю спільної культури нинішнього покоління студентів не тільки з тими викладачами, яким за 50, але й з тими, яким 30–40 років;

– шоу/кліповість сприйняття: зосередженість продовжувана відсутня, потрібно шоу, але шоу не запам'ятовується — бо звичка в його неважливості;
– навчальний колектив і взаємодопомога загалом майже відсутні порівняно зі станом 15–20 років тому;

– бажання обмежити себе в зусиллях по навчанню і зведення його до повсякденної утилітарності: для складання іспиту, захисту курсової роботи тощо, все, що більше — «мені не потрібно».

Ми маємо справу із ситуацією, подібною до переходу до індустріальної фази розвитку цивілізації. І відповідно це потягне за собою системні зміни в усіх сферах, які стосуються освіти: у суспільстві, державній політиці, університетах тощо. Відносно невідповідності освіти сучасному суспільству (Тоффлер, 2002; Бодріяр, 2004) і необхідності пошуку нової мети існування університетів у сучасному суспільстві (Університет как центр..., 2004) існує досить великий пласт літератури. Ми ж зосередимося тільки на найнижчому рівні, де безпосередньо відбувається процес навчання, хоча зрозуміло, що без змін на всіх вище вказаних рівнях принципово значущого ефекту не доводиться чекати. Зауважимо, що є потреба певних змін і у школі, яка закладає базу для успішного навчання в університеті. Там потрібне перенесення акценту з отримання суми знань на вміння вчитися, працювати з інформацією. Розглянемо ті невідповідності сучасному стану, які можливо корегувати на рівні університету. Вони стосуються, по-перше, складу дисциплін, по-друге, зв'язку дисциплін між собою і, по-третє, методикою викладання.

До ключових (не спеціальних) дисциплін, які забезпечують відповідний рівень сучасної технічної освіти, який би відповідав постнекласичній науці, слід віднести наступні:

- 1) блок власне математичних дисциплін;
- 2) філософію;
- 3) блок дисциплін теорії систем і системного аналізу;
- 4) дисципліни математичного і комп'ютерного моделювання;
- 5) дисципліни методології проведення наукових досліджень (основи наукових дослідження, теорія планування експериментів);
- 6) основи науково-технічної творчості.

При інтенсивній математизації науки, включаючи гуманітарні складові, і фактичному проникненню математизації глибоко в побут через різного роду пристрої, рівень опанування математичними знаннями за останні два десятиліття значно знизився. До основних проблем з викладанням математики належать її невідповідність за змістом як вимогам спеціальності, так і вимогам сучасної науки. Необхідно при викладанні математики обов'язково встановлювати зв'язок з реальністю (Арнольд, 2010; Пуанкаре, 1990). Крім того, для технічних спеціальностей слід обмежитись необхідним мінімумом, який різний як за складу, так і за обсягом для різних спеціальностей (Крылов, 2003). Структура повинна краще відповідати сучасним вимогам, а не вимогам сторічної давнини (Лапач, 2013). Але, крім забезпечення бази для всієї сучасної науки, вивчення

математики є основою для наукового способу мислення. Оскільки будь яка формальна процедура є тільки переходом від неформальної постановки задачі до неформальних висновків (Лем, 2012), то критичним є уміння займатись якраз цими процедурами, які можливо засвоїти якраз під час вивчення математики (Елленберг, 2018; Оклі, 2019). Особливо це необхідно для попередження неприємностей при невмілому використанні математичних знань (О'Нил, 2018). Ситуація з філософією ще гірша: вона сприймається студентами як абсолютно непотрібна їм наука. Не зупиняючись на цьому питанні, вкажемо на критичну необхідність її для сучасної фази розвитку науки (Гьосле, 2003; Мелков, 2014; Поппер, 2001, 2004). Слід зауважити, що необхідно перенести центр викладання ваги на теорію пізнання та розв'язання нині існуючих проблем у науці та суспільстві. Інакше ніякого зв'язку з іншими дисциплінами не відбудеться і філософія далі залишиться в очах студентів непотрібним предметом.

У цілому можна сказати, що системність, як у вигляді окремих курсів, так і у зв'язку між курсами знаходиться поза увагою в університеті. Давно встановлено, що для забезпечення взаємозв'язку потрібно спеціалізуватись за проблемою (Вернадский, 2003), що змушує встановлювати зв'язок між різними науками. Звернувши увагу на величезну кількість популярної зарубіжної літератури для навчання застосування елементів теорії систем і системного аналізу на практиці (О'Коннор & Макдермотт, 2006, 2018; Медоуз, 2018; Бут, 2014), побачимо прірву відставання. З моделюванням, на перший погляд, здається все в порядку: багато різноманітних курсів. Разом з тим існує маса прогалин, які зводять усе нанівець. А саме: як правило відсутні сучасні методи моделювання (на кшталт нейронних мереж, мурашиного алгоритму тощо), відірваність від реальності (мовчання про адекватність моделей, умов застосування методів, небезпеки й особливості використання певних алгоритмів), не говориться про особливості застосування комп'ютерного моделювання (стійкість і точність обчислень, верифікація, тестування тощо), неоднозначність (можливість множини взаємозамінних моделей). Що стосується курсів за п. 5, то вони є, але, як правило, мають недостатній зв'язок з реальним навчанням за спеціальністю у зв'язку методичними й адміністративними неузгодженостями.

Повністю зник курс «Основи науково-технічної творчості». Не вказуючи про необхідність такого курсу для вміння розв'язувати творчі задачі, укажімо на тенденцію: перевидання класичної літератури (Альтшуллер, 2018), включення елементів творчих підходів в роботи по системах (О'Коннор & Макдермотт, 2006, 2018) і по прийняттю рішень (Саєд, 2018; *Про прийняття розумних рішень...*, 2019).

Як один з варіантів забезпечення міждисциплінарності й системності було б запровадження курсових робіт не як роботи за певним курсом, а як роботи за весь курс, у якій має бути застосовано більшість дисциплін. Причому основне завдання має бути в рамках спеціальності студента. Захист роботи на комісії, як, до речі, і було під час навчання автора. Звичайно, підготовка й організація таких робіт, складна і не швидка справа, але це могло б вирішити цілий ряд проблем.

Список літератури

- Алиева, Н. З. (2008). *Постнеклассическое естественнонаучное образование: концептуальные и философские основания*. Москва: Академия естествознания.
- Альтшуллер, Г. (2018). *Найти идею. Введение в ТРИЗ — теорию решения изобретательских задач* (11-е изд.). Москва: Альпина Паблишер.
- Арнольд, В. И. (2010). *Математическое понимание природы: Очерки удивительных физических явлений и их понимания математиками (с рисунками автора)* (2-е изд.). Москва: МЦНМО.
- Бодріяр, Ж. (2004). *Симулякри і симуляція*. Київ: Основи.
- Бут, С. Л. (2014). *Игры для развития системного мышления*. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний.
- Вернадский, В. И. (2003). *Биосфера и ноосфера*. Москва: Айрис-пресс.
- Грушевицкая, Т., & Садохин, А. (б. д.). *Концепции современного естествознания*. https://www.gumer.info/bibliotek_Buks/Science/grushev/07.php.
- Гьосле, В. (2003). *Практична філософія у сучасному світі*. Київ: Лібра.
- Елленберг, Д. (2018). *Як ніколи не помилятися. Сила математичного мислення*. (2-ге вид). Київ. Наш формат.
- Крылов, А.Н. (2003). *Мои воспоминания* (9-е изд.). Санкт-Петербург: Политехника.
- Лапач, С. М. (2013). *Конфлікт класичного та модернового у викладанні математики в вищій школі. У Матеріалах Другої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 178–180). Київ: НТУУ «КПІ».
- Лем, С. (2012). *Сумма технологий*. Москва: АСТ-Полиграф.
- Медоуз, Д. (2018). *Азбука системного мышления*. Москва: Манн, Иванов и Фарбер.
- Мелков, Ю. А. (2014). *Человекомерность постнеклассической науки*. Киев: Издательство ПАРАПАН.
- О'Коннор, Д., & Макдермотт, И. (2006). *Искусство системного мышления: Необходимые знания о системах и творческом подходе к решению проблем*. Москва: Альпина Бизнес Букс.
- О'Коннор, Д., & Макдермотт, И. (2018). *Системне мислення. Пошук неординарних творчих рішень*. Київ: Наш формат.
- О'Нил, К. (2018). *Убийственные большие данные: Как математика превратилась в оружие массового поражения*. Москва: Издательство АСТ.
- Оклі, Б. (2019). *Навчитися вчитися. Як запустити свій мозок на повну* (2-ге вид). Київ: Наш формат.
- Поппер, К. (2001). *Нормальная наука и опасности, связанные с ней. В Т. Кун, Структура научных революций* (с. 525–538). Москва: Издательство АСТ.
- Поппер, К. (2004). *Предположения и опровержения: Рост научного знания*. Москва: АСТ.
- Про прийняття розумних рішень. 10 найкращих статей із журналу Harvard Business review*. (2019). Київ: Вид. група КМ-БУКС.
- Пуанкаре, А. (1990). *О науке* (2-е изд.). Москва: Наука.
- Саєд, М. (2018). *Мислення за принципом «чорної скриньки»: як звести до мінімуму ризик невдач*. Київ: Вид. група КМ-БУКС.
- Тоффлер, Э. (2002). *Третья волна*. Москва: Издательство АСТ.
- Университет как центр культуропорождающего образования*. (2004). Минск: БГУ.
- Шор, Ю.М., & Архипова, О. В. (2013). *Идея образования в контексте постнеклассической парадигмы. UNIVERSUM: Вестник Герценовского университета*, (4), 3–12. https://lib.herzen.spb.ru/media/magazines/contents/2/2013_4/shor_4_13_3_12.pdf

Зображення параметрів кола змінної напруги на комплексній площині

К. Б. Медведєв, Г. Д. Нефьодова, А. Ю. Манжелій

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ

kostyamedvedev01@gmail.com, g.nefyodova@gmail.com,

afiksus@gmail.com

Відомо, що для вирішення деяких типових задач електротехніки застосовують комплексні числа. У колах змінного струму напруга і сила струму розглядають як вектори, які доцільно виразити за допомогою комплексного числа в показниковій формі. Робота з миттєвими значеннями викликає багато незручностей та вимагає обчислень непростих інтегралів, тоді, як за допомогою комплексних чисел усі обчислення зводяться до простіших арифметичних обчислень.

Ключові слова: формула Ойлера, електротехніка, комплексна площина, розрахунок кіл змінного струму, напруга.

Подання електричних струмів (напруг, ЕРС) у вигляді синусоїдальних функцій є досить простим, але операції з ними трудомісткі, а їх графічні зображення є недостатньо точними. Розрахунок кіл змінного струму значно полегшується, якщо гармонічні струми, напруги, ЕРС та інші величини зображати у вигляді векторів або комплексних чисел. Як відомо, комплексне число можна записати в різних формах:

- 1) алгебрична форма: $\dot{A} = A' + jA''$;
- 2) тригонометрична форма: $\dot{A} = A \cos \alpha + jA \sin \alpha$;
- 3) показникова форма: $\dot{A} = A e^{j\alpha}$;
- 4) вектором $\dot{A}$ на комплексній площині,

де уявна одиниця визначається рівністю $j^2 = -1$, $A' = \operatorname{Re} \dot{A} = A \cos \alpha$ — дійсна частина комплексного числа (проекція вектора $\dot{A}$ на дійсну вісь), $A'' = \operatorname{Im} \dot{A} = A \sin \alpha$ — уявна частина комплексного числа (проекція вектора $\dot{A}$ на уявну вісь)

Широко використовують також формулу Ойлера:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

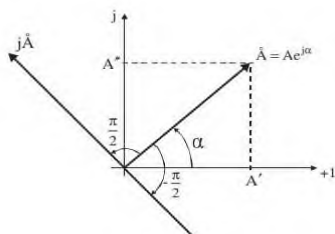


Рис.1. Площина комплексних чисел

В електротехніці для розрахунків кіл синусоїдного струму використовують основні математичні операції: додавання, віднімання, множення та ділення. Операції додавання та віднімання найбільш зручно проводити, застосовуючи алгебричну форму запису комплексних чисел, при множенні та діленні — показникову форму.

Нехай деяка величина струму i змінюється за гармонічним законом:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

Візьмімо прямокутну систему координат MON (рис. 2) і розташуємо в ній під кутом ψ відносно горизонтальної осі OM вектор $\vec{I}_m$, довжина якого в заданому масштабі дорівнює амплітуді I_m . Додатні кути ψ відкладаються проти напрямку руху годинникової стрілки, а від'ємні — у напрямку руху годинникової стрілки.

Якщо вектор $\vec{I}_m$ обертається навколо точки O проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω , то в момент часу t він утворює з віссю OM кут $\omega t + \psi$. Проекція цього вектора на вісь NN' дорівнює в заданому масштабі миттєвому значенню величини i , що розглядається.

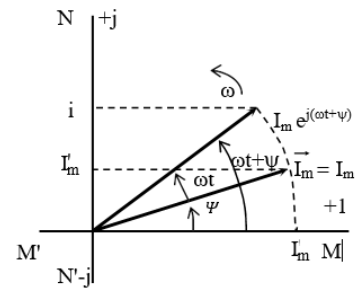


Рис. 2. Представлення гармонічної функції струму в часі у вигляді вектора

Аналогічний результат можна отримати й для нерухомого вектора $\vec{I}_m$, якщо обертати, починаючи з моменту $t = 0$, вісь NN' за годинниковою стрілкою з кутовою швидкістю ω . У цьому випадку вісь NN' називають *лінією часу*.

Таким чином, між миттєвим значенням i та вектором $\vec{I}_m$ існує однозначний зв'язок. На основі цього вектор $\vec{I}_m$ називають вектором, що зображує гармонічну функцію часу, або вектором гармонічної величини i . При цьому мають на увазі вектори напруги, ЕРС, струму, магнітного потоку та інші. Сукупність векторів, що зображують розглянуті гармонічні функції часу, називають *векторною діаграмою*.

Якщо вважати осі MM' та NN' осями дійсних та уявних величин на комплексній площині, то вектор $\vec{I}_m$ буде відповідати комплексному числу I_m , модуль якого дорівнює амплітуді гармонічної величини i , а аргумент — її початковій фазі ψ . Це комплексне число називають *комплексною амплітудою* гармонічної величини i і може бути записано в показниковій, тригонометричній та алгебричній формах.

Для однорідності позначень прийнято на комплексній площині зображати вектори, як синусоїдально змінювані у часі величини для моменту часу $\omega t = 0$. Комплексну величину струму, згідно з формулою Ойлера, можна записати у тригонометричній формі:

$$I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

Якщо порівняти останній вираз із гармонічним законом зміни струму, то видно, що:

$$i(t) = \text{Im} \left(I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} \right) = \text{Im} (\dot{I}_m e^{j\omega t}).$$

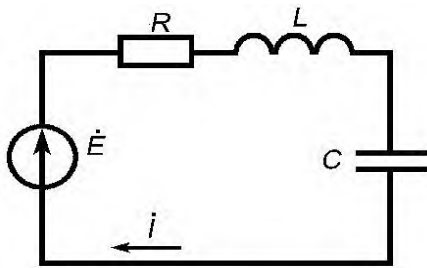
Тобто миттєве значення синусоїдального струму дорівнює проекції на уявну вісь обертового вектора, який є зображенням розглянутого комплексного числа.

Отже, синусоїдальному струму (оригіналу) може бути поставлене у відповідність комплексне число (зображення), яке відповідає виразу:

$\dot{I}_m = I_m e^{j\omega t}$ — це комплексна амплітуда або комплекс струму.

Як приклад, розглянемо задачу, яка доволі часто трапляється в лабораторних та інших завданнях з теорії електричних кіл, де доцільно використовувати відповідний спосіб розрахунку.

У наведеній схемі для миттєвих значень напруг при послідовному з'єднанні елементів правдиві наступні рівності:



$$U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) = e(t);$$

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e(t).$$

У комплексній формі рівняння для напруг можна переписати так:

$$I_m R + I_m j\omega L + I_m \left(\frac{-j}{\omega C} \right) = E_m,$$

$$I_m \left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right) = E_m,$$

$$I_m = \frac{E_m}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}} = \frac{E_m}{Z}$$

Підготовка фахівців на факультеті електроніки КПІ імені Ігоря Сікорського базується на вивченні циклу загальноінженерних дисциплін, включаючи предмет «Теорія електричних кіл». Розгляньмо задачу з теми «Основи символічного методу розрахунку кіл синусоїдального струму»:

Комплексні діючі значення напруги (U) та струму (I) дорівнюють відповідно: $U = 220e^{j\frac{\pi}{2}}$ В та $I = 2e^{j\frac{\pi}{3}}$ А. Частота $f = 100$ Гц. Знайти: кутову частоту ω , комплексні амплітудні значення напруги (U_m) та струму (I_m), записати вирази для миттєвих значень напруги ($u(t)$) та струму ($i(t)$). Побудувати миттєву діаграму схеми.

Розв'язання.

$$1. \omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 100 = 628 \text{ рад}; \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ с.}$$

$$2. U_m = 220\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{2}} = 310e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ В}; \quad I_m = 2\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{3}} = 2,28e^{j\frac{\pi}{3}} \text{ А.}$$

3. $u(t) = 310 \sin\left(628t + \frac{\pi}{2}\right)$ В; $i(t) = 2,28 \sin\left(628t + \frac{\pi}{3}\right)$ А.

4. Побудуємо діаграми (рис. 3).

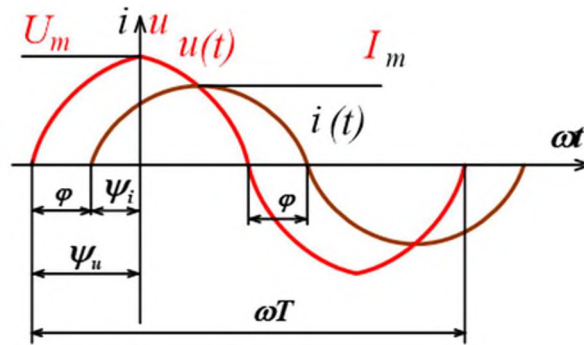


Рис. 3. Миттєва діаграма

Отже, задачі розрахунку кіл із джерелом змінної напруги полегшуються при переході від миттєвих значень до комплексних. Саме на комплексній площині ґрунтуються всі основні методи розрахунку електричних кіл синусоїдальної напруги, що дає змогу відобразити параметри на комплексній площині графічно.

Список літератури

- Бессонов, Л. А. (2016). *Теоретические основы электротехники. Электрические цепи* (12-е вид.). Москва: Высшая школа.
- Колот, О. В., Коновалов, В. А., Шелаєв, І. П., Марилов, М. Г., & Кірієнко, Т. В. (2012). *Електричні кола*. Краматорськ: Донбаська державна машинобудівна академія.
- Розводюк, М. П., & Блінкін, Є. Я. (2008). *Електротехніка*. Вінниця: Вінницький національний технічний університет. <http://ir.lib.vntu.edu.ua/handle/123456789/5021>

Математичне моделювання взаємодії пружного півпростору і жорсткої основи за появи міжконтактного зазору по кільцевій або круговій області під дією стоків тепла

М. М. Микитин, Р. М. Мартиняк, Х. І. Середницька

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів, Україна
labmtd@iapmm.lviv.ua*

Запропоновано математичну модель контактної взаємодії пружного теплопровідного півпростору та жорсткої термоізолюваної основи за появи між ними локального розшарування по круговій або кільцевій області під дією розподілених по колу стоків тепла. Розглянуті осесиметричні контактні задачі термопружності зведено до інтегрального рівняння типу Абеля та сингулярного інтегрального рівняння відносно висоти утвореного зазору, які відповідно розв'язано аналітично та числово. Проаналізовано залежності форми зазору та нормальних контактних напружень від відстані між стоком тепла й поверхнею півпростору та від інтенсивності стоку тепла.

Ключові слова: пружний півпростір, жорстка основа, коловий стік тепла, кругове і кільцеве розшарування.

При взаємодії тіл з узгодженими поверхнями між ними можуть виникати зазори під дією силових і теплових чинників, локалізованих у підповерхневих областях. У праці Monastyrskyy та Mykytyn (2011) зроблено огляд досліджень розшарувань між тілами, зумовленими механічними навантаженнями. У Comninou та Dundurs (1980), Krishtafovich та Martynyak (1998, 1999), Martynyak та Chumak (2009) вивчено термомеханічне порушення контакту півпросторів, зумовлене локальними ділянками з термоопором або термоізоляцією на поверхні розмежування. У Мартиняк (1998) вивчено розшарування на лінії контакту двох півплощин, зумовлене підповерхневим круговим включенням в одній з них при нагріванні спряжених тіл.

Тут досліджено безфрикційну взаємодію пружного півпростору та жорсткої термоізолюваної основи, що взаємно притискаються за появи між ними кругового або кільцевого зазору під дією в півпросторі на відстані d від його поверхні по колу радіуса R стоку тепла сталої інтенсивності. Задача сформульована в рамках лінійної теорії термопружності.

Спочатку побудовано аналітичний розв'язок задачі термопружності для півпростору за повного контакту з основою. Аналіз даного розв'язку показав, що стік тепла, розподілений по колу при певному співвідношенні параметрів може спричинити кільцеве або кругове відшарування.

З появою можливого відшарування задачу було переформульовано. Записано крайові умови на ділянці контакту та ділянці зазору. Для визначення напружено-деформованого стану використано метод суперпозиції. Розв'язок задачі подано у

вигляді суми розв'язків задачі про повний контакт та задачі про збурення напружено-деформованого стану, зумовлене локальним відшаруванням.

Для знаходження розв'язку задачі з кільцевим відшаруванням (Микитин та ін., 2017) використано метод функцій міжконтактних зазорів (Мартиняк, 2000) та інтегральне перетворення Ганкеля. Компоненти тензора напружень і вектора переміщень подано через висоту зазору між півпростором і основою, для визначення якої, використовуючи методику Erdogan (1968), отримано сингулярне рівняння. Для його числового розв'язання застосовано метод колокацій.

Для задачі з круговим відшаруванням побудовано аналітичний розв'язок, використовуючи методику Monastyrskyy та Mykytyn (2011), що базується на інтегральному перетворенні Ганкеля, зведенні задачі до інтегрального рівняння Абеля та застосуванні формули його обернення.

Для визначення наперед невідомих радіусів зазору використано умови плавного змикання берегів зазору.

Проаналізовано залежності форми зазору й нормальних контактних напружень від інтенсивності стоку тепла та відстані від нього до поверхні півпростору. Показано, що висота й радіус зазору зростають зі збільшенням інтенсивності стоку тепла і зменшуються зі збільшенням відстані від стоку до поверхні півпростору. Нормальні контактні напруження ззовні зазору за віддалення від нього монотонно спадають до напружень, прикладених на нескінченності.

Список літератури

- Comninou, M., & Dundurs, J. (1980). On lack of uniqueness in heat conduction through a solid to solid contact. *J. Heat Transfer*, 102(2), 319–323 <https://doi.org/10.1115/1.3244281>
- Erdogan, F. F. (1968). Simultaneous dual integral equations with trigonometric and Bessel kernels. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 48(4), 217–225. <https://doi.org/10.1002/zamm.19680480402>
- Krishtafovich, A. A., & Martynyak, R. M. (1998). Thermoelastic contact of anisotropic half spaces with thermal resistance. *International Applied Mechanics*, 34(7), 629–634. <https://doi.org/10.1007/BF02702067>
- Krishtafovich, A. A., & Martynyak, R. M. (1999). Lamination of anisotropic half-spaces in the presence of contact thermal resistance. *International Applied Mechanics*, 35(2), 159–164. <https://doi.org/10.1007/BF02682149>
- Martynyak, R. M., & Chumak, K. A. (2009). Thermoelastic delamination of bodies in the presence of a heat-conducting filler of the intercontact gap. *Materials Science*, 45(4), 513–522. <https://doi.org/10.1007/s11003-010-9209-0>
- Monastyrskyy, B. Y., & Mykytyn, M. M. (2011). Axially symmetric problem of local separation of an elastic half-space from a rigid base due to a point source of cooling. *Journal of Mathematical Sciences*, 178(5), 467–480. <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0563-8>
- Мартиняк, Р. М. (1998). Порушення контакту півпросторів при термомеханічній дії підповерхневого включення. *Доп. НАН України*, (12), 71–77.
- Мартиняк, Р. М. (2000). Метод функцій міжконтактних зазорів у задачах локального порушення контакту пружних півпросторів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 43(1), 102–108.
- Микитин, М. М., Середницька, Х. І., Монастирський, Б. Є., & Мартиняк, Р. М. (2017). Кільцеве розшарування між тілами за локального охолодження коловим стоком тепла. *Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології*, (26), 55–62. <http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/article/view/16>

Кадаванне інфармацыі на аснове выкарыстання сумежных класаў кода

А. І. Міцюхін

*Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт інфарматыкі і радыёэлектронікі,
Інстытут інфармацыйных тэхналогій, Мінск, Беларусь
mityuhin@bsuir.by*

У артыкуле разглядаецца прыдатнасць аперацыі над сумежнымі класамі для абароны інфармацыі кадаванай групавым перашкодаўстойлівым кодам. Аналізуецца магчымасць перахопу інфармацыі у двайковым сіметрычным канале.

Ключавыя словы: перашкодаўстойлівы код, група, падгрупа, сумежныя класы, вектар памылка, праўдападабенства, абарона інфармацыі.

Увядзенне. Асновай пабудовы лінейных перашкодаўстойлівых $[n, k]$ -кодаў з'яўляецца іх алгебраічная сістэма. Лінейны сістэматычны групавой $[n, k]$ -код над полям Галуа можа задавацца ў выглядзе падгрупы некаторай канчатковай групы G . Параметры n і k вызначаюць, адпаведна, даўжыню і памернасць кода. Кожнаму з 2^k інфармацыйных вектараў $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ блокавай крыніцы U^K можа адпавядаць элемент падгрупы H , запісаны ў выглядзе n -мернага вектара $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ кода.

Аптымальным метадам дэкадавання любога лінейнага групавога $[n, k]$ -кода з'яўляецца метада, заснаваны на аперацыі раскладання групы G на сумежныя класы па падгрупе H . Такое дэкадаванне эквівалентна да метаду максімальнага праўдападабенства. У працы разглядаецца выкарыстанне аперацыі раскладання групы па $[n, k]$ -коду для абароны інфармацыі ад перахопу ў двайковым сіметрычным канале (ДСК) (Міцюхін, 2019).

Тэарэтычныя прынцыпы. Прымаем у асноўным канале імавернасць памылкі $p = 0$, а у канале перахопу $0 < p < 0,5$. У агульным выпадку, дэкадаванне зводзіцца да аналізу стандартнага размяшчэння элементаў табліцы, якая апісвае аперацыю раскладання групы G па падгрупе H . Табліца дэкадавання складаецца з $2^{n-k} = 2^r$ радкоў, дзе r — пазначае лік праверачных сімвалаў кода. Радкі табліцы ўтвараюць мноства $C_r = \{C_i\}, i = 1, \dots, 2^r$ сумежных класаў. Сумежны клас $C_1 = \{X_i\}, i = 1, \dots, 2^k$ — гэта усе кодавыя словы кода. Табліца змяшчае $2^r \cdot 2^k = 2^n$ n -мерных вектараў. Вылічальная і часовая складанасць дэкадавання залежыць ад даўжыні n вектара. Напрыклад, у выпадку $n = 200$ і хуткасці кода $R = \frac{k}{n} = \frac{1}{2}$, табліца змяшчае $\approx 10^{30}$ вектараў. Мяркуецца, што перахопніку вядомыя метады кадавання і дэкадавання ў асноўным канале. Аднак, не маючы дастатковых звестак аб варыянце раскладання групы G на сумежныя класы, здзейсніць эфектыўнае дэкадаванне на мностве $\approx 10^{30}$ вектараў практычна немагчыма.

Няхай усе словы $\{X\}$ аднолькавай імавернасці. На выхадзе ДСК перахопнік мае да аналізу вектар

$$Y = X + E, \quad (1)$$

дзе $Y = (y_1, \dots, y_n)$ — выхад канала, $E = (e_1, \dots, e_n)$ — шумавы вектар, які замінае дакладнаму дэкадаванню ў канале падслухоўвання.

Для паскарэння дэкадавання перахопнік можа выкарыстоўваць наступную тэарэму.

Тэарэма (Мак-Вільямс & Слоэн, 1979). *Маецца ўзаемна адназначнае адпаведнасць паміж сіндромамі і сумежнымі класамі, а менавіта: два вектары a і b знаходзяцца ў адным і тым жа сумежным класе $[n, k]$ -коду, калі і толькі калі маюць адзін і той жа сіндром.*

Алгарытм дэкадавання ўключае ў сябе выкананне наступных паслядоўных лінейных пераўтварэнняў і аперацый:

– вылічэнне сіндрому

$$S = YH^T = YH^T + EH^T = EH^T,$$

дзе у якасці ядра пераўтварэння выступае правярачная матрыца кода;

– знаходжанне па S адпаведнага сумежнага класа і вектара памылак E ;

– атрыманне вектара $\tilde{X} = (Y - E)$;

– атрыманне па $\tilde{X}$ інфармацыйнага вектара u .

Відавочна, што наяўнасць вектара X ў сумежным класе C_1 можа спрашчаць працэдуру дэкадавання як у асноўным канале, гэтак і на выхадзе ДСК, дзе назіраецца працэс Y . Нявызначанасці атрымання інфармацыі ня менш, чым некаторая велічыня, можна дасягнуць, калі мноства $\{X\}$ размеркаваць па усей n -мернай прасторы, а не ў адным сумежным класе. Сумежныя класы $\{C_i\}$ не перасякаюцца. Тады для адназначнага дэкадавання сігналаў у асноўным канале кожнаму класу C_i можна паставіць у адпаведнасць адно і толькі адно слова X_i . Выкананне такога супастаўлення здзяйсняльна, калі раскладанне групы парадку G рэалізаваць па падгрупе H парадку 2^r . Для гэтага варта перайсці да дуальнага $[n, n - k]$ -коду. Тады любы вектар $Y \neq X_i$ скажоны шумам, але які знаходзіцца ў сумежным класе C_i можа выкарыстоўвацца для перадачы па ДСК.

Далей скарыстаем энтрапійны падыход для ацэнкі ступені абароны інфармацыі за кошт размеркавання усіх вектараў $\{X\}$ па мноству $\{C\}$ сумежных класаў і выкарыстання шумавога працэсу. Відавочна, што надзейная абарона інфармацыі звязана з ацэнкай сярэдняй ўзаемнай інфармацыя I_u на выхадзе ДСК. Няхай першасная крыніца з алфавітам $U = \{0, 1\}$ характарызуецца імавернасцямі $p(u_0) = p(u_1)$. Сярэдняя колькасць інфармацыі на слова n даўжынёй вызначаецца як

$$I_u = \frac{k}{n} H(U) - H(U|Y), \quad (2)$$

дзе $H(U) = \sum_{u_i \in U} p(u_i) \log_2(p(u_i))$ — ентрапія на ўваходзе ДСК,

$H(U|Y) = \sum_{u_i \in U} \sum_{y_j \in Y} p(u_i, y_j) \log_2(p(u_i|y_j))$ — умоўная ентрапія ДСК, $p(u_i|y_j)$ —

сумесная імавернасць сімвалаў ўваходу і выхаду ДСК, $p(u_i|y_j)$ апастэрыёрная імавернасць сімвалаў ДСК.

Велічыня $H(U|Y)$ вызначае сярэдняю колькасць страчанай інфармацыі з-за ўздзеяння шумавога вектара E . З (2) вынікае ўмова забеспячэння надзейнай абароны інфармацыі ад перахопу

$$\frac{k}{n} H(U) = H(U|Y).$$

Для коду над полям $GF(2)$ ентрапія ДСК апісваецца функцыяй Шэнана

$$H(p) = H(U|Y) = -[p \log_2 p + (1-p) \log_2(1-p)] \quad (3)$$

Па велічыне p вызначаецца вага вектара E даўжынёй n . З улікам роўнасці $p(u_0) = p(u_1)$ і (3) атрымліваем стасунак

$$k \leq nH(U|Y) = n[-p \log_2 p - (1-p) \log_2(1-p)]. \quad (4)$$

Выраз (4) адлюстроўвае ўзаемасувязь параметраў дуальнага $[n, n-k]$ -коду, вектару E і верагоднасці p у ДСК.

Прыклад. Няхай $n = 100$, $p = 0,1$. Функцыя Шэнана (4) $H(p) = 0,469$. Тады інфармацыйны параметр $k \leq 46$. Памернасць кода, які выкарыстоўваецца для стварэння табліцы стандартнага размяшчэння, вызначаецца як $(n-k) \geq 54$. Лік сумежных класаў $|C| \geq 2^{46}$. У кожным сумежным класе змяшчаецца $M \geq 2^{54}$ вектараў даўжынёй $n = 100$. Ажыццявіць эфектыўнае сіндромнае дэкадаванне у канале перахопа, калі лік вектараў сіндромаў $|S| \geq 2^{46}$ практычна немагчыма.

Высновы. Значная нявызначанасць выбару сумежнага класа кода, нявызначанасць выбару дакладнага слова у сумежным класе, значныя сіндромныя вылічальныя выдаткі дазваляюць с дастатковай надзейнасцю абараняць інфармацыю кадаванай с выкарыстаннем сумежных класаў.

Спіс лitarатуры

Мак-Вільямс, Ф. Д., & Слоэн, Н. Д. А. (1979). *Теория кодов, исправляющих ошибки*. Москва: Связь.
 Міцюхін, А. І. (2018). Абарона кадаванага сігнала ад перахопу. У *Матэрыялах Сьомой Міжнародной навукова-практычнай канферэнцыі «Матэматыка в сучасному тэхнічным універсітэці»* (с. 101–104). Вінніца: Выдавец ФАП Кушнір Ю. В.
<http://matan.kpi.ua/public/files/2018/mvstu7/МСТУ7.pdf>

Метод наближеного розв'язку нелінійного інтегрального рівняння руху фронту руйнування внаслідок втоми в тонкій нескінченній пластині

А. В. Плащинська

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

creep@inmech.kiev.ua

Розглянуто задачу моделювання розповсюдження тріщини втоми в тонкій нескінченній пластині при двовісному багатоцикловому асиметричному розтягу-стиску. Визначальні рівняння моделі отримано з наближеного аналітичного розв'язку інтегрального рівняння руху фронту руйнування.

Ключові слова: перетворення Лапласа, неповна гамма-функція, тріщина втоми, асиметричний цикл, двовісний розтяг-стиск.

Побудова математичної моделі розповсюдження тріщини втоми є актуальною задачею механіки руйнування і полягає в установленні залежності швидкості тріщини від параметрів циклічного навантаження. На основі сумісного розгляду концепцій механіки руйнування та механіки неперервного пошкодження побудовано двохстадійну модель розповсюдження тріщини втоми для нескінченних пластин при одновісному симетричному циклічному навантаженні (Голуб & Плащинська, 1994), для скінченних пластин при одновісному циклічному асиметричному навантаженні (Голуб & Плащинська, 2005, 2018). Визначальні співвідношення моделі отримані з розв'язку крайової задачі теорії пружності з рухомою границею та інтегрального рівняння руху фронту руйнування внаслідок втоми. Адекватність отриманих за моделлю результатів підтверджено задовільним збігом з даними експериментів.

У статті представлено метод наближеного аналітичного розв'язку інтегрального рівняння руху фронту руйнування в тонкій нескінченній ізотропній пластині при двовісному асиметричному розтягу-стиску.

1. Постановка задачі. Розгляньмо процес розповсюдження тріщини з початковою напівдовжиною ℓ_0 в тонкій нескінченній пластині з ізотропного лінійно-пружного матеріалу (рис. 1). Береги тріщини не навантажені, а зовні прикладене двовісне асиметричне циклічне навантаження

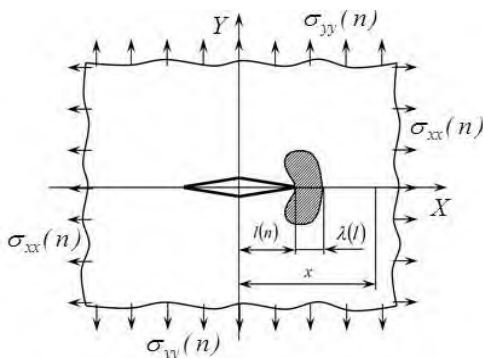


Рис. 1

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(n) = (\sigma_m)_{ij} + (\sigma_a)_{ij} \sin(2\pi n), \\ (\sigma_{\max})_{ij} = (\sigma_m)_{ij} + (\sigma_a)_{ij} < \sigma_Y, \end{cases} \quad (1.1)$$

де $i = j = 1, 2$ ($x = 1, y = 2$), $(\sigma_{\max})_{ij}$, $(\sigma_m)_{ij}$, $(\sigma_a)_{ij}$ — максимальні, середні та амплітуди циклічних напружень, відповідно; n — число циклів навантаження; σ_Y — межа течії матеріалу пластини.

Еквівалентні (1.1) за часом до руйнування напруження симетричного циклу записуємо у вигляді (Голуб та ін., 2010)

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(n) = (\sigma_{a,eqv})_{ij} \sin(2\pi n) & i = j = 1, 2; \\ (\sigma_{a,eqv})_{ij} = \left[\cos \left[\frac{\pi (\sigma_m)_{ij}}{2 \sigma_B} \right] \right]^{-\eta} (\sigma_a) & , \max((\sigma_{a,eqv})_{ij}) < \sigma_Y \end{cases} \quad (1.2)$$

де $(\sigma_{a,eqv})_{ij}$ — еквівалентні амплітудні напруження симетричних циклів; σ_B — межа міцності матеріалу пластини при розтягу; η коефіцієнт чутливості матеріалу пластини до асиметрії циклу навантаження при однобічному розтягу-стиску.

Уважаємо накопичення пошкоджень $\omega(x, n)$ внаслідок втоми — основним механізмом процесу розповсюдження тріщин втоми. Тріщину втоми розглядаємо як вузьку гострокінцеву щілину розташовану вздовж осі Ox . Уважаємо, що розповсюдження тріщини здійснюється стрибками на довжину циклічної пластичної зони $\lambda(\ell(n))$ (Rice, 1967) вздовж осі Ox , а накопичення пошкоджень $\omega(x, n)$ відбувається в півциклах розтягу.

Еволюційне рівняння кінетики накопичення пошкоджень унаслідок втоми при двобічному циклічному навантаженні записуємо у вигляді

$$\frac{\partial \omega(x, n)}{\partial n} = D \left[\frac{(\Delta \sigma_{eqv}(x, n))^q}{1 - \omega(x, n)} \right] \quad (1.3)$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} \max \{ \omega[\ell_0 + \lambda(\ell_0), \theta, n] \} = 1; & 0 \leq n \leq n_*; \\ \max \{ \omega[\ell(n) + \lambda(\ell(n)), \theta, n] \} = 1; & 0 \leq n \leq n_* \end{cases}, \quad (1.4)$$

де n_* — тривалість інкубаційної стадії, $\Delta \sigma_{eqv}(x, n)$ — еквівалентне напруження, що зводить плоский напружений в околі вершини прямолінійної тріщини до однобічного (Саврук, 1988),

$$\Delta \sigma_{eqv}(x, n) = \frac{(\sigma_{a,eqv})_{yy}(n)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\ell(n)}{x - \ell(n)}} \quad (1.5)$$

Задача полягає в отриманні співвідношень для тривалості інкубаційного періоду та стадії розповсюдження тріщин втоми при двобічному асиметричному розтягу-стиску.

2. Двохстадійна модель розповсюдження тріщин втоми. Інтегруючи еволюційне рівняння (1.3) з урахуванням умов локального руйнування (1.4), закону розподілення напружень в околі вершини тріщини (1.5) та двостадійності руйнування, отримуємо інтегральне рівняння руху фронту руйнування від втоми

$$\begin{aligned}
1 - (1 + q)D \left[\frac{(\sigma_{a,eqv})_{yy}}{\sqrt{2}} \right]^q \int_0^{n_*} \left[\frac{\ell_0}{\ell(n) + \lambda(\ell(n)) - \ell_0} \right]^{\frac{q}{2}} d\tau = \\
= (1 + q)D \left[\frac{(\sigma_{a,eqv})_{yy}}{\sqrt{2}} \right]^q \int_{n_*}^n \left[\frac{\ell(\tau)}{\ell(n) + \lambda(\ell(n)) - \ell(\tau)} \right]^{\frac{q}{2}} d\tau.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Для розв'язання (2.1) спрощуємо структуру рівняння шляхом запису $\lambda(\ell(n)) = \mu\ell(n)$ та переходу від розмірних величин до безрозмірних за допомогою заміни

$$\begin{aligned}
\alpha = \frac{n}{n_R}; \quad \alpha_* = \frac{n_*}{n_R}; \quad \alpha_1 = \frac{\tau}{n_R}; \quad \sigma = \frac{\Delta\sigma_{eqv}}{(\sigma_{a,eqv})_{yy}}; \quad \delta = \frac{\ell}{\ell_0}; \quad \nu = \frac{q}{2}; \\
n_R = \frac{1}{(1 + q)D(\sigma_{a,eqv})_{yy}},
\end{aligned} \tag{2.2}$$

де n_R — число циклів до руйнування гладкого циліндричного зразка.

Таким чином (2.1) перетвориться в наступне рівняння

$$1 - 2^{-\nu} \alpha_* J_* \int_0^{\alpha_*} \left[\frac{1}{(1 + \mu)\delta(\alpha) - 1} \right]^\nu d\alpha_1 = 2^{-\nu} \int_{\alpha_*}^{\alpha} \left[\frac{\delta(\alpha_1)}{\delta(\alpha)(1 + \mu) - \delta(\alpha_1)} \right]^\nu d\alpha_1. \tag{2.3}$$

Запроваджуємо в (2.3) наступні змінні $\delta(\alpha) = z$, $\delta(\alpha_1) = \xi$, $\alpha_1 = \varphi(\xi)$, $d\alpha_1 = \phi'(\xi)d\xi$, і в результаті отримуємо лінійне інтегральне рівняння Вольтери I роду

$$1 - 2^{-\nu} \alpha_* J_* [z(1 + \mu) - 1]^{-\nu} = 2^{-\nu} \int_1^z \left[\frac{\xi}{z(1 + \mu) - \xi} \right]^\nu \phi'(\xi) d\xi \tag{2.4}$$

з різницеvim ядром відносно функції $\xi^\nu \phi'(\xi)$. Відзначимо також, що при $z = 1$ ліва частина рівняння дорівнює нулю, так що $\alpha_* J_* = (2\mu)^\nu$.

До рівняння (2.4) застосуємо перетворення Лапласа (Лаврентьев & Шабат, 1965), у цьому разі рівняння для оригіналів перетворюється на рівняння для зображень

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} - 2^{-\nu} \alpha_* J_* e^{-\frac{p}{1+\mu}} \left[\frac{1+\mu}{p} \right]^{1-\nu} \frac{1}{1+\mu} \Gamma\left(1 - \nu, -\frac{p}{1+\mu}\right) = \\
= 2^{-\nu} \int_0^\infty (\tau + 1)^\nu \phi'(\tau + 1) e^{-p(\tau+1)} \left[e^{\frac{p\mu(\tau+1)}{1+\mu}} \frac{1}{1+\mu} \left[\frac{1+\mu}{p} \right]^{1-\nu} \Gamma\left(1 - \nu, \frac{p\mu(\tau+1)}{1+\mu}\right) \right] d\tau.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

За допомогою апроксимацій неповних гамма-функцій у вигляді нерівностей (Luke, 1969) після ряду перетворень отримаємо алгебричне рівняння

$$p^{-1} - 2^{-\nu} \alpha_* \nu^{-1} = 2^{-\nu} [\mu]^{1-\nu} \nu^{-1} \Phi(p) \quad (2.6)$$

де $\Phi(p)$ — зображення невідомої функції-оригіналу $(1 + \tau)\phi'(\tau + 1)$.

Наближене рішення відносно зображення $\Phi(p)$ записуємо у вигляді

$$\Phi(p) = 2^{\nu} [\mu]^{\nu-1} \nu p^{-1}. \quad (2.7)$$

Вернімося до оригіналів, тоді (2.7) перетвориться до виду

$$\phi'(z) = 2^{\nu} [\mu]^{\nu-1} z^{-1}, \quad (2.8)$$

Виконуємо зворотній перехід від $z \rightarrow \delta(\alpha)$

$$\phi'(z) = \phi'(\delta(\alpha)) = \frac{d\alpha}{d\delta(\alpha)} \quad (2.9)$$

Після переходу від безрозмірних величин до розмірних отримаємо диференціальне рівняння для швидкості розповсюдження тріщини втоми у вигляді

$$\frac{d\ell}{dn} = \frac{\ell}{n_R} 2^{-\nu} [\mu]^{1-\nu} \nu^{-1} \quad (2.10)$$

Застосуємо заміни (2.2) до рівняння (2.10). Тоді система визначальних рівнянь двостадійної моделі розповсюдження тріщини втоми має вигляд

$$\begin{cases} \frac{d\ell}{dn} = D \left(1 + \frac{1}{q} \right) \left[\cos \left[\frac{\pi}{2} \frac{(\sigma_m)_{yy}}{\sigma_B} \right] \right]^{-\eta} (\sigma_a)_{yy} \sqrt{\ell}^q (2\lambda(\ell))^{1-\frac{q}{2}} \\ n_* = \left[(1 + q) D \left[\cos \left[\frac{\pi}{2} \frac{(\sigma_m)_{yy}}{\sigma_B} \right] \right]^{-\eta} (\sigma_a)_{yy}^q \left[\frac{\ell_0}{2\lambda(\ell_0)} \right]^{\frac{q}{2}} \right]^{-1}, \end{cases} \quad (2.11)$$

де рівняння для розрахунку тривалості інкубаційного періоду отримано з (2.1) при $n = n_*$.

Список літератури

- Luke, Y. L. (1969). *The special functions and their approximations*. (Vol. 2). New York: Academic press.
- Rice, J. R. (1967). Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue. J. Grosskreutz (Ed.), *STP415-EB Fatigue Crack Propagation* (pp. 247–311). <https://doi.org/10.1520/STP47234S>
- Голуб, В. П., & Плащинская, А. В. (1994). Модель усталостного разрушения тонких изотропных пластин с трещинами при осевом нагружении. *Прикл. механика*, 30(7), 53–63.
- Голуб, В. П., & Плащинская, А. В. (2005). Феноменологическая модель роста усталостной трещины в идеально пластических бесконечных пластинках при одноосном симметричном знакопеременном нагружении. *Прикл. механика*, 41(12), 116–127.
- Голуб, В. П., & Плащинская, А. В. (2018). К теории усталостных трещин нормального отрыва в тонких изотропных пластинах конечных размеров при одноосном растяжении-сжатии. *Прикл. механика*, 54(2), 79–99.

- Голуб, В. П., Пелых, В. Н., & Погребняк, А. Д. (2010). Прогнозирование усталостной долговечности призматических металлических стержней при асимметричном растяжении-сжатии методом эквивалентных напряжений. *Вісник національного технічного університету України «КПІ»*. Серія «Машинобудування», (58), 177–182. <http://visnyk-nmti.kpi.ua/images/stories/pdf/58/177.pdf>
- Лаврентьев, М. А., & Шабат, Б. В. (1965). *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва: Наука.
- Саврук, М. П. (1988). *Механика и прочность материалов: Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами*. Киев: Наукова думка.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Аналіз надійності роботи триканальної системи масового обслуговування

Н. В. Полішук, О. І. Кушлик-Дивульська

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

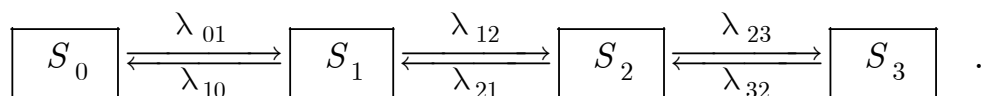
nvpolinv@gmail.com, olgakushlyk64@gmail.com

Розглянуто триканальну систему масового обслуговування з відмовами, яка може перебувати в чотирьох станах, наведені матриці інтенсивностей переходів, рівняння фінальних станів і формули Ерланга для ймовірностей станів системи. Для виробничого комплексу із трьох машин і однієї ремонтної бригади досліджено питання надійності системи.

Ключові слова: система масового обслуговування, ймовірності станів, надійність.

Багатоканальні системи масового обслуговування (СМО) широко використовуються в прикладних задачах. Вони розглядаються також в дисципліні «Дослідження операцій», «Теорії надійності», «Теорії масового обслуговування» для економічних і технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Для цих систем досліджуються задачі ефективності, надійності роботи.

Маємо триканальну СМО з відмовами, яка може перебувати в чотирьох станах: S_0 , S_1 , S_2 , S_3 . Граф системи має вигляд:



У системі протікає найпростіший (тобто стаціонарний ординарний і без післядії) потік, який переводить її із стану S_i у стан S_j , $i, j = 0, 1, 2, 3$, з інтенсивністю λ_{ij} .

Матриця інтенсивностей переходів для станів системи має вигляд:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{00}^* & \lambda_{01} & \lambda_{02} & \lambda_{03} \\ \lambda_{10} & -\lambda_{11}^* & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & -\lambda_{22}^* & \lambda_{23} \\ \lambda_{30} & \lambda_{31} & \lambda_{32} & -\lambda_{33}^* \end{pmatrix}^T ,$$

де λ_{ii}^* , $i = 0, 1, 2$ — сумарна інтенсивність потоків, які виводять систему із стану S_i .

Складемо матрицю інтенсивностей переходів для даної системи:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{01} & \lambda_{01} & 0 & 0 \\ \lambda_{10} & -(\lambda_{10} + \lambda_{12}) & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & \lambda_{21} & -(\lambda_{21} + \lambda_{23}) & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_{32} & -\lambda_{32} \end{pmatrix}^T.$$

Позначимо $p_i(t)$ — ймовірність знаходження системи у стані S_i , $i = 0, 1, 2$, у момент часу t . Ці ймовірності задовольняють системі диференціальних рівнянь Колмогорова (Кремер и др., 2000):

$$\Lambda \cdot \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_0(t) \\ p'_1(t) \\ p'_2(t) \\ p'_3(t) \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} p'_0 = -\lambda_{01}p_0 + \lambda_{10}p_1, \\ p'_1 = \lambda_{01}p_0 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})p_1 + \lambda_{21}p_2, \\ p'_2 = \lambda_{12}p_1 - (\lambda_{21} + \lambda_{23})p_2 + \lambda_{32}p_3, \\ p'_3 = \lambda_{23}p_2 - \lambda_{32}p_3, \end{cases}$$

з початковим умовами: $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = 0$, $p_2(0) = 0$, $p_3(0) = 0$.

У кожний момент часу t , для функцій $p_i(t)$ виконуються співвідношення:

$$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1.$$

У теорії випадкових процесів доведено (Кремер и др., 2000): якщо кількість станів системи скінченна і з кожного з них можна за скінченне число кроків перейти в будь-який інший стан, то існують фінальні ймовірності станів, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

які задовольняють системі лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} -\lambda_{01}p_0 + \lambda_{10}p_1 = 0, \\ \lambda_{01}p_0 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})p_1 + \lambda_{21}p_2 = 0, \\ \lambda_{12}p_1 - (\lambda_{21} + \lambda_{23})p_2 + \lambda_{32}p_3 = 0, \\ \lambda_{23}p_2 - \lambda_{32}p_3 = 0, \end{cases}$$

при умові $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Ці ймовірності можна визначити за формулами Ерланга (Поліщук та ін., 2011):

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{32}\lambda_{21}\lambda_{10}} \right)^{-1}, \quad p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0, \quad p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0, \quad (1)$$

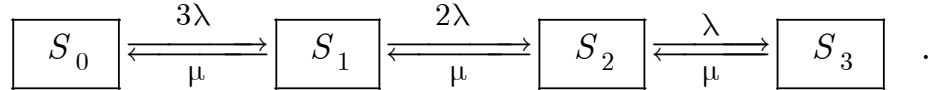
$$p_3 = \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{32}\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0, \quad p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Запропонована система масового обслуговування може бути використана для аналізу надійності роботи промислових комплексів, які містять декілька каналів обслуговування. В роботах (Поліщук, 2016а, 2016б) система масового обслуговування розглянута для дослідження роботи поліграфічного комплексу із двох друкувальних машин. Застосуємо цю систему для дослідження роботи виробничого комплексу із трьох потужностей (машин) і однієї ремонтної бригади. Розглянемо питання надійності цієї системи і дослідимо її на максимум.

Позначимо початковий стан системи S_0 — усі три машини працюють, S_1 — дві машини працюють, одна ремонтується, S_2 — одна працює, дві машини в ремонті, S_3 — три машини в ремонті. Нехай інтенсивність виходу з ладу однієї машини дорівнює $\lambda, \lambda > 0$, а інтенсивність потоку ремонту машини $\mu, \mu > 0$.

При переході із стану S_0 у стан S_1 з ладу може вийти одна із трьох працюючих машин, тому інтенсивність переходу дорівнює 3λ . При переході із стану S_1 у стан S_2 може вийти з ладу одна із двох працюючих машин, тому інтенсивність дорівнює 2λ . Зворотній потік ремонту має однакову інтенсивність μ .

Тоді граф системи буде мати вигляд



За формулами Ерланга (1) маємо:

$$p_0 = \left(1 + 3\rho + 6\rho^2 + 6\rho^3 \right)^{-1}, \quad p_1 = 3\rho p_0, \quad p_2 = 6\rho^2 p_0, \quad p_3 = 6\rho^3 p_0, \quad (2)$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$

де $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ — зведена інтенсивність потоку.

Дослідімо питання надійності цієї системи. При послідовному з'єднанні станів, надійність визначають за формулою

$$N = p_0 p_1 p_2 p_3.$$

Тоді надійність системи, як функція зведеної інтенсивності, ураховуючи (2), має вигляд

$$N(\rho) = \frac{108\rho^6}{(1 + 3\rho + 6\rho^2 + 6\rho^3)^4}.$$

Досліджуємо цю функцію $N(\rho)$ на екстремум, похідна якої має вигляд

$$N'(\rho) = 648\rho^5 \frac{1 + 3\rho + 6\rho^2 + 6\rho^3 - 2\rho(1 + 4\rho + 6\rho^2)}{(1 + 3\rho + 6\rho^2 + 6\rho^3)^4}.$$

Тоді для знаходження екстремумів отримаємо рівняння

$$\rho^5(1 - 7\rho + 6\rho^2 - 6\rho^3) = 0. \quad (3)$$

Розв'язуючи (3) за формулами Кардано і врахувавши вигляд функції $N'(\rho)$, маємо

$$\rho_{\min} = 0, \rho_{\max} = 0,1616, N_{\max} = 0,00024.$$

Список літератури

- Кремер, Н. Ш., Прутко, Б. А. & Тришкин, И. М. (2000). *Исследование операций в экономике*. Москва: ЮНИТИ.
- Поліщук, Н. В. (2016а). Дослідження надійності деякої системи масового обслуговування. В *Матеріалах П'ятої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 89–90). Київ: НТУУ «КП». <http://matan.kpi.ua/public/files/2016/mvstu5/MSTU5.pdf>
- Поліщук, Н. В. (2016б). Застосування систем масового обслуговування в дисципліні «Дослідження операцій». В *Матеріалах Сімнадцятої Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука* (Т. 3, с. 310–311). Київ: НТУУ «КП». <http://matan.kpi.ua/public/files/kk2016/kravchuk2016-volume3.pdf>
- Поліщук, Н. В., Кушлик-Дивульська, О. І. & Орел, Б. П. (2011). *Дослідження операцій*. Київ: НТУУ «КП». <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/1092>

Математическое моделирование системы кондиционирования воздуха летательного аппарата

С. Г. Радченко, С. Н. Лапач

КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

lapach@ukr.net

Одной из форм управления сложными системами и процессами являются математические модели. При исследовании системы кондиционирования воздуха летательного аппарата в качестве плана эксперимента использован ротатбельный план Бокса на кубе B_2 . По результатам проведенного эксперимента построены адекватные, статистически значимые математические модели критериев качества системы кондиционирования воздуха в зависимости от влияющих факторов.

Ключевые слова: математическое моделирование, сложные системы, системы кондиционирования воздуха.

Использование современных технических систем требует удобных форм управления ими. Такой формой управления являются математические модели (Душинский и др., 1977), (Радченко, 2011). Технические системы являются наукоемкими изделиями, их модели целесообразно получать, используя экспериментально-статистический подход, применять теорию планирования эксперимента, кибернетический подход к описанию объекта моделирования.

Летательные аппараты (ЛА) эксплуатируются в различных климатических зонах с различными — низкими и высокими — температурами внешней среды. Для создания необходимых условий в кабине ЛА предусмотрена система кондиционирования воздуха (СКВ) — наукоемкий объект. Для управления СКВ целесообразно использовать математические модели.

Априорный анализ СКВ позволил сформулировать гипотезу об адекватной структуре модели в виде модели 2-го порядка. В качестве плана эксперимента используется ротатбельный план Бокса B_2 .

Исследовались характеристики качества СКВ:

y_1 — весовой расход продувочного воздуха, G , кг/час;

y_2 — температура кабинного воздуха, t_k , °C;

y_3 — температура продувочного воздуха за турбохолодильником, t_x , °C;

y_4 — температура продувочного воздуха после ВВР, t_b , °C;

в зависимости от влияющих факторов

x_1 — давление воздуха на входе в систему, P , кг/см², пределы изменения 2,50...4,00;

x_2 — температура воздуха на входе в систему, t_{np} , °C, пределы изменения 200,0...300,0.

Структура математической модели имеет вид

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2.$$

Коэффициенты модели ортогональны друг к другу.

Рабочая матрица, уровни варьирования и результаты опытов эксперимента приведены в табл. 1. Каждый опыт выполнялся дважды.

Таблица 1. Рабочая матрица и результаты опытов

Кодированные значения уровней варьирования факторов	Факторы		Функции							
	Натуральное обозначение		Натуральное обозначение функций							
	P	$t_{\text{пр}}$	G	$t_{\text{к}}$	$t_{\text{х}}$	$t_{\text{в}}$				
	Кодированное обозначение		Формализованное обозначение функций							
	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4				
Звездное плечо –1,4142	2,50	200,0	Значения результатов повторных опытов							
Нижний уровень –1	2,72	214,6								
Основной уровень 0	3,25	250,0								
Верхний уровень 1	3,78	285,4								
Звездное плечо 1,4142	4,00	300,0	y_{11}	y_{12}	y_{21}	y_{22}	y_{31}	y_{32}	y_{41}	y_{42}
Опыт 1	2,72	214,6	180	182	37	35	18	19	49	49
2	3,78	214,6	258	254	30	30	5	8	53	55
3	2,72	285,4	179	178	43	42	29	29	51	51
4	3,78	285,4	248	248	35	35	17	15	55	56
5	2,50	250,0	162	164	40	41	25	27	48	51
6	4,00	250,0	269	270	32	32	11	10	56	56
7	3,25	200,0	222	221	32	33	8	11	49	51
8	3,25	300,0	212	213	41	41	24	26	53	55
9	3,25	250,0	218	216	34	36	17	18	51	52
10	3,25	250,0	215	217	35	36	15	18	49	52
11	3,25	250,0	215	216	35	37	15	18	51	53

По результатам эксперимента построены модели критериев качества СКВ

y_1, y_2, y_3, y_4 :

$$\hat{y}_1 = 216,23 + 36,89x_1 - 2,90x_2 - 1,38x_1x_2;$$

$$\hat{y}_2 = 36,00 - 3,19x_1 + 2,94x_2;$$

$$\hat{y}_3 = 17,41 - 5,87x_1 + 5,24x_2;$$

$$\hat{y}_4 = 52,09 + 2,34x_1 + 1,14x_2.$$

В табл. 2 приведены статистические характеристики вычисленных математических моделей.

Таблица 2. Статистические характеристики моделей

Параметры статистического анализа	Услов- ные обозна- чения	Значения параметров				При- меча- ния
		y_1	y_2	y_3	y_4	
Коэффициенты модели	b_0	216,17	35,50	16,83	51,33	
	b_1	36,89	−3,19	−5,87	2,34	
	b_2	−2,90	2,94	5,24	1,14	
	b_{12}	−1,38	−0,38	−0,25	−0,13	
	b_{11}	−0,15	0,22	0,65	0,71	
	b_{22}	0,23	0,47	0,15	0,33	
Доверительные интервалы для коэф- фициентов моделей	Δb_0	1,144	0,752	1,343	1,128	$t_{0,05}^{\text{крит}} =$ =2,16
	Δb_i	0,700	0,461	0,822	0,691	
	Δb_{ij}	0,991	0,651	1,163	0,977	
	Δb_{ii}	0,834	0,548	0,979	0,822	
Воспроизводимость результатов						
Среднеквадратичное отклонение	$s_{\text{восп}}$	1,297	0,853	1,523	1,279	
Число степеней свободы	f	11	11	11	11	
Экспериментальное значение G -критерия	$G^{\text{эксп}}$	0,43	0,25	0,18	0,25	
Критическое значение G -критерия	$G^{\text{крит}}$	0,57	0,57	0,57	0,57	
Уровень значимости	α	0,05	0,05	0,05	0,05	
Адекватность модели						
Экспериментальное значение F -критерия	$F^{\text{эксп}}$	2,67	1,05	0,57	0,25	
Критическое значение F -критерия	$F^{\text{крит}}$	3,41	3,41	3,41	3,41	
Уровень значимости	α	0,05	0,05	0,05	0,05	
Информативность модели						
Коэффициент множественной корреляции	R	0,9997	0,9948	0,9976	0,9849	
Экспериментальное значение F -критерия	$F^{\text{эксп}}$	10418,8	43,63	52,41	8,50	
Критическое значение F -критерия	$F^{\text{крит}}$	4,44	4,44	4,44	4,44	
Уровень значимости	α	0,01	0,01	0,01	0,01	

Все модели адекватны, информативны и статистически значимы.

Полученные математические модели позволяют построить графики зависимостей $y_i = f_i(x_1, x_2)$ и по ним выбирать режимы функционирования СКВ.

Пример поверхности отклика приведен для модели весового расхода продувочного воздуха на рис.1.

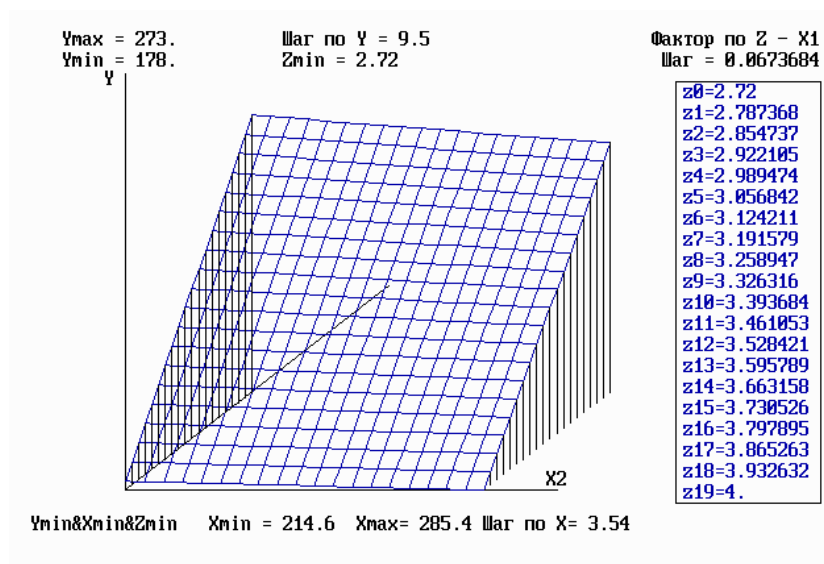


Рис. 1. Поверхность отклика для модели y_1

Список литературы

- Душинский, В. В., Пуховский, Е. С., & Радченко, С. Г. (1977). *Оптимизация технологических процессов в машиностроении*. Киев: Техника.
- Радченко, С. Г. (2011). *Методология регрессионного анализа*. Киев: «Корнійчук».

Об одном методе конкретизации функционала при определении параметров ядер наследственности в линейной теории вязкоупругости

В. С. Резник

*Институт механики им. С. П. Тимошенка НАН Украины, Киев, Украина;
creep@inmech.kiev.ua*

Предложен метод и изложены основные процедуры идентификации ядер наследственности линейно-вязкоупругих материалов с применением процедуры минимизации функционала. Критерием наилучшего согласования используется условие минимизации квадратичного отклонения расчетных значений ядер ползучести от экспериментальных. В качестве ядер наследственности используются дробно-экспоненциальные функции.

Ключевые слова: линейные вязкоупругие материалы, процесс ползучести, дробно-экспоненциальное ядро, параметры ядра, аппроксимация ядра, аппроксимация функции ползучести.

1. Введение. При решении прикладных задач линейной и нелинейной теории вязкоупругости важное место занимают методы определения вязкоупругих характеристик материала, которые в случае определяющих уравнений наследственного типа сводятся к отысканию ядер ползучести и релаксации. Структура ядер должна соответствовать наилучшему согласованию с экспериментальными данными, накладывающему существенные ограничения на аналитические выражения ядер и методы определения их параметров.

Нахождение параметров ядер наследственности, как правило, осуществляют по экспериментальным данным, которые проводятся на основе независимых испытаний на ползучесть по функции ползучести (Голуб та ін., 2009, 2012).

В настоящей работе предложен метод определения параметров ядер наследственности линейно вязкоупругих материалов исходя из условия минимизации функционала, построенного исходя из критерия наилучшего согласования расчетных значений ядер ползучести и экспериментальных исходя из гипотезы подобия изохронных диаграмм и диаграммы мгновенного деформирования.

2. Постановка задачи. Определяющее уравнение в нелинейной теории вязкоупругости, которое описывает процесс ползучести задается интегральным уравнением (Колтунов, 1976; Работнов, 1977)

$$\phi_0(\varepsilon(t)) = \sigma(t) + \lambda \int_0^t \tilde{K}(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau. \quad (1.1)$$

Здесь $\varepsilon(t)$ — полная деформация, включающая упругую компоненту ε^e и деформацию ползучести ε^c в моменты времени t и τ ; $\sigma(t)$, $\sigma(\tau)$ — действующее напряжение в моменты времени t и τ ; $\phi_0(\cdot)$ — функция, задающая диаграмму мгновенного деформирования; $\tilde{K}(t - \tau)$ — ядро ползучести; λ —

реологический параметр; t — время наблюдения; τ — время, предшествующее моменту наблюдения.

Для случая линейных вязкоупругих материалов $\phi_0(\cdot)$, которая в работе задается одночленной аппроксимацией в форме закона Гука

$$\phi_0(\varepsilon) = E\varepsilon, \quad (1.2)$$

где E — модуль упругости.

В качестве ядра наследственности рассматривается дробно-экспоненциальная функция (Работнов, 1977)

$$\tilde{K}(t - \tau) = \frac{1}{(t - \tau)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - \tau)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]} \quad (1.3)$$

Здесь α, β — параметры ядер наследственности, которые определяются из опытов на ползучесть или релаксацию; $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Задача заключается в построении функционала, позволяющего определить неизвестные параметры в (1.3) и выборе эффективного метода минимизации его ошибки с учетом дискретных значений ядер в области малых времен, исходя из гипотезы подобия изохронных диаграмм и диаграммы мгновенного деформирования.

2. Методика конкретизации функционала. Предложенная в работе методика справедлива, если выполняется гипотеза подобия изохронных диаграмм ползучести и диаграммы мгновенного деформирования. Считается, что единая диаграмма существует с заданной наперед точностью. Как правило рассматривается погрешностью δ в доверительном интервале $\pm 5\%$. Приведенные дискретные значения $\bar{\phi}_t(\varepsilon_i(t), 0)$ функций $\phi_t(\varepsilon_i(t), t_j)$ находим из соотношения

$$\bar{\phi}_t(\varepsilon_i(t), 0) = \overline{(1 + G(t_j))} \cdot \phi_t(\varepsilon_i(t), t_j) \quad (i = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, \ell}), \quad (2.1)$$

где коэффициент подобия имеет вид

$$\overline{1 + G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^q \{ \phi_0(\varepsilon_i(0), 0) \cdot \phi_t(\varepsilon_i(t), t_j) \}}{\sum_{i=1}^q \{ \phi_t(\varepsilon_i(t), t_j) \}^2}, \quad (2.2)$$

и осредняет значения функций $(1 + G(t_j))$, полученных для каждой j -й изохронной диаграммы.

Аналитическое выражение для осредненной функции подобия $\overline{(1 + G(t_j))}$ может быть найдено по результатам аппроксимации дискретных значений $(1 + G(t_j))$ функции сглаживающими кубическими сплайнами в виде

$$\overline{1 + G(t_j)} = A_j + B_j(t - t_j) + C_j(t - t_j)^2 + D_j(t - t_j)^3, \quad (2.4)$$

коэффициенты которого

$$B_j = \frac{\bar{G}_{j+1} - \bar{G}_j}{h_j} - \frac{h_j}{6}(2k_j + k_{j+1}); \quad C_j = \frac{k_j}{2}; \quad D_j = \frac{k_{j+1} - k_j}{6h_j}$$

найжены по результатам аппроксимации дискретных значений функции подобия (здесь $\bar{G}_j = 1 + G_j$ и $\bar{G}_{j+1} = 1 + G_{j+1}$ — табличные значения функции подобия в точках t_j, t_{j+1} ; k_j, k_{j+1} — коэффициенты сплайна; $h_j = t_j - t_{j+1}$).

3. Определение параметров ядер наследственности. Исходя из механического смысла ядра ползучести имеем, что ядро в теории вязкоупругости (1.1) является мерой скорости пропорционально скорости ползучести, то есть

$$K(t) = \frac{1}{\lambda} \frac{d(1 + G(t))}{dt}, \quad (3.1)$$

где все обозначения совпадают с принятыми выше.

Подставляя (2.4) в (3.1), получаем уравнение

$$\lambda K(t_j) = B_j + 2C_j(t - t_j) + 3D_j(t - t_j)^2, \quad (3.2)$$

которое позволяет рассчитывать дискретные значения $K(t_j)$ ядра ползучести $K(t)$ для произвольных моментов времени t_j .

Параметры ядер наследственности в (1.1) определяются по результатам аппроксимации дискретных значений ядер ползучести выбранным аналитическим выражением ядра. В работе аналитическое выражение ядра выбрано в форме дробно-экспоненциальной функции (1.3).

При реализации процедуры аппроксимации дискретные значения ядер ползучести, в области малых времен $\{0, t_*\}$, на которые влияют динамические эффекты мгновенного приложения нагрузки, учитываются с использованием функций уменьшающих их влияние на функционал. В этом случае задача сводится к минимизации функционала

$$F(\lambda, q_s) = \sum_{j=1}^{n_*} \left\{ p_j(t) [K(t_j) - \lambda K(t, q_s)] \right\}^2 + \sum_{j=n_*}^n [K(t_j) - \lambda K(t, q_s)]^2, \quad (3.3)$$

где функция $p_j(t)$ задается соотношением

$$p_j(t) = \frac{1}{1 + \left| \frac{K(t_j) - \lambda K(t, q_s)}{K(t_*) - \lambda K(t_*, q_s)} \right|^m}, \quad (3.4)$$

причем $p_j(t) \rightarrow 0$, когда $K(t, q_s) \rightarrow \infty$, и $p_j(t) \rightarrow 1$, когда $K(t_j) = \lambda K(t, q_s)$.

Здесь q_s — параметры ядра ползучести ($s = 1, k$); n — число дискретных значений ядра ползучести в области $\{0, t_j\}$; n_* — число дискретных значений ядер

ползучести в области малых времен $\{0, t_*\}$; m — порядок моментов разностей ($m = 2, 3, 4, 5, \dots$).

Реологический параметр λ и параметры ядра ползучести q_s в (3.3) определяются в два этапа. На первом этапе определяются начальные значения λ_0 и q_{s0} искомым параметров, т. е. значения без учета дискретных значений ядер $K(t_j)$ из области малых времен $\{0, t_*\}$. На втором этапе, используя ранее найденные значения параметров λ_0 и q_{s0} , из (3.4), и выбирая моменты разностей m , определяем первичный набор весовых $p_j(t)$. Окончательные функций $p_j(t)$ устанавливаем исходя из минимизации суммарной квадратичной ошибки функционала

$$\delta = \sum_{j=1}^{n_*} \left\{ p_j(t) [K(t_j) - \lambda_0 K(t, q_{s0})] \right\}^2, \quad (3.5)$$

которая соответствует квадратичной ошибке функционала (3.3) и является общей ошибкой функционала.

Выводы. Предложен метод определения параметров ядер наследственности в линейной модели вязкоупругости. Метод позволяет достаточно точно определять параметры ядер наследственности линейно-вязкоупругих материалов по данным испытаний на одноосную ползучесть при постоянных напряжениях и характеристикам диаграммы мгновенного деформирования. В качестве ядра наследственности использовано дробно-экспоненциальную функцию.

Список литературы

- Голуб, В. П., Кобзарь, Ю. М., & Рагулина, В. С. (2009). Метод определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов с использованием весовых функций. *Теоретическая и прикладная механика*, (46), 70–80.
- Голуб, В. П., Кобзарь, Ю. М., & Рагулина, В. С. (2012). Определение параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. *Теоретическая и прикладная механика*, (51), 26–35.
- Колтунов, А. А. (1969). Метод определения объемных и сдвиговых характеристик упруго-вязких наследственных сред по экспериментам на одноосное растяжение (сжатие). *Механика полимеров*, (4), 754–758.
- Колтунов, М. А. (1976). *Ползучесть и релаксация*. Москва: Высшая школа.
- Работнов, Ю. Н. (1977). *Элементы наследственной механики твердых тел*. Москва: Наука.

Напружений стан шаруватих неоднорідних порожнистих циліндрів з овальним поперечним перерізом

Л. С. Рожок

Національний транспортний університет, Київ, Україна
r.l.s@ua.fm

На основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є розв'язано задачу про напружений стан шаруватих неоднорідних порожнистих циліндрів з овальним поперечним перерізом за певних граничних умов на торцях при дії внутрішнього тиску. Проведено дослідження впливу форми поперечного перерізу та жорсткості середнього шару на напружений стан тришарових циліндрів розглядуваного класу.

Ключові слова: дискретні ряди Фур'є, крайова задача, напружений стан, неоднорідні порожнисті циліндри, овали Касині, шарувата структура.

Останнім часом в архітектурі та будівельній галузі широкого застосування знаходять порожнисті секції еліптичного та овального поперечного перерізу (Jasion, 2015), що викликано, з одного боку, незвичним естетичним виглядом, а з іншого — можливістю орієнтувати такі секції для найбільш ефективного опору навантаженню, оскільки вони мають різну жорсткість відносно основних осей (Железнов, 2006).

Розглядаються тришарові циліндри симетричної будови, з еліптичним та двома видами овального поперечного перерізу в ортогональній криволінійній системі координат s, ψ, γ , де s ($0 \leq s \leq l$) — довжина дуги вздовж твірної, ψ ($0 \leq \psi \leq 2\pi$) — полярний кут у поперечному перерізі, γ ($-H/2 \leq \gamma \leq H/2$) — нормальна координата по товщині циліндра. Подібні форми поперечного перерізу можна описати одним рівнянням для овалів Касині в полярній системі координат (Савелов, 1960)

$$\rho = \sqrt{c^2 \cos 2\psi + \sqrt{c^4 \cos^2 2\psi + (a^4 - c^4)}}, \quad 0 \leq \frac{c}{a} < 1, \quad a \neq 0,$$

де ρ — полярний радіус, c — половина відстані між фокусами, a — добуток відстаней від фокусів до довільної точки. Відношення параметрів c та a характеризує форму поперечного перерізу. Якщо $c = 0$ — маємо коло, при $0 < \frac{c}{a} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ — еліпс, $c = a\sqrt{2}$ — овал, $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{c}{a} < 1$ — сплюснутий овал (Рожок, 2017).

За вихідні приймаються основні рівняння лінійної просторової теорії пружності для ізотропного тіла (Тимошенко, 1972). Циліндри складені із шарів, що взаємодіють без проковзування та відриву. Напружений стан i -го шару у виб-

раній системі координат характеризується величинами $\sigma_s^i(s, \psi, \gamma), \sigma_\psi^i(s, \psi, \gamma), \sigma_\gamma^i(s, \psi, \gamma), \tau_{s\psi}^i(s, \psi, \gamma), \tau_{\psi s}^i(s, \psi, \gamma), \tau_{s\gamma}^i(s, \psi, \gamma), \tau_{\gamma s}^i(s, \psi, \gamma), \tau_{\psi\gamma}^i(s, \psi, \gamma), \tau_{\gamma\psi}^i(s, \psi, \gamma)$.

Згідно з законом парності дотичних напружень, існують залежності: $\tau_{s\psi}^i = \tau_{\psi s}^i, \tau_{s\gamma}^i = \tau_{\gamma s}^i, \tau_{\psi\gamma}^i = \tau_{\gamma\psi}^i$. Переміщення точок i -го шару при деформації тіла внаслідок дії прикладеного навантаження характеризується величинами $u_s^i(s, \psi, \gamma), u_\psi^i(s, \psi, \gamma), u_\gamma^i(s, \psi, \gamma)$.

Умови спряження шарів мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^i &= \sigma_\gamma^{i+1}, & \tau_{s\gamma}^i &= \tau_{s\gamma}^{i+1}, & \tau_{\psi\gamma}^i &= \tau_{\psi\gamma}^{i+1}; \\ u_\gamma^i &= u_\gamma^{i+1}, & u_s^i &= u_s^{i+1}, & u_\psi^i &= u_\psi^{i+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

На торцях циліндра розглядаються умови простого обпирання у вигляді

$$\sigma_s^i = u_\psi^i = u_\gamma^i = 0 \text{ при } s = 0; \quad s = l. \quad (2)$$

Циліндри знаходяться під дією внутрішнього тиску. Граничні умови на бічних поверхнях будуть

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^+ &= 0; & \tau_{s\gamma}^+ &= 0; & \tau_{\psi\gamma}^+ &= 0 & \text{при } \gamma = \frac{H}{2}; \\ \sigma_\gamma^- &= q_\gamma; & \tau_{s\gamma}^- &= 0; & \tau_{\psi\gamma}^- &= 0 & \text{при } \gamma = -\frac{H}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

За розв'язувальні функції вибираємо компоненти напруження і переміщення, у яких формулюються граничні умови на бічних поверхнях (3) та умови спряження шарів (1).

Граничні умови на торцях циліндра (2) дозволяють відокремити змінні в напрямку твірної циліндра шляхом розвинення розв'язувальних функцій та компонентів навантаження в ряди Фур'є вздовж твірної. Для відокремлення змінних у напрямку прямої циліндра, у розв'язувальній системі диференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами відносно амплітудних значень рядів Фур'є вздовж твірної, добутки розв'язувальних функцій на коефіцієнти, що перешкоджають даному відокремленню, позначаються новими доповняльними функціями.

Отримана таким чином розв'язувальна система рівнянь, формально не містить членів, що не дозволяють відокремити змінні в напрямку прямої циліндра. Подаючи далі розв'язувальні, доповняльні функції, а також компоненти навантаження у вигляді розвинень у ряди Фур'є вздовж прямої і підставляючи їх у розв'язувальну систему з доповняльними функціями, відокремлюють змінні вздовж прямої циліндра, отримавши при цьому для кожного шару систему звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у вигляді (індекс номеру шару, а також номер гармоніки в розкладі вздовж твірної в позначеннях розв'язувальних функцій та компонент навантаження опустимо)

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= (c_2 - 1)\varphi_{1,k}^1 + \lambda_n \tau_{s\gamma,k} - \varphi_{4,k}^1 + b_{22}\varphi_{1,k}^5 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22}\varphi_{4,k}^3; \\
\frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_1\lambda_n \sigma_{\gamma,k} + b_{11}\lambda_n^2 u_{s,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^3 - b_{66}\varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{4,k}^2; \\
\frac{d\tau_{\psi\gamma,k}}{d\gamma} &= b_{66}\lambda_n^2 u_{\psi,k} - c_2\varphi_{3,k}^1 - 2\varphi_{2,k}^1 - b_{22}\varphi_{5,k} + (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22}\varphi_{7,k};
\end{aligned}
\tag{4}$$

$$\frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} = c_4\sigma_{\gamma,k} - c_2\varphi_{4,k}^2 + c_1\lambda_n u_{s,k} - c_2\varphi_{1,k}^3;$$

$$\frac{du_{s,k}}{d\gamma} = a_{55}\tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,n,k}; \quad \frac{du_{\psi,k}}{d\gamma} = a_{44}\tau_{\psi\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2, \quad (k = \overline{0, K}; n = \overline{0, N})$$

із граничними умовами

$$\begin{aligned}
\gamma = H / 2 : \quad \sigma_{\gamma,k} &= 0; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0; \\
\gamma = -H / 2 : \quad \sigma_{\gamma,k} &= q_{\gamma,k}; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0.
\end{aligned}
\tag{5}$$

Отриману крайова задача (4), (5) можна розв'язати стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації (Grigorenko, 2018). Оскільки, через запровадження доповняльних функцій, кількість невідомих системи (4) перевищує кількість рівнянь, на кожному кроці застосування чисельного методу, значення амплітуд доповняльних функцій визначаються за допомогою процедури знаходження коефіцієнтів Фур'є для функцій, заданих таблицею значень (Фихтенгольц, 2003).

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина циліндра $l = 40$, товщина $H = h_1 + h_2 + h_3 = 1 + 2 + 1 = 4$; параметри поверхні відліку — $a = 20$; $c = 8$ (еліпс), $c = 14,14$ (овал), $c = 16$ (сплюснутий овал).

Механічні параметри: коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, модуль Юнга $E = E_0 = 1$ для несучих шарів; $E = dE_0$ — для середнього шару, де $d = 1; 0,5; 0,1$.

Результати розв'язування задачі наведені в таблиці для значень переміщень u_γ та напружень σ_ψ в середньому перерізі довжини в тих перерізах напрямної, де вони приймають максимальних значень: для переміщень у перерізі $\psi = \frac{\pi}{2}$ та для напружень у перерізі $\psi = \frac{3\pi}{10}$, на зовнішній ($\gamma = 2$), внутрішній ($\gamma = -2$) та серединній ($\gamma = 0$) поверхнях залежно від форми поперечного перерізу та жорсткості середнього шару. При $d = 1$ маємо ізотропний однорідний циліндр.

Таблиця 1

d	γ	$u_{\gamma} E_0 / q_0 \ (\psi = \pi / 2)$				$\sigma_{\psi} / q_0 \ (\psi = 3\pi / 2)$			
		c							
		0	8	14,14	16	0	8	14,14	16
1	-2	94,29	219,36	745,72	1119,00	4,56	7,16	36,36	70,69
	0	90,57	216,09	747,99	1128,00	4,39	7,21	34,98	66,64
	2	87,20	210,30	735,94	1115,20	4,31	7,35	34,11	63,84
0,1	-2	172,01	382,95	1221,14	1758,43	8,73	13,57	61,43	114,06
	0	163,06	373,15	1217,10	1765,14	0,64	1,11	5,48	10,18
	2	154,71	361,03	1199,34	1751,16	7,57	12,54	54,04	97,26
0,5	-2	125,15	276,94	878,39	1276,52	6,19	9,54	43,91	82,02
	0	120,22	272,42	880,04	1285,78	2,85	4,63	20,89	38,32
	2	115,57	264,88	866,08	1271,91	5,70	9,52	40,79	73,34

З наведених у таблиці даних випливає, що при відхиленні форми поперечного перерізу від кругової, максимальні значення переміщень збільшуються в усіх перерізах товщини приблизно у 2,2–2,4 рази для значення коефіцієнта $c = 8$; у 7–8,4 рази для $c = 14,14$ і у 10,2–12,8 разів для $c = 16$ як для однорідного циліндра, так і для циліндрів з неоднорідною структурою по товщині. За наявності більш м'якого середнього шару спостерігається збільшення величини максимальних переміщень u_{γ} в 1,6–1,8 рази для $d = 0,1$ та в 1,2–1,3 рази для $d = 0,5$, порівняно з однорідним ізотропним циліндром.

Для розподілу максимальних значень напружень σ_{ψ} має місце така картина. При відхиленні форми поперечного перерізу від кругової, максимальні значення напружень на бічних поверхнях збільшуються приблизно в 1,5–1,7 рази для значення коефіцієнта $c = 8$; у 7,1–8,6 рази для $c = 14,14$ і у 12,8–15,5 разів для $c = 16$ як для однорідного циліндра, так і для циліндрів з неоднорідною структурою по товщині. Наявність більш м'якого середнього шару призводить до збільшення величини максимальних напружень σ_{ψ} на бічних поверхнях в 1,7–1,9 рази для $d = 0,1$ та в 1,2–1,4 рази для $d = 0,5$, порівняно з однорідним ізотропним циліндром.

Отже, варіюючи геометричними параметрами та жорсткістю середнього шару, можна впливати на перерозподіл полів переміщень та напружень у тришарових неоднорідних овальних порожнистих циліндрах з метою вибору більш раціональної структури та форми їх поперечного перерізу.

Список літератури

Grigorenko, Y. M., & Rozhok, L. S. (2018). Layered inhomogeneous hollow cylinders with concave corrugations under internal pressure. *International Applied Mechanics*, 54(5), 531–539. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0905-z>

- Jasion, P., & Magnucki, K. (2015). Elastic buckling of Cassini ovaloidal shells under external pressure—theoretical study. *Archives of Mechanics*, 67(2), 179–192.
<http://am.ippt.pan.pl/am/article/view/v67p179>
- Железнов, Л. П., Кабанов, В. В., & Бойко, Д. В. (2006). Нелинейное деформирование и устойчивость овальных цилиндрических оболочек при чистом изгибе с внутренним давлением. *Прикл. механика и техн. физика*, 47(3), 119–125.
https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=120026&ARTICLE_ID=125949
- Рожок, Л. С. (2017). Рівновага порожнистих некругових циліндрів при зміні форми їх поперечного перерізу. *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки*, (1), 36–39.
- Савелов, А. А. (1960). *Плоские кривые. Систематика, свойства, применение.* (Справочное руководство). Москва: Физматгиз.
- Тимошенко, С. П. (1972). *Курс теории упругости.* Киев: Наукова думка.
- Фихтенгольц, Г. М. (2003). *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* (Т. 3). Москва: ФИЗМАТЛИТ.

Точкові оцінки числових характеристик дискретного розподілу в контексті виборів президента

Н. П. Селезньова, Ю. О. Сараєва

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

nadijasel@gmail.com

Електоральні процеси можна досить добре моделювати за допомогою методів математичної статистики. Як правило, для цього використовують середні показники, такі як середнє значення, мода, медіана. Запропонована робота присвячена обчисленню та інтерпретації таких показників на прикладі рейтингових оцінок, отриманих при опитуванні респондентів напередодні президентських виборів 2019 року в Україні.

Ключові слова: мода, медіана, коефіцієнт варіації, коефіцієнт кореляції.

Закономірності як в економіці, так і в соціології можна виразити у вигляді зв'язків і властивостей різних показників, а також у вигляді математичних моделей. Такі залежності і моделі можна отримати тільки шляхом обробки реальних статистичних даних з урахуванням внутрішніх механізмів зв'язку й випадкових факторів за допомогою статистико-математичного інструментарію.

У статті на основі оброблення статистичних даних, отриманих шляхом опитування респондентів про вибори президента України 31 березня 2019 року, яке проводилось у період з 25 лютого по 6 березня, обчислено різні статистичні показники. Було опитано 100 респондентів. Респондентами вибрано студентів КПІ ім. Ігоря Сікорського 2–4 курсів різних факультетів. Вибіркова сукупність складається зі 100 студентів. Опитування було проведено у формі анонімного анкетування.

Хоча вибірка є, очевидно, нерепрезентативною, аналіз таких статистичних даних має сенс, у плані опису методології статистичної обробки подібних даних. Показники, обчислені після такої обробки даних, допоможуть провести глибший аналіз ситуації, краще зрозуміти настрої електорату.

Рейтинг партій та кандидатів складався за системою голосування Борда. Перед респондентами ставилось завдання поставити рейтингові бали дев'ятьом кандидатам (десятого кандидата респонденти могли запропонувати самі) від «1» до «10». «1» — найгірше ставлення респондента до кандидата, «2» — оцінка погана, ..., «10» — найкраща оцінка.

За такою ж шкалою ті самі респонденти поставили рейтингові бали партіям, лідерами яких є кандидати у президенти. Найбільше оцінок «10» отримав Зеленський (31 «десятка»), Порошенко на другому місці по кількості набраних «10» (6 «десяток»). Слід зауважити, що респонденти ставили також нульові бали, незважаючи на пояснення в анкеті. Скоріше всього ці респонденти не хотіли ні за кого голосувати. Такі анкети не ввійшли до нашого розгляду.

Цікавим є розподіл «десяток» та «одиниць» — «любові» та «нелюбові» респондентів до кандидатів.

На наступному графіку показано розподіли «10» та «1»:



Рис. 1

Із рис.1 можна зробити висновок, що респонденти віддають перевагу в першу чергу Зеленському, потім Порошенку. Одиниці розподілились між кандидатами більш рівномірно. Розрив між кількістю «1» та «10» вказує на те, що «нелюбов» виборців до кандидатів суттєво переважає симпатії. Слід зауважити, що, загалом, виборці були налаштовані негативно щодо кандидатів, а особливо щодо Тимошенко, Вілкула та Ляшка. Розрив між «любов'ю» та «нелюбов'ю», тобто між кількістю «1» та «10» найменшим є у Зеленського (16 одиниць), у Порошенка та Садового — 22 одиниці, найбільшим — у Тимошенко — 35 одиниць та у Вілкула — 34 одиниці. Очевидно, що суспільство на цих виборах показало досить велику розшарованість у своїх електоральних уподобаннях. Особливо добре видно настрої електорату з наступної діаграми, на якій у відсотках представлено загальний розподіл рейтингових балів.



Рис. 2

На рис. 2 по осі ОХ відкладено рейтингові бали від 1 до 10, а по осі ОУ кількість таких балів у відсотках по всій вибірці. Як бачимо, маємо найбільше негативних оцінок кандидатів і суттєво менше позитивних оцінок.

Характер розподілу рейтингових оцінок представлено на рис. 3.

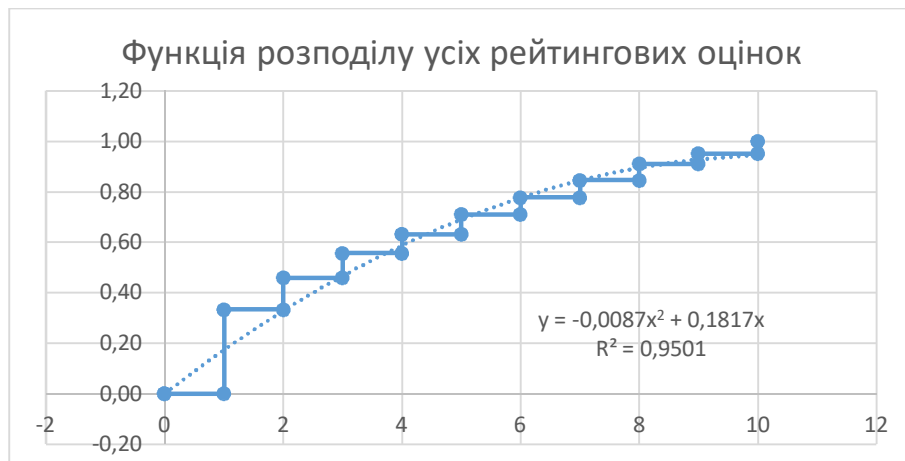


Рис. 3

Перейдімо до статистичних показників.

Найбільш поширеною є міра центральної варіації — *середнє арифметичне*, визначається такою формулою (Кремер, 2004):

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

де n — обсяг вибірки. Вона характеризує типовий розмір ознаки.

Наступна діаграма представляє середній рейтинговий бал, поставлений виборцями кандидатам.

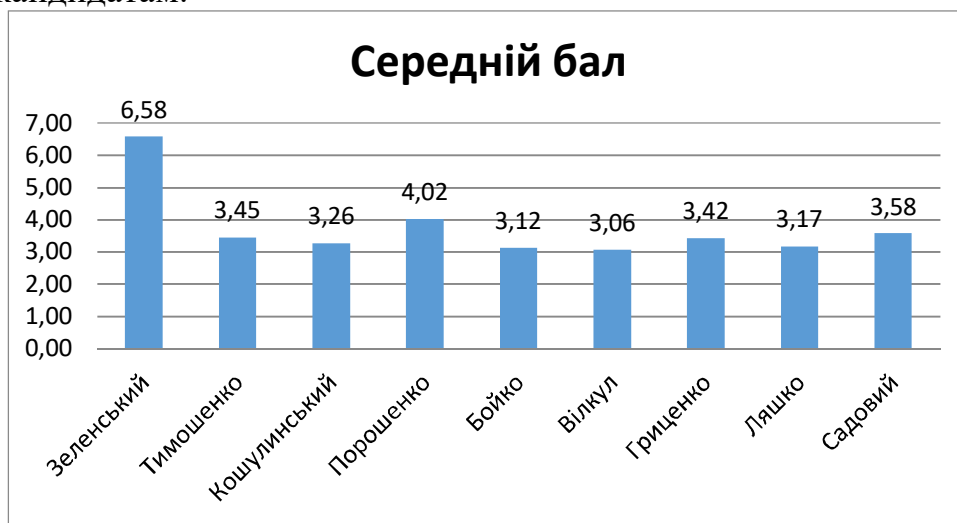


Рис. 4

Як бачимо з рис. 4, найвищий середній бал отримав Зеленський, на другому місці стоїть Порошенко. Найнижчий середній бал у Вілкула.

Коефіцієнт варіації V визначається у відсотках, як відношення середньоквадратичного відхилення до середнього (Кремер, 2004):

$$V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100\%.$$

Показник варіації характеризує однорідність сукупності, тобто надійність і типовість середньої величини. Вважають, що сукупність є однорідною, якщо показник варіації $\leq 33\%$. Отже, високі коефіцієнти варіації свідчать про те, що суспільство є досить неоднорідним у своїх вподобаннях.

Коефіцієнти варіації рейтингів кандидатів представлено наступною діаграмою (рис. 5).

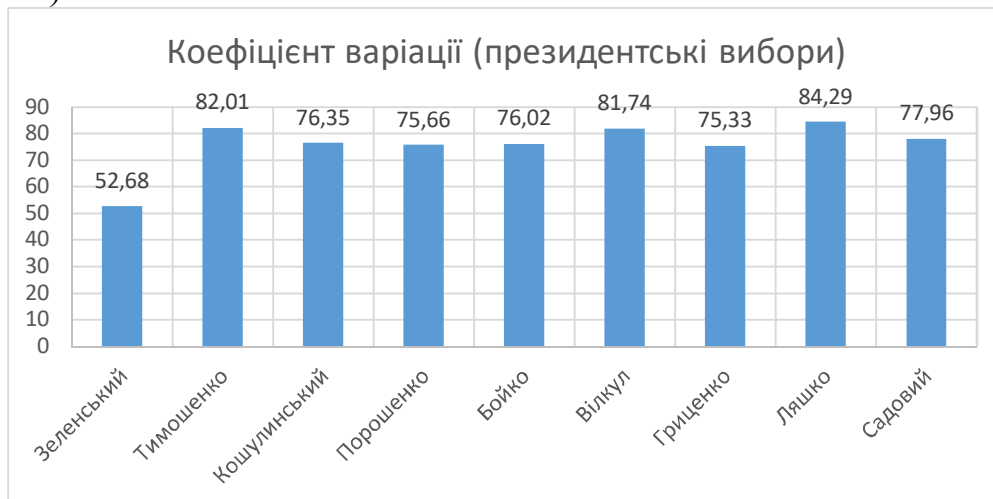


Рис. 5

З цієї діаграми (рис. 5) можна зробити висновок, що коефіцієнт варіації за даними електоральних опитувань є найменшим у Зеленського, а отже, його рейтинг є найбільш стійким. Найвищий коефіцієнт варіації в Ляшка. Його рейтинг є найменш стійким, тобто виборці ще не визначились відносно цього кандидата.

Мода — це значення в сукупності спостережень, яке зустрічається найчастіше, тобто варіанта з найбільшою частотою.

Інша міра центральної тенденції — *медіана* (Me) — варіанта, яка ділить варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант. Якщо кількість варіант непарна, тобто $n = 2k + 1$, то $Me = x_{k+1}$; при парному $n = 2k$ медіана

$$Me = \frac{x_{k+1} + x_k}{2} \text{ (у дискретному випадку) (Кремер, 2004).}$$

У наступній таблиці записано основні точкові характеристики вибірки складеної з усіх рейтингових оцінок.

Середнє значення	Мода	Середньоквадратичне відхилення	Ексцес	Асиметрія	Медіана
3,87	1	2,89	-0,85	0,66	3

З цієї таблиці, можна зробити висновок, що загальний розподіл оцінок є несиметричним тому, що

Мода $\neq$ медіані $\neq$ середньому значенню.

Асиметрія та ексцес суттєво відрізняються від нульового значення, що може свідчити про те, що розподіл не є гаусовським.

Тут мода показує, що оцінка «1» суттєво переважає решту оцінок, а це свідчить про те, що переважна більшість респондентів ставиться негативно до всіх

депутатів. Ці кандидати уособлюють певні парламентські партії, отже, і ставлення до цих партій також є негативним. Робота в парламенті таких партій може бути сприйнята в подальшому виборцями також негативно.

Медіана показує середню тенденцію. У контексті рейтингових оцінок медіана свідчить про те, що, оцінка «3» ділить нашу вибірку на дві частини.

Дослідімо відповідність між вподобаннями виборців до кандидатів у Президенти та відповідними партіями шляхом обчислення відповідних коефіцієнтів кореляції. Для цього обчислюємо вибіркові коефіцієнти кореляції між оцінками кандидатів у Президенти та партіями, лідерами яких є ці кандидати.

Обчислення вибіркових парних коефіцієнтів кореляції, проведемо за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y}$$

де $s_x = \sqrt{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}$ і $s_y = \sqrt{\bar{y}^2 - (\bar{y})^2}$ — середньоквадратичні відхилення, n — обсяг вибірки, (x_i, y_i) — результат i -го спостереження.

У наступній таблиці введемо позначення партій та кандидатів.

Партії		Кандидати в президенти	
Слуга народу	A1	Зеленський	A
Батьківщина	B1	Тимошенко	B
Свобода	C1	Кошуринський	C
Солідарність	D1	Порошенко	D
ОП За життя	E1	Бойко	E
Громадська опозиція	G1	Гриценко	G
Радикальна партія	H1	Ляшко	H
Самопоміч	I1	Садовий	I

Обчислені коефіцієнти кореляції між кандидатами у президенти та відповідними партіями представлено в наступній таблиці.

	A1;A	B1;B	C1;C	D1;D	E1;E	G1;G	H1;H	I1;I
коэф. корел.	0,93	0,77	0,56	0,62	0,48	0,48	0,70	0,46

Як бачимо з останньої таблиці, найвищий коефіцієнт кореляції між партією «Слуга народу» та кандидатом Зеленським, а найнижчий між «Самопоміччю» та кандидатом Садовим. У цілому, обчислені коефіцієнти кореляції є достатньо високими, що свідчить про те що виборці досить чітко зіставляють кандидатів з відповідними партіями.

Описані статистичні оцінки в цілому допоможуть проаналізувати настрої виборців перед президентськими чи парламентськими виборами. Такі статистичні показники можна обчислювати й інтерпретувати не тільки в політичних процесах, а й у прийнятті певних управлінських рішень, які приймаються шляхом голосування. Наприклад, подібні дослідження представлено в роботі Селезньова та Рудик (2018). За рейтингові оцінки взято оцінки школярів та студентів, отриманих ними під час іспитів.

Список літератури

- Кремер, Н. Ш. (2004). Теория вероятностей и математическая статистика (2-е изд.). Москва: ЮНИТИ-ДАНА.
- Селезньова, Н. П., Рудик, Т. О. (2018). Математичне моделювання моніторингу якості освіти *У Development trends in pedagogical and psychological sciences: The experience of counties of Eastern Europe and prospects of Ukraine*. Riga, Latvia: Baltija Publishing, 298–317. https://doi.org/10.30525/978-9934-571-27-5_46

Математична модель радіаційно-індукованої сегрегації в концентрованих металевих сплавах Fe-Cr-Ni

Р. В. Скороход, О. В. Коропов

Інститут прикладної фізики НАН України, Суми, Україна

r.skorokhodqq@gmail.com

Сформульована математична модель радіаційно-індукованої сегрегації в трикомпонентних концентрованих металевих сплавах Fe-Cr-Ni. Модель включає в себе систему зв'язаних нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних та початкові і граничні умови до неї. Наведена схема числового розв'язку запропонованої системи диференціальних рівнянь. Знайдені просторові залежності концентрацій компонентів сплаву. Описані та розраховані математичні характеристики радіаційно-індукованої сегрегації, такі як: збагачення (збіднення) компонента сплаву, повна ширина концентраційного профілю на рівні половини збагачення (збіднення) та сегрегаційна площа. Одержані залежності даних характеристик від температури та дози опромінення.

Ключові слова: математична модель, математичні характеристики, комп'ютерне моделювання, радіаційно-індукована сегрегація, концентровані металеві сплави, точкові дефекти, концентраційні профілі.

1. Вступ. Зміни локального елементного складу та мікроструктури, які виникають у металевих сплавах під дією опромінення негативно впливають на їх механічні й фізико-хімічні властивості та можуть призвести до радіаційного окрихчення і подальшого руйнування конструкцій ядерних реакторів (Was, 2017). Для аналізу впливу опромінення на матеріали ядерної енергетики проводять дослідження зразків-свідків, які були опромінені нейтронами в робочій камері реактора (Гриценко и др., 2011) та симуляційні експерименти з використанням електронів, протонів чи важких іонів (Was, 2017). Альтернативний підхід полягає у використанні комп'ютерного моделювання фізичних процесів, які перебігають під дією опромінення (див., наприклад, Скороход & Коропов, 2019). Останній підхід виглядає дуже перспективним зважаючи на постійний ріст потужності сучасних комп'ютерів.

Явище, яке полягає у просторовому перерозподілі концентрацій компонентів металевих сплавів під дією опромінення, називається *радіаційно-індукованою сегрегацією* (PIS). Унаслідок PIS спостерігається збіднення або збагачення зразка сплаву по головним, домішковим чи легуючим компонентам поблизу стоків дефектів (Ardell & Bellon, 2016; Was, 2017). Під дією PIS, зокрема, поблизу поверхонь матеріалу та на міжзеренних межах можуть формуватися виділення нової фази (Чуистов, 2003; Koropov, 2011, 2012; Коропов, 2014; 2016; Koropov & Skorokhod, 2019). Такі виділення, як відомо, гальмують рух дислокацій, які є носіями пластичної деформації (Френкель, 1972), а насамперед пластичний металевий сплав стає твердішим і навіть може окрихчуватись шляхом утворення і розростання тріщин (Котречко & Мешков, 2008). Додатково PIS може призвести до погіршення механічної міцності межзеренних меж,

корозійної стійкості та ряду інших фізико-хімічних властивостей, які є чутливими до змін локального складу сплаву.

Виходячи з вищесказаного, математичне моделювання РІС в багатокомпонентних концентрованих металевих сплавах є актуальною задачею сучасної прикладної математики. Метою даної роботи, яка природно продовжує роботу Скороход та Коропов (2019), є формулювання математичної моделі РІС в концентрованих сплавах Fe-Cr-Ni та розрахунок математичних характеристик концентраційних профілів елементів Cr і Ni.

2. Формулювання математичної моделі. Запропонована математична модель РІС в концентрованих металевих сплавах Fe-Cr-Ni базується на першому та другому законах Фіка з урахуванням оберненого ефекту Кіркендала (Allen & Was, 1998; Was, 2017; Коропов, 2017). Уважатимемо, що зразок сплаву представлений шаром з постійною товщиною ℓ (займає область $0 \leq x \leq \ell$), де поверхні зразка ($x = 0, x = \ell$) є ідеальними стоками точкових дефектів (ТД). Також до розгляду включимо дислокаційну підсистему у сплаві, яка є розосередженим стоком ТД. Тоді зміна концентрацій компонентів сплаву C_k , вакансій C_v та міжвузельних атомів C_i з часом задається системою п'яти зв'язаних нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних:

$$\begin{cases} \frac{\partial C_k}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}_k & (k = \text{Fe, Cr, Ni}), \\ \frac{\partial C_v}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}_v + K_0 - R_{iv} C_v C_i - R_{vD} (C_v - C_v^{eq}), \\ \frac{\partial C_i}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}_i + K_0 - R_{iv} C_v C_i - R_{iD} (C_i - C_i^{eq}). \end{cases} \quad (1)$$

де $\mathbf{J}_m$ — потоки атомів і ТД сорту m , K_0 — швидкість продукування (генерації) радіаційних ТД, R_{iv} — коефіцієнт рекомбінації вакансій та міжвузельних атомів, R_{dD} (нижній індекс $d = v, i$) — швидкість поглинання ТД дислокаціями. Відмітимо, що в системі рівнянь (1) концентрації атомів та ТД наведені в молярних долях, а за рахунок малості концентрацій ТД $C_{v(i)}$, для концентрацій компонентів сплаву C_k справедлива рівність

$$C_{\text{Fe}} + C_{\text{Cr}} + C_{\text{Ni}} = 1. \quad (2)$$

Потоки $\mathbf{J}_k$ атомів сорту k , вакансій $\mathbf{J}_v$ та міжвузельних атомів $\mathbf{J}_i$, які фігурують у системі рівнянь (1), мають вигляд (Was, 2017; Коропов, 2017)

$$\mathbf{J}_k = - \left(\sum_{d=v,i} d_{k,d} C_d \right) \alpha \nabla C_k + C_k (d_{k,v} \nabla C_v - d_{k,i} \nabla C_i), \quad (3)$$

$$\mathbf{J}_v = - \sum_{k=\text{Fe, Cr, Ni}} d_{k,v} C_k \nabla C_v + \alpha C_v \left(\sum_{k=\text{Fe, Cr, Ni}} d_{k,v} \nabla C_k \right), \quad (4)$$

$$\mathbf{J}_i = - \sum_{k=\text{Fe, Cr, Ni}} d_{k,i} C_k \nabla C_i - \alpha C_i \left(\sum_{k=\text{Fe, Cr, Ni}} d_{k,i} \nabla C_k \right), \quad (5)$$

де α — термодинамічний фактор, $d_{k,v}$ і $d_{k,i}$ — кінетичні коефіцієнти (diffusivity coefficients), які пов'язані з парціальними коефіцієнтами дифузії

атомів $\left(D_k = \sum_{d=v,i} d_{k,d} C_d \right)$ та точкових дефектів $\left(D_{v(i)} = \sum_{k=\text{Fe, Cr, Ni}} d_{k,v(i)} C_k \right)$.

Уважатимемо, що для потоків компонентів (3) та ТД (4), (5) у кожній точці простору виконується умова балансу (Was, 2017; Коропов, 2017)

$$\mathbf{J}_{\text{Fe}} + \mathbf{J}_{\text{Cr}} + \mathbf{J}_{\text{Ni}} = -\mathbf{J}_v + \mathbf{J}_i, \quad (6)$$

з якої випливає, що в системі (1) незалежними є тільки чотири рівняння. Розв'язуючи систему рівнянь (1) відносно концентрацій Cr (C_{Cr}), Ni (C_{Ni}), вакансій C_v та міжвузельних атомів C_i , концентрацію Fe (C_{Fe}) знайдемо з додаткової умови (2)

$$C_{\text{Fe}} = 1 - C_{\text{Cr}} - C_{\text{Ni}}.$$

3. Початкові та граничні умови. Як і в роботі Скороход та Коропов (2019), уважатимемо, що в початковий момент часу ($t = 0$) атоми сорту k розподілені рівномірно по всьому зразку, цебто

$$C_k(x, t)|_{t=0} = C_k^0, \quad (7)$$

а концентрації ТД $C_{v(i)}(x, t)$ дорівнюють термодинамічно рівноважним значенням $C_{v(i)}^{eq}$

$$C_v(x, t)|_{t=0} = C_v^{eq}, \quad C_i(x, t)|_{t=0} = C_i^{eq}. \quad (8)$$

Оскільки ТД генеруються однорідно по всьому об'єму зразка, природно вважати, що задача симетрична відносно площини $x = \frac{\ell}{2}$. Отже, надалі розгля-

датимемо лише ліву половину зразка $\left(0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \right)$, а градієнти всіх концентрацій у площині симетрії покладемо рівними нулю:

$$\left. \frac{\partial C_k(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\ell/2} = \left. \frac{\partial C_v(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\ell/2} = \left. \frac{\partial C_i(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\ell/2} = 0. \quad (9)$$

Для концентрацій компонентів $C_k(x, t)$ мають виконуватися закони збереження речовини (Was, 2017; Скороход & Коропов, 2019):

$$\int_0^{\ell/2} C_k(x, t) dx = \frac{\ell}{2} C_k(x, t) \Big|_{t=0}. \quad (10)$$

Оскільки поверхня зразка вважається ідеальним стоком ТД, концентрації $C_v(x, t)$ та $C_i(x, t)$ в безпосередній близькості від поверхні ($x \rightarrow +0$) дорівнюють відповідним термодинамічно рівноважним значенням C_v^{eq} , C_i^{eq} :

$$C_v(x, t) \Big|_{x \rightarrow +0} = C_v^{eq}, \quad C_i(x, t) \Big|_{x \rightarrow +0} = C_i^{eq}. \quad (11)$$

4. Числовий розв'язок системи рівнянь РС. Як і в попередніх роботах (Skorokhod et al., 2018; Скороход & Коропов, 2019), просторові похідні апроксимуємо відношенням відповідних скінченних різниць та проведемо процедури обезрозмірення кінетичних коефіцієнтів, часу інтегрування і масштабування концентрацій ТД. Зокрема, ∇C_j та $\nabla^2 C_j$ представимо у вигляді (Тихонов & Самарский, 1999)

$$\nabla C_j = \frac{C_{j+1} - C_{j-1}}{2\Delta x}, \quad \nabla^2 C_j = \frac{C_{j+1} - 2C_j + C_{j-1}}{\Delta x^2}, \quad (12)$$

де Δx — крок різницевої схеми (див. рис. 1). У цій статті моделювання проведено для зразка товщиною $\ell = 400$ нм з кроком різницевої схеми

$\Delta x = \frac{\ell}{2N+1} \approx 0.333$ нм ($N = 600$). Далі, безрозмірні кінетичні коефіцієнти

$d_{k,v(i)}^*$, безрозмірний час τ та масштабовані концентрації вакансій C_v^* і міжвузельних атомів C_i^* записуємо наступним чином

$$d_{k,v}^* = \frac{2Td_{k,v}}{\ell + \Delta x}, \quad d_{k,i}^* = \frac{2Td_{k,i}}{\ell + \Delta x}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad (13)$$

$$C_v^* = d_{Cr,v}^* C_v, \quad C_i^* = d_{Cr,i}^* C_i, \quad (14)$$

де характерний час опромінення $T = D/K_0$, а D — набрана доза опромінення.

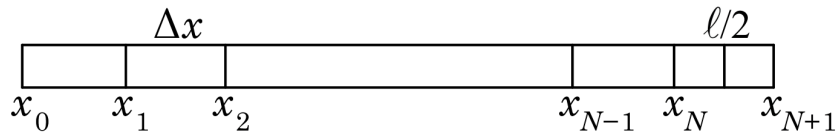


Рис. 1. Схематичне зображення різницевої схеми; x_i ($i = 0, 1, \dots, N+1$) — точки розбиття, Δx — крок різницевої схеми, $\ell/2$ — половина товщини шару сплаву

Подальші розрахунки проводилися для металевого сплаву Fe-20 ат.%Cr-8 ат.%Ni. Вхідні параметри, які використовувалися при числовому розв'язку системи (1), наведені в роботі Скороход та Коропов (2019). Значення темпера-

тури T , швидкості набору дози K_0 та набраної дози D , за замовченням, прийmemo наступними: $T = 350\text{ }^{\circ}\text{C}$, $K_0 = 10^{-6}$ зна/с, $D = 10$ зна.

5. Математичні характеристики РІС. За математичні характеристики концентраційних профілів елементів сплаву зазвичай використовують наступні величини (Was, 2017):

1) концентрація елемента A в безпосередній близькості від поверхні зразка (поверхнева концентрація елемента A)

$$C_A(+0, t) = C_A(x, t) \Big|_{x \rightarrow +0}; \quad (15)$$

Таблиця 1. Значення поверхневих концентрацій $C_{\text{Cr}(\text{Ni})}$, $\text{FWHM}_{\text{Cr}(\text{Ni})}$ та сегрегаційних площ $S_{\text{Cr}(\text{Ni})}$ при різних значеннях дози опромінення D

Елемент	D , зна	C_A , ат.%	FWHM_A , нм	S_A , нм·ат.%
Cr	0.1	12.63	0.32	4.72
	0.2	11.36	0.44	8.19
	0.5	10,28	0.64	14.33
	1	9.8	0.78	19.46
	2	9.5	0.89	24.3
	5	9.26	0.99	29.7
	10	9.15	1.04	32.95
	20	9.09	1.07	35.43
Ni	0.1	11.46	0.26	1.55
	0.2	12.56	0.27	2.84
	0.5	13,87	0.32	5.48
	1	14.66	0.38	8.06
	2	15,25	0.43	10.85
	5	15.76	0.48	14.38
	10	16.01	0.5	16.7
	20	16.16	0.51	18.65

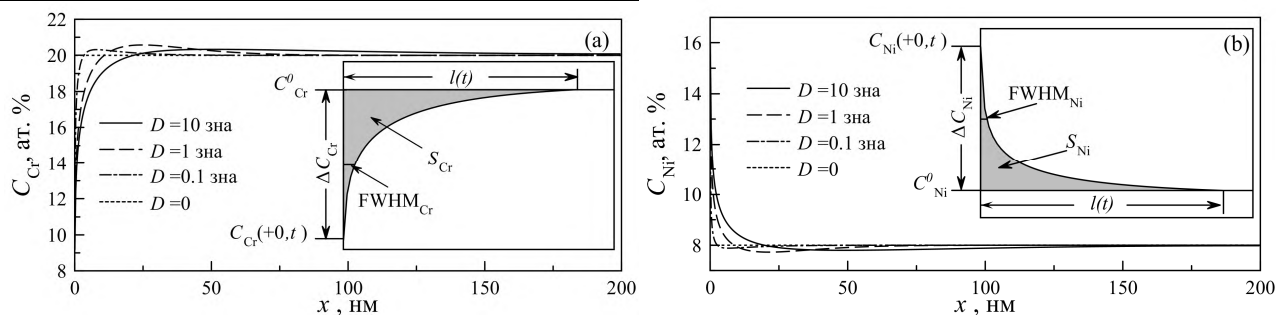


Рис. 2. Залежності концентрацій Cr (a) та Ni (b) від координати x при різних значеннях дози опромінення D .

2) величина збагачення (збіднення) елемента A

$$\Delta C_A = \left| C_A(x, t) \Big|_{x \rightarrow +0} - C_A^0 \right|, \quad (16)$$

де знак виразу під позначенням модуля вказує на збагачення ($C_A(x, t) \Big|_{x \rightarrow +0} - C_A^0 > 0$) чи збіднення ($C_A(x, t) \Big|_{x \rightarrow +0} - C_A^0 < 0$) елемента A ;

3) повна ширина концентраційного профілю елемента A на рівні половини збагачення (збіднення) FWHM_A (full width at half maximum);

4) сегрегаційна площа — площа фігури, яка обмежена кривою $C_A = C_A(x, t)$ і прямою $C_A = C_A^0$ у межах $0 \leq x \leq l(t)$:

$$S_A = \int_0^{l(t)} |C_A(x, t) - C_A^0| dx, \quad (17)$$

де $l(t)$ — відстань від початку координат ($x = 0$) до точки перетину кривої $C_A = C_A(x, t)$ та прямої $C_A = C_A^0$.

Приведені величини (п. 1–4) зображені на рис. 2. Відмітимо, що значення сегрегаційної площі S_A чутливіше до зміни форми концентраційного профілю порівняно з іншими наведеними характеристиками.

6. Залежності математичних характеристик РІС від дози опромінення та температури. На рис. 2 наведені концентраційні профілі Cr ($C_{\text{Cr}} = C_{\text{Cr}}(x)$) та Ni ($C_{\text{Ni}} = C_{\text{Ni}}(x)$) при різних значеннях дози опромінення D . Зі збільшенням дози спостерігається збільшення величин збіднення Cr і збагачення Ni, суттєве збільшення повної ширини концентраційних профілів та сегрегаційних площ елементів Cr, Ni. Величини поверхневих концентрацій $C_{\text{Cr(Ni)}}(+0, t)$, повних ширин концентраційних профілів на рівні половини збагачення (збіднення) $\text{FWHM}_{\text{Cr(Ni)}}$ і сегрегаційних площ $S_{\text{Cr(Ni)}}$ елементів Cr та Ni для дискретних значень доз опромінення від 0.1 до 20 зна представлені в табл. 1.

Залежності введених математичних характеристик РІС для елементів Cr та Ni від температури T ($\Delta C_{\text{Cr(Ni)}} = \Delta C_{\text{Cr(Ni)}}(T)$, $\text{FWHM}_{\text{Cr(Ni)}} = \text{FWHM}_{\text{Cr(Ni)}}(T)$ та $S_{\text{Cr(Ni)}} = S_{\text{Cr(Ni)}}(T)$) представлені на рис. 3. Зі зростанням температури T від $T = 200^\circ\text{C}$ спостерігається збільшення величини збіднення Cr, яка досягає максимального значення при $T = 397^\circ\text{C}$. При подальшому зростанні температури збіднення Cr зменшується і при $T \geq 624^\circ\text{C}$ стає менше 0.1 ат.%. Якісно аналогічна ситуація спостерігається і для Ni. Відмітимо, що зі збільшенням температури крутизна концентраційних профілів Cr та Ni зменшується (див. рис. 4, на якому зображені залежності $C_{\text{Cr}} = C_{\text{Cr}}(x)$ і $C_{\text{Ni}} = C_{\text{Ni}}(x)$ при різних значеннях температури T). Зазначимо також, що сегрегаційні площі $S_{\text{Cr(Ni)}}$ досягають максимальних значень при вищих температурах порівняно з максимальними значеннями збагачень (збіднень).

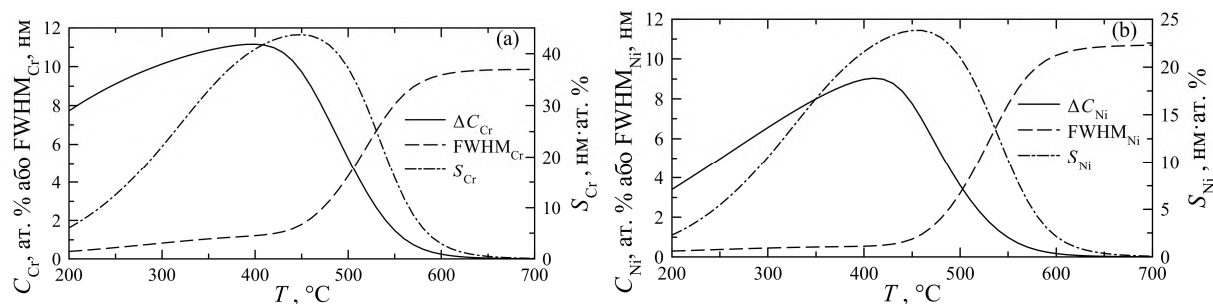


Рис. 3. Залежності збагачень $\Delta C_{Cr(Ni)}$ (суцільні лінії), $FWHM_{Cr(Ni)}$ (штрихові лінії) та сегрегаційних площ $S_{Cr(Ni)}$ (штрих-пунктирні лінії) від температури T .

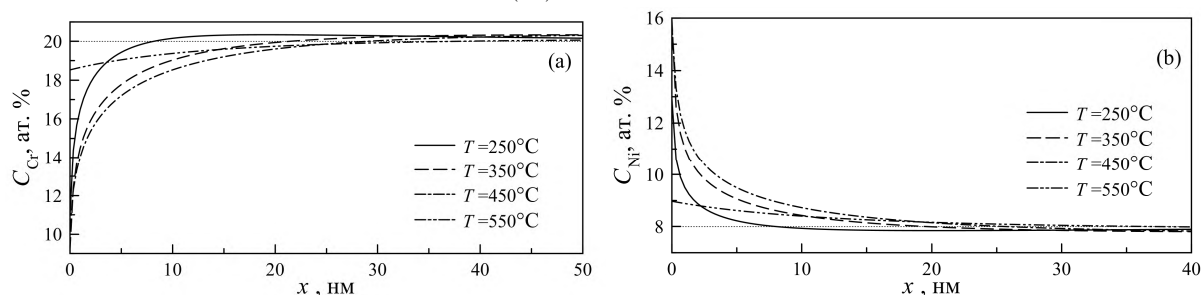


Рис. 4. Залежності концентрацій Cr (a) та Ni (b) від координати x при різних значеннях температурах T

Для всього дослідженого діапазону температур $200^{\circ}C \leq T \leq 700^{\circ}C$ спостерігається збільшення $FWHM_{Cr(Ni)}$ зі зростанням T .

7. Висновки. У роботі проведено математичне моделювання РІС в концентрованому трикомпонентному металевому сплаві Fe-20%Cr-8%Ni. Одержано концентраційні профілі Cr ($C_{Cr} = C_{Cr}(x)$) та Ni ($C_{Ni} = C_{Ni}(x)$) при різних значеннях набраної дози опромінення D й температури T . Проведено аналіз даних профілів та розрахованих математичних характеристик РІС для елементів Cr і Ni, а саме: $C_A(+0, t)$, ΔC_A , $FWHM_A$, S_A ($A = Cr, Ni$).

Список літератури

- Allen, T. R., & Was, G. S. (1998). Modeling radiation-induced segregation in austenitic Fe-Cr-Ni alloys. *Acta Mater.*, 46(10), 3679–3691. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(98\)00019-6](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(98)00019-6)
- Ardell, A. J., & Bellon, P. (2016). Radiation-induced solute segregation in metallic alloys. *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, 20(3), 115–139. <https://doi.org/10.1016/j.cossms.2015.11.001>
- Koropov, A. V. (2011). Morphological stability of two-dimensional new phase precipitate located at the grain boundary. *Tech. Phys.*, 56(12), 1781–1786. <https://doi.org/10.1134/S1063784211120097>
- Koropov, A. V. (2012). Ostwald ripening of diffusion-limited small-size precipitates at grain boundaries. *J. Nano-Electron. Phys.*, 4(3), 03013. https://jnep.sumdu.edu.ua/en/component/content/full_article/819
- Koropov, O., & Skorokhod, R. (2019). Визрівання Оствальда сферичних виділень на міжзеренній межі, яке лімітується поверхневою кінетикою. *Східно-європейський фізичний журнал*, (1), 75–85. <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2019-1-07>

- Skorokhod, R., Buhay, O., Bilyk, V., Denysenko, V., & Koropov, O. (2018). Моделювання радіаційно-індукованої сегрегації в бінарних сплавах. *Східно-європейський фізичний журнал*, 5(1), 61–69. <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2018-1-07>
- Was, G. S. (2017). *Fundamentals of radiation materials science. Metals and alloys* (2nd ed.). New York: Springer.
- Гриценко, А. В., Демехин, В. Л., Илькович, В. В., Буканов, В. Н., & Васильева, Е. Г. (2011). Некоторые этапы разработки дополнительной программы образцов-свидетелей для реактора ВВЭР-1000. *Ядерна та радіаційна безпека*, 50(2), 29–34.
- Коропов, О. В. (2014). Контрольоване поверхневою кінетикою визрівання Оствальда плоских включень на межі зерен. *Ж. нано-електрон. фіз.*, 6(1), 01025. https://jner.sumdu.edu.ua/uk/full_article/1196
- Коропов, О. В. (2016). Математична модель пізньої стадії сегрегації домішки на міжзеренній межі у випадку утворення плоских виділень нової фази. У *Матеріалах Сімнадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука* (Т. 1, с. 161–166). Київ: НТУУ «КПІ».
- Коропов, О. В. (2017). Диференціальні рівняння радіаційно-індукованої сегрегації в п'ятикомпонентних концентрованих металевих стопах. У *матеріалах Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції ім. академіка Михайла Кравчука* (Т. 1, с. 86–90). Київ: НТУУ «КПІ». <http://matan.kpi.ua/public/files/kk2016/kravchuk2016-volume1.pdf>
- Котречко, С. А., & Мешков, Ю. Я. (2008). *Предельная прочность. Кристаллы, металлы, конструкции*. Киев: Наукова думка.
- Скороход, Р. В. & Коропов, А. В. (2019). Моделирование радиационно-индуцированной сегрегации в сплавах Fe-Cr-Ni. *Физика твердого тела*, 61(12), 2281–2288. <https://doi.org/10.21883/FTT.2019.12.48605.53ks>
- Тихонов А. Н., & Самарский, А. А. (1999). *Уравнения математической физики: Учебное пособие* (6-е изд., испр. и доп.). Москва: Изд-во МГУ.
- Френкель, Я. И. (1972). *Введение в теорию металлов* (4-е изд.). Ленинград: Наука.
- Чуистов, К. В. (2003). *Старение металлических сплавов* (2-е изд.). Киев: Академперіодика.

Про результати програмно-аналітичного моделювання динаміки неповно спостережуваних лінійних просторово розподілених систем

В. А. Стоян¹, О. О. Задорожний²

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

²КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

v_a_sroyan@ukr.net, bukashok18@gmail.com

У статті ставиться та розв'язується задача побудови програмно моделюючого комплексу для дослідження стану дискретно спостережуваних лінійних просторово розподілених динамічних систем. Задачі розв'язуються за умов неповноти інформації про їх початково-крайовий стан.

Ключові слова: просторово-розподілені системи, динамічні системи, початково-крайові задачі, системи в умовах невизначеності.

Класичні методи математичної фізики та чисельного інтегрування дозволяють досить успішно розв'язувати початково-крайові задачі для певних класів систем за умови коректного (за кількістю та якістю) задання початково-крайових спостережень за останніми. На практиці ж виникають проблеми дослідження процесів і явищ, які зазвичай функціонують в умовах неповноти інформації про їх початково-крайовий стан, або коли ця інформація не стикується з вимогами класичного математичного апарату, вибраного для дослідження.

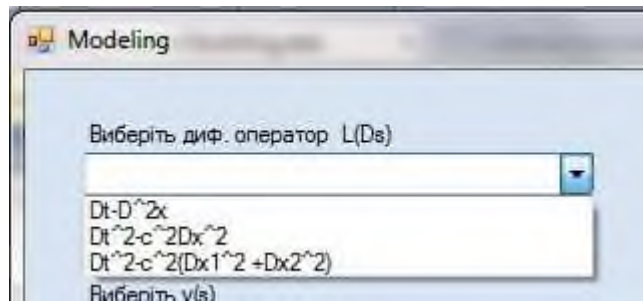
Теоретичні основи методики побудови функції стану просторово розподіленої динамічної системи, яка будучи розв'язком її диференціальної моделі, за середньоквадратичним критерієм узгоджується з наявними спостереженнями за зовнішньо-динамічним станом системи незалежно від кількості та якості останніх, розв'язані у Стоян (2019), у Стоян (2017) були підготовлені до лабораторних тестувань.

Нижче впродовж ставиться та розв'язується задача побудови програмно моделюючого комплексу для дослідження стану дискретно спостережуваних просторово розподіленої динамічної системи, функціонування якої в заданій просторово-часовій області $S_0^T = S_0 \times [0; T]$ описується лінійною диференціальною моделлю (Стоян, 2017, 2019):

$$L(\partial_S)y(s) = u(s), \quad (1)$$

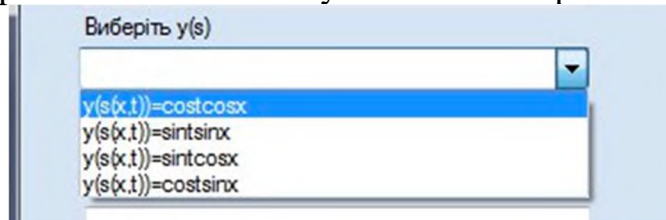
де $s = (x, t) = (x_1, \dots, x_n, t) \in S_0^T$ — просторово-часова змінна, $\partial_S = \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}, \partial_t$, а $u(s)$ — функція зовнішньо розподілених просторово-часових збурень.

Передбачено, що оператор $L(\partial_S)$ досліджуваної системи вибирається зі списку:



Для спрощення математичної частини програмно моделюючого комплексу з вибраним $L(\partial_s)$ автоматично зв'язується і передатна функція $G(s - s')$, яка буде фігурувати в розрахункових формулах задачі.

Для формулювання спостережень за зовнішньо-динамічним станом $y(s)$ системи, останній вибирається теж із списку можливих варіантів:

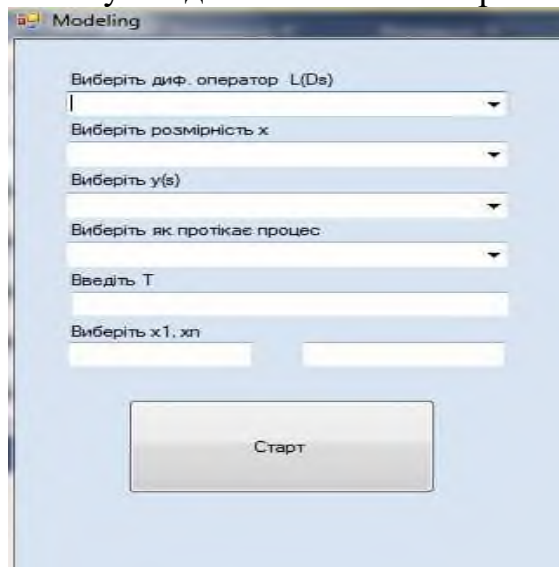


Наявність диференційного оператора $L(\partial_s)$ математичної моделі системи дозволяє у відповідність вибраному $y(s)$ поставити й функцію $u(s)$ просторово розподілених динамічних збурень. Початково-крайові спостереження

$$Y^0 = \text{col}(y_l^0, l = \overline{1, L_0}), \quad (2)$$

$$Y^\Gamma = \text{col}(y_l^\Gamma, l = \overline{1, L_\Gamma}) \quad (3)$$

за станом системи визначаються програмно значеннями $y_l^0 = y(s_l^0) \in S_0$ та $y_l^\Gamma = y(s_l^\Gamma) \in \Gamma \times [0; T]$ (тут Γ — контур просторової області S_0) функції $y(s)$ стану системи в точках $(x_l^0, 0)$ ($l = \overline{1, L_0}$) та s_l^Γ ($l = \overline{1, L_\Gamma}$) відповідно, які через інтерфейсну частину комплексу вводяться в комп'ютер:



Через інтерфейс вводяться і координати точок s_m^0 ($m = \overline{1, M_0}$) та s_m^Γ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$), у яких програмно визначаються значення u_m^0 ($m = \overline{1, M_0}$) та u_m^Γ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$) функцій $u_0(s)$ ($s \in S_0 \times (-\infty; 0)$) та $u_\Gamma(s)$ ($s \in \mathbb{R}^n \setminus S_0 \times [0; T]$), якими спостереження $Y = \text{col}(Y^0, Y^\Gamma)$ моделюються так, щоб

$$\Phi = \sum_{l=1}^{L_0} (y(s) \big|_{t=0, x=x_l^0} - y_l^0)^2 + \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (y(s) \big|_{s=s_l^\Gamma} - y_l^\Gamma)^2 \rightarrow \min_{y_*(s)}, \quad (4)$$

де $y_*(s)$ — функція стану системи (1), яка будучи розв'язком рівняння (1) (Стоян, 2017), зі спостереженнями (2) узгоджується згідно з (3).

При цьому (Стоян, 2019):

$$u_0 = \text{col}(u_m^0, m = \overline{1, M_0}) = (A_{11}^T, A_{21}^T)P^{-1}\bar{Y},$$

$$u_\Gamma = \text{col}(u_m^\Gamma, m = \overline{1, M_\Gamma}) = (A_{12}^T, A_{22}^T)P^{-1}\bar{Y},$$

де

$$A = \text{col}(\text{str}(A_{ij}, j = \overline{1, 2}), i = \overline{1, 2}), P_1 = AA^T,$$

а

$$A_{11} = \text{col}((\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^0) \big|_{t=0, x=x_l^0}, m = \overline{1, M_0}), l = \overline{1, L_0}), r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{12} = \text{col}((\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^\Gamma) \big|_{t=0, x=x_l^0}, m = \overline{1, M_\Gamma}), l = \overline{1, L_0}), r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{21} = \text{col}((\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^0) \big|_{s=s_l^\Gamma}, m = \overline{1, M_0}), l = \overline{1, L_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$A_{22} = \text{col}((\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^\Gamma) \big|_{s=s_l^\Gamma}, m = \overline{1, M_\Gamma}), l = \overline{1, L_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

а розв'язком задачі буде

$$y_*(s) = \int_{S_0^T} G(s - s')u(s')ds' + \sum_{m=1}^{M_0} G(s - s_m^0)u_m^0 + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s - s_m^\Gamma)u_m^\Gamma,$$

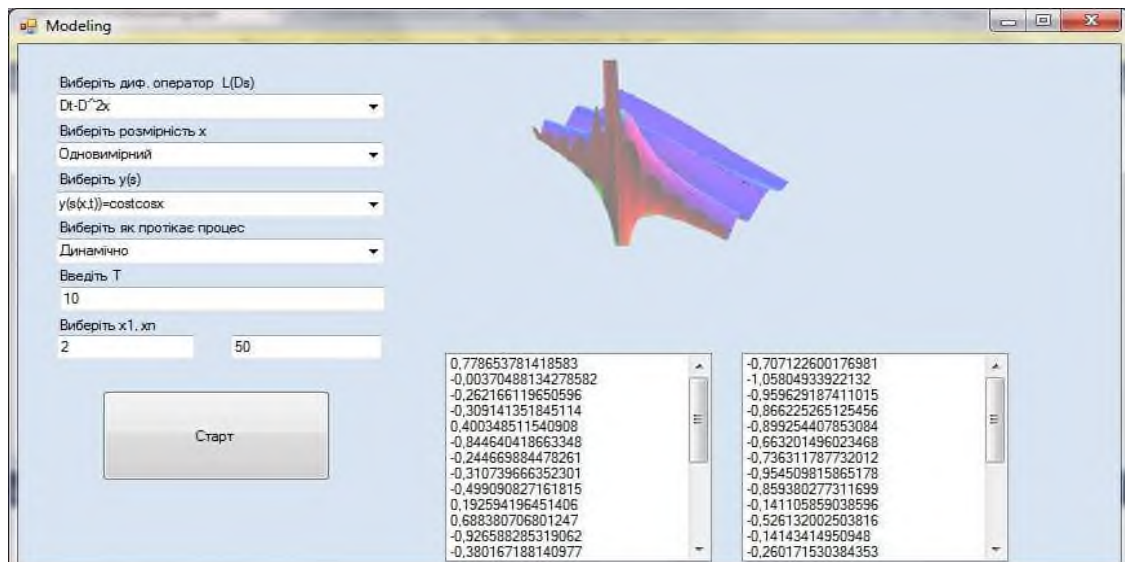
таке, що

$$\min_{y_*(s)} \Phi = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T A A^{-1} \bar{Y}.$$

Нижче наведені фрагменти інтерфейсної частини програмного комплексу та результат математичного моделювання одновимірної (для спрощення) динамічної системи

$$(\partial_t - a^2 \partial_x^2)y(x, t) = u(x, t).$$

Оцінка результатів тестування програми візуалізована порівнянням таблиць значень функції $y_*(x, t)$ в точках $(x_l^0, 0)$ ($l = \overline{1, L_0}$) та (x_l^Γ, t_l) ($l = \overline{1, L_\Gamma}$) зі спостережуваними в них значеннями y_l^0 ($l = \overline{1, L_0}$) та y_l^Γ ($l = \overline{1, L_\Gamma}$) функцій $y(x, t)$:



Незважаючи на довільність у виборі функції стану $y(x, t)$, точок $(x_i^0, 0)$, (x_i^Γ, t_i^Γ) та за невеликої кількості останніх результати тестування викладеної вище методики математичного моделювання виявилися досить успішними.

Такі ж позитивні результати були отримані при програмно-аналітичному дослідженні двовимірних за просторовими координатами дискретно спостережуваних динамічних систем, що дозволяє методику математичного моделювання стану лінійних динамічних систем з розподіленими параметрами (Стоян, 2017, 2019) рекомендувати до інженерно-прикладного використання.

Список літератури

- Стоян, В. А. (2017). *Основи лабораторного моделювання просторово розподілених динамічних систем*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
- Стоян, В. А. (2019). *Математическое моделирование динамики неполно наблюдаемых линейных пространственно распределенных систем*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Визначення параметрів ядер інтегральних операторів у нелінійній моделі в'язкопружності за їх резольвентами

П. В. Фернаті

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
creep@inmech.kiev.ua

Досліджується метод визначення параметрів ядер інтегральних операторів нелінійної моделі в'язкопружності спадкового типу для складного напруженого стану. В основі методу покладено можливість аналітичного обернення інтегральних операторів, при цьому їх параметри знаходяться за параметрами резольвент. Параметри ядер для складного напруженого стану визначаються з дослідів на релаксацію за умов одновісного розтягу. Даний метод дозволяє підвищити варіативність вибору базових експериментів і відповідно розширює межі застосування моделі.

Ключові слова: нелінійна модель в'язкопружності, інтегральні рівняння, складний напружений стан, ядра інтегральних операторів, резольвента, релаксація напружень.

Необхідність відтворення та прогнозування деформаційних процесів, що відбуваються із плином часу, у нелінійно-в'язкопружних матеріалах сприяла появі великої кількості нелінійних моделей повзучості спадкового типу. Визначальні рівняння цих моделей здебільшого будують з використанням інтегральних операторів, що дозволяє враховувати історію навантаження і відтворювати спадкові ефекти. Параметри ядер інтегральних операторів визначають за результатами обробки базових експериментальних даних і характеризують в'язкопружні властивості даного матеріалу.

У статтях Голуб та ін. (2004, 2015, 2017, 2019) розвинуто нелінійну тривимірну модель в'язкопружності спадкового типу. Суттєвим обмеженням при використанні даної моделі як і будь-якої іншої є відсутність базових експериментальних даних необхідних для визначення параметрів і функцій, що входять до визначальних рівнянь моделі або відсутність надійних методів, які дозволяють визначити їх з наявних експериментальних даних. Ситуація значно ускладнюється у випадку складного напруженого стану, при цьому кількість параметрів і функцій, що необхідно визначати і, відповідно, кількість базових експериментів значно збільшується. У статті Голуб та ін. (2019) викладено два методи визначення параметрів ядер спадковості для випадку складного напруженого стану із двох варіантів базових експериментів на повзучість за умов одновісного розтягу та чистого скручення. Передбачається, що за базові експерименти в цьому випадку можуть слугувати експерименти на релаксацію.

Метою даного дослідження є підвищити варіативність базових експериментальних даних шляхом розроблення методу визначення параметрів ядер інтегральних операторів визначальних рівнянь повзучості за умов складного напруженого стану, з дослідів на релаксацію за умов одновісного розтягу.

Постановка задачі дослідження. Розглядаються процеси повзучості та релаксації напружень ізотропних, однорідних, нестаріючих нелінійно-

в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Визначальні рівняння повзучості, що задають залежність між компонентами тензора деформацій ε_{ij} , тензора напружень σ_{ij} і часом t за умов сталої температури записуються у вигляді

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v(t) &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(\sigma_i(t); t)}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t)) \quad (i, j = \overline{1, 3}); \\ \varphi_i(\varepsilon_i(t)) &= \sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t - \tau) \sigma_i(\tau) d\tau; \\ \varphi_v(\varepsilon_v(t)) &= \sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t - \tau) \sigma_0(\tau) d\tau.\end{aligned}\quad (1)$$

Їхнім розв'язком є рівняння релаксації:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t) &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i(\varepsilon_i(t); t)}{\varepsilon_i(t)} \left(\varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v(t) \right) \quad (i, j = \overline{1, 3}); \\ \sigma_i(t) &= \phi_i(\varepsilon_i(t)) - \lambda_i \int_0^t R_i(t - \tau) \varphi_i(\varepsilon_i(\tau)) d\tau; \\ \sigma_0(t) &= \phi_v(\varepsilon_v(t)) - \lambda_v \int_0^t R_v(t - \tau) \varphi_v(\varepsilon_v(\tau)) d\tau,\end{aligned}\quad (2)$$

де $\varepsilon_v(\cdot)$ — об'ємна деформація; $\varepsilon_i(\cdot)$ — інтенсивність деформацій; $\sigma_0(t)$ — середнє напруження; $\sigma_i(t)$ — інтенсивність напружень; $\varphi_i(\varepsilon_i(t))$, $\varphi_v(\varepsilon_v(t))$ — функції, що задають нелінійність скалярних в'язкопружних властивостей; $K_i(t - \tau)$, $K_v(t - \tau)$ і $R_i(t - \tau)$, $R_v(t - \tau)$ — ядра повзучості та релаксації, відповідно (деякі функції з параметрами $\bar{\alpha}_j$); λ_i , λ_v — реологічні параметри; $\delta_{i,j}$ — дельта-функція Кронекера.

Рівняння (1) та (2) містять шість функцій — $\varphi_i(\varepsilon_i(t))$, $\varphi_v(\varepsilon_v(t))$, $K_i(t - \tau)$, $K_v(t - \tau)$, $R_i(t - \tau)$, $R_v(t - \tau)$, параметри яких мають визначатись шляхом обробки результатів базових експериментів. Функції $\varphi_i(\varepsilon_i(t))$ та $\varphi_v(\varepsilon_v(t))$, що відповідають за склерономні властивості середовища і визначаються з короточасних дослідів на розтяг, вважаємо відомими, а методи їх визначення не розглядаємо. За в'язкопружну поведінку середовища відповідають параметри λ_i , λ_v та параметри ядер спадковості $\bar{\alpha}_j$. Ядром спадковості можна вибрати будь-яку функція, що задовольняє певним умовам, викладеним у монографії Работнова (1977).

Ядра інтегральних операторів $K(t - \tau)$ та $R(t - \tau)$ в (1) і (2) пов'язані відомим співвідношенням (Работнов, 1977)

$$R(t) - K(t) = \lambda \int_0^t K(t - \tau) R(t - \tau) d\tau. \quad (3)$$

За умов одновісного розтягу ненульовими компонентами тензора напружень та деформацій є компоненти: $\sigma_{11}(t)$, $\varepsilon_{11}(t)$, $\varepsilon_{22}(t)$, $\varepsilon_{33}(t)$, а залежності інтенсивності напружень σ_i , інтенсивності деформацій ε_i , середнього напруження σ_0 , об'ємної деформації ε_v , від компонент тензора напружень σ_{ij} та тензора деформацій ε_{ij} , які наведені в Малинин (1975), набувають вигляду:

$$\sigma_i(t) = \sigma_{11}(t); \quad \varepsilon_i(t) = \frac{2}{3}(\varepsilon_{11}(t) - \varepsilon_{22}(t)); \quad \sigma_0(t) = \frac{1}{3}\sigma_{11}(t); \quad \varepsilon_v(t) = \varepsilon_{11}(t) + 2\varepsilon_{22}(t), \quad (4)$$

де прийнято, що $\varepsilon_{22}(t) = \varepsilon_{33}(t)$. Напруження $\sigma_{11}(t)$ визначається з дослідів на релаксацію за умов одновісного розтягу.

Метою даного дослідження є розробити метод визначення реологічних параметрів та параметрів ядер інтегральних рівнянь, виходячи з дослідів на релаксацію за умов одновісного розтягу. Для цього необхідно скласти функціонали, що містять відповідні оброблені експериментальні, які дозволяють розраховувати значення шуканих параметрів шляхом їх мінімізації за допомогою чисельних методів. Експериментальна апробація даного методу є метою подальших досліджень.

Основні положення методу. Для напружень релаксації за умов одновісного розтягу $\varepsilon_{11}(t) = \text{const}$ з (2) з врахуванням (4) отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) = \sigma_{11}(t) &= \phi_i(\varepsilon_i) \left(1 - \lambda_i \int_0^t R_i(\tau) d\tau \right), \\ \sigma_0(t) = \frac{1}{3}\sigma_{11}(t) &= \phi_v(\varepsilon_v) \left(1 - \lambda_v \int_0^t R_v(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (5)$$

які використовуються згодом для побудови функціоналів.

Виходячи з (5), функціонали для знаходження реологічних параметрів та параметрів ядер беремо у вигляді:

$$\begin{aligned}
F_i(\bar{\alpha}, \lambda_i) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\sigma_{11(k)}(t_j) - \phi_i(\varepsilon_{i(k)}) \left(1 - \lambda_i \int_0^{t_j} R_i(\tau) d\tau \right) \right]^2, \\
F_v(\bar{\alpha}, \lambda_i) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{3} \sigma_{11(k)}(t_j) - \phi_v(\varepsilon_{v(k)}) \left(1 - \lambda_v \int_0^{t_j} R_v(\tau) d\tau \right) \right]^2,
\end{aligned} \tag{6}$$

де n — кількість експериментальних кривих релаксації; $\sigma_{11(k)}(t_j)$ — значення релаксуючого напруження в момент часу t_j , визначеному для k -ї експериментальної кривої релаксації. Мінімізуючи дані функціонали чисельними методами, отримуємо значення шуканих реологічних параметрів λ_i , λ_v і параметрів резольвент $R_i(t - \tau)$ і $R_v(t - \tau)$, при цьому інтеграли в (6) знаходяться аналітично, оскільки структури функцій ядер інтегральних операторів мають бути обрані заздалегідь.

Параметри ядер $K_i(t - \tau)$ і $K_v(t - \tau)$ знаходяться з визначених параметрів резольвент. У випадку резольвентних операторів, наприклад, якщо ядра $K_i(t - \tau)$ і $K_v(t - \tau)$ вибрані у вигляді дробово-експоненційної функції (Работнов, 1977), структура функцій резольвент при їх оберненні не зміниться, також деякі параметри залишаться без змін, що суттєво спрощує аналітичні процедури даного методу.

У випадку, складних структур ядер, коли аналітичне знаходження інтегралів у (6) ускладнене, параметри ядер $R_i(t - \tau)$ і $R_v(t - \tau)$ можна знаходити за диференційованими за часом кривими релаксації. У цьому випадку з (5) отримуємо рівняння

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(t)' &= \phi_i(\varepsilon_i) \lambda_i R_i(t); \\
\sigma_0(t)' &= \phi_v(\varepsilon_v) \lambda_v R_v(t),
\end{aligned} \tag{7}$$

а параметри ядер знаходяться шляхом мінімізації функціоналів:

$$\begin{aligned}
F_i(\bar{\alpha}, \lambda_i) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\sigma_{11(k)}(t_j)' - \phi_i(\varepsilon_i) \lambda_i R_i(t) \right]^2; \\
F_v(\bar{\alpha}, \lambda_i) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{3} \sigma_{11(k)}(t_j)' - \phi_v(\varepsilon_v) \lambda_v R_v(t) \right]^2,
\end{aligned} \tag{8}$$

де $\sigma_{11(k)}(t_j)'$ — значення швидкості зміни напруження релаксації в момент часу t_j , визначеному для диференційованої за часом експериментальної k -ї кривої релаксації.

Висновки. Запропоновано метод визначення параметрів ядер інтегральних рівнянь нелінійної тривимірної моделі повзучості з дослідів на релаксацію за

умов одновісного розтягу. В основі методу покладено відому аналітичну процедуру обернення інтегральних операторів. Метод розрахований на будь-яку структуру ядер, що задовольняють умовам затухаючої пам'яті. У випадку використання резольвентних ядер аналітичні процедури методу значно спрощуються. Даний метод потребує експериментальної апробації, а також порівняння його точності з існуючими методами.

Список літератури

- Голуб, В. П., Кобзарь, Ю. М., & Фернати П. В. (2004). Об одном подходе к построению реологической модели среды с упрочнением. *Прикладная механика*, 40(7), 81–91.
- Голуб, В. П., Кобзарь, Ю. М., & Фернати, П. В. (2019). К определению параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. *Прикладная механика*, 55(6), 25–45.
- Голуб, В. П., Павлюк, Я. В., & Фернати, П. В. (2017). К определению параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости. *Прикладная механика*, 53(4), 76–93.
- Голуб, В. П., Рагулина, В. С., & Фернати, П. В. (2015). Определение параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих изотропных материалов при кручении. *Прикладная механика*, 51(2), 88–101.
- Малинин, Н. Н. (1975). *Прикладная теория пластичности и ползучести* (2-е изд.). Москва: Машиностроение.
- Работнов, Ю. Н. (1977). *Элементы наследственной механики твердых тел*. Москва: Наука.

Дослідження осадку циліндричної заготовки в умовах осесиметричної деформації

Т. О. Штефан, А. В. Засовенко

Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна
tutta1120@gmail.com, zasov77@gmail.com

Під дією штампа циліндр змінює свою форму: у кінцевому положенні він стає нижче, а його осеві перерізи, починаючи з деякої глибини, збільшують свою площу. Цей ефект у літературі називають бочкоутворенням. Інженерні розрахунки процесів осадки пов'язані з визначенням необхідного зусилля операції і кінцевої форми осадженої заготовки.

Ключові слова: осадка, бочкоутворення, функція потенційної енергії формозміни, гіпотеза міцності Мізеса.

Кольорові метали та їх сплави, використовувані в промисловості, піддаються куванню або штампуванню, як в холодному, так і в гарячому стані. Осадка є найбільш поширеною технологічною операцією. На переходах ковки її застосовують найчастіше як спосіб досягнення необхідного укову. При гарячому штампуванні осадку використовують на попередніх переходах для збиття окалини та наближення форми заготовки до конфігурації поковки, при цьому, залежно від складності поковки, осадку можуть суміщати з елементами формовки, видавлювання, прошивки, що вимагає деякого ускладнення штампового інструменту (Кухарь, 2012).

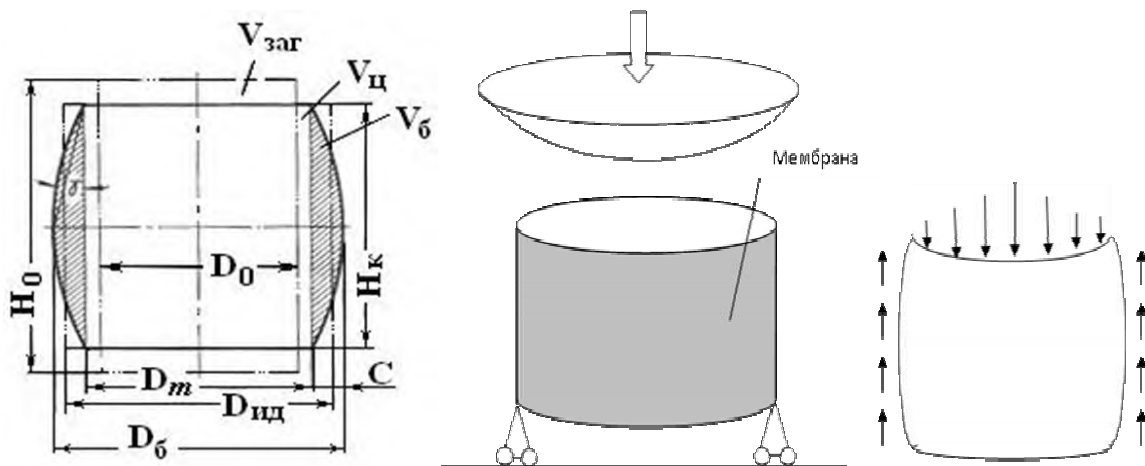


Рис. 1. Схема деформації заготовки

Розглянуто циліндр з одним вільним торцем (рис.1). Дискретизація граничних умов проведено, як в Штефан та Величко (2014), функція Ері записана за допомогою поліномів Лежандра (Shtefan & Zasovenko, 2018).

При чисельному моделюванні (рис. 2) використанні наступні параметри: радіус основи та висота заготовки прийнято рівними 1, коефіцієнт Пуассона прийнято рівним 0,4, навантаження верхньої основи пропорційне 0,1.

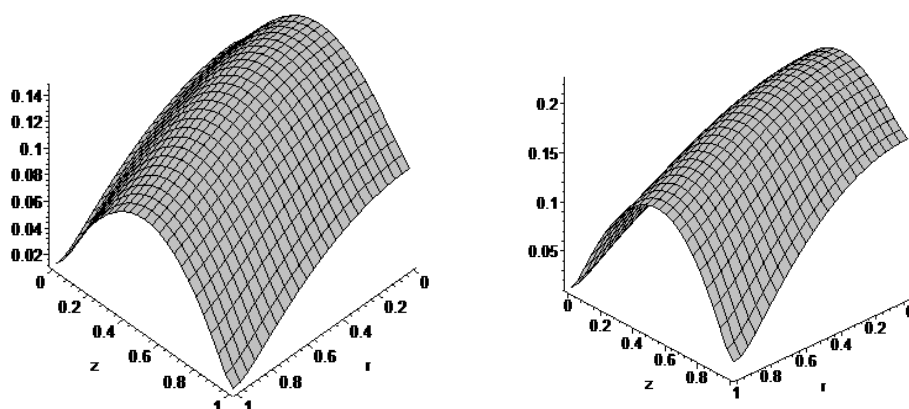


Рис. 2. Функція $F(r, z)$ при навантаженнях $p_0 = p_h$ и $p_h = 2p_0$

Під час математичного моделювання за допомогою пакету MAXIMA виявлено такі ефекти (Штефан & Величко, 2017):

1) положення точки екстремуму функції енергії формозміни на зовнішній межі при висоті циліндру 1 практично не залежить від механічних характеристик плити, інакше кажучи, положення цієї точки є геометричною характеристикою циліндра;

2) положення нормального перетину, який має максимальну площу, практично не залежить від механічних характеристик циліндра;

3) значення функції потенціальної енергії формозміни збільшується відповідно до збільшення коефіцієнта Пуассона.

Адекватність побудованої математичної моделі перевірено МСЕ. В подальшому планується провести детальний чисельний аналіз положень максимумів напружень при одночасному деформуванні обох основ циліндра. Отримані результати також планується узагальнити на випадок багат шарових циліндрів, виготовлених з різних матеріалів, що застосовуються, наприклад, у газовій промисловості.

Список літератури

- Shtefan, T., & Zasovenko, A. (2018). Numerical and analytical solution of the problem on deformation of the circular cylinder using the Bessel functions. *Вісник ТНТУ*, (2), 79–86. https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2018.02.079
- Кухарь, В. В. (2012). Макропоказатели формоизменения и работа деформации при осадке заготовок выпуклыми плитами. *Вісник Національного технічного університету України «КПІ». Серія «Машинобудування»*, (64), 227–233. <http://visnyk-mm.kpi.ua/uk/-64/75-2012-09-05-12-46-59.html>
- Штефан, Т. А., & Величко, Е. В. (2017). Численно-аналитическое решение задачи об осесимметрической деформации в цилиндре под действием сжимающих нагрузок. *Механика машин, механизмов и материалов*, (4), 89–95. <https://mmmm.by/pdf/ru/2017/04/11.pdf>
- Штефан, Т. А., Величко, Е. В. (2014). Энергия формоизменения в коротком цилиндре при аксиальной симметрической деформации. *Деформация и разрушение материалов*, (6), 12–18.

Деякі паралельні алгоритми розв'язання задач цифрової фільтрації

М. С. Яджак

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів, Україна
yadzhak_ms@ukr.net*

Для розв'язання одно- та двовимірної задач цифрової фільтрації запропоновано паралельні алгоритми з автономними гілками. Для побудови цих алгоритмів використано ідеї методу пірамід для розпаралелювання циклів. Наведено оцінки складності та прискорення запропонованих паралельних алгоритмів.

Ключові слова: задача цифрової фільтрації, режим реального часу, паралельний алгоритм, метод пірамід, прискорення обчислень, обчислювальна система.

Задачі цифрової фільтрації (ЗЦФ) зазвичай виникають під час попереднього опрацювання сигналів, плоских та просторових зображень, великих масивів експериментальних даних тощо. У багатьох випадках такі задачі необхідно розв'язувати в режимі реального часу. З цією метою був запропонований квазі-сistolічний метод обчислень (Анисимов & Яджак, 2008; Яджак & Тютюнник, 2013), на підставі якого розроблено оптимальні за швидкодією та використанням пам'яті паралельноконвеєрні алгоритми розв'язання ЗЦФ будь-якої вимірності. Оптимальність доводилась у відповідних класах алгоритмів, які є еквівалентними за інформаційним графом з точністю до виконання співвідношень асоціативності та комутативності для операції додавання. Розроблені алгоритми були зорієнтовані на реалізацію на спеціалізованих обчислювальних системах — квазісistolічних структурах (Яджак, 2007; Яджак та ін., 2014). Однак, ці структури як обчислювальні засоби не є доступними для широкого кола користувачів. Тому в разі, коли маса та розміри обчислювальної системи не є суттєвими обмеженнями, для розв'язання задач фільтрації потрібно використовувати сучасні універсальні засоби (багатоядерні комп'ютери, кластери, гібридні архітектури).

Формулювання проблеми. Розгляньмо одновимірну ЗЦФ, яка загалом передбачає переобчислення значень x_{i_1} ($i_1 = \overline{1, l_1}$) за формулою

$$x_{i_1} = \sum_{s_1=-m_1}^{m_1} x_{i_1+s_1} f_{s_1}, \quad (1)$$

де вагові коефіцієнти f_{s_1} ($s_1 = -m_1, m_1$), а також «заграничні» значення $x_{1-m_1}, x_{2-m_1}, \dots, x_0; x_{l_1+1}, x_{l_1+2}, \dots, x_{l_1+m_1}$ є відомими константами. За умовою задачі здійснюється C переобчислень згладжування на N точках через рухоме вікно розміром M , де $N = l_1; M = 2m_1 + 1$. Зазвичай для більшості практичних задач виконуються нерівності: $M \ll N, C \ll N$.

У двовимірному випадку формула (1) набуває вигляду (2).

$$x_{i_1, i_2} = \sum_{s_1=-m_1}^{m_1} \sum_{s_2=-m_2}^{m_2} x_{i_1+s_1, i_2+s_2} f_{s_1, s_2}. \quad (2)$$

У разі переобчислення значень x_{i_1, i_2} ($i_1 = \overline{1, l_1}$; $i_2 = \overline{1, l_2}$) згідно з (2) одержуємо, що $N = l_1 l_2$; $M = (2m_1 + 1)(2m_2 + 1)$.

Розглянемо послідовний алгоритм (3) розв'язання одновимірної задачі фільтрації.

$$\begin{aligned} & \text{FOR } t = 1, C \quad \text{DO} \\ & \{ \text{FOR } i_1 = 1, l_1 \quad \text{DO} \\ & \quad \{ p = 0 \\ & \text{FOR } s_1 = -m_1, m_1 \quad \text{DO} \\ & \quad \{ p = p + x_{i_1+s_1}^{t-1} * f_{s_1} \} \\ & \quad x_{i_1}^t = p \} \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Із (3) випливає, що всі значення змінних для переобчислення на t -му кроці беруться з $(t-1)$ -го кроку. Тут $x_{i_1}^0, x_{i_1}^t$ — відповідно початкове значення змінної x_{i_1} та значення цієї ж змінної, переобчислене на t -му кроці. Для свого виконання наведений алгоритм потребує час $T_1 = t_{op}(2m_1+1)Cl_1$, де t_{op} — час виконання подвійної операції $a + b * c$.

Аналогічно можна записати послідовний алгоритм (4) розв'язання двовимірної ЗЦФ.

$$\begin{aligned} & \text{FOR } t = 1, C \quad \text{DO} \\ & \{ \text{FOR ALL } (i_1, i_2) \in \{(i_1, i_2) : 1 \leq i_1 \leq l_1; 1 \leq i_2 \leq l_2\} \quad \text{DO} \\ & \quad \{ p = 0 \\ & \text{FOR ALL } (s_1, s_2) \in \{(s_1, s_2) : -m_1 \leq s_1 \leq m_1; -m_2 \leq s_2 \leq m_2\} \quad \text{DO} \\ & \quad \{ p = p + x_{i_1+s_1, i_2+s_2}^{t-1} * f_{s_1, s_2} \} \\ & \quad x_{i_1, i_2}^t = p \} \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $x_{i_1, i_2}^0, x_{i_1, i_2}^t$ — відповідно початкове значення змінної x_{i_1, i_2} та значення цієї ж змінної, переобчислене на t -му кроці. Для свого виконання алгоритм (4) потребує час $T_2 = t_{op}(2m_1+1)(2m_2+1)Cl_1 l_2$.

Метою роботи є розроблення та аналіз паралельних алгоритмів з автономними гілками для розв'язання одно- та двовимірної ЗЦФ з використанням синхронної схеми обчислень (Valkovskii, 1994).

Розроблення паралельних алгоритмів. На підставі використання ідей методу пірамід (Вальковский, 1989) для розпаралелювання циклів стосовно (3) одержуємо паралельний алгоритм (5).

$$\begin{aligned}
 & \text{FOR } k = 1, l_1 \quad \text{DO } \text{PAR} \\
 & \quad \{ \text{FOR } t = 1, C \quad \text{DO} \\
 & \quad \quad \{ \text{FOR } i_1 = \max\{1, m_1(t - C) + k\}, \min\{l_1, m_1(C - t) + k\} \quad \text{DO} \\
 & \quad \quad \quad \{ p = 0 \\
 & \quad \quad \quad \text{FOR } s_1 = -m_1, m_1 \quad \text{DO} \\
 & \quad \quad \quad \quad \{ p = p + x_{i_1+s_1}^{t-1} * f_{s_1} \} \\
 & \quad \quad \quad \quad x_{i_1}^t = p \} \} \}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

У даному разі тип паралельності *PAR* є *AUTON* (autonomous) (Вальковский, 1989), тобто конструкція (5) задає паралельне виконання l_1 гілок, які не взаємодіють між собою, тобто виконуються автономно. Час функціонування цього алгоритму обчислюється за формулою

$$T_p = t_{op}(2m_1+1)C(1 + m_1(C - 1)).$$

Процес згладжування можна дещо покращити, якщо в (5) останні чотири рядки замінити на такий фрагмент:

$$\begin{aligned}
 & \quad \{ p_{i_1} = 0 \\
 & \quad \text{FOR } s_1 = -m_1, m_1 \quad \text{DO} \\
 & \quad \quad \{ p_{i_1} = p_{i_1} + x_{i_1+s_1} * f_{s_1} \} \\
 & \quad \quad x_{i_1} = p_{i_1} \} \} \}.
 \end{aligned}$$

Одержана внаслідок цього паралельна конструкція дозволить у кожній гілці під час переобчислення значення деякої змінної на заданому кроці використовувати значення, уже переобчислені на цьому ж кроці.

Застосовуючи метод пірамід для розпаралелювання циклів стосовно (4), одержуємо паралельний алгоритм (6) для розв'язання двовимірної ЗЦФ.

$$\begin{aligned}
 & \text{FOR } \text{ALL } (k_1, k_2) \in \{(k_1, k_2) : 1 \leq k_1 \leq l_1; 1 \leq k_2 \leq l_2\} \quad \text{DO } \text{PAR} \\
 & \quad \{ \text{FOR } t = 1, C \quad \text{DO} \\
 & \quad \quad \{ \text{FOR } i_1 = \max\{1, (t - C)m_1 + k_1\}, \min\{l_1, (C - t)m_1 + k_1\} \quad \text{DO} \\
 & \quad \quad \quad \{ \text{FOR } i_2 = \max\{1, (t - C)m_2 + k_2\}, \min\{l_2, (C - t)m_2 + k_2\} \quad \text{DO} \\
 & \quad \quad \quad \quad \{ p = 0 \\
 & \quad \quad \quad \quad \text{FOR } \text{ALL } (s_1, s_2) \in \{(s_1, s_2) : -m_1 \leq s_1 \leq m_1; -m_2 \leq s_2 \leq m_2\} \quad \text{DO} \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \{ p = p + x_{i_1+s_1, i_2+s_2}^{t-1} * f_{s_1, s_2} \} \\
 & \quad \quad \quad \quad \} \\
 & \quad \quad \quad \} \\
 & \quad \quad \} \\
 & \quad \}
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$x_{i_1, i_2}^t = p \} \} \} \}.$$

У цьому разі $PAR \in AUTON$ і (6) задає паралельне виконання $l_1 l_2$ автономних гілок. Час виконання даного алгоритму обчислюється за формулою

$$T_{p_1} = t_{op}(2m_1+1)(2m_2+1)C(1 + ((2/3)m_1 m_2(2C-1) + m_1 + m_2)(C-1)).$$

Аналогічно, як і в (5), у (6) можна дещо покращити процес згладжування.

Оцінювання прискорення паралельних обчислень. На підставі оцінок часу виконання паралельних алгоритмів (5), (6) та відповідних послідовних алгоритмів (3), (4) отримуємо оцінки прискорення паралельних обчислень. Зокрема, прискорення алгоритму (5) обчислюватимемо за формулою

$$S_{(5)} = T_1 / T_p = l_1 / (1 + m_1(C-1)).$$

Оскільки на практиці $l_1 \gg C$, $l_1 \gg m_1$ і l_1 відрізняється ($l_1 > m_1 C$) від $m_1 C$ не менш, як на декілька порядків, то прискорення $S_{(5)}$ буде суттєвим. Наприклад, для $l_1 = 1000$, $m_1 = 1$, $C = 5$ одержуємо, що $S_{(5)} = 200$, а для $l_1 = 10000$, $m_1 = 7$, $C = 15$ маємо: $S_{(5)} \approx 101,1$.

Прискорення паралельного алгоритму (6) подається формулою

$$S_{(6)} = T_2 / T_{p_1} = l_1 l_2 / (1 + (2m_1 m_2(2C-1) / 3 + m_1 + m_2)(C-1)).$$

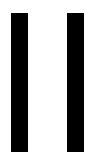
Зазвичай $l_1 \gg m_1$, $l_2 \gg m_2$, $l_1 \gg C$, $l_2 \gg C$ та l_1, l_2 відрізняються ($l_1 > m_1 C^2$, $l_2 > m_2 C^2$) від $m_1 C^2$, $m_2 C^2$ відповідно не менш, як на декілька порядків, тому $S_{(6)}$ буде суттєвим. Зокрема, для $l_1 = 100$, $l_2 = 200$, $C = 5$, $m_1 = m_2 = 1$ отримуємо $S_{(6)} \approx 606$, а для $l_1 = l_2 = 1000$, $m_1 = m_2 = 5$, $C = 10$ маємо: $S_{(6)} \approx 340$.

Отже, нами запропоновано ефективні паралельні алгоритми з автономними гілками для розв'язання одно- та двовимірної ЗЦФ на багатоядерних комп'ютерах, кластерах та гібридних архітектурах. Здійснено програмну реалізацію цих алгоритмів на багатоядерному комп'ютері, унаслідок чого одержано оцінки їх реального прискорення, які підтверджують наведені вище теоретичні результати.

Список літератури

- Valkovskii, V. A. (1994). An optimal algorithm for solving the problem of digital filtering. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 4(3), 241–247.
- Анисимов, А. В., & Яджак, М. С. (2008). Построение оптимальных алгоритмов массовых вычислений в задачах цифровой фильтрации. *Кибернетика и системный анализ*, 44(4), 3–14.
- Вальковский, В. А. (1989). *Распараллеливание алгоритмов и программ. Структурный подход*. Москва: Радио и связь.
- Яджак, М. С. (2007). Квазісistolічні обчислювальні структури та їх застосування. *Академічний вестник*, (20), 53–57.

- Яджак, М. С., & Тютюнник, М. И. (2013). Оптимальный алгоритм решения задачи цифровой фильтрации с использованием адаптивного сглаживания. *Кибернетика и системный анализ*, 49(3), 142–151.
- Яджак, М. С., Тютюнник, М. І., & Бекас, Б. О. (2014). Апаратні засоби реалізації паралельно-конвеєрних алгоритмів цифрової фільтрації з використанням адаптивного згладжування. *Науковий вісник НЛТУ України*, 24(6), 335–344. https://nv.nltu.edu.ua/Archive/2014/24_6/54.pdf



МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ
МАТЕМАТИКИ
У ВИЩІЙ ШКОЛІ

Про деякі проблеми викладання курсу вищої математики студентам-першокурсникам технічних напрямків підготовки

В. О. Варивода¹, О. М. Гришко¹, О. О. Гурнік²

¹Національний авіаційний університет, Київ, Україна

*²Коледж інженерії та управління Національного авіаційного університету,
Київ, Україна
viktoriaana@ukr.net*

Розглянуто проблему якості української вищої освіти, зокрема, математичної. Викладено роль математичної культури при формуванні світогляду висококваліфікованого фахівця. Запропоновано можливі підходи до викладання математики студентам-першокурсникам технічних напрямків підготовки.

Ключові слова: математична освіта, математичні знання, інтелектуальний потенціал, математична культура.

Україна готує і має значну кількість висококваліфікованих фахівців з інформаційно-комунікаційних технологій (далі — ІКТ), математики, кібернетики; у країні постійно зростає та поновлюється парк комп'ютерної техніки, сучасних систем та засобів телекомунікації та зв'язку.

Розвиток інновацій у всіх галузях життя суспільства висуває нові вимоги до професійних якостей сучасних фахівців. Новий етап розвитку суспільства характеризується якісною зміною діяльності фахівця, що безпосередньо пов'язано з широким застосуванням математичного моделювання явищ з певної галузі. У сучасному світі математична освіта відіграє особливу роль у підготовці майбутніх фахівців у галузі математики, інформатики, ІКТ, техніки, виробництва, економіки тощо. Разом з тим, у математичній освіті сьогодні накопичено ряд негативних тенденцій, серед яких можна виділити різке зниження рівня математичної культури сучасної молоді, її пізнавальної активності й самостійності, що погіршує якість знань і умінь студентів вищих навчальних закладів, уповільнює їхній інтелектуальний розвиток.

Міжнародні дослідження якості української вищої освіти засвідчують, що математична та природнича освіта поки що мають відносно непогані показники, за якими країна посідає місця не нижче 50-го. Своєю чергою загальнонаціональне опитування, яке проводилося Фондом «Демократичні ініціативи» (грудень 2016 р.), указує на невисоку оцінку якості вищої освіти в нашій державі (приблизно на рівні 3-х балів за 5-бальною шкалою). Більше половини респондентів вважають, що через реформування вищої освіти мають бути вирішеними такі основні її проблеми:

- 1) недостатня підготовка випускників вишів до виходу на ринок праці;
- 2) низький науково-культурний рівень студентів;
- 3) слабка зацікавленість молоді в отриманні саме якісної освіти.

У цей час освіта в Україні вже не перший рік перебуває у стані активного розвитку й удосконалення, але цьогорічні результати ЗНО з математики насторожують — збільшилась кількість тих, хто не зміг подолати бар'єр «склав/не склав» (2016-й — 14,82%, 2019-й — 18,17%), тобто знання школярів з року в рік стають дедалі гіршими. Автори на власному досвіді переконалися в цьому.

В інформаційному суспільстві вважається, що саме вивченню математики належить розвиваюча функція. Важливо вивчати математичні об'єкти, освоювати теорії та методи не стільки для подальшого їх використання в розв'язанні профільних задач, скільки для активації розумового апарату людини, набуття навичок самостійно мислити, що є незамінним при оцінці нестандартних ситуацій і відшуванні розв'язку незнайомих задач.

Однак, за останні два-три роки автори статті, працюючи в Національному авіаційному університеті, відзначають неприязнь, а часом і «несприйняття» студентами-першокурсниками занять з математики, хоча математичні знання мають сприяти формуванню професійної компетентності студентів і є необхідною складовою задовільної технічної освіти. Студенти не відчують ціннісних аспектів її вивчення, не бачать, за їхніми словами, шляхів подальшого використання математичних знань у профільних дисциплінах і в майбутній професії. Можливо, це пов'язано зі слабкою математичною підготовкою сьогоденних випускників середніх шкіл — очевидно що, якщо матеріал незрозумілий, то він і нецікавий, і непотрібний. А на питання, яких студентів очікувати на перших курсах завтра, відповідь надає міністерка освіти Ганна Новосад, презентуючи результати дослідження за даними PISA (2019 р.): «36% наших 15-річних учнів не досягають навіть базового рівня знання з математики. Вони мають проблеми із завданнями, де потрібно використовувати прості стратегії розв'язування, процентні співвідношення, оперувати дробами й десятковими числами». Радниця міністерки освіти і науки Іванна Коберник утішає: «... з огляду на рівень фінансування української освіти, це ще відносно непогані показники».

Викладання фундаментальних дисциплін, зокрема математики, на достатньо високому рівні вже на першому курсі розраховано на наявність якісної математичної підготовки зі школи. Зрозуміло, що недостатній рівень цієї підготовки надалі зменшує можливості для успішного навчання у виші, але першокурсники такі, які є і найближчим часом кращими не стануть. Доведеться допрацьовувати за школу. Щоб частково послабити проблему недостатньої підготовленості можна, наприклад, розмістити в посібниках додатки з означеннями та формулами зі шкільного курсу, які потрібні для розгляду нових тем. Або оскільки багато термінів у школі не використовуються як наукові, то на вступних лекціях бажано їх роз'яснити. Наприклад, що «означення» — це поняття, а «ознака» — це судження про поняття; також доводиться розтлумачувати суть методу доведення «від супротивного».

Викликають питання у студентів і терміни «необхідність»-«достатність», які доводиться пояснювати буквально «на пальцях». Тут можна запропонувати застосування апарату математичної логіки. Наприклад, маємо два простих ви-

словлювання: чотирикутник є ромбом (a) і дві протилежні сторони чотирикутника паралельні (b), до яких можна застосувати операції: імплікації $a \rightarrow b$ (якщо a , то b) та еквівалентності $a \leftrightarrow b$ (a тоді і лише тоді, коли b). Отримані за допомогою операцій твердження можуть бути істинними (позначатимемо: $= 1$) або хибними ($= 0$). Тоді:

- твердження: якщо чотирикутник є ромбом, то дві його протилежні сторони паралельні — істинне, тобто $a \rightarrow b = 1$;
- твердження: якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні, то чотирикутник є ромбом — хибне, тобто $b \rightarrow a = 0$ (наприклад, трапеція має паралельні основи, але не є ромбом);
- твердження: чотирикутник є ромбом тоді й лише тоді, коли дві його протилежні сторони паралельні — хибне, тобто $a \leftrightarrow b = 0$ (як висновок з перших двох тверджень).

Останнім часом з'явилася ще одна методологічна проблема викладання математичних дисциплін — так звана *кліпова* система мислення. Унаслідок розвитку ІКТ сучасні студенти інформаційний матеріал звикають проглядати швидко й короткими чергами («кліпово»). Нейробіологи вказують на зниження здатності розуміти складні тексти й інтерпретувати їх, установлювати глибинні зв'язки. Через це послаблюється критичне мислення. Оскільки укріплення аналітично-критичних здібностей особистості відбувається через набуття власного конкретного досвіду, то доцільно пропонувати студентам проводити самостійне конспектування окремих теоретичних моментів саме за паперовими підручниками та супроводжувати розв'язки індивідуальних завдань детально прописаним обґрунтуванням з обов'язковим подальшим захистом виконаної роботи. Тим більше, що згідно до робочих навчальних програм з вищої математики, що затверджені в НАУ, на самостійну роботу студентів виділено немало часу (приблизно половина відведених для засвоєння кожного кредитного модуля навчальних годин).

Також новою рисою першокурсників є неспроможність утримувати увагу протягом усього заняття, особливо, якщо це лекція. Тому для утримання уваги та підвищення зацікавленості предметом потрібно під час лекцій робити творчі перерви, під час яких можна запропоновувати студентам, наприклад, задачі-блискавки (знайомлячись з формулою Ойлера — обчислити комплексне число $e^{2019\pi i}$, під час розгляду канонічних рівнянь кривих другого порядку —

вказати ексцентриситет і координати фокусів шкільної гіперболи $y = \frac{1}{x}$), підк-

реслювати постійний зв'язок викладеної теорії з життям (планети Сонячної системи рухаються по еліпсах зі спільним фокусом, у якому знаходиться Сонце; математичні формули містять функції: довжина кола, площа трикутника; одне й

те саме диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx} = ky$ описує характер радіоактивного роз-

паду, швидкість розмноження бактерій, зміну атмосферного тиску й температури середовища, безперервне наростання грошового внеску до банку, хід хімічної реакції тощо), надавати історичні довідки (правило Лопітала першим відкрив Бернуллі, позначення чисел e і π належить Ойлеру), ознайомлювати з історією виникнення певних задач (в 19 ст. Абель і Галуа довели, що рівняння вище четвертого степеня в радикалах не розв'язується, що привело до застосування теорії наближених обчислень; задачі про знаходження площі криволінійної фігури привели до поняття визначеного інтеграла, задачі про обчислення маси неоднорідного тіла — до поняття потрійного інтеграла).

Іншою проблемою є небажання та невміння працювати самостійно. Першокурсники намагаються навчатися, як вони це робили у школі, просто отримуючи готові знання. Часто в середній школі технологія навчання базується на переписуванні й запам'ятовуванні навчального матеріалу з різних галузей із зосередженням на розв'язанні базових стандартних задач, що розв'язуються за певними схемами. Метою математичної освіти у виші має бути перехід від репродукції накопичених знань до самостійного продуктивного мислення, що становить для багатьох складну проблему. З метою подолання такої пасивності студентів можна пропонувати їм самостійно розглянути окремі задачі, що близько пов'язані з викладеним матеріалом, але потребують деякого теоретичного і творчого опрацювання. Заохоченням за таку працю мають бути «додаткові» бали, що нараховуються за результатами захисту розв'язаної задачі.

Одним із засобів ознайомлення студентів перших курсів з елементами математичної дослідницької діяльності є залучення їх до виконання розрахунково-графічних робіт з урахуванням специфіки фахової спрямованості. Під час виконання розрахунково-графічних робіт студентам для досягнення результату доводиться самостійно (з незначною консультаційною допомогою викладача) оволодіти цілим комплексом суджень про досліджувані математичні об'єкти й установити логічні зв'язки між ними. Диференційований підхід оцінювання результатів виконаної студентами роботи, безумовно, стимулює студентів підвищувати власні результати. При цьому талановитим студентам після виконання завдань базового рівня пропонуються додаткові цікаві задачі для поглибленого дослідження. Усі вдало виконані завдання не лише додають рейтингові бали, а й можуть стати приводом для подальшої творчої розробки досліджуваної проблеми.

Для посилення прикладної спрямованості математичних дисциплін викладачам-математикам слід підтримувати постійні методичні й наукові контакти з викладачами спеціальних кафедр. Задача формування обізнаного спеціаліста, який буде здатен систематично використовувати математичні методи, обчислювальну техніку у своїй майбутній практичній роботі, не може бути вирішена лише силами математичних кафедр. Для досягнення спільної мети — розвитку математичного мислення і формування математичних знань інженера — потрібно залучати кафедри, які беруть участь у підготовці студента до обраної ним спеціальності.

На практичних заняттях математичні задачі бажано пропонувати із профільним змістом, використовуючи термінологію спеціальних кафедр. Як правило, зміст таких задач полягає в тому, що студенту надається умова, що є деякою досить спрощеною моделлю реальної ситуації, яку потрібно перекласти спочатку на математичну мову, тобто запровадити невідомі і скласти систему обмежень (рівнянь і нерівностей), а потім розв'язати її.

В Україні, як і в усьому цивілізованому світі, престижні роботодавці приділяють значну увагу оцінюванню інтелектуального й лідерського потенціалів майбутнього працівника, особливо щодо випускників вишів в галузях інформаційних технологій та комп'ютерної техніки. Звісно, класичні знання і набуті навички є цінними активами, проте, для успішності в майбутньому важливим стає здатність випускника вищої школи орієнтуватися в сучасному інформаційному просторі, адаптуватися до змін, уміти вирішувати проблеми в умовах неповної, а часто й суперечливої інформації, самостійно навчатися протягом життя. Отже, основною метою сучасної вищої освіти є формування вмінь утворювати нові знання і втілювати їх в інновації. Якість математичної освіти залежить від успішності вирішення таких методичних проблем навчання математичним дисциплінам як невміння працювати самостійно, недостатній рівень базових знань зі шкільного курсу математики, низький рівень мотивації до вивчення математики, зміна якості уваги і способу мислення внаслідок впливу сучасних технологій.

Підбиваючи підсумки, хочеться відмітити, що університет передбачає саме творчу співпрацю викладача та студента в усіх видах навчального процесу. Дуже важливою є креативна складова навчального процесу, а також підлаштування деякою мірою викладача до рівня математичної підготовки студентів. Ці всі фактори впливають на ставлення студентів до інженерної науки та інженерної діяльності в цілому, а також формують світогляд майбутнього висококваліфікованого фахівця.

Список літератури

- Варивода, В. О., & Гришко, О. М. (2016). Зв'язок базових математичних понять із життям як особливий аспект мотивації. У *Матеріалах Дев'ятої Міжнародної науково-практичної конференції «Обдаровані діти — інтелектуальний потенціал держави»* (с. 128–130). Київ: Інститут обдарованої дитини НАПН України.
- Варивода, В. О., & Гришко, О. М. (2017). Про активізацію логічного мислення студентів при вивченні курсу вищої математики. У *Матеріалах Вісімнадцятої Міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука* (с. 202–204). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.
- Волкова, Н. П. (2007). *Педагогіка*: Київ: Академвидав.

Критериальный выбор методов аппроксимации в интерактивном режиме

В. А. Гришина¹, В. А. Гришин²

¹Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина

²Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина
grishin@onu.edu.ua

На примере темы «Аппроксимация функций» дисциплины «Численные методы» широко применяемой при моделировании различных процессов, предлагается метод адаптивного выбора вида аппроксимации (полинома Лагранжа, МНК, линейного сплайна, кубического сплайна, тригонометрической интерполяции) по ряду критериев и с элементами обучения демонстрируется в интерактивном режиме.

Ключевые слова: адаптивная система, критериальный выбор, метод аппроксимации, интерактивный режим с элементами обучения.

Интенсивное развитие и внедрение информационных технологий практически во все сферы деятельности человечества неизбежно приводит к необходимости изменять и характер этой деятельности. Этот процесс проявляется и в сфере высшего образования.

Традиционно консервативная образовательная система теперь нуждается в глубокой модернизации в соответствии с революционно изменяющейся информационной средой.

Ранее доступ к информации занимал достаточно много времени: поиск литературы в библиотеке, заказ литературы, ожидание выполнения заказа и т. д. А чтобы получить доступ к уникальным изданиям, нужно было порой ехать в другой город. Поэтому носитель информации, т.е. тот, кто знал данный вопрос и мог поделиться этой информацией, был очень ценен. Таким образом, само обладание знаниями представляло большой практический интерес. Соответственно и в обучении был сильный акцент на запоминание большого количества информации.

Само по себе обладание знаниями не потеряло своей ценности и сейчас, но акцент в современном обучении следует все же перенести на умение быстро найти в Интернет пространстве нужную (и качественную) информацию, освоить новые знания, а затем применить их к решению поставленной задачи. Это соответствует запросам практической жизни: например, в последнее время на собеседованиях в IT-компаниях все шире, помимо тестов, предлагаются задания, в которых нужно освоить новую для кандидата информацию и успешно ее использовать. Именно этот навык более всего интересует работодателя.

Рассмотрим конкретную область преподавания — лабораторный практикум по численным методам в вузе. Эта область ярко демонстрирует эволюцию процесса обучения в вузе.

До широкого внедрения компьютеров основной упор в лабораторном практикуме делался на выполнение конкретных расчетов по вычислительным методам с использованием расчетных схем, позволяющих контролировать без-

ошибочность вычислений. Очень важным было, чтобы студент освоил эти схемы и умел их применять. При этом круг задач, решаемых студентом, был очень узок, а задача выбиралась такой, чтобы решение было заведомо успешным.

С появлением компьютерной техники в вузах расчеты стали возможны для более объемных задач, изменились используемые методы, так как менее критичным стал объем вычислений, выполняемых студентом. Однако по-прежнему оставался тот же недостаток — ограниченное число решаемых заданий.

Использование современных возможностей информационных технологий позволяет построить лабораторный практикум как обучающую систему, которая позволяет широко осветить рассматриваемую тему и дать навык самостоятельного решения прикладных задач по данному разделу, включая выбор необходимого метода и параметров, наиболее эффективных для данного случая.

Одной из наиболее востребованных тем дисциплины «Численные методы» является тема «Аппроксимация функций». Это связано прежде всего со стремительным расширением областей использования компьютерной графики, моделированием различных процессов в статистических задачах, задачах обработки и анализа изображений, сжатия информации и т.д. В то же время ни один из методов аппроксимации не является универсальным и выбор удачного способа аппроксимации является неформальным процессом. Для того, чтобы успешно решать задачи аппроксимации необходимо познакомиться с возможными проблемами применения метода, научиться грамотно выбирать и использовать наиболее эффективный метод аппроксимации.

В соответствии с этим, предлагаемый подход к построению лабораторного практикума «Аппроксимация функций» позволяет в ходе выполнения лабораторной работы в интерактивном режиме с элементами обучения ознакомить студента с преимуществами и недостатками различных методов аппроксимации, научить ориентироваться в правильном выборе метода и его применении для решения поставленной задачи. В лабораторном практикуме предложены для изучения основные методы аппроксимации функций: аппроксимация полиномами Лагранжа, линейными и кубическими сплайнами, методом наименьших квадратов, тригонометрическая интерполяция (Бахвалов и др., 2010; Костомаров & Фаворский, 2004; Калиткин, 2011).

Лабораторный практикум включает в себя:

- блок тестирования знаний,
- краткие теоретические сведения,
- обучающий блок,
- блок контрольных заданий.

Перед началом выполнения лабораторной работы студент выполняет тестовые задания. Получив положительный результат, студент может далее переходить к следующему этапу. В случае неудачного выполнения тестовых заданий он получает список вопросов, на которые был дан неправильный ответ. Далее студент может обратиться к разделу с теоретическими сведениями и, изучив соответствующий материал, вновь попытаться пройти тестирование.

На следующем обучающем этапе студент в интерактивном режиме выполняет аппроксимацию заданных функций. Адаптивная система обучающего блока позволяет осуществлять критериальный выбор метода аппроксимации и настраивать параметры аппроксимации для достижения желаемого результата. При этом он пользуется направляющими подсказками, изменяя параметры аппроксимирующей функции и используемые методы. Примеры подбираются так, чтобы продемонстрировать возможные проблемы аппроксимации данным методом и показать, какие характеристики функции могут влиять на выбор способа аппроксимации. На обучающем этапе в каждом примере демонстрируется, при каком выборе параметров аппроксимация данным методом наиболее успешна, какие характеристики функции влияют на это, какие могут возникнуть сложности при использовании метода. При этом результаты аппроксимации визуализируются графически, а также оценивается погрешность аппроксимации. Предусмотрено задание функции как аналитически, так и таблично. В качестве удобного средства для реализации хорошего интерфейса можно выбрать язык C# (Зибров, 2011).

Целью обучающего этапа является формирование навыка правильного выбора метода аппроксимации и параметров аппроксимирующей функции на основании анализа характеристик заданной исходной функции и заданных критериев.

На следующем контрольном этапе студент получает индивидуальное задание и выполняет его, самостоятельно осуществляя и выбор метода аппроксимации, и параметры аппроксимирующей функции с целью достижения заданной точности аппроксимации.

Современный подход к организации лабораторного практикума при должном выборе тестовых задач способствует более глубокому пониманию и более быстрому изучению предмета, формирует навыки анализа позволяет в сжатые сроки ознакомить студента с широким кругом проблем, сформировать умение делать грамотный выбор эффективного способа аппроксимации в конкретном случае, а также и в интерактивном режиме адаптивно выполнять аппроксимацию функции с достижением заданных критериев аппроксимации.

В заключение отметим, что адаптивная система критериального выбора, как система, может быть использована не только в обучающих системах, но и при решении задач прикладного характера, например, при анализе изображений, сжатии информации, обработке статистических данных и др.

Список литературы

- Бахвалов, Н. С., Лапин, А. В., & Чижонков, Е. В. (2010). *Численные методы в задачах и упражнениях* (2-е изд.). Москва: Бином.
- Зибров, В. В. (2011). *Visual C# 2010 на примерах*. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург.
- Калиткин, Н. Н. (2011). *Численные методы* (2 изд.). Санкт-Петербург: БХВ-Петербург.
- Костомаров, Д. П., & Фаворский, А. П. (2004). *Вводные лекции по численным методам*: Москва: Логос.

Ділові та рольові ігри як метод навчання

О. О. Дем'яненко, Л. А. Репета

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

o.dem@ukr.net, repetala@bigmir.net

У статті розглянуто причини і необхідність використання ділових та рольових ігор під час вивчення математичних дисциплін у сучасних умовах, їх вплив на процес і якість навчання. Проаналізовано позитивні наслідки застосування ігрових форм навчання на активізацію і мотивацію самостійної та командної роботи студентів. Стисло описано деякі приклади проведення таких ігор на перших і старших курсах.

Ключові слова: ділова гра, рольова гра, математичні бої, робота в команді, навчальний процес.

Розвиток сучасного суспільства та технологій висуває нові вимоги до випускників технічних закладів вищої освіти. На перший план виходить вміння працювати в команді, спілкуватися у групі, швидко приймати креативні рішення користуючись набутими знаннями й нести за них відповідальність. Такі вміння важливо сформувати в молоді під час навчання в ЗВО.

Кожного року до закладів вищої освіти приходять велика кількість першокурсників. Вони відрізняються від першокурсників попередніх років. Але, спостерігаючи за ними, розумієш, що протягом останніх кількох років сформувалось нове покоління студентів, яке має спільні риси та особливості і їх треба враховувати в навчальному процесі, зокрема під час вивчення математичних курсів. Зупинимось на деяких важливих моментах.

Можливо зміни в житті суспільства, можливо якісь процеси в середній та старшій школах — це питання не нашого аналізу — сформували молодь, яка не є «колективною» в розумінні старшого покоління з одного боку, і не виділяється яскравим індивідуалізмом з іншого. Тобто, для студенти-першокурсники перебувають у групі, але більшість з них не переймається відповідальністю ні перед цією групою, ні перед самим собою. Вони просто чекають, що хтось цю групу кудись поведе і вони разом з іншими будуть робити те, що хтось скаже. Причому, знаходячись у такій групі, дехто відгороджується і від неї: одягають навушники, або «сидять» в планшеті чи ноутбуку. Зауважимо, що серед студентів є різні особистості, але ми виділяємо загальну тенденцію, яка склалась останніми роками і є викликом для викладачів. Для того, щоб подолати таку пасивність, викликати інтерес до предмету дослідження, спровокувати активні дії до вивчення дисципліни, зокрема математики, необхідно застосовувати нові методичні прийоми. На думку авторів, одними з таких ефективних прийомів є проведення ділових та рольових ігор (Панфилова, 2009).

Головною метою навчання, звичайно, є здобуття нових знань. Добре відомо, що вони успішно засвоюються, якщо здобуті в ігровій формі. Але метою таких ігор є не тільки це. Ще одна мета ділових та рольових ігор — це активізація індивідуальних здібностей і можливостей заради командного успіху. Пра-

цюючи в команді, студент бере на себе частку відповідальності за результат, якого досягає не тільки він особисто, але й уся група. Під час роботи в невеликих групах над спільною проблемою, студенти можуть вільно обговорювати її, пропонувати свої методи та шляхи її розв'язання і не хвилюватись за погану оцінку, якщо вони не є правильними. Бажано, щоб у таких групах були студенти різного рівня підготовки. Тоді більш успішні в навчанні можуть допомогти слабшим. Останні не будуть почувати себе при цьому некомфортно, оскільки спілкуються з однолітками «на рівних». Така спільна праця сприятиме підвищенню самооцінки і, можливо, покращить успіхи в навчанні.

Ще одним з позитивних моментів, які виникають у рольових та ділових іграх — динамічність їх проведення. Тут немає однієї людини, яка розв'язує задачу, а інші, у кращому випадку, переписують її з дошки. Під час рольової гри в кожного члена команди є своя роль, свої обов'язки і завдання. Розуміння, що результат залежить від дій кожного, спонукає до відповідальності за свої дії у грі. Обмеженість гри у часі сприяє виробленню вміння швидко знаходити розв'язання, обґрунтовувати й доводити їх правильність, відстоювати свої ідеї в групі.

На молодших курсах ділові ігри можна проводити як математичні бої. Для цього заздалегідь формулюється тема; групу, або потік студентів ділять на команди; оголошують правила гри і дають матеріал для підготовки. Студенти однієї команди мають змогу разом готуватись, на основі оголошених правил відпрацювати стратегію поведінки під час бою, обрати командира, якщо його не призначив викладач. У відведений час усі збираються разом і починають змагатися в розв'язанні задач або прикладів, запропонованих викладачем. Після такого змагання бали до рейтингу отримує команда-переможець або кожний студент за правильно розв'язаний приклад має власний бонус — це регулюють правила гри. На старших курсах можна, наприклад, створеним командам сформулювати досить складну задачу, яку вони повинні розв'язати за час підготовки, а під час бою захистити свій варіант розв'язку. Проведення таких боїв студенти змушує налагодити комунікацію в команді. Під час підготовки їм обов'язково необхідно розібрати та вивчити матеріал, за темою якого відбувається гра, напрацювати навички в розв'язанні прикладів. Досвід проведених математичних боїв свідчить, що кількість прикладів, які студенти розв'язують готуючись до математичних боїв в рази перевищує ту кількість, яку вони виконують як домашні завдання. Колективна робота в команді розкриває індивідуальні риси характерів і це має позитивне продовження в подальшому спілкуванні студентів між собою і з викладачем.

Наприклад, на потоці математиків 1 курсу фізико-математичного факультету провели ділову гру з назвою «Бій з невизначеними інтегралами». Було сформовано 9 груп по 5 студентів, з яких одна команда експертів та 8 команд учасників гри. Капітан кожної команди учасників отримав набір завдань, які команда буде пропонувати команді-суперниці. Наведімо приклад такого набору:

$$\begin{aligned}
& 1) \int e^x \frac{dx}{x^2}; 2) \int \ln^2 x dx; 3) \int \frac{6x^2 + 5x + 39}{x^3 + x^2 + 5x - 7} dx; 4) \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x} dx; \\
& 5) \int 2^{\sqrt{x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}}; 6) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^2}}; 7) \int \ln^3 x dx; 8) \int \frac{-x^2 - x}{x^3 + 5x^2 + 9x + 6} dx; \\
& 9) \int \frac{1}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}} dx; 10) \int x^{-1} \cdot \sqrt[4]{1+\sqrt{x}} dx.
\end{aligned}$$

Далі гра йшла за наступним сценарієм: експерти сформували пари команд-суперниць. У кожній парі команда, яка розпочинає гру (команда 1) пропонує команді-суперниці (команда 2) задачу зі свого набору завдань і записує умову задачі на дошці. Представник команди 2 виходить до дошки і починає розв'язувати завдання. У нього є право один раз звернутись за допомогою до своєї команди. Якщо він не може впоратись із прикладом, команді дозволяється замінити учасника. Після того, як приклад розв'язано, експерти оцінюють результат. Якщо, за рішенням експертів, приклад зараховано — це фіксується у протоколі гри і свій приклад пропонує команда 2. Якщо ж, за рішенням експертів, приклад не зараховано, його повинен розв'язати представник команди 1. Якщо задачу розв'язано правильно, то експерти фіксують це у відповідному бланку. Якщо приклад не розв'язано знову, тобто з ним не впоралась жодна з команд, експерти знову визначають, яка в цій парі команд є команда-1, а яка команда-2 і гра починається знову. Виграє та команда, яка першою розв'язала не менше 5 прикладів, причому кожний член команди розв'язав хоча б один приклад. З команд, що програли, експерти формують нові пари і починається новий тур гри. Експертам зараховується бали тоді, коли вони не допускали помилок при оцінюванні розв'язаних прикладів.

Рольові ігри проводяться без попередньої підготовки і вони є альтернативою класичним практичним заняттям або звичайним самотійним роботам. Наприклад, на практичному занятті після написання самотійної роботи, викладач може розділити групу на дві частини і запропонувати цим групам, обмінявшись попередньо роботами, перевірити їх. При цьому кожний студент грає протягом гри дві ролі: студента та викладача і має змогу не тільки розв'язати запропоновані задачі, а й подивитись як їх розв'язали інші й оцінити ці розв'язки.

Висновок. На думку авторів запровадження ділових та рольових ігор є ефективним методичним прийомом у сучасних умовах. Рольові ігри урізноманітнюють проведення практичних занять, підвищують здібності студентів у розв'язанні поставлених задач, навчають їх командної роботи, посилюють почуття відповідальності перед собою та іншими й у динамічній, легкій формі сприяють засвоєнню матеріалу, а також, перевірці якості такого засвоєння.

Список літератури

Панфилова, А. П. (2009). *Инновационные педагогические технологии: Активное обучение*. Москва: Издательский центр «Академия».

Цариця навчального процесу

В. В. Дрозд

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Slava572@ukr.net

Доповідь присвячена питанню змісту та структури такої важливої складової навчального процесу як контрольна робота для студентів спеціальності «Математика».

Ключові слова: контрольна робота, домашнє завдання, типова розрахункова робота, екзамен.

Усім добре відомо, що «зізнання — цариця доказів» (приписують «славнозвісному» прокурору сталінських часів Вишинському, хоча він добре відомий ще з часів Стародавнього Риму), а «кукурудза — цариця полів» (зазвичай приписують Першому секретареві КПРС Хрущову. Насправді це звичайна агітка шістдесятих років).

Жарти жартами, але я беру на себе сміливість наголосити ще один подібний афоризм. Я стверджую, що контрольна робота — це цариця всього навчального процесу у виші. Особливо, коли мова йде про підготовку студентів спеціальності «Математика» при викладанні такого предмету як «Математичний аналіз». Мені скажуть, а як же екзамен? Він тоді хто, цар? Ну, по-перше, якщо екзамен письмовий (а в КПІ всі екзамени з математичних дисциплін саме такі), то він є тією ж контрольною роботою, тільки з іншим статусом. А по-друге, якщо на заключній стадії екзамену відбувається усний діалог між викладачем та студентом (а на фізико-математичному факультеті має місце саме така стратегія), то такий же діалог може відбуватись і після закінчення будь-якої контрольної роботи. Ба навіть не «може», а повинен відбуватись. Єдина відмінність контрольної роботи від екзамену полягає в тому, що традиційна контрольна робота, яка зазвичай проводиться не на останньому занятті семестру, передбачає своє продовження у вигляді роботи студента над своїми помилками. У той час як екзамен — це фінальна крапка вивчення якогось курсу, або частини цього курсу.

Традиційно курс математичного аналізу починається з вивчення таких понять як множини, дії з множинами, відображення множин, потужність множин, точні межі числових множин, послідовності, підпослідовності тощо. Паралельно з цим ми маємо нагоду нагадати студентам основні поняття елементарної математики, а саме: властивості числових множин, графіки елементарних функцій, властивості нерівностей тощо.

Тому перша контрольна робота цього курсу є комбінованою. Вона містить такі приклади:

- 1) побудувати графік функції за допомогою елементарних перетворень;
- 2) довести нерівність;
- 3) довести тотожність методом математичної індукції;
- 4) знайти потужність множини;
- 5) знайти точні межі числової множини, або верхню та нижню границі послідовності. Можливо, цю контрольну варто було б розбити на дві, перша з яких містила б виключно приклади з елементарної математики. Тоді перші два наведені вище приклади можна було б доповнити такими, що містять теми: дії з множинами, обернені тригонометричні функції та логарифми.

Продовжується курс математичного аналізу вивченням таких понять як границя послідовності, границя функції, неперервні функції та їх властивості. Тому друга контрольна робота містить такі приклади:

- 1) знайти границю послідовності;
- 2) знайти границю функції;
- 3) знайти головну частину нескінченно малої функції у заданій шкалі;
- 4) дослідити функцію на неперервність;
- 5) приклад на застосування властивостей функцій, що неперервні на замкненому проміжку.

Але якщо першу контрольну роботу розбити на дві, то другу треба присвятити таким темам як потужність множин, точні межі числових множин, границя послідовності та підпослідовності. Тоді третя контрольна робота повинна складатись виключно з прикладів на границю та неперервність функцій.

Наступна контрольна робота названого курсу присвячена диференціальному численню функцій однієї змінної. Вона містить такі приклади:

- 1) обчислити похідну функції;
- 2) текстова задача на застосування рівняння дотичної та нормалі до графіка функції;
- 3) знайти границю функції, використовуючи формулу Лопітала;
- 4) застосувати формулу Тейлора;
- 5) провести повне дослідження функції за допомогою першої та другої похідної. Ця контрольна робота проводиться наприкінці першого семестру.

Другий семестр курсу математичного аналізу складається з таких тем як невизначений інтеграл, інтеграл Рімана та інтеграл Рімана — Стілтєса. Вивчення кожної з цих тем закінчується відповідною контрольною роботою.

Перша з них містить наступні приклади:

- 1) проінтегрувати раціональний дріб;
- 2) проінтегрувати тригонометричну функцію;
- 3) обчислити невизначений інтеграл, застосувавши формулу інтегрування частинами;
- 4) проінтегрувати ірраціональну функцію;
- 5) проінтегрувати диференціальний біном.

Друга контрольна робота цього семестру присвячена інтегралу Рімана та містить приклади:

- 1) знайти границю послідовності, перетворивши її на інтегральну суму Рімана;
- 2) провести грубу оцінку інтеграла Рімана, не обчислюючи його;
- 3) знайти середнє значення функції на заданому проміжку;
- 4) обчислити площу області на площині або довжину кривої;
- 5) обчислити об'єм тіла або площу поверхні обертання.

Якщо всі попередні контрольні роботи були розраховані на 90 аудиторних хвилин, то остання контрольна робота другого семестру проводиться на протязі 45 хвилин. Вона містить приклади:

- 1) представити функцію яку суму неперервної функції та функції стрибків;
- 2) представити функцію у вигляді різниці двох неспадних функцій;
- 3) обчислити інтеграл Рімана — Стілтєса.

Третій семестр курсу математичного аналізу присвячений числовим та функціональним рядам, нескінченним добуткам, інтегралу Фур'є, диференціальному численню функцій та вектор-функцій багатьох змінних.

Вивчення теми «Числові ряди та нескінченні добутки» закінчується контрольною роботою, яка містить приклади:

- 1) обчислити суму числового ряду;
- 2) дослідити на збіжність числовий ряд з невід'ємними членами;
- 3) дослідити числовий ряд на абсолютну та умовну збіжність;
- 4) обчислити нескінченний добуток;
- 5) дослідити нескінченний добуток на збіжність.

Вивчення теми «Функціональні ряди та інтеграл Фур'є» закінчується контрольною роботою, яка містить приклади:

- 1) знайти область збіжності функціонального ряду або довести рівномірну збіжність функціонального ряду на заданій множині;
- 2) знайти суму степеневого ряду за допомогою його почленного інтегрування або диференціювання;
- 3) розвинути функцію в ряд Тейлора;
- 4) розвинути функцію в ряд Фур'є;
- 5) зобразити функцію інтегралом Фур'є.

Остання контрольна робота третього семестру присвячена диференціальному численню функцій та вектор-функцій багатьох змінних та містить приклади:

- 1) обчислити диференціал функції трьох змінних, яку задано неявно;
- 2) знайти похідну функції трьох змінних у заданому напрямі;
- 3) дослідити функцію двох чи трьох змінних на екстремум;
- 4) текстова задача на знаходження найбільшого чи найменшого значення функції декількох змінних;
- 5) знайти похідну складеної вектор-функції двох змінних.

Четвертий та останній семестр курсу математичного аналізу присвячений інтегральному численню функцій багатьох змінних та інтегралам, що залежать від параметру. Вивчення теми «Кратні інтеграли» закінчується контрольною роботою, яка містить приклади:

- 1) змінити порядок у повторному інтегралі;
- 2) обчислити площу області на площині;
- 3) обчислити об'єм тіла;
- 4) приклад на застосування подвійного інтеграла в задачах з механіки;
- 5) приклад на застосування потрійного інтеграла в задачах з механіки.

Вивчення теми «Криволінійні, поверхневі інтеграли та теорія поля» закінчується контрольною роботою, яка містить приклади:

- 1) знайти масу кривої;
- 2) знайти роботу, яку виконує сила при русі вздовж кривої;
- 3) знайти масу поверхні;
- 4) знайти потік векторного поля вздовж заданої поверхні.

Застосування системи GeoGebra на заняттях з вищої математики студентів технічних спеціальностей

А. Ф. Дудко^{1, 2}, К. К. Москвичова¹

¹КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

²Інститут інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України,

Київ, Україна

afdudko@gmail.com

У доповіді обґрунтовано доцільність використання системи GeoGebra на заняттях з вищої математики студентів технічних спеціальностей. Визначено основні актуальні напрями роботи з системою динамічної математики.

Ключові слова: GeoGebra, система динамічної математики, вища математика, математичний аналіз, візуалізація.

Сучасний етап розвитку технічної освіти у зв'язку з усебічним упровадженням інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) вимагає пошуку нових засобів та інноваційних методик, що сприятимуть не лише оновленню змісту освіти, а й підвищенню її якості в цілому. Застосування засобів ІКТ дозволяє доповнити методи й форми навчання, зробити заняття сучасним і цікавішим, створити умови для розвитку творчих здібностей студента та підвищення його мотивації до навчання.

Дисципліни математичного циклу (лінійна алгебра й аналітична геометрія, математичний аналіз, теорія ймовірностей і математична статистика), що вивчаються студентами технічних спеціальностей на початковому етапі вищої професійної освіти, формують базовий математичний апарат для подальшого його застосування у професійній діяльності. Тому актуальним є питання пошуку нових засобів ІКТ-підтримки саме для викладачів вищої математики.

На сьогоднішній день серед програмного забезпечення, що застосовується при навчанні вищої математики необхідно виділити системи динамічної математики, зокрема систему GeoGebra. Залучення студентів на практичних заняттях до виконання завдань з використанням середовища GeoGebra розширює коло навчальних завдань, включаючи в нього нестандартні завдання дослідницького характеру (Гриб'юк & Юнчик, 2011).

Системи GeoGebra має простий, добре продуманий інтерфейс та має такі функціональні можливості як наочність (візуалізація навчальної інформації), моделювання (експериментального спостереження за поведінкою об'єктів і їх властивостей); динаміка (реалізація комп'ютерними засобами ефекту руху досліджуваного об'єкта. Простота роботи GeoGebra дає змогу викладачам, зосередитись на матеріалі без зайвих затрат часу на пояснення роботи з системою.

Питання використання системи GeoGebra досліджено в роботах М. Борчердса, О. О. Гриб'юк, Р. А. Зіатдінова, А. Лінднера, В. В. Пікалова, В. М. Ракути, Г. Столс, М. Гохенвартера та ін. Однак аналіз літератури показав, що застосування системи GeoGebra зазвичай розглядають на прикладах розв'язання задач

аналітичної геометрії. Питання застосування системи для ілюстрації різних тем математичного аналізу розглянуто недостатньо.

Застосування системи GeoGebra для візуалізації різних розділів математичного аналізу сприяє полегшенню сприйняття студентами навчального матеріалу. Так її доцільно застосовувати, наприклад, при поясненні означення границі функції, фізичного та геометричного змісту похідної, розкладу функції в ряд Тейлора, інтеграла Рімана.

Для прикладу скріншоти роботи динамічної системи з розкладу функції $y = \cos x$ в ряд Маклорена зображено на рис. 1.

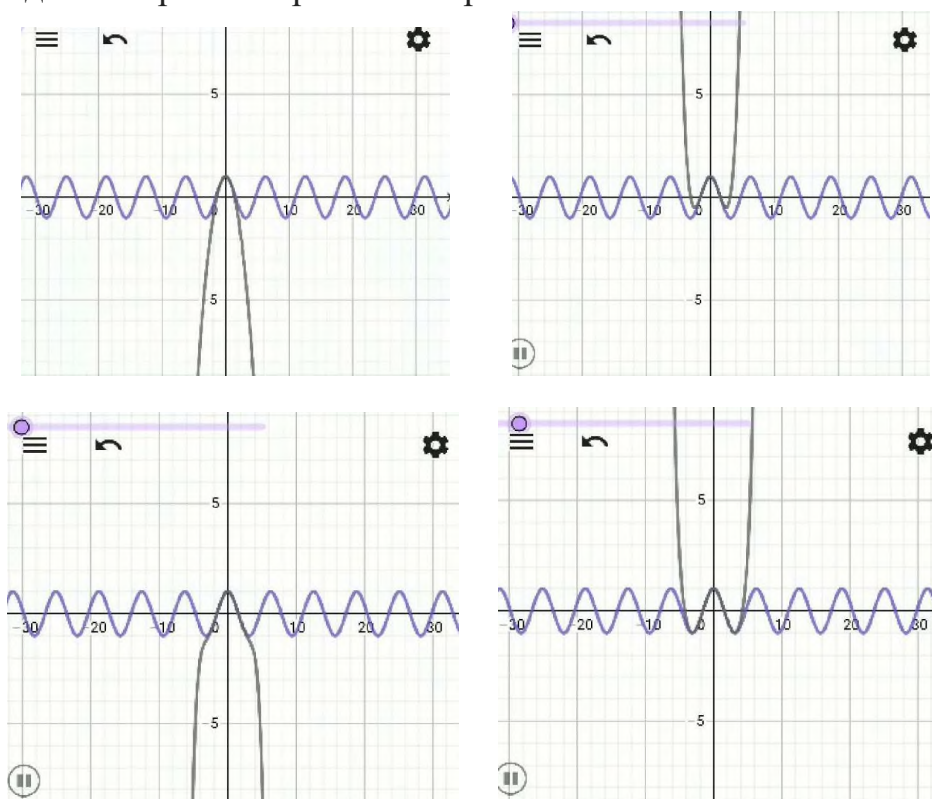


Рис. 1

Список літератури

- Little, C. (2011). Approaches to Calculus using GeoGebra. In L. Bu & R. Schoen (Eds.), *Model-centered learning: Pathways to mathematical understanding using GeoGebra* (pp. 191–204). SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-618-2_14
- Гриб'юк, О.О. & Юнчик, В.Л. (2015). Система динамічної математики GeoGebra як засіб активізації дослідницької діяльності учнів. *Інформаційно-комунікаційні технології в сучасній освіті: досвід, проблеми, перспективи*, (4.1), 163–167. http://lib.iitta.gov.ua/11188/1/Stattya_Yunchyk_Lviv.pdf

Скільки існує колокант функції із простими вузлами?

О.Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Досліджується питання про можливу множину колокант функції із простими вузлами та наведено декілька класів колокант-многочленів та дробово-раціональних колокант із параметрами. Обговорюється питання про вибір найкращих колокант.

Ключові слова: функція, многочлен, колоканта, вузли, залишковий член.

Розглянемо многочлен типу Лагранжа (у випадку алгебричного многочлена — многочлен Лагранжа)

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j = \Omega(x) Y(f), \quad (1)$$

$$\omega_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\psi_j(x_j)}, \omega_j(x_i) = \delta_{j,i}, f_j = f(x_j), \Omega(x) = (\omega_0(x) \dots \omega_n(x)), Y(f) = (f_0 \dots f_n)^T,$$

за нормальною системою базисних функцій ω_j (такою, що $Y(\Omega) = E$, E — одинична матриця, $L_n(\omega_j(x)) \equiv \omega_j(x)$). Похибка апроксимації є (Калайда, 2000)

$$r(f) = f(x) - L_n(x) = \frac{\omega(x)}{\omega^{(n+1)}(c)} (f^{(n+1)}(c) - L_n^{(n+1)}(c)), \quad (2)$$

$$\forall \omega(x) \Rightarrow \omega(x_j) = 0, \omega'(x_j) \neq 0; c \in (\min x_j, \max x_j).$$

Колокантами виду (1) являються так звані σ -колоканти (тригонометричні, експоненціальні тощо (Калайда, 2000))

$$L(\sigma(x)) = \Omega(\sigma(x)) Y(f), \sigma(x) = \{\sigma_{j,i}(x)\}, j, i = \overline{0, n},$$
$$\omega_j(\sigma(x)) = \frac{\psi_j(\sigma(x))}{\psi_j(\sigma(x_j))}, \psi_j(\sigma(x)) = \prod_{i=0, i \neq j}^n (\sigma_{j,i}(x) - \sigma_{j,i}(x_i)).$$

Вивчимо питання про множину колокант функції f , породжуваних колокантою (1), та про вибір найкращої.

Зрозуміло, що при вибраній системі базисних функцій многочлен (1) є многочленом мінімального порядку (наприклад, многочлен Лагранжа є алгебричний многочлен мінімального порядку), що задовольняє умови колокації $L_n(x_j) = f_j, j = \overline{0, n}$. Однак навіть за допомогою многочлена (1) можна побудувати нескінченну множину інших колокант, що задовольняють ті ж умови колокації. Такими колокантами, наприклад, є колоканти

$$\hat{L}(x) = \sum_{j=0}^n \omega_j^{\alpha_j}(x) f_j, \alpha_j > 0, \quad (3)$$

із залишковим членом виду (2). При $\alpha > 1$ колоканти (3) непридатні для чисельного диференціювання, оскільки $\hat{L}'(x_j) = f_j$. Очевидно, що має сенс задача вибору параметрів α_j для мінімізації похибки апроксимації (вони напевне залежать і від x , і від f ; так, наприклад, для двох вузлів маємо

$$\alpha_1 = 1 + (\ln(f(x) - f_0)h / (x - x_0)\Delta f) / \ln(x - x_0).$$

Оскільки перший співмножник у (2) мінімізується за рахунок розташування вузлів на відріжку, то зменшення залишкового члена за рахунок цих параметрів можливе зменшенням другого співмножника рівності (2). Проілюструємо на прикладі. Так, у випадку вузлів $x_0 = 0, x_1 = 1$ для $f(x) = e^x, x = 0.1$, $\alpha = 1$ з (3) дістаємо $\hat{r}(f) \approx -0.07$, а при $\alpha = 1.2132$ $\hat{r}(f) \approx 3 \cdot 10^{-7}$.

Зауважимо, що з існування та єдності наведених вище колоканти-многочленів випливає, що відповідні їм визначники типу Вандермонда відмінні від нуля.

Ще більш загально, колокантами функції, очевидно, є також многочлени вигляду

$$\bar{L}(x) = \sum_{j=0}^n \varphi(\omega_j(x)) f_j, \forall \varphi \Rightarrow \varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1, \varphi(y \neq 0) \neq 0.$$

Залишковий член $\bar{r}(f) = f(x) - \bar{L}_n(x)$ теж матиме вигляд (2), (4).

Таку ж ситуацію маємо і з дробово-раціональними колокантами, наприклад, явними колокантами вигляду (при $f_0 \dots f_n \neq 0$)

$$R(x) = \frac{f_0 \dots f_n}{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) \psi_j(f)}, \psi_j(f) = \prod_{i=0, i \neq j}^n f_i,$$

$$\tilde{R}(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j g_j}{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) g_j}, \hat{R}(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j P_j}{P(x)}$$

(залишковий член виду (2)) або напівявними колокантами виду

$$\bar{R}(x) = \frac{\omega_0(x)f_0 + \omega_1(x)\beta_1 f_1 + \dots + \omega_n(x)\beta_n f_n}{\omega_0(x) + \omega_1(x)\beta_1 + \dots + \omega_n(x)\beta_n}, \beta_j = const \neq 0,$$

$$\bar{\bar{R}}(x) = \frac{\omega_0(x) + \omega_1(x)\beta_1 + \dots + \omega_n(x)\beta_n}{\omega_0(x)/f_0 + \omega_1(x)\beta_1 f_1 + \dots + \omega_n(x)\beta_n / f_n}, \beta_j = \text{const} \neq 0, f_j \neq 0,$$

з такого ж типу базисними функціям ω_j , як і в розглянутих вище колокантах-многочленах (хоча б один з параметрів β_j відмінний від одиниці, інакше це многочлен (1) або перша з наведених вище дробово-раціональних колокант; визначати значення цих параметрів можна з умов колокацій $\bar{\bar{R}}(\bar{x}_i) = f_i, \bar{x}_i \neq x_j$, або, відповідно, $\bar{\bar{R}}(\bar{x}_i) = f_i, \bar{x}_i \neq x_j, i = \overline{1, n}$, досягаючи цим вищого порядку точності апроксимації (Калайда, 2000) і зменшення сталої Ліпшиця, оскільки при цьому використовується вдвічі менше базисних функцій.

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Двосторонні дробово-раціональні колоканти із двократними вузлами

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

За допомогою раціональної $(n + 1)$ -вузлової колоканти з параметрами побудовано двосторонні колоканти функції з n двократними вузлами, а також з одним двократним вузлом.

Ключові слова: колоканта, функція, параметри, вузли, двосторонні.

Серед наближених методів розв'язування задач найбільш надійними є двосторонні методи, а їх півсума та піврізниця дає, відповідно, точніший результат та контроль точності одержуваного наближеного розв'язку. На цю тему написано багато статей та книг. Але розроблені раніше методи практично надто трудомісткі, а тому малопридатні. Новий, практично придатний підхід до цієї теми стосовно двосторонніх чисельних методів здійснено в Калайда (1989, 2000). Побудовано двосторонні многочлени-колоканти як з простими, так і з кратними вузлами, двосторонні дробово-раціональні колоканти із простими вузлами, двосторонні формули чисельного диференціювання та чисельного інтегрування, двосторонні методи чисельного інтегрування задачі Коші для нормальних рівнянь, а також розв'язування лінійних інтегральних рівнянь. Тут дано побудову дробово-раціональних двосторонніх колокант із двократними вузлами колокації.

Розглянемо раціональну колоканту (Калайда, 2000)

$$R_n(x; f) = \frac{L_n(x; fa)}{L_n(x; a)}, \quad (1)$$
$$L_n(x; g) = \Omega(x)Y(g) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x)g_j = \bar{g} + \sum_{j=1}^n \omega_j(x)(g_j - \bar{g}),$$
$$\Omega(x) = (\omega_0(x) \dots \omega_n(x)), Y(g) = (g_0 \dots g_n)^T$$

— відповідно, нормальна матриця ($Y(\Omega) = E$, E — одинична матриця) базисних функцій ω_j , $Y(g)$ — вектор значень апроксимованої функції у вузлах колокації,

$$\alpha = (1 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_n)^T \vee (\alpha_0 \ \dots \ \alpha_{n-1} \ 1)^T, \alpha_j \neq 0.$$

За побудовою, колоканта (1) апіорі задовольняє умови колокації $R(x_j; f) = f_j$, $j = \overline{0, n}$, при довільних ненульових значеннях параметрів α_j (при $\alpha_j = 1$ ця колоканта є многочлен типу Лагранжа). Тому при довільних значеннях параметрів α_j маємо (c — середня точка відрізка $[x_0, x_n]$, вузли впорядковані)

$$r(x) = f(x) - R(x; f) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_n) r^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}. \quad (2)$$

Відмітимо принагідно, що з (2) випливає, що для двосторонніх колокант з простими вузлами їх похідна дає двосторонні наближення похідної функції у вузлах двосторонності колокації (Калайда, 2000), тобто $(\hat{K}, \check{K}$ — двосторонні колоканти із простими вузлами)

$$(f'(x_i) - \hat{K}'(x_i; f)(f'(x_i) - \check{K}'(x_i; f))) < 0, i = \overline{1, n-1}.$$

Виберімо в (1) значення параметрів α_j так, щоб виконувались ще умови

$$R'(x_i; f) = f'_i, i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Звідси для $\alpha_j = \hat{\alpha}_j, j = \overline{1, n}$, маємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n \omega'_j(x_i)(f_j - f_i) \hat{\alpha}_j - f'_i \hat{\alpha}_i = \omega'_0(x_i)(f_i - f_0), i = \overline{1, n} \Rightarrow \hat{\alpha}_j = \frac{\hat{\Delta}_j}{\hat{\Delta}_0}. \quad (4)$$

Отже, дістаємо колоканту з n двократними вузлами $x_1, \dots, x_n$

$$\hat{R}_{2n+1}(x; f) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j \hat{\Delta}_j}{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) \hat{\Delta}_j} = \frac{\Omega(x) Y(f \hat{\Delta})}{\Omega(x) Y(\hat{\Delta})}.$$

Тому, аналогічно (2),

$$\hat{r}(x) = f(x) - \hat{R}_{2n+1}(x; f) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2}{(2n+1)!} \hat{r}^{(2n+1)}(\bar{c}). \quad (5)$$

Виберемо, далі, в (1) значення параметрів α_j так, щоб умови (3) виконувались при $i = \overline{0, n-1}$. У цьому випадку для параметрів $\alpha_j = \check{\alpha}_j, j = \overline{0, n-1}$, матимемо систему лінійних алгебричних рівнянь виду (4)

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega'_j(x_i)(f_j - f_i) \check{\alpha}_j - \check{\alpha}_i f'_i = \omega'_n(x_i)(f_i - f_n), i = \overline{0, n-1} \Rightarrow \check{\alpha}_j = \check{\Delta}_j / \check{\Delta}_n. \quad (6)$$

Отже,

$$\check{R}_{2n+1}(x; f) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j \check{\Delta}_j}{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) \check{\Delta}_j} = \frac{\Omega(x) Y(f \check{\Delta})}{\Omega(x) Y(\check{\Delta})}.$$

є колоканта з n двократними вузлами $x_0, \dots, x_{n-1}$. Тому, аналогічно (5),

$$\tilde{r}(x) = f(x) - \tilde{R}_{2n+1}(x; f) = \frac{(x - x_0)^2 \dots (x - x_{n-1})^2 (x - x_n)}{(2n + 1)!} \tilde{r}^{(2n+1)}(\tilde{c}). \quad (7)$$

З (5), (7) випливає, що за умови знакосталості (на відрізку апроксимації) функції $\hat{r}^{(2n+1)} \tilde{r}^{(2n+1)}$ колоканти $\hat{R}_{2n+1}(x; f)$, $\tilde{R}_{2n+1}(x; f)$ функції f будуть двосторонніми, а отже, їхнє середнє арифметичне $\frac{\hat{R} + \tilde{R}}{2}$ буде точнішим наближенням функції, а піврізниця $\frac{\hat{R} - \tilde{R}}{2}$ слугуватиме контролем їх точності.

Відмітимо, що з рівностей (5), (7) випливає, що друга похідна побудованих двосторонніх колокант у спільних двократних вузлах $x_1, \dots, x_{n-1}$ є двосторонніми наближеннями другої похідної функції f (це, очевидно, притаманне й усім іншим двостороннім колокантам із двократними вузлами, як-от, наприклад, многочленам Маркова — Ерміта (Калайда, 2015), а півсума одержаних наближень та їхня піврізниця слугуватимуть, відповідно, точнішим наближенням значень другої похідної у згаданих вузлах та контролем точності результату.

У явному (ручному) аналітичному вигляді побудовані двосторонні колоканти можуть бути виражені лише при $n = 1, 3$. Наведемо їх у найпростішому випадку при $n = 1$ (два вузли). З урахуванням систем (4), (6) дістаємо:

$$\begin{aligned} \hat{R}_3(x; f) &= \frac{(x - x_0)f_1(f_1 - f_0) - hf_1'f_0(x - x_1)}{(x - x_0)(f_1 - f_0) - hf_1'(x - x_1)}, \\ \tilde{R}_3(x, f) &= \frac{hf_1f_0'(x - x_0) - f_0(f_1 - f_0)(x - x_1)}{hf_0'(x - x_0) - (f_1 - f_0)(x - x_1)}. \end{aligned}$$

Проілюструємо їх на прикладі. При $f(x) = \exp(x)$, $x_0 = 0$, $h = 0.2$, $x = 0.1$ дістаємо ($f(0.1) = 1.105170918$):

$$\begin{aligned} \hat{R}_3(0.1, f) &= 1.105262914 \quad (\hat{r} \approx -9.2 \cdot 10^{-5}), \\ \tilde{R}_3(0.1, f) &= 1.105078909 \quad (\tilde{r} \approx 9.2 \cdot 10^{-5}). \end{aligned}$$

Півсума та піврізниця цих наближень, відповідно, є:

$$\begin{aligned} \bar{R}_3(0.1, f) &= \frac{\hat{R}_3(0.1, f) + \tilde{R}_3(0.1, f)}{2} = 1.105170912 \quad (\bar{r} \approx -6 \cdot 10^{-9}), \\ \bar{r} &= \frac{\hat{R}_3(0.1, f) - \tilde{R}_3(0.1, f)}{2} \approx 9.2 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Як бачимо, ці двосторонні наближення досить симетричні (їхня півсума на чотири порядки точніша, ніж кожна з них). Тому їх можна ефективно застосовувати фрагментарно на двовузлових відрізках відповідної довжини, тобто як ланки локальних (ермітових) неперервних сплайнів, в результаті чого матимемо двосторонні неперервні локальні сплайни.

Побудуємо, далі, клас простіших явних двосторонніх раціональних колокант із двократними вузлами, двосторонніх лише на інтервалах між двократними вузлами і, правда, меншого порядку, ніж вище розглянуті так звані повні двосторонні колоканти. Для цього побудуємо колоканти виду (1) лише з одним параметром (решту покладемо рівними одиниці), відповідно, $\hat{\alpha}_i, \check{\alpha}_k, i < k$. При цьому системи (4), (6) складатимуться лише з одного рівняння і, в результаті, дістанемо явні колоканти, двосторонні на інтервалі (x_i, x_k) , $i = 0, n - k$,

$$\begin{aligned}\hat{R}_{n+1}(x; f) &= \frac{f'_i \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega_j(x) f_j + \omega_i(x) f_i \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega'_j(x_i) (f_j - f_i)}{f'_i \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega_j(x) + \omega_i(x) \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega'_j(x_i) (f_j - f_i)}, \\ \check{R}_{n+1}(x; f) &= \frac{f'_k \sum_{j=0, j \neq k}^n \omega_j(x) f_j + \omega_k(x) f_k \sum_{j=0, j \neq k}^n \omega'_j(x_k) (f_j - f_k)}{f'_k \sum_{j=0, j \neq k}^n \omega_j(x) + \omega_k(x) \sum_{j=0, j \neq k}^n \omega'_j(x_k) (f_j - f_k)}.\end{aligned}$$

При цьому, за побудовою, аналогічно (2), (5), (7) маємо рівності

$$\begin{aligned}\hat{r}(f) = f(x) - \hat{R}_{n+1}(x; f) &= \frac{(x - x_i) \prod_{j=0}^n (x - x_j)}{(n+2)!} \hat{r}^{(n+2)}(\xi), \\ \check{r}(f) = f(x) - \check{R}_{n+1}(x; f) &= \frac{(x - x_k) \prod_{j=0}^n (x - x_j)}{(n+2)!} \check{r}^{(n+2)}(\check{\xi})\end{aligned}$$

($\hat{\xi}, \check{\xi}$ — середні точки відрізка $[x_0, x_n]$, вузли упорядковані), так що при знакосталості функції $\hat{r}^{(n+2)} \check{r}^{(n+2)}$ та при $x \in (x_i, x_k)$ маємо нерівність $\hat{r}(f) \check{r}(f) \leq 0$, звідки й випливає, що дані колоканти на інтервалі $x \in (x_i, x_k)$ двосторонні (це, зокрема, вірно й при $i = 0, k = n$).

Отже, за допомогою цих двосторонніх колокант, можемо знаходити двосторонні наближення функції на відрізку між вузлами x_i, x_k та двосторонні наближення її похідної у вузлах $x_{i+1}, \dots, x_{k-1}$, а за допомогою їхніх півсум та піврізниць, відповідно, уточнення та контроль точності одержаних результатів.

Проілюструємо це на прикладі. Покладемо $n = 2$,
 $f(x) = \exp(x)$, $x_0 = 0$, $h = 0.2$, $\bar{x}_1 = 0.1$, $\bar{x}_2 = 0.3$. Тоді:

$$\begin{aligned}\widehat{R}_2(\bar{x}_1, f) &= 1.105186683, \widehat{r}(f) \approx -1.6 \cdot 10^{-5}, \\ \check{R}_2(\bar{x}_1, f) &= 1.105130202, \check{r}(f) \approx 4.1 \cdot 10^{-5}, \\ \frac{\widehat{R}_2(\bar{x}_1, f) + \check{R}_2(\bar{x}_1, f)}{2} &= 1.105158443, \bar{r} \approx 1.2 \cdot 10^{-5}, \\ \delta &\approx \frac{R(\bar{x}_1, f) - R(\bar{x}_1, f)}{2} \approx -5.6 \cdot 10^{-5}, \\ \widehat{R}_2(\bar{x}_2, f) &= 1.349807072, \widehat{r}(f) \approx 5.2 \cdot 10^{-5}, \\ \check{R}_2(\bar{x}_2, f) &= 1.349873774, \check{r}(f) \approx -1.5 \cdot 10^{-5}, \\ \frac{\widehat{R}_2(\bar{x}_2, f) + \check{R}_2(\bar{x}_2, f)}{2} &= 1.349840423, \bar{r} \approx 1.8 \cdot 10^{-5}, \\ \delta &\approx \frac{R(\bar{x}_2, f) - R(\bar{x}_2, f)}{2} \approx -3.3 \cdot 10^{-5}; \\ \widehat{R}'_2(x_1, f) &= 1.220963475, \widehat{r}' \approx 4.4 \cdot 10^{-4}, \\ \check{R}'_2(x_1, f) &= 1.2217821, \check{r}'(f) \approx -4.1 \cdot 10^{-4}, \\ \frac{\widehat{R}'_2(\bar{x}_1, f) + \check{R}'_2(\bar{x}_1, f)}{2} &= 1.221372788, \bar{r}' \approx 3 \cdot 10^{-5}, \\ \delta' &= \frac{\widehat{R}'_2(x_1, f) - \check{R}'_2(\bar{x}_1, f)}{2} \approx -4.1 \cdot 10^{-4}. \\ \widehat{R}'_2(x_1, f) &= 1.220963475, \widehat{r}' \approx 4.4 \cdot 10^{-4}, \\ \check{R}'_2(x_1, f) &= 1.2217821, \check{r}'(f) \approx -4.1 \cdot 10^{-4}, \\ \frac{\widehat{R}'_2(\bar{x}_1, f) + \check{R}'_2(\bar{x}_1, f)}{2} &= 1.221372788, \bar{r}' \approx 3 \cdot 10^{-5}, \\ \delta' &= \frac{\widehat{R}'_2(x_1, f) - \check{R}'_2(\bar{x}_1, f)}{2} \approx -4.1 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Наостанку відмітимо, що розглядувані тут дробово-раціональні колоканти менш чутливі до неусувної похибки вхідних даних, ніж колоканти-многочлени того ж порядку точності, оскільки при цьому використовується вдвічі менше базисних функцій (відповідно й меншою являється стала Ліпшиця).

Список літератури

- Калайда, А. Ф. (1989). О двусторонних аппроксимациях функций многочленами. *Вычисл. и прикл. матем.*, (676), 31–37.
- Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
- Калайда, О. Ф. (2015). Двосторонні симетричні многочлени-колоканти з двократними вузлами. У *Матеріалах XVI Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука*. (Т. 2, с. 102–103). Київ: НТУУ «КПІ». <http://matan.kpi.ua/uk/kravchuk-conf2015.html>

Лінійні двосторонні автономні методи розв'язування задачі Коші для нормальних диференціальних рівнянь

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Побудовано двосторонні автономні інтерполяційні методи третього порядку розв'язування задачі Коші для нормальних рівнянь з уточненням до методу четвертого порядку зі збереженням автономності.

Ключові слова: задача Коші, диференціальні рівняння, метод, порядок, точність.

Задача Коші (взагалі кажучи, векторна)

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

розв'язується різнманітними чисельними методами (Калайда, 2000). Найпрактичнішими з них є автономні (двоточкові) методи, оскільки дають просту можливість застосовуватись зі змінним кроком інтегрування, а отже, при наявності такого ж простого покрокового контролю похибки легку досяжність потрібної точності результату. До таких методів відносяться методи ламаних Ойлера, метод трапецій та метод Рунге — Кутти. Перші два з них мають надто низький порядок. Тут побудовано двосторонні уточнення методу трапецій, а на їх півсумі — уточнення до рівня методу Рунге — Кутти.

Застосуємо до задачі (1) побудовані інтегруванням двосторонніх двоточкових многочленів Маркова — Ерміта з одним двократним вузлом

$$\hat{H}_2(x) = f_0 + \frac{(x - x_0)(f_1 - f_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{f_1 - f_0 - hf'_0}{h^2}, h = x_1 - x_0,$$

$$\check{H}_2(x) = f_0 + \frac{(x - x_0)(f_1 - f_0)}{h} - (x - x_0)(x - x_1) \frac{f_1 - f_0 - hf'_1}{h^2}$$

двоточкові (автономні) квадратурні формули

$$J(f) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \approx \tilde{J}(f) = h \frac{4f_0 + 2f_1 + hf'_0}{6}, \hat{r}(f) = -\frac{h^4}{72} f_0^{IV} - \frac{7}{360} h^5 f_0^{IV} + \dots \quad (2)$$

$$J(f) \approx \check{J}(f) = \frac{h}{6} (2f_0 + 4f_1 - hf'_1), \check{r}(f) = \frac{h^4}{72} f_0^{IV} - \frac{h^5}{80} f_0^{IV} + \dots \quad (2')$$

так що їхня півсума

$$\bar{J}(f) = \frac{\hat{J}(f) + \check{J}(f)}{2} = \frac{h}{2} (f_0 + f_1) - \frac{h^2}{12} (f'_1 - f'_0), \bar{r}(f) = \frac{h^5}{720} (f_1''' - f_0''') + \dots,$$

(як бачимо, утворилась одна з формул Ойлера — Маклорена) та піврізниця

$$\delta(f) = \frac{\hat{J}(f) - \check{J}(f)}{2} = \frac{h}{6} \left(\frac{h(f'_0 + f'_1)}{2} - (f_1 - f_0) \right) = \frac{7}{720} f_0^{IV} + \dots,$$

дають, відповідно, уточнення двосторонніх наближень та контроль їх похибки.

В результаті матимемо автономні двосторонні інтерполяційні методи третього порядку

$$y_{n+1} = y_n + h_n \frac{4f_n + 2f_{n+1} + h_n \varphi_n}{6}, \quad \varphi(x, y) = \frac{d}{dx} f(x, y) = f'_x + f'_y f,$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \frac{2f_n + 4f_{n+1} - h_n \varphi_{n+1}}{6}, \quad h_n = x_{n+1} - x_n$$

та їх уточнення — метод четвертого порядку

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f_n + \frac{h^2}{12} \varphi_n + \frac{h}{2} f_{n+1} - \frac{h^2}{12} \varphi_{n+1}.$$

(типу методу Рунге — Кутти). Реалізувати його можна методом простих ітерацій (k — номер ітерації) або методом Ньютона чи іншими ітеративними методами.

$$y_{n+1,0} = y_n + hf_n, \quad y_{n+1,k+1} = \left(y + \frac{h}{2} f + \frac{h^2}{12} \varphi \right)_n + \left(\frac{h}{2} f - \frac{h^2}{12} \varphi \right)_{n+1,k}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

причому збіжність ітерацій гарантовано за умови

$$\frac{h(3f'_y - h\varphi'_y)}{6} < 1.$$

При цьому контроль точності (принаймні, методу трапецій) можна здійснювати за допомогою другого доданка рівності (2), тобто нерівності

$$\frac{h^2 |f'_{n+1} - f'_n|}{12} < \varepsilon.$$

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Двосторонні многочлени Тейлора та відповідні двосторонні квадратурні формули

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Побудовано двосторонні многочлени Тейлора та відповідні їм двосторонні квадратурні формули типу квадратурних формул Ойлера.

Ключові слова: многочлен Тейлора, двосторонні, квадратурні формули, формули Ойлера.

Розглянемо многочлени Тейлора (одновузлові колоканти функції із кратним вузлом (центром)), відповідно, a та $b > a$

$$\tilde{T}_n(x; a) = f_0 + (x - a)f'_0 + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!} f_0^{(n)}, f_0^{(j)} = f^{(j)}(a) \quad (1)$$

(екстраполяція вперед),

$$\hat{T}_n(x; b) = f_1 + (x - b)f'_1 + \dots + \frac{(x - b)^n}{n!} f_1^{(n)}, f_1^{(j)} = f^{(j)}(b), x \in (a, b) \quad (2)$$

(екстраполяція назад).

Оскільки, як загальновідомо (Ляшко та ін., 1983), залишкові члени формул Тейлора є, відповідно,

$$\tilde{r}(f) = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\tilde{c}), \tilde{c} \in (a, x), \hat{r}(f) = \frac{(x - b)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\hat{c}), \hat{c} \in (x, b),$$

то при парному $n = 2k$ (при сумі непарного числа доданків многочлена) та знакосталості на інтервалі (a, b) функції $f^{(n+1)}$ маємо нерівність $\tilde{r}(f)\hat{r}(f) < 0$, тобто такі многочлени (1), (2) — многочлени нульового порядку, квадратні, четвертого порядку і т. д. — являються двосторонніми колокантами функції f на інтервалі (a, b) . Отже, відповідно, їхня півсума

$$\bar{T}_{2k}(x) = \frac{\tilde{T}_{2k}(x; a) + \hat{T}_{2k}(x; b)}{2}$$

є точніше наближення функції, ніж менш точний з цих многочленів, а піврізниця

$$\delta(f) = \frac{\hat{T}_{2k}(x; b) - \tilde{T}_{2k}(x; a)}{2}$$

— контролем точності результату апроксимації.

Двосторонні многочлени (1), (2) є ідеальними для побудови двосторонніх квадратурних формул у тому розумінні, що безпосереднє інтегрування багаточислових колокант функції без спеціальних побудов, узагалі кажучи, не дає двосторонніх квадратурних формул. У даному ж випадку, зінтегрувавши многочлени (1), (2) в межах від a до b , дістанемо квадратурні формули

$$\tilde{J}_{2k}(f) = \sum_{j=0}^{2k} \frac{h^{j+1} f_0^{(j)}}{j!}, \quad \hat{J}_{2k}(f) = \sum_{j=0}^{2k} \frac{h^{j+1} (-1)^j f_1^{(j)}}{j!}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad h = b - a,$$

що, як бачимо, є узагальненими формулами прямокутників. А з нерівності $\tilde{r}(f)\hat{r}(f) < 0$, виконуваної на інтервалі інтегрування, випливає, що ці формули двосторонні. Отже, їхня півсума являється точнішою, на одиницю вищого порядку, квадратурною формулою (узагальненою формулою трапецій, а також певним узагальненням квадратурних формул Ойлера), а піврізниця — контролем точності результату. При цьому, оскільки півсума має вигляд

$$\bar{J}_{2k}(f) = \sum_{j=0}^{2k} \frac{h^{2j+1} (f_0^{(2j)} + f_1^{(2j)})}{2(2j+1)!} - \sum_{j=1}^{2k} \frac{h^{2j+1} (f_1^{(2j+1)} - f_0^{(2j+1)})}{2(2j+1)!},$$

як різниця лінійної комбінації квадратурних формул для похідних парного порядку та лінійної комбінації приростів похідних непарного порядку, то сумарна формула на послідовних відрізках $[a_i, b_i]$ сталої довжини міститиме лише суму першої з її суми, а друга — суму різниць похідних непарного порядку функції лише у крайніх точках сумарного відрізка інтегрування. Піврізниця ж

$$\delta(f) = \sum_{j=0}^{2k} \frac{h^{2j+1} (f_1^{(2j)} - f_1^{(2j)})}{2(2j+1)!} - \sum_{j=1}^{2k} \frac{h^{2j+1} (f_1^{(2j+1)} + f_0^{(2j+1)})}{2(2j+1)!},$$

навпаки, міститиме лише у крайніх точках сумарного відрізка інтегрування лінійну комбінацію приростів похідних парного порядку та суму лінійних комбінацій формул трапецій для похідних непарного порядку.

Двосторонність многочленів (1), (2) можна покращити (більш їх симетризувати) доданком, що має нуль у протилежній точці, відповідно, b та a . Для двосторонніх квадратурних формул це не обов'язково. Правда, це вже будуть многочлени Ерміта — Маркова.

Усі виконані вище побудови узагальнюються на випадок суперпозиції функцій $g \mapsto f(g)$ з монотонною функцією g . Для цього досить у згаданих побудовах замінити x на $g(x)$, а похідні по x — на похідні за $g(x)$. Для побудови відповідних квадратурних формул при цьому, зрозуміло, необхідна можливість точно інтегрувати степені приростів функції g .

Список літератури

- Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
 Ляшко, И. И., Боярчук, Ф. Л., Гай, Я. Г., Калайда, А. Ф. (1983). *Математический анализ*. (Ч. 1.). Киев: Вища школа.

Дробово-раціональні двосторонні методи двох дотичних розв'язування скалярних скінченних рівнянь

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

За допомогою дробово-раціональних двоточкових та багатоточкових двосторонніх колокант функції із двократним вузлом побудовано двосторонні наближення коренів скалярних скінченних рівнянь.

Ключові слова: вузли, двосторонні колоканти, скінченні рівняння, корені.

Метод застосовується для відшукування відокремлених простих нулів функції f (для кратних — для функції $\varphi = \frac{f}{f'}$, оскільки вона має лише прості нулі функції f ; при цьому після завершення ітерацій можна знаходити і кратність нуля (Калайда, 2000)). Метод являється аналогом пари методів — методу хорд та методу дотичних (Ньютона).

Перша схема. Розглянемо двосторонні на інтервалі (x_0, x_1) , $x_1 - x_0 = h$, двовузлові дробово-раціональні колоканти функції f (далі $f_j = f(x_j)$)

$$\begin{aligned}\hat{R}_3(x; f) &= \frac{(x - x_0)f_1(f_1 - f_0) - hf_1'f_0(x - x_1)}{(x - x_0)(f_1 - f_0) - hf_1'(x - x_1)}, \hat{r}(f) = f(x) - \hat{R}(x; f) = O(h^3), \\ \check{R}_3(x, f) &= \frac{hf_1f_0'(x - x_0) - f_0(f_1 - f_0)(x - x_1)}{hf_0'(x - x_0) - (f_1 - f_0)(x - x_1)}, \check{r}(f) = f(x) - \check{R}(x, f) = O(h^3).\end{aligned}\quad (1)$$

Застосуємо їх до відшукування відокремленого простого нуля $\alpha \in (x_0, x_1)$ функції f , тобто при умові $f_0f_1 < 0$. Прирівнявши до нуля рівності (1), дістанемо лінійні алгебричні рівняння, а з них — двосторонні наближення шуканого нуля $\alpha \in (x_0, x_1)$ (метод третього порядку)

$$\hat{\alpha} = \frac{x_0f_1(f_1 - f_0) - x_1(x_1 - x_0)f_0f_1'}{f_1(f_1 - f_0) - (x_1 - x_0)f_0f_1'}, \check{\alpha} = \frac{x_0(x_1 - x_0)f_1f_0' - x_1f_0(f_1 - f_0)}{(x_1 - x_0)f_1f_0' - f_0(f_1 - f_0)}. \quad (2)$$

Таким чином, з (2) дістаємо новий інтервал $(\hat{\alpha}, \check{\alpha})$, якому належить шуканий нуль функції f , півсума

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha + \check{\alpha}}{2}$$

цих наближень є точніше значення шуканого нуля $\alpha \in (\hat{\alpha}, \check{\alpha})$, а піврізниця

$$\delta = \frac{\hat{\alpha} - \check{\alpha}}{2}$$

— мажоранта похибки (проте контролем точності наближень може бути також величина

$$\gamma = \frac{f(\bar{\alpha})}{f'(\bar{\alpha})},$$

оскільки

$$f(\bar{\alpha}) - f(\alpha) = (\bar{\alpha} - \alpha)f'(c) \approx (\bar{\alpha} - \alpha)f'(\bar{\alpha}) \Rightarrow |\bar{\alpha} - \alpha| \approx \left| \frac{f(\bar{\alpha})}{f'(\bar{\alpha})} \right|.$$

Звернімо увагу на доцільності тут саме раціональних колокант, оскільки при застосуванні двосторонніх, навіть двохточкових, многочленів Маркова — Ерміта (Калайда, 2015) за цією схемою довелось би, замість лінійних рівнянь (1), мати справу із квадратними рівняннями. Проілюструємо метод на прикладі.

Знайдемо двосторонні наближення кореня $\alpha = 1$ рівняння $e - e^x = 0$. Покладемо $x_0 = 0, x_1 = 1$ ($h = 1$). Тоді за формулами (2), відповідно, дістаємо:

$$\hat{\alpha} = (e - 1 + 3e^{0.5}) / (2(e - 1 + e^{0.5})) = 0.98989898..., \alpha - \hat{\alpha} = 0.0101...$$

(нижнє наближення кореня),

$$\check{\alpha} = \frac{3(e - 1) + e^{0.5}}{2(e - 1 + e^{0.5})} = 1.010329744..., \alpha - \check{\alpha} = -0.010329744...$$

(верхнє наближення кореня). Їхня півсума та піврізниця, відповідно, є:

$$\bar{\alpha} = \frac{\hat{\alpha} + \check{\alpha}}{2} = 1.000114367..., \alpha - \bar{\alpha} = -0.00011...,$$

$$\delta = \frac{\hat{\alpha} - \check{\alpha}}{2} = -0.01021537...$$

(за методом Ньютона похибка ≈ 0.1). Як бачимо, двосторонність наближень досить симетрична, а початковий одиничний інтервал для шуканого кореня звився до $2|\delta| \approx 0.02$. З такою ж точністю для e^x за даним методом знаходиться і середня точка в теоремі Лагранжа

$$e - 1 = e^c, c = \ln(e - 1) = 0.541324854... \in (0, 1).$$

Друга схема. Традиційно, як і в методах Ньютона (дотичних), Чебишова (Калайда, 2000), застосуємо колоканти (1) до оберненої функції $f^{-1} : y \mapsto x(y)$ та покладемо $y = 0$. У результаті дістанемо двосторонні наближення шуканого кореня рівняння знову у вигляді формул (2), тобто в даному випадку обидві схеми ідентичні. Застосуємо це до двосторонніх на інтервалі $(x_i, x_k), i < k$, багатоточкових дробово-раціональних колокант

$$\widehat{R}_{n+1}(x; f) = \frac{f'_i \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega_j(x) f_j + \omega_i(x) f_i \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega'_j(x_i) (f_j - f_i)}{f'_i \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega_j(x) + \omega_i(x) \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega'_j(x_i) (f_j - f_i)}, \quad (3)$$

$$\widetilde{R}_{n+1}(x; f) = \frac{f'_k \sum_{j=0, j \neq k}^n \omega_j(x) f_j + \omega_k(x) f_k \sum_{j=0, j \neq k}^n \omega'_j(x_k) (f_j - f_k)}{f'_k \sum_{j=0, j \neq k}^n \omega_j(x) + \omega_k(x) \sum_{j=0, j \neq k}^n \omega'_j(x_k) (f_j - f_k)} \quad (4)$$

при $k = i + 1$. Тут $\omega_j(x)$ — елементи нормальної системи базисних функцій многочленів типу Лагранжа. Помінявши в рівностях (3), (4) місцями символи x, f , з урахуванням рівності

$$x'_y = \frac{1}{f'_x}$$

(похідної оберненої функції), при $f_i f_{i+1} < 0$ дістанемо двосторонні наближення $\widehat{\alpha}, \widetilde{\alpha}$ шуканого простого кореня (метод $(n + 1)$ -порядку).

Зауважмо, що перша схема в цьому випадку непридатна, оскільки приводить до нелінійних (зокрема, алгебричних) рівнянь відносно шуканого кореня.

Список літератури

- Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
- Калайда, О. Ф. (2015). Двосторонні симетричні многочлени-колоканти функцій з двократними вузлами. У *Матеріалах XVI Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука* (Т. 2, с. 102–103). Київ: НТУУ «КПІ». <http://matan.kpi.ua/uk/kravchuk-conf2015.html>

Дробово-раціональні квадратурні формули на основі дробово-раціональних колокант

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Апроксимацією головної частини залишкового члена базової звичайної квадратурної формули за допомогою похідної відповідного порядку дробово-раціональної колоканти утворюється дробово-раціональна квадратурна формула.

Ключові слова: апроксимація, залишковий член, квадратурна формула, дробово-раціональна колоканта.

Безпосередньо зінтегрувати в елементарних функціях дробово-раціональну багатоточкову колоканту в загальному випадку практично неможливо (принаймні, надто важко, оскільки для цього її спочатку необхідно розгорнути в суму простих дробів; при цьому квадратурні формули міститимуть логарифми та, можливо, й арктангенси, а не дробово-раціональні вирази), тому так добувати квадратурні формули нереально, і, отже, це питання досі й не розглядалось. Тут пропонується простий спосіб залучення дробово-раціональних колокант до чисельного інтегрування, а саме, за допомогою їх чисельного диференціювання. Записавши шуканий інтеграл у вигляді суми базової (лінійної відносно значень функції у вузлах) квадратурної формули та залишку, тобто

$$J(f) = \int_a^b f(x)dx = \tilde{J}(f) + r(f), \quad (1)$$

та подавши головну частину $\tilde{r}(f)$ залишку $r(f)$ у вигляді приросту похідної відповідного порядку функції f , а приріст похідної приростом похідної того ж порядку дробово-раціональної колоканти $R(x; f)$, ми й одержимо саме дробово-раціональну квадратурну формулу

$$\tilde{J}_R(f) = \tilde{J}(f) + \tilde{\alpha}_k \Delta R^{(k)}(x; f) \quad (2)$$

($\tilde{\alpha}_k$ — відповідний коефіцієнт, при сталому кроці h сітки вузлів $\tilde{\alpha}_k = h^k \beta_k$, $\beta_k \ll 1$). Так, наприклад, у випадку формули трапецій маємо

$$\begin{aligned} \tilde{J}(f) &= \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{h^2}{12}(f_1' - f_0'), \\ r(f) &= \frac{h^4}{720}(f_1''' - f_0''') - \frac{h^6}{7!6}(f_1^V - f_0^V) + O(h^9). \end{aligned} \quad (2')$$

Важливо, що при підсумовуванні локальних елементів квадратурної формули (2) при сталому кроці інтегрування другий доданок міститиме похідну лише в початковій та кінцевій точках відрізка інтегрування (що притаманно квадратур-

ним формулам Ойлера — Маклорена); крім того, він слугуватиме контролем точності формули $\tilde{J}(f)$, а тому й самої формули.

Отже, достатньо другий доданок у цій квадратурній формулі апроксимувати дробово-раціональною колокантою з похибкою принаймні $O(h^3)$, щоб дістати дробово-раціональну квадратурну формулу виду (2), еквівалентну формулі Сімпсона. Для цього можна використати явну дробово-раціональну колоканту

$$R_n(x; f) = \frac{1}{L_n(x; 1/f)}, \quad (3)$$

де

$$L_n(x; q) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) q_j, \quad \omega_j(x) = \frac{\psi_j(\sigma(x))}{\psi_j(\sigma(x_j))},$$

$$\psi_j(\sigma(x)) = \prod_{i=0, i \neq j}^n (\sigma(x) - \sigma(x_i)), \quad q_j = q(x_j),$$

— многочлен типу Лагранжа (при $\sigma(x) = x$, тобто при алгебричній нормальній системі базисних функцій ω_j — многочлен Лагранжа) або напівявну (повну) раціональну колоканту (Калайда, 2000)

$$\hat{R}_{2n}(x; f; \alpha) = \frac{L_n(x; \alpha f)}{L_n(x; \alpha)} \Rightarrow \hat{R}_{2n}(x_j; f \alpha) = f_j, \quad j = \overline{0, n}, \quad \forall \alpha_j \neq 0, \quad (4)$$

$$L_n(x; f \alpha) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) \alpha_j f_j \equiv \Omega(x) Y(f \alpha),$$

$$\Omega(x) = (\omega_0(x) \dots \omega_n(x)), \quad Y(q) = (q_0 \dots q_n)^T,$$

(зауважимо, що многочлен типу Лагранжа доцільніше подавати у вигляді

$$L_n(x; f) = f_i + \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega_j(x) (f_j - f_i), \quad i = \overline{0, n}, \Rightarrow L_n(x_k; f) = f_k, \quad k = \overline{0, n},$$

оскільки при цьому використовується лише n базисних функцій ω_j) при значеннях α_j , визначуваних з системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\hat{R}_{2n}(\bar{x}_i; f; \alpha) = f(\bar{x}_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad \bar{x}_i \neq x_j, \quad j = \overline{0, n}.$$

Тоді колоканта (4) при системі лише $n + 1$ базисних функцій ω_j еквівалентна за порядком точності многочлену $L_{2n}(x; f)$ за системою $2n + 1$ базисних функцій, тобто повна, що, зрозуміло, значно спрощує процес її диференціювання при використанні у формулі (2).

Так, наприклад, при трьох рівновіддалених вузлах колоканта (3) має вигляд

$$R_2(x; f) = \frac{2hf_0f_1f_2}{(x-x_1)(x-x_2)f_1f_2 - 2(x-x_0)(x-x_2)f_0f_2 + (x-x_0)(x-x_1)f_0f_1},$$

звідки

$$R_2'(x_0; f) = f_0 \frac{3f_1f_2 - 4f_0f_2 + f_0f_1}{2hf_1f_2},$$

$$R_2'(x_1; f) = f_1^2 \frac{f_2 - f_1}{2hf_0f_2}, \quad R_2'(x_2; f) = f_2 \frac{-f_1f_2 + 4f_0f_2 - 3f_0f_1}{2hf_0f_1}.$$

Підставивши приріст $\Delta_2 R_2'$ в (2), матимемо дробово-раціональну квадратурну формулу, еквівалентну формулі Сімпсона.

Аналогічно при двох основних рівновіддалених вузлах $x_0, x_2 = x_0 + 2h$ та додатковому вузлі $x_1 = x_0 + h$ колоканта (4) має вигляд (дробово-лінійна)

$$R_2(x; f\alpha) = \frac{f_2(f_1 - f_0)(x - x_0) - f_0(f_2 - f_1)(x - x_2)}{(f_1 - f_0)(x - x_0) - (f_2 - f_1)(x - x_2)}$$

і, відповідно,

$$R_2'(x_0; f\alpha) = \frac{(f_1 - f_0)(f_2 - f_0)}{2h(f_2 - f_1)}, \quad R_2'(x_2; f\alpha) = \frac{(f_2 - f_1)(f_2 - f_0)}{2h(f_1 - f_0)},$$

так що

$$\Delta R_2' = R_2'(x_2; f\alpha) - R_2'(x_0; f\alpha) = \frac{(f_2 - f_0)^2}{2h} \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{(f_1 - f_0)(f_2 - f_1)}.$$

Підставивши це в (2') з подвоєним кроком, теж матимемо дробово-раціональну квадратурну формулу, еквівалентну формулі Сімпсона

$$\tilde{J}(f) = h(f_0 + f_2) - \frac{h}{6} \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{(f_1 - f_0)(f_2 - f_1)} (f_2 - f_0)^2.$$

При цьому другий її доданок являється контролюючим для формули трапецій. Так, наприклад, за цією формулою при

$$f(x) = \exp(x), \quad h = 0.1, \quad x_0 = 0, \quad x_2 = 0.2$$

дістаємо

$$(J(f) = 0.221402758...): \tilde{J}(f) = 0.221399698 \Rightarrow \tilde{r}(f) = 3 \cdot 10^{-6},$$

причому другий доданок формули дорівнює $\delta = -0.0007405754$, тобто показує величину похибки формули трапецій. За формулою Сімпсона маємо результат з похибкою $\hat{\delta} \approx -1.2 \cdot 10^{-7}$. Це й зрозуміло, оскільки числовий коефіцієнт залишкового члена формули (2') у 8 разів більший від числового коефіцієнта залишкового члена формули Сімпсона.

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Лінійні двосторонні методи двох дотичних розв'язування скінченних рівнянь

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

За допомогою двосторонніх многочленів Маркова — Ерміта побудовано двосторонні наближення коренів скалярних скінченних рівнянь.

Ключові слова: двосторонні многочлени, скалярні рівняння, корені.

За допомогою двосторонніх невідроджених (третій доданок відмінний від нуля) двохвузлових многочленів Маркова — Ерміта (Калайда, 2000)

$$\hat{H}_2(x) = f_0 + \frac{(x - x_0)(f_1 - f_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{f_1 - f_0 - hf'_0}{h^2}, \quad h = x_1 - x_0,$$

$$\check{H}_2(x) = f_0 + \frac{(x - x_0)(f_1 - f_0)}{h} - (x - x_0)(x - x_1) \frac{f_1 - f_0 - hf'_1}{h^2}, \quad f_j = f(x_j),$$

$$(\hat{H}(x_0) = \check{H}(x_0) = f_0, \check{H}(x_1) = \hat{H}(x_1) = f_1, \hat{H}'(x_0) = f'_0, \check{H}'(x_1) = f'_1),$$

а отже $(\hat{c}, \check{c} \in (x_0, x_1)$ — середні точки),

$$\hat{r}(f) = f(x) - \hat{H}(x) = \frac{(x - x_0)^2(x - x_1)}{3!} f'''(\hat{c}), \quad \check{r}(f) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)^2}{3!} f'''(\check{c}),$$

дістаємо двосторонні двоточкові методи третього порядку розв'язування скалярних рівнянь $f(x) = 0$. Справді, у випадку простого кореня $\alpha \in (x_0, x_1)$, так що $f_0 f_1 < 0$, застосувавши дані многочлени до оберненої функції $y \mapsto x(y)$, матимемо його двосторонні (при наявності третього доданка) наближення $\hat{\alpha}, \check{\alpha}$:

$$\hat{\alpha} = x_0 - f_0 \frac{\Delta x}{\Delta f} + f_0 f_1 \frac{\Delta x f'_0 - \Delta f}{f'_0 (\Delta f)^2},$$

$$\check{\alpha} = x_0 - f_0 \frac{\Delta x}{\Delta f} - f_0 f_1 \frac{\Delta x f'_1 - \Delta f}{f'_1 (\Delta f)^2}, \quad \Delta q = q_1 - q_0.$$

Тоді півсума

$$\bar{\alpha} = \frac{\hat{\alpha} + \check{\alpha}}{2}$$

є точнішим наближенням кореня, а піврізниця

$$\delta = \frac{\hat{\alpha} - \check{\alpha}}{2}$$

може слугувати мірою точності результату (точніше нею буде слугувати величина

$$\gamma = \frac{f(\bar{\alpha})}{f'(\bar{\alpha})}.$$

Тому далі даний метод доцільно комбінувати з методом поділу навпіл: обирати далі інтервал $(\hat{\alpha}, \bar{\alpha}) \vee (\bar{\alpha}, \check{\alpha})$.

У випадку кратних коренів метод застосовний до функції

$$\frac{f}{f'}$$

(завжди із простими нулями!), а кратність визначати за допомогою виразу

$$\frac{f'^2}{f'^2 - ff''}.$$

Проілюструємо метод на прикладі рівняння $f(x) = e^x - e = 0$, $(\alpha = 1)$.

Покладемо $x_0 = 0.5$, $x_1 = 1.5$. Тоді:

$$\hat{\alpha} = 1.046339564..., \alpha - \hat{\alpha} = -0.046339564...;$$

$$\check{\alpha} = 0.963993702..., \alpha - \check{\alpha} = 0.0360...;$$

$$\bar{\alpha} = 1.0051666..., \alpha - \bar{\alpha} = -0.0051..., \delta = 0.04...$$

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Про логарифмічні квадратурні формули

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

За допомогою різноманітних колокант функцій побудовано логарифмічні і, зокрема, двосторонні квадратурні формули різного порядку.

Ключові слова: функція, двосторонні колоканти, квадратурні формули.

Квадратурні формули називатимемо логарифмічними при наявності в їх структурі логарифмів певних виразів. Побудуємо декілька таких формул.

Перш за все, оскільки степені $\ln x$ інтегруються точно (за рекурентною формулою $J_0 = x$, $J_n = x(\ln x)^n - nJ_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$), то, апроксимувавши функцію f многочленом типу Лагранжа $L_n(\ln x; f)$ та зінтегрувавши його в межах відрізка апроксимації (або відрізка, належного цьому відрізку), дістанемо клас логарифмічних квадратурних формул, аналогічний класу традиційних алгебричних квадратурних формул (типу формул Ньютона — Котеса). Так, наприклад, при $n = 1$ маємо квадратурну формулу (аналог формули трапецій)

$$J(f) = \Delta(xf) - x_0 \frac{\Delta x \Delta f}{\ln(x_1 / x_0)}.$$

У такий же спосіб, зрозуміло, використовуючи інші σ -многочлени типу Лагранжа (Калайда, 2000) можна добувати й інші так звані неалгебричні (ірраціональні, експоненціальні, тощо) квадратурні формули.

Інтегруванням, далі, двохвузлових алгебричних двосторонніх дробово-раціональних колокант функцій з одним (відповідно, лівим та правим) двократним вузлом

$$\begin{aligned}\widehat{R}_3(x, f) &= \frac{hf_1f'_0(x - x_0) - f_0(f_1 - f_0)(x - x_1)}{hf'_0(x - x_0) - (f_1 - f_0)(x - x_1)}, \\ \check{R}_3(x; f) &= \frac{(x - x_0)f_1(f_1 - f_0) - hf'_1f_0(x - x_1)}{(x - x_0)(f_1 - f_0) - hf'_1(x - x_1)}\end{aligned}$$

для інтеграла

$$J(f) = \int_{\Delta} f(x)dx, \Delta = [x_0, x_1],$$

дістаємо автономні логарифмічні двосторонні квадратурні формули третього порядку

$$\begin{aligned}\widehat{J}(f) &= \widehat{\gamma} + \widehat{\kappa} \ln(1 + (hf'_0 - \Delta f) / \Delta f), \widehat{\gamma} = \frac{hf_1f'_0 - f_0\Delta f}{hf'_0 - \Delta f}, \widehat{\kappa} = -f'_0 \left(\frac{h\Delta f}{\Delta f - hf'_0} \right)^2, \\ \check{J}(f) &= \check{\gamma} + \check{\kappa} \ln(1 + (\Delta f - hf'_1) / hf'_1), \check{\gamma} = \frac{f_1\Delta f - hf'_1f_0}{\Delta f - hf'_1}, \check{\kappa} = -f'_1 \left(\frac{h\Delta f}{\Delta f - hf'_1} \right)^2.\end{aligned}\quad (1)$$

Отже, півсума $\bar{J}(f)$ формул (1) даватиме точніше наближення інтеграла (можливо, і формулу четвертого порядку), а піврізниця

$$\delta(f) = \frac{\hat{J}(f) - \bar{J}(f)}{2}$$

слугуватиме контролем точності результату.

Також інтегруванням дробово-раціональної колоканти з вузлами $x_0 < \bar{x} < x_1$

$$R(x) = \frac{(x - x_0)((x_1 - \bar{x})(\bar{f} - f_0)f_1 - (\bar{x} - x_0)(f_1 - \bar{f})f_0) + h(\bar{x} - x_0)(f_1 - \bar{f})f_0}{(x - x_0)((x_1 - \bar{x})(\bar{f} - f_0) - (\bar{x} - x_0)(f_1 - \bar{f})) + h(\bar{x} - x_0)(f_1 - \bar{f})}$$

дістаємо квадратурну формулу

$$J(f) = \frac{A}{C}h + \frac{BC - AD}{C^2} \ln \left(1 + \frac{Ch}{D} \right), \quad (2)$$

$$A = (x_1 - \bar{x})(\bar{f} - f_0)f_1 - (\bar{x} - x_0)(f_1 - \bar{f})f_0, \quad B = h(\bar{x} - x_0)(f_1 - \bar{f})f_0, \\ C = (x_1 - \bar{x})(\bar{f} - f_0) - (\bar{x} - x_0)(f_1 - \bar{f}), \quad D = h(\bar{x} - x_0)(f_1 - \bar{f}).$$

Проілюструємо формулу (2) на прикладі.

Приклад 1. Нехай $f(x) = \exp(x)$, $x_0 = 0$, $x = 0.5$, $x_1 = 1$. Тоді за формулою (2) дістаємо $J(f)$ з похибкою $\delta(J) \approx -0.15$ (за формулою Сімпсона похибка вдвічі менша).

Крім того, множину неалгебричних, у тому числі логарифмічних, двосторонніх квадратурних формул дістаємо інтегруванням двосторонніх двоточкових з одним (лівим-правим) двократним вузлом σ -многочленів типу Ерміта — Маркова (Калайда, 2000) при $\sigma = \ln(a + x)$, $a + x > 0$,

$$\hat{H}(\sigma) = f_0 + (\sigma(x) - \sigma(x_0)) \frac{\Delta f}{\Delta \sigma} + \frac{\omega(x)}{\omega'(x_0)} \left(f'_0 - \sigma'_0 \frac{\Delta f}{\Delta \sigma} \right), \quad \omega(x_j) = 0, \quad \omega'(x_j) \neq 0,$$

$$\check{H}(\sigma) = f_0 + (\sigma(x) - \sigma(x_0)) \frac{\Delta f}{\Delta \sigma} + \frac{\omega(x)}{\omega'(x_1)} \left(f'_1 - \sigma'_1 \frac{\Delta f}{\Delta \sigma} \right), \quad \Delta q = q_1 - q_0, \quad q_j = q(x_j).$$

У результаті матимемо двосторонні не алгебричні квадратурні формули третього порядку

$$\hat{J}(f) = f_0 h + \frac{\Delta f}{\Delta \sigma} \int_{\Delta} (\sigma(x) - \sigma_0) dx + \frac{f'_0 - \sigma'_0 \frac{\Delta f}{\Delta \sigma}}{\omega'_0} \int \omega(x) dx, \quad (3) \\ \check{J}(f) = f_0 h + \frac{\Delta f}{\Delta \sigma} \int (\sigma(x) - \sigma_0) dx + \frac{f'_1 - \sigma'_1 \frac{\Delta f}{\Delta \sigma}}{\omega'_1} \int_{\Delta} \omega(x) dx$$

(при $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)$ інтеграл у третьому їхньому доданку дорівнює нулеві). Зауважимо, що у (3) сума перших двох доданків являється аналогом

формули трапецій. Як бачимо, інтегруванням цих σ -колокант-многочленів можна добувати найрізноманітніші квадратурні формули, лише аби наявні в них інтеграли практично можна було знаходити точно.

Не двосторонню логарифмічну квадратурну формулу добуваємо інтегруванням двоточної дробово-лінійної колоканти

$$R(x; f) = \frac{1}{L_1(x; 1/f)} = \frac{hf_0f_1}{(x-x_0)f_0 - (x-x_1)f_1}, h = x_1 - x_0, f_0f_1 \neq 0.$$

У результаті дістанемо елегантну логарифмічну формулу другого порядку (еквівалентну формулі трапецій)

$$J(f) \approx \hat{J}(f) = \frac{hf_0f_1}{\Delta f} \ln \left(1 + \frac{\Delta f}{f_0} \right) = \ln \left(1 + \frac{\Delta f}{f_0} \right)^\gamma, \gamma = \frac{hf_0f_1}{\Delta f}. \quad (4)$$

Отже, у сумарній формулі (3) фігуруватиме не сума логарифмів, а логарифм добутку.

Проілюструємо формулу (4) на прикладі.

Приклад 2. Для $f(x) = \exp(x)$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$ за формулою (3) дістаємо $\hat{J}(f) = 0.220666222\dots$, $\hat{r}(f) \approx 7.36 \cdot 10^{-4}$. А за формулою трапецій маємо $J(f) \approx 0.2221402758\dots$, $r(f) \approx -7.38 \cdot 10^{-4}$, тобто у даному випадку це досить симетричні двосторонні наближення (їхня півсума є наближення інтеграла з похибкою $\delta \approx -5 \cdot 10^{-7}$).

І, нарешті, ще одну логарифмічну квадратурну формулу дістаємо з інтегрально-дискретної квадратурної формули (Калайда, 2000)

$$J\left(\frac{f'}{f}\right) = J\left(\frac{ff'}{f^2}\right) = \Delta(\ln f) = -\frac{1}{h}J(f)\Delta\left(\frac{1}{f}\right) + \frac{h}{12}\Delta f\Delta\left(\frac{f'}{f^2}\right) + O(h^5).$$

У результаті дістаємо логарифмічну формулу четвертого порядку (еквівалентну формулі Сімпсона)

$$J(f) \approx \tilde{J}(f) = \frac{hf_0f_1}{\Delta f} \Delta(\ln f) + \frac{h^2}{12} \frac{f_1^2 f'_0 - f_0^2 f'_1}{f_0f_1}, J - \tilde{J} = O(h^5). \quad (5)$$

Проілюструємо формулу (5) на прикладі.

Приклад 3. Візьмемо дані з прикладу 2. Тоді $\hat{J}(f) = 0.221404231\dots$, $\tilde{r}(f) \approx -1.5 \cdot 10^{-6}$. Як бачимо, це на два порядки точніше, ніж у прикладі 3 (за формулою Сімпсона з таким же кроком $r(f) \approx -4.35 \cdot 10^{-6}$).

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Матричні алгоритми чисельного диференціювання на основі дробово-раціональних колокант

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Матричні алгоритми чисельного диференціювання на основі многочленів типу Лагранжа $L_n(x)$ вперше були винайдені й детально дослідженні (Калайда, 1982, 2000). Як відомо, для побудови алгебричних формул чисельного диференціювання традиційно покладають

$$f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x) = \Omega_n^{(k)}(x)Y(f), \Omega_n(x) = (\omega_0(x) \dots \omega_n(x)), \quad (1)$$

$$\omega_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\psi_j(x_j)}, \psi_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n (x - x_i), Y(f) = (f_0 \dots f_n)^T, f_j = f(x_j),$$

(тобто матриця-рядок $\Omega_n(x)$ є нормальна матриця алгебричних базисних функцій ω_j ; зрозуміло, що замість алгебричних базисних функцій можна вибирати й інші системи — тригонометричні, експоненціальні тощо) і тоді

$$\tilde{f}^{(k)}(x_j) = L_n^{(k)}(x_j), j = \overline{0, n}.$$

Суть матричних алгоритмів чисельного диференціювання полягає в компактній реалізації рівності (1) у вигляді рівності (Калайда, 1982)

$$f^{(k)}(x) \approx \Omega_n(x)\theta^k Y(f), \theta = \begin{pmatrix} \Omega'(x_0) \\ \dots\dots\dots \\ \Omega'(x_n) \end{pmatrix} \quad (2)$$

(матриця θ — це чисельний аналог оператора $\frac{d}{dx}$), тобто похідні вищого порядку в довільній точці (а не тільки у вузлах) подано через степені матриці коефіцієнтів формул чисельного диференціювання для похідної лише першого порядку. Порядок цієї матриці дорівнює кількості вузлів (на одиницю вищий від порядку відповідного їй многочлена Лагранжа $L_n(x)$). Зауважмо, що рівність (2) з метою зменшення на порядок кількості операцій доцільно здійснювати за одним з аналогів алгоритму Ейткена (для алгебричних многочленів)

$$(\dots(\Omega_n(x)\theta)\theta \dots)\theta Y(f), \Omega_n(x)(\theta(\dots\theta(\theta Y(f)))$$

(перший алгоритм — зліва направо, другий — справа наліво).

Тут за допомогою дробово-раціональних колокант апроксимованої функції побудовано економніші (дробово-раціональні) матричні алгоритми чисельного диференціювання.

Розгляньмо дробово-раціональну колоканту (Калайда, 2000)

$$R_n(x; f) = \frac{\Omega_n(x)Y(\alpha f)}{\Omega_n(x)Y(\alpha)}, Y(\alpha f) = (f_0 \ \alpha_1 f_1 \ \dots \ \alpha_n f_n)^T, Y(\alpha) = (1 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_n)^T, \quad (3)$$

яка, за побудовою, при довільних $\alpha_j \neq 0$ апіорі задовольняє умови колокації

$$f_j = R(x_j; f), j = \overline{0, n},$$

Якщо ж, наприклад, параметри α_j визначити з умов ко-локації

$$R(\bar{x}_i; f) = f_i, i = \overline{1, n}, \bar{x}_i \neq \forall x_j,$$

тобто з системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\Omega_n(\bar{x}_i)Y(\alpha f) = f_i \Omega_n(\bar{x}_i)Y(\alpha), i = \overline{1, n},$$

то матимемо колоканту (3), еквівалентну за порядком точності колоканті-многочленові Лагранжа $L_{2n}(x)$. У той же час формули чисельного диференціювання

$$f^{(m)}(x) \approx R^{(m)}(x, f), m < n,$$

виражатимуться через степені матриці θ нижчого, лише $(n + 1)$ -го (а не $(2n + 1)$ -го) порядку. Так, наприклад, для першої похідної маємо

$$f'(x) \approx R'_n(x, f) = \frac{\Omega_n(x)\theta Y(\alpha f)}{\Omega_n(x)Y(\alpha)} - \frac{\Omega_n(x)Y(\alpha f)\Omega_n(x)\theta Y(\alpha)}{(\Omega_n(x)Y(\alpha))^2}.$$

Звернімо також увагу на ще одну можливість побудови дробово-раціональних формул чисельного диференціювання. А саме, розглянемо просту дробово-раціональну колоканту функції f (при $f(x) \neq 0$)

$$R_n(x, f) = \frac{1}{L_n(x, 1/f)} = \frac{1}{\Omega_n(x)Y(1/f)} \Rightarrow R_n(x_j, f) = f_j, j = \overline{0, n}.$$

Звідси, очевидно, теж матимемо дробово-раціональні формули чисельного диференціювання

$$f^{(k)}(x) \approx R_n^{(k)}(x, f), k < n.$$

При диференціюванні дробово-раціональних колокант доцільно користуватись аналогом формул Ляйбніца для частки функцій (Калайда, 2012).

Формули чисельного диференціювання можна будувати також за допомогою різноманітних функціональних колокант (Калайда, 2000), як-от (для знако-сталих функцій)

$$\Phi_n(x, f) = \exp(\Omega_n(x)Y(\ln f)) \Rightarrow \Phi_n(x_j) = f_j, j = \overline{0, n},$$

так що $f^{(k)}(x) \approx \Phi_n^{(k)}(x, f)$.

Усі використовувані колоканти мають однаковий порядок точності (з порядком точності многочленів типу Лагранжа), а отже, порядок точності утворюваних з них формул чисельного диференціювання теж однаковий (Калайда, 2000).

Список літератури

- Калайда, А. Ф. (1982). Матричные алгоритмы численного дифференцирования функций. *Вычисл. и прикл. матем.*, (46), 7–13.
- Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
- Калайда, О. Ф. (2012). Про аналоги формули Лейбніца для похідних частки функцій. У *Матеріалах XIV Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука* (Т. 2, с. 122). Київ: НТУУ «КПІ».

Про одне подання многочлена типу Лагранжа за зростаючими степенями

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Многочлен типу Лагранжа подається, аналогічно многочленові Лагранжа у формі Ньютона, у вигляді суми многочленів-добутків зростаючих степенів без явного використання розділених різниць апроксимованої функції.

Ключові слова: многочлен, функція, апроксимація, степінь, розділені різниці.

Розглянемо многочлен типу Лагранжа, так званий σ -многочлен Лагранжа (Калайда, 2000б), із простими вузлами колокації x_j

$$L_n(\sigma; f) = L_n(\sigma(x)) = \sum_{j=0}^n \omega_j(\sigma(x)) f_j = \Omega(\sigma(x)) Y(f), \quad (1)$$

де

$$\omega_j(\sigma(x)) = \frac{\psi_j(\sigma(x))}{\psi_j(\sigma(x_j))}, \quad \psi_j(\sigma(x)) = \prod_{i=0, i \neq j}^n (\sigma(x) - \sigma(x_i)),$$

нормальна система базисних функцій (σ — строго монотонна функція),

$$\Omega(\sigma(x)) = (\omega_0(\sigma(x)) \dots \omega_n(\sigma(x))), \quad Y(f) = (f_0 \dots f_n)^T.$$

Оскільки кожна з базисних функцій ω_j є многочлен n -го порядку, то в такому вигляді многочленом (1) користуватись незручно, та й стала Ліпшиця при зростанні порядку многочлена значно зростає (Калайда, 2000а). Тому винайдено його подання у вигляді многочлена за зростаючими степенями-добутками (на кшталт многочлена Тейлора), як-от, многочлен (1) у формі Ньютона, Стірлінга, Еверетта, Ейткена тощо (Березин & Жидков, 1959, Калайда, 2000б). При цьому використовуються або розділені різниці значень апроксимованої функції, або ж певні визначники, що теж і незручно, і, до того ж, приводить до втрати вірних знаків (некоректність), а також до ще швидшого зростання сталої Ліпшиця (Калайда, 2000а). Тут многочлен (1) подається у вигляді многочленів виду (1) зростаючих порядків простіше, без явного використання розділених різниць.

Справді, легко переконатись, що многочлен ($f_0 = \hat{L}_0(\sigma(x_1))$)

$$L_n(\sigma(x)) = f_0 + \hat{\omega}_1(\sigma(x))(f_1 - \hat{L}_0(\sigma(x_1))) + \hat{\omega}_2(\sigma(x))(f_2 - \hat{L}_1(\sigma(x_2))) + \dots + \hat{\omega}_n(\sigma(x))(f_n - \hat{L}_{n-1}(\sigma(x_n))), \quad (2)$$

де

$$\hat{\omega}_i(\sigma(x)) = \frac{\hat{\psi}_i(\sigma(x))}{\hat{\psi}_i(\sigma(x_i))}, \quad \hat{\psi}_i(\sigma(x)) = \prod_{k=1}^i (\sigma(x) - \sigma(x_{k-1})),$$

а $\hat{L}_i(\sigma(x))$ — сума i перших доданків рівності (2), тобто многочлен i -го порядку, справджує умови колокації $L_n(\sigma(x_j)) = f_j$, а отже, з огляду на його єдиність, є многочлен (1). Оскільки ж він не залежить від індексування вузлів, то його у формі (2) можна використовувати в околі й довільного вузла (замість x_0 покласти x_k), і, таким чином, здійснювати апроксимацію функції в його околі, поступово нарощуючи точність і одночасно контролюючи її за допомогою останнього використовуваного доданка.

Практично, як і будь-який многочлен, рівність (2) реалізується за рекурентною рівністю

$$\hat{L}_i(\sigma(x)) = \hat{L}_{i-1}(\sigma(x)) + \hat{\omega}_i(\sigma(x))(f_i - \hat{L}_{i-1}(\sigma(x_i))), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

де

$$\hat{L}_0(\sigma(x)) = f_0, \quad \hat{\omega}_i(\sigma(x)) = \frac{\hat{\psi}_i(\sigma(x))}{\hat{\psi}_i(\sigma(x_i))}, \quad \hat{\psi}_i(\sigma(x)) = \prod_{k=1}^{i-1} (\sigma(x) - \sigma(x_k)).$$

Принагідно зауважимо, що многочлен (1) та многочлен того ж порядку за зсунутою вправо-вліво на один крок упорядкованою системою вузлів (відповідно, вузлів $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ або вузлів $x_{-1}, x_0, \dots, x_{n-1}$) при певній умові (Калайда, 2000б) є двосторонніми наближеннями апроксимованої функції на інтервалі (x_1, x_{n-1}) , а їхні похідні першого порядку дають двосторонні наближення у вузлах цього відрізка її похідної, а отже, півсума цих многочленів та їх похідної є уточненням наближення апроксимованої функції та, відповідно, її похідної, а піврізниця — наближенням похибки апроксимації (Калайда, 2000б).

Як відмічалось, у многочлені (2) розділені різниці явно не використовуються, однак з огляду на його єдиність вони в його структурі присутні. Як видно з рівності (3), ці різниці містяться у множнику при $\hat{\omega}_i(\sigma(x))$, а саме,

$$\gamma_i = \frac{f_i - \hat{L}_{i-1}(\sigma(x_i))}{\hat{\psi}_i(\sigma(x_i))}$$

і є, з точністю до сталого множника, i -ю σ -розділеною (при $\sigma(x) = x$ — розділеною) різницею функції. Перевага тут у тому, що вона в ітеративному процесі (3) обчислюється простіше, автоматично і за потреби.

Список літератури

- Березин, И. С., Жидков, Н. П. (1959). *Методы вычислений*. (Т. 1). Москва: Физматгиз.
 Калайда, О. Ф. (2000а). Про спадкову похибку апроксимації функцій колокантами. *Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки*, (2), 99–105.
 Калайда, О. Ф. (2000б). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Про двосторонні колоканти із простими вузлами колокації

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Побудовано двосторонні многочленні та дробово-раціональні колоканти одного і того ж порядку із простими вузлами для апроксимації функції на інтервалі та її похідної у внутрішніх вузлах колокації.

Ключові слова: функція, колоканта, похідна, прості вузли.

Двосторонні колоканти-многочлени із простими упорядкованими вузлами побудовано зсувом сітки вузлів із сталим кроком на один або непарну кількість кроків (Калайда, 2000). Тут розглянуто узагальнення таких побудов пари колокант із простими, довільно розташованими вузлами, двосторонніх для апроксимованої функції на інтервалі між їхніми спільними вузлами та її похідної в цих спільних вузлах без зсуву системи вузлів.

Розглянемо колоканти $\tilde{K}(x; f)$, $\hat{K}(x; f)$ функції f за нормальними системами базисних функцій, відповідно, $\tilde{\omega}_j$, $\hat{\omega}_j$ та простими впорядкованими вузлами колокації таких, що вузли $x_0, \dots, x_n$, $n > 2$, у них спільні, а у першої колоканти вузол $\tilde{x} \in (x_0, x_1)$, $\tilde{x} < x_0$, у другої — вузол $\hat{x} \in (x_{n-1}, x_n)$ або $\hat{x} > x_n$, як-от многочлени типу Лагранжа (ω_j — нормальна система базисних функцій)

$$\tilde{L}(x; f) = \sum_{j=0}^n \tilde{\omega}_j(x) f_j + \tilde{\omega}_n(x) \tilde{f}, \quad \hat{L}(x; f) = \sum_{j=0}^n \hat{\omega}_j(x) f_j + \hat{\omega}_n(x) \hat{f}, \quad (1)$$

$$\omega_j(x) = \psi_j(x) / \psi_j(x_j), \quad \psi_j(x_i, j \neq i) = 0, \quad f_j = f(x_j), \quad \tilde{f} = f(\tilde{x}), \quad \hat{f} = f(\hat{x}),$$

явні дробово-раціональні колоканти (з многочленами виду (1))

$$R(x; f) = \frac{1}{L_n(x; 1/f)}, \quad f(x) \neq 0, \quad \tilde{R}(x; f) = \frac{L_n(x; Pf)}{P(x)}, \quad P(x) \neq 0, \quad (2)$$
$$\hat{R}(x; f) = \frac{L_n(x; fg)}{L_n(x; g)},$$

напівявні дробово-раціональні колоканти

$$\bar{R}(x; f) = \frac{\omega_0(x) f_0 + \sum_{j=0}^n \omega_j(x) \alpha_j f_j}{\omega_0(x) + \sum_{j=0}^n \alpha_j \omega_j(x)}, \quad \alpha_j = \text{const} \neq 0, \quad \exists \alpha_j \neq 1, \quad (3)$$

а при визначених з умов колокації $\bar{R}(\bar{x}_i; f) = \bar{f}_i = f(\bar{x}_i)$, $\bar{x}_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{1, n}$, тобто з системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \omega_j(\bar{x}_i)(f_j - \bar{f}_i) = \omega_0(\bar{x}_i)(\bar{f}_i - f_0), i = \overline{1, n}, \Rightarrow \alpha_i,$$

дробово-раціональної колоканти максимального порядку, тощо.

Колоканти (1), (2) еквівалентні, оскільки задовольняють одним і тим самим умовам колокації. Колоканта (3) задовольняє на n умов колокації більше. При $\alpha_j = 1$, $j = \overline{1, n}$, вона є многочлен вигляду (1) (оскільки

$$\omega_0(x) + \dots + \omega_n(x) \equiv 1).$$

Двосторонні колоканти (3) можна також добувати за допомогою параметрів α_j . Спочатку побудуємо явні двосторонні колоканти (3) виду (1), (2). А саме, з умов колокації $\bar{R}(\tilde{x}; f) = \tilde{f}$, $\tilde{x} \in (x_0, x_1)$, $\bar{R}(\hat{x}; f) = \hat{f}$, $\hat{x} \in (x_{n-1}, x_n)$, відповідно, при $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1$ та $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 1$ знаходимо

$$\alpha_1 = \check{\alpha} = \frac{\sum_{j=0, j \neq 1}^n \omega_j(\tilde{x})(f_j - \tilde{f})}{\omega_1(\tilde{x})(\tilde{f} - f_1)}, \tilde{x} \in (x_0, x_1),$$

$$\alpha_n = \hat{\alpha}_n = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \omega_j(\hat{x})(f_j - \hat{f})}{\omega_n(\hat{x})(\hat{f} - f_n)}, \hat{x} \in (x_{n-1}, x_n),$$

та після підстановки в (3) дістаємо відповідні дробово-раціональні колоканти $\check{K}(x)$, $\hat{K}(x)$ виду (1), (2) $(n+2)$ -го порядку. Покажемо, що всі так побудовані колоканти (1)–(3) є двосторонніми. Справді, оскільки для цих колокант

$$\begin{aligned} \check{r}(x)\hat{r}(x) &= (f(x) - \check{K}(x))(f(x) - \hat{K}(x)) \cong \\ &\cong (x - \tilde{x})(x - \hat{x}) \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \check{r}^{(n+2)}(\check{c}) \hat{r}^{(n+2)}(\hat{c}), \check{c}, \hat{c} \in (x_0, x_{n-1}), \Rightarrow (4) \\ &\Rightarrow x - \hat{x} \leq 0, \end{aligned}$$

то при $\check{r}^{(n+2)}(x)\hat{r}^{(n+2)}(x) > 0$ та $x \in (\tilde{x}, \hat{x})$ (а отже, і при $x \in (x_1, x_{n-1})$, $n > 2$, або $x \in (x_0, x_n)$, $n > 0$) маємо нерівність $\check{r}(x)\hat{r}(x) < 0$. Крім того, із графіка функції $\check{r}\hat{r}$ випливає, що похідна цих колокант у їхніх спільних вузлах теж є двосторонніми наближеннями похідної апроксимованої функції. З (4) випливає, що двосторонність колокант (1)–(3) залишається чинною, якщо зліва від спільних вузлів задавати й довільну кількість додаткових вузлів, а справа — лише

непарну кількість додаткових вузлів. Це даватиме змогу завдяки двосторонності, а отже, контрольованості похибки підвищувати точність апроксимації.

Побудуємо, далі, точніші колоканти виду (3) з використанням не одного, а $(n - 1)$ з n їх параметрів α_j . Для цього покладемо в колоканті (3) по черезно $\alpha_n = 1$, а потім $\alpha_1 = 1$ та запровадимо між основними вузлами x_j , $j = \overline{0, n}$, додаткові проміжні вузли $\bar{x}_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{1, n}$. Після цього решту параметрів α_i в (3) визначимо з умов колокації, відповідно,

$$\bar{R}(\bar{x}_i, f) = \bar{f}_i = f(\bar{x}_i), i = \overline{1, n-1}, \bar{R}(\bar{x}_i; f) = \bar{f}_i, i = \overline{2, n}, n > 2.$$

У результаті для параметрів α_i дістаємо, відповідно, лінійні алгебричні системи

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^n \alpha_j \omega_j(\bar{x}_i)(f_j - \bar{f}_i) &= \omega_0(\bar{x}_i)(\bar{f}_i - f_0) + \omega_1(\bar{x}_i)(\bar{f}_i - f_1), i = \overline{1, n-1}, \Rightarrow \check{\alpha}_i, \\ \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \omega_j(\bar{x}_i)(f_j - \bar{f}_i) &= \omega_0(\bar{x}_i)(\bar{f}_i - f_0) + \omega_n(\bar{x}_i)(\bar{f}_i - f_n), i = \overline{2, n}, \Rightarrow \hat{\alpha}_i. \end{aligned} \quad (5)$$

З так визначеними в (3) параметрами $\check{\alpha}_j$, $\hat{\alpha}_j$ матимемо колоканти $\check{K}(x)$, $\hat{K}(x)$ $2n$ -го порядку (колоканти майже максимального, $(2n + 1)$ -го, порядку, оскільки в них один з параметрів наперед заданий). Легко переконатись, що для них нерівність (4) також правильна (бо, як і у випадках колокант (1), (2), ліва частина нерівності містить лише один від'ємний множник), а отже, ці колоканти теж є двосторонніми колокантами для апроксимованої функції на інтервалі (x_1, x_{n-1}) , а їх похідна — двосторонніми наближеннями у вузлах на відрізку $[x_1, x_{n-1}]$ її похідної. Отже, півсума всіх побудованих тут колокант є точнішим наближенням функції, ніж менш точна з них, а їхня піврізниця — мірою точності апроксимації, і, відповідно, півсума значень їхньої похідної у спільних вузлах — точнішим наближенням значень похідної апроксимованої функції у згаданих спільних вузлах, а їхня піврізниця — мірою точності результату. Тому, маючи вихідну колоканту $K(x)$ та двосторонні колоканти (з одним додатковим вузлом, відповідно, $\check{x}$, $\hat{x}$)

$$\check{K}(x) = K(x) + \psi(x) \frac{\check{f} - K(\check{x})}{\psi(\check{x})},$$

$$\hat{K}(x) = K(x) + \psi(x) \frac{\hat{f} - K(\hat{x})}{\psi(\hat{x})}, \psi(x_j) = 0, \psi'(x_j) \neq 0,$$

доцільніше користуватись їхньою півсумою

$$\bar{K}(x) = K(x) + \psi(x) \frac{(\check{f} - \check{K}(\check{x})) / \psi(\check{x}) + (\hat{f} - \hat{K}(\hat{x})) / \psi(\hat{x})}{2}$$

(як точнішою колокантою і при цьому колоканта $K(x)$ у точках інтерполяції використовується лише один раз) та піврізницею

$$\delta(x) = \psi(x) \frac{(\check{f} - K(\check{x})) / \psi(\check{x}) - (\hat{f} - K(\hat{x})) / \psi(\hat{x})}{2}$$

(колоканта $K(x)$ у точках інтерполяції зовсім не використовується) для контролю точності результату. Аналогічно для похідної $f'(x)$ маємо точніше наближення похідної у вузлах $x_j \in [x_1, x_{n-1}]$

$$\bar{K}'(x_j) = K'(x_j) + \psi'(x_j) \frac{(\check{f} - \check{K}(\check{x})) / \psi(\check{x}) + (\hat{f} - \hat{K}(\hat{x})) / \psi(\hat{x})}{2},$$

$$j = 1, n-1$$

(при цьому $K'(x_j)$ використовується лише один раз) та контроль точності результату

$$\delta'(x_j) = \psi'(x_j) \frac{(\check{f} - K(\check{x})) / \psi(\check{x}) - (\hat{f} - K(\hat{x})) / \psi(\hat{x})}{2}$$

($K'(x_j)$ не використовується).

Наведемо ілюстративний приклад.

Приклад. Для $f(x) = \ln(1+x)$ при

$$\check{x} = 0.1, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, \hat{x} = 0.5, x = 0.3$$

маємо похибки апроксимації функції двосторонніми многочленами Лагранжа (1) у точці $x = 0.3$

$$\check{\delta}(x) = -3.4 \cdot 10^{-4}, \hat{\delta}(x) = 2.7 \cdot 10^{-4}, \bar{\delta}(x) = -3.6 \cdot 10^{-5}, \hat{\delta}(x) = 3 \cdot 10^{-4}$$

та, відповідно, похибки апроксимації її похідної у внутрішніх вузлах

$$\check{\delta}'(x_1) = -3.7 \cdot 10^{-3}, \hat{\delta}'(x_1) = 8.7 \cdot 10^{-3}, \bar{\delta}'(x_1) = 2.6 \cdot 10^{-3}, \hat{\delta}'(x_1) = 6.2 \cdot 10^{-3};$$

$$\check{\delta}'(x_2) = 10^{-2}, \hat{\delta}'(x_2) = -2.6 \cdot 10^{-3}, \bar{\delta}'(x_2) = 3.5 \cdot 10^{-3}, \hat{\delta}'(x_2) = 6 \cdot 10^{-3}.$$

Зауважмо, що при табулюванні функції на великому відрізку за допомогою, наприклад, многочлена Лагранжа (у сплайновому режимі) відрізок доцільно розділити на рівні частини і на кожній з них апроксимувати функцію многочленом Лагранжа із замкнутою системою вузлів колокації. Тоді досить обчислити в точках табуляції значення базисних функцій многочлена на першому відрізку, щоб потім без змін, як і у випадку сплайнів, використовувати їх на решті відрізків розбиття. Це обумовлено тим, що значення базисних функцій визначаються відносним взаємним розташуванням вузлів колокації, а не розташуванням їх на числовій осі. Єдине, що при цьому необхідне, так це контроль точності результату, щоб гарантувати потрібну точність у всіх точках табуляції. Цього легко можна досягти за допомогою цього ж многочлена за системою тієї ж кількості вузлів, але зсунутої на один крок вправо або вліво. Тоді на спільних відрізках матимемо двосторонні наближення функції, їх півсума даватиме точ-

ніше наближення, а піврізниця слугуватиме контролем точності. Сказане стосується і раціональних колокант, виражених за допомогою многочленів Лагранжа, як-от, наприклад, колокант вигляду (2).

І ще одне про многочлени Лагранжа (1) із сталим кроком. У цьому випадку немає потреби користуватись системою базисних функцій ω_j , а можна обмежитись функціями ψ_j . Справді, легко перевірити, що в цьому випадку многочлен (1) фактично має вигляд

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{h^n n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j \psi_j(x) f_j, \quad \psi_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n (x - x_i).$$

Отже, у випадку дробово-раціональних колокант (2), (3) із многочленами Лагранжа співмножник перед сумою скорочується.

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Про колоканти типу Ерміта — Маркова

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei_kalaida@comcast.net

Розглядається задача про побудову колокант із простими вузлами для функції і також із простими іншими вузлами для її похідної.

Ключові слова: вузли, кратність, функція, похідна, колоканта.

Мова йтиме про побудову колоканти із простими вузлами для функції та також із простими іншими вузлами для її похідної — узагальнення поняття про колоканти із кратними вузлами, названими тут колокантами типу Ерміта — Маркова.

Нехай для функції $x \mapsto f(x)$ потрібно на відрізку $[x_0, x_n]$ побудувати колоканту $K(x; f)$ із простими вузлами $x_j, j = 0, n$, тобто щоб справджувались умови $K(x_j; f) = f(x_j)$, $K'(x_j; f) \neq f'(x_j)$, і таку щоб її похідна $K'(x; f)$ теж була колокантою теж з простими вузлами $\bar{x}_i, i = 0, m$, $\bar{x}_i \neq x_j$, для похідної $x \mapsto f'(x)$, тобто щоб $K'(\bar{x}_i; f) = f'(\bar{x}_i)$, $K''(\bar{x}_i; f) \neq f''(\bar{x}_i)$. При спільних вузлах $x_j, \bar{x}_i, m \leq n$, матимемо колоканти із двократними вузлами. Відомо, яку складну будову мають колоканти із кратними вузлами, особливо з вузлами вищої кратності (Калайда, 2000, див. також інші посібники з обчислювальної математики). Рекурентний алгоритм побудови колокант із кратними вузлами винайдено в Калайда (2009).

Для побудови шуканої колоканти подамо її у вигляді лінійної комбінації двох колокант із простими вузлами

$$K(x; f) = K_n(x; f) + \omega(x)L_m(x; \gamma), \quad (1)$$

де $K_n(x; f)$ — довільна колоканта (многочлен типу Лагранжа, дробово-раціональна колоканта тощо) із простими, а можливо і з кратними вузлами, ω — так звана буферна функція (Калайда, 2000), тобто в цьому випадку така, що $\omega(x_j) = 0$, $\omega'(\bar{x}_i) \neq 0$, $L_m(x; \gamma)$ — многочлен типу Лагранжа (для простоти подальших побудов) за нормальною системою базисних функцій $\bar{\omega}_i$ для невідомої функції γ . Задача тут спрощується тим, що нам необхідно знати лише її значення γ_i у вузлах $\bar{x}_i$. Встановімо умову існування та єдиності колоканти (1) (у класі вибраних систем базисних функцій).

Колоканта (1), за побудовою, априорі задовольняє умови колокації у вузлах x_j . Визначимо невідомі в (1) значення γ_i з умов колокації $K'(\bar{x}_i; f) = f'(\bar{x}_i)$. У результаті для невідомих γ_i дістаємо лінійну алгебричну систему рівнянь

$$\omega(\bar{x}_k) \sum_{i=0}^m \bar{\omega}'_i(\bar{x}_i) \gamma_i + \omega'(\bar{x}_k) \gamma_k = f'(\bar{x}_k) - K'_n(\bar{x}_k; f), \quad k = \overline{0, m}. \quad (2)$$

Отже, якщо ця система має єдиний розв'язок, то й колоканта (1) існує і єдина.

При достатньо близьких основних та проміжних вузлах система (2) є системою з діагональною перевагою, а тому матиме єдиний розв'язок, а отже, матимемо і єдину колоканту (1). Зокрема, при $m \leq n$, $x_k = \bar{x}_k$ (а також при одному вузлі $\bar{x}_k$), тоді у (2) або $\omega(\bar{x}_k) = 0$, або сума відсутня, маємо єдиний розв'язок системи (2)

$$\gamma_k = \frac{f'(\bar{x}_k) - K'_n(\bar{x}_k; f)}{\omega'(\bar{x}_k)},$$

а отже, і єдину колоканту (1).

Розглянемо питання про похибку (залишковий член) апроксимації функції колокантою (1). Залишковий член

$$r(x; f) = f(x) - K(x; f) = \hat{\omega}(x)Q(x),$$

де $\hat{\omega}(x_j) = 0$, $j = \overline{0, n}$, $\hat{\omega}'(x_j \neq \bar{x}_i) \neq 0$, $\hat{\omega}'(\bar{x}_i) = 0$. Отже, функція

$$x \mapsto \varepsilon(x) = r(x; f) - \hat{\omega}(x)Q(x)$$

на інтервалі апроксимації має $(n + 1)$ нулів і один нуль за рахунок вибору функції Q , а отже, усього $(n + 2)$ нулі. Тому за теоремою Ролля і за побудовою колоканти (1) функція ε' має принаймні $(n + m + 3)$ нулі, а отже, функція $\varepsilon^{(n+m+2)}$ — принаймні один нуль $\zeta(x)$. Отже, правдива рівність

$$\varepsilon^{(n+m+2)}(\bar{x}) = r^{(n+m+2)}(\zeta(\bar{x}); f) - \hat{\omega}^{(n+m+2)}(\zeta(\bar{x}))Q(\bar{x}) = 0.$$

З неї випливе рівність

$$Q(x) = \frac{r^{(n+m+2)}(\zeta(x))}{\hat{\omega}^{(n+m+2)}(\zeta(x))},$$

а тому, остаточно, дістаємо

$$r(x; f) = \hat{\omega}(x) \frac{f^{(n+m+2)}(\zeta(x)) - K^{(n+m+2)}(\zeta(x))}{\hat{\omega}^{(n+m+2)}(\zeta(x))} \Leftarrow \hat{\omega}^{(n+m+2)}(x) \neq 0.$$

Питання, далі, полягає в існуванні функції $\hat{\omega}$ такої, що має лише прості нулі x_j , $j = \overline{0, n}$, а її похідна $\hat{\omega}'$ — лише прості нулі $\bar{x}_i$, $i = \overline{0, m}$. Графіки таких функцій легко побудувати. Отже, такі функції існують. У класі многочленів їх можна будувати методом невизначених коефіцієнтів.

Наведемо ілюстративний приклад. Для $x \mapsto e^x$ при

$$x_0 = 0, x_1 = 0.4, \bar{x} = 0.1, x = 0.2, n = 1, K_1(x; f) = L_1(x; f)$$

дістаємо $K(x; f)$ з похибкою $\widehat{\delta} \approx 3.7 \cdot 10^{-4}$, а при $\bar{x} = 0.3$ — з похибкою $\widetilde{\delta} \approx -4.5 \cdot 10^{-4}$ (спостерігається двосторонність наближень), тоді як $L_i(x; f)$ — з похибкою $\rho \approx -2.4 \cdot 10^{-2}$.

Список літератури

- Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
- Калайда, О. Ф. (2009). Про один простий алгоритм побудови многочленів Маркова — Ерміта. У *Матеріалах III Міжнародної конференції «Обчислювальна та прикладна математика»*. Присвячена пам'яті академіка НАН України Івана Івановича Ляшка. (с. 39). Київ: Київський університет.

Про метод двох дотичних чисельного інтегрування функцій та задачі Коші для нормальних рівнянь

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

За допомогою точки перетину двох дотичних до графіка функції побудовано двосторонню до квадратурної формули трапецій так звану формулу двох трапецій. Знайдено наближення координат точки перетину дотичних у випадку задачі Коші для нормальних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: квадратурні формули, нормальні рівняння, задача Коші, метод двох дотичних.

Тут дається геометрична побудова двосторонньої до формули трапецій, так званої формули двох дотичних (двох трапецій) чисельного інтегрування функцій та чисельного розв'язування задачі Коші для нормальних звичайних диференціальних рівнянь.

1. Квадратурна формула двох трапецій. Для чисельного інтегрування функції f на відрізку $[x_0, x_1]$ знайдемо абсцису точки перетину $\bar{x} = x_0 + \alpha h$, $h = x_1 - x_0$, дотичних прямих

$$\tilde{y} = f_0 + (x - x_0) \frac{\Delta f}{h}, \hat{y} = f_1 + (x - x_1) \frac{\Delta f}{h}$$

до графіка функції в точках (x_0, f_0) , (x_1, f_1) . У результаті дістанемо

$$\alpha h = \frac{hf' - \Delta f}{\Delta f'}.$$

Тому поряд з формулою трапецій

$$\hat{J}(f) = \frac{h(f_0 + f_1)}{2}$$

із залишковим членом

$$\hat{r}(f) = -\frac{h^3 f''(c)}{12}$$

дістаємо двосторонню до неї так звану формулу двох трапецій

$$\check{J}(f) = \frac{h(f_0 + f_1)}{2} + \frac{hf'_0(f'_1 - \Delta f / h)}{\Delta f'}$$

із залишковим членом

$$\check{r}(f) \approx \frac{h^3 f''_0}{24},$$

тобто формула двох трапецій, як і формула трапецій, є формулою другого порядку й еквівалентна формулі середніх прямокутників, а тому формула

$$\bar{J}(f) = \frac{2\check{J}(f) + \hat{J}(f)}{3}$$

є на порядок точнішою

Проілюструємо ці формули на прикладі.

Приклад 1. Нехай $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Тоді за формулою трапецій маємо наближення інтеграла $J(f) = \ln 2$ з похибкою $\hat{\delta}(f) \approx -0.057$, за формулою двох трапецій — з похибкою $\check{\delta}(f) \approx 0.26$. а за формулою $\bar{J}(f)$ — з похибкою $\bar{\delta}(f) \approx -0.0017$. (за формулою Сімпсона похибка -0.0013).

2. Задача Коші для нормальних рівнянь. Розгляньмо задачу Коші

$$y' = f(x, y), x > x_0, y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Для її чисельного інтегрування знову використаємо точку перетину двох дотичних до графіка інтегральної кривої задачі (1). Тоді точне значення $y_1 = y(x_1)$ розв'язку $y(x)$ задачі (1) матиме вигляд

$$y_1 = y_0 + h(\alpha f_0 + (1 - \alpha)f_1), h = x_1 - x_0, \quad (2)$$

де

$$\alpha h = \frac{hy'_1 - \Delta y}{\Delta y'} = \frac{hf_1 - \Delta y}{\Delta f}. \Delta y = y_1 - y_0, \Delta f = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0). \quad (3)$$

Як бачимо, у цьому випадку α виражається через шукане y_1 , а отже, невідоме. Тому значення цього параметра необхідно визначати іншим шляхом, через відомі величини (так, при $\alpha = 1$, $\alpha = 0$ маємо, відповідно, методи Ойлера, при

$\alpha = \frac{1}{2}$ — метод трапецій). Якщо в (2), замість α , задати наближення $\tilde{\alpha}$, то матимемо наближення

$$\tilde{y}_1 = y_0 + h(\tilde{\alpha}f_0 + (1 - \tilde{\alpha})f_1) \quad (4)$$

з похибкою (c — середня точка)

$$y_1 - \tilde{y}_1 = -\frac{h(\alpha - \tilde{\alpha})(f'_1 - f'_0)}{1 - (1 - \tilde{\alpha})h(f'_y)_c - (\alpha - \tilde{\alpha})h(f'_y)_c} = O(h^2)(\alpha - \tilde{\alpha}).$$

Далі шукатимемо наближення $\tilde{\alpha}$. Для цього подамо розвинення (3) за степенями h в околі точки x_0 . Маємо:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\frac{1}{2} y''_0 + 2hy'''_0 / 3 + h^2 y^{IV}_0 / 4 + h^3 y^V_0 / 15 + \dots}{\frac{1}{2} y''_0 + hy'''_0 / 2 + h^2 y^{IV}_0 / 6 + h^3 y^V_0 / 24 + \dots} = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + h \frac{y''_1 - y''_0}{6(y'_1 - y'_0)} \right) - \frac{1}{720} h^3 y^V_0 + O(h^4). \end{aligned}$$

Отже, наближеннями α з похибкою, відповідно, $O(h)$, $O(h^3 / 720)$ є

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}, \tilde{\alpha} = \frac{1}{2} \left(1 + h \frac{y_1'' - y_0''}{6(y_1' - y_0')} \right), y'' = \frac{d}{dx} f(x, y).$$

При першому з них з (4) маємо, як уже відмічалось, метод трапецій, при другому дістаємо теж автономний неявний метод (схему)

$$\tilde{y}_1 = y_0 + \frac{h}{2}(f_1 + f_0) - \frac{h^2}{12}(y_1'' - y_0''), y_1 - \tilde{y}_1 = O(h^5 / 720). \quad (5)$$

Як бачимо, це є уточнення методу трапецій на основі однієї з квадратурних формул Ойлера (з похибкою лише вдвічі більшою похибки формули Сімпсона).

Наведемо ще одне цікаве наближення α теж з похибкою $O(h^3)$, а саме:

$$\tilde{\alpha} = \frac{\sqrt[3]{y_1''}}{\sqrt[3]{y_0''} + \sqrt[3]{y_1''}}.$$

Тоді дістанемо (Калайда, 2000)

$$\tilde{y}_1 = y_0 + hf_0 + h \frac{(f_1 - f_0)\sqrt[3]{y_0''}}{\sqrt[3]{y_0''} + \sqrt[3]{y_1''}} \quad (6)$$

теж з похибкою $O(h^5)$, тобто автономний інтерполяційний метод (схему) четвертого порядку — уточнення екстраполяційного методу Ойлера (методу першого порядку) аж на три порядки. Цей метод характерний ще й тим, що він точний для кривих другого порядку. Це, зокрема, доводить, що інші криві локально наближені до кривих другого порядку з такою ж похибкою. Можна знайти й інші, менш точні, наближення α та, відповідно, y_1 (схеми третього порядку). На цьому не зупинятимемось. Проілюструємо побудовані наближення (5), (6) розв'язку задачі (1) на прикладі.

Приклад 2. Для задачі (1) $y' = \frac{1}{2y}$, $x > 1$, $y(1) = 1$ за формулою (5) при

$x = 2$ дістаємо значення розв'язку з похибкою $\hat{\delta} \approx 0.001$. За формулою трапецій — з похибкою $\tilde{\delta} \approx -0.01$. За формулою ж (6) дістаємо точний розв'язок задачі $y(x) = \sqrt{x}$. Це обумовлено тим, що розв'язок є крива другого порядку (парабола).

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Про студентські науково-дослідні математичні гуртки

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Студентів уже з молодших курсів слід залучати до науково-дослідницької творчості. Це дає можливість виявляти творчий потенціал молоді і допомагає їм правильно обирати свій життєвий шлях. Таку можливість дають студентські науково-дослідні гуртки. Досвід автора показав плідність такого заходу.

Ключові слова: студентські математичні гуртки, науково-дослідницька діяльність студентів.

На сайтах багатьох вишів показано, що на математичних кафедрах працюють студентські гуртки, де студенти одержують корисні інформацію за фахом. Проте студентів необхідно не тільки наповнювати знаннями з обраного фаху, а й з молодших курсів привчати до творчості, до дослідницької діяльності. Мій 13-річний досвід роботи в цьому напрямі із студентами першого-другого курсів радіофізичного та фізичного факультетів Київського національного університету імені Тараса Шевченка показав, що це конче корисно. Здібні студенти охоче займаються науковою творчістю й добувають вагомі результати. Кожному гуртківцю (або декільком, авторському колективу) ставилася задача, вони з натхненням над нею працювали, доповідали про результати на засіданні гуртка, відбувалось жваве їх обговорення, і вагомі результати публікувались у наукових виданнях (Калайда та ін., 1987, 1990, 1992, 1993, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999). Значна кількість гуртківців після закінчення університету подалась в аспірантуру (один — В. К. Магас — аж до Швеції!), стали знаними науковцями. Думаю, така практика варта уваги та наслідування.

Нижче наведено список наукових праць 25 студентів першого-другого курсу членів керованих мною науково-дослідних студентських гуртків на згаданих факультетах.

Список літератури

- Калайда, А. Ф., & Кабальок, А. А. (1992). Некоторые математические модели задачи о пульсирующем фонтане. *Вычисл. и прикл. матем.*, (74), 60–63.
- Калайда, О. Ф., & Гонга, Т. Т. (1997). Побудова двосторонніх многочленів типу Лагранжа для багатовимірних функцій. *Вісник Київськ. ун-ту, серія фіз.-мат. науки*, (1), 39–45.
- Калайда, О. Ф., & Магас, В. К. (1996). Про одновимірні лінійні інтегро-диференціальні задачі для рівнянь типу Вольтерра. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (1), 10–14.
- Калайда, О. Ф., & Магас, В. К. (1997). Двосторонній метод розв'язування одновимірних крайових задач для рівнянь другого порядку. *Вісник Київськ. ун-ту, серія фіз.-мат. науки*, (2), 28–34.
- Калайда, О. Ф., & Мельничук, Д. В. (1997). Про одне узагальнення формул Фруллані та Дирихле. *Вісник Київськ. ун-ту, серія фіз.-мат. науки*, (1), 57–59.
- Калайда, О. Ф., & Мороз, І. П. (1990). Про деякі класи інтегровних систем диференціальних рівнянь. *Вісник Київськ. ун-ту, серія матем. та мех.*, (32), 44–52.

- Калайда, О. Ф., & Рибалко, Т. Ю. (1996). Побудова двосторонніх екстраполяційних методів типу Адамса. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (2), 63–69.
- Калайда, О. Ф., & Туташконко, Т. В. (1998). Про один простий спосіб розгортання правильної раціональної функції на елементарні. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (4), 14–16.
- Калайда, О. Ф., Абросімова, Г. Ю., & Висоцький, В. В. (1995). Про побудову загального розв'язку рівняння Бернуллі та рівняння Клеро. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (1), 65–71.
- Калайда, О. Ф., Акіменко, О. В., & Рибалко, Т. Ю. (1996). Двосторонні квадратурні формули типу Ейлера — Маклорена для регулярних, слабосингулярних та сингулярних інтегралів. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (1), 94–100.
- Калайда, О. Ф., Анісімов, О. Є., & Кабалюк, Г. А. (1992). Про один варіант методу факторизації та методу варіації сталих інтегрування лінійних диференціальних рівнянь. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-матем. науки*, (7), 72–77.
- Калайда, О. Ф., Бондар, І. П., Калашніков, А. В., & Лессік, Д. М. (1999). Побудова двосторонніх квадратурних формул для регулярних інтегралів. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (1), 19–23.
- Калайда, О. Ф., Вдовенко, Є. О., & Макаренко, О. В. (1995). Про нелінійні інтегральні рівняння другого роду зі змінними межами інтегрування. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (1), 49–57.
- Калайда, О. Ф., Галкін, О. В., & Гоженко, В. В. (1995). Про один простий метод відновлення функції за її повним диференціалом. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (1), 44–48.
- Калайда, О. Ф., Галкін, О. В., & Сергеев А. Г. (1993). Новий варіант матричних алгоритмів чисельного інтегрування для регулярних, слабо сингулярних та сингулярних інтегралів. *Вісник Київськ. ун-ту, серія фіз.-мат. науки*, (3), 18–22.
- Калайда, О. Ф., Жугасвич, А. Я., & Скрипник, Т. В. (1999). Про лінійні інтегральні рівняння зі змінними межами інтегрування. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (4), 33–37.
- Калайда, О. Ф., Кабалюк, Г. А., & Ресін, А. М. (1992). Про одне узагальнення методу варіації сталих. *Вісник Київськ. ун-ту, серія фіз.-матем. науки*, (5), 32–36.
- Калайда, О. Ф., Шевченко, А. Б., & Шевченко, М. Б. (1987). Деякі питання теорії лінійних диференціальних рівнянь. *Вісник Київськ. ун-ту, серія матем. та мех.*, (29), 22–30.

Про золотий переріз, математичне сподівання, середнє арифметичне та дисперсію

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

З математичної точки зору досліджено золотий переріз. Показано його зв'язок з числами Фібоначчі. Знайдено ще одне квадратне рівняння з аналогічними властивостями. Установлено зв'язок математичного сподівання з середнім арифметичним дисперсних випадкових величин, на основі чого дано відповідні оцінки.

Ключові слова: випадкові величини, середнє арифметичне, оцінки.

Первісний опис задачі про золотий переріз (абсолютний) фактично дається рівнянням

$$x^2 - ax - a^2 = 0, a > 0 \Rightarrow x_{1,2} = a \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad (1)$$

З нього виділили (відносне) рівняння

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 &= 0 \Rightarrow \\ x_1 &= (1 + \sqrt{5}) / 2 = 1.618033989..., \\ x_2 &= (1 - \sqrt{5}) / 2 = -0.618033989.... \end{aligned}$$

Про ці числа й пишуть дифірамби (див. Вікіпедію, тощо), що вони єдині і тому подібне. Проте це зовсім не так. Наведімо ще рівняння, яке має ті ж властивості. Ось воно:

$$x^2 - bx - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{2} \Rightarrow x_1 - b = 1 / x_1 = -x_2.$$

Далі, встановімо зв'язок золотого перерізу з числами Фібоначчі. Ці числа являються розв'язком задачі Коші різницевого рівняння з цілими коефіцієнтами та цілими початковими значеннями

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, F_0 = 0, F_1 = 1. \quad (2)$$

Отже, його характеристичне рівняння є рівняння (1) при $a = 1$, а тому розв'язок задачі Коші (2) має вигляд

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_1^n - \lambda_2^n).$$

Звідси й випливає захоплююче співвідношення

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \lambda_1 \frac{1 - (\lambda_2 / \lambda_1)^{n+1}}{1 - (\lambda_2 / \lambda_1)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_1.$$

Очевидно, ця властивість притаманна розв'язкам усіх різницевого рівнянь з цілими коефіцієнтами та цілими початковими даними, характеристичне рівняння яких має один максимальних за модулем корінь.

Для математичного сподівання дискретних випадкових величин правдива рівність (Калайда, 2000)

$$M(X) = \sum_{j=1}^n x_j p_j = \bar{X} + \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{X}) p_j, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j. \quad (3)$$

Це дає можливість при невідомих розподілах випадкових величин добувати оцінки їх математичного сподівання та дисперсії. По-перше, з нерівності Коші — Буняковського і нерівності

$$\sum_{j=1}^n p_j^2 \leq \sum_{j=1}^n p_j = 1$$

для математичного сподівання впливає проста оцінка

$$|M(X)| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}. \quad (4)$$

По-друге, з рівності (3) впливає оцінка

$$|M(X)| \leq |\bar{X}| + \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{X})^2}.$$

Аналогічно для дисперсії маємо

$$D(x) \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - M(X))^4}.$$

Аналогічні оцінки можна добути й при неперервних розподілах випадкових величин. Так, наприклад, аналогічно (4) маємо (f — функція випадкової величини)

$$|M(X)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx}.$$

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Про деякі особливості викладання лінійної алгебри англомовним студентам НАУ

О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко

Національний авіаційний університет, Київ, Україна
karupu@ukr.net, 111ota@ukr.net, pobeda586@gmail.com

Проаналізовано особливості викладання англійською мовою окремих розділів лінійної алгебри іноземним та українським студентам технічних спеціальностей у Національному авіаційному університеті. Надано рекомендації для покращення засвоєння студентами теоретичного матеріалу та вироблення ними навичок розв'язування задач.

Ключові слова: викладання лінійної алгебри, викладання вищої математики, викладання математики англійською.

Національний авіаційний університет є одним з найпотужніших авіаційних закладів вищої освіти, у якому навчається близько 25 тисяч студентів, серед яких майже 1500 іноземців з 55 країн світу. За роки його 85-річної історії (останні 50 років на навчання в НАУ приймають іноземців) підготовлено більш як 200 000 висококласних спеціалістів для 160 країн. Тому викладачі нашого університету завжди велику увагу приділяють вирішенню різноманітних питань, пов'язаних з навчанням іноземних студентів. Зокрема, вивчалися проблеми адаптації іноземних студентів до освітнього середовища України (Довгодько, 2013), проблеми навчання іноземних студентів природничим дисциплінам (Довгодько та ін., 2010), викладання математики іноземним студентам технічних спеціальностей (Ічанська & Наливайко, 2017), особливості викладання математичних дисциплін іноземним студентам за кредитно-модульною системою (Карупу та ін., 2013).

Оскільки англійська мова є однією з офіційних мов ІКАО (Міжнародна організація цивільної авіації), для майбутніх фахівців у галузі авіації дуже важливою є можливість отримання професійної освіти англійською мовою. У НАУ з 1999 року успішно діє Програма «Вища освіта іноземною мовою». За цією програмою протягом двадцяти років для окремих спеціальностей викладання всіх предметів здійснюється англійською мовою. Іноземні студенти обирають мову навчання залежно від їх мовної підготовки та планів на майбутнє працевлаштування. При цьому всі іноземні студенти обов'язково вивчають українську мову. Частина іноземних студентів обирає навчання в україномовних групах. В англomовних групах мають можливість навчатися також й українські студенти, які добре володіють англійською мовою і зорієнтовані на наступне працевлаштування в авіаційних компаніях, що здійснюють міжнародні перевезення.

Перед викладачами, задіяними в роботі в англomовних групах, виникає ціла низка питань щодо специфіки викладання різних дисциплін, зокрема математичних, англійською мовою студентам, для яких ця мова не є рідною. Зокрема, це стосується і лінійної алгебри, оскільки навчальними планами підготовки майбутніх фахівців технічних спеціальностей у НАУ передбачено вивчення базових

розділів лінійної алгебри. Для студентів більшості спеціальностей окремі питання лінійної алгебри викладаються в складі відповідних розділів синтетичної дисципліни «Вища математика» і тільки для окремих спеціальностей, що потребують поглибленої математичної підготовки, студентам викладають окремо дисципліну «Лінійна алгебра та аналітична геометрія».

У рамках системи англомовної освіти НАУ автори проводять дослідження з методики викладання англійською мовою математичних дисциплін іноземним та українським студентам. У своїй роботі ми орієнтуємось на відомі дослідження з методики викладання математики у вищій школі України (В. Г. Бевз, Н. О. Вірченко, О. І. Скафа, З. І. Слєпкань, Н. А. Тарасенкової, О. С. Чашечнікової та ін). Зокрема, певні особливості викладання англійською мовою деяких розділів лінійної алгебри розглядалися авторами в рамках дослідження викладання лінійної алгебри (Карупу та ін., 2017; Олешко, 2017), у рамках дослідження викладання математичних дисциплін англомовним студентам (Карупу та ін., 2011), у рамках дослідження викладання математичних дисциплін англомовним іноземним студентам (Карупу та ін., 2012, 2013) та в рамках дослідження викладання лінійної алгебри та аналітичної геометрії (Карупу та ін., 2015, 2016, 2018).

Певна частина проблем, що постають під час викладання лінійної алгебри студентам англомовних груп, обумовлена особливостями математичної та мовної підготовки цих студентів і виникає також і при викладанні технічних дисциплін. Інша їх частина є специфічною і виникає тільки при викладанні цим студентам математичних дисциплін, зокрема, саме лінійної алгебри.

Аналіз контингенту іноземних студентів, що навчаються в НАУ, показує, що вони є представниками різних систем освіти. Тому під час викладання математичних дисциплін для таких студентів необхідно враховувати, що англійська мова не є рідною для цих студентів і те, що їх навчання в середній школі відбувалось рідною мовою. Також необхідно звернути увагу на особливості викладання елементарної математики в середніх школах відповідних країн. Крім того, оскільки для українських студентів (і для іноземних також) є важливим володіння спеціальною англійською термінологією, то слід також підкреслювати певну специфіку термінів. Потрібно зауважити, що засвоєння англійської математичної термінології з лінійної алгебри, як правило, не викликає особливих труднощів ні в іноземних, ні в українських студентів.

Зазначимо, що іноземні студенти в цілому непогано засвоюють мікромодуль «Елементи векторної алгебри», причому деякі з них використовують теоретичні знання для розв'язування задач навіть краще значної частини українських студентів.

Дещо складнішим для багатьох іноземних студентів є засвоєння мікромодуля «Елементи лінійної алгебри». Відмітимо, що більшість іноземних студентів непогано оперують з визначниками та матрицями. Відносно добре засвоюється ними знаходження рангу матриці (при цьому ми вважаємо доцільним сконцентруватися на якомога досконалішому опануванні навичок застосування до цієї задачі методу елементарних перетворень). Як правило, складнішим для багатьох іноземних сту-

дентів є знаходження власних чисел і власних векторів матриці. Зазначимо, що більшість іноземних студентів і значна частина українських знають про існування систем комп'ютерної математики і намагаються їх використовувати. Ми вважаємо доцільним надати студентам рекомендації щодо використання систем комп'ютерної математики до обчислення визначників та обернених матриць, для дій з матрицями і визначниками. При цьому ми вважаємо обов'язковим показати студентам обмеження на застосування цих систем.

Мікромодуль «Системи лінійних алгебраїчних рівнянь» достатньо добре сприймається на рівні алгоритмів основних методів розв'язання систем і гірше на рівні дослідження сумісності системи. Уважаємо, що при викладанні цього матеріалу студентам усіх категорій особливу увагу слід приділяти методу Гауса з вибором провідного елемента як методу, що використовується при обчисленнях з округленням і для систем з коефіцієнтами, що є наближеними числами.

Як правило, рівень сприйняття іноземними студентами більш абстрактних питань є набагато нижчим. Значні труднощі в багатьох іноземних і певної частини українських студентів починаються при вивченні мікромодуля «Лінійні простори та лінійні оператори. Білінійні та квадратичні форми», як на рівні розуміння теоретичного матеріалу, так і при розв'язуванні навіть найпростіших задач.

Критично необхідною для переважної більшості іноземних студентів є наявність англomовних опорних матеріалів та англomовних посібників, що містять необхідний теоретичний матеріал з великою кількістю розв'язаних прикладів і необхідну термінологію з перекладом. Розділи, пов'язані з викладанням лінійної алгебри англійською мовою супроводжуються двома посібниками (Denisiuk et al., 2009; Antonova et al., 2018). Крім того, теорію квадратичних форм та її застосування до дослідження кривих та поверхонь другого порядку, вивчення яких входить у програму дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», наведено в англomовному посібнику (Grebenuik & Karuru, 2004). Ми також вважаємо корисним допомагати студентам у роботі з пошуковими системами, надаючи їм рекомендації з пошуку математичної інформації в таких системах.

Проведений аналіз практики викладання в Національному авіаційному університеті англійською мовою окремих розділів лінійної алгебри як у курсі дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», так і в курсі дисципліни «Вища математика» іноземним та українським студентам, дає можливість сформулювати рекомендації по роботі викладача в англomовних групах. Рекомендується детальна алгоритмізація процесу розв'язування типових задач. Також рекомендується приділяти достатню увагу використанню різноманітних опорних матеріалів при виробленні іноземними студентами відповідних навичок під час проведення практичних занять і консультацій. Цей підхід виявляється достатньо ефективним і для певної частини українських студентів. Також корисним для кращого сприйняття студентами матеріалу є посилення на його зв'язок з авіаційною проблематикою. Крім того, ми вважаємо доцільним рекомендувати студентам активне використання систем комп'ютерної математики та пошукових систем.

Список літератури

- Antonova, A. O., Klyus, I. S., Lastivka, I. O., & Trofymenko, V. I. (2018). *Higher mathematics. Linear algebra. Algebra of vectors. Elements of analytic geometry*. Kyiv: NAU.
- Denisiuk, V. P., Grishina, L. I., Karupu, O. V., Oleshko, T. A., Pakhnenko, V. V., & Repeta V. K. (2009). *Higher mathematics*. (P. 1). Kyiv: NAU.
- Grebeniuk, M. F., & Karupu O. W. (2004). *Bilinear and quadratic forms in geometry*. Kyiv: NAU.
- Довгодько, Т. І. (2013). Адаптація іноземних студентів до освітнього середовища України. *Педагогіка і психологія професійної освіти*, (2), 114–120. <http://ena.lp.edu.ua/handle/ntb/24215>
- Довгодько, Т. І., Пахненко, В. В., & Калашникова, Л. Є. (2010). Аналіз проблем навчання іноземних студентів природничим дисциплінам на підготовчих факультетах вищих навчальних закладів. У *Матеріалах XIII Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука* (Т. 3, с. 182). Київ: НТУУ «КПІ».
- Ічанська, Н. В., & Наливайко, Л. Г. (2017). Викладання математики іноземним студентам технічних спеціальностей. *Витоки педагогічної майстерності. Серія: Педагогічні науки*, (20), 116–120.
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2011). Про деякі особливості викладання математичних дисциплін англomовним студентам. *Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки*, (83), 76–79.
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2012). Про викладання математичних дисциплін англійською мовою іноземним студентам. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, (2(2)), 11–14.
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2013). Про деякі особливості викладання математичних дисциплін іноземним студентам за кредитно-модульною системою. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*, (8), 52–57.
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2015). Про викладання лінійної алгебри та аналітичної геометрії в Національному авіаційному університеті в рамках освіти англійською. У *Матеріалах Четвертої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 170–173). Київ: НТУУ «КПІ». <http://matan.kpi.ua/public/files/2016/mvstu4-abstracts.pdf>
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2016). Про деякі методичні аспекти викладання лінійної алгебри та аналітичної геометрії в Національному авіаційному університеті. *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*, (77), 29–32. <https://seanewdim.com/i77.html>
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2017). Про викладання деяких питань лінійної алгебри англomовним студентам в Національному авіаційному університеті. *Вісник Черкаського університету. Серія Педагогічні науки*, 12, 26–33. <http://pedejournal.cdu.edu.ua/article/view/2145>
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2018). Про викладання лінійної алгебри та аналітичної геометрії англomовним студентам технічних спеціальностей в НАУ. *Фізико-математична освіта*, (4), 59–64. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2018-018-4-009>
- Олешко, Т. А. (2017). Деякі дидактичні та методичні аспекти викладання лінійної алгебри студентам НН ІКІТ в рамках Програми «Вища освіта іноземною мовою». У *Матеріалах 13 Міжнародної науково-технічної конференції «AVIA-2017»* (с. 7.62–7.65). Київ: НАУ. http://avia.nau.edu.ua/doc/avia-2017/AVIA_2017.pdf

Про один ефективний метод знаходження власних векторів матриці

М. І. Кучма, Н. М. Тимошенко

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
markuchma@ukr.net, tymgosan@gmail.com

У роботі запропоновано ефективний метод знаходження власних векторів матриці лінійного оператора в термінах теорії жорданового зображення матриці. Проілюстровано роботу методу для побудови фундаментальної системи розв'язків системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами і для зведення квадратичної форми до канонічного вигляду, який легко опановується студентами.

Ключові слова: ядро й образ лінійного оператора, власні значення, власні вектори, базис простору, жорданова нормальна форма.

Розв'язання багатьох важливих математичних задач пов'язане із знаходженням власних векторів матриць. Традиційно така задача зводиться до відшукування власних значень матриці та наступного розв'язання ряду систем лінійних рівнянь, що у випадку матриць вищих порядків, не є тривіальною. Пропонований метод у першій своїй частині також вимагає визначення власних значень, але у другій частині використовує лише операцію множення певних відомих матриць і вибір базисних стовпців отриманого добутку.

Оскільки основний результат статті формулюється мовою теорії лінійних перетворень, то спочатку нагадаємо деякі основні поняття.

Нехай $\hat{A}$ — лінійне перетворення (лінійний оператор) деякого унітарного простору V . Множини $\text{Ker} \hat{A} = \{v \in V \mid \hat{A}v = 0\}$ і $\text{Im} \hat{A} = \{\hat{A}v \mid v \in V\}$ називають відповідно ядром і образом оператора $\hat{A}$. Відомо, що ядро і образ — підпростори з V , і тому кожне з них повністю задається вибором базису (Зеліско & Зеліско, 2014). Базисом $\text{Im} \hat{A}$ може бути кожна максимальна лінійно незалежна підсистема з r стовпців матриці A оператора $\hat{A}$, де $r = \dim \text{Im} \hat{A} = \text{rang } A$. Цей факт буде використовуватись далі.

Метод, запропонований у статті, оперує також термінами теорії жорданового зображення матриці (Беклемишев, 1983; Хорн & Джонсон, 1989), тому подамо стислий перелік термінів і позначень, що використовуються.

Позначимо через λ^* — корінь кратності m^* мінімального полінома $\psi_A(\lambda)$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — решта його коренів з відповідними кратностями $m_1, \dots, m_l$ (m_i — розмір максимальної жорданової клітки, яка відповідає власному значенню λ_i , $i = \overline{1, l}$), тобто

$$\psi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda^*)^{m^*} \prod_{i=1}^l (\lambda - \lambda_i)^{m_i},$$

$p^* = \dim \text{Ker} (A - \lambda^* I)$ — кількість жорданових кліток, відповідних λ^* (геометрична кратність власного значення λ^*), I — одинична матриця того ж порядку, що й матриця A , r^* — кількість жорданових кліток, що мають максимальний порядок, $1 \leq r^* \leq p^*$, $\overline{C}_A^{(i)}$ — i -й стовпець матриці A , наприклад, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}, \text{ то } \overline{C}_A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \overline{C}_A^{(2)} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Тепер сформулюємо (без доведення) теорему та наслідок з неї, який є теоретичною основою запропонованого методу.

Теорема. Нехай λ^* , m^* , $\lambda_i, m_i, i = \overline{1, l}; r^*, p^*$ — параметри, вказані вище. Тоді

$$\text{rang} \left[(A - \lambda^* I)^{m^*-1} \prod_{i=1}^l (A - \lambda_i I)^{m_i} \right] = r^*. \quad (1)$$

Наслідок. Якщо для власного значення λ^* матриці A відсутні домінуючі клітки, тобто $1 \leq r^* = p^*$ (всі жорданові клітки, що відповідають λ^* , мають однаковий порядок), то має місце рівність підпросторів

$$\text{Ker} (A - \lambda^* I) = \text{Im} \left[(A - \lambda^* I)^{m^*-1} \prod_{i=1}^l (A - \lambda_i I)^{m_i} \right]. \quad (2)$$

У властивості (2) зосереджена суть статті. Рівність (2) дозволяє в разі відсутності домінуючих жорданових кліток для власного значення λ^* знайти відразу всі p^* власних векторів $\overline{V}_{\lambda^*}^{(0, k)}$, $k = \overline{1, p^*}$ матриці A . За власні вектори вибираємо довільні p^* базисних стовпців, що фігурують у квадратних дужках рівності (2).

Проілюструємо властивість (2) на наступних двох прикладах.

Приклад 1. Знайти фундаментальну систему розв'язків лінійної системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -57 & -8 & -14 & 70 \\ -29 & -3 & -7 & 35 \\ 51 & 6 & 14 & -60 \\ -42 & -6 & -10 & 52 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матриця A даної системи рівнянь є матрицею скалярного типу, і має наступну жорданову нормальну форму

$$J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

а її мінімальний поліном $\psi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$.

Як бачимо, для власних значень $\lambda^* = 1$ і $\lambda^* = 2$ відсутні домінуючі жорданові клітки (для кожного власного значення λ^* маємо по дві клітки однакового порядку 1), тобто в обох випадках $r^* = p^* = 2$.

Застосуємо властивість (2) до власного значення $\lambda^* = 1$.

Маємо

$$\text{Ker}(A - I) = \text{Im}(A - 2I) = \text{Im} \begin{pmatrix} -59 & -8 & -14 & 70 \\ -29 & -5 & -7 & 35 \\ 51 & 6 & 12 & -60 \\ -42 & -6 & -10 & 50 \end{pmatrix}.$$

За два лінійно незалежні вектори $\overline{V}_1^{(0,1)}$, $\overline{V}_1^{(0,2)}$ матриці A можемо взяти будь-які два базисні стовпці матриці $(A - 2I)$, наприклад,

$$\overline{V}_1^{(0,1)} = \overline{C}_{A-2I}^{(2)} = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \overline{V}_1^{(0,2)} = \overline{C}_{A-2I}^{(3)} = \begin{pmatrix} -14 \\ -7 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо властивість (2) до власного значення $\lambda^* = 2$. Маємо

$$\text{Ker}(A - 2I) = \text{Im}(A - I) = \text{Im} \begin{pmatrix} -58 & -8 & -14 & 70 \\ -29 & -4 & -7 & 35 \\ 51 & 6 & 13 & -60 \\ -42 & -6 & -10 & 51 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно до попереднього випадку, беремо, наприклад,

$$\overline{V}_2^{(0,1)} = \overline{C}_{A-I}^{(2)} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \overline{V}_2^{(0,2)} = \overline{C}_{A-I}^{(3)} = \begin{pmatrix} -14 \\ -7 \\ 13 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Тепер можемо записати шукану фундаментальну систему розв'язків даної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\overline{X}_1(t) = \overline{V}_1^{(0,1)} e^t &= \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} e^t, & \overline{X}_2(t) = \overline{V}_1^{(0,2)} e^t &= \begin{pmatrix} -14 \\ -7 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix} e^t, \\ \overline{X}_3(t) = \overline{V}_2^{(0,1)} e^{2t} &= \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} e^{2t}, & \overline{X}_4(t) = \overline{V}_2^{(0,2)} e^{2t} &= \begin{pmatrix} -14 \\ -7 \\ 13 \\ -10 \end{pmatrix} e^{2t}.\end{aligned}$$

Приклад 2. Звести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$F(x_1, x_2, x_3) = 11x_1^2 + 14x_2^2 + 11x_3^2 - 6x_1x_2 - 22x_2x_3.$$

Розв'язання. Знайдемо власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 0 \\ -3 & 14 & -11 \\ 0 & -11 & 11 \end{pmatrix}$

квадратичної форми $F(x_1, x_2, x_3)$ із характеристичного рівняння:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 36\lambda^2 - 299\lambda + 264 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 11, \lambda_3 = 24.$$

Жорданова нормальна форма матриці A та її мінімальний поліном мають вигляд:

$$J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}, \quad \psi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 11)(\lambda - 24).$$

Для власних значень $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 11$, $\lambda_3 = 24$ відсутні домінуючі жорданові клітки (кожному власному значенню відповідає одна клітка порядку 1), тобто $r^* = p^* = 1$. Тому маємо по одному власному вектору $\overline{V}_1^{(0)}$, $\overline{V}_{11}^{(0)}$, $\overline{V}_{24}^{(0)}$, які внаслідок симетричності матриці A є взаємно ортогональними та утворюють базис простору (Кучма, 2018).

Згідно із властивістю (2) знаходимо для власних значень $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 11$, $\lambda_3 = 24$ відповідні власні вектори. Маємо

$$\begin{aligned}
& \text{Ker } (A - I) = \text{Im } [(A - 11I)(A - 24I)] = \\
& = \text{Im} \left[\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -11 \\ 0 & -11 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 & -3 & 0 \\ -3 & -10 & -11 \\ 0 & -11 & -13 \end{pmatrix} \right] = \\
& = \text{Im} \begin{pmatrix} 9 & 30 & 33 \\ 30 & 100 & 110 \\ 33 & 110 & 121 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{V}_1^{(0)} = \frac{1}{3} \cdot \bar{C}_{(A-11I)(A-24I)}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}, \\
& \text{Ker } (A - 11I) = \text{Im } [(A - I)(A - 24I)] = \\
& = \text{Im} \left[\begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 \\ -3 & 13 & -11 \\ 0 & -11 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 & -3 & 0 \\ -3 & -10 & -11 \\ 0 & -11 & -13 \end{pmatrix} \right] = \\
& = \text{Im} \begin{pmatrix} -121 & 0 & 33 \\ 0 & 0 & 0 \\ 33 & 0 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{V}_{11}^{(0)} = \frac{1}{11} \cdot \bar{C}_{(A-I)(A-24I)}^{(1)} = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \\
& \text{Ker } (A - 24I) = \text{Im } [(A - I)(A - 11I)] = \\
& = \text{Im} \left[\begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 \\ -3 & 13 & -11 \\ 0 & -11 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -11 \\ 0 & -11 & 0 \end{pmatrix} \right] = \\
& = \text{Im} \begin{pmatrix} -9 & -39 & 33 \\ -39 & 169 & -143 \\ 33 & -143 & 121 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{V}_{24}^{(0)} = \frac{1}{3} \cdot \bar{C}_{(A-I)(A-11I)}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 11 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Знормувавши вектори $\bar{V}_1^{(0)}$, $\bar{V}_{11}^{(0)}$, $\bar{V}_{24}^{(0)}$, отримуємо ортонормований базис, складений із власних векторів:

$$\left(\bar{V}_1^{(0)} \right)^\circ = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{230} \\ 10/\sqrt{230} \\ 11/\sqrt{230} \end{pmatrix}, \quad \left(\bar{V}_{11}^{(0)} \right)^\circ = \begin{pmatrix} -11/\sqrt{130} \\ 0 \\ 13/\sqrt{130} \end{pmatrix}, \quad \left(\bar{V}_{24}^{(0)} \right)^\circ = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{299} \\ -13/\sqrt{299} \\ 11/\sqrt{299} \end{pmatrix}.$$

Отже, за допомогою ортогонального перетворення

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{230} & -11/\sqrt{130} & 3/\sqrt{299} \\ 10/\sqrt{230} & 0 & -13/\sqrt{299} \\ 11/\sqrt{230} & 3/\sqrt{130} & 11/\sqrt{299} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

отримуємо канонічний вигляд заданої квадратичної форми

$$F(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 11y_2^2 + 24y_3^2.$$

У статті розглянута лише задача знаходження власних векторів матриці. Насправді, можливості запропонованого методу значно ширші. У разі, якщо $m^* > 1$, то метод дозволяє також знаходити відповідні приєднані вектори матриці оператора, використовуючи рівність (1).

Список літератури

- Беклемишев, Д. В. (1983). *Дополнительные главы линейной алгебры*. Москва: Наука.
- Зеліско, В. Р., & Зеліско, Г. В. (2014). *Лінійна алгебра і аналітична геометрія*. Практикум. Львів: ЛНУ імені Івана Франка.
- Кучма, М. І. (2018). *Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії*. Львів: СПОЛОМ.
- Хорн, Р., & Джонсон, Ч. (1989). *Матричный анализ*. Москва: Мир.

найменших квадратів

М. І. Кучма

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
markuchma@ukr.net

У статті запропоновано метод побудови псевдорозв'язків системи лінійних рівнянь з використанням понять ортогональної проєкції та ортогональної складової вектора відносно підпростору. Знаходження псевдорозв'язків системи лінійних рівнянь дає можливість визначати невідомі параметри регресійних моделей, для яких, як відомо, використовують метод найменших квадратів.

Ключові слова: псевдорозв'язки системи лінійних рівнянь, квадратичне відхилення, метод найменших квадратів, проєкція вектора на підпростір, ортогональна складова вектора відносно підпростору.

З лінійної алгебри відомо, що система m лінійних рівнянь з n невідомими

$$Ax = b$$

може бути сумісною, або несумісною (Кучма, 2018). Усі ці випадки мають місце на практиці. Зокрема, несумісній системі відповідає суперечлива ситуація, яка зустрічається при математичному описі якого-небудь економічного чи соціального явища, яке наприклад, описується лінійною залежністю між змінними.

Припускаємо, що величина b лінійно залежить від величин $a_1, a_2, \dots, a_n$, і маємо за мету знайти цю залежність $b = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, тобто визначити невідомі коефіцієнти $x_1, x_2, \dots, x_n$ (це називають *моделлю лінійної регресії*). Для знаходження залежності b від $a_1, a_2, \dots, a_n$ здійснюють велику кількість m вимірювань (результатів спостережень $m \gg n$), і за таблицею результатів спостережень записують систему рівнянь

[illegible]

у якій кількість невідомих менша за кількість рівнянь. Така система, як правило, несумісна. Тоді виникає необхідність змінити поняття розв'язку так, щоб довільна система лінійних рівнянь мала б єдиний розв'язок у деякому сенсі терміну «розв'язок». Тому знайдімо «найкращий наближений» розв'язок $x_1, x_2, \dots, x_n$, для якого відхилення значень b_i від $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ буде найменшим.

Метод найменших квадратів (Бессалов, 2007; Кремер, 1997) розв’язує задачу знаходження найкращого наближеного розв’язку у припущення, що за міру відхилення беруть суму квадратів різниць величин $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ і b_i .

Псевдорозв'язком системи (1) називають набір величин $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$, який мінімізує суму квадратів різниць лівих і правих частин рівнянь системи, тобто величина

$$E^2 = (a_{1j}x_j - b_1)^2 + (a_{2j}x_j - b_2)^2 + \dots + (a_{mj}x_j - b_m)^2 \quad (2)$$

набуває найменшого значення для всіх $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Цю величину називають *квадратичним відхиленням*.

Нехай $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ — матриця системи (1), елементи якої вектори $a_j = (a_{1j} \ a_{2j} \ \dots \ a_{mj})^T \in \mathbb{R}^m, j = \overline{1, n}$, а $b = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ — вектор вільних членів системи (1).

Ураховуючи означення довжини (норми) вектора (Кремер, 1997), рівність (2), можна записати у матричній формі:

$$E^2 = \|Ax - b\|^2 \quad \text{або} \quad E = \|Ax - b\|.$$

Зауважмо, що якщо x — розв'язок системи (1) (у звичайному розумінні), то відхилення $E = 0$.

Величина $E = \|Ax - b\|$ є відстанню від між b і точкою Ax лінійного підпростору, породженому векторами $a_1, a_2, \dots, a_n$. Надалі, цей підпростір позначатимемо через $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. Знаходження розв'язку $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T$, який мінімізує E , з геометричних міркувань означатиме, що точка $A\hat{x}$ є найближчою до b , ніж будь-яка інша точка у підпросторі $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. Звідси вектор відхилення $e = b - A\hat{x}$ повинен бути ортогональним до цього підпростору $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. Вектор $e = b - A\hat{x}$ є ортогональною складовою вектора b відносно $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ (Lay, 2012).

З ортогональності $e = b - A\hat{x}$ до кожного з векторів $a_j = (a_{1j} \ a_{2j} \ \dots \ a_{mj})^T \in \mathbb{R}^m$ лінійного підпростору $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ отримаємо, що скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $(a_j^T, e) = 0, j = \overline{1, n}$. Маємо

$$\begin{cases} a_1^T(b - A\hat{x}) = 0, \\ \dots\dots\dots \text{або} \begin{pmatrix} a_1^T \\ \dots \\ a_n^T \end{pmatrix} (b - A\hat{x}) = 0 \quad \text{або} \quad A^T(b - A\hat{x}) = 0. \\ a_n^T(b - A\hat{x}) = 0 \end{cases}$$

Отже, вектор $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T$, який мінімізує E , є розв'язком рівняння

$$A^T A \hat{x} = A^T b. \quad (3)$$

Отриманий результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Псевдорозв'язок системи лінійних рівнянь (1) знаходимо як

$$A^T Ax = A^T b$$

або системи лінійних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_1, a_1)x_1 + (a_1, a_2)x_2 + (a_1, a_n)x_n = (a_1, b), \\ \\ (a_n, a_1)x_1 + (a_n, a_2)x_2 + (a_n, a_n)x_n = (a_n, b), \end{array} \right.$$

 ∂e

$$A^T A = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_n, a_1) & \dots & (a_n, a_n) \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} (a_1, b) \\ \dots \\ (a_n, b) \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T.$$

Рівняння (3) у статистиці називають *нормальними*.

Зробимо декілька висновків.

1. Якщо система $Ax = b$ несумісна, то знаходження псевдорозв'язку $\hat{x}$ з матричного рівняння (3) дає той «найкращий наближений» розв'язок, що мінімізує відхилення $E^2 = \|A\hat{x} - b\|^2$.

2. Якщо система $Ax = b$ сумісна, то її псевдорозв'язок $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T$ є розв'язком (у звичайному розумінні), тобто відхилення $E = 0$.

3. Якщо стовпці матриці A лінійно незалежні, то матриця $A^T A$ є оборотною. Тоді псевдорозв'язок $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T$ визначають за формулою

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

4. Псевдорозв'язність систем лінійних рівнянь можна використовувати для складніших аналітичних залежностей величини b від $a_1, a_2, \dots, a_n$. Наприклад, для неоднорідної лінійної залежності

$$b = x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

можна визначати невідомі коефіцієнти $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Якщо ж вибрана емпірична залежність b від одної величини a задається поліномом n -го степеня $b = x_0 + ax_1 + a^2x_2 + \dots + a^nx_n$ з невідомими коефіцієнтами $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, то пошук псевдорозв'язків систем рівнянь дозволяє визначити коефіцієнти цієї залежності, для яких, як відомо, у статистиці використовують метод найменших квадратів.

Проілюструємо знаходження псевдорозв'язків систем рівнянь на наступних двох прикладах.

Приклад 1. Величина товарообміну x (тис. грн) та витрати обігу y (грн) задано у таблиці

x	17,28	17,05	18,3	18,8	19,2	18,5
y	537	534	550	555	560	552

Припускаючи, що між величинами x і y існує лінійна залежність, знайти параметри цієї залежності.

Розв'язання. Спочатку, розглядаючи пари значень (x_k, y_k) , $k = \overline{1,6}$ як точки координатної площини, отримуємо точковий графік (пропонуємо виконати самостійно), обираємо лінійну форму залежності $y = ax + c$.

Ураховуючи вигляд обраної залежності, складаємо систему лінійних рівнянь за даними таблиці

$$\begin{cases} 17,28a + c = 537, \\ 17,05a + c = 534, \\ 18,3a + c = 550, \\ 18,8a + c = 555, \\ 19,2a + c = 560, \\ 18,5a + c = 552. \end{cases}$$

Легко перевірити, що дана система є несумісною (не має розв'язків). Знайдемо її псевдорозв'язок за формулою (3). Тоді, записавши матрицю системи A , матрицю-стовпець вільних членів b і обчисливши $A^T A$ і $A^T b$

$$A = \begin{pmatrix} 17,28 & 1 \\ 17,05 & 1 \\ 18,3 & 1 \\ 18,8 & 1 \\ 19,2 & 1 \\ 18,5 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 537 \\ 534 \\ 550 \\ 555 \\ 560 \\ 552 \end{pmatrix},$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1988,52 & 109,13 \\ 109,13 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 59847,06 \\ 3288 \end{pmatrix},$$

із систем нормальних рівнянь $A^T A \hat{x} = A^T b$, а саме

$$\begin{cases} 1988,52 a + 109,13 c = 59847,06; \\ 109,13 a + 6 c = 3288, \end{cases}$$

знаходимо її розв'язок: $a = 12,078$, $c = 328,32$, наприклад, за формулами Крамера чи матричним методом.

Отже, $y = 12,078x + 328,32$.

Приклад 2. Знайти псевдорозв'язок $\hat{x}$ системи $Ax = b$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $E = \|A\hat{x} - b\|$.

Розв'язання. Дослідимо задану систему на сумісність. Маємо

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 3 \\ 5 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -12 & 24 \\ 0 & -7 & 14 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Отже, система сумісна і має єдиний розв'язок: $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Тепер, обчисливши $A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 41 \\ 41 & 38 \end{pmatrix}$ і зауваживши,

що $\det(A^T A) = 219 \neq 0$, знаходимо псевдорозв'язок $\hat{x}$ системи за формулою

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{pmatrix} 50 & 41 \\ 41 & 38 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{219} \begin{pmatrix} 38 & -41 \\ -41 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки псевдорозв'язок $\hat{x}$ і розв'язок $\tilde{x}$ системи збігаються, то легко перевірити, що

$$E = \|A\hat{x} - b\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 0.$$

Список літератури

- Lay, D. C. (2012). *Linear algebra and its applications* (4th ed.). Addison-Wesley.
 Барковський, В. В., & Барковська, Н. В. (1999). Вища математика для економістів. Київ: НАУ.
 Бессалов, А. В. (2007). *Эконометрика*. Киев: Кондор.
 Кремер, Н. Ш. (ред.). (1997). *Высшая математика для экономистов*. Москва: ЮНИТИ.
 Кучма, М. І. (2018). *Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії*. Львів: СПОЛОМ.

Прикладні задачі як стимул вивчення математики

О. А. Лагода

Київський національний університет технологій та дизайну, Київ, Україна
oksala@ukr.net

У контексті оприлюднених результатів PISA з математики запропоновано зміни, які необхідно внести до програм та методів викладання, які мотивуватимуть до вдумливого вивчення математики.

Ключові слова: PISA, прикладні задачі, навички та вміння з математики.

Нещодавно Україна отримала результати дослідження якості освіти за допомогою програми міжнародного оцінювання учнів та студентів PISA (Program for International Student Assessment). PISA перевіряє, чи здатні учні використовувати здобуті знання, уміння та навички з математики, читання та природничих наук у повсякденному житті. Результати, зокрема з математики, викликали значний резонанс у суспільстві. Третина учнів не мають базових навичок з математики. Українські учні ніколи не бачили в підручниках завдань, схожих на ті, що виконували на PISA. Тому в тестах багато хто не зміг впоратися з таблицями чи розв'язати задачу в реальному контексті: ось проблема, у якої є математична відповідь, спробуйте її знайти. Замість того діти «лили воду» та ставили багато відповідей там, де була потрібна одна. Творець PISA Андреас Шляйхер так коментує ситуацію в Україні (<https://goo-gl.su/K1OvzF>): «Ваш стиль викладання дещо старомодний — ви концентруєтеся на тому, щоб засвоїти величезну кількість інформації, а не на творчому мисленні та підходах. Велику роль, як і раніше, відіграють іспити — люди вчать заради того, щоб їх скласти, а не для того, щоб стати розумнішими».

Проблема, яка привела до таких провальних результатів з математики, багатопланова. По-перше, багато учнів справді не володіють найелементарнішими знаннями, як от, наприклад, не знають навіть таблички множення. Уже в початковій школі учні дозволяють собі використання калькуляторів в телефонах. Їхню любов до гаджетів можна використати із «зиском». Якщо на державному рівні замовити й упровадити в навчальний процес програми-тренажери для смартфонів, які будуть цікавими, різноманітними й надаватимуть можливість в ігровій формі розв'язати достатню кількість задач, а ще обов'язково вестимуть облік часу, витраченого на виконання вправ, то і вчителям, і батькам доведеться менше часу витрачати на перевірку домашніх завдань. Якщо при цьому програма буде «дозволяти» погратися на телефоні лише після виконаного домашнього завдання і виділений час буде залежати від якості, то це буде спроба якщо не подолати ігроманію, то, принаймні, загнати її в певні рамки.

Цілком очевидно, що учень, який умовно сорок разів у своєму житті додав та тридцять перемножив два числа, дуже далекий від достатнього рівня володіння арифметикою. Це якраз той випадок, коли кількість зроблених завдань «породжує» швидкість та, головне, якість їх виконання. Випускник школи

обов'язково повинен вільно оперувати цілими числами, десятковими та звичайними дробами, відсотками, розуміючи суть операції, проблеми, а не формально зазубривши, наприклад, правило порівняння дробів. Уже на цій стадії учнів важливо привчити до «прикидання» очікуваного результату та до оцінки його правдоподібності. Але якщо в молодшій школі дітей можна заохотити ігровою формою математичного тренажера, то далі гостро постає проблема мотивації навчання. Для чого вміти додавати чи ділити дроби, розв'язувати рівняння, нерівності тощо, якщо існують додатки, програми, сайти, які можуть за лічені секунди не просто дати правильну відповідь, а видати повне розв'язання. Як в епоху ІТ-технологій переконати школяра, студента займатися такою низькоінтелектуальною роботою як обчислення «вручну»? Аргумент, що математичні операції, здійснені в голові «качають» твій мозок, як гантелі біцепси, не завжди працює, оскільки збільшення вмісту «сірої речовини» віджиманням не перевіриш і в дзеркалі нею не помилуєшся. Тим більше, що існує певний скепсис із приводу покращення когнітивних навичок від розв'язування одноманітних задач (<https://goo.gl/8ZsZFV>) та (<https://goo.gl/imNLP9>). Зате відомо, що вихід із зони комфорту, подолання реальних викликів (challenges), по-перше, справді розвиває мозок, а по-друге, робить людей щасливими. Тому подання математики у вигляді актуальних прикладних задач — це три в одному. По-перше, це освічені випускники, які за роки навчання «прочитали» не один графік функції, яка описувала економічний, біологічний чи соціологічний процес, розв'язали багато оптимізаційних задач, зекономивши не одну тисячу умовних одиниць; по-друге, це впевнені у власному потенціалі молоді люди, які, по-третє, знають, що інтелектуальна праця дарує ендорфін.

Теперішня ж шкільна програма з математики настільки переобтяжена інформацією, що більшість учнів, на жаль, «сходять з математичної дистанції», не лише не отримавши належних базових навичок, та ще й з підірваною вірою в себе. Але доступність вищої освіти в Україні приводить такого випускника до університету. І починають викладачі «латати» дірки із шкільного курсу математики, замість того, щоб зосередитися на своєму. Оскільки у школі глибину засвоєння предмету замінили розширенням математичного світогляду, то дуже просто переконати студента, що границі, похідні та інтеграли складають потужний інструментарій майбутнього економіста, інженера, аналітика, адже по цих темах вже «пробіглися» в 11 класі, укравши у викладачів вищої школи ефект новизни та за браком часу для пояснень відбивши формальним підходом інтерес до них. Необхідна умова зростання якості вищої освіти полягає в піднятті рівня шкільної. Достатня — у збільшенні кількості годин на вивчення математики та систематичному розв'язуванні прикладних задач поряд з абстрактними. Мистецтву відшукування необхідної математичної моделі чи апарату для розв'язування конкретної задачі треба починати вчити учнів зі школи, тоді вони як студенти будуть краще сприймати їх під час навчання і будуть спроможними використовувати здобуті навички в майбутньому. Якщо учень розв'язував у школі різноманітні

рівняння, кількість вхідних величин у яких збільшувалася поступово, то студент не розгубиться, наприклад, перед такою задачею про банківські ставки.

У статті про дерегуляцію процентних ставок Christofi та Agapos (1984) розв'язують рівняння

$$r = \left(\frac{\eta}{\eta + 1} \right) \left(r_L - \frac{dC}{dD} \right)$$

відносно η . Тут r — ставка депозиту, що виплачується комерційним банком, r_L — це ставка, зароблена комерційними банками, C — вартість перетворення депозитів у банківські прибуткові активи, D — депозит, η — еластичність депозитів відносно ставки депозиту. Знайдіть η .

Для того, щоб майбутній спеціаліст вільно оперував поняттям похідної, потрібно, по-перше, ще у школі відійти від того, що функція це, як правило, $y = f(x)$, розглянувши її в десятках ситуацій, які описуються десятками різних літер, які прийняті в тій чи іншій сфері чи просто запропоновані автором. По-друге, диференціюючи ці функції, використовувати не лише позначення y' , а й $\frac{dy}{dx}$, урізноманітнивши позначення аргументів та функцій. Тоді наступна, насправді зовсім елементарна, задача не викликатиме труднощів ні у студентів, ні у майбутніх фахівців.

Eswaran та Kotwal (1985) розглядають деяку модель з аграрної економіки, у якій є два види працівників, постійні та тимчасові. Постійні працівники працюють за довгостроковими контрактами й можуть отримувати пільги, такі як відпустка та медичний супровід. Тимчасових працівників наймають поденно для виконання такої роботи, як прополювання, збирання врожаю тощо. Різниця z у вартості наймання постійного працівника від вартості найму тимчасового працівника задається

$$z = (1 + b)w_p - w_c,$$

де w_p і w_c — ставки заробітної плати за постійну та тимчасову роботу відповідно, b — константа, а w_p — це функція від w_c . Есваран та Котвал стверджують, що

$$\frac{dz}{dw_c} = (1 + b) \left[\frac{dw_p}{dw_c} - \frac{b}{1 + b} \right].$$

Перевірте це.

Поняття ступінчастої функції та дослідження її неперервності запроваджують, як правило, на прикладі функції $y = [x]$. Поряд з цим корисно розглянути функцію y — вартості перевезень «Новою Поштою» в межах України в гривнях

$$\begin{cases} 55, & \text{якщо } 2 < x \leq 5, \\ 65, & \text{якщо } 5 < x \leq 10, \\ 85, & \text{якщо } 10 < x \leq 20. \end{cases}$$

де x — вага в кілограмах.

До речі, на тему перевезень «Новою Поштою» можна створити не одну цікаву задачу. Ось, наприклад, задача на лінійну функцію.

Згідно з тарифами «Нової Пошти» за відправлення вагою 30 кг у межах міста, області, України доведеться заплатити 95, 100, 105 грн відповідно. При вазі понад 30 кг треба доплатити за кожен додатковий кг 1,5 грн; 2 грн; 3 грн; 3,5 грн, 4,5 грн або 6 грн залежно від того в межах міста, області чи чотирьох тарифних зон по Україні буде здійснюватися перевезення. Скласти функції вартості перевезення, побудувати їх графіки. Порахувати наскільки дорожче коштуватиме відправлення вагою 33 кг до Борисполя, ніж до одного з відділень Києва, якщо відправлення здійснюється зі столиці.

Можливо варто відокремити розв'язування прикладних задач від класичних абстрактних, запровадивши поняття розрахункової чи практичної роботи, коли на завершення кожної теми проводиться відповідне справді практичне заняття та видається домашнє завдання з реальними прикладними задачами. У контрольні роботи обов'язково включати прикладні задачі, оцінюючи їх вищими балами для більшого заохочення учнів та студентів.

Список літератури

- Christofi, A., & Agapos, A. M. (1984). Interest rate deregulation: An empirical justification. *Review of Financial Economics*, 20(1), 39–49.
- Eswaran, M., & Kotwal, A. (1985). A theory of two-tier labor markets in agrarian economies. *The American Economic Review*, 75(1), 162–177. www.jstor.org/stable/1812711

Про безпосередню оцінку логарифмічних величин (порівняння деяких логарифмів)

С. В. Левізов, І. Ф. Курбико

Владимирський державний університет імені О. Г. та М. Г. Столетових
(Vladimir State University), Владимир, Росія

levizov@rambler.ru

Оцінюються (без допоміжних «інструментальних» засобів) величини логарифмів, які неможливо обчислити точно.

Ключові слова: логарифми, степені чисел, біноміальний розклад, обчислювання «ручним» способом.

В одному із збірників тренувальних задач (до шкільного державного екзамену з математики) логарифмічна нерівність у відповіді зводиться до проміжків, кінцями яких виявляються числа $\log_7 15$, $\log_4 7$ і $\log_7 16$. Виникає питання — у якому порядку їх треба розташувати на числовій прямій? Інакше кажучи, потрібно оцінити (без допомоги калькулятора!) — яке з цих чисел найменше та найбільше? Не знаючи авторського розв'язку, запропонуємо наступні міркування.

Зрозуміло, що $\log_7 15 < \log_7 16$. Тому порівняємо $\log_7 15$ і $\log_4 7$.

Підносячи до степеня «вручну», можна виявити, що

$$\begin{aligned} 7^7 &= 7^3 \cdot 7^3 \cdot 7 = 343 \cdot 343 \cdot 7 = 823543 > \\ &> 15^5 = 5^5 \cdot 3^5 = 3125 \cdot 243 = 759375. \end{aligned}$$

Тому $7 > 5 \log_7 15 \Leftrightarrow \log_7 15 < \frac{7}{5} = 1,4$.

З другого боку, $8^5 = 32768$ та $7^5 = 16807$, звідки $8^5 < 2 \cdot 7^5$

Отже, $8^{10} < 4 \cdot 7^{10}$. але

$$8^{10} = 4^{15} \Rightarrow 4^{15} < 4 \cdot 7^{10} \Rightarrow 4^{14} < 7^{10}.$$

Логарифмуючи, одержимо, що

$$14 < 10 \log_4 7 \Leftrightarrow \log_4 7 > \frac{14}{10} = 1,4.$$

Отже,

$$\log_7 15 < 1,4 < \log_4 7.$$

Тепер порівняємо $\log_4 7$ і $\log_7 16$. Для цього спочатку перетворимо:

$$\log_4 7 = \frac{1}{2} \log_2 7, \quad \log_7 16 = 4 \log_7 2 = \frac{4}{\log_2 7}.$$

Далі, позначимо $\log_2 7 = a$, тоді $\log_7 16 = \frac{4}{a}$.

Порівнюючи величини $\frac{a}{2}$ и $\frac{4}{a}$, розгляньмо різницю:

$$\frac{a}{2} - \frac{4}{a} = \frac{a^2 - 8}{2a}.$$

Оскільки $a > 0$, то необхідно визначити знак у чисельнику, тобто порівняти a^2 з числом 8. Для цього зіставимо (це досягається уручну!) степені двійки і сімки. Очевидні рівності:

$$2^{14} = 2^{10} \cdot 2^4 = 1024 \cdot 16 = 16384, \quad 2^{15} = 32768,$$

$$7^5 = 7^2 \cdot 7^3 = 49 \cdot 343 = 16807.$$

Тому, з одного боку,

$$2^{14} < 7^5 \Rightarrow a = \log_2 7 > \frac{14}{5} = 2,8.$$

З другого боку,

$$\frac{2^{15}}{7^5} = \frac{32768}{16807} = 1,949... > 1,94$$

(встановлюється діленням «куточком»).

Легко перевірити (операцією множення в «стовпчик»), що

$$(1,94)^3 > 7.$$

Отже, маємо ланцюжок нерівностей:

$$7 < (1,94)^3 < \left(\frac{2^{15}}{7^5}\right)^3 < 2^3 = 8.$$

Звідси випливає, що $7^{16} < 2^{45}$. Отже, маємо

$$a = \log_2 7 < \frac{45}{16} = 2,8125.$$

З останньої нерівності випливає, що

$$a^2 = (\log_2 7)^2 < (2,82)^2 < 8,$$

тобто, $\frac{a^2 - 8}{2a} < 0$.

При цьому

$$2,8 < a < \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 1,4 < \frac{a}{2} < \sqrt{2} \Rightarrow \frac{4}{a} > \sqrt{2},$$

тобто

$$\frac{a}{2} < \sqrt{2} < \frac{4}{a} \Rightarrow \log_4 7 < \log_7 16.$$

Тому в підсумку маємо:

$$\log_7 15 < \log_4 7 < \log_7 16.$$

Відзначимо, що калькулятор дає такі значення:

$$\log_7 15 \approx 1,3916, \log_4 7 \approx 1,4037, \log_7 16 \approx 1,4248.$$

Отже, проміжки вельми «вузькі», і точки $\frac{7}{5} = 1,4$ і $\sqrt{2} \approx 1.4142\dots$ – практично їх середини!

Можна також запропонувати альтернативний спосіб порівняння двох останніх логарифмів.

А саме: приведемо їх до основ 7 і 8 — так, щоб вони були якомога «ближче» один до другого. Маємо:

$$\log_4 7 = \frac{3}{2} \log_8 7, \log_7 16 = \frac{4}{3} \log_7 8.$$

Отже, якщо позначити $\log_7 8 = t$, то потрібно порівняти величини $\frac{4}{3}t$ і $\frac{3}{2}t$, або t^2 і $\frac{9}{8}$.

Розкладімо степені $\frac{8}{7}$ за допомогою біноміального розкладу:

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{7}\right)^n &= \left(1 + \frac{1}{7}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{7} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{7^2} + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot \frac{1}{7^3} + \dots + \left(\frac{1}{7}\right)^n. \end{aligned}$$

Задля ручності підрахунків виконаємо оцінку для показника n , кратного числу 7. Нескладно переконатися, що вже при $n = 14$ одержимо:

$$\left(\frac{8}{7}\right)^{14} > 1 + \frac{14}{7} + \frac{14 \cdot 13}{2} \cdot \frac{1}{7^2} + \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{6} \cdot \frac{1}{7^3} + \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{24} \cdot \frac{1}{7^4} = \frac{2173}{343},$$

Тоді

$$\left(\frac{8}{7}\right)^{15} = \frac{8}{7} \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^{14} > \frac{8}{7} \cdot \frac{2173}{343} > 7$$

(обчислюється вручну!). Отже, $8^{15} > 7^{16}$.

Логарифмуючи, маємо:

$$t = \log_7 8 > \frac{16}{15} \Rightarrow (t)^2 > \left(\frac{16}{15}\right)^2 = \frac{256}{225} > \frac{9}{8}.$$

Звідси ясно, що

$$\frac{4}{3}t > \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t}, \text{ тобто } \log_7 16 > \log_4 7.$$

Також зрозуміло, що

$$\log_4 7 = \frac{3}{2} \log_8 7 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} < \frac{3}{2} \cdot \frac{15}{16} = \frac{45}{32} < 1,41,$$

тоді як

$$\log_7 16 = \frac{4}{3} \cdot t > \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} = \frac{64}{45} > 1,42..$$

Результати обох способів практично збігаються. Цікаво, чи існують простіші способи розв'язання цієї задачі?!

Про систему тестових завдань для контролю знань з математики для економістів

А. З. Мохонько¹, Л. С. Васіна², В. Д. Мохонько²

¹Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
²Технічний коледж Національного університету «Львівська політехніка»,
Львів, Україна
ludavhome@gmail.com

Розглянуто приклади тестових завдань для самостійної роботи студентів ЗВО.
Ключові слова: тестові завдання, контроль знань, комп'ютерна реалізація.

Сучасна економічна теорія і практика передбачають широке застосування математичних методів для виявлення зв'язків між економічними об'єктами, обробки інформації, оптимізації економічних задач. Така робота включає якісну і точну обробку масивів статистичних даних, що неможливо без використання ПК (зокрема, електронних таблиць MS Excel).

Контроль знань студентів з вищої математики чи економетрики містить, як правило, тестову частину. Це дозволяє оцінити наскільки студент орієнтується в навчальному матеріалі і здатний застосовувати одержані знання для розв'язання як теоретичних, так і практичних задач (зокрема, з використанням ПК), зменшити час, який витрачається на технічну частину розв'язання завдання. Інші завдання розглядаються як результат виконання домашніх чи розрахункових робіт і дають при рубіжному контролі додаткові бали.

Для прикладу, наведемо зразки тестових завдань з курсу економетрики.

Завдання 1. Дано два рівняння: 1) $y = a_0 + a_1x_1 + u$; 2) $y = \frac{x_1}{x_2}$, де y —

обсяг реалізованої продукції, x_1, x_2 — витрати на рекламу і ціна одиниці продукції. Яке з цих рівнянь є економетричною моделлю? Дайте означення моделі і всі альтернативні назви її змінних.

Завдання 2. Регресивний аналіз економетричної моделі передбачає:

Установлення тісноти та значущості зв'язку між змінними у рівнянні або рівняннях	Визначення виду рівняння або рівнянь для досліджуваних показників та розрахунок їх параметрів
--	---

Завдання 3. Кореляційний аналіз економетричної моделі передбачає:

Установлення тісноти та значущості зв'язку між змінними у рівнянні або рівняннях	Визначення виду рівняння або рівнянь для досліджуваних показників та розрахунок їх параметрів
--	---

Завдання 4. Яка з наведених моделей є функцією Кобба — Дугласа:

$Y = a \cdot (F \cdot L)^{\alpha+\beta}$	$Y = a \cdot F^{\alpha} \cdot L^{\beta}$	$Y = a \cdot (F \cdot L)^{\alpha\beta}$
--	--	---

Завдання 5. Відомі етапи побудови економетричної моделі:

Формування масивів вхідної інформації згідно з метою та завданнями дослідження.
 Оцінка параметрів ЕМ методом найменших квадратів. Аналіз залишків дає змогу відповісти на питання: чи не суперечить специфікація моделі передумовам класичної моделі лінійної регресії.
 Знайомство з економічною теорією, висунення гіпотези взаємозв'язку. Чітка постановка задачі.
 Специфікація моделі.
 Проведення аналізу достовірності моделі та прогноз за моделлю.
 Застосування інших методів оцінювання параметрів.

Покажіть взаємозв'язки між ними. Що означає кожний з етапів?

Завдання 6. Для оцінки параметрів моделі $\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \cdot x$ використовують метод найменших квадратів. Цей метод полягає у мінімізації:

Суми відхилень	Суми квадратів відхилень	Квадрату суми відхилень
----------------	--------------------------	-------------------------

Завдання 7. Сума квадратів відхилень лінійної моделі $y = a_0 + a_1 \cdot x$ згідно методу найменших квадратів мінімізується за формулою:

$\left(\sum_{i=1}^n u_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i)) \right)^2$	$\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i)]$	$\sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i)]^2$
---	---	---

Завдання 8. Значущість зв'язку між змінними моделі в кореляційному аналізі найчастіше здійснюється за допомогою:

Критерію Дарбіна — Вотсона	t -критерію Стюдента	F -критерію Фішера
----------------------------	------------------------	----------------------

Завдання 9. Аналіз вибірових даних дозволяє висунути гіпотезу про нелінійну залежність між показником x та фактором y : $y = a_0 + a_1 \ln x$. Перетворення і лінеаризована форма регресії щодо параметрів a_0, a_1 і змінних має вигляд:

$t = \ln x$ $\hat{y}_t = a_0 + a_1 t$	$t = \frac{1}{x}$ $\hat{y}_t = a_0 + a_1 t$	$\hat{y}_1 = b_0 + b_1 t$ $(a_1 = e^{b_1}, a_0 = e^{b_0})$ $\ln y = x \ln a_1 + \ln a_0$	$\hat{y}_t = b_0 + a_1 t$ $(a_0 = e^{b_0}) \hat{y}_t = b_0 + a_1 t$
--	--	--	--

Завдання 10. Скласти таблицю характеристик логарифмічної виробничої функції за схемою:

Загальний вигляд (рівняння $y = f(x), x > 0$)	Середня швидкість зміни $\frac{f(x)}{x}$	Гранична швидкість зміни $f'(x)$	Темп зміни $f''(x)$	Коефіцієнт еластичності $f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$
$y = a_0 + a_1 \cdot \ln x$				

Завдання 11. Коефіцієнт еластичності визначає:

Кількісну характеристику зв'язку між факторною і результативною ознаками	Швидкість зміни результативної ознаки при зміні факторної ознаки	Граничну швидкість зміни функції
--	--	----------------------------------

Завдання 12. Коефіцієнт еластичності попиту на певний товар від доходу рівний $K_e = -0,17$. До якої групи відноситься цей товар:

малоцінні	товари з малою еластичністю	товари з середньою еластичністю	товари з високою еластичністю
-----------	-----------------------------	---------------------------------	-------------------------------

Завдання 13. Який з показників характеризує щільність кореляційного зв'язку показника y зі всіма факторами X_i ($i = 1, 2, \dots, m$):

Коефіцієнт множинної кореляції	Коефіцієнт детермінації	Частинні коефіцієнти кореляції
--------------------------------	-------------------------	--------------------------------

Завдання 14. Встановлення значущості кореляційного зв'язку між факторними ознаками проводиться за допомогою:

Коефіцієнту множинної кореляції	t -критерію Стюдента	Частинних коеф. кореляції
---------------------------------	------------------------	---------------------------

Приклад розв'язання однієї з типових задач. Статистичні дані залежності роздрібного товарообігу (Y) від доходів населення (X) в умовних грошових одиницях, які досліджувалися протягом шести місяців наведено в таблиці:

№ спост.	$Y = y_i$	$X = x_i$
1	1,9	0,9
2	2,2	1,4
3	2,8	2,1
4	3,4	2,6
5	4,6	3,4
6	4,9	3,8

За допомогою функції ЛИНЕЙН програми обробки електронних таблиць MS Excel визначено параметри парної лінійної регресії $\hat{y} = \hat{a}_1 \cdot x + \hat{a}_0$ та обчислено регресійну статистику. Результати представлено у вигляді масиву:

	$\hat{a}_1$ 1,091053	$\hat{a}_0$ 0,717842	
$S\hat{a}_1$	0,074558	0,192364	$S\hat{a}_0$
R^2	0,981663	0,187634	σ_u
F	214,141	4	$n - m$
$\sum_{i=1}^6 (y_i - \hat{y}_i)^2$	7,539174	0,140826	$\sum_{i=1}^6 (y_i - \hat{y}_i)^2$

Чому дорівнюють параметри $\hat{a}_1$ та $\hat{a}_0$ економетричної моделі:

$\hat{a}_1 = 0,717842$	$\hat{a}_1 = 1,091053$	$\hat{a}_1 = 0,074558$
$\hat{a}_0 = 1,091053$	$\hat{a}_0 = 0,717842$	$\hat{a}_0 = 0,192364$

Розв'язання. Оцінки параметрів лінійної регресійної моделі визначаємо з першого рядка масиву: $\hat{a}_1 = 1,091053$, $\hat{a}_0 = 0,717842$.

Економетрична модель записується у вигляді: $\hat{y} = 1,091 \cdot x + 0,718$.

Параметр $\hat{a}_1 = 1,091$ характеризує граничний розмір витрат на купівлю товарів у роздрібній торгівлі. Тобто, коли дохід збільшиться на одиницю, то обсяг роздрібного товарообігу зросте на 1,091 одиниці.

Число ступенів вільності чисельника і знаменника даної моделі:

1; 6	1; 4	2; 4
------	------	------

Розв'язання. Число ступенів вільності знаменника $n - m = 6 - 2 = 4$ ($n = 6$ — кількість спостережень, $m = 2$ — кількість змінних моделі). Число ступенів вільності чисельника рівне 1, оскільки в моделі одна факторна змінна.

Записати значення F -критерію Фішера та визначити, чи адекватна модель статистичним даним:

$F = 214$ так	$F = 0,98$ так	$F = 214$ ні
---------------	----------------	--------------

Розв'язання. Дослідження адекватності моделі проводимо за допомогою F -критерію Фішера. Оскільки число ступенів вільності $n - m = 6 - 2 = 4$ ($n = 6$ — кількість спостережень, $m = 2$ — кількість змінних моделі), то:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^6 (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\frac{1}{6-2} \cdot \sum_{i=1}^6 (y_i - \hat{y}_i)^2} = \frac{4 \cdot 7,539}{0,141} \approx 214$$

Значення сум знаходяться у п'ятому рядку масиву регресійної статистики

7,539174	0,140826
----------	----------

Обчислене значення критерію збігається зі значенням, обчисленим в MS Excel (третій рядок масиву):

F	214,141	4	$n - m$
-----	---------	---	---------

Фактичне значення критерію Фішера F порівнюємо з табличним значенням $F_{кр.}$. При ступенях вільності чисельника (1) та знаменника (4) і рівні значущості $\alpha = 0,05$ для даної моделі значення $F_{кр.} = 7,71$ (визначається з таблиць). Оскільки $F = 214 > F_{кр.} = 7,71$, то гіпотеза про істотність або значущість зв'язку між залежною і незалежною змінними економічної моделі підтверджується з ймовірністю 95% і можна зробити висновок про адекватність побудованої моделі статистичним даним.

Дисперсія залишків σ_u^2 моделі становить:

0,035	0,187	0,256
-------	-------	-------

Розв'язання. Визначаємо дисперсію залишків $\sigma_u^2 = 0,187634^2 = 0,035$ (значення стандартної похибки залишків σ_u обчислене у третьому рядку масиву)

Залишкова дисперсія $\sigma_u^2 = 0,035 \rightarrow 0$ показує, що розрахункові значення роздрібного товарообігу дуже близькі до фактичних даних спостережень.

Чи присутні у даній моделі зміщення оцінок параметрів $\hat{a}_1$ та $\hat{a}_0$:

так	ні	тільки параметра $\hat{a}_1$	тільки параметра $\hat{a}_0$
-----	----	------------------------------	------------------------------

Розв'язання. Стандартні похибки оцінок параметрів моделі (другий рядок регресійної статистики):

$S\hat{a}_1$	0,074558	0,192364	$S\hat{a}_0$
--------------	----------	----------	--------------

Порівнюємо стандартні похибки оцінок параметрів моделі із значеннями цих оцінок $\hat{a}_1 = 1,091$, $\hat{a}_0 = 0,718$:

Стандартна похибка оцінки параметра $\hat{a}_1$ становить 6,84% абсолютного значення цього параметра, що свідчить про незміщенність оцінки параметра $\hat{a}_1$ моделі; стандартна похибка оцінки параметра $\hat{a}_0$ становить 26,8% абсолютного значення цього параметра, а тому параметр $\hat{a}_0$ може мати зміщення, зумовлене невеликою сукупністю спостережень (шість місяців).

У процесі навчання і під час підготовки до заліків та іспитів студенти можуть користуватися методичними матеріалами, які є на сайті навчального закладу.

Наявність тестових завдань дозволяє студентам з різнорівневою підготовкою орієнтуватися в навчальному матеріалі і засвоювати його.

Список літератури

Васіна, Л. С. (2010). *Економетрія: Практикум з використанням MS Excel*. Львів: СПОЛОМ.
Лондар, С. Л., & Юринець, Р. В. (2004). *Економетрія засобами MS EXCEL*. Київ: Видавництво Європейського ун-ту.

Чи треба вчити формули в час суцільної комп'ютеризації знань?

Н. М. Панасюк

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

nanipa01030@gmail.com

Розглядається актуальне в наш час питання мотивації студентів до запам'ятовування теоретичного матеріалу, зокрема математичних формул при вивченні курсів вищої математики.

Ключові слова: розвинення пам'яті і мислення, творчий підхід до вивчення математичного матеріалу, встановлення специфіки формули з метою її запам'ятовування.

Наш час — це стрімке розповсюдження Інтернету і гаджетів буквально на кожному кроці, що продукує хибні думки лінивого про те, що не треба вчити, наприклад, математичних формул, бо все можна знайти в Інтернеті. На жаль, навіть в освітянських колах, час від часу підіймається питання про доцільність вчити формули на пам'ять. Може дійсно не треба? Для відповіді звернімося до найдорожчих для нас усіх — до дітей. З чого складаються їх заняття: вивчення віршиків. Для чого? Хіба тільки для того, щоб виступити на святі й порадувати батьків, які з гордістю будуть розказувати, які геніальні в них діти, чи для участі в передачі «Найрозумніший»? Це, звичайно, також, але супутньо. Головним завданням є розвинення пам'яті для подальшого піднесення, на новий рівень наукового і творчого формування особистості, здатної орієнтуватися у швидкоплинному потоці нової інформації, уміти оцінювати її, вибрати потрібне, базуючись на фундаменті отриманих роками знань. А для цього потрібна, перш за все, пам'ять в активній і живій формі, динамічна, формуюча творче мислення і розвиток особистості, що сприймає нове, опрацьовує і творчо перероблює її. Унаслідок народжуються нові ідеї і починання.

Вернімося до малечі. Що ще роблять діти на заняттях? Так, малюють, вирізають, ліплять. Це не тільки знайомство з кольорами й формами, розвиває уяву й художній смак. Усе це значно розвиває моторику, яка, що вже доведено вченими, тісно пов'язана з розвитком мислення. Це тобі не сенсорне керування — тільки торкнешся і от: кольорові розваги, мозок засмічений, а навичок ніяких, хіба інформація, що інколи не дуже корисна. Я сама відвідала заняття художньої студії, де зовсім маленькі дітки 3–4 роки ліплять з глини, крутять гончарний круг і, після обпалу, що виконують, звісно, керівники, розмальовують. З їхніх рук виходять такі чудові вироби, що диву дивуєшся. І це звичайні дітки, яких привели розумні батьки. Цих діточок не можна відірвати від роботи, вони натхненні, усім цікавляться, щось пропонують і мимоволі думаєш, от би таку працелюбність і натхнення нашим студентам до яких і вертаємося.

Певно не один викладач помітив, що вони почали значно повільніше, нерозбірливіше писати, гірше запам'ятовують матеріал при конспектуванні, особ-

ливо у групах з низьким рівнем математичної підготовки. Цього року я працювала в потоці екологів для яких, тепер, не вимагають сертифікат ЗНО з математики, так вони не можуть законспектувати більше 2–3 слів, увесь час просять повторити, хоча я читаю матеріал достатньо повільно, повторюючи й акцентуючи на головному.

Ніколи не було проблем з конспектуванням у моїх студентів і під час лекції ми завжди спілкувались, обговорювали матеріал. Ось вам і пам'ять, яку в першу чергу розвиває математика вже у процесі вивчення елементарної, з її формулами, теоремами, правилами та перетвореннями, які розвивають логіку й узагалі мислення, а також моторика, яка сприяє його розвитку й широко застосовується у процесі математичних перетворень і розрахунків. Крім того, як уже доведено, при спілкуванні й обговоренні матеріалу на лекціях, практичних заняттях та семінарах, значно краще сприймається і запам'ятовується матеріал, ніж при простому прочитанні. Я також вже зверталась до цього питання (Панасюк, 2015). Інколи я застосовую такий прийом. Коли читається лекція, у якій використовується матеріал попередніх, я звертаюсь до студентів із проханням назвати з конспекту номер формули, яку ми використовуємо. І більшість з них з радістю її відшуковують. При цьому, зрозуміло, відбувається і зорове запам'ятовування, і орієнтування в конспекті.

І ще про формули. Їх треба не зазубрювати, а любити, знаходити в них закономірності для запам'ятовування, тобто аналізувати, а не бездумно вчити. Візьмімо з тригонометрії формули пониження степеню, що широко використовують у різних розділах математичного аналізу, зокрема для інтегрування

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Обидві формули однакові за структурою і відрізняються тільки знаком у чисельнику, при тому для однойменної функції знак «+», а для спорідненої «-».

Розгляньмо розкладення функції однієї змінної в ряд Тейлора в околі x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Тут кожний доданок з номером n , починаючи з нуля, має порядок похідних, показники степеню множника $x - x_0$ і факторіали, що стоять у знаменнику, рівними номеру відповідного члену, при цьому за похідну нульового порядку беремо значення функції в цій точці.

В операційному численні, як правило, викликає складнощі запам'ятовування формули зображення похідних n -го порядку функції оригіналу для ненульових початкових умов. Але тут усе дуже просто для сприйняття. Як ми бачимо, першим доданком стоїть добуток n -го степеню параметра p на зображення функції за Лапласом, а далі йде лінійна комбінація добутків парамет-

ра, у степені, починаючи з $n - 1$, тобто на одиницю меншого від першого доданку на значення похідних функції оригіналу в нулі, причому сума показника степеню і порядку похідної весь час стала й дорівнює $n - 1$, при цьому, як і раніше, за похідну нульового порядку приймаємо саму функцію.

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - p^{n-2} \cdot f'(0) - p^{n-3} \cdot f''(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

де $F(p)$ — зображення функції $f(t)$ за Лапласу, p — параметр.

Але вернімося до питання «вчити чи не вчити». У відповідь на «можна знайти» розгляньмо ситуацію хоча б в інтегруванні. Не знаючи таблиці інтегралів, вивченню якої зараз буває опираються студенти, як можна побачити в середині підінтегрального виразу диференціал функції, який дозволить обчислити інтеграл відповідним методом. Тут і з елементарної математики знання знадобляться. Як можна у виразі побачити те, чого не знаєш і шукати що? Наведу елементарний приклад з інтегрування. Обчислити інтеграл

$$\int \cos^3 x \cdot \sin 2x dx.$$

Тут треба в активі знати формулу синуса подвійного кута, побачити диференціал косинуса і степеневу функцію.

На вулицях, у транспорті, магазинах і, навіть, на парах більшість у смартфонах. Мимоволі виникає думка: «А коли вони думають, розвивають мислення, створюють своє, сперечаються з отриманою інформацією подумки, чи вголос?». Залежність, що зростає, ініціативність, сміливість у грамотних рішеннях зникає. Тому: треба розвивати пам'ять і мислення на основі накопичених знань, аналізу, порівнянь і узагальнень. А саме накопичена в пам'яті інформація — підґрунтя для пошуку й нових рішень, які можуть виникнути всюди: у дорозі і на відпочинку, на роботі і, навіть, уві сні. Гаджети — це тільки джерело інформації, яку ще треба вміти відсепарувати й оцінити за допомогою сформованої роками, від дитинства до зрілого віку, ерудиції та розвиненого мислення. Саме це і є запорукою нашого успіху.

Список літератури

Панасюк, Н. М. (2015). Про роль математики в розвитку творчого мислення майбутнього спеціаліста. У *Матеріалах Четвертої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 195–196). Київ: НТУУ «КПІ». <http://matan.kpi.ua/public/files/2016/mvstu4-abstracts.pdf>

Модели процессов электромагнитной индукции и особенности практических расчетов на их основе

С. Н. Потемкина¹, А. В. Розанов²,

¹Тольяттинский государственный университет, Тольятти, Россия

²Саратовский ГАУ им. Н. И. Вавилова, Саратов, Россия

s.potemkina@tltsu.ru, arosanov@yandex.ru

Рассматриваются математические модели возникновения ЭДС индукции и особенности расчета величины ЭДС и направления индукционного тока в проводящем контуре. Особое внимание обращается на применение метода ДИ к расчету величины ЭДС индукции.

Ключевые слова: Закон Фарадея для явления электромагнитной индукции, магнитный поток, скорость изменения магнитного потока, сторонняя сила, электрическая и магнитная составляющие силы Лоренца, математическое моделирование.

При выполнении самостоятельных работ по курсу «Электродинамика» в виртуальной физической лаборатории (Сизова и др., 2016) студентам предлагается использовать две математические модели явления электромагнитной индукции (ЭМИ).

В качестве феноменологической модели, опирающейся на закон Фарадея, можно выбрать П-образный проводящий стержень, помещенный в однородное магнитное поле с магнитной индукцией ($\vec{B}$), по которому с постоянной скоростью скользит проводящая перемычка (рис. 1). В соответствии с законом Фарадея ЭДС электромагнитной индукции E_i определяется выражением (Беликов, 1986, с. 107–110):

$$E_i = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{или} \quad E_i = -\frac{d\Psi}{dt},$$

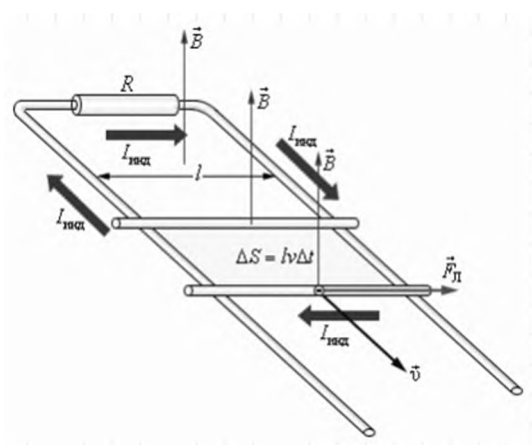


Рисунок 1

где Φ — магнитный поток, сцепленный с одним витком, $\Psi = N\Phi$ — полный магнитный поток, сцепленный с катушкой из нескольких витков, N — число витков катушки. Из закона Фарадея для ЭМИ следует, что величина E_i определяется скоростью изменения магнитного потока, сцепленного с витком или замкнутым контуром. С принципиальной точки зрения появление ЭДС индукции в модели Фарадея объясняется действием сторонней силы, роль которой играет магнитная составляющая силы Лоренца, возникающая при движении перемычки в постоянном магнитном поле. Направление индукционного тока в

замкнутом контуре противоположно направлению магнитной составляющей силы Лоренца. Модель Фарадея лежит в основе расчета индукционных генераторов тока, в которых ротор с обмоткой вращается во внешнем магнитном поле.

Рассмотрим пример расчета величины ЭДС индукции с использованием модели Фарадея. Предположим, что необходимо найти ЭДС индукции E_i , возникающую на концах крыльев самолета, летящего со скоростью v км/ч, если вертикальная составляющая напряженности магнитного поля Земли равна H , а размах крыльев самолета L (рис. 2). Вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости листа от нас ($\otimes \vec{B}$).

Обозначим первое положение самолета A_1B_1 , в момент времени $t = 0$. Второе — A_2B_2 в момент времени t . Площадь контура, пронизываемого линиями вектора $\vec{B}$ равна:

$$dS = vLdt.$$

По определению: $B = \mu_0 H$. В соответствии с законом Фарадея модуль ЭДС индукции будет равен:

$$E_i = \frac{d}{dt} \Phi = BLv.$$

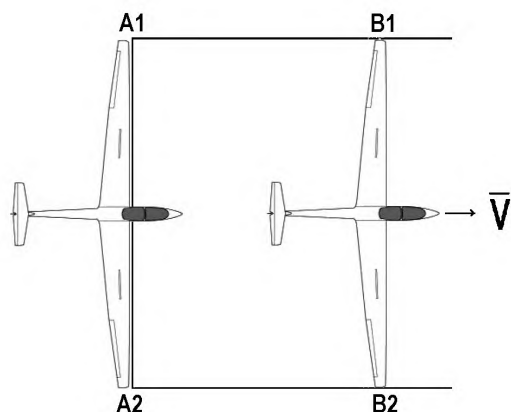


Рисунок 2

В модели Максвелла контур покоится в переменном магнитном поле. В такой системе, кроме силы Лоренца, других действующих сил нет. На покоящиеся заряды ($\vec{v} = \vec{0}$) магнитная составляющая силы Лоренца не действует. Следовательно, в данной модели роль сторонней силы играет только электрическая составляющая силы Лоренца. Изменяющееся во времени магнитное поле, согласно представлению, введенному Максвеллом (Ландау & Лившиц, 2005, с. 37), приводит к появлению в пространстве электрического поля независимо от наличия проводящего контура. Проводящий контур лишь позволяет обнаружить существование этого электрического поля по возникновению в контуре индукционного тока. Электрическое поле, порожденное меняющимся со временем магнитным полем, является вихревым. Модель Максвелла лежит в основе радиосвязи и радиолокации.

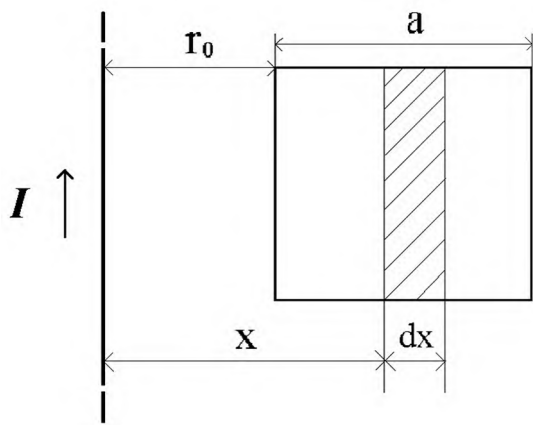


Рис. 3

Расчет величины ЭДС индукции с использованием модели Максвелла целесообразно проводить на основе метода дифференцирования и интегрирования (ДИ), в основе которого лежат два принципа:

представление рассчитываемой величины в дифференциальной форме и принцип суперпозиции (Потемкина & Розанов, 2010).

Пусть в плоскости квадратной рамки с омическим сопротивлением R и со стороной a на расстоянии r_0 от рамки расположен прямой бесконечный проводник (см. рис. 3). Проводник параллелен одной из сторон рамки. Сила тока в проводнике изменяется по закону $I = bt^3$, где $b > 0$ и $b = \text{const}$. Рассчитаем величины магнитного потока, ЭДС индукции и силу индукционного тока, возникшего в рамке.

Вследствие изменения силы тока в проводнике, магнитный поток, пронизывающий плоскость рамки, изменяется, и в ней возникает индукционный ток. Индукция магнитного поля, созданного проводником, убывает с удалением от проводника, т.е. рамка находится в неоднородном магнитном поле.

Рассчитаем сначала величину индукции магнитного поля прямого, бесконечно длинного тока силой I , на расстоянии x от него (Рис.4). Здесь l длина отрезка провода с током; dl — длина элемента проводника; $Id\vec{l}$ — линейный элемент тока; α — угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$; x — длина перпендикуляра, опущенного из точки A на отрезок проводника с током; $d\alpha$ — приращение угла при перемещении по проводнику с током на расстояние dl ; $OA = r_0 = x$; $DC = r d\alpha$;

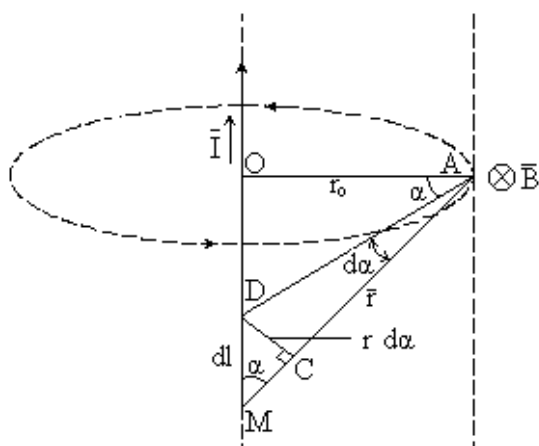


Рис. 4

$\sin \alpha = r \frac{d\alpha}{dl}$; $DM = dl$; $MA = r$. Рас-

смотрим два прямоугольных треугольника $\triangle MCD$ и $\triangle MOA$, они подобны. Из подобия этих треугольников следует пропорциональность сторон, тогда:

$$r \frac{d\alpha}{dl} = \frac{r_0}{r} \quad (1)$$

$$dl = \frac{r^2}{r_0} d\alpha \quad (2)$$

Согласно закону Био — Савара — Лапласа, модуль магнитной индукции элемента проводника с током, равен:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I r \sin \alpha}{4\pi r^3} dl. \quad (3)$$

Подставив выражение (2) в (3) получим:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi r_0} d\alpha. \quad (4)$$

Все векторы $d\vec{B}$ в данной точке, отстоящей от провода с током на расстояние $r_0 = x$, имеют одинаковое направление: они направлены перпендикулярно плоскости чертежа, за чертеж ($\otimes \vec{B}$), поэтому можно геометрическую сумму ($\sum d\vec{B}_i$) заменить на сумму их модулей ($\sum dB_i$), тогда:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi r^2 x} d\alpha. \quad (5)$$

В качестве переменной интегрирования возьмем угол α . Для всех элементов бесконечно длинного прямого тока угол α будет изменяться от 0 до π . Проинтегрировав выражение (5) получим:

$$|B| = \int dB = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi x} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \left(\frac{\mu\mu_0 I}{4\pi x} \right) \cdot (-1) [\cos \pi - \cos 0] = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi x}. \quad (6)$$

Из соотношения (6) следует, что индукция магнитного поля, созданного прямым бесконечно длинным проводником, убывает с удалением от проводника, т.е. рамка находится в неоднородном магнитном поле (учтем, что $\mu = 1$).

Выразим элементарный магнитный поток сквозь узкую полоску шириной dx :

$$d\Phi = B_x a dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi x} dx. \quad (7)$$

Интегрируя это выражение по x от r_0 до $(r_0 + a)$, получим:

$$\Phi(t) = \int_{r_0}^{r_0+a} \mu_0 \frac{Ia}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 b t^3 a}{2\pi} \int_{r_0}^{r_0+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 a b t^3}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{r_0 + a}{r_0} \right) \quad (8)$$

По закону Фарадея найдем величину ЭДС индукции:

$$E_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = 3t^2 a \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left(\frac{r_0 + a}{r_0} \right) \quad (9)$$

А из закона Ома следует, что сила тока равна:

$$I = \frac{E_1}{R} = 3 \frac{t^2 a \mu_0 b}{2\pi R} \ln \left(\frac{r_0 + a}{r_0} \right) \quad (10)$$

Таким образом, обдуманно выбирая различные математические модели и методы расчета характеристик полей, и применяя наиболее приемлемые из них для конкретных условий, студенты получают возможность выработать и закрепить практические навыки, которые потребуются им в сфере их будущей профессиональной деятельности.

Список литературы

- Беликов, Б. С. (1986). *Решение задач по физике. Общие методы*. Москва: Высшая школа.
Ландау, Л. Д., & Лившиц, Е. М. (2005). *Теоретическая физика: Т. 8. Электродинамика сплошных сред*. Москва: ФИЗМАТЛИТ.

- Потемкина, С. Н., & Розанов, А. В. (2010). Математические методы в преподавании курса физики. В *Матеріалах Тринадцятої Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука* (Т. 3, с. 268). Киев: НТУУ «КПІ».
- Сизова, Ю. В., Лиманова, Н. И., & Потемкина, С. Н. (2016). Виртуальная физическая лаборатории для системы дистанционного обучения. В *Материалах III Международной научно-практической конференции «Математическое моделирование в сфере АПК»* (с. 123–127). Саратов: Амирит.

Застосування теорем Ролля, Лагранжа та Коші для розв'язання задач студентських математичних олімпіад

С. М. Сапрікін

Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського, Одеса, Україна,
sergey.saprikin@gmail.com

У статті розглянуто задачі, що були запропоновані на різноманітних математичних олімпіадах студентів, для розв'язання яких використано теореми Ролля, Лагранжа чи Коші.

Ключові слова: задачі студентських математичних олімпіад, теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коші.

Студентські математичні олімпіади щорічно проводять в багатьох закладах вищої освіти різних країн і мають на меті виділення найталановитіших студентів, які мають математичні здібності, активізацію наукової творчості студентів, розвиток математичного мислення, нарешті, закріплення знань основної програми і одержання нових знань.

Завдання, які пропонують на математичних олімпіадах, зазвичай мають нестандартний характер і ілюструють ту чи іншу математичну ідею, вивчення якої, як правило, не входить до складу обов'язкових університетських програм з математики.

Розгляньмо задачі, для розв'язання яких застосовується одна із трьох відомих теорем диференціального числення — Ролля, Лагранжа чи Коші. Ці теореми присутні в будь-якому курсі математичного аналізу, наприклад, Дороговцев (2004, с. 139–144).

Задача. Нехай функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ диференційовна на проміжку $[a; b]$, причому $f(a) = f(b) = 0$. Доведіть для всіх $n \in \mathbb{N}$ та для всіх $\alpha \in \mathbb{R}$ рівняння $f'(x) = \alpha x^{n-1} f(x)$ має розв'язок на $[a; b]$.

Розв'язання. Ідея розв'язання цієї задачі полягає в тому, щоб знайти функцію, застосування теореми Ролля до якої давало б рівність, що є еквівалентною рівності

$$f'(x) = \alpha x^{n-1} f(x).$$

Розгляньмо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) e^{-\frac{\alpha x^n}{n}}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{-\frac{\alpha x^n}{n}} (f'(x) - f(x) \alpha x^{n-1}), \\ F(a) &= f(a) e^{-\frac{\alpha a^n}{n}} = 0, \quad F(b) = f(b) e^{-\frac{\alpha b^n}{n}} = 0. \end{aligned}$$

Застосовуючи теорему Ролля для цієї функції на відрізку $[a; b]$, отримаємо таку точку $c \in (a; b)$, що $F'(c) = 0$, тобто

$$e^{-\frac{\alpha c^n}{n}} (f'(c) - f(c)\alpha c^{n-1}) = 0,$$

звідки ми отримуємо потрібне твердження.

Задача. Нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є двічі диференційованою функцією, причому $f(0) = 0$. Доведіть, що існує така точка $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, для якої виконується рівність

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \xi).$$

Розв'язання. Для розв'язання задачі розглядаємо допоміжну функцію

$$g(x) = f(x) \cos x$$

і застосуємо для неї на проміжках $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ і $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ теорему Ролля (очевидно, що

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

і за умовою $g(0) = f(0) \cos 0 = 0$): існують такі точки $\xi_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ і $\xi_2 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, для яких виконуються рівності $g'(\xi_1) = 0$ і $g'(\xi_2) = 0$.

Розгляньмо далі нову допоміжну функцію

$$h(x) = \frac{g'(x)}{\cos^2 x} = \frac{f'(x) \cos x - f(x) \sin x}{\cos^2 x}.$$

Маємо, що $h(\xi_1) = h(\xi_2) = 0$, тому за теоремою Ролля існує таке $\xi \in (\xi_1; \xi_2) \subset \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, що $h'(\xi) = 0$. Оскільки

$$h'(\xi) = \frac{1}{\cos \xi} \left(f''(\xi) - f(\xi) (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \xi) \right),$$

ми отримуємо потрібну рівність.

Задача. Нехай функція $f(x)$ $(n+1)$ разів диференційована на $\mathbb{R}$. Доведіть, що для довільних точок a і b , $a < b$, для яких виконано співвідношення

$$\ln \left(\frac{f(b) + f'(b) + \dots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \dots + f^{(n)}(a)} \right) = b - a,$$

існує число $c \in (a; b)$, для якого $f^{(n+1)}(c) = f(c)$.

Розв'язання. Розгляньмо допоміжну функцію

$$g(x) = \ln(f(x) + f'(x) + \dots + f^{(n)}(x)),$$

тоді

$$g'(x) = \frac{f'(x) + f''(x) + \dots + f^{(n+1)}(x)}{f(x) + f'(x) + \dots + f^{(n)}(x)}.$$

Застосуємо теорему Лагранжа для функції $g(x)$ на відрізку $[a; b]$: існує таке число $c \in (a; b)$, що $g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$, тобто

$$g'(c) = \frac{\ln(f(b) + f'(b) + \dots + f^{(n)}(b)) - \ln(f(a) + f'(a) + \dots + f^{(n)}(a))}{b - a}.$$

Оскільки за умовою

$$\ln \left(\frac{f(b) + f'(b) + \dots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \dots + f^{(n)}(a)} \right) = b - a,$$

то $g'(c) = 1$, що еквівалентно потрібній рівності $f^{(n+1)}(c) = f(c)$.

Задача. Нехай $0 < x_1 < x_2$, функція $f : [x_1; x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ диференційовна на $[x_1; x_2]$. Доведіть, що існує така точка $\xi \in (x_1; x_2)$, для якої виконується рівність

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розглянемо допоміжні функції

$$F(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ і } G(x) = \frac{1}{x}.$$

Тоді

$$F'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}, \quad G'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

За теоремою Коші існує така точка $\xi \in (x_1; x_2)$, що

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{G(x_2) - G(x_1)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}, \text{ тобто } \frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \frac{\frac{f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi)}{\xi^2}}{\frac{1}{\xi^2}},$$

що еквівалентно потрібній рівності.

Список літератури

Дороговцев, А. Я. (2004). *Математический анализ: Краткий курс в современном изложении*. Киев: Факт.

Фігури Ліссажу

Б. О. Тригубець, В. В. Листопадова

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

truhybetsbohdan@gmail.com, listopadovavv@gmail.com

У статті розглянуто рух матеріальної точки по деякій криволінійній траєкторії, а також досліджено вигляд кривої та залежність форми фігури від різниці фаз коливань та співвідношення частот.

Ключові слова: фігури Ліссажу, частота коливань, амплітуда коливань.

Фігурами Ліссажу називають криві, які викреслює точка, що коливається гармонічно у двох взаємно перпендикулярних напрямках.

Уперше було описані американським математиком, астрономом та фізиком Натанієлем Бавдичем (N. Bowditch) у 1799 р. та детальні вивчені французьким фізиком та математиком Жюлем Антуаном Ліссажу (J A. Lissajous) у 1855–1886 рр.

Уявімо маятник, який ззаду розгойдуємо однією рукою, а збоку — другою. Тобто маятник буде одночасно відхилятися вперед-назад, а також вліво-вправо. Якщо в сонячний день подивитися на землю, то можна побачити, що тінь маятника вимальовує різну траєкторію руху.

Фігури Ліссажу можна спостерігати досліджуючи механічні чи акустичні коливання (рис. 1) або електромагнітні коливання (рис. 2), маятник з піском (рис. 3), який викреслює фігури Ліссажу можна побачити, зокрема й у цьому навчальному відео (<https://youtu.be/uPbzhxYTioM>).

Криві Ліссажу мають такі параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \\ y(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{cases} t \in [0; +\infty).$$

Вигляд кривої залежить від співвідношення між періодами (частотами), фазами та амплітудами обох коливань (рис. 4).

У найпростішому випадку рівних частот, криві є еліпсами, які для різниці фаз 0 та π вироджуються у прями, а для різниці фаз $\frac{\pi}{2}$ та рівності амплітуд перетворюється на коло.

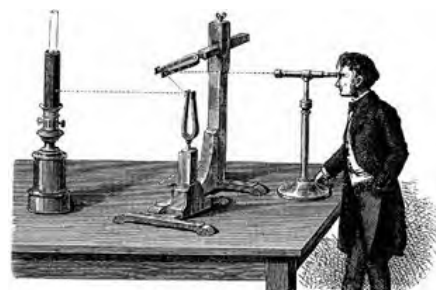


Рис. 1. Спостереження фігур Ліссажу за допомогою оптичного складання коливань камертонів

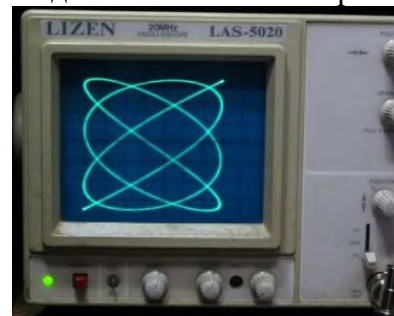


Рис. 2. Фігура Ліссажу на екрані осцилографа



Рис. 3. Пісчаний гармонограф

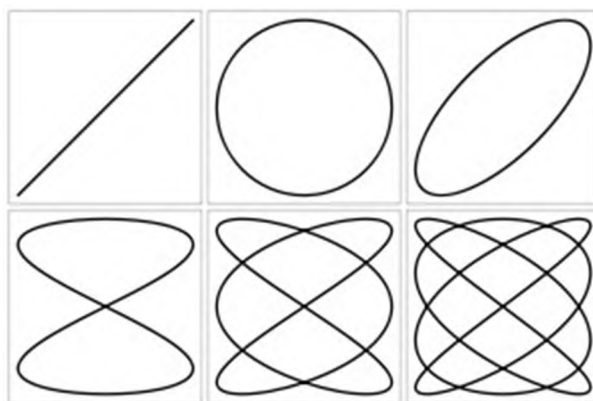


Рис. 4. Криві Ліссажу різної форми

Якщо частоти близькі, але не рівні, то різниця фаз увесь час змінюється, і еліпс неперервно деформується. Для суттєво різних частот еліпс деформується швидко і картина розмивається, фігур Ліссажу не утворюється.

Однак, якщо відношення частот раціональне, то через проміжок часу, який є найменшим спільним кратним періодів, рухома точка вертається в початкове положення — маємо фігуру Ліссажу.

Одержимо неявне рівняння кривої для випадку $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Для спрощення виберімо початок відліку кутів так, щоб $\varphi_1 = 0$.

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t, \\ y = A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi). \end{cases}$$

З першого рівняння маємо:

$$\cos \omega t = \frac{x}{A_1}, \sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}. \quad (1)$$

Із другого рівняння маємо

$$\frac{y}{A_2} = \cos \omega t \cos \Delta\varphi - \sin \omega t \sin \Delta\varphi. \quad (2)$$

Підставляючи співвідношення (1) в рівність (2), одержуємо:

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \cos \Delta\varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \Delta\varphi.$$

Перетворімо останню рівність:

$$\begin{aligned} \frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \cos \Delta\varphi &= -\sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \Delta\varphi; \\ \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos^2 \Delta\varphi + \frac{x^2}{A_1^2} \cos^2 \Delta\varphi &= \sin^2 \Delta\varphi - \frac{x^2}{A_1^2} \sin^2 \Delta\varphi; \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos^2 \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi.$$

У загальному випадку маємо рівняння еліпса (рис. 5).

Якщо $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, то маємо еліпс, з осями, які збігаються з осями координат (рис. 6).

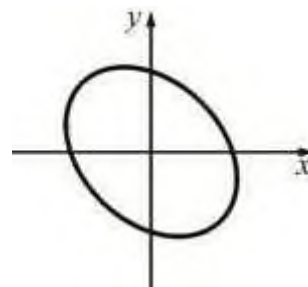


Рис. 5

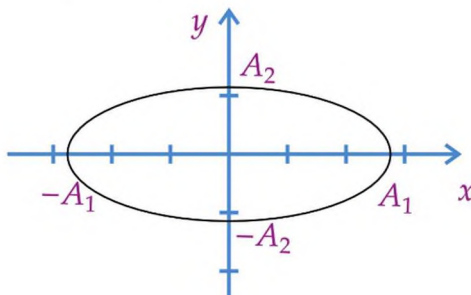


Рис. 6

Спектр використання фігур Ліссажу дуже широкий. Їх іноді використовують у дизайні як логотипи, у фільмах, а також у сучасному мистецтві. Відома в усьому світі лабораторія має логотипі також фігуру Ліссажу (рис. 7).



Рис. 7

Проекспериментувати з фігури Ліссажу можна за допомогою динамічного геометричного середовища GeoGebra, переходячи за посиланням <https://www.geogebra.org/m/vRA9prdc>

В електроніці фігури Ліссажу можна використовувати тоді, коли потрібно дізнатись частоту невідомого генератора через еталонний генератор з відомою частотою, а також дізнатись зсув фаз між двома однаковими сигналами.

Список літератури

- Прохоров А. М. (ред.). (1990). Фигуры Лиссажу. В *Физическая энциклопедия* (Т. 2, с. 597–598). Москва: Советская энциклопедия.
- Яворский, Б. М., & Детлаф, А. А. (2002). *Справочник по физике*. Москва: Высшая школа.

Аспекти викладання вищої математики для студентів технологічних спеціальностей

Г. А. Циганкова, С. В. Марченко

Національний університет харчових технологій, Київ, Україна

tsgk.anna@gmail.com

Розглянуто деякі проблеми при вивченні математичних дисциплін у технологічному університеті.

Ключові слова: вища математика, математична освіта, математичні методи.

У сучасних умовах зростання обсягу інформаційного потоку — наукового і не тільки — процес формування освіченої людини включає в себе як набуття нею певних знань та навичок, так і вміння бути успішною в житті, компетенції якої можуть інтегруватись в європейський освітній простір (Рендюк, 2012).

Вища математика — дисципліна, навчання якої починається з першого курсу, а вільне володіння її методами дозволяє науковцю чи інженеру-технологу проводити нові дослідження і розвивати новітні технології. Предметом вищої математики є логічно пов'язана між собою послідовність означень, теорем, правил. Кожна нова теорема, правило спираються на попередні, що розглядалися раніше. Усі розділи математики пов'язані між собою, взаємозалежні й доповнювані. Нова задача, що розглядається, включає в себе елементи раніше розв'язаних задач. Такий зв'язок усіх розділів математики, їх взаємозалежність, обумовлює несумісність з пропусками в навчанні. Крім того, математика — це система розумових вправ, які вимагають логічних висновків, обґрунтувань, доведень, пояснень, підтвердження аргументації. Тобто, розв'язування математичних задач сприяє розвитку вдумливості й наполегливості, розвитку логічного та абстрактного математичного мислення, логічної строгості в судженнях, умінь будувати відповідні математичні моделі.

Навчання студентів математики спрямовано на розвиток умінь виконувати розрахунки й обчислення, розв'язувати рівняння та нерівності, на розв'язання практичних задач, опанування системою математичних знань з метою подальшого вивчення суміжних навчальних дисциплін. На сучасних виробництвах харчової промисловості виникають задачі, що потребують проведення складних розрахунків, обґрунтування і вибору оптимальних умов, математичного моделювання технологічного процесу. Розв'язання таких задач здійснюється з використанням сучасних комп'ютерних засобів. Тому важливим фактором модернізації сучасної математичної освіти є застосування програмних інформаційних засобів, математичних пакетів прикладних програм.

Найпопулярнішою з прикладних математичних програм є програмний пакет MathCAD (Васютинська та ін., 2013). Цей пакет містить текстовий редактор, потужний обчислювач та графічний процесор. Завдяки простоті застосування, наочності математичних дій, великій бібліотеці вбудованих функцій і методів, а також зручному апарату представлення отриманих результатів, ним

зручно користуватись як студентам, так і технічним фахівцям і всім, кому потрібно проводити математичні розрахунки, починаючи від елементарної математики і до реалізації чисельних методів.

Під час вивчення курсу вищої математики звертається увага на застосування математичних методів і моделей у галузі майбутньої спеціалізації студента. Наприклад, методи диференціального числення, складання і розв'язання звичайних диференціальних рівнянь при дослідженні хіміко-технологічних процесів, диференціювання функцій багатьох змінних у хімічній термодинаміці. Основне поняття диференціального числення — поняття похідної — застосовується для розв'язання хімічних задач про визначення кількості бактерій у деякій біомасі, швидкості розчинення речовини, з'ясування питання про зростання чи зменшення популяції бактерій тощо.

Наприклад, нехай чисельність популяції бактерій у момент часу t задається формулою $p(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$.

Визначимо, протягом якого часу популяція буде зростати. Для цього потрібно знайти похідну й визначити проміжок, на якому вона зростає. На основі ознаки про зростання функції робимо висновок, що протягом 5 годин чисельність популяції збільшуватиметься. А оскільки при $t > 5$ $p'(t) < 0$, то можна стверджувати, що після 5 годин чисельність популяції почне зменшуватись.

Значну кількість процесів хімічної технології описують за допомогою диференціальних рівнянь або систем, оскільки швидкість реакції є похідною концентрації речовини за часом. Математичною реалізацією хімічного закону, наприклад, «швидкість витрачення реагента пропорційна його поточній концентрації», є диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = -kx,$$

розв'язком якого при заданій початковій концентрації реагента x_0 , є кінетичне рівняння реакції $x = x_0 e^{-kt}$. Засобами MathCAD можна аналітично розв'язувати диференціальні рівняння без застосування спеціальних методів, зауважимо, що тільки рівняння з відокремленими змінними і лише, коли змінні вже відокремлено.

Якість математичної освіти у виші значною мірою залежить від творчого підходу викладача до використання традиційних та інноваційних методів і форм навчання. Проблема реалізації професійної спрямованості навчання математики студентів технологічних університетів також є актуальною.

Список літератури

- Васютинська, Ю. О., Гузенко, С.В., Кузьмінська, Н. Л., Палагута А. М., & Ткачук, А. М. (2013). *Вища математика: Лабораторний практикум*. Київ: НУХТ.
- Рендюк, С. (2012). Вища математична освіта в сучасних умовах і інноваційні технології. *Витоки педагогічної майстерності. Серія: Педагогічні науки*, (9), 217–222. <http://dSPACE.pnpu.edu.ua/bitstream/123456789/10254/1/Rendyuk.pdf>

**Концепція Нової української школи
і доцільність змістової перебудови традиційної структури
освітньої програми Середня освіта(Фізика)
для здобувачів вищої освіти
за першим (бакалаврським) рівнем**

О. Л. Чепок, Д. М. Белітченко

*Південноукраїнський національний педагогічний університет
ім. К. Д. Ушинського, Одеса, Україна
olachepok@ukr.net, belca@te.net.ua*

Наявність нерозривного зв'язку фізики природи з геометрією природи обумовлює особливу роль геометрії як навчального предмета при підготовці майбутніх учителів фізики закладів загальної середньої освіти. Як результат проведених міркувань, запропоновано певну змістову перебудову традиційної структури освітньої програми Середня освіта (Фізика) для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем.

Ключові слова: фізика, геометрія, природа, учитель фізики закладу загальної середньої освіти, освітня програма, здобувач вищої освіти.

Відповідно до традиційної освітньої програми Середня освіта (Фізика), здобувачі вищої освіти, які намагаються в подальшому стати вчителями фізики закладів загальної середньої освіти, починають опановувати багатосеместровий курс загальної фізики вже з першого семестру першого року навчання. При цьому, починаючи вже з першої лекції, викладач даного курсу вимушений оперувати такими математичними поняттями, сутність яких для студентів-першокурсників є зрозумілою лише частково, або не є зрозумілою взагалі. Концепція Нової української школи для всіх рівнів середньої освіти передбачає, зокрема, формування у здобувачів освіти здатності до критичного та системного мислення, спроможності відчувати радість пізнання (<http://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf>). При цьому, очевидно, що подібні компетентності в першу чергу повинні бути сформовані у відповідного вчителя, принаймні, по відношенню до свого предмету. А майбутній вчитель, як і кожна людина, аж ніяк не може набути досвіду і звички відчуття радості пізнання, якщо не розуміє, про що йде мова. А достатній рівень сформованості системного мислення спроможна забезпечити лише системна організація всього процесу навчання. І лише при подібній організації процесу навчання критичне мислення здобувачів освіти може формуватися по відношенню до сутності змістового наповнення предметів навчання, а не в тому нігілістичному напрямку, першим критичним питанням якого є питання про те, навіщо той чи інший предмет навчання взагалі є потрібним.

Першу лекцію курсу загальної фізики, традиційно, присвячено висвітленню тих аспектів природи, які безпосередньо опановує фізика, як одна з основних наук про природу. І вже при цьому миттєво зрозумілим стає наявність не-

розривного зв'язку фізики природи з геометрією природи. Певна геометрична модель простору є базовою складовою кожної відповідної його фізичної моделі. Так, перші розділи курсу загальної фізики традиційно присвячені класичній нерелятивістській механіці (механіці Ньютона), яка апелює до простору, підкореному положенням евклідової геометрії. Релятивістська і квантова механіки, знайомство з якими передбачено наступним курсом теоретичної фізики, розглядаються у просторах складнішої геометричної природи (Сивухин, 1979). Усе це беззаперечно висвітлює той особливий взаємно проникливого характеру зв'язок, який є притаманним фізиці й геометрії, визначає саме геометрію, як ту математичну дисципліну, опануванню різних розділів якої при підготовці майбутніх вчителів фізики закладів загальної середньої освіти варто приділити найбільшій уваги. Автори вважають, що ситуація, коли для майбутніх вчителів фізики закладів загальної середньої освіти навчальний матеріал з геометрії відноситься лише до аналітичної геометрії і, до того ж, лише до об'єднаного курсу лінійної алгебри й аналітичної геометрії, є неприпустимою. Та підготовка майбутніх учителів фізики закладів загальної середньої освіти, яка є насущною потребою сьогодення, вимагає розділення вищевказаного курсу, створення нових, окремих курсів алгебри й геометрії, реального відпрацювання їх доцільного змісту. Щодо останнього, то мова йде саме про єдиний, інтегрований курс геометрії, а не окремі, скажімо, курси аналітичної геометрії, векторного і тензорного аналізу, диференціальної геометрії. По-перше, зазначених курсів замало. Тоді потрібним є ще й курс, у якому розглядаються певні загальні положення основ математики та певні неевклідові геометрії. По-друге, на подібну кількість повноцінних курсів, які по відношенню до традиційних, «фізичних», курсів носять допоміжний, супроводжувальний характер, ніколи не вистачить навчальних годин. Якщо мова йде про створення в майбутніх учителів фізики закладів загальної середньої освіти цілісного геометричного світогляду, то варто розглянути доцільну концепцію єдиного курсу геометрії, компактного і, одночасно, такого, що охоплює всі найбільш значущі для фізики напрямки розвитку геометричної науки. Як перше наближення до подібного курсу можна запропонувати, наприклад, таку послідовність опанування відповідного навчального матеріалу.

1. Аксиоматика шкільного курсу евклідової геометрії та її найпростіші наслідки.

2. Поняття про вектор в евклідовій геометрії. Алгебра векторів. Базис множини векторів, координати вектора в заданому базисі. Зміна базису на множині векторів. Алгебраїчні операції над векторами у координатах.

3. Поняття про систему координат на евклідовій прямій, в евклідовому просторі, зокрема, про довільну афінну систему координат та її окремий випадок — прямокутну декартову систему координат, про полярну систему координат на евклідовій площині, про циліндричні та сферичні координати в евклідовому просторі. Зміна систем координат. Аналітичний спосіб означення та задання фігур евклідової геометрії відносно вибраної системи координат. Метод координат як основний метод дослідження фігур як в аналітичній, так і в

диференціальній геометрії. Предмет аналітичної геометрії евклідового простору. Предмет диференціальної геометрії евклідового простору.

4. Геометричні образи першого і другого порядків на евклідовій площині.

5. Геометричні образи першого і другого порядків у евклідовому просторі.

6. Геометричні перетворення евклідової площини та евклідового простору.

Інверсія.

7. Поняття про вектор-функцію одного скалярного аргументу та її координатні функції. Границя, неперервність, похідна, ряд Тейлора, невизначений та визначений інтеграли для вектор-функції.

8. Поняття про криву на евклідовій площині та в евклідовому просторі. Елементи довільної теорії кривих.

9. Поняття про контраваріантний та коваріантний вектори в евклідовій геометрії, про коваріантні та контраваріантні компоненти вектора. Загальне поняття про тензор.

10. Поняття про вектор-функцію двох скалярних змінних та її координатні функції у евклідовій геометрії. Границя, неперервність, частинні похідні, ряд Тейлора.

11. Загальне поняття про криволінійну систему координат, про змінні тензори. Коваріантне диференціювання тензорів у тривимірному евклідовому просторі.

12. Поняття про поверхню у тривимірному евклідовому просторі. Елементи загальної теорії поверхонь.

13. Загальне поняття про аксіоматику та аксіоматичну теорію. Різні види аксіоматик. Співвідношення між аксіоматиками. Основні характеристики аксіоматик та аксіоматичних теорій.

14. Поняття про неевклідові геометрії. Геометрія Лобачевського та геометрія Рімана. Ріманова геометрія та геометрія Мінковського.

Автори вважають, що опанування подібного курсу геометрії повинно відбуватися протягом перших чотирьох семестрів навчання. Автори вважають також, що для майбутніх вчителів фізики закладів загальної середньої освіти систематичний курс фізики доцільніше було би почати опановувати з третього семестру навчання, а перші два семестри навчання присвятити виключно створенню відповідного математичного підґрунтя.

Список літератури

Сивухин, Д. В. (1979). *Общий курс физики* (Т. 1). Москва: Наука.

Про деякі методи обчислення інтеграла Гауса

Т. О. Шершень, Я. В. Симчук

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

yar_simchuk@ukr.net

У статті розглянуто різні способи обчислення інтеграла Гауса.

Ключові слова: інтеграл Гауса, декартова система координат, полярна система координат.

Інтегралом Гауса (також інтегралом Ойлера — Пуассона) називають інтеграл від гаусової функції (Abramowitz & Romer, 1988)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Доводити цю формулу можна різними методами.

1. Обчислення Гаусового інтеграла без полярних координат (Dunham, 1988). Позначаючи

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

маємо

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Запровадимо у внутрішньому інтегралі нову змінну:

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Тоді,

$$x = \frac{yu}{\sqrt{1-u^2}}, \quad dx = y(1-u^2)^{-3/2} du, \quad x^2 + y^2 = \frac{y^2}{1-u^2}.$$

Зауважуємо, що при $x = 0$, $u = 0$ та при $x \rightarrow \infty$, $u \rightarrow 1$.

Виконуємо заміну змінної:

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^1 e^{-\frac{y^2}{1-u^2}} y(1-u^2)^{-\frac{3}{2}} du dy.$$

Змініюємо порядок інтегрування:

$$I^2 = \int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{3}{2}} du \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{1-u^2}} y dy.$$

Виконуємо заміну змінної у внутрішньому інтегралі:

$$v = \frac{y^2}{1-u^2}, \quad dv = \frac{2y}{1-u^2} dy, \quad y = 0 \Rightarrow v = 0, y \rightarrow +\infty \Rightarrow v \rightarrow +\infty.$$

$$I^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} (e^{-v}) \Big|_0^{+\infty} du = \frac{1}{2} \arcsin u \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Отже,

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

2. Перейдемо до обчислення інтеграла Гауса за допомогою переходу до полярних координат у подвійному інтегралі.

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ x^2 + y^2 = \rho^2, \\ dx dy = \rho d\rho d\varphi \end{array} \right| =$$

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} d(-\rho^2) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot e^{-\rho^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4};$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3 (Georgakis, 1994). Розгляньмо ще один метод обчислення інтеграла Гауса, схожий на метод, який використовують для доведенні рівності

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b)$$

для гамма- та бета-функцій у спеціальному випадку $a = b = \frac{1}{2}$ (Georgakis, 1994).

Покладаючи $y = xs$, маємо $dy = xds$. Тоді

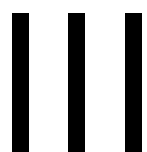
$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy = \\ &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+s^2)} x ds = \int_0^{+\infty} ds \int_0^{+\infty} e^{-(1+s^2)x^2} x dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{-2(1+s^2)} e^{-x^2(1+s^2)} \right]_0^{+\infty} ds = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{2} \arctg s \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Отже, $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Із ще одним способом обчислення Гаусового інтеграла можна ознайомитись у статті Lord (2003).

Список літератури

- Abramowitz, M., Stegun, I. A., & Romer, R. H. (1988). Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. New York: Dover.
- Dunham, W. (1988). Integrating e^{-x^2} without polar coordinates. *Mathematics Teacher*, 81(1), 34–35. <https://www.jstor.org/stable/27965672>
- Georgakis, C. (1994). A note on the Gaussian integral. *Mathematics Magazine*, 67(1), 47. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1994.11996181>
- Lord, N. (2003). An elementary single-variable proof of $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$. *The Mathematical Gazette*, 87(509), 308–311. <http://www.jstor.org/stable/3621052>



ІСТОРІЯ ТОЧНИХ НАУК

Софія Василівна Ковалевська (1850–1891)

С. Т. Горенчук¹, Л. С. Корзун²

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
gorenchuksofia@gmail.com

У роботі розглянуто життєвий шлях видатної жінки-математика Софії Ковалевської.

Ключові слова: Софія Василівна Ковалевська, жінка-математик.

Цього року світ відзначає 170-ту річницю з дня народження Софії Василівни Ковалевської (Софьи Васильевны Ковалевской) — математика й письменниці, яка працювала над теорією диференціальних рівнянь та в галузях механіки та астрономії. Вона була першою жінкою у Європі, яка отримала докторський ступінь у математиці й першою у світі жінкою, що стала професором математики (Марія Аньєзі (1718–1799) хоч і отримала це звання раніше, проте ніколи не викладала).



Софія Ковалевська (дівоче прізвище — Круковська) народилася 15 січня 1850 року в заможній родині генерал-лейтенанта Василя Корвіна-Круковського (1803–1875) і Єлизавети Шуберт (1822–1879). Софія походила з багатой родини, проте цього було недостатньо для того, щоб уважати її дитячі роки дуже щасливими. Насправді, дівчинка почувала себе досить самотньою та покинутою в порівнянні з усіма обожнюваною старшою донькою Анною (1843–1887) та молодшим братом-спадкоємцем Федором.

Більшу частину свого дитинства Софія провела в родинному маєтку Полібіно Витебської губернії. Батьки подбали про гарну початкову освіту для своїх доньок: гувернантками дівчат були носії англійської, французької, німецької мов.

До наук, особливо до математики, майбутню вчену підштовхувало все, навіть стіни в її кімнаті. Справа в тому, що під час завершення ремонтних робіт у маєтку з'ясувалося, що на дитячу кімнату нових шпалер не вистачить. Саме тому стіни були обклеєні сторінками лекцій Остроградського, які залишилися ще зі студентських років батька Софії, Василя Круковського. Сама жінка згадувала, як у дитинстві часто розглядала незрозумілі їй записи й намагалася знайти їх правильну послідовність.

За роки занять з домашнім учителем Йосифом Малевичем Софія вивчила всі предмети, які тоді викладали в чоловічих гімназіях. Варто сказати, що нахил дівчини до наук не був випадковим: її прадід Федір Іванович Шуберт (1758–1825) був відомим астрономом, а дід Федір Федорович Шуберт (1789–1865) — талановитим геодезистом і математиком. Однак, це аж ніяк не применшувало ролі її власних заслуг: у 14 років, щоб зрозуміти розділ оптики у фізичному підручнику, Ковалевська самостійно опанувала тригонометрію. Автор книги,

знайомий Ковалевських професор Микола Тиртов, був вражений потенціалом Софії і вмовив Василя Круковського відправити доньку до Санкт-Петербургу за-для її подальшого навчання.

Незважаючи на очевидний талант до математики, Софія Ковалевська не могла завершити своє навчання в Росії, оскільки тоді жінкам було заборонено від-відувати університети, а для того, щоб навчатися закордоном потрібно було мати згоду від батька або чоловіка. Оскільки перший був категорично проти подаль-шого навчання доньки, Софія вирішує укласти фіктивний шлюб з Володимиром Ковалевським (1842–1883), тоді ще молодим студентом-палеонтологом, який пі-зніше буде відомим за співпрацю з Чарльзом Дарвіном.

Отримавши атестат зрілості, але без єдиного шансу вступити до універси-тету в Росії, Софія разом з чоловіком вирушає за кордон. У 1870 році, після за-кінчення навчання у Гейдельберзі, родина Ковалевських їде до Берліну, щоб ді-вчина могла вчитися в місцевому університеті.

Коли виявилось, що в цьому навчальному закладі жінок також не прийма-ють, Ковалевська вирішила просити про приватні уроки у професора Карла Вейє-рштрасса (1815–1897). Він вирішив дати дівчині кілька найбільш складних задач з думкою, що вони змусять її саму відмовитися від своїх планів. Коли ж Кова-левська прийшла знову та ще й з готовими розв'язками, професор погодився стати її постійним вчителем.

У 1874 видатна науковець представила три доповіді — на тему диференціа-льних рівнянь (частково вона була покладена в основу теореми Коші — Ковалев-ської), динаміку кілець Сатурна й еліптичних інтегралів — в університеті Гетті-нгена, як свою докторську дисертацію. Софія Ковалевська стала першою жін-кою, яка була нагороджена докторським ступенем у європейському університеті.

Окрилена успіхом, Софія вертається до Росії, мріючи викладати в Петербу-рзькому університеті, але в рідній країні видатній жінці пропонують лише посаду вчителя жіночої гімназії. Її чоловік, Володимир, втрачає професорське звання че-рез радикальні переконання і починає займатися комерційною діяльністю. Смерть батька Ковалевської зближує подружжя і на світ з'являється донька Со-фія. Після кількох років, присвячених догляду за дитиною та літературній діяль-ності, Ковалевська знову повертається до математики і їде до Берліну, де дізна-ється про самогубство чоловіка через банкрутство.

1883 року доля посміхається Софії — вона отримує запрошення від колиш-нього студента Ваєрштрасса, Гести Міттаг-Лефлера (1846–1927), проводити лекції в університеті Стокгольма. На початку це була лише тимчасова посада, але в кі-нці п'ятирічного періоду, за високі досягнення в науці та викладацькій діяльнос-ті, Ковалевська отримує постійне місце в університеті. Це і стало початком ни-зки великих досягнень.

У 1887 році помирає сестра Софії, Анна, з якою у неї були найближчі сто-сунки. На щастя, у цей період видатна математик досягає свого найбільшого осо-бистого тріумфу — 1888 року вона подає свою працю «Обертання твердого тіла навколо нерухомої точки» на конкурс від Паризької академії наук під гаслом

«Говори, що знаєш, роби те, що повинен, і нехай буде так, як має бути» та виграв, відкривши третій класичний випадок розв’язання даної задачі, отримавши 5 тисяч франків і світову славу.

У 1889 році Софія Василівна Ковалевська отримує премію Шведської королівської академії наук разом з постійною посадою професора в Стокгольмському університеті (до цього ще жодна жінка Північної Європи не була удостоєна такої честі). Після довгих перемов і зміни у правилах, Софії було також надано звання члена-кореспондента Російської академії наук, але заборонено брати участь у її засіданнях та, тим паче, викладати в Петербурзькому університеті. Аргументом слугувало те, що у звичай наукового зібрання не входить присутність жінки.

У цей час у житті вченої з’являється новий чоловік, який, до речі, має таке ж прізвище, Максим Ковалевський (1851–1916). Відомий соціолог, чиєю найбільшою пристрастю так само була наука та якому довелося покинути Московський університет через політичні погляди, стає близьким другом Софії і навіть робить пропозицію руки й серця, але жінка відмовляється пожертвувати статусом професора заради статусу дружини. Вони багато подорожують разом і це спонукає Ковалевську знову починає писати — так з’являється її твір «Спогади дитинства».

Вертаючись з однієї з таких подорожей до Стокгольму, Софія Василівна Ковалевська застудилася і 29 січня 1891 року померла у Стокгольмі від паралічу серця, спричиненого запаленням легень, на 41 році життя.

За свою кар’єру видатна професор опублікувала десять робіт з математики та математичної фізики, а також кілька літературних творів. Багато з її наукових праць були новаторськими і стали підґрунтям для подальших відкриттів.

Софія Ковалевська є яскравим прикладом того, чого може досягти жінка за сприятливих для її розвитку обставин. Увійшовши в історію як одна з найвизначніших математиків світу, вона надихнула багатьох жінок розпочати свою наукову діяльність. На підтримку цієї ідеї був створений фонд Ковалевської — неприбуткова організація, яка надає премії, гранти і стипендії жінкам-науковцям в країнах, що розвиваються.

Список літератури

- Audin, M. (2011). *Remembering Sofya Kovalevskaya*. Strasbourg: Springer.
- Cooke, R. (1984). *The mathematics of Sonya Kovalevskaya*. New York: Springer-Verlag.
- Perl, T. (1978). Sonya Kovalevskaya. In *Math equals: Biographies of Women mathematicians and related activities* (1st ed., pp. 127–128). Addison-Wesley Publishing Co.
- Rappaport, K. D. (1981). S. Kovalevsky: A mathematical lesson. *The American Mathematical Monthly*, 88(8), 564–574. <https://doi.org/10.1080/00029890.1981.11995319>
- Smith, B. G. (Ed.). (2008). Sofya Kovalevskaya. In *The Oxford encyclopedia of women in world History* (1st ed., pp. 39–41). Oxford: Oxford University Press.
- Sofya Vasilyevna Kovalevskaya. (n. d.). <https://www.britannica.com/biography/Sofya-Vasilyevna-Kovalevskaya>

Академік Микола Миколайович Боголюбов (до 110-річчя від дня народження)

П. В. Задерей, Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова, Б. В. Калюга

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

zadereypv@ukr.net, zadereynm@gmail.com,

g.nefodova@gmail.com, b.kaliuga@gmail.com

21 серпня 2019 року виповнилося 110 років від дня народження всесвітньо відомого математика, фізика-теоретика академіка М. М. Боголюбова. Сучасна математична і фізична наука завдячує М. М. Боголюбову багатьма досягненнями та здобутками. Стаття присвячена життєвому і творчому шляху визначного вченого.

Ключові слова: нелінійний аналіз динамічних систем, математична та статистична фізика, варіаційне числення.



Микола Миколайович Боголюбов — визначний математик, фізик-теоретик, засновник наукової школи з нелінійної механіки й математичної фізики, фундатор кафедри математичного аналізу Чернівецького університету, кафедри математичної фізики Київського університету, кафедри квантової статистики Московського університету, засновник Інституту теоретичної фізики НАН України, перший директор Об'єднаного інституту ядерних досліджень в Дубні (ОІЯД).

Микола Боголюбов народився 21 серпня 1909 року в Нижньому Новгороді. Батько вченого, Микола Михайлович (1872–1934), був високоосвіченою людиною, походив із сім'ї священника, був філософом, психологом, літератором, протоієреєм, мав ступінь доктора богослов'я. Мати, Ольга Миколаївна (1881–1965) — закінчила відділення Московської консерваторії в Нижньому Новгороді. Деякий час сім'я жила в Ніжині, батько викладав у

Ніжинському історико-філологічному інституті князя Безбородька. У 1913 році родина Боголюбових переїхала до Києва, де батько займав посаду професора богослов'я університету Св. Володимира, був настоятелем університетської церкви.

У подружжя Боголюбових було троє синів: Микола (1909–1992), Олексій (1911–2004) та Михайло (1918–2010). Батько приділяв велику увагу освіті дітей, з

чотирьох років навчав синів німецької та французької мов, пізніше англійської, латини, івриту. Микола Михайлович був талановитим педагогом, сам підготував синів до вступу в Першу Олександрівську Київську гімназію, але Микола не закінчив навіть першого класу: почалася громадянська війна.

У 1918 році кафедра богослов'я в університеті була закрита, церковним діячам неможливо було знайти роботу, на зняття сану Микола Михайлович не погоджувався, і у 1920 році родина Боголюбових переїхала в село Велика Круча Полтавської губернії, де батько отримав парафію в Сотниківському приході. Враховуючи рівень знань, братів Боголюбових прийняли одразу відповідно в шостий і сьомий класи сільської семирічки, де працював чудовий педагогічний колектив. «Педагогічний колектив великокручанської семирічки склав би честь кращій із столичних шкіл. У тому, що я став ученим, велика заслуга цієї школи» — пізніше згадував Микола Боголюбов. У школі панував культ Шевченка, Микола вивчив українську мову, не один раз перечитував «Кобзар». Атестат про закінчення семирічки в селі Велика Круча був першим документом про освіту, який він отримав, наступним був диплом доктора математики.

Математикою Микола Боголюбов почав серйозно займатися саме у Великій Кручі, арифметикою, алгеброю та геометрію зі шкільними вчителями, тригонометричні формули виводив самостійно, диференціальне та інтегральне числення вивчав разом з батьком, за підручником Гренвіля.

У 1922 році сім'я повернулася до Києва. Микола Боголюбов продовжував навчання під керівництвом батька, який купував та брав в університетській бібліотеці підручники з вищої математики та фізики, зокрема фізику хлопчик вивчав за п'ятитомним підручником О. Д. Хвольсона. З 13-ти років Микола Боголюбов протягом півроку відвідував у Київському університеті наукові семінари академіка Д. О. Граве, корифея київської алгебричної школи, за порадою якого потім прийшов на семінар «Теорія інтерполяційних формул і механічних квадратур» академіка М. М. Крилова, який надалі став його науковим керівником.

Таким чином почалося навчання чотирнадцятирічного Миколи Боголюбова, а надалі і плідна спільна наукова діяльність з академіком Криловим. У 1925 році Микола Миколайович стає аспірантом академіка Крилова за рішенням Малої Президії Укрголовнауки «з огляду на феноменальні здібності», адже він не мав ні атестату середньої школи, ні диплому з вищої освіти. Родина Боголюбових з молодшими дітьми переїхала до Нижнього Новгороду, де батько отримав місце настоятеля у храмі Всемилоствитого Спаса. Микола Боголюбов жив у Києві в родині Крилових.

Свою першу наукову працю «Про принцип Релея в теорії диференціальних рівнянь математичної фізики і про одну Ейлерову методику у варіаційному численні» Микола Боголюбов написав в 1925 році разом з М. М. Криловим. В 1925 році Микола Миколайович пише роботу «Про обчислення вимушених коливань, які задовольняють деяким нелінійним диференціальним рівнянням». Цим було

започатковано початок сучасних досліджень, що привели до нового напрямку — нелінійної механіки. Київська школа нелінійної механіки відома у світі як школа Крилова — Боголюбова.

У 1928 році Микола Боголюбов успішно закінчує аспірантуру, захищає роботу «Застосування прямих методів варіаційного числення до дослідження нерегулярних випадків найпростішої задачі» та займає посаду наукового співробітника кафедри математичної фізики. У 1930 році отримує престижну премію Мерлані Болонської академії наук (Італія) за розв'язання однієї проблеми варіаційного числення. 6 квітня 1930 року на загальних зборах фізико-математичного відділення ВУАН за поданням академіків Д. О. Граве та М. М. Крилова двадцятирічному М. М. Боголюбову було присвоєно вчений ступінь доктора математики «honoris causa» (честі заради), без захисту дисертації.

У 1928 році без слідства, суду, вироку, як релігійний діяч був заарештований та відправлений у в'язницю в Нижньому Новгороді батько молодого вченого, він був ув'язнений чотири роки. У 1931 році, молодий вчений Микола Боголюбов, виявивши безмежну сміливість, добився прийому в голови ОГПУ Менжинського. Неймовірно, але батька звільнили, після звільнення він прожив трохи більше двох років.

Академік Крилов мав інженерну освіту, розв'язуючи математичну задачу, завжди цікавився можливістю її застосування в техніці та звертав на це увагу свого талановитого учня. Микола Миколайович почав працювати над проблемами теорії коливань. Нелінійна механіка, що була результатом розвитку проблем математичної фізики, отримала надзвичайно важливе значення в розвитку теорії коливань і в інших розділах техніки. Класичними стали метод усереднення та метод інтегральних многовидів, розвинуті Боголюбовим. Крім основної роботи на кафедрі математичної фізики, Микола Миколайович викладав у Київському університеті, у 1936 році за сприянням М. М. Крилова йому було присвоєно вчене звання професора. Того ж року він уперше побував у відрядженні з доповідями за кордоном (Німеччина, Франція, Бельгія), особливе був вражений Парижем, який порівнював за красою з Києвом.

У 1939 році М. М. Боголюбов був обраний член-кореспондентом АН УРСР. Студенти М. М. Боголюбова згадують, які складні були лекції професора, одного разу вони ніяк не могли зрозуміти перетворення, звернулися до нього, він пояснив перехід, списавши дві дошки проміжними обчисленнями. Стало зрозуміло, що під час лекцій М. М. Боголюбов це проробляє усно.

Боголюбов М. М. був фундатором фізико-математичного факультету Чернівецького університету, довгий час керував кафедрою математичної фізики Київського університету. Усюди йому був властивий стиль лаконізму й точності, усі питання вирішувалися швидко й оперативно, усі документи гранично лаконічні. У 1948 році М. М. Боголюбов був запрошений до Москви для роботи в Інституті хімічної фізики АН СРСР, також очолював відділ теоретичної фізики в

Математичному інституті імені В. А. Стеклова, також читав лекції з квантової статистики в Московському університеті.

Микола Миколайович переїхав до Москви, та не міг розлучитись з рідним Києвом, де в нього було дві групи учнів, одна з них займалась проблемами нелінійної механіки, серед них перший його учень Ю. О. Митропольський, а друга — питаннями теоретичної і математичної фізики, серед них О. С. Парасюк, відомий за теоремою Боголюбова — Парасюка. У 1955 була опублікована монографія М. М. Боголюбова у співавторстві з Ю. О. Митропольським «Асимптотичні методи в теорії нелінійних коливань». Учні Миколи Миколайовича відмічають його феноменальні здібності займатися одночасно декількома справами, він легко переключався з однієї наукової теми до іншої.

Напрямки наукової діяльності М. М. Боголюбова були надзвичайно різноманітними: теорія рівномірних, майже періодичних функцій, нелінійна механіка, квантова теорія поля, варіаційне числення, ядерна фізика, статистична фізика, математична фізика, динамічні системи, квантова статистика, теорія плазми. За словами вченого, єднальною ланкою в нього була математика, бо підхід у нього щодо проблем механіки, чи до проблем фізики — математичний.

У 1965 році Боголюбов створює в Києві Інститут теоретичної фізики, стає першим його директором. При цьому учений піклується як вибором місця, так і планом будівництва цілого комплексу: будівля інституту, готель, житловий комплекс, паркова зона, бібліотека, холи, окремі кабінети, вибір внутрішнього оздоблення. Паралельно до московсько-дубнівської школи розвивається київська школа теоретичної фізики. М. М. Боголюбов прагнув об'єднати обидві школи і створити на базі Інституту теоретичної фізики міжнародний центр досліджень теоретичної фізики, на що влада не дала згоди.

Академік Боголюбов мав численні нагороди та відзнаки, серед них Сталінська, Ленінська, Хейнеманівська премії, був нагороджений медалями Макса Планка, Поля Дірака, золотою медаллю ім. Ломоносова, був двічі Героєм Соціалістичної праці, заслуженим діячем науки УРСР. Ім'я вченого присвоєно Інституту теоретичних проблем мікросвіту (МГУ), Інституту теоретичної фізики НАН України, лабораторії теоретичної фізики (Дубна), засновано кілька премій ім. Боголюбова, на честь нього названа мала планета.

У 1989 році в Дубні святкували 80-річчя академіка Боголюбова. Як відмітив його учень А. О. Логунов: «Після Пуанкаре й Гільберта тільки Боголюбов поєднує в собі великого фізика й математика. Як учений він неповторний, як і неповторні обставини його життя і творчості». У тому ж 1989 році за віковим цензом М. М. Боголюбов був звільнений з посади директора Об'єднаного інституту ядерних досліджень (ОІЯД) та з посади академіка-секретаря відділення математики. Це глибоко вразило вченого, який творив усе своє свідоме життя, з дитинства, і для якого життя, праця та наука були невід'ємними.

13 лютого 1992 року М. М. Боголюбова не стало, похований учений на Новодівочому цвинтарі.

Список літератури

- Бирюков В. А. и др. (сост.). (1994). *Николай Николаевич Боголюбов. Математик, механик, физик: Сборник воспоминаний*. Дубна.
- Боголюбов, А. Н. (1996). *Н. Н. Боголюбов: Жизнь, Творчество*. Дубна: ОИЯИ.
- Владимиров, В. С. (2001). Н. Н. Боголюбов и математика. *Успехи математических наук*, 56(3), 185–190. <https://doi.org/10.4213/rm413>
- Граб, М., & Самойленко, В. (2010). Про науково-організаційну діяльність академіка ММ Боголюбова в Київському університеті. *Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Математика. Механіка*, (24), 54–59. http://www.library.univ.kiev.ua/ukr/host/10.23.10.100/db/ftp/visnyk/mehmat_24_2010.pdf
- Губерський, Л. В. (2009). М. М. Боголюбов. *Вісник НАН України*, (11), 18–23. <http://visnyk-nanu.org.ua/uk/node/2041>
- Загородній, А. Г., Локтєв, В. М., & Самойленко, А. М. (2019). Геній науки (до 110-річчя з дня народження). *Вісник НАН України*, (8), 73–82. <http://www.visnyk-nanu.org.ua/uk/node/4064>
- Патон, Б. Е. (2009, 9 сентября). Великий ученый. *Еженедельник ОИЯИ*, (37), 4–5. <http://www.info.jinr.ru/jinrmag/win/2009/37/bo37.htm>
- Сапрыкина, А. (2017). *Родители и образование детей: опыт новомученика, воспитавшего советского академика*. <https://pravoslavie.ru/106091.html>

Федір Петрович Яремчук
як педагог та вчений-методист
(до 100-річчя з дня народження)

П. В. Задерей, Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова, А. В. Ткаченко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

zadereypv@ukr.net, zadereynm@gmail.com, g.nefyodova@gmail.com,
912kiev.nt@gmail.com

Стаття присвячена висвітленню життєвого шляху та наукової, педагогічної і методичної діяльності професора Ф. П. Яремчука (29.02.1920–26.10.2001рр.).

Ключові слова: життєвий шлях, методика викладання вищої математики, педагогічна діяльність, наукова діяльність.



Федір Петрович Яремчук народився 29 лютого 1920 року в надслучанському селі Великий Молодьків (нині Ярунського району), що на Житомирщині. Сім'я була багатодітною, у родині було шестеро дітей. Батько, Петро Максимович Яремчук, користувався великою повагою в односельців, був доброзичливою, працювитою та мудрою людиною. За мужність та сміливість у Першій світовій війні він був нагороджений двома Георгіївськими хрестами. Мати, Степанида Корніївна, за спогадами дітей, була щирою, доброю та ніжною, любила співати.

Голодомор в Україні в 1932–1933 роках, спричинений репресивною політикою комуністичної влади, забрав життя від 3 до 3,5 мільйонів українців. Чорне лихо не обминуло й родину Яремчуків. Першою від голоду померла семирічна Ніна, за нею від голоду помер трирічний Миколка, не стало дядька, страшний голод косив рідних. Старша сестра Федора Петровича, Тетяна Петрівна у своїх споминах згадувала, як їли бурячиння, кору з дерев, лободу, як вимирали цілі села, як ходили моторошні чутки про людодство.

Тих, хто вижив, очікував комуністичний терор 1937 року, того часу сталінські репресії були різко посилені та доведені до максимуму своєї жорстокості. 22 листопада 1937 року пізно ввечері до хати Яремчуків увалилися холоуї з НКВС та назавжди забрали батька. Петру Максимовичу приписали шпигунську діяльність на користь Польщі. За три тижні потому, 14 грудня, винесли вирок і ще за

десять днів, 24 грудня цього ж року, його розстріляли. Місця розстрілу й заховання встановити не вдалося. Польський кордон був у 20 км від села. Тому було репресовано 41 чоловіка з 40 дворів села, кожному, не довго думаючи, інкримінували шпигунство. Лише за 30 років Петро Максимович Яремчук був реабілітований.

Сімнадцятирічний Федір Яремчук стає «сином ворога народу», його виключають зі школи. У ці страшні часи йому допомогли директор семирічки Віктор Левченко та голова сільради Петро Хрищун. Завдяки їм він таки закінчує середню школу. В інститут, звісно, не приймають. Федору Яремчуку деякий час удавалося навчатися заочно, одночасно з 1939 року дев'ятирічний юнак працює учителем математики в Гірківській сільській школі.

Далі 1941 рік, війна, мобілізація до лав Радянської Армії. Федір Петрович бере участь у визволенні Батьківщини та Європи від нацизму, вирізняючись особливою відвагою та мужністю, як армійський розвідник. Ф. П. Яремчука нагороджено за чесну й віддану військову службу багатьма бойовими нагородами, орденами, медалями, зокрема особистою подякою маршала Г. К. Жукова.

Тільки після фронту, як згадував Федір Петрович, з волі випадку, йому пощастило вступити та закінчити заочне відділення Київського педагогічного інституту. Але навчання в аспірантурі, незважаючи на дві рекомендації та клопотання професора О. М. Астряба та член-кореспондента Є. Я. Ремеза йому, як «сину ворога народу» було заборонено.

Далі Федір Петрович знову вчителює, потім викладає у Дрогобицькому обласному інституті вдосконалення вчителів, а з 1954 року — у Київському політехнічному інституті, де він проходить усі щаблі педагогічної роботи від асистента до професора, завідувача кафедри вищої математики.

У 1962 році Ф. П. Яремчук захистив кандидатську дисертацію за темою «Застосування методу послідовних конформних відображень до розв'язання задач вільної фільтрації з відкритих русел».

Педагогічна діяльність Ф. П. Яремчука протягом багатьох десятиліть була спрямована на удосконалення методики викладання вищої математики, він розробляв курси математичних дисциплін, методи аналізу навчального процесу та проведення контрольних робіт, письмових іспитів з математики у вишах та середніх школах.

У 1974 році у КПІ було поєднано основний склад викладачів кафедри математичної фізики та вищої математики і створено оновлену кафедру вищої математики. Нова кафедра вищої математики в той час нараховувала понад 70 викладачів, спочатку деякий час нею керував професор Л. Є. Дундученко.

З 1976 року кафедру вищої математики очолив професор Ф. П. Яремчук. Кафедра вищої математики була досить чисельною й у 1976–1977 навчальному році налічувала вже 106 чоловік, серед них 5 професорів, 36 доцентів, 11 старших викладачів, 44 асистента, 3 старших наукових співробітника й 7 технічних працівників. Колектив кафедри за своїм науковим і методичним потенціалом, був досить потужним. Керівництво такою кафедрою було складним, Ф. П. Яремчук мудро та

виважено його проводив. Для якісної освіти всі викладачі були поділені на декілька секцій, що були закріплені за відповідними факультетами. Керівники секцій входили до складу ради кафедри, створеної для оперативного керівництва.

Паралельно на кафедрі суттєво посилилась педагогічно-методична робота. Систематично працювали два методичних семінари — для лекторів і асистентів, була створена система обов'язкових контрольних робіт і семестрових завдань для самостійної праці студентів. Велика увага приділялась аналізу успішності студентів, була чітко налагоджена документація по атестації знань студентів. Члени кафедри вели інтенсивну наукову роботу. При кафедрі працювали семінари з теорії функції комплексної змінної, з теорії диференціальних рівнянь.

У квітні 1982 р. був виданий наказ Міністерства вищої освіти України про поділ кафедри вищої математики КПІ на три кафедри. І вже з 1982–1983 навчального року викладання математики в КПІ здійснювали три кафедри вищої математики. Кожна з них надавала математичну освіту певній групі факультетів інституту. Кафедру вищої математики № 1 очолив професор Ф. П. Яремчук, керував він нею до 1986 року.

Федір Петрович був членом Науково-методичної комісії з математики при Мінвузі України (1959–1969), заступником голови цієї комісії (1969–1988), членом Методичної ради з математики при Мінвузі СРСР (1973–1979). Він є автором понад 120 наукових та науково-методичних робіт, зокрема 17 книг, підручників, навчальних посібників. Був учасником багатьох республіканських та союзних симпозіумів, семінарів, нарад тощо. Колом його наукових інтересів були крайові задачі диференціальних рівнянь, математична теорія фільтрацій, методика викладання математики в середній та вищій школах.

Його нагороди — численні грамоти Мінвузу, Київського міського відділу народної освіти, знаки «Відмінник народної освіти УРСР», Мінвузу СРСР «За отличные успехи в работе высшей школы», подяки від ректорату КПІ. Федір Петрович був самовідданим, талановитим педагогом, його лекції та пояснення завжди були досконало продумані та виважені.

Протягом десятків років Ф. П. Яремчук читав лекції на курсах удосконалення вчителів математики, брав активну участь у міських, обласних, республіканських науково-педагогічних семінарах.

За словами професора Ніни Опанасівни Вірченко, яка протягом багатьох років викладає на кафедрі вищої математики: «Педагогічний хист Федора Петровича, невичерпна його ініціатива, рідкісна працездатність, виняткова скромність, людяність і принциповість захоплювали і студентів, і колег по роботі. Понад 60 років свого життя Федір Петрович віддав педагогічній праці. Він не міг жити без праці, без математики! Його життя — це воістину блискучий приклад самовідданого служіння справі освіти».

Список літератури

- Вірченко, Н. (2011). *Зернини життя мого... (Спомини)*. Київ: Задруга.
- Добровольський, В. О. (1971). Математика в Київському політехнічному інституті у 1918–1968 рр. *Нариси з історії природознавства і техніки*, (15), 3–8.
- Добровольський, В. О. (1998). Кафедра математичної фізики (із спогадів математика). У *Спогади. Профспілковий комітет співробітників НТУУ «КПІ»*. Київ: НТУУ «КПІ», 90–98.
- Добровольський, В. О. (1998). Математика в КПІ за перші 50 років його існування. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (2), 128–133.
- Яремчук Федір Петрович. Пам'яті вчителя. До 90-річчя від дня народження | КПІ ім. Ігоря Сікорського. (2010). <https://kpi.ua/yaremchuk-photo>

Мишель Ролль и метод каскадов

Т. В. Маловичко

КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

tatianamtv@rambler.ru

Рассмотрены биография Мишеля Ролля и его метод каскадов для решения алгебраических уравнений произвольной степени.

Ключевые слова: Мишель Ролль, метод каскадов, теорема Ролля.

Мишель Ролль родился 21 апреля 1652 в маленьком городке Амбер провинции Овернь во Франции в семье сапожника. Он получил только начальное образование, но активно занимался самообразованием. Ролль работал переводчиком у нотариуса, а затем помощником нескольких адвокатов в округе его родного города Амбера. В 1675 году он отправился в Париж, где работал писцом и экспертом по арифметике. Вскоре он обзавёлся женой и детьми, и его доходов стало не хватать для обеспечения растущей семьи (Синкевич, 2015).



Несмотря на материальные трудности, Ролль самостоятельно изучал высшую математику и в 1682 году решил задачу Жака Озанама: «Найти такие четыре числа, что разность между двумя любыми из них была бы полным квадратом и, кроме того, попарные суммы первых трех чисел тоже были бы полными квадратами». Сам Озанам полагал, что каждое из чисел состоит, по крайней мере, из 50 знаков, но Ролль нашел такие числа, каждое из которых имело не более 7 знаков. Его решение было опубликовано 31 августа 1682 года в журнале «Journal des sçavans» в короткой заметке, занимающей чуть более страницы и содержащей только полученные результаты без доказательств.

Ролль предлагает в качестве указанных четырёх чисел значения следующих многочленов:

$$\begin{aligned} & y^{20} + 21y^{16}z^4 - 6y^{12}z^8 - 6y^8z^{12} + 21y^4z^{16} + z^{20}, \\ & 10y^2z^{18} - 24y^6z^{14} + 60y^{10}z^{10} - 24y^{14}z^6 + 10y^{18}z^2, \\ & 6y^2z^{18} + 24y^6z^{14} - 92y^{10}z^{10} + 24y^{14}z^6 + 6y^{18}z^2, \\ & y^{20} + 16y^2z^{18} + 21y^{16}z^4 - 6z^8y^{12} - 32y^{10}z^{10} - 6y^8z^{12} + 21yz^{16} + 16y^{18}z^2 + z^{20}. \end{aligned}$$

При $z = 2$ и $y = 1$ получаются числа 2399057, 2288168, 1873432, 6560657. Также он упоминает, что при умножении каждого из полученных чисел на любой полный квадрат получается четвёрка чисел, которые также удовлетворяют условию задачи (Rolle, 1682).

Решение этой задачи принесло ему признание среди математиков. В частности, ему была предоставлена пенсия, что избавило его семью от материальных затруднений. Государственный секретарь по военным делам (военный ми-

нистр Людовика XIV) Франсуа-Мишель Ле Телье, граф де Тоннер, маркиз де Лувуа пригласил Ролля давать уроки своему четвёртому сыну Камиллю Ле Телье де Лувуа (11 апреля 1675 — 5 ноября 1718), который впоследствии стал аббатом, в 25 лет получил докторскую степень в Сорбонне, а затем был членом Академии наук (<http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Rolle.html>). Кроме того, де Лувуа предложил Роллю административный пост в военном министерстве. Однако эта работа Роллю не понравилась, и он вскоре уволился. При активной поддержке всё того же де Лувуа в 1685 году Мишель Ролль стал членом Королевской академии наук как ученик астронома (*élève astronome*), а с 1699 года — ее пенсионером (как геометр, т. е. математик). В знак признательности Ролль посвящал де Лувуа свои работы.

В 1690 году Ролль опубликовал «*Traite d'algebre, ou Principes generaux pour resoudre les questions de mathematique*» («Алгебраический трактат»). Хотя в самом начале книги речь шла об обозначении неизвестных буквами, арифметических действиях с дробями и числами разных знаков, посвящена она решению диофантовых и алгебраических уравнений произвольных степеней, причём в изложении содержалось много новых идей. Как один из методов был дан метод каскадов (Rolle, 1690, с. 124–152), в основе которого лежит идея о том, что корни исходного уравнения разделены корнями вспомогательного уравнения, полученного, по сути, дифференцированием обоих его частей. Корни вспомогательного уравнения также можно отделить с помощью следующего вспомогательного, и так далее. Образуя каскады, мы нисходим до линейного уравнения, решив которое, совершаем восхождение к исходному. В данном трактате Ролль не приводит никаких доказательств, а обоснование своего метода каскадов он опубликовал годом позже (Rolle, 1691).

Прежде, чем применять метод каскадов, уравнение, все корни которого действительны, упрощается так, чтобы все его корни были положительны. Для этого выбираем среди отрицательных коэффициентов тот, что стоит при наибольшей степени неизвестного, делим на старший коэффициент, результат округляем вверх и прибавляем к единице. Если из полученного числа вычесть новое неизвестное, то мы и получим подстановку, при которой в новом уравнении знаки коэффициентов будут чередоваться, в силу чего оно не будет иметь отрицательных корней.

Приведём применение метода каскадов, данное самим Роллем для уравнения четвёртой степени (Rolle, 1690, с. 124–126)

$$v^4 - 24v^3 + 198v^2 - 648v + 473 = 0.$$

Для этого определяются гипотезы — числа, разбивающие числовую прямую на промежутки, в которых содержатся корни уравнения. Число, превышающее все корни уравнения, называется большой гипотезой (*Grande Hypothèse*). Число, которое меньше всех корней, называется малой гипотезой (*Petite Hypothèse*). Большая и малая гипотезы называются крайними гипотезами (*Hypothèse extrême*), а все прочие называются средними гипотезами (*Hypothèses moyennes*).

Большая гипотеза вычисляется как

$$\left[\frac{a}{c} \right] + 1,$$

где a — это модуль наибольшего отрицательного коэффициента, а c — старший коэффициент. В данном случае это $\frac{648}{1} + 1 = 649$. В роли малой гипотезы выбирается 0, так как все корни положительны.

Для нахождения средних гипотез строятся вспомогательные уравнения. Каждое слагаемое в левой части умножается на степень неизвестного v в нём, в затем полученное выражение делится на v . Допускается также сокращение коэффициентов на общий множитель. Полученные уравнения называются каскадами. Они нумеруются согласно своей степени. По сути, от многочлена в левой части берётся производная и приравнивается к нулю, однако Ролль не использует понятия производной.

Таким образом, получаем:

первый каскад $2v - 12 = 0$,

второй каскад $6v^2 - 72v + 198 = 0$,

третий каскад $4v^3 - 72v^2 + 396v - 648 = 0$,

четвёртый каскад (исходное уравнение)

$$v^4 - 24v^3 + 198v^2 - 648v + 473 = 0.$$

Корни каждого каскада разделены корнями предыдущего.

Для первого каскада корень 6 находится непосредственно. Для второго каскада большая гипотеза определяется как

$$\frac{72}{6} + 1 = 13,$$

а корни лежат в $(0;6)$ и $(6;13)$, причём в каждом интервале лежит только один корень. Далее в роли гипотезы выбирается какое-либо целое число из него (не обязательно середина) и сравниваются знаки, которые многочлен в левой части принимает в этой гипотезе и на концах отрезка. В роли концов нового отрезка выбираем те точки, где многочлен принимает значения разных знаков. Далее процесс повторяется, пока либо не будет найден корень (многочлен в одной из указанных точек обратится в нуль), либо гипотезы будут различаться на единицу. В последнем случае делается вывод, что корень не является целым. В этом случае корень можно искать приближённо с произвольной точностью.

Кроме этого метода решения алгебраических уравнений Ролль предлагает ещё четыре других, а также методы решения неопределённых уравнений и способ нахождения общего делителя многочленов (Синкевич, 2014).

Мишель Ролль прославился благодаря своей теореме, опубликованной в «*Démonstration d'une Méthode pour resoudre les Egalitez de tous les degrez*» в 1691 году, работе, написанной для обоснования некоторых методов (в частности, ме-

тогда каскадов). Теоремой Ролля её называли М. Дробич в 1834 и Джусто Беллавитис в 1846 году (Cajori, 1919).

Этот результат эквивалентен следующему.

Если $g(x)$ — многочлен, $g'(a) = g'(b) = 0$, а также не существует такого числа c из интервала $(a;b)$, что $g'(c) = 0$, то $g(x)$ имеет не более одного действительного нуля в $(a;b)$.

Теперь теоремой Ролля называют следующее обобщение этого результата, которое и входит во все современные учебники по математическому анализу.

Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, а также $f(a) = f(b)$, то существует такое число c в интервале $(a;b)$, что $f'(c) = 0$.

Исходя из сказанного, можно было бы предположить, что Ролль стоял у истоков дифференциального исчисления. Это было бы серьезной ошибкой, потому что Ролль описал дифференциальное исчисление как набор гениальных ошибок и полагал, что его методы могут привести к ошибкам.

Основные позиции Ролля в споре были следующими: дифференциальное исчисление не является строгим, оно приводит к ошибкам и не привносит ничего нового. Дебаты по этому поводу начались в июле 1700 года. Главным оппонентом Ролля в начале спора был Вариньон (1654–1722), который занимался приложениями дифференциального исчисления к механике.

В конце 1701 г. аббат Биньон, президент Королевской академии наук, чтобы прекратить этот спор назначил комиссию по этому вопросу. И хотя комиссия была благосклонна к позиции Ролля, заключения она так и не дала.

После выхода 3 апреля 1702 года в журнале «*Journal des Sçavans*» новой статьи Ролля, его оппонентом в споре стал Жозеф Сорен (1659–1737).

В конце 1705 года аббат Биньон назначил новую комиссию, в состав которой вошёл сам, и которая потребовала прекратить спор (Mancosu, 1989).

В возрасте пятидесяти шести лет в 1708 году Ролль перенес инсульт. Он так никогда полностью и не оправился от него. Хотя он практически полностью восстановил свое здоровье, его умственные способности заметно ухудшились, не дав ему больше ничего привнести в математику. Одиннадцать лет спустя Ролль перенес еще один инсульт, оказавшийся смертельным. Умер Мишель Ролль 8 ноября 1719 года в Париже.

Список литературы

- Cajori, F. (1919). *The history of mathematics* (2nd ed.). New York: Macmilan company.
- Mancosu, P. (1989). The metaphysics of the calculus: A foundational debate in the Paris Academy of Sciences, 1700–1706. *Historia mathematica*, 16(3), 224–248. [https://doi.org/10.1016/0315-0860\(89\)90019-0](https://doi.org/10.1016/0315-0860(89)90019-0)
- Rolle, M. (1682). Problème résolu par le Sieur Rolle. *Journal des Sçavans*, 284–286.
- Rolle, M. (1690). *Traité d'algèbre, ou principes généraux pour résoudre les questions de mathématique*. Paris: Estienne Michallet. <https://www.e-rara.ch/zut/wihibe/content/titleinfo/5380533>
- Rolle, M. (1691). *Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés*. Paris: Jean Cusson.

- Синкевич, Г. И. (2014). Отделение корней алгебраического уравнения в XVII и XVIII веке. Метод каскадов Мишеля Ролля и метод многоугольника Исаака Ньютона. *Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ*, (20), 22–38.
- Синкевич, Г. И. (2015). От метода каскадов к изучению свойств непрерывных функций: историческая хроника. *Вопросы истории естествознания и техники*, 36(4), 642–664.

Семья Дж. Г. Стокса

Т. В. Маловичко

КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

tatianamtv@rambler.ru

Рассмотрены биография Джорджа Габриеля Стокса и его генеалогическое древо.

Ключевые слова: Джордж Габриель Стокс, генеалогическое древо.

Сэр Джордж Габриель Стокс (Sir George Gabriel Stokes; 13 августа 1819 — 1 февраля 1903) — выдающийся физик и математик. Он внёс значительный вклад в механику, гидродинамику, теорию упругости, теорию колебаний, оптику и математическую физику.

Стокс исследовал волновое движение в воде, создал современную теорию вязкой жидкости, установил зависимость интенсивности звука от среды его распространения, увязал уравнения гидродинамики с уравнениями теории упругости и с уравнениями распространения света в упругой среде. В теории колебаний упругих тел он свёл задачу нахождения смещений к более узкой задаче нахождения смещений, зависящих лишь от больших скоростей. Также он нашёл выражение для смещения системы под действием возмущающей силы в некоторый момент времени. Стокс обратил внимание на условно сходящиеся ряды, одновременно с Зейделем ввёл в 1848 г. понятие равномерной сходимости последовательности и ряда. Также он занимался векторным анализом (Боголюбов, 1983).



В 1845 г. Стокс вывел дифференциальные уравнения, которые описывают течение вязких (в общем случае сжимаемых) жидкостей. В 1821 г. такие же уравнения для несжимаемой жидкости получил Навье. Подобные результаты до 1845 г. получали также Коши, Пуассон и Сен-Венан. Однако вариант Стокса оказался более удачным, формулировка наиболее исчерпывающей, и в истории утвердилось название «уравнения Навье — Стокса» (Спектор, 2018).

Хотя для современного математика имя Стокса ассоциируется, в первую очередь, с теоремой Стокса о связи ротора векторного поля с циркуляцией, он не является её автором. Впервые формулировка этой теоремы появилась в виде приписки к письму лорда Кельвина к Стоксу от 2 июля 1850 г. Опубликована она была в качестве восьмого вопроса к экзаменам на премию Смита в 1854 г. Этот конкурсный экзамен, которому ежегодно подвергались лучшие студенты-математики Кембриджского университета, с 1849 по 1882 г. проводился Сток-

сом. Поэтому ко времени его смерти результат был повсеместно известен как теорема Стокса (Тимошенко, 1957).

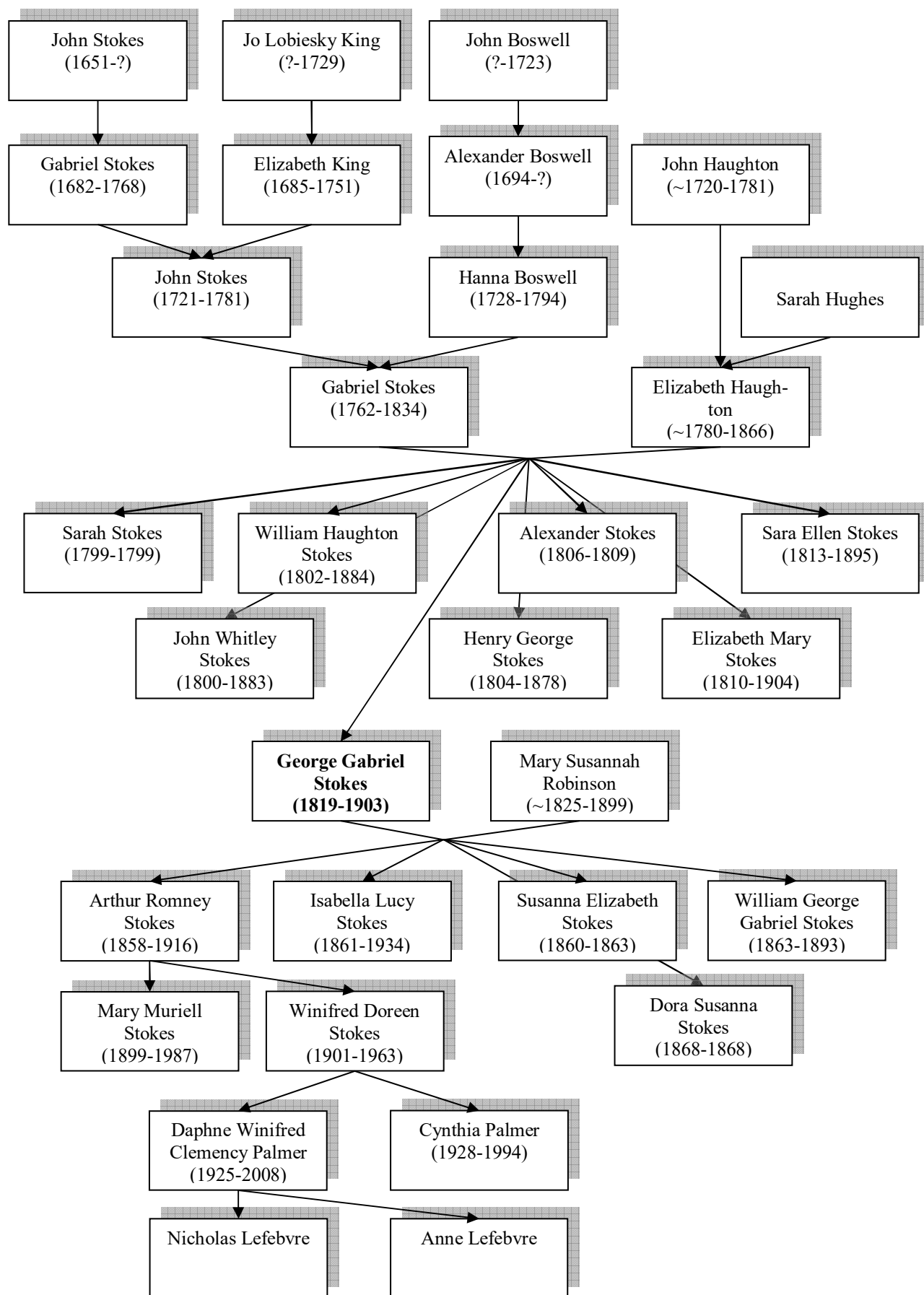
Джордж Габриель Стокс родился 13 августа 1819 в деревне Скрин в Ирландии. В возрасте 13 лет он пошёл в приходскую школу Уолла в Дублине, в 1835 г. поступил в Бристольский колледж, где изучал математику под руководством Фрэнсиса Ньюмена, и сдал выпускной экзамен в 1837 г. с наградой «за выдающиеся способности в математике». В том же году он поступил в колледж Пемброка в Кембридже. В 1841 г. он стал лауреатом премии Смита по математике. Получив степень, Стокс остался в колледже, работал над диссертацией и занимался с частными учениками. В 1849 г. он был избран профессором математики. С 1849 по 1903 годы Стокс переизбирался почётным Лукасовским профессором в Кембриджском университете. В 1854 г. Стокс стал секретарём Королевского общества. С 1885 по 1890 г. он был президентом Королевского общества. В 1889 году получил дворянский титул баронета. Умер Джордж Габриель Стокс 1 февраля 1903 (McCartney et al., 2019).

В честь него названы единица измерения вязкости в системе СГС, кратер на Луне и кратер на Марсе, минерал стокезит.

Родителями Стокса были Габриель Стокс (1762–1835) и Элизабет Хотон (1781–1866). Брак состоялся 17 февраля 1798 года. Габриель Стокс был сначала куратором церкви Святой Анны в Дублине, потом викарием Карналуэя (в 1806 году) и Ардфиннана, прежде чем стать ректором Скрина и генеральным викарием Киллалы и Ахонри.

Семья была очень религиозной. Джордж Габриэль Стокс был самым младшим из детей, а все три старших брата стали священниками.

Со своей будущей женой Мэри Сюзанной, дочерью доктора Томаса Ромни Робинсона, астронома, физика, директора Арманской обсерватории, Стокс впервые встретился на собрании Британской ассоциации. Стокс был в восторге от неё и надеялся встретиться снова, но неправильно запомнил её имя. Второй раз судьба свела их в замке Бирр, где Стокс и Робинсон осматривали большой телескоп. Регулярные визиты Стокса в приход его брата в Онаклой, всего в 15 милях от Армы, позволили развить отношения. О своей помолвке Стокс пишет в письме своему другу Томпсону в сентябре 1856 года, добавив, что они планировали пожениться в июле 1857 года. В то время от стипендиатов Кембриджских колледжей требовалось не вступать в брак, поэтому Стокс вынужден был отказаться от стипендии, возобновив её в 1862 году, когда это правило было изменено. Он написал много писем своей невесте (одно из них занимало 55 страниц), демонстрируя сочетание привязанности, любви к науке и даже сомнения в его приспособленности для семейной жизни. Так в другом письме, он рассказывал, что до 3 часов ночи бился над математической задачей и выражает опасения, что она не допустит этого после свадьбы. Жила семья в «Ленсфилде» — доме на Ленсфилд-роуд, место которого сейчас занимает Институт полярных исследований имени Скотта.



У Джорджа Габриеля Стокса и Мэри Сюзанны было пятеро детей: Артур Ромни (1858–1916), Сюзанна Элизабет (1859–1863), Изабелла Люси (1861–1934), Уильям Джордж Габриель (1863–1893), Дора Сюзанна (1868–1868).

Их первенец Артур Ромни (Arthur Romney Stokes) получил превосходное образование. Он учился в Чартерхаусе (одной из девяти старейших престижных мужских привилегированных средних школ), Королевском колледже, Кембридже. Сначала он преподавал в Херефордской школе. В сентябре 1889 года он стал директором четвёртой формы (десятый год обучения) школы Шрусбери и оставался на этом посту более двадцати лет. Он активно участвовал во всех школьных соревнованиях: гребля, футбол, «пятёрки» и в особенности стрельба. Хотя позднее из-за болезни ему пришлось отказаться от этого. Много путешествовал. В 1889 году он женился на своей родственнице Мэри Уинифред Гарбетт. Так как у них были только дочери, то после его смерти в 1916 году титул баронета, который Артур унаследовал в 1903 году после смерти отца, был утрачен. Его семья (жена и две дочери) переехали в Южную Африку.

Сюзанна Элизабет (Susanna Elizabeth) (15 декабря 1859 — 13 декабря 1863) умерла от скарлатины, которой также заразился и её отец.

Изабелла Люси (Isabella Lucy) (21 сентября 1861 — 18 июля 1934) вышла замуж за доктора Лоренса Хамфри (1857–1920), сына лондонского барристера (адвоката высшего ранга). Он изучал медицину в Кембридже, а затем работал врачом в Лондоне. Он также занимал должности в госпитале св. Варфоломея, Лондонской больнице по лечению органов грудной клетки и в клинике Адденбрук, преподавал медицину в Кембридже, а во время войны был подполковником в Королевском корпусе армейских медиков. Детей у них не было. Изабелла не только записывала собственные воспоминания об отце и отбирала его письма для изучения и публикаций, но и собирала материалы о нём как внутри семьи, так и среди друзей.

Уильям Джордж Габриель (William George Gabriel Stokes) (9 февраля 1863 — 26 августа 1893) поступил в колледж Пембрук в 1881 году, стал членом Королевского колледжа хирургов и Королевского колледжа врачей в 1889 году, получил степень бакалавра медицины и бакалавра хирургии в 1890 году, а затем степень магистра в 1892 году. С 1891 года Уильям жил и работал в лондонской больнице св. Томаса в качестве хирурга-врача. Жены и детей у него не было. Уильям покончил с собой с помощью передозировки морфия в Каундоне, графство Дарем. Его предсмертная записка гласила:

«Моя память идет быстро; мои нервы ушли; я чувствую, что схожу с ума. Я не могу спать; я собираюсь уснуть сегодня вечером.

Да простят меня Бог и моя семья.

У. Дж. Г. Стокс»

При расследовании суд присяжных вынес вердикт о том, что покойный совершил самоубийство путем отравления морфием во время временного помрачения рассудка (https://www.findagrave.com/memorial/182362072/william-george_gabriel-stokes).

Дора Сюзанна умерла во младенчестве.

Список литературы

- McCartney, M., Whitaker, A., & Wood, A. (2019). *George Gabriel Stokes: Life, science and faith*. Oxford University Press.
- Боголюбов, А. Н. (1983). *Математики. Механики: Биографический справочник*. Киев: Наукова думка.
- Спектор, А. (2018). *Физика*. Москва: Издательство АСТ.
- Спивак, М. (1968) *Математический анализ на многообразиях*. Москва: Мир.
- Тимошенко, С. П. (1957). Джордж Габриэль Стокс. В *История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений* (с. 274–278). Москва: ГИТТЛ.

Михайло Пилипович Кравчук як активний популяризатор науки

М. О. Сташенко, Т. В. Трачук

*Волинський інститут післядипломної педагогічної освіти, Луцьк, Україна
smo05@ukr.net*

Включившись у процес українізації, Михайло Кравчук популяризував серед української інтелігенції досягнення науки, фізики й хімії, які викликали найбільший інтерес у суспільства. З якою майстерністю він це робив продемонстровано в цій статті.

Ключові слова: Михайло Кравчук, популяризація наукових досягнень.

Науковою новинкою, якій у 20-х роках засоби масової інформації давали найбільше місця на своїх сторінках, була теорія відносності. Любителі створювати дешеві сенсації друкували матеріали на зразок того, що «наука відкрила», що простір, який усі сприймають за нескінченний, є викривлений і, можливо, скінченний, що час у різних частинах Космосу плине по-різному і батько, подорожуючи до далекої галактики, може вернутися звідти молодшим за свого внука, який лишився на Землі, і тому подібне. Читачі виховані на повазі до науки, письменники й люди культури, нефахівці в галузі фізики і математики, не знали, як сприймати такі публікації. Коли вони просили пояснити їм, як таке може бути, а у відповідь чули, що для цього вони недосить розвинуті інтелектуально й тому нова наука їхньому розуму недоступна, залишалось вірити, посиляючись на авторитет науки. Почалися всілякі спекуляції на тему теорії відносності. На неї, як на останнє слово науки, стали посилятися там де треба, і там, де не треба. Зрозуміло, що серйозний журнал «Червоний шлях» хотів прояснити це питання. Мабуть серед фізиків-теоретиків не знайшлося того, хто б зміг популярно, не вдаючись до складних математичних побудов, пояснити не фахівцям усі тонкощі нової теорії.

Довелося братися за діло математикові Кравчуку, хоч час — кінець 1923 — початок 1924 р — був у нього напруженим: він готувався до захисту докторської дисертації. Написати статтю було нелегкою справою, щоб пояснити суть нової фізичної теорії довелося прослідкувати шлях розвитку цієї науки починаючи від Галілея і Ньютона до Айнштейна. Стаття Кравчука «Простір, час, матерія (до теорії релятивності)» вийшла друком у журналі «Червоний шлях» (№ 4–5 за 1924 р.) і займає в ньому 19 сторінок. Вона розрахована на те, що читатиме її людина, яка не сприймає написане, як догму, а обдумує та аналізує слова автора, одним словом, на людину-інтелектуала, але нефахівця у галузі фізики. Уже перше речення статті пояснює читачеві, що: «Основною тенденцією фізики, з часів Гюйгенса, є виявлення єдності різноманітних явищ природи або в кожному разі конструкція картини фізичного світу з можливо меншого числа первісних реальностей». Такими «конструкціями картини фізичного світу» є класична механіка Ньютона і релятивістська механіка Айнштейна, яку ще називають те-

орією відносності. І далі Кравчук з'ясовує, які ж «первісні реальності» покладено в основу першої і другої.

Про механіку Ньютона автор пише: «Ньютонова система механіки, отже й збудований на ній фізичний світогляд, знає три основні самотійні абсолютні реальності: простір, час та матерію. Згідно з нею всі факти матеріального світу мають бути цілком певно орієнтовані в безкрайній одноманітній порожняві — просторі, що скрізь має незмінні геометричні властивості; на природу простору ні потік часу, ані матерія не впливає ніяк. Рівно ж час тече цілком одноманітно й також незалежно ні від фізичних явищ, що ними його практично зміряємо (як, напр., обертання землі навколо вісі, хитання маятника), ні від самого абсолютного простору. Абсолютний простір, як і абсолютний час у цім уявленні ніяк би не змінилися, коли б матеріальний світ зник без сліду; що ж до матерії, то ми її, навпаки, пізнаємо й уявляємо лише у формах просторового та часового протягу. Інакше кажучи, закони геометрії та кінематики існують незалежно від матеріальних феноменів, панують над ними, затискають їх у свої скрізь і завжди незмінні форми. Проте матерія є хоч і не обов'язковий логічно, але фактично невідмінний атрибут цього порожнього просторовочасового світу; вона вічна, ніякі фізичні або хімічні процеси не в силі знищити або створити з нічого найменшу її частинку. Звичайний стан матеріального тіла є стан руху в абсолютнім просторі; причин руху тіла, званих силами, шукаємо в інших тілах... Проте не всякий рух вважається результатом дії сили. Ще Галілей, розбиваючи тисячолітню Аристотелівську традицію, що не знала руху без сили, висловив таке твердження: рухоме тіло, з якогось моменту назавжди звільнене від дії сил, не спиниться, а, навпаки, — заховає навіки той напрям і ту швидкість руху, які мало в момент звільнення від сил. Цей принцип, вислід тонкої й глибокої абстракції зі спостережень та спроб, став, так званим, першим законом Ньютової механіки — законом інерції матеріальних тіл: Усяке тіло доти заховає стан непорушності або прямолінійного рівномірного руху, аж поки якісь сили не змусять його змінити цей стан... В законі інерції — корінь ширшого твердження класичної механіки, так званого, принципу релятивності: Немає механічного способу виявити прямолінійний рівномірний рух тіла спостерігачеві, зв'язаному з цим тілом... Можна сказати, що замість одного абсолютно непорушного простору, ми маємо безліч інерційних рівноправних просторів, кожний з яких сидить на плечах якогось інерційного тіла, отже не може бути самотійністю, абсолютністю, першістю серед інших. Таким чином, класична механіка, визнаючи абсолютний простір за реальність, не має змоги визначити його цілком, а визначає його лише з точністю до прямолінійного рівномірного руху. Визнавши принцип інерції, не було б взагалі ніякої рації утримувати в системі механіки аж до недавніх часів поняття привілейованого абсолютного простору, коли б не дуже наочна і звичайна реальність — існування, так званих, сил інерції та, зокрема, сил відцентрових». Проте, як показує Кравчук, вони також є наслідком закону інерції, з їх наявністю також неможливо логічно вивести існування абсолютного простору. І лише авторитет Ньютона та безліч дослідних, особливо астрономічних, даних,

які підтверджували результати класичної механіки, були причиною того, що протягом двохсот років відцентрові сили сприймалися за доказ абсолютного простору. Адже без нього валилася уся струнка будова класичної механіки.

Та вчені більше довіряють логіці, ніж авторитетам, і Е. Мах був одним з перших, хто висловив думку, що причиною відцентрових сил, можливо, є інші маси у Всесвіті, рух тіла щодо цих мас. Експериментального доводу цього твердження він не мав, воно було скоріше філософською гіпотезою, правдоподібною і, до певної міри, логічно оправданою. «Але аргументів, що задовольняють філософа, часом буває замало для фізика, — пише Кравчук. Новий принцип, не маючи експериментального підтвердження, лише одним способом може здобути право на існування, показавши, що його логічний пуризм лишає досить елементів для збудування картини матеріального світу, не менш правдивої та детальної, ніж Ньютонова». Таку картину нового фізичного світогляду вдалося побудувати тільки після того, коли створена Максвелом теорія електромагнітних явищ дала необхідні для цього дані. З теорії Максвелла випливало існування електромагнітних хвиль, які поширюються у просторі зі швидкістю світла $c = 300000 \text{ км/сек}$. Незабаром Герц підтвердив їх існування експериментально. Більше того, було розгадано природу світла, показано, що воно також є такою хвилею. Механізм виникнення й поширення електромагнітних хвиль пояснювали наявністю гіпотетичної надзвичайно тонкої матерії — ефіру, яка заповнює весь простір і в якому ці хвилі поширюються. Ефір настільки тонкий, що на нього не діють сили тяжіння і всі тіла проходять через нього, не зустрічаючи ніякого опору. Інакше кажучи, Ньютонів непорушний абсолютний простір замінив непорушний ефір. І все було б добре, якби не одна «дрібничка». Як відомо, Земля рухається навколо Сонця зі швидкістю приблизно 30 км/сек . Отже електромагнітна хвиля (промінь світла) випущений у напрямі руху Землі, згідно з законом додавання швидкостей, повинна мати швидкість $c + 30 \text{ км/сек}$, а в оберненому напрямі — швидкість $c - 30 \text{ км/сек}$. Усупереч цьому, Майкельсон експериментально довів, що швидкість в обох напрямках однакова і дорівнює c . Залишаючись на позиціях непорушного ефіру і абсолютного часу, Лоренц вираховував, що для того щоб витлумачити парадоксальний Майкельсонів результат треба прийняти, що кожна рухома (рівномірно і прямолінійно) фізична система скорочує свої розміри в напрямі руху і спостерігач, зв'язаний з цією системою, ніякими фізичними дослідженнями не може виявити цього скорочення. Звідси неухильно випливає, що кожна рухома система має свій локальний час, і абсолютний час, як і абсолютний простір, робиться фікцією. Уся принципова відміна, за словами Кравчука, Лоренцевої системи від Ньютонової полягає в доданні до класичного закону інерції принципу незалежності швидкості поширення електромагнітних хвиль від швидкості інерційної системи до якої належить спостерігач. Таким чином принцип релятивності класичної механіки замінюється на такий: Ніякими фізичними, механічними чи електродинамічними способами не можна виявити абсолютного прямолінійного рівномірного руху. Обидві фікції абсолютного простору й абсолютного часу можна відкинути і збудувати нову реформовану

систему механіки, яка не гірше, ніж Ньютонова, а у багатьох випадках краще узгоджується з фактами експериментальної науки. Та, наголошує Кравчук, неправильно було б думати, що наука розв'язала парадокс Майкельсонового експерименту, насправді вона лише зробила з нього математичні та логічні висновки, які нефахівцям здаються ще більш парадоксальними. Останні кроки в логічному завершенні Лоренцевої теорії зробили Айнштайн і Мінковський. Радикалізм першого довів до кінця Лоренцеву інтерпретацію Майкельсонового досліду, відмовився від абсолютного простору й абсолютного часу і показав, що всяка інерційна система зі своїм місцевим часом може успішно їх замінити. Другий, шляхом математичних викладок, об'єднав простір і час у чотирирівимірний «всесвіт» що поглинув у собі одним уся безліч рівноправних інерційних просторів з їх часами. З того власне часу (1905–1908) говориться про Айнштейнову спеціальну теорію релятивності (відносності) та про її геометричну інтерпретацію Мінковським. (Тут доречно зауважити, що за 30 років до Айнштейна і Мінковського український учений Микола Гулак у своїй праці «Опыт геометрии о четырех измерениях. Тифлис, 1876», присвяченій пам'яті Лобачевського, висловив ідею про можливість побудови механіки в неєвклідових просторах. Айнштейнова теорія відносності насправді є механікою у просторі Лобачевського).

У статті, присвяченій теорії відносності, Кравчук, переважно обговорював проблеми простору й часу. Третя основна складова класичної механіки, — матерія, — у ній зачіпалася лише побіжно, коли йшлося про масу, як міру інерції, і про рівноправність маси й енергії. Тому відразу після опублікування статті, яка пояснювала, що таке теорія відносності, Кравчук узявся за написання другої статті, цілком присвяченої проблематиці атомної будови матерії. У ній треба було показати, що процеси на атомному рівні не можна пояснити силами Ньютонової гравітації, а лише законами Максвеллової електродинаміки, і, отже, нова механіка — теорія відносності — є не якоюсь умоглядною видумкою, а закономірним кроком на шляху розкриття тайн природи. Треба думати, що стаття була замовлена редакцією «Червоного шляху». Вона була надрукована в цьому журналі (№ 6–7 за 1925 р.), має назву «Сучасний атомізм» і, за обсягом, навіть більша за першу статтю Кравчука — займає 30 журнальних сторінок. Сучасному читачеві вона може здаватися менш цікавою, ніж стаття про теорію відносності, знання про будову атома були тоді ще досить скупими. Атомна фізика — наука експериментальна, а основними приладами експериментів були лише камера Вільсона і Круксові та Рентгенівські трубки.

Стаття Кравчука «Сучасний атомізм» починається фразою: «Розвиток хімії в кінці 18-го та на початку 19-го століття перетворив давню думку про атомну будову матерії з необґрунтованої експериментом фантазії в надзвичайно плідну наукову гіпотезу». Нагадаємо читачеві, що цю авторами цієї «необґрунтованої експериментом фантазії» були давньогрецькі філософи Левкіп і його учень Демокріт (5 ст. до н.е.), а першу спробу запровадити в науку атоми зробив Джон Дальтон, вважаючи, що найдрібніші часточки складних речовин, — молеку-

ли, — є комбінаціями ще менших уже неподільних частинок атомів. Але вже тоді було висловлено думку (Проут, 1815), що ці атоми є не первинними складниками матерії, а самі складаються ще з менших частинок. Та експериментального підтвердження вона не мала (нагадаємо, що розщепити атом удалося тільки в 1932 р.).

Спостереження над броунівським рухом дрібненьких часточок речовини у воді й вимірювання температури та тиску газу в закритій посудині привели до висновку, що температура тіла є не що інше як кінетична енергія руху його молекул і до встановлення залежності між тиском і температурою (закон Гей-Люсака). А це, в свою чергу, дало можливість вираховувати атомну вагу елементів (Дальтон, 1803 і 1810; Берцеліус, 1818). «Геніальний систематик хімічних елементів, Менделєєв, що виявив періодизм властивості елементів у залежності від їхньої атомної ваги (1869) і таким чином показав, що всі елементи збудовано наче за одним якимсь спільним планом, — проте рішуче виступав проти Проутової гіпотези, бо не знаходив для неї експериментального підтвердження — пише Кравчук. — Лише блискучий розвиток атомістики в 20-му столітті висунув знову думку про генетичну єдність матерії, та, завдяки роботам Д. Томсона, Резерфорда та Астона, зробив її у високій мірі ймовірною». Спостереження над катодними променями у Круксових трубках привели до відкриття електрону, а над анодними — до відкриття ізоотопів.

Повідомлення Рентгена (1895) про відкриття Х-променів (пізніше названих рентгенівськими), які проникають через тіла, що не пропускають світлових променів, і Лауе (1912), що ці промені мають ту саму природу що й світлові і відрізняються від останніх тільки більшою частотою коливань, дало фізикам спосіб «заглянути» всередину твердого непрозорого тіла, відкрити закони кристалічної будови речовини і вивчати взаємодію електромагнітного випромінювання з атомами. (Зазначимо, що ще в 1881 р., тобто за 14 років до повідомлення Рентгена про відкриття Х-променів, український фізик Іван Пулюй сконструював трубку, яка випускала ті ж Х-промені, і, протягом певного часу, навіть випускалася серійно під назвою «лампи Пулюя». За допомогою цього пристрою Пулюй уперше у світовій практиці зробив знімок зламаної руки 13-річного хлопчика). Зокрема, Г. Мозлі встановив (1913) залежність між частотою спектральних ліній характеристичного рентгенівського випромінювання і атомним номером випромінюючого елемента, завдяки чому періодична система елементів дістала тверде й точне спектроскопічне обґрунтування. Збільшилася ймовірність, що порожні місця таблиці Менделєєва можуть бути заповнені ще не знайденими елементами.

Спостереження над природною радіоактивністю показали, що атом радіоактивного елемента, випускаючи α -частинку, пересувається в періодичній системі на два номери назад, а випускаючи β -частинку — на один номер уперед. Отже коли даний атом послідовно випустить із себе одну α -частинку і дві β -частинки, він вернеться на своє первісне місце, хоч його склад і атомна вага зміняться: елемент стане своїм ізоотопом. Через те, що одна α -частинка (ядро

атома гелію) і дві β -частинки (електрони) складають атом гелію, що має атомну вагу 4, було зроблено висновок, що різниця між атомною вагою всяких двох радіоактивних ізотопів кратна чотирьом, що й підтвердилося експериментально. Спостерігаючи шляхи α -частинок у Вільсоновій камері, Резерфорд помітив, що деякі з них закінчуються раптовими закривленнями, і зробив висновок, що це трапляється тоді, коли α -частинка зустрічається з атомом азоту, який знаходиться в повітрі. Так було відкрито нову частинку у складі атома — протон.

Відкриття електрона та реальне виявлення складної структури атома викликали і перші теорії цієї структури. Першу модель у вигляді позитивно зарядженої краплі, всередині якої плавають електрони, запропонував Кельвін (1902 р.). Та ця модель не могла пояснити багатьох експериментально встановлених фактів, наприклад, дуже великих відхилів при ударі α -частинки в атом, або вибивання при цьому з атома протона, тому її довелося відхилити.

На зміну їй прийшла планетарна модель: навколо позитивно зарядженого ядра рухаються електрони, як планети навколо сонця. Причину, чому при цьому атом не випромінює енергію і електрони не падають на ядро, пояснювала відкрита Планком (1900 р.) при вивченні явища випромінювання абсолютно чорного тіла його квантова природа. На цій основі Н. Бор побудував свою модель атома водню. Вона в цей час була найвищим досягненням теоретичної фізики. Свою статтю Кравчук закінчує словами: «На подані тут міркування про конструкцію складніших атомів, як і взагалі на всю Борову теорію, не можна, розуміється, дивитися як на закінчену та вільну від суперечностей систему. Але коло ідей що вона дала і раз у раз породжує, є головним живим джерелом сучасної фізики» (Кравчук, 2014).

Список літератури

Кравчук, М. (2014). Простір, час, матерія (до теорії релятивності). У Н. О. Вірченко, В. О. Гайдей, О. П. Міхно (Упоряд.), *Михайло Кравчук: Вибрані праці: Історія і методика математики*. Київ: НТУУ «КПІ» (передруковано з 1924, *Червоний шлях*, (4–5), 226–244). http://pmu.in.ua/wp-content/uploads/downloads/2015/12/kravchyl_vibrani_praci.pdf

IV

СУЧАСНІ ОСВІТНІ ТЕХНОЛОГІЇ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

Про створення громадської організації «SmartMaths»

К. В. Власенко¹, І. В. Лов'янова², І. В. Сітак³, О. О. Чумак⁴

¹Донбаська державна машинобудівна академія, Краматорськ, Україна

²Криворізький державний педагогічний університет, Кривий Ріг, Україна

³Інститут хімічних технологій Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля, Рубіжне, Україна

⁴Донбаська національна академія будівництва і архітектури,

Краматорськ, Україна

vlasenkov@ukr.net

У статті обговорюється проблема математичної освіти та шляхи її розвитку. Наведено досвід створення громадської організації «SmartMaths», що створена для впливу на процеси розвитку математичної освіти шляхом співробітництва досвідчених викладачів вищої школи, сумісна діяльність яких має сприяти вирішенню питань залучення широкого кола громадян для розвитку та популяризації математики, ефективного використання внутрішнього потенціалу закладів освіти, розвитку, впровадження та захисту інтелектуальних здобутків членів викладацької громади. Презентовано освітню онлайн-платформу «Викладачу математики вищої школи».

Ключові слова: громадська організація «SmartMaths», математична освіта, викладачі математики, освітня онлайн-платформа «Викладачу математики вищої школи», онлайн-курси.

Проблема якості математичної освіти — одна з найбільш обговорюваних проблем сучасної освіти. Серед шляхів розв'язування цієї проблеми є підготовка кваліфікованого, технічно та методично освіченого викладача. Саме тому групою викладачів провідних технічних та педагогічних університетів було створено Громадську організацію (ГО) «SmartMaths». В організацію ввійшли як досвідчені фахівці з викладацьким досвідом, доктори та кандидати педагогічних наук, так і молоді викладачі, аспіранти, студенти. Окрім фахівців з методики викладання математики, у складі ГО «SmartMaths» є фахівці з інформаційних технологій та психології. Головною метою організації є задоволення суспільних, зокрема економічних, соціальних, культурних, екологічних та інших інтересів членів ГО «SmartMaths», викладацької та студентської спільноти, сприяння у здійсненні та захисті прав і свобод, співробітництво й партнерство, у тому числі міжнародне, у сфері розвитку освіти та культури шляхом ефективної реалізації суспільних ініціатив з метою розвитку та популяризації математики.

Членами організації було створено відкриту освітню онлайн-платформу «Викладачу математики вищої школи» (<http://formathematics.com>). Освітню платформу було презентовано на конференції «Проблеми математичної освіти» (Власенко та ін., квітень 2019), досвід впровадження онлайн-курсів обговорювався під час 16-тої міжнародної конференції Hands-on Science (Власенко та ін., вересень 2019) та 7-го міжнародного семінару «Хмарні технології в освіті» СТЕ 2019 (Власенко та ін., грудень 2019).

Платформа стала майданчиком для підвищення кваліфікації викладачів математики, обміну ідеями досвідчених педагогів, навчання та практичної підготовки студентів — майбутніх викладачів. На платформі розміщені та готуються до публікації математичні та навчально-методичні онлайн-курси. В основу розробки курсів покладено компетентнісний підхід і принципи студентоцентрованості та інтернаціоналізації освітнього простору. Контент платформи подано двома мовами — українською та англійською. Досвідченою командою тьюторів визначено вимоги до розробки онлайн-систем навчання, структурування курсів та організації зворотного зв'язку, сформульовано особливості організації оцінювання результатів навчання користувачів курсів. Педагогічний та науковий досвід команди тьюторів дозволив визначитися з вимогами та методичними рекомендаціями до розробки онлайн-курсів для викладачів математики. Такі вимоги зумовлені особливостями організації онлайн-навчання. Серед основних вимог: презентація курсу з урахуванням особливостей онлайн-подання, структурування курсу, урахування особливостей подачі навчального матеріалу, забезпечення візуалізації навчального матеріалу, оцінювання результатів навчання, організація зворотного зв'язку, редагування та перевірки навчальних завдань.

З початку 2019 року тьюторами онлайн-платформи було розроблено три онлайн-курси: «Диференціальні рівняння», «Методика викладання математики у технічних закладах вищої освіти», «Метод проєктів у навчанні вищої математики». Розроблені та готуються до публікації курси «Персональне електронне середовище викладача математики», «Елементарна математика», «Математична логіка», «Методи оптимізації».

Тьюторами освітньої платформи за час існування платформи було опубліковано ряд статей у виданнях, що індексуються у міжнародних наукометричних базах Scopus, WoS, INDEXCOPERNICUS. Досліджені питання математичного моделювання технічних процесів (Лов'янова та ін., 2018), формування інформатичної компетентності (Vlasenko, Chumak et al., 2019), проблеми підготовки викладачів математичних дисциплін (Vlasenko, Sitak et al., 2019), описано досвід використання CLIL-методу для формування іншомовної компетентності майбутніх інженерів (Vlasenko, Lovyanova et al., 2019), розглянуто особливості розробки та застосування схем розрахунків для прогнозування форм деталей (Vlasenko et al., 2018), здійснено теоретичний аналіз технічних можливостей Web 2.0, використання яких може зацікавити викладачів математики (Vlasenko et al., грудень 2019).

Таким чином, створення громадської організації «SmartMaths» дало змогу знайти нові нестандартні шляхи до популяризації математичних знань. Розробка відкритої освітньої онлайн-платформи «Викладачу математики вищої школи» відповідає новому сучасному тренду в освіті — безперервної освіти протягом життя, створює умови для професійного розвитку досвідчених викладачів математичних дисциплін та навчання студентів, що планують у майбутньому викладати у закладах вищої освіти.

Список літератури

- Власенко, К. В., Чумак, О. О., & Сітак, І. В. (2019). Про створення освітньої платформи «Для викладача вищої математики вищої технічної школи». *Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО-2019)* (с. 40–41). Черкаси: Вид. ФОП Гордієнко Є. І.
- Vlasenko, K., Lovianova, I., Sitak, I., Chumak, O., & Kondratyeva O. (2019). Learning platform as one of the ways to improve the professional qualification of mathematical disciplines teachers at higher technical educational institutions. *16-th Conference Hands-on Science. Innovative Education in Science and Technology* (p. 164–166). Kharkiv: National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”.
- Lovianova, I. V., Bobyliev, D. Ye., & Uchitel, A. D. (2019). Cloud calculations within the optional course Optimization problems for 10th-11th graders cloud. In: A. E. Kiv, V. N. Soloviev (Eds.) *Proceedings of the 6th Workshop Cloud Technologies in Education (CTE 2018)* (p. 459–471). <http://ceur-ws.org/Vol-2433/paper31.pdf>
- Vlasenko, K., Chumak, O., Sitak, I., Chashechnikova, O., & Lovianova I. (2019). Developing informatics competencies of computer sciences students while teaching differential equations. *Revista Espacios*, 40(31), 1–15. <https://www.revistaespacios.com/a19v40n31/19403111.html>
- Vlasenko, K., Sitak, I., Chumak, O., Lovianova, I., & Kondratyeva, O. (2019). Training of mathematical disciplines teachers for Higher educational institutions as a contemporary problem. *Universal Journal of Educational Research*, 7(9), 1892–1900. <https://doi.org/10.13189/ujer.2019.070907>
- Vlasenko, K. V., Lovyanova, I. V., Chumak, O. O., Sitak, I. V., & Kalashnykova, T. S. (2019). The formation of foreign language competence of engineering students through CLIL-method. *Revista Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores*, 7(68), 1–22. <https://dilemascontemporaneoseduccionpoliticayvalores.com/files/200006243-e84c1e84c3/EE%2019.11.68%20La%20formaci%C3%B3n%20del%20conocimiento%20de%20lenguas%20extranjerasyvalores.pdf>
- Vlasenko, K., Hrudkina, N., Reutova, I., & Chumak, O. (2018). Development of calculation schemes for the combined extrusion to predict the shape formation of axisymmetric parts with a flange. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3(1), 51–59. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.131766>
- Vlasenko, K., Volkov, S., Kovalenko, D., Sitak, I., & Chumak, O. (2019). Web-based online-course training higher school mathematics teachers. *CTE 2019: 7th Workshop on Cloud Technologies in Education Kryvyi Rih National University*. (to be published).

Технологія розвитку компетентності викладачів щодо оцінювання якості тестів з вищої математики

О. О. Диховичний¹, А. Ф. Дудко^{1, 2}

¹КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

²Інститут інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України,
Київ, Україна
adyx@ukr.net

У доповіді розглянуто технологію розвитку компетентності викладачів щодо оцінювання якості тестів з вищої математики. Визначено основні компоненти технології: мету, зміст, форми, методи та засоби навчання, орієнтовані на досягнення запланованого результату.

Ключові слова: оцінювання якості тестів, тест з вищої математики, компетентність.

Розвиток сучасної системи освіти та упровадження тестування в контроль знань як засобу визначення рівня навчальних досягнень студентів потребують забезпечення якості тестів, що використовуються. Це, в свою чергу, вимагає підвищення рівня компетентності викладачів щодо оцінювання якості тестів з вищої математики.

Процес розвитку компетентності викладачів щодо оцінювання якості тестів з вищої математики є досить складним, тому вимагає розроблення відповідної технології його здійснення. Розроблена модель розвитку компетентності викладачів щодо оцінювання якості тестів з вищої математики слугує підґрунтям для розроблення такої технології (Диховичний & Дудко, 2018).

Технологія розвитку компетентності викладачів щодо оцінювання якості тестів з вищої математики включає мету, зміст, форми, методи та засоби навчання, орієнтовані на досягнення запланованого результату.

Метою навчання викладачів є розвиток їх компетентності щодо оцінювання якості тестів з вищої математики.

Завданнями навчання є надання слухачам теоретичних знань з питань оцінювання якості тестів при використанні тестів для контролю знань з вищої математики та розуміння ролі такого оцінювання; розвиток вмінь та навичок оцінювання якості тестів з вищої математики на основі комп'ютерно орієнтованої методики оцінювання якості тестів (Диховичний & Дудко, 2015).

Зміст і організація процесу розвитку компетентності викладачів щодо оцінювання якості тестів з вищої математики були розроблені на модульній основі з урахуванням професійних та особистісних вимог слухачів відповідно до навчальної програми «Формування компетентності викладачів щодо оцінювання якості тестів з вищої математики». Згідно з програмою курсу навчання викладачів розпочинається вхідним моніторингом та визначенням рівня розвитку їх компетентності щодо оцінювання якості тестів з вищої математики. Після вхід-

ного моніторингу викладачі розподіляються на групи відповідно до рівня розвитку компетентності.

Технологія відповідно до розробленої моделі ґрунтується на андрагогічному, диференційованому, компетентнісному та діяльнісному підходах, що застосовують для навчання дорослих. Під час навчання використовуються такі *засоби*: ПК, комп'ютерно орієнтована методика оцінювання якості тестів з вищої математики, зокрема СААЯТЗ (Диховичний & Дудко, 2013), мультимедійна дошка, система Moodle, дистанційний курс «Формування компетентності викладачів щодо оцінювання якості тестів з вищої математики» та ін. Перед проходженням навчання СААЯТЗ необхідно встановити на ПК кожного слухача.

Навчання проводиться за допомогою групових форм навчання (лекції, практичні заняття, групові консультації) та індивідуальних (індивідуальні заняття, самостійна робота, індивідуальні консультації, електронне листування).

Розпочинається цикл занять із підготовчої самостійної позааудиторної роботи, яка полягає в перегляді теоретичного матеріалу теми. Теоретичний матеріал розміщено у дистанційному курсі «Формування компетентності викладача щодо оцінювання якості тестів з вищої математики» у системі Moodle.

Поглиблене опрацювання теоретичного матеріалу проходить на лекційних заняттях. Лекції проводяться в аудиторіях, що оснащено необхідними засобами навчання: ПК з підключенням до Інтернет-мережі, мультимедійна дошка тощо.

Під час лекцій відбуваються:

- пояснення теоретичного матеріалу, що викликав труднощі під час самостійного опрацювання;
- обговорення теоретичного матеріалу в межах зазначеної теми;
- демонстрація за допомогою мультимедійної дошки прикладів використання набутих теоретичних знань на практиці;
- поточний контроль опрацювання теоретичного матеріалу.

Після лекції проходять індивідуальні навчальні консультації за певним графіком в очній та дистанційній формі за допомогою Інтернет сервісів, зокрема, електронною поштою та Skype. Їх переважно призначено для викладачів, які не змогли з поважних причин бути присутніми на лекціях і у яких є прогалини в розумінні певного теоретичного матеріалу. Специфіка консультацій полягає у їх добровільному відвідуванні учасниками навчання.

Наступним етапом циклу є практичне заняття, яке зорієнтовано на поглиблення та розширення здобутих на лекціях знань. Практичні заняття проводять в аудиторіях, оснащених необхідними засобами навчання: ПК з підключенням до Інтернет-мережі, мультимедійна дошка тощо. На практичних заняттях слухачі можуть користуватись і власними ПК. Для деяких тем практичне заняття не передбачено. У межах практичних занять проводиться:

- роз'яснення змісту індивідуальних завдань;
- контроль виконання індивідуальних завдань;
- контроль опрацювання теоретичного матеріалу;

– розгляд окремих ситуацій оцінювання якості тестових завдань та тестів, що викликали труднощі при виконанні практичних завдань.

Після практичних занять проходять групові навчальні консультації за певним графіком в очній формі та індивідуальні навчальні консультації в дистанційній формі за допомоги електронної пошти та Skype. Їх призначено для викладачів, які потребують додаткового пояснення матеріалу.

Методами навчання є дискусія, практична діяльність, самостійна діяльність, наочно-демонстраційний метод, мозковий штурм, візуалізована лекція, оцінювання знань, умінь та навичок за допомогою тестування та анкетування. Діагностика набутих слухачами знань, умінь та навичок проводиться за допомогою тестування та анкетування на комплексній основі, яка складається з таких компонентів:

– оцінювання результатів виконання поточних завдань до кожного з модулів курсу;

– оцінювання результатів підсумкового тесту, анкети та індивідуального завдання, що дають змогу оцінити рівень сформованості компетентності викладача щодо оцінювання якості тестів з вищої математики на кінець навчання;

– оцінювання випускної роботи, яка полягає в розробці власного тесту з вищої математики та оцінюванні його якості з використанням комп'ютерно орієнтованої методики.

Очікуваними результатами реалізації навчальної програми є:

– усвідомлення слухачами переваг використання тестів для контролю знань студентів з вищої математики;

– знання слухачів основних проблем, пов'язаних із процесом розроблення тестів з вищої математики, та вміння їх вирішувати;

– з'ясування та усвідомлення слухачами ролі оцінювання якості тестів з вищої математики при їхньому використанні для контролю знань студентів;

– теоретичні знання слухачів питань оцінювання якості тестів методами КТТ та IRT;

– знання слухачів базового функціоналу СААЯТЗ;

– уміння та навички слухачів роботи з СААЯТЗ;

– уміння та навички слухачів використання комп'ютерно орієнтованої методики оцінювання якості тестів з вищої математики в цілому.

Описану вище методику впроваджено на курсах підвищення кваліфікації науково-педагогічних працівників за програмою «Формування компетентності щодо оцінювання якості тестів з вищої математики» (<http://uiite.kpi.ua/ua/regulatory-framework/documents/math-test.html>) в Навчально-методичному комплексі «Інститут післядипломної освіти» КПІ ім. Ігоря Сікорського. Запропонована технологія сприятиме розвитку компетентності викладачів щодо оцінювання якості тестів з вищої математики, що підтверджується експериментальним дослідженням, описаним в роботі Дудко (2019).

Список літератури

- Диховичний, О. О., & Дудко А. Ф. (2013). Автоматизована система аналізу результатів комп'ютерного тестування з вищої математики. *Наукові праці ДонНТУ. Серія: «Педагогіка, психологія і соціологія»*, (2), 103–110. <http://ea.donntu.edu.ua/handle/123456789/27091>
- Диховичний, О. О., & Дудко, А. Ф. (2015). Комплексна методика аналізу якості тестів з вищої математики. *Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*, 15 (22), 140–144. <http://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/9378>
- Диховичний, О. О., & Дудко, А. Ф. (2018). Модель розвитку компетентності викладачів щодо оцінювання якості тестів з вищої математики. *Інформаційні технології і засоби навчання*, 68(6), 77–86. <https://doi.org/10.33407/itlt.v68i6.2243>
- Дудко, А. Ф. (2019). Розвиток компетентності викладачів щодо оцінювання якості тестів з вищої математики (педагогічний експеримент). У *Збірнику матеріалів VII Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених «Наукова молодь-2019»* (с. 17–18). Київ: ЦП Компрінт. <http://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/718530>

Дослідження динамічних систем з використанням системи комп'ютерної математики Maple

Т. М. Крохмаль¹, О. М. Нікітенко²

¹Харківська загально-освітня школа № 63, Харків, Україна

²Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна
nikonxipe64gmail.com

Розглядаються приклади застосування системи комп'ютерної математики Maple для дослідження динамічних систем, зокрема для побудови фазових портретів таких систем.

Ключові слова: Maple, динамічна система, фазовий портрет, фазова траєкторія.

У деяких науках дуже часто трапляється ситуація, коли модель процесу, який розглядають, зводиться до диференційного рівняння чи системи таких рівнянь. У більшості реальних моделей для цих рівнянь неможливо отримати розв'язок аналітичними методами, а застосовують різноманітні чисельні методи.

Вельми широке коло питань, що належать до вивчення рухів динамічних систем, укладається в рамки вивчення структури розбиття фазового простору на фазові траєкторії.

Для побудови фазового простору й фазових траєкторій застосовують різноманітні методи, у тому числі й з використанням комп'ютерних програм.

Метою цієї роботи є ілюстрація можливостей побудови фазових портретів динамічних систем, використовуючи систему комп'ютерної математики (СКМ) Maple.

Під динамічною системою розуміють будь-який об'єкт або процес, для якого однозначно визначено поняття стану як сукупності деяких величин у певний момент часу й задано оператор, що описує еволюцію початкового стану в часі. Динамічні системи можуть бути механічними, фізичними, хімічними та біологічними об'єктами, обчислювальними процесами та процесами перетворення інформації, які відбуваються відповідно до конкретних алгоритмів.

Опис динамічних систем також дозволяє велику різноманітність: він може здійснюватися або за допомогою диференціальних рівнянь, або такими засобами, як функції алгебри логіки, графи, марківські ланцюги тощо (Банах, 1948).

Математична модель динамічної системи вважається заданою, якщо введено параметри (координати) системи, що визначають однозначно її стан, і вказано еволюційний оператор, який дозволяє розв'язувати задачу визначення зміни стану в часі (Банах, 1948).

Сутність цього методу полягає в тому, що він дозволяє будувати фазові траєкторії з використанням диференціальних рівнянь у такій системі координат:

– відхилення керованої величини x ;

– швидкість зміни керованої величини $y = \frac{dx}{dt}$.

Процес зміни траєкторії є рухом певної твірної точки на фазовій площині.

Початкові умови визначатиме початкове значення твірної точки на фазовій площині.

Сукупність фазових траєкторій на площині (x, y) є фазовим портретом.

Фазовий простір — не пов'язана зі звичайним простором умовно-геометрична інтерпретація станів процесів динамічної системи. Певний стан будь-якої динамічної системи зображується відповідним цій системі фазовим простором. Перехід системи від одного стану до іншого (процес) зображується траєкторією фазової точки у фазовому просторі.

Як вже зазначалось, з кожної точки фазового простору виходить одна й тільки одна фазова траєкторія, і тим самим увесь фазовий простір динамічної системи розбивається на фазові траєкторії.

З геометрично-наочної точки зору під структурою розбиття фазового простору на траєкторії розуміється геометрична картина взаємного розташування фазових траєкторій у фазовому просторі.

Метод фазової площини — це точний графоаналітичний метод дослідження, який надає змогу досліджувати як наявність стану рівноваги, так і режиму автоколивань у нелінійних системах. Обмеженням цього методу є те, що математична модель об'єкту дослідження повинна бути не більше другого порядку.

З усіх систем комп'ютерної математики для побудови фазових портретів найпривабливішою виглядає СКМ вищого класу Maple, яка має найбільше розповсюдження серед таких систем. На ядрі СКМ Maple базуються такі популярні СКМ нижчого класу як MATLAB та MathCad (Гречко, 2013).

Інша СКМ вищого класу Matematica під час експлуатації має суттєво більше проблем різноманітного характеру (Аладьев, 2006).

Розглянемо можливість застосування СКМ Maple для побудови фазових портретів.

Як приклади розглянемо добре відому задачу про коливання фізичного маятника і задачу про рух заряджених частинок у приладах циліндричної конструкції зі схрещеними полями.

Почнімо з простого прикладу: розглядатимемо коливання стрижня, який почеплений за один з кінців. Як відомо, коливання цієї фізичної системи описує таке диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \sin x = 0,$$

де x — кут відхилення стрижня від вертикального положення; ω — коефіцієнт, що залежить від розміру та маси стрижня.

Побудова фазового портрету будь-якої динамічної системи в СКМ Maple відбувається за таким алгоритмом.

- 1) підключаємо бібліотеку DEtools, яка містить інструменти для перетворення, розв'язання та малювання систем диференціальних рівнянь;
- 2) задаємо рівняння системи;
- 3) задаємо набір початкових точок через які проходилимуть фазові

траєкторії;

4) за допомогою команди DEplot розв'язуємо рівняння системи та будуємо фазовий портрет.

Використовуючи команду

DEplot([eq1,eq2], [s(t),z(t)], t=0..40, s=-4..4, z=-4..4, stepsize=0.05, linecolour=black, init, scene=[s,z],color=black,arrows=none);

отримаємо добре відомий фазовий портрет (рис. 1).

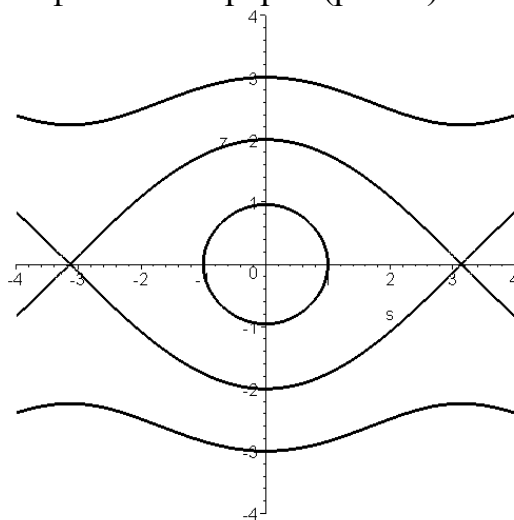


Рис. 1

Тепер розгляньмо рух заряджених частинок у приладах циліндричної конструкції зі схрещеними полями, який описується таким диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{4} + \frac{b}{x} + \frac{1}{4x^3},$$

тут b — коефіцієнт, який урахує вплив електростатичного та магнітостатичного полів на рух заряджених частинок в таких приладах.

Фазовий портрет для цієї системи зображено на рис. 2.

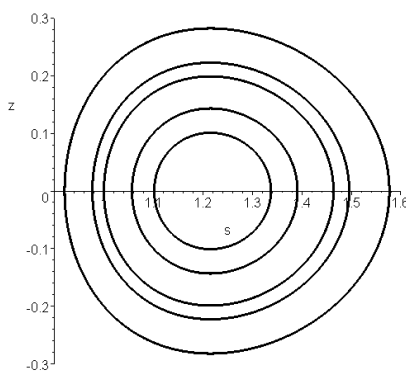


Рис. 2

Показано можливість застосування системи комп'ютерної математики Maple для побудови фазових портретів динамічних систем. Застосування комп'ютерних технологій під час вивчення поведінки динамічних систем дозволяє отримати інформацію по систему, не розв'язуючи диференціальних рівнянь.

Список літератури

- Аладьев, В. З. (2006). *Системы компьютерной алгебры: Maple: Искусство программирования*. Таллинн: Лаборатория базовых знаний.
- Банах, С. (1948). *Курс функціонального аналізу (лінійні операції)*. Київ: Радянська школа.
- Гречко, А. Л. (2013). Сучасний стан програмного забезпечення в курсах якісної теорії диференціальних рівнянь та динамічних систем. У *Матеріалах Другої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 296–298). Київ: НТУУ «КПІ».

До питання особистісно-орієнтованої освіти в ЗВО

О. Б. Нестеренко

Київський національний університет технологій та дизайну, Київ, Україна

nesterenkoolha@gmail.com

У доповіді визначено роль і значення особистісно-орієнтованої освіти студентів під час навчання в ЗВО. Вказано умови для підвищення пізнавальної активності та рівня мотивації до навчання, індивідуалізації навчання студентів та створення психологічного комфорту для викладача і студента.

Ключові слова: активні технології навчання, психологічний комфорт, мотивація.

Сучасна динаміка розвитку суспільства формує людину як особистість та індивідуальність. Актуальність концепції особистісно-орієнтованої освіти не викликає сумнівів. Модернізація освіти передбачає перехід до таких технологій навчання, у яких освітній процес стає інструментом вирішення життєвих проблем і особистісного зростання. Потреба сучасного суспільства в активних, самостійних фахівцях визначає пріоритет особистісно-орієнтованої освіти серед інших освітніх концепцій. Спрямованість на формування ініціативності, самостійності, відповідальності студента виступає як головний пріоритет навчання.

Успішність засвоєння навчального матеріалу, темп оволодіння ним, залежить не тільки від діяльності викладача, а і від пізнавальних можливостей і здібностей студентів. Розвиток інтелектуальних здібностей студента при особистісно-орієнтованому навчанні — це надання студенту можливості активної пізнавальної діяльності через посилену самостійну роботу й надання творчої свободи.

Питання, що стоїть перед кожним небайдужим викладачем — як побудувати процес навчання, щоб студенти зрозуміли, що задача може бути цікавою, захоплюючою, і що базові навички, які вони розвивають на заняттях, будуть тривати все життя і допоможуть їм вирішувати й реальні проблеми, пов'язані з роботою. Правильно створена особистісна ситуація впливає на формування позитивного ставлення студентів до навчання.

Особистісно-орієнтована освіта передбачає такі підходи.

1. Підвищення пізнавального інтересу, пізнавальної активності. Перевагами застосування інтерактивного навчання на лекційних та практичних заняттях є:

- встановлення дружньої атмосфери та взаємозв'язків між учасниками спілкування;
- отримання студентами можливості бути більш незалежними й упевненими в собі;
- заохочення викладачем студентів до співпраці;
- отримання студентами можливості подолати проблему мовного бар'єру;
- нівелювання авторитарної позиції викладача;
- залучення до роботи кожного студента;

- допомога із слабкими студентами;
- постійне й активне використання раніше набутого досвіду (Гончаров та ін., 2007).

Активізація самостійної роботи студентів має передбачати використання таких методів, які були б спрямованими не на механічне запам'ятовування і відтворення готових знань, а на усвідомлене оволодіння знаннями й уміннями у процесі активної пізнавальної діяльності.

2. Індивідуальна робота зі студентами. В особистісно-орієнтованій системі освіти принцип індивідуалізації є основним моментом побудови освітнього середовища. При особистісному підході, існування індивідуальних відмінностей серед студентів є необхідною умовою досягнення поставленої мети — забезпечити розвиток кожного студента як неповторної особистості.

Індивідуалізацію навчання розуміють у контексті таких визначень:

- організація навчального процесу, за якої вибір способів, темпу навчання здійснюється з урахуванням рівня розвитку здібностей студентів до навчання;
- система виховних і дидактичних заходів, що відповідають цілі діяльності і пізнавальним можливостям студентів;
- зміна методів навчання, коригування мети навчання, критеріїв визначення рівня успішності;
- удосконалення самостійної роботи студентів відповідно до індивідуальних здібностей тощо (Казак, 2018).

Суть майстерності викладача полягає у визначенні характеру необхідної допомоги в кожній конкретній ситуації, в орієнтації навчального процесу на досягнення обов'язкових результатів навчання, здатності зробити навчання успішним для кожного студента, дозволивши кожному студенту проявити ініціативу й самостійність у визначенні методів роботи.

3. Підвищення рівня мотивації до навчання. Мотивація до навчання є важливим елементом, необхідним для якісної освіти студентів. Коли студенти мотивовані, вони починають з цікавістю працювати над завданнями, задають питання. Мотивація впливає на те, як студенти ставляться до навчання в цілому, до викладачів, як багато часу й зусиль вони витрачають на дослідження або домашнє завдання, яку підтримку вони шукають, стикаючись із проблемою і багато інших аспектів навчання. Якщо студенти не мотивовані, важко та і неможливо поліпшити свої академічні досягнення, незалежно від того, наскільки хороший викладач, навчальний план або університет. Крім того, невмотивовані студенти можуть відволікати від навчання інших студентів.

4. Створення психологічного комфорту для викладача і студента. Студент відчувається комфортно на заняттях, якщо стосунки студент-викладач побудовані на взаємоповазі, він психологічно готовий до лекційного або практичного заняття, його об'єктивно оцінює педагог, його позитивно сприймає студентський колектив, він сам по-дружньому ставиться до інших.

Викладач має так проводити лекційні та практичні заняття, щоб студенти проявляли свою активність. Пропонувати такі завдання, які дозволять студен-

там самим вибирати тип, вид та дії з навчальним матеріалом. Викладач має завжди виходити з того, що у студентів є внутрішня мотивація до навчання.

Також, викладач повинен бути послідовним у своїх діях, щоб студенти з легкістю сприймали знання і завжди знали, чого від них вимагатимуть. Викладач повинен розвивати в собі здатність відчувати емоційний настрій групи, приймати його, бути активним учасником групової взаємодії; прагнути до об'єктивності і справедливості під час оцінюванні виконаних студентами робіт, що дозволить сформувати довіру студентів до професійних навичок викладача.

Отже, особистісно-орієнтоване навчання дає можливість практично кожному студенту реалізовувати себе в навчальній діяльності з урахуванням його інтересів, можливостей, здібностей, ціннісних орієнтацій і суб'єктивного досвіду.

Список літератури

- Гончаров, С. М., Білецький, А. А., Губницька, О. М., & Костюкова. Т. А. (2007). *Форми, методи і організація навчального процесу в кредитно-модульній системі*. Рівне: НУВГТТ.
- Казак, І. О. (2018). *Теорія і методика викладання в вищій школі. Конспект лекцій з навчальної дисципліни*. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/25125>

ЗМІСТ

Секція 1. Застосування математики в суміжних науках

Borysenko O. V. <i>Stochastic mutualism model of population dynamics</i>	4
Golinko I., Galytska I. <i>Passive identification of the plant time response for an acting control system</i>	8
Goy T. <i>Jacobsthal number identities using the generalized Brioschi formula</i>	13
Kovalchuk V. V. <i>Lagrange's equation for a triple inverted pendulum</i>	18
Антоненко Н. М., Ткаченко І. Г., Морозов Ю. В. <i>Про один підхід до розв'язання осесиметричної задачі теплопровідності для багатошарової основи з неідеальним тепловим контактом між шарами</i>	22
Баліна О. І., Безклубенко І. С., Буценко Ю. П. <i>Управління потокорозподілом інженерної мережі в аварійній ситуації</i>	25
Бовсуновська В. В., Задерей П. В., Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д. <i>Про нерівність Лебега — Ландау на класах ψ-диференційовних функцій</i>	28
Буценко Ю. П., Лабжинський В. А. <i>Кластерний підхід до діагностування складних систем</i>	32
Буценко Ю. П., Савченко Ю. Г. <i>Марківська модель технічного стану в електронних пристроях із структурною надлишковістю</i>	34
Голуб В. П. <i>Определение параметров ядер наследственности в линейной теории вязкоупругости методом интегрального преобразования Лапласа — Карсона</i>	38
Горалік Є. Т., Крюков М. М., Лупіна Т. О. <i>Рух рятувальної шлюпки вільного падіння при сходженні з похилої рампі</i>	43
Горленко С. В. <i>До обернення теореми Гріна</i>	48
Демидюк М. В., Демидюк В. М. <i>Використання методу Понтрягіна в задачі оптимального керування дволанковим маніпулятором</i>	51
Диховичний О. О., Круглова Н. В. <i>Система для аналізу й побудови психологічних опитувальників та визначення точних цільових психологічних профілів</i>	56
Довгай В. В. <i>Оцінка розв'язків неавтономної системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку</i>	59
Донецький С. В. <i>Співіснування атракторів у системі генератор-п'єзокерамічний випромінювач</i>	63
Жданова Ю. Д., Спасітелєва С. О., Шевченко С. М. <i>Застосування фракталів в інформаційній та кібернетичній безпеці</i>	67
Задерей П. В., Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Хрипко С. С. <i>Про ряди Фур'є обмежених функцій</i>	71
Зеленський А. Г., Побігай Є. Д., Томін А. Ю., Фомін О. С. <i>Застосування математики в розрахунках однорідних і тришарових прямокутних пластин на згин</i>	73
Игнатьев А. О. <i>Динамика взаимодействия вирусов и иммунной системы</i>	76

Іваненко Т. В. Математичне моделювання інвестиційного проєкту як функції n змінних	80
Іваненко Т. В., Тимошенко О. А. Детермінована задача прийняття оптимального рішення при виборі інвестиційного проєкту.....	85
Кобзар Ю. М. Моделювання процесу руйнування внаслідок втоми за умов багато циклового навантаження з допомогою рекурентних співвідношень	88
Колесник В. Аналіз даних у фінансовій математиці методом кейсів.....	93
Крюков М. М., Шутівський О. М., Ляшко О. В., Андрейцев А. Ю. Застосування В-сплайнів до розв'язання задачі про деформацію тонких конічних оболонок зі скісними контурами	97
Кузьмін А. В., Кузьміна Н. Н. Об одном алгоритме кластерного анализа сеточного типа	101
Кушлик Б. Р., Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В. Математичні аспекти методу аналітичної ієрархії.....	106
Лапач С. М. Проблеми викладання у вищій школі в умовах постнекласичної науки	111
Медведев К. Б., Нефьодова Г. Д., Манжелій А. Ю. Зображення параметрів кола змінної напруги на комплексній площині.....	116
Микитин М. М., Мартиняк Р. М., Середницька Х. І. Математичне моделювання взаємодії пружного півпростору і жорсткої основи за появи міжконтактного зазору по кільцевій або круговій області під дією стоків тепла ..	120
Міцюхін А. І. Кадавання інфармації на аснове выкарыстання сумежных класаў кода	122
Плащинська А. В. Метод наближеного розв'язку нелінійного інтегрального рівняння руху фронту руйнування внаслідок втоми в тонкій нескінченній пластині	125
Поліщук Н. В., Кушлик-Дивульська О. І. Аналіз надійності роботи триканальної системи масового обслуговування.....	130
Радченко С. Г., Лапач С. Н. Математическое моделирование системы кондиционирования воздуха летательного аппарата	134
Резник В. С. Об одном методе конкретизации функционала при определении параметров ядер наследственности в линейной теории вязкоупругости	138
Рожок Л. С. Напружений стан шаруватих неоднорідних порожнистих циліндрів з овальним поперечним перерізом	142
Селезньова Н. П., Сараєва Ю. О. Точкові оцінки числових характеристик дискретного розподілу в контексті виборів президента ..	147
Скороход Р. В., Коропов О. В. Математична модель радіаційно-індукованої сегрегації в концентрованих металевих сплавах Fe-Cr-Ni	153
Стоян В. А., Задорожний О. О. Про результати програмно-аналітичного моделювання динаміки неповно спостережуваних лінійних просторово розподілених систем.....	161
Фернаті П. В. Визначення параметрів ядер інтегральних операторів у нелінійній моделі в'язкопружності за їх резольвентами	165
Штефан Т. О., Засовенко А. В. Дослідження осаду циліндричної заготовки в умовах осесиметричної деформації	170
Яджак М. С. Деякі паралельні алгоритми розв'язання задач цифрової фільтрації ...	172

Секція 2. Методика викладання математики у вищій школі

Варивода В. О., Гришко О. М., Гурнік О. О. <i>Про деякі проблеми викладання курсу вищої математики студентам-першокурсникам технічних напрямків підготовки</i>	178
Гришина В. А., Гришин В. А. <i>Критериальный выбор методов аппроксимации в интерактивном режиме</i>	183
Дем'яненко О. О., Репета Л. А. <i>Ділові та рольові ігри як метод навчання</i>	186
Дрозд В. В. <i>Цариця навчального процесу</i>	189
Дудко А. Ф., Москвичова К. К. <i>Застосування системи GeoGebra на заняттях з вищої математики студентів технічних спеціальностей</i>	192
Калайда О. Ф. <i>Скільки існує колокант функції із простими вузлами?</i>	194
Калайда О. Ф. <i>Двосторонні дробово-раціональні колоканти із двократними вузлами</i>	197
Калайда О. Ф. <i>Лінійні двосторонні автономні методи розв'язування задачі Коші для нормальних диференціальних рівнянь</i>	202
Калайда О. Ф. <i>Двосторонні многочлени Тейлора та відповідні двосторонні квадратурні формули</i>	204
Калайда О. Ф. <i>Дробово-раціональні двосторонні методи двох дотичних розв'язування скалярних скінченних рівнянь</i>	206
Калайда О. Ф. <i>Дробово-раціональні квадратурні формули на основі дробово-раціональних колокант</i>	209
Калайда О. Ф. <i>Лінійні двосторонні методи двох дотичних розв'язування скінченних рівнянь</i>	212
Калайда О. Ф. <i>Про логарифмічні квадратурні формули</i>	214
Калайда О. Ф. <i>Матричні алгоритми чисельного диференціювання на основі дробово-раціональних колокант</i>	217
Калайда О. Ф. <i>Про одне подання многочлена типу Лагранжа за зростаючими степенями</i>	220
Калайда О. Ф. <i>Про двосторонні колоканти із простими вузлами колокації</i>	222
Калайда О. Ф. <i>Про колоканти типу Ерміта — Маркова</i>	227
Калайда О. Ф. <i>Про метод двох дотичних чисельного інтегрування функцій та задачі Коші для нормальних рівнянь</i>	230
Калайда О. Ф. <i>Про студентські науково-дослідні математичні гуртки</i>	233
Калайда О. Ф. <i>Про золотий переріз, математичне сподівання, середнє арифметичне та дисперсію</i>	235
Карупу О. В., Олешко Т. А., Пахненко В. В. <i>Про деякі особливості викладання лінійної алгебри англомовним студентам НАУ</i>	237
Кучма М. І. <i>Про один ефективний метод знаходження власних векторів матриці</i>	241
Кучма М. І., Тимошенко Н. М. <i>Псевдорозв'язність систем лінійних рівнянь і метод найменших квадратів</i>	247
Лагода О. А. <i>Прикладні задачі як стимул вивчення математики</i>	252
Левізов С. В., Курбико І. Ф. <i>Про безпосередню оцінку логарифмічних величин (порівняння деяких логарифмів)</i>	256
Мохонько А. З., Васіна Л. С., Мохонько В. Д. <i>Про систему тестових завдань для контролю знань з математики для економістів</i>	260

Панасюк Н. М. Чи треба вчити формули в час суцільної комп'ютеризації знань? ..	265
Потемкина С. Н., Розанов А. В. Модели процессов электромагнитной индукции и особенности практических расчетов на их основе	268
Сапрікін С. М. Застосування теорем Ролля, Лагранжа та Коші для розв'язання задач студентських математичних олімпіад	273
Тригубець Б. О., Листопадова В. В. Фігури Ліссажу.....	276
Циганкова Г. А., Марченко С. В. Аспекти викладання вищої математики для студентів технологічних спеціальностей	279
Чепок О. О., Белітченко Д. М. Концепція Нової української школи і доцільність змістової перебудови традиційної структури освітньої програми Середня освіта(Фізика) для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем	281
Шершень Т. О., Симчук Я. В. Про деякі методи обчислення інтеграла Гауса	284

Секція 3. Історія точних наук

Горенчук С. Т., Корзун Л. С. Софія Василівна Ковалевська (1850–1891).....	289
Задерей П. В., Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Калюга Б. В. Академік Микола Миколайович Боголюбов (до 110-річчя від дня народження)	292
Задерей П. В., Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Ткаченко А. В. Федір Петрович Ярмчук як педагог та вчений-методист (до 100-річчя з дня народження).....	297
Маловичко Т. В. Мишель Рольє і метод каскадов	301
Маловичко Т. В. Семья Дж. Г. Стокса	306
Сташенко М. О., Трачук Т. В. Михайло Пилипович Кравчук як активний популяризатор науки	311

Секція 4. Сучасні освітні технології у вищій школі

Власенко К. В., Лов'янова І. В., Сітак І. В., Чумак О. О. Про створення громадської організації «SmartMaths»	318
Диховичний О. О., Дудко А. Ф. Технологія розвитку компетентності викладачів щодо оцінювання якості тестів з вищої математики	321
Крохмаль Т. М., Нікітенко О. М. Дослідження динамічних систем з використанням системи комп'ютерної математики Maple	325
Нестеренко О. Б. До питання особистісно-орієнтованої освіти в ЗВО.....	329

Наукове видання

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Матеріали
VIII Міжнародної
науково-практичної конференції
26–27 грудня 2019 року

Технічний редактор

Павло Кушнір
канд. істор. наук