

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Секція I
ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ
В СУМІЖНИХ НАУКАХ

Матеріали
VIII Міжнародної
науково-практичної конференції
Київ, 26–27 грудня 2019 року

<http://matan.kpi.ua/uk/mvstu8.html>

Вінниця
2020

УДК 51(082)
МЗ4

Матеріали VIII Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 27–28 грудня 2019 р. — Вінниця: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2020. — 336 с. — Укр., рос., англ., білорус.

Материалы VIII Межд. науч.-практ. конф. «Математика в современном техническом университете», Киев, 27–28 декабря 2019 г. — Винница: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2020. — 336 с. — Укр., рус., англ., белорус.

Proceedings of Eighth International Scientific-Practical Conference “Mathematics in Modern Technical University”, Kyiv, December, 27–28, 2019. Vinnytsia: Publisher FOP Kushnir Yu. V., 2020. 336 pp.

ISBN 978-617-7721-27-6

Програмний комітет

VIII Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»:

Проф. О. І. Клесов (Київ, Україна), (голова)
Проф. Н. О. Вірченко (Київ, Україна)
Проф. О. В. Іванов (Київ, Україна)
Проф. П. В. Задерей (Київ, Україна)
Доц. О. О. Диховичний (Київ, Україна)

Організаційний комітет

Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»

Доц. В. О. Гайдей (Україна), голова
В. В. Бовсуновська (Київ, Україна)
Ю. Є. Приходько (Київ, Україна)

УДК 51(082)

Матеріали подано в авторській редакції

ISBN 978-617-7721-27-6

©Автори

©КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

Stochastic mutualism model of population dynamics

O. V. Borysenko

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

olga_borisenko@ukr.net

It is proved existence and uniqueness of the global positive solution to the system of stochastic differential equations describing a two-species mutualism model disturbed by white noise, centered and non-centered Poisson noises. We obtain the sufficient conditions of stochastic ultimate boundedness, stochastic permanence and extinction of the solution to the considered system.

Key words: stochastic mutualism model, global solution, stochastic ultimate boundedness, stochastic permanence, extinction.

The construction of the mutualism model and its properties are presented in Gopalsamy (1992). Mutualism occurs when one species provides some benefit in exchange for some benefit. A deterministic two-species mutualism model is described by the system

$$\begin{aligned}\frac{dN_1(t)}{dt} &= r_1(t)N_1(t) \left[\frac{K_1(t) + \alpha_1(t)N_2(t)}{1 + N_2(t)} - N_1(t) \right], \\ \frac{dN_2(t)}{dt} &= r_2(t)N_2(t) \left[\frac{K_2(t) + \alpha_2(t)N_1(t)}{1 + N_1(t)} - N_2(t) \right],\end{aligned}$$

where $N_1(t)$ and $N_2(t)$ denote population densities of each species at time t , $r_i(t) > 0, i = 1, 2$, denotes the intrinsic growth rate of species $N_i, i = 1, 2$, and $\alpha_i(t) > K_i(t) > 0, i = 1, 2$. The carrying capacity of species $N_i(t)$ is $K_i(t), i = 1, 2$, in the absence of other species.

In the paper Qiu and Wang (2013) it is considered the stochastic mutualism model of the form

$$\begin{aligned}dx(t) &= x(t) \left[\frac{a_1(t) + a_2(t)y(t)}{1 + y(t)} - c_1(t)x(t) \right] + \sigma_1(t)x(t)dw_1(t), \\ dy(t) &= y(t) \left[\frac{b_1(t) + b_2(t)x(t)}{1 + x(t)} - c_2(t)y(t) \right] + \sigma_2(t)y(t)dw_2(t),\end{aligned}\tag{1}$$

where $a_i(t), b_i(t), c_i(t), \sigma_i(t), i = 1, 2$, are all positive, continuous and bounded functions on $[0, +\infty)$, and $w_1(t), w_2(t)$ are independent Wiener processes. The authors show that the stochastic system (1) has a unique global (no explosion in a finite time) solution for any positive initial value, and that this stochastic model is stochastically ultimately bounded. The sufficient conditions for stochastic permanence and persistent in the mean of solution to the system (1) are obtained.

Population systems may suffer abrupt environmental perturbations, such as epidemics, fires, earthquakes, etc. So, it is natural to introduce Poisson noises into the

population model for describing such discontinuous systems. In Li et al. (2016) the authors consider the stochastic mutualism model with white and centered Poisson noises

$$\begin{aligned} dx(t) &= x(t^-) \left[\left(r_1(t) - \frac{b_1(t)x(t)}{K_1(t) + y(t)} - \varepsilon_1(t)x(t) \right) dt + \alpha_1(t)dw_1(t) + \int_{\mathbb{Y}} \gamma_1(t, z)\tilde{\nu}(dt, dz) \right], \\ dy(t) &= y(t^-) \left[\left(r_2(t) - \frac{b_2(t)y(t)}{K_2(t) + x(t)} - \varepsilon_2(t)y(t) \right) dt + \alpha_2(t)dw_2(t) + \int_{\mathbb{Y}} \gamma_2(t, z)\tilde{\nu}(dt, dz) \right], \end{aligned}$$

where $x(t^-)$, $y(t^-)$ are the left limit of $x(t)$ and $y(t)$ respectively, $r_i(t), b_i(t), K_i(t), \alpha_i(t), i = 1, 2$, are all positive, continuous and bounded functions, $\mathbb{Y}$ is measurable subset of $(0, +\infty)$, $w_i(t), i = 1, 2$, are independent standard one-dimensional Wiener processes, $\tilde{\nu}(t, A) = \nu(t, A) - t\Pi(A)$ is the centered Poisson measure independent on $w_i(t), i = 1, 2$, $E[\nu(t, A)] = t\Pi(A)$, $\Pi(\mathbb{Y}) < \infty$, $\gamma_i(t, z), i = 1, 2$, are random, measurable, bounded, continuous on t . The global existence and uniqueness of the positive solution to this problem are proved. The sufficient conditions of stochastic boundedness, stochastic permanence, persistence in mean and extinction of the solution are obtained.

In this paper, we consider the stochastic mutualism model with jumps driven by the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= x_i(t) \left[\frac{a_{i1}(t) + a_{i2}(t)x_{3-i}(t)}{1 + x_{3-i}(t)} - c_i(t)x_i(t) \right] dt + \\ &+ \sigma_i(t)x_i(t)dw_i(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_i(t, z)x_i(t)\tilde{\nu}_1(dt, dz) + \int_{\mathbb{R}} \delta_i(t, z)x_i(t)\nu_2(dt, dz), \quad (2) \\ x_i(0) &= x_{i0} > 0, i = 1, 2, \end{aligned}$$

where $w_i(t), i = 1, 2$, are independent standard one-dimensional Wiener processes, $\tilde{\nu}_1(t, A) = \nu_1(t, A) - t\Pi_1(A)$, $\nu_i(t, A), i = 1, 2$, are independent Poisson measures, which are independent on $w_i(t), i = 1, 2$, $E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A), i = 1, 2$, $\Pi_i(A), i = 1, 2$, are a finite measures on the Borel sets A in $\mathbb{R}$.

In the following we will use the notations:

$$\begin{aligned} X(t) &= (x_1(t), x_2(t)), \quad X_0 = (x_{10}, x_{20}), \quad |X(t)| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}, \\ \mathbb{R}_+^2 &= \{X \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}, \text{ for } i = 1, 2 \\ \beta_i(t) &= \frac{\sigma_i^2(t)}{2} + \int_{\mathbb{R}} [\gamma_i(t, z) - \ln(1 + \gamma_i(t, z))]\Pi_1(dz) - \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \delta_i(t, z))\Pi_2(dz). \end{aligned}$$

For the bounded, continuous functions $f_i(t), t \in [0, +\infty), i = 1, 2$, let us denote

$$(f_i)_{\sup} = \sup_{t \geq 0} f_i(t), \quad (f_i)_{\inf} = \inf_{t \geq 0} f_i(t), \quad i = 1, 2,$$

$$f_{\max} = \max\{(f_1)_{\sup}, (f_2)_{\sup}\}, \quad f_{\min} = \min\{(f_1)_{\inf}, (f_2)_{\inf}\}.$$

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space, $w_i(t), i = 1, 2, t \geq 0$ are independent standard one-dimensional Wiener processes on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, and $\nu_i(t, A), i = 1, 2$, are independent Poisson measures defined on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ independent on $w_i(t), i = 1, 2$. Here

$E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A), i = 1, 2$, $\tilde{\nu}_i(t, A) = \nu_i(t, A) - t\Pi_i(A), i = 1, 2$, $\Pi_i(\cdot), i = 1, 2$, are finite measures on the Borel sets in $\mathbb{R}$. On the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ we consider an increasing, right continuous family of complete sub- σ -algebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, where $\mathcal{F}_t = \sigma\{w_i(s), \nu_i(s, A), s \leq t, i = 1, 2\}$.

We need the following assumption.

Assumption 1. It is assumed, that $a_{ij}(t), i, j = 1, 2$, $c_i(t), \sigma_i(t), i = 1, 2$, are bounded, continuous on t functions, $a_{ij}(t) > 0, i, j = 1, 2$, $c_{\min} > 0$, $\gamma_i(t, z), \delta_i(t, z), i = 1, 2$, are continuous on t functions and $\ln(1 + \gamma_i(t, z)), \ln(1 + \delta_i(t, z)), i = 1, 2$, are bounded, $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty, i = 1, 2$.

For any initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$ there exists a unique local solution $X(t)$ to the equation (2) on $[0, \tau_e)$, where $\sup_{t < \tau_e} |X(t)| = +\infty$ (Gikhman & Skorokhod, p. 246, Theorem 6). We prove that there exists a unique positive global solution to the equation (2).

Theorem 1. *Let Assumption 1 be fulfilled. Then there exists a unique global (no explosion) solution $X(t)$ to the equation (2) for any initial value $X_0 > 0$, and $P\{X(t) \in \mathbb{R}_+^2\} = 1$.*

Let us present the definition of stochastically ultimate boundedness (Li & Mao, 2009).

Definition 1. The solution $X(t)$ to the system (2) are said to be *stochastically ultimately bounded*, if for any $\varepsilon \in (0, 1)$, there is a positive constant $\chi = \chi(\varepsilon) > 0$, such that for any initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$, the solution to the system (2) has the property that

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} P\{|X(t)| > \chi\} < \varepsilon.$$

Theorem 2. *Under Assumption 1 the solution $X(t)$ to the system (2) is stochastically ultimately bounded for any initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$.*

The property of stochastic permanence is important since it means the long time survival in a population dynamics. From Le et al. (2016) we have following definition.

Definition 2. The solution $X(t)$ to the equation (2) is said to be *stochastically permanent* if for any $\varepsilon > 0$, there exists positive constants $H = H(\varepsilon)$, $h = h(\varepsilon)$ such that for $i = 1, 2$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} P\{x_i(t) \leq H\} \geq 1 - \varepsilon, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} P\{x_i(t) \geq h\} \geq 1 - \varepsilon,$$

for any initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$.

Theorem 3. Let Assumption 1 be fulfilled. If $\min_{i=1,2} \inf_{t \geq 0} (a_{i \min}(t) - \beta_i(t)) > 0$, where $a_{i \min}(t) = \min_{j=1,2} a_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, then the solution $X(t)$ to the equation (2) with initial condition $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$ is stochastically permanent.

Definition 3. The solution $X(t)$ to the equation (2) is said to be *extinct with probability 1* if, for every initial data $X_0 > 0$, the solution $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \geq 0$ has the property $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ almost surely (a.s.), $i = 1, 2$.

Theorem 4. Let Assumption 1 be fulfilled. If

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (a_{i \max}(s) - \beta_i(s)) ds < 0,$$

where $a_{i \max}(t) = \max_{j=1,2} a_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, then the solution $X(t)$ to the equation (2) will go to extinction a.s.

References

- Gikhman, I. I. & Skorokhod, A. V. (1982). *Stochastic differential equations and its applications*. Kiev: Naukova Dumka.
- Gopalsamy, K. (1992). *Stability and oscillation in delay differential equations of population dynamics*. Kluwer Academic Publishers.
- Li, M., Gao, H., & Wang, B. (2016). Analysis of a non-autonomous mutualism model driven by Levy jumps. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 21(4), 1189–1202. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2016.21.1189>
- Li, X., & Mao, X. (2009). Population dynamical behavior of non-autonomous Lotka–Volterra competitive system with random perturbation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 24(2), 523–545. <https://doi.org/10.3934/dcds.2009.24.523>
- Qiu, H. Lv, J. & Wang, K. (2013). Two types of permanence of a stochastic mutualism model. *Advances in Difference Equations*, (37), 1–17. <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-37>

Passive identification of the plant time response for an acting control system

I. Golinko, I. Galytska

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine
irinagalicka@gmail.com

A numerical method for calculating the dynamic characteristics of the plant in an automatic control system is considered. The method allows numerically calculating the impulse and transition characteristics of the plant according to the reaction of the control system to a change in the task. The proposed method for the numerical solution of the problem is implemented using the Duhamel integral. An example of software implementation for the proposed method is considered when modeling transients in a control system. The method can be used by developers of automatic control systems to identify the plant and adaptively configure a control system.

Key words: automatic control system, impulse response, transient response, plant, digital controller.

A promising direction for tuning automatic control systems (ACS) is to use the impulse or transition characteristics of the plant (Golinko & Kovrigo, 2010; Kubrak et al., 2010) as input information about the inertial properties of the plant, since this approach eliminates the subjectivity of the search stage for an approximate dynamic plant model. The purpose of the work is to develop a numerical method of passive identification to determine the impulse or transient characteristics of a plant for single-circuit ACS. The scheme of the classic ACS consists of: plant; adder; controller, which in general implements the PID law of regulation:

$$W_P(p) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I p} + T_D p \right), \quad (1)$$

where K_R, T_I, T_D are PID Controller setup parameters. The following notation is accepted: $y_z(t)$ is the regulator's task, $e(t)$ is the unbalance signal, $x(t)$ is the control signal, $y(t)$ is the output signal plant. We assume that the ACS is already functioning. The controller is configured in a certain way, that is, the parameters K_R, T_I, T_D are known. Over time, plant can change its dynamic properties, so we assume that they are uncertain and are identified during the operation of the control system. Current identification is implemented on an industrial controller. During operation, the controller measures the adjustable variable $y(t)$ with a sampling step $d\tau$ and generates an output signal data array:

$$y_z = Hs[z]. \quad (2)$$

The task is to determine the impulse c with the same step $d\tau$:

$$g_z = G[z]. \quad (3)$$

Mathematically, the output variable plant $y(t)$ can be represented as a convolution of the signal $x(t)$ with the impulse response $g(t)$ plant:

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)x(\tau)d\tau. \quad (4)$$

Let us consider the formation of the impulse response plant for a ACS with a PID controller at zero initial conditions $y_0 = 0$.

For $t = 0$ we have:

$$\begin{cases} e_{-1} = 0, \\ e_0 = y_* - y_0 = y_*, \\ I_0 = 0, \\ x_0 = K_R \left(e_0 + \frac{I_0}{T_I} + T_D \frac{e_0 - e_{-1}}{d\tau} \right). \end{cases} \quad (5)$$

The output characteristic plant is $y_1 = x_0 g_1 d\tau$, from where $g_1 = \frac{y_1}{x_0 d\tau}$.

For $t = d\tau$ we have:

$$\begin{cases} e_1 = y_* - y_1, \\ I_1 = I_0 + e_1 d\tau, \\ x_1 = K_R \left(e_1 + \frac{I_1}{T_I} + T_D \frac{e_1 - e_0}{d\tau} \right). \end{cases} \quad (6)$$

The output characteristic plant is

$$y_2 = \frac{x_0 g_2 + x_1 g_1}{d\tau},$$

from where

$$g_2 = \frac{y_2 d\tau - x_1 g_1}{x_0}.$$

Thus, in the general case:

$$g_z = \frac{y_z d\tau - \sum_{s=1}^z x_s \cdot g_{z-s}}{x_0}, \quad 1 \leq z \leq L. \quad (7)$$

The relationship between the transient and impulse responses is determined by the dependence

$$h(t) = \int_0^\infty g(t)dt,$$

which allows you to numerically determine the transient response plant from the known array for the impulse response g_z , using the recurrence dependence:

$$h_z = h_{z-1} + g_z d\tau. \quad (8)$$

Thus, for an existing control system, by based on the control in time of the change in the task and the output parameter, according to dependence (7) or (8), it is possible to determine the impulse or transition characteristic of the plant, respectively.

For the proposed numerical method for identifying plant, the authors conducted studies with various signals of changing the task. As examples of the method's application, the impulse and transient characteristics of the plant are calculated:

- 1) with a unit step change in the task for the ACS;
- 2) with a impulse change in the task with a unit amplitude, a duration of 30 units;
- 3) a group of modeling tests for a harmonic change in the task for the ACS.

The resulting transient process is provided by the following characteristics of the dynamic links in the control system:

$$W_P(p) = 0.8 \left(1 + \frac{1}{15p} \right), W_{OK}(p) = \frac{1}{25p^2 + 10p + 1} e^{-10p}.$$

In Fig. 1. presents one of the transients in the control system with a harmonic change in the task. The identification results are presented in Fig. 2. and Fig. 3. Attention should be paid to one essential feature of the method under consideration.

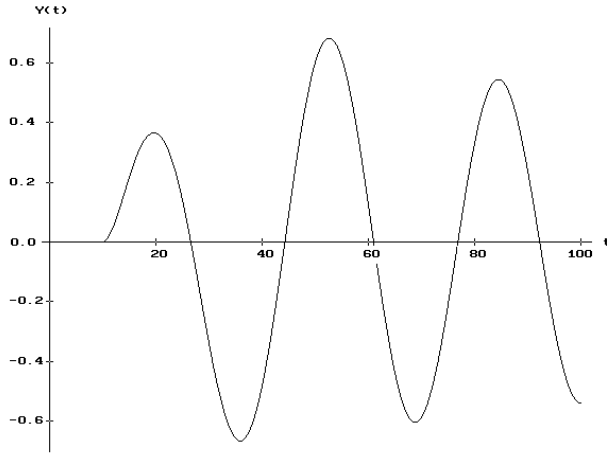


Fig. 1. The transition process in the ACS with a harmonic change in the task

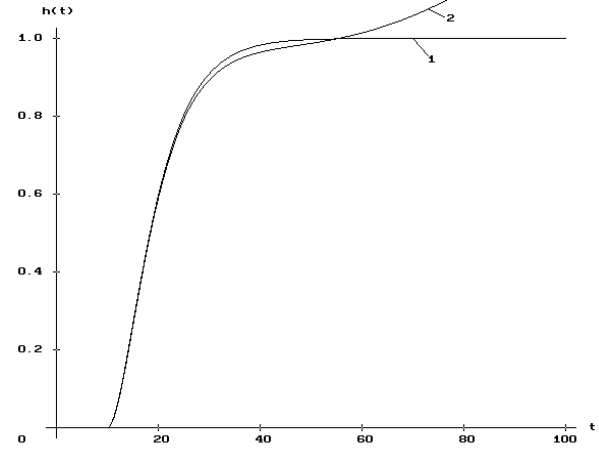


Fig. 2. Transient characteristic plant, 1 is defined for $W_{OK}(p)$, 2 is calculated by dependence (8) upon harmonic change in the task

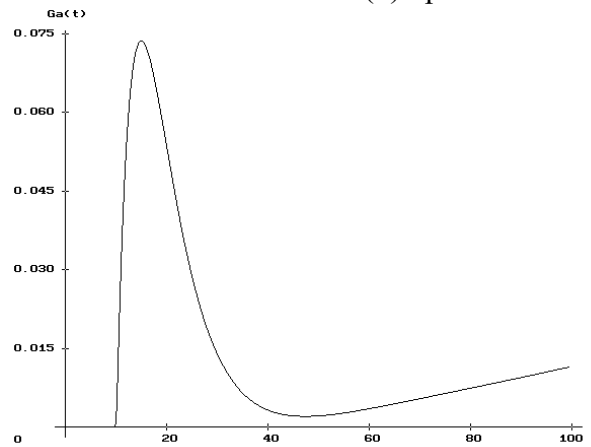


Fig. 3. The impulse response of the plant is determined by the dependence (7) upon harmonic change in the task for ACS

As can be seen from (5), the value x_0 for $T_D \neq 0$ substantially depends on the accuracy of the approximation of the derivative

$$\frac{T_D(e_0 - e_{-1})}{d\tau}.$$

Theoretically, when $t = 0$ there is an abrupt increase in the imbalance signal e from $e_{-1} = 0$ to $e_0 = y_*$. So, the derivative of e for $t = 0$ is equal to infinity, resulting in $x_0 = \infty$, but we evaluate it as

$$\frac{e_0 - e_{-1}}{d\tau}.$$

At the same time, the value of x_0 appears in the resulting formula (7), so that the infelicity in the determination of x_0 inversely affects all values g_z . Hence the practical recommendation. With passive identification, the differential component in the law of regulation must be eliminated ($T_D = 0$). It is also advisable for reasons of decreasing the influence of high-frequency interference, which the differential component in the experiment can enhance, which is undesirable. To increase the accuracy of identification, it is desirable to have a relatively large jump in the task at $t = 0$, since even a small absolute infelicity in determining small x_0 will significantly distort g_z (dependence (7)).

It is obviously impossible to completely eliminate the accumulation of infelicities in the implementation of algorithm (7). This, in particular, is evidenced by the “sliding” of the impulse response of the object with an increase in the observation time in Fig. 3 (time for which the impulse response of the object is calculated). This effect can be weakened or even eliminated if we consider the apriori known properties of the object. For example, has plant self-alignment or not. If it has, then over time the impulse response will decay to zero. And if so, then the impulse response, such as shown in Fig. 3, it is necessary to “bring to zero” somewhere in the time interval from $t = 50$ to $t = 60$. A small accuracy that can be allowed with “artificial zeroing” will have a less negative impact on the quality of identification than growth $g(t)$ at $t > 50$, which clearly does not correspond to the physics of the object’s behavior.

We should also not forget that when we intend to use the obtained impulse response to calculate transients in a closed-loop control system, then in the mode when the system setting is close to optimal, the duration of the transient process will be minimal. Under these conditions, infelicities in the “tail” part of the impulse response of the plant will not have time to manifest themselves significantly. Consequently, the influence of these infelicities on the result of modeling the system as a whole will be minimal.

According to the research results, we can conclude that this numerical method is effective for any law of task change, and the identification time should be no less than the time of the transition process plant. In the future, a modification of the identification method is planned, which makes it possible to obtain a transition characteristic from

the input and output plant signals. This will allow to exclude the regulator from the identification algorithm, the parameters of which may be known with infelicitities; in addition, the hardware implementation of a real controller may differ from (1). Also promising is the development of an adaptation algorithm for the control system using the proposed identification method.

References

- Golinko, I. M., & Kovrigo, U. M. (2010). Analysis of a hybrid control system by the impulse response of the plant. *Research Bulletin of NTUU "KPI"*, (2), 30–33. <http://old.bulletin.kpi.ua/files/2010-2-5.pdf>
- Kubrak, N. A., Golinko, I. M., & Kovrigo, U. M. (2010). Computer analysis of ASR by impulse response of the plant. *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: New solutions in modern technology*, (57), 128–132. <http://vestnik2079-5459.khpi.edu.ua/article/view/46650>

Jacobsthal number identities using the generalized Brioschi formula

T. Goy

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

taras.goy@pnu.edu.ua

In this paper, we consider some families of Hessenberg determinants the entries of which are Jacobsthal numbers. These determinant formulas may also be rewritten as identities that involve products of multinomial coefficients and powers of Jacobsthal numbers.

Keywords: Jacobsthal sequence, Jacobsthal number, Brioschi's formula, Hessenberg matrix, multinomial coefficient.

1. Introduction. The *Jacobsthal sequence* is considered as one of the important sequences among the well-known integer sequences. The *Jacobsthal sequence* $\{J_n\}_{n \geq 0}$ is defined by recurrence

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2},$$

with $J_0 = 0$, $J_1 = 1$, for $n \geq 2$. The number J_n is called the n th Jacobsthal number.

The list of the 12 terms of the Jacobsthal sequence is given in Table 1.

Table 1: Terms of J_n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
J_n	0	1	1	3	5	11	43	85	171	341	683	1365	2731

The Jacobsthal numbers have many interesting properties and applications in many fields of mathematics, as geometry, number theory, combinatorics, and probability theory; see entry A001045 in the On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (Sloane, 2019).

As examples of recent works involving the Jacobsthal numbers and its various generalizations, see Akbulak and Öteleş (2014), Aktaş and Köse (2015), Aydın (2018), Catarino et al. (2015), Cılasun (2016), Daşdemir (2019), Goy (2018a), Goy (2018b), Goy (2019b), Köken and Bozkurt (2008), Öteleş et al. (2018), Zatorsky and Goy (2016) and related references contained therein. For example, in Akbulak and Öteleş (2014) defined two n -square upper Hessenberg matrices one of which corresponds to the adjacency matrix a directed pseudo graph and investigated relations between determinants and permanents of these Hessenberg matrices and sum formulas of the Jacobsthal sequences. In Köken and Bozkurt (2008) defined the n -square Jacobsthal matrix and using this matrix derived some properties of Jacobsthal numbers. In Öteleş et al. (2018) investigated the relationships between the Hessenberg matrices and the Jacobsthal numbers. In Cılasun (2016) introduced recurrence relation for multiple-counting Jacobsthal sequences and showed their application with Fermat's little theorem. In Daşdemir (2019) extended the Jacobsthal numbers to the terms with negative subscripts and presented many identities for new forms of these numbers. In

Catarino et al. (2015) presented new families of sequences that generalize the Jacobsthal numbers and established some identities.

The purpose of the present paper is to study the Jacobsthal numbers. We investigate some families of Hessenberg determinants the entries of which are Jacobsthal numbers with successive, odd and even subscripts. Consequently, we obtain for these numbers new combinatorial identities involving multinomial coefficients.

2. Hessenberg matrices and determinants. Consider the *Hessenberg matrix* of order n having the form

$$H_n^{(k)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} k_1 a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_2 a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{n-1} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & 1 \\ k_n a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

where $a_0 \neq 0$ and $a_i \neq 0$ for at least one $i \geq 1$.

The following lemma gives the multinomial extension for $\det(H_n)$. This result directly follows from Theorem 2 in Zatorsky (2013).

Lemma 1. *Let n be a positive integer. Then*

$$\det(H_n^{(k)}) = \sum_{s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n} \frac{(-1)^{n-\sigma_n}}{\sigma_n} \left(\sum_{i=1}^n s_i k_i \right) m_n(s) a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}, \quad (1)$$

where the summation is over integers $s_j \geq 0$ satisfying Diophantine equation

$$s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n, \quad \sigma_n = s_1 + \cdots + s_n, \quad \text{and} \quad m_n(s) = \frac{(s_1 + \cdots + s_n)!}{s_1! \cdots s_n!} \text{ is the}$$

multinomial coefficient.

In the case $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 1$ we have *Brioschi's formula* (Muir, 1960).

Many combinatorial identities involving sums over integer partitions can be generated in this way. For example, similar results for Fibonacci, Lucas, Mersenne, Pell, Catalan, Oresme numbers have been recently discovered in Goy (2018c), Goy (2019b), Goy (2019c), Goy and Shattuck (2019a), Goy and Shattuck (2019b), Goy and Shattuck (2019c).

3. Determinant formulas for Jacobsthal numbers. In this section, we investigate a particular case of determinants $\det(H_n^{(k)})$, in which $k_i = i$. To simplify our notation, we write $\det(a_1, a_2, \dots, a_n)$ in place of $\det(H_n^{(k)}(a_1, a_2, \dots, a_n))$.

Recall that the *Fibonacci sequence* $\{F_n\}_{n \geq 0}$ is defined by the initial values $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ and the recurrence

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Theorem 2. For $n \geq 1$, the following identities hold

$$\det(J_0, J_1, \dots, J_{n-1}) = (-1)^n (2F_{n+1} - F_n) - (-2)^n - 1,$$

$$\det(J_1, J_2, \dots, J_n) = (-1)^{n-1} (2^{n/2} - 1)(2^{n/2} - (-1)^n),$$

$$\det(J_2, J_3, \dots, J_{n+1}) = -(-2)^n - 1,$$

$$\det(J_3, J_4, \dots, J_{n+2}) = 2^n - (-2)^n - 1,$$

$$\det(J_4, J_5, \dots, J_{n+3}) = 2^{n+1} - (-2)^n - 1,$$

$$\det(J_3, J_5, \dots, J_{2n+1}) = (-1)^n (4^n - 2^n + 1),$$

$$\det(J_2, J_4, \dots, J_{2n}) = (-1)^{n-1} (2^n - 1)^2,$$

$$\det(J_4, J_6, \dots, J_{2n+2}) = (-1)^{n-1} (4^n - 1),$$

where F_n is the n^{th} Fibonacci number.

Next, we focus on multinomial extension of Theorems 2. Formula (1), coupled with Theorem 2 above, yields the following combinatorial identities for Jacobsthal numbers.

Theorem 3. Let $n \geq 1$, $\sigma_n = s_1 + \dots + s_n$, $s_i \geq 0$, and

$m_n(s) = \frac{(s_1 + \dots + s_n)!}{s_1! \dots s_n!}$ denotes the multinomial coefficient. Then

$$\sum_{2s_1 + \dots + s_{n-1} = n} \frac{(-1)^{\sigma_{n-1}}}{\sigma_{n-1}} m_{n-1}(s) J_1^{s_1} J_2^{s_2} \dots J_{n-1}^{s_{n-1}} = \frac{2F_{n+1} - F_n - 2^n - (-1)^n}{n},$$

$$\sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + s_n = n} \frac{(-1)^{\sigma_n}}{\sigma_n} m_n(s) J_1^{s_1} J_2^{s_2} \dots J_n^{s_n} = \frac{(1 - 2^{n/2})(2^{n/2} - (-1)^n)}{n},$$

$$\sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n} \frac{(-1)^{\sigma_n}}{\sigma_n} m_n(s) J_2^{s_1} J_3^{s_2} \dots J_{n+1}^{s_n} = -\frac{2^n + (-1)^n}{n},$$

$$\sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n} \frac{(-1)^{\sigma_n}}{\sigma_n} m_n(s) J_3^{s_1} J_4^{s_2} \dots J_{n+2}^{s_n} = \frac{(-2)^n - 2^n - (-1)^n}{n},$$

$$\sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n} \frac{(-1)^{\sigma_n}}{\sigma_n} m_n(s) J_4^{s_1} J_5^{s_2} \dots J_{n+3}^{s_n} = \frac{2(-2)^n - 2^n - (-1)^n}{n},$$

$$\sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n} \frac{(-1)^{\sigma_n}}{\sigma_n} m_n(s) J_3^{s_1} J_5^{s_2} \dots J_{2n+1}^{s_n} = \frac{4^n - 2^n + 1}{n},$$

$$\sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n} \frac{(-1)^{\sigma_n}}{\sigma_n} m_n(s) J_2^{s_1} J_4^{s_2} \dots J_{2n}^{s_n} = -\frac{(2^n - 1)^2}{n},$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\dots+n s_n=n} \frac{(-1)^{\sigma_n}}{\sigma_n} m_n(s) J_4^{s_1} J_6^{s_2} \dots J_{2n+2}^{s_n} = \frac{1-4^n}{n}.$$

References

- Akbulak, M., & Öteleş, A. P. (2014). On the sums of Pell and Jacobsthal numbers by matrix method. *Bull. Iranian Math. Soc.*, 40(4), 1017–1025. <https://www.sid.ir/FileServer/JE/87820140415.pdf>
- Aktaş İ., & Köse, H. (2015). Hessenberg matrices and the Pell-Lucas and Jacobsthal numbers. *Int. J. Pure Appl. Math.*, 101(3), 425–432. <https://doi.org/10.12732/ijpam.v101i3.11>
- Aydın, F. T. (2018). On generalizations of the Jacobsthal sequence. *Notes Number Theory Discrete Math.*, 24(1), 120–135. <https://doi.org/10.7546/nntdm.2018.24.1.120-135>
- Catarino, P., Vasco, P., Campos, H., Aires, A. P., & Borges, A. (2015). New families of Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers. *Algebra Discrete Math.*, 20(1), 40–54. <http://mi.mathnet.ru/adm530>
- Cilasum, M. H. (2016). Generalized multiple counting Jacobsthal sequences of Fermat pseudoprimes. *J. Integer Seq.*, 19, Article 16.2.3. <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL19/Cilasun/cila5.pdf>
- Daşdemir, A. (2019). Mersenne, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers with negative subscripts. *Acta Math. Univ. Comenianae*, 88(1), 145–156. <http://www.iam.fmph.uniba.sk/amuc/ojs/index.php/amuc/article/view/906/645>
- Goy, T. (2018a). On combinatorial identities for Jacobsthal polynomials. *Proceedings of the Sixth Intern. Conf. on Analytic Number Theory and Spartial Tessellations “Voronoi’s Impact on Modern Science”*, (Vol. 1, pp. 41–47). Kyiv: Natl Pedagog. Dragomanov Univ. Publ.
- Goy, T. (2018b). On determinants and permanents of some Toeplitz-Hessenberg matrices whose entries are Jacobsthal numbers. *Eurasian Math. J.*, 9(4), 61–67. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2018-9-4-61-67>
- Goy, T. (2018c). On new identities for Mersenne numbers. *Appl. Math. E-Notes*, 18, 100–105. <https://www.emis.de/journals/AMEN/2018/AMEN-170424.pdf>
- Goy, T. (2019a). On generalized Brioschi’s formula and its applications. In *Proceedings of 5th Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova* (pp. 100–105). Chisinau: V. Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science. https://ibn.idsi.md/sites/default/files/imag_file/Proceedings_IMCS_55.pdf
- Goy, T. (2019b). On new families of the Jacobsthal identities. В *Сборнике трудов Международной научной конференции «Современные проблемы прикладной математики, информатики и механики»*, (Т. 3, с. 93–97). Нальчик: Изд-во КБГУ.
- Goy, T. (2019c). Pell numbers identities from Toeplitz-Hessenberg determinants. *Novi Sad J. Math.*, 49(2), 87–94. <https://doi.org/10.30755/NSJOM.08406>
- Goy, T., & Shattuck, M. (2019a). Determinant formulas of some Toeplitz-Hessenberg matrices with Catalan entries. *Proceedings Mathematical Sciences*, 129(4), 46. <https://doi.org/10.1007/s12044-019-0513-9>
- Goy, T., & Shattuck, M. (2019b). Determinants of Toeplitz-Hessenberg matrices with generalized Fibonacci entries. *Notes Number Theory Discrete Math.*, 25(4), 83–95. <https://doi.org/10.7546/nntdm.2019.25.4.83-95>
- Goy, T., & Shattuck, M. (2019c). Fibonacci and Lucas identities using Toeplitz-Hessenberg matrices. *Appl. Appl. Math.*, 14(2), 699–715. http://www.pvamu.edu/aam/wp-content/uploads/sites/182/2019/12/05-R1320_AAM_Shattuck_MS_082819_Published_121119.pdf
- Goy, T., & Zatorsky, R. (2019). On Oresme numbers and their connection with Fibonacci and Pell numbers. *Fibonacci Quart.*, 57(3), 238–245. <https://www.fq.math.ca/Papers/57-3/goy06022019.pdf>

- Köken, F., & Bozkurt, D. (2008). On the Jacobsthal numbers by matrix methods. *Int. J. Contemp. Math. Sci.* 3(13), 605–614. <http://www.m-hikari.com/ijcms-password2008/13-16-2008/kokenIJCMS13-16-2008.pdf>
- Muir, T. (1960). *The theory of determinants in the historical order of development*. (Vol. 3). New York: Dover Publications.
- Öteleş, A., Karatas, Z. Y., & Zangana, D. O. M. (2018). Jacobsthal numbers and associated Hessenberg matrices. *J. Integer Seq.*, 21, Article 18.2.5. <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL21/Oteles/ote5.pdf>
- Sloane, N. J. A. (2019). The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. <http://oeis.org>.
- Zatorsky, R., & Goy, T. (2016). Parapermanents of triangular matrices and some general theorems on number sequences. *J. Integer Seq.*, 19, Article 16.2.2. <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL19/Goy/goy2.pdf>

Lagrange's equation for a triple inverted pendulum

V. V. Kovalchuk

State University of Infrastructure and Technologies, Kyiv, Ukraine

kovaltchukvv@ukr.net

In this paper, a Lagrangian-based mathematical approach for the triple inverted pendulum with follower force on the upper pole is proposed. The purpose of this paper is to present the design and program implementation of a general procedure that yields the mathematical model in generalized coordinates to investigate the dynamic behavior of pendulum and analyze influence the follower force on the stability of the equilibrium state.

Keywords: inverted pendulum, follower force, mathematical model, stability of the equilibrium state, bifurcation.

The inverted pendulum is a mechanical idealization which poses an interesting and, with an arbitrary level of degree of freedom, difficult problem in control. This model has been a very popular benchmark for teaching and research in theoretical mechanics, control theory and robotics for the last decades (Šetka et al., 2017). Triple link inverted pendulum is also a very good model for investigation of the many real-world systems, for instance, missile launchers, human walking, Segway, automatic aircraft landing system, biped locomotive machines, flexible space structures, and of many more industrial applications (Sharma & Sahu, 2016).

Inverted pendulum systems represent a significant class of non-linear and under-actuated mechanical systems which exhibit numerous problems present in industrial applications, such as a variety of external disturbances or nonlinear behaviors under different operation conditions (Jadlovský & Sarnovský, 2013). As such they allow to analyze the features of the dynamic behavior of the system and provide an excellent test bench for evaluation and comparison of different control strategies.

The influence of essential (control) parameters of the pendulum on the dynamic behavior of the system for a two-link pendulum is analyzed in detail in (Kovalchuk, 2019). The triple pendulum has a middle link, which is affected on both sides by the adjacent links (lower and upper). Therefore, for research, a triple pendulum is a better representative of a multi-link pendulum than a double pendulum.

The purpose of this paper is to develop a mathematical model of an inverted three-link pendulum, loaded at the upper end by a follower force, which is in general asymmetric. The asymmetry of this force is determined by the orientation parameter k and angular eccentricity δ . The possible displacement of the point of application of force $\vec{P}$ is taken into account by linear eccentricity ε (Lobas & Koval'chuk, 2008).

The pendulum system we will investigate consists of three links with different lengths l_i . These links are considered weightless rods, and all masses m_i are considered to be concentrated at points at the upper ends A_i of the rods. The rods of the pendulum are interconnected and supported in point O by elastic-viscous hinges. The

upper end A_3 of the pendulum is elastically secured by a horizontal cylindrical spring. At a vertical position of the links, this spring is considered undeformed.

Nomenclature and parameter values are given in Table 1.

Table 1. Nomenclature and parameter values

Symbol	Description
l_i	length of i -th link (1 – lower, 2 – middle, 3 – upper)
m_i	mass of i -th material point
φ_i	angle of i -th link from the vertical line
c_i	stiffness coefficient of the spiral (in the joints O , in A_1 , in A_2)
c	stiffness coefficient of the horizontal cylindrical spring (in A_3)
P	value of the follower force
$\alpha = k\varphi_3 + \delta$	angle of the follower force from the vertical line (k — follower force's orientation parameter, δ — angular eccentricity)
ε	linear eccentricity
g	acceleration of gravity 9.81 m/s^2

The angles φ_i ($i = 1, 2, 3$) between the pendulum links and the vertical axis are chosen as generalized coordinates and summarized in the vector

$$q^T = [q_1, q_2, q_3] = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3].$$

The mathematical model of the triple inverted pendulum is established by the *Lagrange formalism*. This approach was chosen for several reasons: it is by definition suitable for generalizations and provides a more direct and less error-prone model design than e.g. force summation based on Newton's 2nd law (Jadlovský & Sarnovský, 2013). The implementation of the method is straightforward with the aid of symbolic software tools, for instance, Maple or MATLAB.

The condensed vector form of the equations is:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad (1)$$

where the total kinetic energy of the system is given by the sum of individual kinetic energies:

$$T = \sum_{i=1}^3 T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2).$$

In the generalized coordinates we get:

$$T_1 = \frac{m_1 l_1^2}{2} \dot{\varphi}_1^2,$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2} (l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$T_3 = \frac{m_3}{2} (l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + l_3^2 \dot{\varphi}_3^2) + m_3 (l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_1 l_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + l_2 l_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3))$$

In vector notation, the equations of motion due to (1) read as:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + G(q) = V(q, P). \quad (2)$$

Here we have the positive definite mass matrix $M(q)$, the Coriolis matrix $C(q, \dot{q})$, the damping matrix D , the vector of gravity $G(q)$ and the vector of the control V :

$$V(q, P) = P \begin{bmatrix} l_1 \sin(\varphi_1 - k\varphi_3 - \delta), \\ l_2 \sin(\varphi_2 - k\varphi_3 - \delta), \\ l_3 \sin(\varphi_3(1 - k) - \delta) + \varepsilon \cos(\varphi_3(1 - k) - \delta) \end{bmatrix}.$$

The follower force $\vec{P}$ is a non-conservative positional force. Therefore, equation (2) shows that the studied mechanical system is under the action of potential forces, non-conservative position forces and linear forces of viscous friction.

Linearizing (2) about the upright position (with zero angles $\varphi_i = 0$) yields the state space representation:

$$\ddot{x} = Ax(t) + B,$$

where $x = [\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2, \varphi_3, \dot{\varphi}_3]^T$.

The eigenvalues associated with matrix A of the linearized differential equations determine the stability of the position of the equilibrium of the pendulum.

Having obtained a mathematical model that considers the features of the system, we need to analyze the stability, controllability, and observability of the system to further understand the characteristics of the system. Design calculations and analyses are carried out using *MATLAB/toolboxes* and additional *M-files* developed by the author (Kovalchuk, 2019). The author also developed a Maple program for the automated formation of equations (2) at different pendulum parameters.

Analytical calculations and numerical simulations show that the follower force is a key factor in the dynamic behavior of the system (Kovalchuk, 2019). From the viewpoint of the qualitative theory of ODEs, follower force P appears as a bifurcation parameter on whose values the altered (stable or unstable) behavior of the model depends.

If the value of the follower force is smaller than bifurcation one, the steady state is unstable. In contrast, a follower force bigger than bifurcation one would provoke damped oscillations around a stable steady state. We can say that in this situation follower forces have a stabilizing role.

References

- Jadlovský, S., & Sarnovský, J. (2013). Modelling of classical and rotary inverted pendulum systems—a generalized approach. *Journal of Electrical Engineering*, 64(1), 12–19. <https://doi.org/10.2478/jee-2013-0002>
- Kovalchuk, V. (2019). Bifurcation analysis of the stability of one dynamical system with a follower force. *Транспортні системи і технології*, 2(33), 38–49. <https://doi.org/10.32703/2617-9040-2019-33-2-4>
- Lobas, L. G., & Koval'chuk, V. V. (2008). Stability domains of the vertical equilibrium state of a triple simple pendulum. *International Applied Mechanics*, 44(10), 1180–1190. <https://doi.org/10.1007/s10778-009-0133-7>
- Šetka, V., Čečil, R., & Schlegel, M. (2017, May). Triple inverted pendulum system implementation using a new ARM/FPGA control platform. In *2017 18th International Carpathian Control Conference (ICCC)* (pp. 321–326). IEEE. <https://doi.org/10.1109/CarpathianCC.2017.7970419>
- Sharma, K., & Sahu, V. (2016). Modeling and stabilization of cart triple link inverted pendulum using LQR controller incorporating degree of stability. *International Research Journal of Advanced Engineering and Science*, 1(4), 148–152. <http://www.irjaes.com/pdf/IRJAES-V1N4Y16/IRJAES-V1N4P198Y16.pdf>

Про один підхід до розв'язання осесиметричної задачі теплопровідності для багатошарової основи з неідеальним тепловим контактом між шарами

Н. М. Антоненко¹, І. Г. Ткаченко², Ю. В. Морозов²

¹Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна

²Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна

antonenkonina.ua@gmail.com, tig.phd81@gmail.com

Метод функцій податливості застосовано до розв'язання осесиметричної стаціонарної задачі теплопровідності для багатошарової основи з неідеальним тепловим контактом між шарами.

Ключові слова: шар, багатошарова основа, температура, осесиметрична деформація, функція податливості.

Під багатошаровою основою розумітимемо пакет зчеплених між собою шарів, що лежать на абсолютно жорсткому півпросторі. На верхній межі основи задано температуру. На нижній межі пакета підтримується нульова температура. Між шарами неідеальний тепловий контакт. Треба знайти розподіл температури в точках основи.

Шари нумеруватимемо зверху вниз, починаючи з одиниці. Півпростору присвоїмо номер $n + 1$. У кожному шарі розглянемо локальну циліндричну систему координат $O_k \rho_k z_k$ як показано на рис. 1.

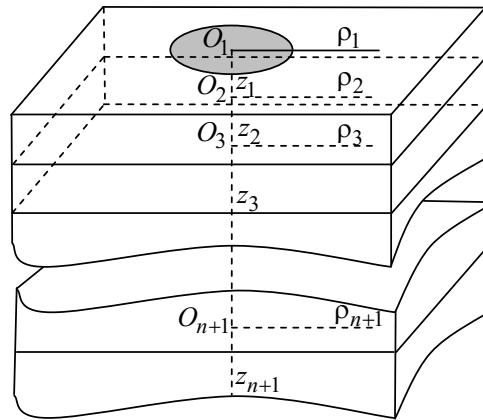


Рис. 1. Багатошарова основа

Крайові умови: $T_1(\rho, 0) = f(\rho)$, $T_n(\rho, h_n) = 0$.

Умови на спільних межах шарів (Боли & Уэйнер, 1964):

$$k_{T_k} \frac{\partial T_k}{\partial z}(\rho, h_k) = R_k^{-1} (T_{k+1}(\rho, 0) - T_k(\rho, h_k)),$$

$$k_{T_{k+1}} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}(\rho, 0) = k_{T_k} \frac{\partial T_k}{\partial z}(\rho, h_k), k = \overline{1, n},$$

де R_k — коефіцієнт теплового опору, k_{T_k} — коефіцієнт теплопровідності.

Визначення розподілу осесиметричного стаціонарного температурного поля в точках окремого шару основи зводиться до розв'язання рівняння теплопровідності (Коваленко, 1975):

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_k}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Для розв'язання поставленої задачі використано інтегральне перетворення Ганкеля нульового порядку:

$$\bar{f}^0(p) = \int_0^\infty \rho f(\rho) J_0(p\rho) d\rho, \quad f(\rho) = \int_0^\infty p \bar{f}^0(p) J_0(p\rho) dp,$$

де $J_0(x)$ — функція Бесселя нульового порядку, $p \in (0; \infty)$ — параметр інтегрального перетворення.

У кожному шарі запроваджено дві допоміжні функції:

$$\eta_k = \bar{T}_k(p, 0), \quad \varepsilon_k = \frac{1}{p} \frac{\partial \bar{T}_k}{\partial z}(p, 0).$$

Розв'язок рівняння (1) отримано в (Величко & Ткаченко, 2009):

$$\bar{T}_k(p, z) = \operatorname{ch} pz \cdot \eta_k + \operatorname{sh} pz \cdot \varepsilon_k.$$

Отже, задача зводиться до знаходження пари допоміжних функцій для кожного з шарів основи.

У роботі показано, що допоміжні функції сусідніх шарів пов'язані співвідношеннями:

$$\eta_{k+1} = (C_k + pL_k S_k) \eta_k + (S_k + pL_k C_k) \varepsilon_k, \quad \varepsilon_{k+1} = \Delta_k (S_k \eta_k + C_k \varepsilon_k), \quad (2)$$

де $S_k = \operatorname{sh} p_k$, $C_k = \operatorname{ch} p_k$, $p_k = ph_k$, $\Delta_k = k_{T_k} / k_{T_{k+1}}$, $L_k = k_{T_k} R_k$, $k = \overline{1, n}$.

Використовуючи умови на нижній межі пакета та рекурентні співвідношення (2), доведено, що допоміжні функції пов'язані співвідношенням:

$$\varepsilon_k = -r_k \eta_k, \quad (3)$$

де функції r_k називаються функціями податливості багат шарової основи.

Отримано рекурентні співвідношення для обчислення цих функцій:

$$r_n = \operatorname{cthp}_n, \quad r_k = \frac{\Delta_k S_k + r_{k+1} (C_k + pL_k S_k)}{\Delta_k C_k + r_{k+1} (S_k + pL_k C_k)}, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (4)$$

Таким чином, алгоритм розв'язання поставленої задачі наступний:

- 1) за рекурентними співвідношеннями (4) знаходимо функції податливості шарів, починаючи з нижнього шару;
- 2) із граничних умов визначаємо допоміжну функцію першого шару η_1 ;
- 3) знаходимо допоміжні функції інших шарів за формулами (2) та (3);

4) знаходимо трансформанту Ганкеля температури $\bar{T}_k(p, z)$;

5) за допомогою оберненого перетворення Ганкеля знаходимо значення температури в точках потрібного шару.

Список літератури

Боли, Б., & Уэйнер, Дж. (1964). *Теория температурных напряжений*. Москва: Мир.

Величко, И. Г., & Ткаченко, И. Г. (2009). Аналитическое решение осесимметрической задачи термоупругости для многослойного основания. *Вісник Східноукраїнського нац. ун-ту ім. В. Даля*, 4.

Коваленко, А. Д. (1975). *Термоупругость*. Киев: Вища школа.

Керування потокорозподілом інженерної мережі в аварійній ситуації

О. І. Баліна¹, І. С. Безклубенко¹, Ю. П. Буценко²

¹Київський національний університет будівництва і архітектури,
Київ, Україна

²Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Київ, Україна

i.bezklubenko@gmail.com, elena.i.balina@gmail.com,
armchairdoc@ukr.net

За допомогою теорії графів побудовано дві математичні моделі, які дозволяють ще на стадії проектування врахувати можливість аварійної ситуації і відключити аварійний вузол, оперативно змінити структуру й параметри магістральних та розподільчих мереж і забезпечити функціонування мережі.

Проведено порівняльний аналіз цих математичних моделей і визначені умови для їх застосування.

Ключові слова: інженерна мережа, графи, проектування, оптимізація.

Задача проектування інженерної мережі полягає у визначенні розташування підсистем мережі (Євдокимов, 1976), значень її параметрів і змінних, а також такі схеми з'єднання цих підсистем, що будуть забезпечувати (без обмежень на параметри і змінні) бажаний потокорозподіл у підсистемах споживання при мінімізації деякого критерія.

Під час експлуатації мережевих систем виникає необхідність керування потокорозподілом у мережі. Задача керування потокорозподілом в аварійній ситуації полягає у виборі таких координат регулюючих органів, які дозволяють відключити аварійний вузол і забезпечити функціонування мережі. Таку ситуацію бажано враховувати на стадії проектування мережевої системи. Мова йде про те, щоб спроектувати мережу таким чином, щоб непрацюючий вузол вимикався за допомогою мінімальної кількості засувки, зменшуючи при цьому втрати від неподання цільового продукту користувачам.

Під інженерною мережею, у її класичному сенсі (Євдокимов, 1976), розуміють мережу (газову, водопровідну, вентиляційну і т.п.) для процесів потокорозподілу або транспортування цільового продукту якої визначені перший і другий закони Кірхгофа. Уважаємо, що топологія мережі, розташування джерел і споживачів відомі. Припускаємо, що витік цільового продукту відбувається в k -й вершині і нам відомі всі шляхи, які ведуть до k -ї вершини ($i = \overline{1, N}$). Граф мережі містить L ребер; кожному j -му ребру графа ($j = \overline{1, L}$) відповідає деяка змінна величина x_j , яка може набувати тільки двох значень:

$$x_j = \begin{cases} 0, & \text{якщо є засувка на } j\text{-му ребрі,} \\ 1, & \text{якщо немає засувки на } j\text{-му ребрі.} \end{cases} \quad (1)$$

Тоді умову відсутності цільового продукту можемо записати таким чином:

$$\sum_{i=1} \prod_{j \in J_i} x_j(k) = 0 \quad (2)$$

де J_i — множина тих ребер j , які входять до i -го шляху, що веде до k -ї вершини.

Нехай $\sum_{j \in J_i} (1 - x_j(k))$ загальна кількість засувов, яку необхідно мінімізувати.

Виключаючи з цього виразу сталу і змінюючи напрям оптимізації, отримаємо першу цільову функцію задачі:

$$\sum_{j \in J_i} x_j(k) \rightarrow \max \quad (3)$$

Через $F(x)$ позначимо, алгоритмічно задану функцію збитків від недопостачання цільового продукту користувачам системи, яку необхідно мінімізувати. Функція $F(x)$ є різницею між кількістю цільового продукту, що має бути подано користувачам мережі $F^{*\bullet}(x)$ і кількістю цільового продукту, що подано користувачам $F^\bullet(x)$, тобто

$$F(x) = F^{*\bullet}(x) - F^\bullet(x).$$

Очевидно, що мінімізація функції $F(x)$ рівносильна максимізації функції $F^\bullet(x)$:

$$F^\bullet(x) \rightarrow \max \quad (4)$$

Інакше кажучи, $F^\bullet(x)$ — функція, яка визначається кількістю невідключених користувачів, відповідаючих визначеній комбінації перекритих ребер. Задача полягає у знаходженні таких значень x_j , які будуть максимізувати (3), (4) при обмеженнях (1), (2).

Розгляньмо інший підхід до побудови математичної моделі тієї ж задачі.

Задано граф, який має m вершин і L дуг. Кожній дузі графа поставлені у відповідність послідовна (q) і паралельна (h) змінні, що задовольняють законам Кірхгофа, а також дискретна змінна

$$x_j = \begin{cases} 0, & \text{якщо засувка закрита на } j\text{-му ребрі,} \\ 1, & \text{якщо відкрита на } j\text{-му ребрі.} \end{cases}$$

Математична модель потокорозподілу, що встановився, з урахуванням нової змінної x_j запишеться так:

$$Aqx = 0, Bh = 0, h = Sq^2x \quad (1^*)$$

Умова відсутності потоку в k -й вершині виглядає так:

$$\sum_{j \in I_k} q_j = 0, \quad (2^*)$$

де I_k — множина ребер, що входять у k -ту вершину, q_j — потік у j -му ребрі, з'єднаним з k -ю вершиною.

Цільова функція (3) для цієї моделі виглядає так само:

$$\sum_{j \in J_i} x_j(k) \rightarrow \max \quad (3^*)$$

Функція $F^*(x)$ тут визначає сумарний тиск усіх користувачів системи. Ураховуючи, що тиск в i -й вершині складається із суми тисків у ребрах, що в неї входять, отримаємо:

$$F^*(x) = \sum_{i=1}^m C_i \sum_{j \in I_i} q_j^2 x_j r_j \rightarrow \max \quad (4^*)$$

де C_i — ваговий коефіцієнт i -ї вершини, I_i — множина ребер, що входять до i -ї вершини, r_j — опір j -го ребра.

Задача полягає в знаходженні таких значень x_j , які б максимізували (3*) і (4*) при обмеженнях (1*), (2*).

Перша математична модель системи дає стійкій щодо змін параметрів мережі (тисків, потоків на аварійних ділянках) розв'язок, але застосування її для великих мереж пов'язане зі значними обчислювальними труднощами, бо вона формалізується у вигляді задачі дискретної оптимізації.

Друга математична модель формалізується як задача неперервного опуклого програмування і може бути ефективно розв'язана існуючими методами (Хедли, 1967; Безклубенко, 2017) для відносно великих мереж, але дає нестійкий розв'язок, оскільки вимикання аварійного вузла відбувається за рахунок встановлення динамічної рівноваги в мережі. Треба зауважити, що внаслідок проведених обчислювальних експериментів, кількість необхідних регулюючих пристроїв (засувки) у першому випадку завжди перевищує їх кількість в другому.

Тому можна зробити висновок, що застосування моделі першого типу доцільне для малих мереж, де потрібна стійкість до збурення вимкнень аварійного вузла і не висуваються особливі вимоги до кількості регулюючих органів.

Застосування моделі другого типу можливо для складніших, але стабільних мереж.

Список літератури

- Безклубенко, І. С. (2017). Завдання вектора переваги критеріїв при виборі варіанту проекту інженерної мережі. *Управління розвитком складних систем*, 30, 132–135. <http://urss.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-30/19.pdf>
- Безклубенко, І. С., & Лесько, В. І. (2014). Застосування теорії графів до задач проектування інженерних мереж. У *Матеріалах III Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 12–15). Київ: НТУУ «КПІ». <http://matan.kpi.ua/public/files/mvstu3/mvstu3-abstracts.pdf>
- Евдокимов, А. Г. (1976). *Оптимальные задачи на инженерных сетях*. Харьков: Высшая школа.
- Хедли, Д. (1967). *Нелинейное и динамическое программирование*. Москва: Мир.

Про нерівність Лебега — Ландау на класах ψ -диференційовних функцій

В. В. Бовсуновська, П. В. Задерей, Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

valeri0202@ukr.net, zadereypv@ukr.net, zadereynm@gmail.com,

g.nefyodova@gmail.com

У статті отримано нерівність Лебега — Ландау на класах ψ -диференційовних функцій. Доведено нерівності Лебега — Ландау, де головний член містить два доданки, що є узагальненням результатів О. І. Степанця, В. В. Савчука та А. М. Швецової.

Ключові слова: найкраще наближення аналітичних функцій у крузі, частинна сума ряду Тейлора, умови Сідона — Теляковського, ψ -похідна за Степанцем.

Через $A(D)$ позначимо множину аналітичних в $D = \{z : |z| < 1\}$ функцій $f(z)$, а через H_∞ — простір функцій $f \in A(D)$ із скінченною нормою

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{H_\infty} = \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty.$$

Нехай $S_n(f; z)$ — частинні суми ряду Тейлора — Маклорена функцій $f \in H_\infty$

$$S_n(f; z) = S_n(f) = \sum_{k=0}^n c_k z^k, \quad z \in D, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

а $C(T)_+$, $L_\infty(T)_+$, $L_1(T)_+$ — простори функцій $f(e^{it})$, відповідно, неперервних, суттєво обмежених та сумовних на $T = \{z : |z| = 1\}$ з нормами

$$\|f\|_c = \max_{z \in T} |f(z)|, \quad \|f\|_{L_\infty} = \text{vraisup}_{z \in T} |f(z)|, \quad \|f\|_{L_1} = \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z)| |dz|$$

і таких, що їх коефіцієнти Фур'є

$$\tilde{f}(-k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{ikt} dt = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

О. І. Степанцем (2002, ст. 261) було запроваджено поняття ψ -похідної таким чином. Нехай $\psi = \{\psi(k)\}_{k=0}^\infty$, $\psi(0) = 1$, — довільна послідовність комплексних чисел, а функція $f \in L_1(T)_+$ і

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt}$$

її ряд Фур'є. Якщо ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi(k) \hat{f}(k) e^{ikt}$$

є рядом Фур'є деякої функції $g \in L_1(T)_+$, то її називають ψ -інтегралом функції f і позначають $\mathcal{I}^\psi f$. Множину ψ -інтегралів усіх функцій $f \in L_1(T)_+$ позначають через $L^\psi(T)_+$.

Якщо для заданої функції $F \in L^\psi(T)_+$ вказано функцію $f \in L_1(T)_+$ таку, що майже скрізь на T виконується рівність $F(e^{it}) = \mathcal{I}^\psi f(e^{it})$, то функцію f називають ψ -похідною функції F і позначають $f = F^\psi$.

Нехай, далі $C^\psi(T)_+ = L^\psi(T)_+ \cap C(T)_+$; $A(\bar{D})$ — простір функцій аналітичних у крузі D і неперервних у замкнутому крузі $\bar{D} = \{z : |z| \leq 1\}$ з нормою $\|f\|_{A(\bar{D})} = \max_{z \in \bar{D}} |f(z)|$; $E_n(f)_{A(\bar{D})} = \inf_{p_n \in P_n} \|f(z) - p_n(z)\|_{A(\bar{D})}$ — найкраще наближення функції f многочленами

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k \in P_n$$

— множина многочленів степеня не вище n ; $r_n(f) = f(z) - S_n(f; z)$.

Відомо, що $\forall f \in A(\bar{D})$ при довільному $n \in \mathbb{N}$ (Степанец, 2002, с. 287):

$$\|r_n(f)\|_{A(\bar{D})} \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1) \right) E_n(f)_{A(\bar{D})}. \quad (2)$$

Ця нерівність є аналогом відомої нерівності Лебега (Степанец, 2002) і її називають *нерівністю Лебега — Ландау* для функцій $f \in A(\bar{D})$.

Метою даної роботи є отримання нерівностей Лебега — Ландау для функцій з класів $C^\psi(T)_+$.

Запровадимо такі позначення: $\mathfrak{M}$ — множина опуклих донизу при $\nu \geq 1$ функцій $\psi(\nu)$ таких, що $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi(\nu) = 0$; $\mathfrak{M}_0$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, що справджують умову

$$0 < \mu(\psi, t) := \frac{t}{\eta(t) - t} \leq K < \infty, \quad \eta(t) = \psi^{-1} \left(\frac{1}{2} \psi(t) \right).$$

Савчуком (1998) встановлено такий аналог нерівності Лебега — Ландау (1): якщо $\psi = \psi_1 + \psi_2$ і $\psi_1, \psi_2 \in m_0$, то $\forall f \in C^\psi(T)_+$ при $\forall n \in \mathbb{N}$ правдива нерівність

$$\|r_n(f)\|_{C(T)_+} \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1) \right) |\psi(n)| E_n(f^\psi)_{C(T)_+}, \quad (3)$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена за n ; для $\forall f \in C^\psi(T)_+$ при кожному $n \in \mathbb{N}$ знайдеться функція $F(e^{it}) = F(e^{it}, n)$ така, що

$$E_n(F^\psi)_{C(T)_+} = E_n(f^\psi)_{C(T)_+}$$

і для цієї функції співвідношення (3) стає рівністю.

Нехай

$$V_{n+1}^\infty(\psi) = \int_{n+1}^\infty \text{vrai sup}_{\nu \geq t} |\psi'(t)| dt,$$

H_∞^ψ — клас функцій з H_∞ для яких ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\psi(k)} c_k z^k = f^\psi(z)$$

є рядом Тейлора функції f^ψ і $\|f^\psi\|_\infty \leq 1$. Подібний клас функцій був введений Ж. Шейком (Scheick, 1966).

Швецовою (2000) було встановлено, що якщо $n \in \mathbb{N}$, $\psi(\cdot) : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ — локально абсолютно неперервна на $[n+1; \infty)$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi(\nu) = 0$,

$\psi(k) \neq 0 \forall k \in \mathbb{N}$, $\tilde{V}_{n+1}^\infty(\psi) < \infty$, то

$$\sup_{f: f^\psi \in H_\infty} \frac{\|f - S_n(f)\|_\infty}{E_n(f^\psi)_\infty} = \sup_{f \in H_\infty^\psi} \|f - S_n(f)\|_\infty = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{|\psi(n+k)|}{k} + \theta \tilde{V}_{n+1}^\infty(\psi), \quad (4)$$

де $|\theta| \leq K$.

Кажуть, що послідовність $\{c_k\}_{k=0}^\infty, c_k \in \mathbb{C}$, справджує умови типу Сідона — Теляковського (умови $(S-T)^*$), якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0, \quad (5)$$

та існують такі числа A_k , що

$$|\Delta c_k| := |c_k - c_{k+1}| \leq A_k, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

і

$$\sum_{k=0}^\infty (k+1) |\Delta A_k| < \infty, \quad (7)$$

а також збігається ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{|c_k|}{k} < \infty \quad (8)$$

Умови $(S-T)^*$, як було встановлено Л. Лейндлером (Leindler, 2000), еквівалентні (тобто визначають одну й ту ж множину рядів) таким умовам: існують числа $A_k \downarrow 0$, що виконуються нерівності (6); збігається ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty$, а також має місце (8). Останні умови називають *умовами Сідона — Теляковського* і позначають $S - T$.

Уточнімо співвідношення (4), а саме виділімо ще один член, який при деяких досить малих $\psi(\cdot)$ буде більшим, ніж $\sum_{k=1}^n \frac{|\psi(n+k)|}{k}$.

Теорема. Нехай послідовність $\{\psi(k)\}_{k=0}^{\infty} \in (S - T)$, тобто для $\psi(k)$ виконано умови (5)–(8). Тоді для $\forall f \in H_{\infty}^{\psi}$ при $n \in \mathbb{N}$ правдива нерівність:

$$\begin{aligned} & \|f(z) - S_n(f, z)\|_c \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{|\psi(n+k)|}{k} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| \right) E_n(f^{\psi})_{A(\bar{D})} \end{aligned}$$

Нехай $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}, k \in \mathbb{N}$, послідовність невід'ємних чисел, що монотонно прямує до нуля і

$$C_{\varepsilon} = f \in C(T)_{+} : E_n(f)_{C(T)_{+}} \leq \varepsilon_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

і нехай $C^{\bar{\psi}} C_{\varepsilon}$ — множина неперервних на T функцій, $\bar{\psi}$ — похідні яких належать до C_{ε} .

Тоді

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in C^{\bar{\psi}} C_{\varepsilon}} \|f(z) - S_n(f; z)\|_c \asymp \\ & \asymp \left(\sum_{k=1}^n \frac{|\psi(n+k)|}{k} + \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| \right) \varepsilon_n \end{aligned}$$

Список літератури

- Leindler, L. (2000). On the equivalence of classes of numerical sequences. *Analysis Mathematica*, 26(3), 227–234. <https://doi.org/10.1023/A:1005657203064>
- Scheick, J. T. (1966). Polynomial approximation of functions analytic in a disk. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17(6), 1238–1243. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1966-0206303-8>
- Савчук, В. В. (1998). Швидкість збіжності ряду Тейлора для деяких класів аналітичних функцій. *Укр. мат. журн.*, 50(7), 1001–1003.
http://umj.imath.kiev.ua/archiv/1998/07/umj_1998_07_8250_97102.pdf
- Степанец, А. И. (2002). *Методы теории приближений*. Киев: Ин-т математики НАН України.
- Швецова, А. М. (2000). Приближение частными суммами ряда Тейлора и наилучшее приближение некоторых классов функций, аналитических в единичном круге. *Вісник Харківського нац. університету. Серія Математика, прикладна математика і механіка*, (475), 208–217.

Кластерний підхід до діагностування складних систем

Ю. П. Буценко, В. А. Лабжинський

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

armchairdoc@ukr.net

Сформульовані завдання процедури діагностування стану складних систем, перераховані переваги централізованого підходу до технічного діагностування, вказані методи підвищення вірогідності діагностичної інформації.

Ключові слова: діагностування стану, складні системи, розпізнавання надзвичайних ситуацій, аналіз багатовимірних часових рядів.

При діагностуванні стану систем, які містять розподілену у просторі сукупність елементів (наприклад, парогенеруючих та енергогенеруючих) традиційно використовують датчики механічних та акустичних коливань. У багатьох випадках набір таких датчиків, з одного боку, дозволяє отримувати вірогіднішу інформацію завдяки дублюванню, а іншого боку утруднює її інтерпретацію через взаємозалежність вхідних сигналів для різних датчиків. Отже, виникають, окрім традиційних задач виділення трендів динамічних сигналів, установлення швидкостей зростання амплітуд та виявлення відхилень у амплітудних і фазових спектрах, такі додаткові задачі (Белов, 2003):

- виділення з інформації, що надходить від кожного конкретного датчика, складових, які походять від кожного конкретного елемента системи;
- використання сигналів, які мають одне джерело, але надходять від різних датчиків, для більш вірогідного визначення характеру їх походження;
- установлення зв'язків між сигналами, отримуваними від одного джерела, у різних частотних діапазонах;
- визначення взаємозалежностей між сигналами, отримуваними від різних елементів системи, з точки зору їх взаємного розташування та технологічних зв'язків. Під час розв'язання вказаного комплексу задач є доцільним використання нейронної мережі, навчання якої здійснюють, використовуючи тестові та перевіірочні набори даних, отримувані в різних режимах роботи системи.

Ураховуючи значну кількість датчиків, які «обслуговують» систему, у першу чергу підлягає розв'язанню проблема їхньої кластеризації, тобто виявлення сукупностей датчиків, що отримують вірогідну інформацію від того самого елемента системи. Для цього найбільш природним є використання методу виявлення структур, що ґрунтується на кластерному аналізі та методах теорії графів (Катаев & Катаев, 2012).

Розгляньмо граф, вершинами якого є всі існуючі датчики та можливі джерела сигналів, що сприймаються ними. В останньому випадку «вершини» насправді суть просторові об'єкти, але це не виключає можливості побудови ребер графа з вартостями, що відповідають відстаням між вершинами (під відстанями між просторовими об'єктами M та N розуміємо величину

$$D(M, N) = \min_{x \in M, y \in N} d(x, y),$$

де $d(x, y)$ — традиційна відстань між точками x, y відповідних об'єктів. Визначивши певний поріг відстані, видалимо з графа ребра з вартостями, які перевищують цей поріг, якщо це стосується відстаней між датчиками та джерелами інформації, та меншими, якщо йдеться про відстані між датчиками. В останньому випадку формують граф, що складається з відповідних датчиків, інформація, знята з вершин якого, використовується для взаємоперевірки, тобто підвищення вірогідності отримуваної інформації. Поступово зменшуючи порогове значення для ребер першого типу та збільшуючи для ребер другого типу, отримаємо в першому випадку незв'язний граф, розклад якого на підграфи визначить первинну кластеризацію системи, у другому ж випадку отримаємо граф, сукупність вершин якого, що є датчиками, визначатиме можливість «перехресної» (у тому числі з використанням мажоритарних процедур) перевірки вірогідності отриманих результатів. Проведення такого роду кластеризації для об'єднання, з одного боку джерел інформації та її одержувачів, та, з іншого боку, одержувачів інформації з аналогічних джерел, дозволяє, з одного боку, формувати обґрунтовану стратегію розвитку мережі датчиків, а з іншого боку — отримувати від них найбільш вірогідну та убезпечену від можливої втрати частини датчиків інформацію. Подальше дослідження інформації здійснюється шляхом використання багатовимірною узагальнення сингулярного спектрального аналізу (метод МССА) (Степанов & Голяндина, 2005). Серед іншого, використання такого методу дозволяє «продовжувати» ряд спостережень, тобто прогнозувати подальшу інформацію від системи, зокрема, запобігати виникненню аварійних ситуацій.

Головною метою використання вказаного методу є виділення трендів (у першу чергу, лінійних або експонентних), періодичних компонент та шумів. Важливо, що при цьому не є необхідною інформація про параметричний вигляд тренду, існування та періодичність коливальних компонент. Зазначимо, що теоретичні дослідження системи, як правило, дозволяють визначити як «природні» (робочі) частоти коливань, так і «критичні» (пов'язані з відхиленням від нормальних режимів функціонування). Виявлення останніх є обов'язковим завданням для задіяних систем оброблення інформації.

Список літератури

- Белов, П. Г. (2003). *Системный анализ и моделирование опасных процессов в техносфере*. Москва: Академия.
- Катаев, С. Г., & Катаев, М. Ю. (2012). Математический метод и алгоритм сжатия многомерных временных рядов. *Доклады ТУСУР*, (1.2), 208–212. <https://journal.tusur.ru/storage/45773/208.pdf>
- Степанов, Д. В., & Голяндина, Н. Э. (2005). Варианты метода «гусеница»-SSA для прогноза многомерных временных рядов. В *Трудах IV Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления»* (с. 1831–1847). Москва: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. http://gistatgroup.com/cat/mssa_forecast_ru.pdf

Марківська модель технічного стану в електронних пристроях із структурною надлишковістю

Ю. П. Буценко, Ю. Г. Савченко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Сьогодні застосування структурної надлишковості для забезпечення надійності електронного обладнання перестало бути чимось екзотичним і застосовується не лише в апаратурі критичного призначення (для керування реальними фізичними об'єктами), але й у системах комерційної та банківської сфери. Таке розширення сфери застосування можна пояснити принаймні двома факторами: досягненнями мікро- та наноелектроніки, що практично звело до мінімуму значення масо-габаритних факторів, та, як наслідок зменшення цінового фактору.

Мажоритарний метод залишається одним з найбільш популярних щодо реального практичного застосування завдяки його простоті та ефективності з точки зору суттєвого підвищення показників надійності апаратури або електронних систем у цілому. Ідея методу Джона фон Неймана (von Neumann, 1956) доволі проста й полягає у використанні структурної надлишковості шляхом заміни одного компонента системи n компонентами, а сигнал на виході структури утворювати як результат «голосування» вихідних сигналів компонентів за принципом простої більшості. Компонентами структури можуть бути пристрої різноманітної складності від найпростіших логічних схем до комп'ютерів або сегментів телекомунікаційних мереж, окремих серверів тощо (Федухин & Сеспедес Гарсія, 2018). За аналогічним принципом побудовані кластери «високої готовності», що широко застосовують у банківській сфері. Одна з найбільш поширених технологій забезпечення надійності, яка підтримується фірмою Tandem, побудови так званих промислових комп'ютерів, базується саме на застосуванні мажоритарного методу. Для утворення відповідних сигналів які блокують автоматичне керування об'єктом або попереджають про відмову частини обладнання (зменшення запасу надійності) окрім схем власне відновлення керуючого сигналу y структура повинна бути доповнена логічними схемами, що реалізують функції голосування за простою більшістю, логічною суми та логічного добутку. Зазначимо тут, що наведенні міркування відповідають припущенню, що поява несправностей у компонентах є подіями незалежними, тому ситуації, коли одночасно виникає дві або три несправності є малоімовірною подією і тому нею можна знехтувати. Звичайно, таке припущення не завжди відповідає дійсності, але заради спрощення аналізу його можна прийняти. Для відновлюваних електронних систем (тобто таких, які допускають обслуговування в період виконання системою заданих функцій) надійність, очевидно, повинна визначатись з урахуванням не лише функції розподілу ймовірності безвідмовної роботи компонентів, а й функції розподілу часу відновлення (заміни несправних компонентів у «жовтій» та «червоній» зоні технічних станів). У цьому випадку наявність допоміжної сигналізації може суттєво поліпшити за-

гальні показники надійності за рахунок кардинального скорочення часу пошуку несправних компонентів. Із практики обслуговування електронної апаратури добре відомо, що в більшості випадків левова частина часу на відновлення припадає саме на пошук несправного компонента, а сама процедура відновлення шляхом заміни несправного компонента справним забирає порівняно мало часу. Тому, коли мова йде не лише про ймовірність безвідмовної (безпомилкової) роботи, але й коефіцієнт готовності, який за існуючими стандартами є основним показником надійності для систем цього класу, то фактор часу відновлення справного технічного стану виявляється, по суті, вирішальним.

Розгляньмо структуру з точки зору організації контролю за її ТС. Вважатимемо, що початковою конфігурацією системи є «тандем»: дві пари однакових компонентів, рішення про ТС контрольованої системи приймається за умови, що в початковий момент обидві пари видають на своїх виходах однакові сигнали. Одночасно система знаходиться під впливом потоку відмов, який уважатимемо пуассонівським однорідним, інтенсивності, залежної від кількості елементів у системі (структурі). Алгоритм функціонування тандему відрізняється від традиційного алгоритму вимикання пари компонентів, у яких не збігаються сигнали на виходах: після відмови одного із компонентів пари система переходить у мажоритарну структуру «2 з 3» (триканального резервування з голосуванням виходів).

З теоретичної точки зору можна було б розглядати й процес подальшої деградації системи, тобто переходу до двоканальних та одноканальних структур. Але практично вже двоканальну структуру слід вважати фінальною, у тому розумінні, що поява на входах ВО двох різних сигналів унеможливорює відновлення правильного сигналу і свідчить про відмову структури в цілому. Тобто двоканальний варіант має право на життя лише як спосіб підвищення вірогідності отриманого результату обробки інформації, а не ймовірності безвідмовної роботи. Очевидно, у ситуації, коли на виходах пари компонентів, які ще залишилися, умовно кажучи, «живими», сигнали відрізняються, без додаткової інформації про їх технічний стан неможливо віддати перевагу жодному із двох сигналів як правильному. (До речі, таку додаткову інформацію можна отримати лише від засобів апаратного самоконтролю компонента структури, але такі конфігурації у доповіді ми не розглядаємо). Тобто, якщо вважати, що інформація про технічний стан компонента структури обмежена для ВО лише значеннями інформаційних сигналів на його виході, то слід обмежити розгляд деградаційного процесу переходом структури у двоканальний режим.

Нехай існує N режимів функціонування структури $R_1, R_2, \dots, R_N$, для кожного з яких характерний стаціонарний потік подій з інтенсивністю $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ відповідно, що викликає відмову одного з компонентів структури протягом одного проміжку часу з ймовірностями $p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_N^{(k)}, k = 2, 3, 4$ є кількість функціонуючих на даному проміжку часу компонентів. Припустимо, що на довільному проміжку дискретного часу ймовірність роботи в у одному з вказаних

режимі складає $q_1, q_2, \dots, q_N$ відповідно. Зазначимо, що такий підхід дозволяє уникнути розгляду системи у припущенні про переключення режимів керуючим ланцюгом Маркова, що веде до невиправданого збільшення фазового простору задачі. На практиці можна стверджувати існування у вищезгаданого керуючого ланцюга стаціонарного розподілу $\bar{S} = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N\}$. У такому випадку функціонування структури описується ланцюгом Маркова з дискретним часом та станами A_1, A_2, A_3, A_4 (описують функціонування структури з чотирма, трьома, двома, та одним працездатним компонентом відповідно), матриця перехідних ймовірностей якого наводиться у повному варіанті даної роботи.

Стан A_4 є поглинаючим, середній час еволюції системи до потрапляння в нього є сумою математичних сподівань часів, необхідних для переходу з A_1 до A_2 , з A_2 до A_3 та A_3 до A_4 .

Аналогічно до попереднього, може бути розглянута марківська модель відновлення структури. Виходячи з попередньо розглянутого, можна припустити, що «відновлюючий» компонент починає виконувати свої функції в момент, коли структура містить один, два чи три непрацездатні компоненти. Відповідна матриця перехідних ймовірностей наведена в повному варіанті даної роботи, еволюція такого ланцюга вважається незалежною від попереднього. Поглинаючим станом для цієї ситуації буде «нульові»-елементи, які підлягають відновленню відсутні, структура переходить у непрацюючий («сплячий») стан. Випадок наявності «гарячого резерву» ми не розглядаємо, оскільки у випадку необмеженості такого ресурсу він збігається з попереднім, а у випадку наявності обмежень є детально дослідженим (Дружинин, 1986).

Висновки. Зазначмо, що використовуючи термін «деградація», ми надаємо процесу функціонування пристрою або обладнання дещо песимістичного забарвлення, хоча можна цей процес розглядати з іншого боку. Насправді ж, якщо функціонування електронного пристрою із структурною надлишковою розглядати разом із засобами відновлення, то можна говорити про *адаптацію* пристрою до відмов, і переходу, по суті, до реконфігурації структури залежно від зміни її технічного стану (частини обладнання, яка вже відмовила). Такий погляд дозволяє оптимістично дивитися на процес зміни технічних станів апаратури. З цієї точки зору можна зробити такі висновки.

1. Традиційно методи використання структурної надлишковості застосовувались здебільшого як інструмент забезпечення надійності (безвідмовності) електронної апаратури, компоненти якої не можуть бути відновлені під час експлуатації (замінені новими та справними) з конструктивних або експлуатаційних причин. Тому основний ефект, що визначав доцільність та ефективність використання надлишковості обґрунтовано мав оцінюватись збільшенням ймовірності безвідмовної роботи обладнання. Застосування ж структурної надлишковості до відновлюваної апаратури відкриває нові, і доволі перспективні, мож-

ливості покращення основного показника надійності апаратури цього класу, а саме коефіцієнта готовності.

2. До функції ВО, яка полягає у власне відновленні інформаційних сигналів, доцільно додати функції визначення реального технічного стану структури із надлишковістю. Цей технічний стан слід визначати в термінах «запасу міцності» структури, тобто в кількості компонентів, що утворюють структуру, які залишаються працездатними. Такі можливості виникають саме в надлишкових структурах та розширюються зі зростанням рівня надлишковості.

3. У разі, коли обладнання обслуговується (відновлюване) у процесі експлуатації, така інформація є ключовою для мінімізації часу відновлення і дозволяє суттєво збільшити коефіцієнт готовності апаратури за рахунок зменшення часу на пошук компонентів, які необхідно замінити (відновити).

4. Слід також зазначити, що основна частина наведених розміркувань та попередніх висновків може бути застосована не лише до цифрової апаратури, що обробляє двійкову інформацію, але й до аналогових пристроїв, які обробляють аналогові сигнали. Цей висновок ґрунтується на тому, що дві основні функції ВО — порівняння значень сигналів та визначення більшості співпадаючих значень — можуть бути досить просто реалізовані у випадку, коли сигнали є неперервними.

5. І, нарешті, найголовніше, на думку авторів — це створення умов для виявлення прихованих помилок у сигналах на виходах структури в цілому. Це набуває першорядного значення у випадках, коли такі сигнали використовують для безпосереднього керування реальними фізичними об'єктами. Саме наявність «накладеної» на структуру електронної системи мережі сигналізації технічних станів компонентів дає можливість превентивно (до появи критичних станів) запобігти виникненню аварійних станів).

Список літератури

- von Neumann, J. (1956). Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components. *Automata studies*, 34, 43–98.
- Дружинин, Г. В. (1986). *Надежность автоматизированных производственных систем*. Москва: Энергоатомиздат.
- Федухин, А. В., & Сеспедес Гарсия, П. Д. (2018). К вопросу о структурах отказоустойчивых компьютеров фирмы Stratus Computer Inc. *Математичні машини і системи*, (4), 87–100. <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/150671>

Определение параметров ядер наследственности в линейной теории вязкоупругости методом интегрального преобразования Лапласа — Карсона

В. П. Голуб

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина
creep@inmech.kiev.ua

Решается задача определения параметров ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при одноосном напряженном состоянии. Решение строится численно на основе интегрального преобразования Лапласа — Карсона. Рассчитаны и апробированы экспериментально значения параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности арамидных волокон СВМ, параполиамидных нитей, стеклопластика ТС8/3-250 и полимербетона.

Ключевые слова: линейная вязкоупругость, уравнения Больцмана-Вольтерра, интегральное преобразование Лапласа — Карсона, параметры ядер наследственности, дробно-экспоненциальное ядро.

Введение. Одной из основных задач наследственной теории вязкоупругости считается задача выбора ядер интегральных уравнений теории, нахождение их резольвент и достоверное определение параметров ядер (Кристенсен, 1974; Работнов, 1977).

В линейной теории вязкоупругости в качестве ядер наследственности чаще всего используются степенные, экспоненциальные и дробно-экспоненциальные функции, а также различные комбинации этих функций. Параметры ядер определяются, как правило, по результатам математической обработки данных испытаний образцов материала на ползучесть или на релаксацию. Эта задача решается чаще всего, аппроксимацией дискретных значений функций ползучести и функций подобия (Кристенсен, 1974; Работнов, 1977; Голуб и др., 2005), а также с использованием функции Миттаг-Леффлера (Розовский, 1961).

В настоящей работе задача определения параметров ядер наследственности линейно-вязкоупругих материалов решается с использованием интегрального преобразования Лапласа — Карсона.

1. Постановка задачи. Исходные соотношения. Рассматриваются процессы ползучести и релаксации напряжений изотропных линейно-вязкоупругих материалов при одноосном напряженном состоянии. Определяющие уравнения линейной теории вязкоупругости, задающие зависимость между растягивающими напряжениями σ_{11} , продольными деформациями ε_{11} и временем t записываются в виде

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}(t) = \frac{1}{E} \left(\sigma_{11}(t) + \lambda \int_0^t K_{11}(t-\tau, \alpha, \beta) \sigma_{11}(\tau) d\tau \right); \\ \sigma_{11}(t) = E \left(\varepsilon_{11}(t) - \lambda \int_0^t R_{11}(t-\tau, \alpha, \beta) \varepsilon_{11}(\tau) d\tau \right), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $K_{11}(\cdot)$, $R_{11}(\cdot)$ — ядра ползучести и релаксации; E — модуль упругости; α , β , λ — параметры ядер; t — время наблюдения; τ — время, предшествующее моменту наблюдения.

Задача заключается в разработке методики определения параметров ядер линейной наследственности на основе интегрального преобразования Лапласа — Карсона и в определении параметров ядер ряда конструкционных материалов.

2. Методика определения параметров ядер наследственности. Методика основана на обработке численно преобразованных экспериментальных кривых ползучести преобразованным уравнением ползучести (1.1) с заданной структурой ядра ползучести $K_{11}(\cdot)$ в пространстве изображений Лапласа — Карсона. Параметры ядер определяются непосредственно в пространстве изображений без перехода к оригиналу.

Методика включает процедуру преобразования исходного уравнения ползучести, численные преобразования экспериментальных кривых ползучести и определение параметров ядер ползучести по результатам аппроксимации преобразованных экспериментальных данных преобразованным уравнением ползучести.

Выбирая в качестве ядра ползучести $K_{11}(\cdot)$ в (1.1) дробно-экспоненциальную функцию Работнова (Работнов, 1977):

$$K_{11}(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}, \quad (2.1)$$

уравнение ползучести $\varepsilon_{11}(t)$ в (1.1) в пространстве изображений Лапласа — Карсона преобразуется к виду

$$\varepsilon_{11}^*(p) = p \int_0^{\infty} \varepsilon_{11}(t) e^{-pt} dt = \frac{\sigma_{11}}{E} \left[1 + \frac{\lambda}{\beta + p^{1+\alpha}} \right], \quad (2.2)$$

где p — параметр преобразования; α , β , λ — параметры ядра ползучести.

Исходная экспериментальная кривая ползучести $\varepsilon_{\text{exp}}(t)$ задается дискретно в виде совокупности табличных значений t_i и ε_i и в пространстве изображений Лапласа — Карсона преобразуется у виду

$$\varepsilon_{\text{exp}}^*(p_j) = p_j \int_0^{\infty} \varepsilon_{\text{exp}}(t) e^{-p_j t} dt = p_j \int_0^{t_*} \varepsilon_{\text{exp}}(t) e^{-p_j t} dt + p_j \int_{t_*}^{\infty} \varepsilon_{\text{exp}}(t) e^{-p_j t} dt, \quad (2.3)$$

а при условии, что $t_* \rightarrow \infty$ — преобразуется к интегралу

$$\varepsilon_{\text{exp}}^*(p_j) = p_j \int_0^{\infty} \varepsilon_{\text{exp}}(t) e^{-p_j t} dt = p_j \int_0^{t_*} \varepsilon_{\text{exp}}(t_i) e^{-p_j t} dt; \quad i = \overline{0, \ell}; \quad j = \overline{1, s}, \quad (2.4)$$

вычисление которого позволяет построить изображение $\varepsilon_{\text{exp}}^*(p_j)$ исходной экспериментальной кривой ползучести $\varepsilon_{\text{exp}}(t_i)$ в виде таблицы значений (p_j, ε_j) .

Задача определения параметров дробно-экспоненциальных ядер (2.1) сводится к определению таких значений α , β и λ , которые в пространстве изображений обеспечивают минимальное отклонение кривой, задаваемой уравнением (2.2), от полученной на основе (2.4) совокупности значений (p_j, ε_j^*) .

Для численного преобразования экспериментальной кривой ползучести $\varepsilon(t_i)$ разобьем интервал интегрирования в (2.4) на ℓ частей, так что интеграл (2.4) запишется в виде

$$\varepsilon_{\text{exp}}^*(p_j) = p_j \sum_{i=0}^{\ell-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon(t_i) e^{-p_j t} dt; \quad j = \overline{1, s}, \quad (2.5)$$

где значения функции $\varepsilon(t_i)$ известны только на концах промежутков интегрирования $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.

Для вычисления интегралов, входящих в (2.5), на каждом интервале $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ функция $\varepsilon_{\text{exp}}(t) = \varepsilon_i(t)$ в (2.4) аппроксимируется полиномом 2-й степени, так что интеграл в (2.5) конкретизируется в виде

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon(t_i) e^{-p_i t} dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} A_{0,i} e^{-p_i t} dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} A_{1,i} e^{-p_i t} dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} A_{2,i} e^{-p_i t} dt, \quad (2.6)$$

где i — как и выше, число участков разбиения экспериментальной кривой ползучести; A_{qi} — коэффициенты полинома, определяемые из условия прохождения функции $\varepsilon_i(t)$ через r последовательно заданных экспериментальных точек ($r < n - 1$) с координатами (t_i, ε_i) .

Интегрируя далее (2.6) по частям и используя рекуррентное соотношение

$$\int t^q e^{at} dt = \frac{1}{a} t^q e^{at} - \frac{q}{a} \int t^{q-1} e^{at} dt,$$

для задания численных значений функции $\varepsilon_{\text{exp}}(p_j)$ получаем соотношение

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{exp}}^*(p_j) = & \left[A_{0,i} \left(\frac{e^{-p_j t_{i+1}} - e^{-p_j t_i}}{-p_j} \right) \right] + \left[A_{1,i} \left(\frac{t_{i+1} e^{-p_j t_{i+1}} - t_i e^{-p_j t_i}}{-p_j} - \frac{e^{-p_j t_{i+1}} - e^{-p_j t_i}}{p_j^2} \right) \right] + \\ & + \left[A_{2,i} \frac{(t_i^2 e^{-p_j t_i} - t_{i+1}^2 e^{-p_j t_{i+1}})}{p_j} + 2A_{2,i} \frac{(t_i e^{-p_j t_i} - t_{i+1} e^{-p_j t_{i+1}})}{p_j^2} - 2A_{2,i} \frac{(e^{-p_j t_i} + e^{-p_j t_{i+1}})}{p_j^3} \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

которое позволяет вычислять интегралы Лапласа — Карсона (2.4) при надлежащем выборе чисел p_j .

Значения параметров α , β и λ дробно-экспоненциального ядра наследственности (2.1) определяются из условия минимума функционала

$$F(\alpha, \beta, \lambda) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^s \left[\varepsilon_k^*(p_j) - \frac{\sigma_k}{E} \left(1 + \frac{\lambda}{\beta + p_j^{1+\alpha}} \right) \right]^2, \quad (2.8)$$

где функция $\varepsilon_k^*(p_j)$ задает изображение совокупности экспериментальных точек в плоскости « $\varepsilon^* - p$ », рассчитанных по формуле (2.7). В (2.8) предусмотрено также осреднение исходных экспериментальных данных по m кривых ползучести для m уровней напряжений.

Задача определения параметров ядра в (2.8) решается с использованием итерационного метода Левенберга — Маркардта.

3. Численная реализация методики. Вычисление дискретных значений функции $\varepsilon_{\text{exp}}^*(p_j)$ в (2.7), которые используются при определении параметров α , β , λ дробно-экспоненциальных ядер наследственности (2.1) из условия минимизации функционала (2.8), связано с необходимостью задания значений p_1 и p_s параметра преобразования p_j ($j = \overline{1, s}$).

Пренебрегая вторым слагаемым в (2.3) и считая, что при $t > t_*$ величина деформации $\varepsilon(t_*)$, накопленная к моменту времени t_* , остается постоянной, для p_1 из (2.3) получаем соотношение

$$p_1 \geq \frac{1}{t_*} \ln \left[1 + \frac{\varepsilon(t_*)}{\delta \varepsilon_e} \right], \quad (3.1)$$

откуда, полагая $\varepsilon(t_*) = \varepsilon_e$ и $\delta = 0,63 \cdot 10^{-4}$, следует

$$p_1 = \frac{10}{t_*} \quad \text{при} \quad p_j = p_{j-1} + \frac{p_s - p_1}{s - 1}. \quad (3.2)$$

Здесь величина t_* соответствует фактической длительности испытаний на ползучесть; ε_e — начальная упругая компонента деформации; $\varepsilon(t_*)$ — деформа-

ция, накопленная к моменту времени t_* , а δ задает погрешность оценки функции $\varepsilon_{\text{exp}}^*(p_j)$ по формуле (2.7), в которой не учитывается второе слагаемое при вычислении интегралов в (2.3).

Величина параметра p_s в (3.2) задавалась как максимальная абсцисса верхнего участка зависимости $\varepsilon_{\text{exp}}^*(p_j)$.

Значения параметров α , β , λ дробно-экспоненциальных ядер наследственности для некоторых линейно-вязкоупругих материалов, рассчитанных по изложенной в разделах 2 и 3 методике, приведены в таблице.

Параметры ядра	Вязкоупругие материалы			
	aramидное во- локно СВМ $\sigma_k = 1000$ МПа	параполи- амидная нить $\sigma_k = 1000$ МПа	стеклопластик ТС8/3-250 $\sigma_k = 273$ МПа	полимербетон $\sigma_k = 30$ МПа
α	– 0,825632	– 0,92816	– 0,936953	– 0,922557
β , час ^{-(1+α)}	0,575644	0,963951	0,604732	0,41293
λ , час ^{-(1+α)}	0,893828	1,006342	0,441018	0,473555
σ_k/E	$6,295 \cdot 10^{-3}$	0,013459	$7,19 \cdot 10^{-3}$	$8,345 \cdot 10^{-4}$

Заклучение. Метод определения параметров ядер наследственности, основанный на использовании преобразования Лапласа — Карсона позволяет определять параметры ядер непосредственно по изображению без перехода к оригиналу.

Список литературы

- Голуб, В. П., Кобзарь, Ю. М., & Фернати, П. В. (2005). К расчету деформаций линейной ползучести вязкоупругих армирующих волокон при растяжении. *Прикладная механика*, 41(5), 97–106.
- Кристенсен, Р. М. (1974). *Введение в теорию вязкоупругости*. Москва: Мир.
- Работнов, Ю. Н. (1977). *Элементы наследственной механики твердых тел*. Москва: Наука.
- Розовский, М. И. (1961). О некоторых особенностях упруго-наследственных сред. *Изв. АН СССР. Механика и машиностроение*, (2), 30–36.

Рух рятувальної шлюпки вільного падіння при сходженні з похилої рампи

Є. Т. Горалік, М. М. Крюков, Т. О. Лупіна

Державний університет інфраструктури та технологій, Київ, Україна
et_gor@ukr.net

Розглянуто задачу про рух рятувальної шлюпки вільного падіння, яка моделюється однорідним стрижнем, при сходженні з похилої рампи. Отримано розв'язувальну систему звичайних диференціальних рівнянь і сформульовано відповідну задачу Коші, яка розв'язується чисельно за допомогою методу Рунге — Кутти. Диференціальні рівняння руху стрижня складені за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду. На основі запропонованого підходу проведено чисельні експерименти для аналізу впливу початкової швидкості й довжини шлюпки та кута нахилу рампи на параметри руху.

Ключові слова: плоско-паралельний рух, стрижень, похила рампа, рівняння Лагранжа другого роду, звичайні диференціальні рівняння, задача Коші, чисельне моделювання, метод Рунге — Кутти.

Рятувальні шлюпки вільного падіння, які використовують на морських судах та нафтодобувних платформах, при сходженні з похилої рампи та подальшому вільному падінні до поверхні води рухаються плоско-паралельно.

Під час дослідження плоско-паралельного руху тіл його зазвичай представляють як суму двох рухів: поступального разом з центром мас та обертального навколо цієї точки (Павловський, 2002). При цьому реальні тіла в багатьох випадках з достатньою точністю можуть моделюватися однорідним стрижнем.

Найбільш складним і малодослідженим етапом руху рятувальної шлюпки вільного падіння при її сходженні з напрямних опорної рампи є перша фаза падіння з наростаючим кутом нахилу (Микитюк & Миронов, 2010) з моменту, коли центр мас опиняється над краєм опори (крайнім роликом рампи) до моменту сходу з рампи опорних поверхонь шлюпки (рис. 1).

Розглянемо саме цей етап — сходження з похилої рампи однорідного стрижня масою m довжиною L , що мав у початковий момент початкову швидкість V_0 в полярній системі координат (r, ϕ) (рис. 1).

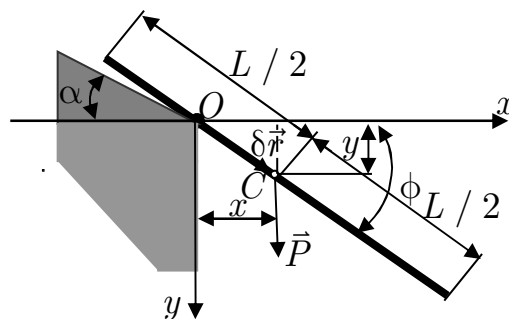


Рис. 1. Сходження однорідного стрижня з похилої опори

Переміщення центру мас стрижня за край опори на довжину відрізка $r = OC$ під дією сили тяжіння $P = mg$ викликає появу обертового моменту $M = Px = mgr \cos \phi$, під дією якого стрижень обертається з кутовим прискоренням у вертикальній площині.

Для складання диференціальних рівнянь руху тіла застосуємо рівняння Лагранжа другого роду. При цьому силами тертя знехтуємо.

За узагальнені координати візьмімо радіус $r = OC$ — відстань від центру мас стрижня до краю опори й полярний кут ϕ між горизонтальною віссю x і напрямком OC — віссю стрижня.

Тоді рівняння Лагранжа другого роду матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{r}} \right) - \frac{\delta T}{\delta r} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{\phi}} \right) - \frac{\delta T}{\delta \phi} &= Q_2,\end{aligned}$$

де T — кінетична енергія тіла, $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ — модуль радіальної швидкості центру

мас, $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$ — модуль кутової швидкості стрижня, $\ddot{\phi} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$ — модуль кутового прискорення стрижня, Q_1 і Q_2 — узагальнені сили.

Кінетична енергія стрижня під час його руху визначається з виразу:

$$T = \frac{I_{zc} \dot{\phi}^2}{2} + \frac{m V_c^2}{2},$$

де I_{zc} — момент інерції стрижня відносно центру мас, V_c — модуль вектора швидкості центру мас.

З урахуванням відомих формул для моменту інерції стрижня відносно цен-

тру мас $I_{zc} = \frac{mL^2}{12}$ і модуля вектора швидкості точки в полярній системі координат $V = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}$ отримаємо вираз для кінетичної енергії стрижня:

$$T = \frac{mL^2}{12} \cdot \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2)}{2}.$$

Знайшовши вирази для похідних, що входять у ліві частини рівнянь Лагранжа, отримаємо:

$$\begin{aligned}\frac{\delta T}{\delta \dot{r}} &= m\dot{r}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{r}} \right) = m\ddot{r}; \quad \frac{\delta T}{\delta r} = mr\dot{\phi}^2; \quad \frac{\delta T}{\delta \dot{\phi}} = (I_{zc} + mr^2)\dot{\phi}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{\phi}} \right) &= (I_{zc} + mr^2)\ddot{\phi}; \quad \frac{\delta T}{\delta \phi} = 0.\end{aligned}$$

Визначимо узагальнену силу Q_1 за координатою $q_1 = r$. Для цього розглянемо можливе переміщення системи, зумовлене можливим приростом узагальненої координати δr (рис. 2).

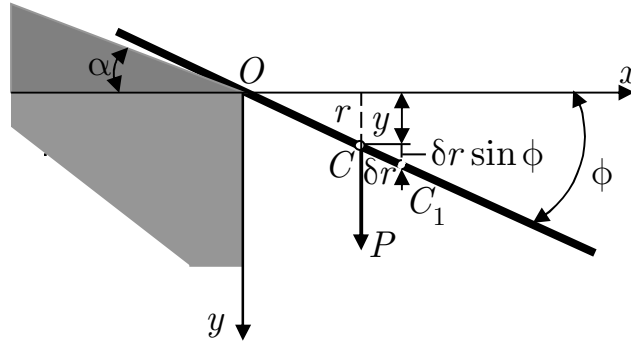


Рис. 2. Можливе переміщення системи, зумовлене можливим приростом узагальненої координати δr

Сума елементарних робіт усіх активних сил, прикладених до системи на цьому переміщенні дорівнює:

$$\delta A = P \delta r \sin \phi = mg \delta r \sin \phi.$$

З іншого боку $\delta A = Q_1 \delta q_1 = Q_1 \delta r$. Отже, $Q_1 = mg \sin \phi$. Так само визначимо узагальнену силу Q_2 по координаті $q_2 = \phi$.

Розглянемо можливе переміщення системи, зумовлене можливим приростом узагальненої координати $\delta \phi$ (рис. 3).

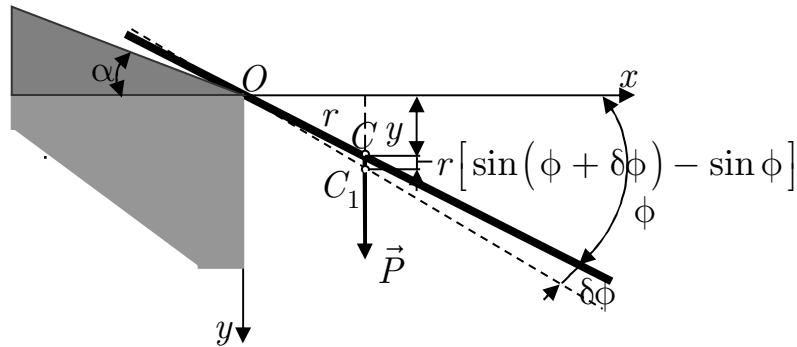


Рис. 3. Можливе переміщення системи, зумовлене можливим приростом узагальненої координати $\delta \phi$

Сума елементарних робіт всіх активних сил, прикладених до системи на цьому переміщенні дорівнює

$$\delta A = Pr[\sin(\phi + \delta \phi) - \sin \phi] = mgr[\sin \phi \cos \delta \phi + \cos \phi \sin \delta \phi - \sin \phi].$$

Оскільки $\cos \delta \phi \approx 1$ і $\sin \delta \phi \approx \delta \phi$, можна записати $\delta A = mgr \cos \phi \delta \phi$. З іншого боку $\delta A = Q_2 \delta q_2 = Q_2 \delta \phi$. Отже, $Q_2 = mgr \cos \phi$.

Підставляючи отримані вище вирази в рівняння Лагранжа, отримаємо наступну розв'язувальну систему диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= g \sin \phi; \\ \left(\frac{L^2}{12} + r^2 \right) \ddot{\phi} &= gr \cos \phi.\end{aligned}\tag{1}$$

Для формулювання задачі Коші для отриманої системи диференціальних рівнянь (1) необхідно додати початкові умови

$$r(0) = 0, \dot{r}(0) = V_0, \phi(0) = \alpha, \dot{\phi}(0) = 0.\tag{2}$$

Приведемо отриману систему диференціальних рівнянь до нормальної форми Коші

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_1 y_4^2 + g \sin y_3, \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_4, \\ \frac{dy_4}{dt} &= g \frac{y_1 \cos y_3}{a + y_1^2}.\end{aligned}\tag{3}$$

Тут $y_1 = r$, $y_2 = \dot{r}$, $y_3 = \phi$, $y_4 = \dot{\phi}$, $a = \frac{L^2}{12}$. Початкові умови мають вигляд

$$y_1(0) = 0, y_2(0) = V_0, y_3(0) = \alpha, y_4(0) = 0.\tag{4}$$

Записуємо задачу Коші (3), (4) у векторній формі

$$\frac{d\vec{Y}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{Y}), \quad \vec{Y}(0) = \vec{Y}_0,\tag{5}$$

де $\vec{Y} = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}^T$. Розв'язуватимемо задачу (5) за допомогою чисельного методу Рунге — Кутти четвертого порядку точності за схемою (Березин & Жидков, 1962):

$$\vec{Y}_{n+1} = \vec{Y}_n + \vec{\Lambda}_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

де

$$\begin{aligned}\vec{\Lambda}_n &= \frac{1}{6} \left(\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4 \right), \quad \vec{K}_1 = h\vec{F}(t_n, \vec{Y}_n), \\ \vec{K}_2 &= h\vec{F}\left(t_n + \frac{h}{2}, \vec{Y}_n + \frac{\vec{K}_1}{2}\right), \quad \vec{K}_3 = h\vec{F}\left(t_n + \frac{h}{2}, \vec{Y}_n + \frac{\vec{K}_2}{2}\right), \\ \vec{K}_4 &= h\vec{F}\left(t_n + h, \vec{Y}_n + \vec{K}_3\right), \quad t_n = nh \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad h > 0 \text{ — крок в часі} \\ \Delta t_n &= t_{n+1} - t_n = h.\end{aligned}$$

На основі запропонованого підходу проведено серію чисельних експериментів для визначення часу скочування стрижня, горизонтальної та вертикальної складової швидкості центру мас, кутів повороту та кутової швидкості стрижня в момент відриву від рампи при значеннях кута нахилу рампи $\alpha = 25, 35, 45^\circ$ та різних значеннях початкової швидкості центру мас у діапазоні від 1 до 10 м/с і довжини стрижня в діапазоні від 5 до 15 м. Отримані на основі цих розрахунків залежності для стрижня довжиною 5 м представлені на рис. 4.

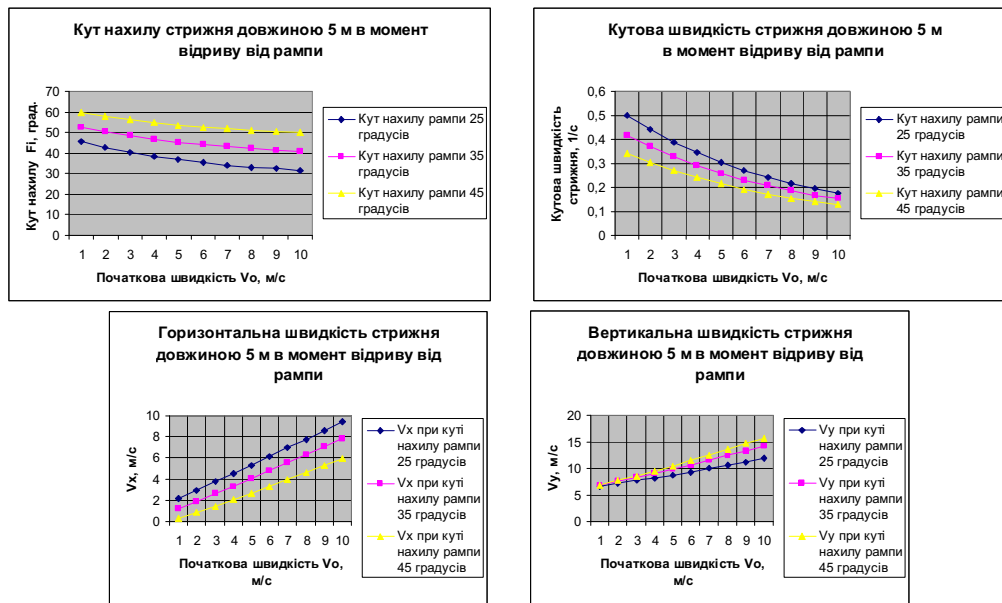


Рис 4. Параметри руху стрижня довжиною 5 м

Висновок. Запропонований підхід дозволяє за допомогою чисельних експериментів на основі отриманої розв’язувальної системи звичайних диференціальних рівнянь отримувати та аналізувати параметри руху шлюпки, що сходить з похилої опорної поверхні.

Список літератури

- Березин, И. С., & Жидков, Н. П. (1962). *Методы вычислений*. (Том 2). Москва: Физматгиз.
- Микитюк, В. Е., & Миронов, Д. А. (2010). Параметри движения шлюпки свободного падения перед приводнением. У *Матеріалах I Міжнародної науково-технічної конференції «Інновації в суднобудуванні та океанотехніці»* (с. 84–89). Миколаїв: НУК.
- Павловський, М. А. (2002). *Теоретична механіка*. Київ: Техніка.

До обернення теореми Гріна

С. В. Горленко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

svagor7@gmail.com

У статті досліджено необхідні умови теореми Остроградського — Гріна.

Ключові слова: формула Гріна, необхідна умова, достатня умова.

У підручниках з математичного аналізу відома формула Остроградського — Гріна

$$\oint_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_d \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

доводиться за умов, що $P(x,y), Q(x,y)$ — неперервно диференційовні функції в деякій однозв'язній області $D \subset \mathbb{R}^2$, l — довільний гладкий або кусково гладкий контур з цієї області, а d — обмежена ним область.

Очевидно, що ці достатні умови не є необхідними. Ідеальними необхідними умовами були б такі, які б не вимагали більше, ніж потрібно для запису формули Гріна. А саме: функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ повинні мати частинні похідні

$\frac{\partial Q}{\partial x}$ та $\frac{\partial P}{\partial y}$ і бути такими, щоб існували інтеграли в обох частинах формули. І

чи буде за цих умов правдива формула Гріна?

Мета статті — наблизитись до цих природних необхідних умов.

Розгляньмо адитивну функцію $F(J)$ сегмента (прямокутника) $J = [x_0, x; y_0, y]$, яку задано формулою

$$F(J) = \int_{\partial J} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

де ∂J — межа сегмента J .

Нас цікавлять необхідні та достатні умови абсолютної неперервності функції $F(J)$ і, у зв'язку з цим, необхідні та достатні умови правдивості формули Гріна.

Теорема 1. Нехай $P(x,y)$ — дійсна, вимірна функція, означена в області $D \subset \mathbb{R}^2$ і така, що для кожного y функція $P(x,y)$ сумовна за x . Тоді для того, щоб $F_1(J) = \int_{\partial J} P dx$ було абсолютно неперервна, необхідно й достатньо щоб:

1) функція $P(x,y)$ була абсолютно неперервна за y для майже всіх x ;

2) майже скрізь в області D існувала й була сумовною $\frac{\partial P}{\partial y}$.

Наслідок 1. Нехай $Q(x,y)$ — дійсна вимірна функція, означена в області $D \subset \mathbb{R}^2$ і сумовна для кожного фіксованого x за y . Тоді для того, щоб

$$F_2(J) = \int_{\partial J} Q dy$$

була абсолютно неперервна, необхідно й достатньо, щоб:

- 1) $Q(x, y)$ була абсолютно неперервна за x для майже всіх y ;
- 2) майже скрізь в D існувала й була сумовною $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Умови теореми 1 та наслідку 1 достатні для абсолютної інтегровності

$$F(J) = \int_{\partial J} Pdx + Qdy.$$

Справді:

$$\begin{aligned} F(J) &= \int_{\partial J} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{x_0}^x [P(\xi, y_0) - P(\xi, y)]d\xi + \int_{y_0}^y [Q(x, \eta) - Q(x_0, \eta)]d\eta = \\ &= - \int_{x_0}^x d\xi \int_{y_0}^y \frac{\partial P}{\partial \eta} d\eta + \int_{y_0}^y d\eta \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial \xi} d\xi = \iint_J \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Природно виникає питання, чи не є умови теореми 1 та наслідку 1 майже необхідними. Тобто, якщо в цих умовах замінити умову існування та сумовності майже скрізь в D похідних $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ умовою сумовності $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, чи не отримаємо ми необхідні умови для абсолютної неперервності функції

$$F(J) = \int_{\partial J} Pdx + Qdy?$$

Відповідь **негативна**. У статті Fesq (1965) подано приклад функцій $P(x, y)$ та $Q(x, y)$, неперервних у квадраті $K = [0, 1; 0, 1]$ і таких, що $P(x, y)$ є абсолютно неперервною за y для всіх x , $Q(x, y)$ абсолютно неперервна за x для всіх y , існують $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ скрізь у K , причому $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ сумована, але

$$\int_{\partial K} Pdx + Qdy \neq \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Причиною є те, що в цьому прикладі частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ не є сумовними в K і, навіть, повторно інтегровними (Толстов, 1950). Тому суттєва, принаймні повторна інтегровність $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$, але, очевидно її недостатньо для абсолютної неперервності $F(J)$. Можна показати, що суттєвою є також умова 1) теореми 1.

З цього випливає, що якщо ми хочемо, щоб

$$F(J) = \int_{\partial J} Pdx + Qdy$$

виражалась через інтеграл за площею саме від функції $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, то ми повинні зв'язати клас функцій $P(x, y)$ та $Q(x, y)$. У зв'язку з цим зауваженням подаємо критерій абсолютної неперервності функції

$$F(J) = \int_{\partial J} Pdx + Qdy.$$

Теорема 2. Нехай $P(x, y), Q(x, y)$ — дійсні вимірні функції, означені в області $D \subset \mathbb{R}^2$ і такі, що:

1) для будь-якого y $P(x, y)$ — сумовна за x ;

для будь-якого x $Q(x, y)$ — сумовна за y ;

2) $P(x, y)$ — абсолютно неперервна за y для x ;

$Q(x, y)$ за x для майже всіх y ;

3) хоча б одна з частинних похідних $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ існує майже скрізь у D і є сумовною.

Тоді для того, щоб $F(J) = \int_{\partial J} Pdx + Qdy$ була абсолютно неперервною, необхідно й достатньо, щоб $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ була сумовна в D . При цьому для будь-якого $J \subset D$ правдива формула

$$\int_{\partial J} Pdx + Qdy = \iint_J \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Зауваження. З теореми 2 випливає, що якщо хоча б одна з частинних похідних $\frac{\partial Q}{\partial x}$ чи $\frac{\partial P}{\partial y}$ є сумовною, то для виконання формули Гріна необхідно й достатньо, щоб сумовною була також інша похідна. Якщо ж обидві частинні похідні не є сумовними, то, як показує поданий вище приклад із статті Fesq (1965), формула Гріна може не виконуватись, навіть за умов сумовності різниці

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Список літератури

- Fesq, R. M. (1965). Green's formula, linear continuity and Hausdorff measure. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 118(6), 105–112. <https://doi.org/10.2307/1993946>
- Толстов, Г. П. (1950). О криволинейном и повторном интеграле. *Тр. МИАН СССР*, 35, 3–102. <http://mi.mathnet.ru/rus/tm1099>

Використання методу Понтрягіна в задачі оптимального керування дволанковим маніпулятором

М. В. Демидюк, В. М. Демидюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, Львів
demydyuk@iapmm.lviv.ua

Досліджуємо задачу оптимального керування дволанковим маніпулятором, який під дією керувань (моментів сил у шарнірах) виконує транспортну операцію в горизонтальній площині: за заданий час переносить вантаж із заданого початкового положення в задане кінцеве. Якість процесу керування оцінюємо квадратичним (за керуваннями) функціоналом. Розв'язок задачі побудовано за допомогою процедури принципу максимуму Понтрягіна. Вихідна задача оптимального керування зводиться до розв'язання відповідної краєвої задачі для системи восьми нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Розв'язок останньої будуюмо за допомогою методики пристрілки в поєднанні з числовими алгоритмами методу Рунге — Кутти та нелінійного програмування.

Ключові слова: дволанковий маніпулятор, оптимальне керування, принцип максимуму Понтрягіна, чисельні методи, нелінійне програмування.

Серед маніпуляційних робіт важливе місце посідають дволанкові маніпулятори. Такі маніпулятори є складовими частинами конструкцій багатьох роботів, у яких довжини двох суміжних ланок помітно перевищують розміри решти ланок. Тому дволанкові маніпулятори та різноманітні задачі оптимізації їх руху вже тривалий час привертають увагу дослідників. Зокрема, Черноусько та ін. (1989), Формальський (1996) дослідили ряд задач оптимального за швидкістю керування дволанковим маніпулятором, Аветисян та Болотник (1990) запропонували процедуру побудови субоптимального за швидкістю режиму керування дволанковим маніпулятором з електромеханічними приводами. У своїй праці Лутманов та ін. (2013) розв'язали задачу про повернення робочого органу дволанкового маніпулятора на задану траєкторію, від якої він трохи відхилився під час руху. Огляд та аналіз низки публікацій по використанню методики нечітких множин у задачах оптимального керування дволанковим маніпулятором зробили Lochan та Roy (2015). Задачі параметричної оптимізації керованого руху дволанкового маніпулятора дослідили Демидюк та Широко (2007), Демидюк та Гошовська (2016а; 2016б).

Нижче розглядаємо дволанковий маніпулятор, схематично зображений на рис. 1. Тут OA , AB — тверді тіла, з'єднані між собою циліндричним шарніром A . Ланка OA за допомогою циліндричного шарніра O зв'язана з нерухомою основою, на кінці другої ланки — захоплювач з вантажем. Осі шарнірів O і A спрямовані по вертикалі. Шарніри вважаємо ідеальними, захоплювач (з вантажем) моделюємо точковою масою m . Мані-

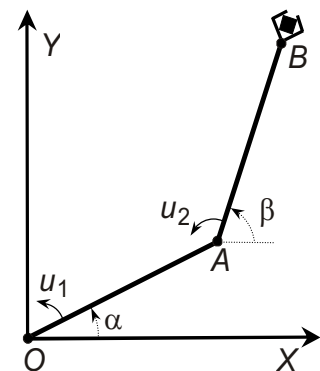


Рис. 1

пулятор під дією моментів сил $u_1(t)$, $u_2(t)$ виконує плоскопаралельний рух у горизонтальній площині OXY .

Рівняння руху маніпулятора подамо у вигляді:

$$\begin{aligned} K_a \ddot{\alpha} + K[\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta)] &= u_1 - u_2, \\ K_b \ddot{\beta} + K[\ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta)] &= u_2, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — кути повороту ланок OA , AB відносно осі OX інерційної системи відліку OXY ; $K_a = J_a + a^2(m_b + m)$, $K_b = J_b + mb^2$, $K = a(rm_b + mb)$; $a = |OA|$, $b = |AB|$ — довжини ланок маніпулятора; J_a , J_b — моменти інерції ланок OA , AB відносно осей шарнірів O , A відповідно; m_b , r — маса ланки AB і відстань від її центра маси до шарніра A . Тут і далі крапкою (зверху над величиною) позначено диференціювання за часом t .

Нехай досліджуваний маніпулятор протягом заданого часу T переносить вантаж з початкового положення

$$\alpha(0) = \alpha_0, \beta(0) = \beta_0, \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = 0, \quad (2)$$

у кінцеве

$$\alpha(T) = \alpha_T, \beta(T) = \beta_T, \dot{\alpha}(T) = \dot{\beta}(T) = 0, \quad (3)$$

де α_0 , β_0 , α_T , β_T — задані значення кутових координат ланок маніпулятора в початковий $t = 0$ та кінцевий $t = T$ моменти часу. Кутові швидкості ланок маніпулятора на початку та у кінці руху задаємо нульовими.

Сформулюємо **задачу**: знайти такі керування $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, $t \in [0, T]$, які забезпечать переміщення маніпулятора з початкового положення (2) у кінцеве (3) з мінімальним значенням функціонала

$$E = \int_0^T [u_1^2(t) + u_2^2(t)] dt. \quad (4)$$

Квадратичний функціонал виду (4) часто використовують у задачах оптимального керування механічними системами. За певних припущень цей функціонал оцінює енерговитрати системи на переміщення.

Для розв'язання сформульованої задачі використаємо методику принципу максимуму Понтрягіна (Понтрягин и др., 1983). Для зручності застосування цієї методики зробимо перетворення рівнянь руху маніпулятора (1). Запроваджуємо нові змінні $x_1 = \alpha$, $x_2 = \dot{\alpha}$, $x_3 = \beta$, $x_4 = \dot{\beta}$, у яких рівняння руху набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{g}[K_b u_1 - (K_b + K f_1) u_2 - K K_b f_2 x_4^2 - K^2 f_1 f_2 x_2^2], \\
\dot{x}_3 &= x_4, \\
\dot{x}_4 &= -\frac{1}{g}[K f_1 u_1 - (K_a + K f_1) u_2 - K K_b f_2 x_2^2 - K^2 f_1 f_2 x_4^2]
\end{aligned} \tag{5}$$

де позначено

$$f_1 = \cos(x_1 - x_3), \quad f_2 = \sin(x_1 - x_3), \quad f_3 = f_1^2 - f_2^2, \quad g = K_a K_b - K^2 f_1^2.$$

Запишемо функцію Гамільтона

$$\begin{aligned}
H &= -u_1^2 - u_2^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 \frac{1}{g}[K_b u_1 - (K_b + K f_1) u_2 - K K_b f_2 x_4^2 - K^2 f_1 f_2 x_2^2] + \\
&+ \psi_3 x_4 - \psi_4 \frac{1}{g}[K f_1 u_1 - (K_a + K f_1) u_2 - K K_b f_2 x_2^2 - K^2 f_1 f_2 x_4^2]
\end{aligned} \tag{6}$$

Тут $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ — спряжені змінні, які згідно з принципом максимуму Понтрягіна, повинні задовольняти такій системі диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_1 &= -\frac{(g z_1 + z_3)}{g^2} \psi_2 - \frac{(g z_2 + z_4)}{g^2} \psi_4, \\
\dot{\psi}_2 &= -\psi_1 + \frac{2 K f_2 x_2}{g} (K f_1 \psi_2 - K_a \psi_4), \\
\dot{\psi}_3 &= -\psi_1, \\
\dot{\psi}_4 &= -\psi_3 + \frac{2 K f_2 x_4}{g} (K_b \psi_2 - K f_1 \psi_4),
\end{aligned} \tag{7}$$

де

$$\begin{aligned}
z_1 &= -K(K f_3 x_2^2 + K_b f_1 x_4^2 - f_2 u_2), \\
z_2 &= K[K_a f_1 x_2^2 + K f_3 x_4^2 + f_2(u_1 - u_2)], \\
z_3 &= 2K^2 f_1 f_2 [K f_2 (K_a x_2^2 + K f_1 x_4^2) - K f_1 u_1 + (K_a + K f_1) u_2], \\
z_4 &= 2K^2 f_1 f_2 [K f_2 (f_1 x_2^2 + K_b x_4^2) - K_b u_1 + (K_b + K f_1) u_2].
\end{aligned}$$

Згідно методики принципу максимуму із (6) отримуємо вирази для оптимальних керувань:

$$u_1^* = \frac{1}{2g} (K_b \psi_2 - K f_1 \psi_4), \quad u_2^* = -u_1^* - \frac{1}{2g} (K f_1 \psi_2 - K_a \psi_4). \tag{8}$$

Для розрахунку оптимальних керувань (8) необхідно знайти розв'язок системи рівнянь (5), (7) із заданими краєвими умовами (2), (3). Для цього застосуюмо метод стрільби (Маринець та ін., 2013). Використовуючи чисельний метод Рунге — Кутти, розв'язуємо систему рівнянь (5), (7) з такими початковими умовами:

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= \alpha_0, \beta(0) = \beta_0, \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = 0, \\ \psi_1(0) &= c_1, \psi_2(0) = c_2, \psi_3(0) = c_3, \psi_4(0) = c_4.\end{aligned}\quad (9)$$

де параметри c_1, c_2, c_3, c_4 знаходимо в результаті мінімізації функції нев'язки

$$[x_1(T) - \alpha_T]^2 + x_2^2(T) + [x_3(T) - \beta_T]^2 + x_4^2(T) \xrightarrow{c_1, c_2, c_3, c_4} \min \quad (10)$$

Для мінімізації нев'язки (10) використовуємо стандартні процедури нелінійного програмування (Бартіш, 2006).

Наведемо окремі результати розв'язання сформульованої вище задачі, отримані за допомогою методу максимуму Понтрягіна. Параметри маніпулятора, а також початкове і кінцеве значення кутових координат маніпулятора та тривалість руху задавали рівними відповідним параметрам у (Демидюк & Гошовська, 2016). Обчислення проводили на комп'ютері Intel Core i7-3630QM (2.40 ГГц, ОЗУ 8 ГБ). Для мінімізації функції нев'язки (10) використовували метод спряжених градієнтів, у якому за початкове значення параметрів оптимізації приймали $c_i = 0$, $i = 1, 4$, точність за значенням цільової функції (10) — 10^{-8} . Отримане мінімальне значення функціонала (4) становить $E^* = 4,332$, час розв'язання — 1,6 с.

Порівняльний аналіз оптимальних процесів, побудованих описаною вище процедурою максимуму Понтрягіна та методикою параметричної оптимізації (Демидюк & Гошовська, 2016), свідчить про повну ідентичність отриманих кінематичних та динамічних характеристик дволанкового маніпулятора.

Список літератури

- Lochan, K., & Roy, B. K. (2015). Control of two-link 2-dof robot manipulator using fuzzy logic techniques: A review. In *Proc. Fourth International Conference on Soft Computing for Problem Solving (SocProS 2014)* (Vol. 1, pp. 499–511). New Delhi: Springer. https://doi.org/10.1007/978-81-322-2217-0_41
- Аветисян, В. В., & Болотник, Н. Н. (1990). Субоптимальное управление электромеханическим манипулятором с высокой точностью позиционирования. *Изв. АН СССР. МТТ*, (5), 32–41.
- Бартіш, М. Я. (2006). *Методи оптимізації. Теорія і алгоритми*. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Ів. Франка.
- Демидюк, М. В., & Гошовська, Н. В. (2016а). Параметрична оптимізація руху дволанкового маніпулятора з використанням ортогональних поліномів. *Прикл. проблеми механіки і математики*, 14, 140–147. <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM/article/view/2233/2453>
- Демидюк, М. В., & Гошовська, Н. В. (2016б). Параметрична оптимізація транспортних операцій дволанкового маніпулятора. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 59(4), 142–152. <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/2426/2721>

- Демидюк, М. В., & Ширко, М. І. (2017). Оптимізація режимів руху та параметрів дволанкового маніпулятора з активними і пасивними приводами. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 50(2), 183–190. <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/2186/2399>
- Лутманов, С. В., Куксенко, Л. В., & Попова, Е. С. (2013). Задачи управления двухзвенным манипулятором с вращательными кинематическими парами. *Фундаментальные исследования*, (6.4), 886–891. <https://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=31656>
- Маринець, В. В., Рего, В. Л., & Маринець, К. В. (2013). *Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь*. Ужгород: Вид-во УжНУ «Говерла».
- Понтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., & Мищенко, Е. Ф. (1983). *Математическая теория оптимальных процессов* (4-е изд.). Москва: Наука.
- Формальский, А. М. (1996). Об оптимальном по быстродействию управлении поворотом плоского двухзвенника. *Прикладная математика и механика*, 60(2), 250–259.
- Черноусько, Ф. Л., Болотник, Н. Н., & Градецкий, В. Г. (1989). *Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация*. Москва: Наука.

Система для аналізу й побудови психологічних опитувальників та визначення точних цільових психологічних профілів

О. О. Диховичний, Н. В. Круглова
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
a.dyx@ukr.net

У роботі представлено експериментальну версію системи для аналізу й побудови психологічних опитувальників та визначення точних цільових психологічних профілів із застосуванням мови статистичного програмування R.

Ключові слова: психологічні тести, психологічний профіль, КТТ, IRT, мова R.

Тестове психологічне опитування використовують для дослідження психологічного стану людини в багатьох галузях людської діяльності: психології, психіатрії, професійному відборі тощо. Мета такого тестування є визначення певних кількісних психологічних показників. Очевидно, що таких психологічних показників може бути достатньо багато, причому вони можуть мати зовсім різну та, навіть, суперечливу спрямованість.

Психологічний профіль людини — це набір психологічних показників, отриманих у результаті проведення психологічного тестування. Побудований за тестовим опитуванням психологічний профіль людини використовується: при професійному відборі; при прийомі на роботу; при наборі в військові ЗВО; при наборі в силові структури; під час призову на військову службу.

Для визначення психологічного профілю можна використовувати:

- батарею тестів загальних здібностей для професійного відбору на вакантні робочі місця (**GATB**);
- батарею тестів спеціальних здібностей (**SATB**) для консультантів в державних установах (**SATB**) (Собчик, 2009);
- для комплексної діагностики було розроблено ММРІ (Мінесотський багатопрофільний опитувальник);
- ММИЛ в модифікації Ф. Б. Березіна;
- СМИЛ в модифікації Л. Н. Собчик (2009).

Такі багатопрофільні опитувальники та батареї тестів мають ряд переваг, а саме:

- відображають: самопочуття опитуваного, його чесність, особисті якості, рівень активності;
- визначають напрямленість інтересів;
- мають факторну структуру, градацію шкал і підшкал;
- володіють високою розрізняльною здатністю;
- дозволяють додавати тест по виявленню необхідної риси характеру;
- мають можливість модифікації в залежності від цілей тестування.

Але водночас мають і ряд недоліків, приміром, таких (Dykhovychnyi et al., 2018):

- занадто велика кількість питань;
- наявність ключів до тестів у загальному доступі;
- недостатнє використання сучасних математичних методів у вітчизняній психології, як наслідок, не завжди об'єктивний аналіз запропонованих питань з точки зору їх значущості та відповідності цілям тестування;
- ускладненість розробки шкал для нових методик;
- недосконалість використання існуючих інтегральних показників для точного «калібрування» психологічного профілю відповідно до цілей тестування.

Методики опитування вочевидь є достатньо розробленими. Нами ставиться питання про удосконалення процедури аналізу результатів психологічного тестування із застосуванням сучасного математичного апарату аналізу тестів та методів багатокритеріальної оптимізації.

Моделі IRT (Van der Linden & Hambleton, 1997) разом із класичною теорією тестів (КТТ) формують найбільш поширений математичний апарат аналізу результатів тестування для визначення психологічних рис та психометричних характеристик психологічного опитувальника, дозволяють точніше розділяти як досліджуваних осіб, так і давати точнішу оцінку якості питань (індикаторів) тестів (Дуковичний et al., 2018), а також моделювати, тобто прогнозувати результати тестування (Dykhovychnyi & Kruglova, 2018).

Разом з цим задача ранжування респондентів за психологічними профілями, побудованими на підставі IRT, передбачає визначення певного інтегрального показника респондента, який складається із суперечливих психологічних показників, що доречно здійснювати за допомогою сучасних ефективних алгоритмів багатокритеріального прийняття рішень **TOPSIS** і **VIKOR** (Opricovic & Tzeng, 2004; Диховичний та ін., 2019).

Тому на підставі вищезазначеного пропонується створення нової автоматизованої системи для аналізу й побудови психологічних опитувальників та визначення точних цільових психологічних профілів з використання методів IRT із застосування сучасних математичних методів багатокритеріального прийняття рішень.

Оскільки у середовищі R (<https://www.r-project.org>) існує велика кількість уже створених ефективних програм з статистичного аналізу тестів як засобами IRT так і КТТ, то програмна реалізація системи зроблена у середовищі R.

На нашу думку, створення такої системи забезпечить наступні переваги:

- автоматизовану й точнішу оцінку психологічних рис респондентів та характеристик тестових питань на основі IRT та КТТ методів;
- визначення суттєвих показників респондентів для нових методик з ще нерозробленими шкалами;
- аналіз нових опитувальників та зменшення кількості питань без втрати інформативності;
- алгоритми багатокритеріального прийняття рішень дозволять гнучко змінювати й аналізувати інтегральний психологічний показник та точніше розрізняти респондентів за психологічними профілями;

- програмна реалізація системи в середовищі R дозволить використовувати найефективніші сучасні статистичні алгоритми та їхні програмні рішення;
 - можливість моделювання результатів психологічного тестування.
- Створена система буде корисною для:
- проведення соціологічних опитувань;
 - HR спеціалістів та агенцій;
 - створення точнішого єдиного рейтингу учнів на основі ЗНО, ДПА та інших тестувань по багатьох предметах;
 - моделювання (прогнозування) результатів соціологічних, маркетингових опитувань, педагогічних тестувань.

Список літератури

- Dykhovychnyi, O. O., & Kruglova, N. V. (2018). Imitational modeling and analysis of matrixes containing primary grading obtained in educational testing by the means of language R. *Information Technologies and Learning Tools*, 67 (5), 148–160. <https://doi.org/10.33407/itlt.v67i5.2104>
- Dykhovychnyi, O. O., Kruglova, N. V., & Moskalov, I. O. (2018). Using of mathematical models for analyzing of the results in psychological Guilford test. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 75–89. <https://doi.org/10.20535/mmtu-2018.1-075>
- Dykhovychnyi, O., Zlyvkov, V., Kruglova, N., Lukomska, S., & Kotukh, O. (2018). Using the multidimensional models to the teacher authenticity scale adaptation. *Actual Problems of Psychology*, 14(1), 132–141. <http://www.apppsychology.org.ua/data/jrn/v14/i1/15.pdf>
- Opricovic, S., & Tzeng, G.-H. (2004). Compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS. *European Journal of Operational Research*, 156(2), 445–455. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(03\)00020-1](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(03)00020-1)
- Van der Linden, W. J., & Hambleton, R. K. (Eds.). (1997). *Handbook of modern item response theory*. New York: Springer.
- Диховичний, О. О., Круглова, Н. В., & Алексєєва, І. В. (2019). Застосування IRT-моделей та методів багатокритеріальної оптимізації до аналізу психологічного профілю. *Математичні машини і системи*, (1), 131–142. http://www.immsp.kiev.ua/publications/articles/2019/2019_1/01_2019_Dykhovychny.pdf
- Собчик, Л. Н. (2009). *Стандартизированный многофакторный метод исследования личности (СМИЛ): Практическое руководство к традиционному и компьютерному вариантам теста*. Москва: Боргес.

Оцінка розв'язків неавтономної системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

В. В. Довгай

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

valerdov@gmail.com

Розглянуто неавтономна система диференціальних рівнянь другого порядку. Для розв'язку задачі Коші цієї системи за допомогою узагальненого методу диференціального інваріанту встановлюється оцінка зверху.

Ключові слова: лінійна система, диференціальні рівняння, оцінка зверху розв'язків, достатні умови стійкості.

Дослідження задач, що стосуються асимптотичної поведінки розв'язків системи неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку, є актуальними з точки зору їх можливого практичного застосування. У цій роботі розглядається одна з таких задач — оцінка зверху розв'язків наступної задачі Коші

$$y'' + R(t)y' + P(t)y = S(t)y, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0. \quad (1)$$

Тут y — n -вимірний вектор, $R(t) = [r_k(t)]$, $P(t) = [p_k(t)]$ — діагональні $n \times n$ матриці з елементами $r_k(t)$, $p_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), що мають відповідно неперервні похідні третього та другого порядку при $t \geq t_0$, $n \times n$ матриця $S(t)$ має своїми елементами неперервні при $t \geq t_0$ функції. Задача Коші (1) для диференціального рівняння другого порядку еквівалентна наступній задачі для рівняння першого порядку

$$x' + A(t)x = G(t)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

де позначено

$$x = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}, \quad x_0 = [y_0, y'_0]^T, \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & -E_n \\ P(t) & R(t) \end{bmatrix}, \quad G(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S(t) & 0 \end{bmatrix},$$

у яких 0 та E_n — нульова та одинична $n \times n$ матриці відповідно.

Нехай для функцій $q_k(t) = p_k(t) - \frac{1}{2}r'_k(t) - \frac{1}{4}r_k^2(t)$ виконується умова $q_k(t) > 0$ при всіх $t \geq t_0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тоді згідно з узагальненим методом диференціального інваріанту (Довгай, 2016) розв'язок задачі (2) буде розв'язком наступного інтегрального рівняння

$$x(t) = U(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t U(t, \tau)F(\tau)x(\tau)d\tau, \quad (3)$$

де застосовано такі позначення:

$$U(t, t_0) = \begin{bmatrix} U_{11}(t, t_0) & U_{12}(t, t_0) \\ U_{21}(t, t_0) & U_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S(t) + \eta(t) & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_{11}(t, t_0) = V(t, t_0)[-V'(t_0, t_0)T_1(t, t_0) + V^{-1}(t_0, t_0)T_2(t, t_0)],$$

$$U_{12}(t, t_0) = V(t, t_0)V(t_0, t_0)T_1(t, t_0), \quad U_{21}(t, t_0) = U'_{11}(t, t_0), \quad U_{22}(t, t_0) = U'_{12}(t, t_0),$$

$\eta(t)$, $V(t, t_0)$, $T_1(t, t_0)$, $T_2(t, t_0)$ — діагональні $n \times n$ матриці з елементами $\eta_k(t)$, $v_k(t, t_0)$, $\sin \varphi_k(t, t_0)$, $\cos \varphi_k(t, t_0)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), відповідно, у яких

$$\eta_k(t) = \frac{1}{4}q_k^{-1}(t)q_k''(t) - \frac{5}{16}[q_k^{-1}(t)q_k'(t)]^2, \quad q_k(t) = p_k(t) - \frac{1}{2}r'_k(t) - \frac{1}{4}r_k^2(t)$$

$$\varphi_k(t, t_0) = \int_{t_0}^t \sqrt{q_k(s)} ds, \quad v_k(t, t_0) = q_k^{-\frac{1}{4}}(t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t r_k(s) ds \right\}.$$

Перейдімо тепер у (3) до оцінки за нормою

$$|x(t)| \leq |U(t, t_0)| |x_0| + \int_{t_0}^t |U(t, \tau)| |S(\tau) + \eta(\tau)| |x(\tau)| d\tau. \quad (4)$$

Нехай існують такі сталі числа $r_0 > 0$, $a > 0$, для яких виконано умови:

$$r_k(t) \geq r_0, \quad \left| U(t, \tau) \exp \left\{ \frac{1}{2} r_0(t - \tau) \right\} \right| \leq a \quad (5)$$

при всіх $k = 1, 2, \dots, n$ та $t \geq \tau \geq t_0$. Тоді на основі (4) матимемо

$$|x(t)| \leq a \exp \left\{ -\frac{1}{2} r_0(t - t_0) \right\} |x_0| + a \int_{t_0}^t \exp \left\{ -\frac{1}{2} r_0(t - \tau) \right\} |S(\tau) + \eta(\tau)| |x(\tau)| d\tau.$$

Перепишемо останнє співвідношення у вигляді

$$|x(t)| \exp \left\{ \frac{1}{2} r_0(t - t_0) \right\} \leq a |x_0| + a \int_{t_0}^t |S(\tau) + \eta(\tau)| |x(\tau)| \exp \left\{ \frac{1}{2} r_0(\tau - t_0) \right\} d\tau$$

та застосуємо до одержаного результату лему Гронуолла — Беллмана (Павлюк, 1971). Одержимо нерівність

$$|x(t)| \exp \left\{ \frac{1}{2} r_0(t - t_0) \right\} \leq a |x_0| \exp \left\{ a \int_{t_0}^t |S(\tau) + \eta(\tau)| d\tau \right\},$$

з якої випливає наступна важлива оцінка як для самих розв'язків задачі Коші (1), так і для їх похідних при всіх $t \geq t_0$ та довільних початкових умовах

$$x(t_0) = x_0 = [y_0, y'_0]^T$$

$$|x(t)| \leq a|x_0| \exp \left\{ a \int_{t_0}^t \left| S(\tau) + \eta(\tau) \right| - \frac{r_0}{2a} d\tau \right\}. \quad (6)$$

Важливість оцінки (6) полягає ще й у тому, що вона дозволяє сформулювати достатні умови стійкості за Ляпуновим тривіального розв'язку задачі Коші (1). Справді, нехай існує таке $T \geq t_0$, що при всіх $t \geq T$ виконано нерівність

$$\left| S(\tau) + \eta(\tau) \right| - \frac{r_0}{2a} \leq b < 0, \quad (7)$$

де r_0, a задовольняють умовам (5), b — дійсне число. Тоді функція

$$\exp \left\{ a \int_{t_0}^t \left| S(\tau) + \eta(\tau) \right| - \frac{r_0}{2a} d\tau \right\}$$

буде обмеженою на проміжку $[x_0, +\infty)$, а отже на основі (6) для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що коли $|x_0| < \delta$, то $|x(t)| < \varepsilon$, що й означає стійкість тривіального розв'язку задачі Коші (1) за Ляпуновим. Крім того, з (6) і (7) випливає, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, а отже даний розв'язок буде ще й асимптотично стійким.

Так само можна встановити оцінку зверху самого лише розв'язку $y(t)$ задачі Коші (1), урахувуючи, що для нього з (3) випливає наступне інтегральне рівняння

$$y(t) = U_{11}(t, t_0)y_0 + U_{12}(t, t_0)y'_0 + \int_{t_0}^t U_{12}(t, \tau) [S(\tau) + \eta(\tau)] y(\tau) d\tau.$$

Переходимо тут до оцінки за нормою:

$$|y(t)| \leq |U_{11}(t, t_0)| |y_0| + |U_{12}(t, t_0)| |y'_0| + \int_{t_0}^t |U_{12}(t, \tau)| |S(\tau) + \eta(\tau)| |y(\tau)| d\tau. \quad (8)$$

Якщо існують такі сталі числа $r_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$, для яких виконуються умови

$$r_k(t) \geq r_0, \quad \left| U_{11}(t, \tau) \exp \left\{ \frac{1}{2} r_0(t - \tau) \right\} \right| \leq a_1, \quad \left| U_{12}(t, \tau) \exp \left\{ \frac{1}{2} r_0(t - \tau) \right\} \right| \leq a_2$$

при всіх $k = 1, 2, \dots, n$ та $t \geq \tau \geq t_0$, то тоді на основі (8) матимемо таку інтегральну нерівність

$$|y(t)| \leq \left[a_1 |y_0| + a_2 |y'_0| \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} r_0 (t - t_0) \right\} + \\ + a_2 \int_{t_0}^t \exp \left\{ -\frac{1}{2} r_0 (t - \tau) \right\} |S(\tau) + \eta(\tau)| |y(\tau)| d\tau.$$

Перепишучи її у вигляді

$$|y(t)| \exp \left\{ \frac{1}{2} r_0 (t - t_0) \right\} \leq a_1 |y_0| + a_2 |y'_0| + \\ + a_2 \int_{t_0}^t |S(\tau) + \eta(\tau)| |y(\tau)| \exp \left\{ \frac{1}{2} r_0 (\tau - t_0) \right\} d\tau$$

та застосовуючи лему Гронуолла — Беллмана, одержуємо наступну оцінку зверху розв'язку $y(t)$ задачі Коші (1)

$$|y(t)| \leq \left[a_1 |y_0| + a_2 |y'_0| \right] \exp \left\{ a_2 \int_{t_0}^t \left[|S(\tau) + \eta(\tau)| - \frac{r_0}{2a_2} \right] d\tau \right\}.$$

Список літератури

- Довгай, В. В. (2016). Поширення узагальненого методу диференціального інваріанту на системи диференціальних рівнянь другого порядку. У *Матеріалах Сімнадцятої Міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука* (Т. 1, с. 98–100). Київ: НТУУ «КПІ». <http://matan.kpi.ua/public/files/kk2016/kravchuk2016-volume1.pdf>
- Павлюк, І. А. (1971). *Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку*. Київ: Вид-во Київського університету.

Співіснування атракторів у системі генератор-п'єзокерамічний випромінювач

С. В. Донецький

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

dsvshka@gmail.com

Проведено вивчення динаміки неідеальної за Зоммерфельдом — Кононенком системи «генератор — п'єзокерамічний випромінювач». Знайдено пари співіснуючих атракторів. Встановлено існування рідкісних і прихованих атракторів.

Ключові слова: рідкісний атрактор, прихований атрактор, граничний цикл, хаотичний атрактор.

Для більшості динамічних систем існування декількох атракторів може виявитись катастрофою, коли мове йде про практичні застосування. Це пов'язано з тим, що зазвичай лише один атрактор гарантує бажану поведінку та є достатньо вивченим. Через це в останні роки почали з'являтися нові класифікації атракторів, які ділять їх залежно від складності їх пошуку.

Однією з таких класифікацій є та, що ділить атрактори на приховані та самозбуджувані (Leonov & Kuznetsov, 2013). Атрактор називають *самозбуджуваним*, якщо його басейн притягання перетинається з будь-яким околom деякого положення рівноваги. Атрактор називають *прихованим*, якщо він не є самозбуджуваним. Для більшості динамічних систем головну увагу приділяють вивченню самозбуджуваних атракторів. Це пов'язано з тим, що наразі встановлення існування прихованих атракторів є, взагалі кажучи, надзвичайно складною задачею.

Ще один клас атракторів, що запропонований у роботах Chudzik та ін. (2011), Shvets та Donetskyi (2019) є клас рідкісних атракторів. Ці атрактори в загальному випадку характеризуються тим, що мають у деякому сенсі малий басейн притягання. Тобто, у разі, якщо доведеться обирати початкову точку навмання, ми маємо малу ймовірність потрапити на цей атрактор.

Метою даної роботи є пошук прихованих та рідкісних атракторів.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \zeta; \\ \dot{\zeta} = -\xi + \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \zeta^2 - \alpha_3 \zeta^3 + \alpha_4 \beta; \\ \dot{\beta} = \gamma; \\ \dot{\gamma} = \alpha_5 \xi + \alpha_6 \zeta - \alpha_0 \beta - \alpha_7 \gamma, \end{cases} \quad (1)$$

де $\xi, \zeta, \beta, \gamma$ — фазові змінні, $\alpha_i, i = \overline{0, 7}$ — параметри системи.

Ця система отримана в роботах Krasnopolskaya та Shvets (2006), Швець та Краснопольська (2006), Balthazar та ін. (2006). Вона використовується як математична модель неідеальної за Зоммерфельдом — Кононенком системи генератор — п'єзокерамічний випромінювач (Кононенко, 1964). Фізичний зміст, як фазових координат, так і параметрів системи (1), детально описаний у вище згаданих роботах. У цих роботах доведено, що неідеальність збудження є причиною виникнення

детермінованого хаосу в системі (1), та описано декілька типів хаотичних атракторів цієї системи.

Оскільки система (1) є нелінійною системою звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку, то всі подальші пошуки атракторів цієї системи проводились за допомогою чисельних методів. Методика проведення таких чисельних досліджень детально описана в Krasnopol'skaya та Shvets (1991), Krasnopol'skaya та Shvets (2009), Shvets та Sirenko (2012).

Нехай $\alpha_0 = 0.995$, $\alpha_1 = 0.0535$, $\alpha_3 = 9.95$, $\alpha_4 = -0.103$, $\alpha_5 = -0.0604$, $\alpha_6 = -0.12$, $\alpha_7 = 0.01$, а параметр α_2 оберемо за біфуркаційний. При таких значеннях параметрів система (1) має єдине положення рівноваги ($\xi = 0$; $\zeta = 0$; $\beta = 0$; $\gamma = 0$) (Krasnopol'skaya & Shvets, 2006; Швець & Краснопольська, 2006; Balthazar et al, 2006).

Покладаємо $\alpha_2 = 8.623$ і досліджуємо еволюцію існуючих атракторів рухаючись у напрямку збільшення цього параметра. При таких значеннях параметрів у системі (1) існує єдиний атрактор (граничний цикл). Оскільки цей атрактор єдиний в околі нульового нестійкого положення рівноваги, то він є самозбуджуваним і не є рідкісним. При $\alpha_2 = 8.624$ до уже існуючого граничного циклу додається ще один граничний цикл. Проекції фазових портретів цих граничних циклів, побудовані при $\alpha_2 = 8.625$, зображені на рис. 1 (уже існуючий граничний цикл) та рис. 2 (новонароджений граничний цикл). Причому на рис. 3 раніше існуючий граничний цикл позначений чорним кольором, а щойно виниклий — червоним.

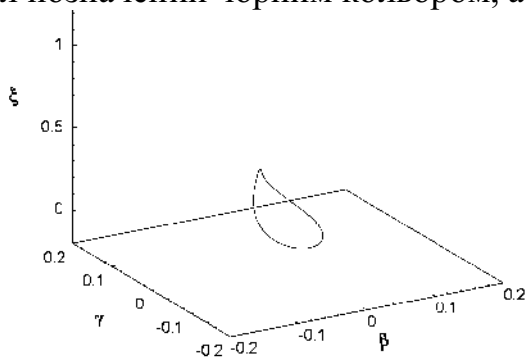


Рис. 1

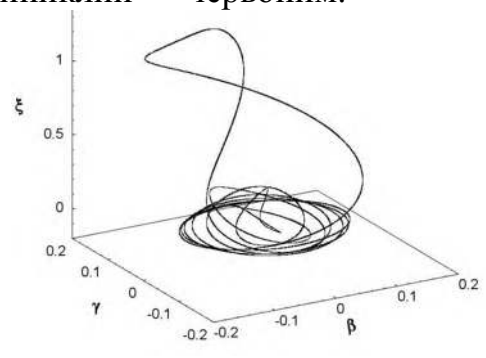


Рис. 2

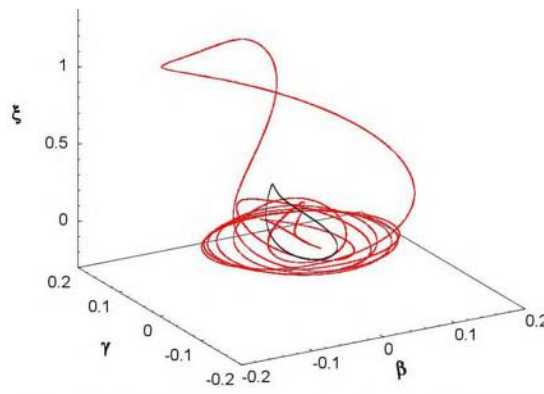


Рис. 3

Проекції фазових портретів граничних циклів при $\alpha_2 = 8.625$: раніше існуючий граничний цикл (рис. 1); виниклий граничний цикл (рис. 2); обидва цикли одночасно (рис. 3).

Червоний граничний цикл займає більшу область локалізації фазового простору ніж чорний граничний цикл. Незважаючи на цей факт, низка чисельних експериментів доводять, що новонароджений граничний цикл має дуже малий басейн притягання, що класифікує його як прихований. Крім того, при будь-якій початковій умові з околу нульового положення рівноваги усталена траєкторія притягається саме до чорного граничного циклу, що свідчить про те, що червоний граничний цикл є ще й прихованим атрактором.

При $\alpha_2 > 8.625$ описана ситуація вже не має місця. Червоний атрактор збільшує свій басейн притягання. Тепер майже всі траєкторії, які стартують з околу початку координат, притягуються до червоного атрактора. Цей атрактор перестає бути рідкісним і стає самозбуджуваним атрактором. Навпаки, чорний атрактор (граничний цикл) втрачає статуси самозбуджуваного й перетворюється на рідкісний і прихований граничний цикл.

Описана ситуація є вірною аж до $\alpha_2 = 8.659$, при якому червоний атрактор зникає і єдиним атрактором у системі залишається чорний граничний цикл, який втрачає ознаки як рідкісності, так і прихованості й перетворюється на самозбуджуваний атрактор.

Таким чином, у роботі знайдені й побудовані рідкісні та приховані атрактори розглянутої неідеальної динамічної системи.

Список літератури

- Balthazar, J. M., Felix, J. L., Brasil, R. M. L. R. F., Krasnopol'skaya, T. S., & Shvets, A. Y. (2009). Nonlinear interactions in a piezoceramic bar transducer powered by a vacuum tube generated by a nonideal source. *J. Comput. Nonlinear Dynam*, 4(1), 011013. <https://doi.org/10.1115/1.3007909>
- Chudzik, A., Perlikowski, P., Stefanski, A., & Kapitaniak, T. (2011). Multistability and rare attractors in van der Pol–Duffing oscillator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(7), 1907–1912. <https://doi.org/10.1142/S0218127411029513>
- Krasnopol'skaya, T. S., & Shvets, A. Y. (1991). Chaos in dynamics of machines with a limited power supply. In M. Okrouglick, L. Pust (Eds.), *Proceeding of the 8th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms* (Vol. 1, pp. 181–184), Prague.
- Krasnopol'skaya, T. S., & Shvets, A. Y. (2006). Детерминированный хаос в системе генератор-пьезокерамический излучатель. *Нелинейная динамика*, 2(1), 55–74. <https://doi.org/10.20537/nd0601003>
- Krasnopol'skaya, T. S., & Shvets, A. Y. (2009). Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks. *Journal of Sound and Vibration*, 322(3), 532–553. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.09.007>
- Leonov, G., & Kuznetsov, N. (2013). Hidden attractors in dynamical systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23(1), 1330002. <https://doi.org/10.1142/S0218127413300024>
- Shvets, A. Y., & Sirenko, V. O. (2012). Peculiarities of transition to chaos in nonideal hydrodynamics systems. *Chaotic Modeling and Simulation*, 2012(2), 303–310. http://www.cmsim.eu/papers_pdf/april_2012_papers/All_2012_April.pdf

- Shvets, A., & Donetskyi, S. (2018) Transition to deterministic chaos in some electroelastic systems. In *Chaotic Modeling and Simulation International Conference* (pp. 257–264). Cham: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-15297-0_23
- Кононенко, В. О. (1964). *Колебательные системы с ограниченным возбуждением*. Москва: Наука.
- Швець, О. Ю., & Краснопольська, Т. С. (2006). Динамічний хаос в п'єзокерамічних системах обмеженої потужності. Частина 1. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (2), 150–158.
- Швець, О. Ю., & Краснопольська, Т. С. (2006). Динамічний хаос в п'єзокерамічних системах обмеженої потужності. Частина 2. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (4), 147–154.

Застосування фракталів в інформаційній та кібернетичній безпеці

Ю. Д. Жданова, С. О. Спасітелєва, С. М. Шевченко

Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ, Україна

y.zhdanova@kubg.edu.ua, s.spasitielieva@kubg.edu.ua,

s.shevchenko@kubg.edu.ua

У доповіді розглянуті підходи до застосування фрактального аналізу в інформаційній та кібернетичній безпеці, які можуть бути використані при підготовці фахівців у процесі науково-дослідної роботи.

Ключові слова: фрактал, властивості фракталів, моделі фракталів, інформаційна та кібернетична безпека, захист інформації.

Сучасний захист інформації виходить за рамки детермінованої системи з визначеними характеристиками. Відбувається це у зв'язку з тим, що система обробки інформації належить до самоорганізуючих систем, і, з точки зору синергетики, найменші відхилення середніх показників приводить не тільки до нових властивостей системи сучасні, але й до появи нової системи в цілому, до так званого «детермінованого хаосу». Для дослідження таких систем активно застосовують сучасні методи і підходи, зокрема ті, що пов'язані з математичною теорією фракталів.

Одною з характерних ознак фрактальних структур є самоподібність, що може проявлятися не тільки через фізичні форми, а й через фрактальну поведінку. Фрактали дозволяють моделювати складні природні форми та процеси за допомогою простих ітераційних процедур. Тому теорія фракталів на сьогодні є актуальною та затребуваною у різних галузях наукових досліджень.

Спектр застосування теорії фракталів є надзвичайно широким. Її активно використовують у комп'ютерній графіці для зображення об'єктів природи. Базою для побудови таких фракталів є математична формула в пам'яті комп'ютера. У фізиці цей інструментарій використовують для моделювання нелінійних процесів: хмари, турбулентність, вогонь тощо; у біології — для моделювання популяцій.

В останні часи фрактальну геометрію широко використовують в економіці та фінансах, наприклад, для аналізу біржових ринків.

У часи цифрового суспільства, у сфері інформаційної безпеки фрактальну геометрію застосовують для генерації складних об'єктів на дисплеях, стисканні даних, опису соціальних процесів тощо.

Застосування фракталів у задачах забезпечення захисту інформації розглянуто у працях Локтев та Залетдинов (2010), Никонов та Зобов (2017).

Є очевидним, що розвиток суспільства з кожним днем стає залежним від розвитку інформаційно-комунікаційних технологій, від зростаючої ролі інформації в життєвому просторі людства. Тому саме захист цієї інформації є першочерговим завданням у сучасному світі. Для вирішення поставленого завдання необхідно постійно розвивати професійні компетенції фахівців інформаційної та

кібернетичної безпеки, що неможливе без удосконалення змісту їх освіти, перенесення сучасного математичного апарату, зокрема фрактального аналізу, у підготовку майбутніх спеціалістів.

На сучасному етапі у зв'язку з недостатньою надійністю програмних реалізацій криптографічних алгоритмів, наукові кола світу ведуть розробки по створенню та впровадженню альтернативних методологій захисту інформації, зокрема таких, які ґрунтуються на використанні перспективних напрямів математики, — фрактального моделювання.

Розгляньмо різні підходи застосування теорії фракталів в інформаційній та кібернетичній безпеці, які можуть бути впровадженні в навчальний процес підготовки майбутніх фахівців у даній галузі.

У дослідженні (Локтев & Залетдинов, 2010) пропонується розглядати безпеку кожного автоматизованого робочого місця мережі за допомогою набору властивостей, які можуть бути представлені у вигляді фракталів. Потім, використовуючи їх самоподібність, спроектувати одержані результати на всю систему захисту інформації. Учені пропонують використовувати фрактали на трьох етапах:

- 1) перший фрактал розкриває можливості нанесення шкоди інформації;
- 2) другий фрактал описує вимоги по захисту інформації;
- 3) третій фрактал представляє можливості захисту інформації у комп'ютерній мережі.

Надалі вводиться топологічне дерево, яке описує зв'язок між окремими автоматизованими робочими місцями персоналу. Кожне місце містить чотири частини: технічне забезпечення, програмне забезпечення, інформаційне забезпечення, організаційно-методичне забезпечення. Таким чином, визначивши параметри одного автоматизованого робочого місця, можна змодельовати систему захисту інформації у вигляді набору фракталів для корпоративної мережі. Даний підхід описує симетричні системи захисту інформації, де до кожного елементу системи висуваються однакові вимоги.

Аналіз наукової роботи Никонов та Зобов (2017) дозволив виділити приклади можливого застосування фрактальних відображень для породження довгих неперіодичних послідовностей, які використовують в теорії шифрування. Як відомо, фрактальні об'єкти, одержані за допомогою нелінійних динамічних функцій, за своєю складністю наближаються до об'єктів природних. Це дозволяє використовувати ці функції як надійних датчиків псевдовипадкових послідовностей будь-якої довжини. Фрактальні функції, маючи вхідні аргументи у вигляді набору символів, можуть відобразити їх на числову послідовність. Здійснити аналіз цієї послідовності практично неможливо. Проте, знаючи вихідну функцію та її початкові параметри, можливо легко відновити початковий набір символів. Розв'язання оберненої задачі не є можливим. У статті представлені різні методи побудови фракталів як уже відомих, так і нових фрактальних конструкцій, зокрема з використанням порогових операцій.

Взагалі, слід відмітити, що теорія фракталів саме найчастіше застосовується

в алгоритмах шифрування. Наприклад, для реалізації шифрів заміни та підстановки; як фактор, що вносить додаткову невизначеність при використанні генератора псевдовипадкових чисел або використаний замість генератора псевдовипадкових чисел; для зниження ймовірності одержання ключа та інші. Найчастіше використовують добре досліджені й вивчені множини Мандельброта та Жюліа (Зайцева & Скобелев, 2007).

Наукове дослідження Назаркевич та ін. (2015) присвячене розробці методу захисту документів латентними елементами на основі фракталів. Ученими представлено спеціальні графічні побудови, на основі яких створено латентні елементи, що підвищують ефективність та надійність захисту. Спосіб захисту полягає в тому, що у векторному форматі утворюють графічні елементи захисної сітки, які копіюють, розмножують та утворюють захисну сітку на основі фракталу за допомогою рекурсивної процедури. Фрактали будуються рекурсивною процедурою, де кожен одиничний графічний елемент постає в ролі генератора, який задає величину захисного елемента. Величина захисного елемента будується мінімально можливою для відтворення в друкованому виді, а потім ініціатором заповнюється площа сітки. Побудова сітки починається із задання параметрів фракталу. На основі створеного фракталу можна створити велику кількість варіантів фрактальних сіток, змінюючи масштаб, поворот, а також збільшуючи або зменшуючи кількість ітерацій. Фрактальні фонові сітки є складними для відтворення, адже при цьому необхідно використати алгоритм побудови вибраного типу фракталу, шаблон якого відомий тільки розробнику.

Детальніше з аналізом існуючих підходів до використання фрактального аналізу в області захисту інформації можна ознайомитися у статті Шевченко та ін. (2019).

Останнім часом для підвищення рівня безпеки IoT, зокрема пристроїв розумного будинку, визначають застосування технології Блокчейн (Dorri et al., 2017; Fan et al., 2018)

Блокчейн інтегрує такі технології, як розподілене зберігання даних, однорангова передача, механізм консенсусу та алгоритм шифрування. Очікується, що це дозволить не тільки усунути слабкість безпеки IoT, але й знизити експлуатаційні та кредитні витрати централізованої мережі, підвищити операційну ефективність та використання промислових активів. Науковою школою студентів та викладачів кафедри Інформаційної та кібернетичної безпеки Київського університету імені Бориса Грінченка ведуться розробки системи безпеки пристроїв розумного будинку на основі технології Блокчейн із застосуванням фрактального аналізу.

Потужні математичні розробки, добра алгоритмізація функцій дозволяє ефективно використовувати теорію фракталів для захисту інформації. На сьогодні існує достатня кількість уже реалізованих алгоритмів фрактального моделювання у вигляді програмного забезпечення. Проте, використання різних моделей фракталів для створення надійних систем захисту інформації потребує подальшого вивчення.

Розглянуті підходи до застосування фрактального аналізу в інформаційній та кібернетичній безпеці можуть бути використані при підготовці фахівців у процесі науково-дослідної роботи або при написанні курсової чи дипломної роботи.

Список літератури

- Dorri, A., Kanhere, S. S., Jurdak, R., & Gauravaram, P. (2017, March). Blockchain for IoT security and privacy: The case study of a smart home. In *2017 IEEE international conference on pervasive computing and communications workshops (PerCom workshops)* (pp. 618–623). IEEE. <https://allquantor.at/blockchainbib/pdf/dorri2017blockchain.pdf>
- Fan, S., Song, L., & Sang, C. (2019, October). Research on Privacy Protection in IoT System Based on Blockchain. In *International Conference on Smart Blockchain* (pp. 1–10). Cham: Springer. https://easychair.org/publications/preprint_download/Vg7v
- Зайцева, Э. Е. & Скобелев, В. Г. (2007). Шифр на основе отображения Мандельброта. *Вестник Томского университета. Приложение*, (23). 107–113.
- Локтев, А. А., & Залетдинов, А. В. (2010) Использование фракталов в задачах обеспечения информационной безопасности. *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*, 15(2), 599–604. <http://journals.tsutmb.ru/go/1810-0198/2010/2/599-604/>
- Назаркевич, М. А., Дронюк, І. М., Троян, О. А. & Томащук, Т. Ю. (2015). Розробка методу захисту документів латентними елементами на основі фракталів. *Захист інформації*, 17(1), 21–26. <https://doi.org/10.18372/2410-7840.17.7505>
- Никонов, В. Г., & Зобов, А. И. (2017). О возможности применения фрактальных моделей при построении систем защиты информации. *Computational nanotechnology*, (1), 39–49.
- Шевченко, С. М., Жданова, Ю. Д., Спасітелєва, С. О., Негоденко, О. В., Мазур, Н. П. & Кравчук, К. В. (2019). Математичні методи кібербезпеки: фрактали та їх застосування в інформаційній та кібербезпеці. *Кібербезпека: наука, освіта, техніка*, 1(5), 31–39. <https://doi.org/10.28925/2663-4023.2019.5.3139>

Про ряди Фур'є обмежених функцій

П. В. Задерей, Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова, С. С. Хрипко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

zadereypv@ukr.net, zadereynm@gmail.com, g.nefyodova@gmail.com,
khrypikoss@gmail.com

У статті встановлено необхідні та достатні умови стосовно коефіцієнтів тригонометричного ряду, при виконанні яких, заданий ряд буде рядом Фур'є обмеженої функції.

Ключові слова: тригонометричний ряд, ряд Фур'є, рівномірна збіжність ряду, теорема Рісса — Фішера.

Множину 2π -періодичних функцій $f(x)$, що справджують умову

$$|f(x)| \leq C < \infty,$$

де C — абсолютна константа, позначимо $B[0, 2\pi]$, а множину 2π -періодичних функцій $f(x)$, що задовольняють умові

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

позначимо $L_2[0, 2\pi]$.

Нехай задано тригонометричний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{ikt}. \quad (1)$$

Поліноми

$$Z_n^{(s)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n} \right)^s \right) C_k e^{ikt}, \quad s > 0,$$

називають сумами Зигмунда, а при $s = 1$ сумами Феєра (Степанец, 2002).

Однією з основних задач теорії тригонометричних рядів є задача встановлення умов на коефіцієнти тригонометричного ряду, при яких даний ряд є рядом Фур'є функції із заданого класу.

Зокрема, теорема Рісса — Фішера (Зигмунд, 1965) стверджує, що якщо справджується умова

$$\sum_{k=0}^{\infty} |C_k|^2 < \infty,$$

то ряд (1) є рядом Фур'є функції $f(x) \in L_2[0, 2\pi]$.

Зауважмо, що для інших класів функцій таких простих умов не існує.

Метою даної роботи є встановлення наступного твердження.

Теорема. Для того, щоб ряд (1) був рядом Фур'є функції з множини $B[0, 2\pi]$ необхідно і достатньо, щоб поліноми $Z_n^{(s)}(t)$ були рівномірно обмеженими, тобто

$$\left| Z_n^{(s)}(t) \right| \leq C.$$

Необхідність умов теореми випливає з леми, встановленої в Бари (1961, с. 139).

Доведімо достатність:

Нехай

$$\left| Z_n^{(s)}(t) \right| \leq C.$$

Тоді правдива наступна оцінка:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| Z_n^{(s)}(t) \right|^2 dt = \sum_{k=0}^{n-1} |C_k|^2 \left(1 - \left(\frac{k}{n} \right)^s \right)^2 \geq \sum_{k=0}^m |C_k|^2 \left(1 - \left(\frac{k}{n} \right)^s \right)^2,$$

де $m \in \mathbb{N}, m < n$.

В останній нерівності перейдімо до границі, коли $n \rightarrow \infty$. Отримаємо співвідношення

$$\sum_{k=0}^m |C_k|^2 < C^2,$$

правдиве для будь-якого $m \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} |C_k|^2 < C^2.$$

Тому майже скрізь $Z_n^{(s)}(t) \rightarrow f(t)$, а з нерівності $\left| Z_n^{(s)}(t) \right| \leq C$ випливає, що нерівність $\left| f(t) \right| \leq C$ виконується майже скрізь.

Зауважмо, що при $s = 1$ ця теорема наведена в Бари (1961) та Гофман (1963).

Список літератури

- Бари, Н. К. (1961). *Тригонометрические ряды*. Москва: Физматгиз.
 Гофман, К. (1963). *Банаховы пространства аналитических функций*. Москва: Издательство иностранной литературы.
 Зигмунд, А. (1965). *Тригонометрические ряды*. (Т. 1). Москва: Мир.
 Степанец, А. И. (2002). *Методы теории приближений*. (Т. 1.). Киев: Институт математики НАН Украины.

Застосування математики в розрахунках однорідних і тришарових прямокутних пластин на згин

А. Г. Зеленський, Є. Д. Побігай, А. Ю. Томін, О. С. Фомін

Придніпровська державна академія будівництва та архітектури,

Дніпро, Україна

a.zelensky@ukr.net

Отримані основні співвідношення та рівняння для задач згину тонких жорстких однорідних і тришарових прямокутних пластин у рамках навчально-дослідницької роботи зі студентами з курсу «Основи теорії пружності». Отримані теоретичні результати можуть бути використані у практиці наближеного розрахунку на міцність і жорсткість прямокутних плит.

Ключові слова: прямокутна жорстка однорідна і тришарова пластини, крайова задача, диференціальні рівняння, метод колокації.

У курсі лекцій «Основи теорії пружності», який читають студентам будівельного факультету ПДАБА в 5-му семестрі, висвітлюється тема «Розрахунок на міцність і жорсткість однорідних прямокутних і круглих пластин на згин» за класичною теорією. На її основі студентами виконується проектувальний розрахунок шарнірно-обіпертих прямокутних і жорстко защемлених круглих пластин. Для розуміння студентами розрахунку пластин середньої товщини ми знайомимо їх також із неklasичною теорією — математичною теорією розв'язування граничних задач з використанням рядів Фур'є — Лежандра й варіаційного принципу Рейснера. Ефективність використання тришарових елементів конструкцій демонструється розв'язуванням на лекції задачі про згин шарнірно-обіпертої тришарової пластини на основі класичних гіпотез. Аналітичне розв'язування крайових задач згину однорідних і тришарових прямокутних пластин з різним закріпленням сторін залишається за межами навчального курсу. Це й слугувало розгляду задач згину вказаних елементів при жорсткому защемленні країв.

1. Постановка задачі. Розглядається лінійно пружна однорідна або тришарова пластинка ($a \times b \times h$), на яку діє поперечне навантаження

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (1)$$

де q_0 — відома стала; m, n уважатимемо відомими непарними натуральними числами; $x \in [0; a]$, $y \in [0; b]$, $z \in [-h / 2; h / 2]$.

Крайові умови:

$$w(x = 0; y) = w(x = a; y) = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x}(x = 0; y) = \frac{\partial w}{\partial x}(x = a; y) = 0; \quad (2a)$$

$$w(x; y = 0) = w(x; y = b) = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x; y = 0) = \frac{\partial w}{\partial y}(x; y = b) = 0, \quad (2b)$$

Отримаємо аналітично повну систему рівнянь при дослідженні напружено-деформованого стану жорстко защемлених однорідних і тришарових пластин, які мають важливе практичне значення в будівництві.

2. Основні рівняння для однорідної тонкої пластини. Диференціальне рівняння зігнутої поверхні тонкої жорсткої пластини згідно з класичною постановкою має вигляд (Тимошенко & Войновский-Кригер, 1963):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}; \quad (3)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (4)$$

де E, ν — механічні сталі; $w(x, y)$ — шукана функція прогину пластини.

Розв'язок рівняння (3), який задовольняє крайовим умовам (2а), (2б), шукаємо у вигляді ряду:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \left(1 - \cos \frac{2i\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2j\pi y}{b} \right), \quad (5)$$

де w_{ij} — сталі, які визначають з певних умов.

Коефіцієнти w_{ij} потрібно визначити так, щоб ряд (5) задовольняв рівнянню (3) при навантаженні (1). Це можна зробити чисельним методом колокації (Демидович и др., 1967). Візьмемо скінченну кількість членів ряду (5). Для інженерних розрахунків урахуємо чотири члени. Тоді

$$w(x, y) = w_{11} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + w_{12} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{4\pi y}{b} \right) + \\ + w_{21} \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + w_{22} \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{4\pi y}{b} \right). \quad (6)$$

Вимагаємо, щоб ліва і права частини рівняння (3) були рівні у деяких точках. Таких точок потрібно взяти стільки, скільки невідомих у рівності (6) — чотири. З урахуванням симетрії прогину відносно центра пластини візьмемо точки з такими координатами: $A_1 \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2} \right)$, $A_2 \left(\frac{2a}{3}; \frac{b}{2} \right)$, $A_3 \left(\frac{5a}{6}; \frac{b}{2} \right)$, $A_4 \left(\frac{a}{2}; \frac{3b}{4} \right)$. Тоді система чотирьох лінійних алгебричних рівнянь для визначення w_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2$) буде такою:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_{ij} \left(\left(\frac{2i\pi}{a} \right)^4 \cos \frac{2i\pi x}{a} B(y) - 2 \left(\frac{2i\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{2j\pi}{b} \right)^2 \cos \frac{2i\pi x}{a} \cos \frac{2j\pi y}{b} + \right. \\ \left. + \left(\frac{2j\pi}{b} \right)^4 \cos \frac{2j\pi y}{b} A(x) \right) = -\frac{q_0}{D} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (7)$$

де $A(x) = 1 - \cos \left(\frac{2i\pi x}{a} \right)$; $B(y) = 1 - \cos \left(\frac{2j\pi y}{b} \right)$, а координати (x, y) беруться для чотирьох точок A_i ($i = 1, \dots, 4$).

Зі збільшенням кількості членів у ряді (5) зростає кількість точок колокації та кількість рівнянь і підвищується точність розв'язку задачі.

Знайшовши w_{ij} , отримаємо наближено прогин $w(x, y)$ і за нижченаведеними формулами дістанемо напруження і моменти в пластині.

Напруження:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), (x \rightarrow y, y \rightarrow x); \tau_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (8)$$

Згинальні та крутний моменти виражаються через $w(x, y)$ таким чином:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), (x \rightarrow y, y \rightarrow x); H = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (9)$$

Система залежностей (4), (6)–(9) є повною для визначення поперечних переміщень $w(x, y)$, напружень $\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), \tau_{xy}(x, y)$ і моментів M_x, M_y, H , які необхідні для розрахунку на міцність і жорсткість пластин.

2. Основні рівняння для тришарової тонкої пластини. Розглянемо тришарову пластину симетричної структури: зовнішні — несучі шари товщини δ , модуль Юнга матеріалу E_n ; внутрішній шар — заповнювач товщини $2t$, модуль Юнга матеріалу E_3 . Зовнішні шари набагато міцніші внутрішнього ($E_n \gg E_3$) і тонші внутрішнього ($\delta < t$). Приймаючи для тришарової пластини класичні гіпотези, як і для одношарової, та покладаючи рівність коефіцієнтів Пуассона матеріалів несучих шарів і заповнювача ($\nu_n = \nu_3 \equiv \nu$), дістанемо циліндричну жорсткість D_T тришарової пластини:

$$D_T = \frac{2(E_n \delta (3t^2 + 3t\delta + \delta^2) + E_3 t^3)}{3(1-\nu^2)}. \quad (10)$$

Замінюючи у (8) E на E_n для несучих шарів, E на E_3 для заповнювача, дістанемо напруження в зовнішніх і внутрішньому шарах. У (9) $D \rightarrow D_T$. Система залежностей (10), (6)–(9) буде повною для визначення поперечних переміщень $w(x, y)$, напружень $\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), \tau_{xy}(x, y)$ і моментів M_x, M_y, H у тришарових пластинах.

Наведені вище повні системи залежностей можуть використовуватися для наближених практичних розрахунків однорідних і тришарових плит, які використовуються в будівельній галузі.

Список літератури

- Демидович, Б. П., Марон, И. А., & Шувалова, Э. З. (1967). *Численные методы анализа* (3-е изд.). Москва: Наука.
Тимошенко, С. П., & Войновский-Кригер, С. (1963). *Пластинки и оболочки*. Москва: Наука.

Динамика взаимодействия вирусов и иммунной системы

А. О. Игнатьев

Институт прикладной математики и механики, Донецк, Украина
aoignat@mail.ru

Рассмотрена система двух дифференциальных уравнений относительно переменных, представляющих собой популяции вирусов и иммунных клеток. Найдены положения равновесия этой системы и изучена их устойчивость по Ляпунову.

Ключевые слова: вирусная инфекция, иммунная система, математическая модель, система обыкновенных дифференциальных уравнений, положение равновесия, устойчивость, функция Ляпунова.

Взаимоотношения иммунитета и инфекции определяют развитие очень многих заболеваний. Как указано в статье Марчук (2012), суть иммунной реакции на вторжение генетически чужеродного материала (антигена), в том числе и возбудителей болезни, состоит в производстве специфических материальных субстратов (антител, клеток-киллеров), способных нейтрализовать антигены. Исходя из этого, будем рассматривать инфекционное заболевание как конфликт между популяцией возбудителей болезни и иммунной системой организма. Простая математическая модель может быть полезной для лучшего понимания болезни и выработки лекарственной терапии, используемой при лечении.

В настоящей статье изучается математическая модель, предложенная в работе Komarova и др. (2003). Эта же модель была получена ранее в работе de Boer и Boerlijst (1994). В статье Komarova и др. (2003) авторы делают достаточно общие предположения. Модель содержит две переменные: популяцию вируса y и популяцию иммунных клеток z . Точная идентичность иммунных клеток остается открытой. Предполагается, что степень иммунного ответа зависит от вирусной нагрузки, и что иммунный ответ препятствует росту популяции вирусов. Таким образом, иммунные клетки могут соответствовать любой ветви адаптивной иммунной системы. Это могут быть клетки CD4, также называемые клетками T4, которые являются «вспомогательными» клетками и ведут атаку против инфекций. Это могут быть антитела, а также клетки CD8 (клетки T8), являющиеся «супрессорными» клетками, которые завершают иммунный ответ. Клетки CD8 + также могут быть «киллерами» которые убивают раковые клетки и другие клетки, инфицированные вирусом. Математическая модель задается следующей парой дифференциальных уравнений:

$$\dot{y} = yg_r(y) - p y z, \quad (1)$$

$$\dot{z} = z f(y). \quad (2)$$

Популяция вирусов растет со скоростью, описываемой функцией $g_r(y)$. Эта функция зависит от количества вирусов y и от параметра r , определяющего скорость размножения вирусов. Размножение (репликация) вирусов — процесс, в ходе которого вирус, используя собственный генетический материал и синтетический

аппарат клетки-хозяина, воспроизводит подобное себе потомство. Популяция вируса подавляется иммунным ответом со скоростью pyz , где p — положительная константа. Рост иммунитета определяется вирусной нагрузкой y и описывается функцией $f(y)$. В работе Komarova и др. (2003) показано, что функции $g_r(y)$ и $f(y)$ должны удовлетворять следующим условиям:

- 1) $g_r(0) > 0$;
- 2) $\frac{\partial g_r}{\partial y} < 0$ для любого y ;
- 3) существует y_* , такое, что $g_r(y_*) = 0$;
- 4) $\frac{\partial g_r(y)}{\partial r} > 0$ для всех r и y ;
- 5) существуют только два значения $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$, такие, что $f(y_1) = f(y_2) = 0$;
- 6) $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ при $y = y_1$, и $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$ при $y = y_2$.

В качестве примера такой системы, удовлетворяющей сформулированным выше условиям, авторы статьи Komarova и др. (2003) предложили систему

$$\dot{y} = ry \left(1 - \frac{y}{k} \right) - ay - pyz, \quad (3)$$

$$\dot{z} = \frac{c y z}{1 + \varepsilon y} - q y z - b z, \quad (4)$$

рассмотренную ранее в работе de Boer и Boerlijst (1994).

Популяция вирусов растет со скоростью $ry \left(1 - \frac{y}{k} \right)$. Параметр r определяет скорость, с которой происходит размножение вирусов, а параметр k представляет собой предельное возможное значение количества вирусов, т. е. $0 \leq 1 - \frac{y}{k} \leq 1$ для любого y . Популяция вирусов умирает со скоростью ay и подавляется иммунной системой со скоростью pyz . Иммунитет растет со скоростью $\frac{c y z}{1 + \varepsilon y}$. Таким образом, рост иммунитета представляет собой функцию насыщения по отношению к имеющейся популяции вируса (при $y \rightarrow \infty$ функция $\frac{c y z}{1 + \varepsilon y}$ остается ограниченной). Иммунные клетки могут быть ингибированы вирусом со скоростью $q y z$. И, наконец, при отсутствии антигенной стимуляции иммунный ответ снижается со скоростью bz . Фазовые переменные $y(t)$ и $z(t)$ в системе дифференциальных

уравнений (3), (4) неотрицательны (в противном случае они бы не имели биологического смысла), все константы $r, k, a, p, c, \varepsilon, q, b$ — положительны. В дальнейшем, когда мы будем говорить о решениях этой системы, мы будем подразумевать лишь неотрицательные решения.

Система (3), (4) представляет собой систему (1), (2), в которой

$$g_r(y) = r \left(1 - \frac{y}{k} \right) - a, \quad f(y) = \frac{cy}{1 + \varepsilon y} - qy - b.$$

Приравняв нулю правые части уравнений (3), (4), находим положения равновесия этой системы:

$$\mathfrak{B}_0 : \quad y = 0, \quad z = 0,$$

$$\mathfrak{B}_1 : \quad y = y_1, \quad z = z_1,$$

$$\mathfrak{B}_2 : \quad y = y_2, \quad z = z_2,$$

$$\mathfrak{B}_3 : \quad y = y_*, \quad z = 0,$$

где

$$y_1 = \frac{c - q - b\varepsilon - \sqrt{D}}{2q\varepsilon}, \quad y_2 = \frac{c - q - b\varepsilon + \sqrt{D}}{2q\varepsilon}, \quad D = (c - q - b\varepsilon)^2 - 4bq\varepsilon,$$

$$z_1 = \frac{1}{p} \left[r \left(1 - \frac{y_1}{k} \right) - a \right], \quad z_2 = \frac{1}{p} \left[r \left(1 - \frac{y_2}{k} \right) - a \right], \quad y_* = k \left(1 - \frac{a}{r} \right).$$

$\mathfrak{B}_0$ соответствует ситуации, когда вирусы в организме-хозяине и иммунный ответ на них отсутствуют; в случаях $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ вирусы и клетки иммунитета уравнивают друг друга, что соответствует хроническому течению болезни; и, наконец, $\mathfrak{B}_3$ соответствуют случаю, когда иммунные клетки полностью подавлены вирусом.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Положение равновесия $\mathfrak{B}_0$ системы (3), (4) глобально асимптотически устойчиво при $r \leq a$ и неустойчиво при $r > a$.*

Теорема 2. *В системе дифференциальных уравнений (3), (4) положение равновесия $\mathfrak{B}_1$ локально асимптотически устойчиво, а положение равновесия $\mathfrak{B}_2$ неустойчиво.*

Теорема 3. *Положение равновесия $\mathfrak{B}_3$ системы (3), (4) асимптотически устойчиво при $y_* \in (0, y_1) \cup (y_2, +\infty)$ и неустойчиво при $y_* \in (y_1, y_2)$.*

Используя полученные результаты, мы можем утверждать следующее.

Если $0 < r \leq a$, то в этом случае существует лишь одно положение равновесия $\mathfrak{B}_0$, которое глобально асимптотически устойчиво.

Если $a < r < r_1 = \frac{a}{1 - \frac{y_1}{k}}$, то в этом случае существует одно положение

равновесия $\mathfrak{B}_3$, которое асимптотически устойчиво.

Если $r_1 < r < r_2 = \frac{a}{1 - \frac{y_2}{k}}$, то существует асимптотически устойчивое поло-

жение равновесия $\mathfrak{B}_1$ и неустойчивое положение равновесия $\mathfrak{B}_3$.

Если $r > r_2$, то существуют два асимптотически устойчивых положения равновесия $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_3$, и одно неустойчивое положение равновесия $\mathfrak{B}_2$.

Полученные результаты приведены в следующей таблице.

	$0 < r \leq a$	$a < r < r_1$	$r_1 < r < r_2$	$r > r_2$
Асимптотически устойчивые положения равновесия	$\mathfrak{B}_0$	$\mathfrak{B}_3$	$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_3$
Неустойчивые положения равновесия			$\mathfrak{B}_3$	$\mathfrak{B}_2$

Из приведенного анализа можно сделать следующий практический вывод: если в случаях $r \in (r_1; r_2)$ и $r \in (r_2; +\infty)$ популяции вирусов и иммунных клеток с помощью лекарственной терапии организма-хозяина возможно привести в какой-то момент времени t_0 в такое состояние, что соответствующие им переменные y и z окажутся в области притяжения положения равновесия $\mathfrak{B}_1$, то начиная с этого момента времени переменные $y(t)$ и $z(t)$ будут в дальнейшем принадлежать некоторой окрестности $\mathfrak{B}_1$ и стремиться к этому положению равновесия без дальнейшего использования лекарств.

Список литературы

- de Boer, R. J., & Boerlijst, M. C. (1994). Diversity and virulence thresholds in AIDS. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 91(2), 544–548. <https://doi.org/10.1073/pnas.91.2.544>
- Komarova, N. L., Barnes, E., Klenerman, P., & Wodarz, D. (2003). Boosting immunity by antiviral drug therapy: a simple relationship among timing, efficacy, and success. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 100(4), 1855–1860. <https://doi.org/10.1073/pnas.0337483100>
- Марчук, Г. И. (2012). Математическое моделирование в медицине. *Медицина и высокие технологии*, (2), 3–6.

Математичне моделювання інвестиційного проєкту як функції n змінних

Т. В. Іваненко, О. А. Тимошенко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

tivanenko2015@gmail.com, elena_timoshenko2008@ukr.net

У статті розглянуто задачу оцінювання ризикованості інвестиційного проєкту із застосуванням математичної моделі, в основу якої покладено функцію n змінних, її частинних похідних та градієнта.

Ключові слова: аналіз чутливості функції до зміни параметрів, коефіцієнти еластичності, критичне значення параметра, межа безпеки.

Для прийняття обґрунтованого рішення про впровадження або відмову від певного інвестиційного проєкту розраховують низку показників ефективності. Такі показники значною мірою залежать від правильності розрахунку елементів грошового потоку CF_k , ставки дисконту r та інших параметрів, а також від можливої їхньої зміни протягом терміну реалізації проєкту. Тому після встановлення базового значення показника ефективності слід визначити його чутливість до зміни основних параметрів.

Основною ідеєю аналізу чутливості є складання математичної моделі, яка описує залежність обраного показника ефективності проєкту від зміни різноманітних чинників з метою виявлення найнебезпечніших з них. Для цього використовують функцію багатьох змінних: $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ й досліджують ступінь впливу зміни кожної змінної x_i ($i = 1, \dots, n$) на функцію u , за умови, що значення решти змінних зафіксовано. Такий вплив характеризується коефіцієнтом еластичності. Коефіцієнтом еластичності $E_{x_i}(u)$ функції u за аргументом x_i

називають частинну похідну функції u по аргументу x_i , взяту із множником $\frac{x_i}{u}$ для нормування, що дає змогу обчислювати $E_{x_i}(u)$ у відносних одиницях. Коефіцієнт еластичності функції u за аргументом x_i розраховують за формулою (1):

$$E_{x_i}(u) = \frac{x_i}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (1)$$

Отже, коефіцієнт еластичності функції показує на скільки відсотків зміниться функція, якщо аргумент зміниться на 1%. Якщо $|E_{x_i}(u)| > 1$, то це означає, що при зміні x_i на 1% u зросте більше, ніж на 1%, тобто u є еластичною відносно x_i , отже даний параметр є небезпечним. Якщо ж $|E_{x_i}(u)| < 1$, це означає, що u нееластична відносно x_i і цей чинник є безпечним. Знак коефіцієнта еластич-

ності показує напрямок зміни функції (зростання чи спадання) при зміні аргументу. У випадку, коли всі аргументи функції u змінюються одночасно, чутливість u характеризується градієнтом:

$$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right),$$

а коефіцієнт еластичності визначають за формулою (2):

$$E(u) = \frac{1}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \Delta x_n \right) \quad (2)$$

Формулу (2) використовують для порівняння кількох альтернативних проєктів; вона дає можливість оцінити загальний ступінь ризикованості проєкту.

Під час реалізації аналізу чутливості слід провести наступні розрахунки.

1. Обрати показник ефективності проєкту. Зазвичай це NPV , але може бути й IRR . Визначити параметри, що впливають на значення NPV , наприклад

$$NPV = NPV(INV, q, p, Z, M, r),$$

де INV — обсяг інвестицій, q — обсяг продажу, p — ціна продукції, Z — заробітна плата працівників, M — матеріальні витрати, r — ставка дисконтування.

2. Розрахувати еластичність NPV за кожним параметром.

3. Визначити граничне значення параметра, при якому NPV відхиляється від свого базового значення на критичну величину, тобто до досягнення нульового значення, та межу безпеки.

4. Проранжувати параметри за еластичністю: чим вища чутливість, тим важливіша змінна.

Проілюструємо це на такому прикладі: початкові інвестиції проєкту складають 20 млн. грн., ціна реалізації продукції — 50 грн., витрати на оплату праці за виготовлення одиниці продукції — 15 грн., витрати на сировину — 10 грн./шт. Постійні витрати складають 5 млн. грн. на рік. При нормальному завантаженні виробничих потужностей підприємство зможе виробляти 600 тис. одиниць продукції на рік. Термін реалізації проєкту складає 4 роки, дисконтна ставка 12%. Виконаємо аналіз чутливості проєкту щодо зміни вартості капіталу, початкових вкладень та ціни товару.

1. Показником ефективності проєкту обираємо NPV та розраховуємо її за формулою:

$$NPV = -INV + CF_k \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(1+r)^k}, \quad (3)$$

де $CF_k = pq - VC - FC = 50 \cdot 600 - (15 + 10) \cdot 600 - 5000 = 10$ (млн. грн.);

$NPV = -20 + 10 \cdot (0,893 + 0,797 + 0,712 + 0,636) = 10,38$ (млн. грн.) — початкове значення NPV .

Нехай $NPV = NPV(r; INV; p)$. Знайдемо частинні похідні функції NPV по усіх змінних, значення цих похідних у точці $x_0 = (0,12; 20\,000\,000; 50)$ та коефіцієнти еластичності NPV по усіх змінних за формулою (1):

$$E_r(NPV) = \frac{\partial NPV}{\partial r} \cdot \frac{r}{NPV} = (pq - VC - FC) \sum_{k=1}^4 \frac{-k}{(1+r)^{k+1}} \Big|_{x_0} \cdot \frac{r}{NPV} =$$

$$= -63,963 \cdot \frac{0,12}{10,38} = -0,74,$$

тобто NPV слабо еластична по r , тому ставка дисконтування є безпечною для проєкту змінною;

$$E_{INV}(NPV) = \frac{\partial NPV}{\partial INV} \cdot \frac{INV}{NPV} = -1 \cdot \frac{20}{10,38} = -1,93.$$

Отже, NPV еластична за INV , тому початкова інвестиція є небезпечною для проєкту.

$$E_p(NPV) = \frac{\partial NPV}{\partial p} \cdot \frac{p}{NPV} = q \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(1+r)^k} \Big|_{x_0} \cdot \frac{p}{NPV} = 1,82 \cdot \frac{50}{10,38} = 8,78.$$

Отже, NPV сильно еластична за p , ціна продукції найнебезпечніша змінна й потребує найбільшої уваги. Зниження ринкової ціни лише на один відсоток призведе до зниження чистої теперішньої вартості проєкту на майже 9%. Інвестору слід завчасно подбати про недопущення такої ситуації, наприклад, укласти угоди з майбутніми споживачами на поставку продукції за зафіксованими в контракті цінами.

2. Тепер обчислимо коефіцієнти еластичності за всіма параметрами за формулою (2). Для цього задаємо відхилення в межах 5% усіх параметрів, тоді

$$r_0 = 12\%, \quad r_1 = 12,6\%, \quad \Delta r = 0,6\%;$$

$$INV_0 = 20 \text{ млн. грн.}, \quad INV_1 = 21 \text{ млн. грн.}, \quad \Delta INV = 1 \text{ млн. грн.};$$

$$p_0 = 50 \text{ грн.}, \quad p_1 = 52,5 \text{ грн.}, \quad \Delta p = 2,5 \text{ грн.}$$

$$E(NPV) = \frac{1}{NPV} \left(\frac{\partial NPV}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial NPV}{\partial INV} \Delta INV + \frac{\partial NPV}{\partial p} \Delta p \right) =$$

$$= \frac{1}{10,38} (-63,969 \cdot 0,006 - 1 \cdot 1 + 1,82 \cdot 2,25) = 0,26.$$

Для наочного зображення побудуємо графік чутливості до невизначених факторів, який називають Spider Graph (рис. 1). Чим менше пряма на графіку відхиляється від горизонталі, тим менш чутливим буде проєкт до зміни відповідного параметра.

3. Критичною вважатимемо таку величину параметру, при якій $NPV = 0$.

$$INV = CF_k \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(1+r)^k} = CF_k \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}.$$

Розрахуємо критичні значення x_i :

для r :

$$20 = 10 \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(1+r)^k} \Rightarrow \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} = 2 \Rightarrow r = 34,5\%.$$

для INV :

$$INV = 10 \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(1,12)^k} \Rightarrow INV = 30,38 \text{ (млн. грн.)}$$

для p :

$$20 = (p \cdot 600 - 25 \cdot 600 - 5) \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(1,12)^k} \Rightarrow 20 = (600p - 15005) \cdot 3,038 \Rightarrow p = 25,019 \text{ (грн.)}$$

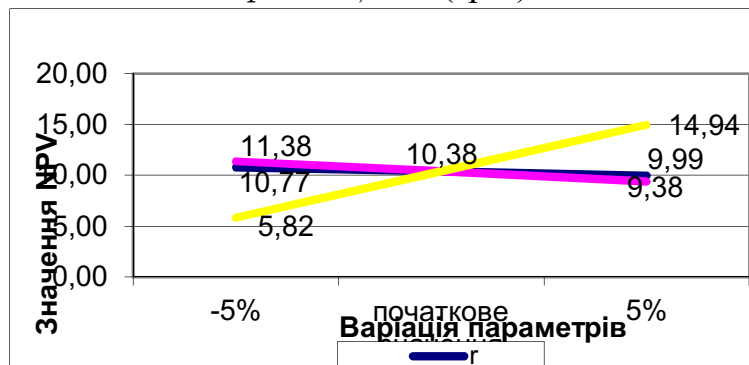


Рис. 1. Чутливість проєкту до зміни параметрів (Spider Graph)

Розрахуємо межі безпеки (MB) кожного параметра:

– дисконтної ставки $MB_r = \frac{34,5 - 12}{12} \cdot 100\% = 187,5\%$, тобто r може ма-

ксимально зрости на 187,5% або на 22,5 процентних пункти, після чого проєкт стане збитковим;

– початкової інвестиції $MB_{INV} = \frac{30,38 - 20}{20} \cdot 100\% = 51,9\%$, тобто INV

може максимально зрости на 51,9%;

– ціни продукції $MB_p = \frac{25,019 - 50}{50} \cdot 100\% = -49,96\%$, тобто p може

знизитись на 49,96%, після чого проєкт стане збитковим.

Усі отримані результати занесемо в табл. 1.

Таблиця 1. Результати аналізу чутливості $NPV = NPV(r; INV; p)$ до зміни аргументів

Аргумент x_i	$E_{x_i}(u)$	Критичне значення x_i	Межа безпеки, %	Чутливість параметра
Дисконтна ставка (r)	-0,74	34,5%	187,5	Низька
Початкова інвестиція (INV)	-1,93	30,38 млн. грн.	51,9	Середня
Ціна прдукції (p)	+ 8,78	25,019 грн.	-49,96	Висока

Список літератури

- Іваненко, Т. В. (2019). *Основи фінансової математики*. Київ: Видавництво Ліра-К.
- Капустян, В. О., Пасенченко, Ю. А. (2013). *Фінансова математика* (2-ге вид.). Київ: Прінт-Сервіс.
- Шарп, У., Александер, Г., & Бэйли, Д. (1997). *Инвестиции*. Москва: Инфра-М.

Детермінована задача прийняття оптимального рішення при виборі інвестиційного проєкту

Т. В. Іваненко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

tivanenko2015@gmail.com

У статті розроблено математичну модель прийняття багатоцільового багато-критеріального рішення інвестором при виборі інвестиційного проєкту. Застосовано метод аналізу ієрархій. На підставі моделі проведено розрахунок, зроблено висновки із отриманих результатів та сформульовано рекомендації інвестору.

Ключові слова: метод аналізу ієрархій, критерії оцінки, матриці парних порівнянь, множина стратегій, функціонал оцінювання, множина експертних оцінок.

Інвестиційна діяльність завжди пов'язана із проблемою обмеженості інвестиційних ресурсів. Тому інвестор змушений приймати рішення, обираючи ту стратегію, яка найкраще відповідає його цілям та критеріям відбору. Задача прийняття багатоцільового рішення полягає у визначенні та одночасній оптимізації кількох параметрів, що впливають на кожну поставлену ціль. Ці параметри часто є не лише взаємопов'язаними, але й суперечливими.

Проблемам прийняття оптимальних рішень в умовах невизначеності й ризику присвячено багато робіт, наприклад, математичні моделі, що використовують при обґрунтуванні доцільності рішення, досліджено Волошиним та Мащенко (2010). Особливості прийняття інвестиційних рішень розглянуто в підручнику Пересади та ін. (2003).

Розгляньмо задачу прийняття рішення з вибору інвестиційного проєкту (ІП) в умовах обмеженості капіталу. Нехай існує можливість реалізувати один із трьох ІП, які характеризується різними обсягами очікуваного прибутку, а також різним ступенем ризику. Інвестор має на меті досягнення двох цілей: максимізації прибутку та одночасної мінімізації ризику. По кожному з проєктів розраховано основні показники ефективності, які виступають критеріями оцінки: чиста приведена вартість проєкту (NPV), дисконтований період окупності інвестицій (DPP), гранична норма дохідності (IRR) та індекс прибутковості (PI). Інвестор звертається за консультацією до трьох експертів, кожний з яких висловлює свою суб'єктивну думку щодо розглядуваних ІП, порівнюючи їх за цими чотирма критеріями. Водночас для інвестора думки експертів не є однаково важливими, оскільки залежать від авторитету експерта з точки зору інвестора.

Таким чином постановка задачі визначається трьома множинами:

- 1) множиною стратегій інвестора $S = (S_1, S_2, S_3)$, де S_i — прийняти i -й проєкт та відхилити решту проєктів ($1 \leq i \leq 3$);
- 2) функціоналом оцінювання $F = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, що визначає кількість критеріїв, за якими здійснюється вибір;

3) множиною експертних оцінок $E = (e_1, e_2, e_3)$, кожна з яких визначає оцінки всіх альтернативних рішень за всіма критеріями.

Побудуємо ієрархію, яка за даних умов буде дворівневою (рис. 1). Критерії першого рівня — «експерти», їх позначимо e_1, e_2 та e_3 , а другого — «показники ефективності ІП»: NPV, DPP, IRR та PI . Альтернативними рішеннями є прийняття одного із трьох проєктів, їх позначимо I ІП, II ІП та III ІП відповідно.

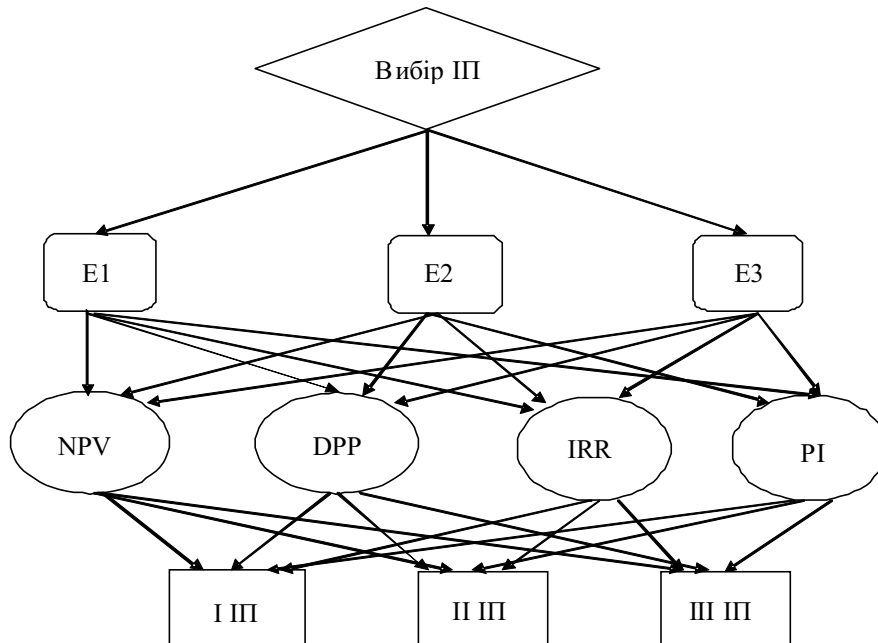


Рис. 1. Ієрархія прийняття рішення з вибору інвестиційного проєкту

Для кожного з критеріїв як першого, так і другого рівнів складемо матриці парних порівнянь згідно з методом Сааті (Сааті, 1993). Усі матриці є обернено симетричними. Для забезпечення узгодженості матриць складаємо їх шляхом наступного розрахунку: $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$, де w_i та w_j кількість балів, яку присвоює

експерт i -му та j -му об'єктам відповідно, що оцінюється за 9-бальною шкалою. Вищий бал означає більшу важливість. Після створення матриць парних порівнянь проводимо їх нормалізацію, яка полягає в діленні кожного елемента стовпця на суму елементів стовпця. У випадку узгодженої матриці парних порівнянь нормалізована матриця матиме три однакових стовпці, елементи яких є ваговими коефіцієнтами, що відображують локальні пріоритети альтернатив за відповідними критеріями.

Почнімо з першого рівня ієрархії — експертів. Інвестор надав їм такі бали: e_1 — 8, e_2 — 9, e_3 — 7. Матриця парних порівнянь важливості думок експертів показана на рис. 2 (ліворуч).

У свою чергу кожний з експертів оцінює важливість критеріїв шляхом присвоєння їм балів від 1 до 4. Наприклад, перший експерт оцінив їх так:

NPV —4, PI —3, IRR —2, DPP —1. Матриця парних порівнянь важливості критеріїв на думку експерта e_1 наведена на рис. 2 (праворуч).

$E =$		e_1	e_2	e_3
	e_1	1	8/9	8/7
	e_2	9/8	1	9/7
	e_3	7/8	7/9	1

 $e_1 =$

	NPV	DPP	IRR	PI
NPV	1	4	2	4/3
DPP	1/4	1	1/2	1/3
IRR	1/2	2	1	2/3
PI	3/4	3	3/2	1

Рис. 2. Матриця парних порівнянь важливості думок експертів та важливості критеріїв за оцінкою експерта e_1

Наступним кроком є оцінка кожним експертом кожного із трьох проєктів за кожним з чотирьох критеріїв, за результатами якої побудовано матриці парних порівнянь ІІ та проведено їх нормалізацію.

На заключному етапі обчислено глобальні пріоритети альтернатив відносно мети шляхом лінійної згортки локальних пріоритетів усіх елементів (Волошин & Машенко, 2010, с. 118). Одержано наступні результати: перший інвестиційний проєкт отримав ваговий коефіцієнт 0,1974, другий — 0,3850, третій — 0,4176. Отже, інвестору слід прийняти третій інвестиційний проєкт, який є оптимальним для досягнення двох цілей: максимізації прибутку та мінімізації ризику.

Список літератури

- Волошин, О. Ф., & Машенко, С. О. (2010). *Моделі та методи прийняття рішень* (2-ге). Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет».
- Пересада, А. А., Коваленко, Ю. М., & Онікієнко, С. В. (2003). *Інвестиційний аналіз*. Київ: КНЕУ.
- Саати, Т. (1993). *Принятие решений. Метод анализа иерархий*. Москва: Радио и связь.

Моделювання процесу руйнування внаслідок втоми за умов багато циклового навантаження з допомогою рекурентних співвідношень

Ю. М. Кобзар

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

creep@inmech.kiev.ua

Запропонована рекурентна процедура, яка дозволяє на кожному півциклі кожного циклу зміни симетричного розтягу стиску визначати залежно від початкових фізико-механічних властивостей стрижня, структурні зміни, які кількісно характеризуються змінами маси, щільності, напружень, модуля пружності на кожному півциклі з урахуванням їх обчислених значень на попередньому півциклі. Критерієм руйнування при втомі є виконання енергетичної нерівності. Процедура реалізована в середовищі комп'ютерної алгебри.

Ключові слова: рекурентна процедура, енергетичний критерій руйнування при втомі.

У моделі багатоциклової втоми стрижня під дією симетричного навантаження розтягу-стиску на кожному циклі перераховуються характерні величини процесу, а деякі з них на кожному пів циклі поточного циклу (Кобзар, 2019). Досліджується крихке руйнування матеріалів, коли змінюється несучий об'єм зразка і не враховуються малі зміни форми. На кожному циклі навантаження відбуваються структурні зміни, які спричиняють зміни маси, щільності, напруження, модуля пружності. Особливостями такого рекурентного процесу є розділення розрахунків характерних величин процесу в циклі навантаження на пів цикли стиску та розтягу, де в попередньому визначаються маса, амплітудне напруження, модуль пружності, які є початковими для наступного пів циклу розтягу в якому визначаються щільність та амплітудне напруження і ці процедури по чергово повторюються на кожному наступному циклі. Критерієм втомного руйнування є не виконання на якомусь циклі енергетичної нерівності, що характеризує процес. Ця нерівність отримана з балансу енергій стрижня — за помпованої пружної та енергії, яку викликає дія зовнішнього навантаження. Межа втоми досягається, коли перевищується умовна база випробувань без руйнувань. Ця модель є розвитком попереднього підходу в якому не враховувалась рівність енергій (Кобзар, 2015).

Критерієм крихкого руйнування є виконання нерівності

$$\frac{P_v^2}{m_1 \omega^2} - \frac{\sigma_{xaj}(i)^2}{E_j(i)} \frac{m_j(i)}{\rho_j(i)} < 0, \quad (1)$$

на i -му циклі j -го пів циклу і цей цикл $i = N_a < N_0$ є межею довготривалої міцності при початковій напрузі σ_1 викликаній навантаженням P_a , де

$U_0 = \frac{P_B}{m_1 \omega^2}$ енергія руйнування. Критерієм досягнення межі втоми є не виконання нерівності (1) для $i \geq N_0$ за межею прийнятої бази випробувань N_0 .

Нехай на ізотропний стрижень з коефіцієнтом Пуасона μ , межею міцності σ_B і початковими — модулем пружності E_1 , масою m_1 , щільністю ρ_1 , довжиною l_1 , площею перетину F_1 , діє симетричне періодичне розтяг-стискуjące навантаження P_i , з частотою Ω та амплітудним значенням $P_a = \text{const}$. Напруження $\sigma_1 = \frac{P_a}{F_1}$ менше межі $\sigma_{\text{пц}}$ пропорційності. Кількість циклів умовної бази випробувань — $N_0 = 10 \cdot 10^6$. Циклічні напруження

$$\sigma_j(i) = \sigma_{aj}(i) \sin \Omega t,$$

де $\sigma_{aj}(i) = \frac{P_a}{F_{aj}(i)}$, $F_{aj}(i)$ — амплітудне значення поперечного перетину стрижня,

що виникають у стрижні з початковим об'ємом $V_1 = \frac{m_1}{\rho_1}$ викликають на кож-

ному i -му циклі стиск у першому $j = 1$ та розтяг у другому $j = 2$ пів циклах. Коли частота Ω циклічної прикладеної сили набагато менша власної початкової частоти ω стрижня, тобто коли $\Omega \ll \omega$ тоді в енергії, що запомповується у стрижень можна знехтувати частотою прикладеної сили. З балансу енергій тієї, що подається та тієї, що приймає стрижень знаходимо початкову власну початкову

частоту $\omega = \frac{P_a \sqrt{E_1 \rho_1}}{\sigma_{xa1} m_1}$ стрижня.

Розгляньмо рекурентний процес накопичення втоми на довільному i -му циклі. У першому пів циклі $j = 1$ при стисковій прийнято, що щільність не змінюється $\rho_2(i-1) = \rho_1(i)$, а для маси виконується

$$m_1(i-1) = m_2(i-1). \quad (2)$$

Стан стрижня на цьому й попередньому пів циклах зв'язують рівності

$$1 = \frac{\rho_2(i-1)V_2(i-1)}{m_2(i-1)} = \frac{\rho_1(i)V_1(i)}{m_1(i)} = \frac{\rho_1(i)(V_2(i-1) - \Delta V_1(i))}{m_1(i)}. \quad (3)$$

З допомогою рівнянь (3) залежність між напруженнями $\sigma_{xa1}(i)$ та $\sigma_{xa2}(i-1)$ буде

$$\sigma_{xa1}(i) = \left(\frac{m_2(i-1)}{m_1(i)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa2}(i-1), \quad (4)$$

де $m_1(i)$ — невідома маса. Після серії перетворень, з допомогою рівнянь (3),

залежності середнього напруження $\sigma_{\text{сеп1}}(i)$ від лінійного напруження $\sigma_{xa2}(i-1)$, модуля пружності $E_2(i-1)$, об'ємного модуля $K_2(i-1)$ та мас цього та попереднього циклу, будуть

$$\sigma_{\text{сеп1}}(i) = \frac{1}{3} \left(\left(1 - \frac{4\mu G_2(i-1)}{E_2(i-1)} \right) \left(\frac{m_2(i-1)}{m_1(i)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \times \right. \\ \left. \times \sigma_{xa2}(i-1) + 2\lambda_2(i-1) \left(1 - \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} \right) \right) \quad (5)$$

та

$$\sigma_{\text{сеп1}}(i) = K_2(i-1) \left(1 - \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} \right). \quad (6)$$

З рівнянь (5) та (6), шляхом виключення середнього напруження, отримано рівняння

$$E_2(i-1) \left(\frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} \right)^2 - (E_2(i-1) + \sigma_{xa2}(i-1)) \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} + \\ + 2(1-\mu) \sigma_{xa2}(i-1) = 0. \quad (7)$$

Із квадратного рівняння (7) можна знайти відношення мас $\frac{m_1(i)}{m_1(i-1)}$, яке дозволяє із залежності (4) визначити амплітудне напруження $\sigma_{xa1}(i)$. З балансу енергії

$$U = \frac{P_a^2}{m_1(i)\omega^2} = \frac{(\sigma_{xa1}(i))^2}{E_1(i)} \frac{m_1(i)}{\rho_j(i)},$$

ураховуючи (2) визначається новий модуль пружності $E_1(i)$. Знайдені на цьому пів циклі маса $m_1(i)$, напруження $\sigma_{xa1}(i)$ (4), модуль пружності $E_1(i)$ є початковими даними для наступного циклу. Перевіряється виконання нерівності (1), у разі виконання, руйнування відбулося і обчислення припиняються. У другому пів циклі $j=1$ при розтягові прийнято, що маса не змінюється, тобто $m_1(i) = m_2(i)$, а для щільності виконується рівність

$$\rho_1(i) = \rho_2(i-1). \quad (8)$$

Стан стрижня на цьому та попередньому пів циклах зв'язують рівності

$$1 = \frac{\rho_1(i)V_1(i)}{m_1(i)} = \frac{\rho_2(i)V_2(i)}{m_2(i)} = \frac{\rho_2(i)(V_1(i) - \Delta V_2(i))}{m_1(i)}. \quad (9)$$

З рівнянь (9) знаходимо залежність між напруженнями $\sigma_{xa2}(i)$ та $\sigma_{xa1}(i)$:

$$\sigma_{xa2}(i) = \left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa1}(i), \quad (10)$$

де $\rho_2(i)$ — невідома щільність.

Після серії перетворень, використовуючи рівняння (9), залежності середнього напруження $\sigma_{\text{сер}2}(i)$ від лінійного напруження $\sigma_{xa1}(i)$, модуля пружності $E_1(i)$, об'ємного модуля $K_1(i)$ та щільності цього та попереднього циклу, будуть

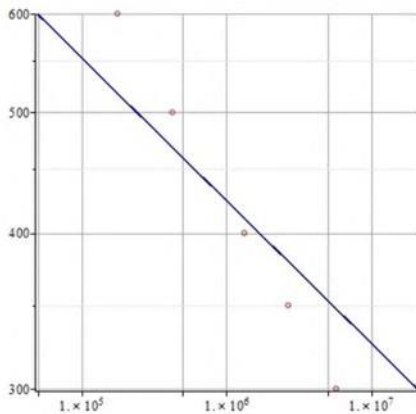
$$\sigma_{\text{сер}2}(i) = \frac{1}{3} \left(\left(1 - \frac{4\mu G_1(i)}{E_1(i)} \right) \left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa1}(i) + \right. \\ \left. + 2\lambda_1(i) \left(1 - \frac{\rho_2(i-1)}{\rho_2(i)} \right) \right) \quad (11)$$

та

$$\sigma_{\text{сер}2}(i) = K_1(i) \left(1 - \frac{\rho_2(i-1)}{\rho_2(i)} \right). \quad (12)$$

Після виключення з рівнянь (11), (12) середнього напруження отримуємо

$$2(1-\mu)\sigma_{xa1}(i) \left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \right)^2 - (E_1(i) + \sigma_{xa1}(i)) \frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} + E_1(i) = 0. \quad (13)$$



Із квадратного рівняння (13) можна знайти відношення щільностей $\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)}$, яке дозволяє із залежності (10) визначити амплітудне напруження $\sigma_{xa2}(i)$. Знайдені на цьому пів циклі щільність $\rho_2(i)$, напруження $\sigma_{xa2}(i)$ є початковими даними для наступного циклу. Як уже сказано, у наступному циклі перевіряється виконання нерівності (1) і, у разі її виконання, вважається, що руйнування стрижня відбулося і обчислення припиняються. Модель апробовано на прикладі розрахунку кривої втоми стрижня при різних рівнях прикладених циклічних навантажень з частотою 30 Гц. Стрижень має форму циліндричного прутика діаметром 7,5 мм, виготовлений з жаростійкого нікелевого сплаву ЭИ867 (Голуб & Погребняк, 1994). Фізико-механічні характеристики матеріалу стрижня наступні:

$$\sigma_B = 1200 \text{ МПа}, \mu = 0,294, E_1 = 2,28 \cdot 10^{11} \text{ МПа}, m_1 = 0,151367625 \text{ кг}, \\ \rho_1 = 8570 \text{ кг/м}^3, l_1 = 0,04 \text{ м}, F_1 = 0,00004415625 \text{ м}^2.$$

Розрахункові (пряма) та експериментальні (крапки) криві Велера приведені на рисунку. Вперше запропонований прогноз руйнування від втоми, при симетричному циклічному навантаженні, стрижня без його лабораторних випробовувань. Відмінності між результатами розрахунків та експериментальними даними цілком прийнятні для практики (Когаев, 1977).

Список літератури

- Голуб, В. П., & Погребняк, А. Д. (1994). *Высоко-температурное разрушение материалов при циклическом нагружении*. Киев: Наукова думка.
- Кобзар, Ю. М. (2019). Модель структурних змін та руйнування гладких циліндричних стрижнів при одновісному симетричному розтягу-стиску. *МНТК «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта»* (с. 46–49). Київ: НТУУ «КПІ».
<http://conf.mmi.kpi.ua/proc/article/view/173384>
- Кобзарь, Ю. М. (2015). К оценке усталостной долговечности гладких цилиндрических стержней при одноосном симметричном растяжении сжатии. *Авиационно-космическая техника и технология*, (9), 6–14.
- Когаев, В. П. (1977). *Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени*. (Б-ка расчетчика). Москва: Машиностроение.

Аналіз даних у фінансовій математиці методом кейсів

В. О. Колеснік

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

kolesnikvikky@gmail.com

У статті розглянуто стохастичні диференціальні моделі для дослідження історії еволюції фінансових процесів. Розглянуто метод обробки даних історії еволюції процесу для використання в подальшому прогнозуванні. Дана робота є витягом із магістерської дисертації автора на тему: «Застосування стохастичних диференціальних рівнянь у фінансовій математиці», Київ, 2019 р.

Ключові слова: стохастичні диференціальні рівняння, тренд, волатильність, метод кейсів.

З розвитком інформаційних технологій людство акумулює все більше інформації. Аналіз цих даних та їх використання є актуальною задачею. Підходи до цього аналізу можуть мати найрізноманітнішу природу. Ми користуватимемося простими моделями стохастичних диференціальних рівнянь, для яких визначимо параметри та сформуємо базу даних еволюції процесу у новому представленні.

Одними з найпростіших моделей є вінерівське блукання з перенесенням та логарифмічне блукання, яке є деформацією першого в деякому сенсі. Визначимо рівняння моделі та її параметри. Вінерівський процес з переносом може визначатись, як розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$dX_t = \mu dt + \sigma dw_t,$$

де $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ — коефіцієнти переносу (або тренду) та волатильності.

Важливість цієї моделі полягає в тому, що вона є наближенням будь-якого стохастичного диференціального рівняння за умови, що функції, які стоять перед диференціалами є достатньо гладкими і не ростуть дуже швидко. Однак, було б дуже грубо використовувати цю модель у економіці, оскільки показники фінансових активів сильно залежать від ціни активу. Тому можна також розглянути модель логарифмічного блукання з лінійною залежністю від ціни. Така модель справджує рівняння

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dw_t,$$

де $a \in \mathbb{R}, b > 0$ — переозначені коефіцієнти переносу та волатильності, щоб не множити поняття.

Це вже краще підходить для описання процесу росту ринку, але складніше в моделюванні та з часом накопичує похибку при використанні дискретних моделей моделювання.

Щоб змодельовати процес треба знайти деяку його дискретну форму, оскільки тільки таку розуміє машина. Ми можемо знайти цю форму в теорії побудови стохастичного інтеграла Іто. Справді, з теоретичної частини видно, що інтеграл Іто є граничним переходом від простих процесів. Дуже важливим є те, що на кожному інтервалі, де процес має постійне випадкове значення, випадкова величина вимірна відносно історії до цього інтервалу часу, тобто не діє на

випередження. Якщо звернутися до інтеграла Стратоновича ми бачимо іншу ситуацію, тож описаний надалі метод, який можна назвати методом Ойлера для стохастичних диференціальних рівнянь, не зважаючи на його простоту та природність, має бути обґрунтованим.

Наша задача полягає в моделюванні траєкторії процесу X_t , що справджує стохастичне диференціальне рівняння:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dw_t$$

Якщо задано початкову умову $X_0 = x_0$, то значення процесу $X_i = X_{t_i}$ в послідовні моменти часу $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ можуть бути обраховані за наступною ітераційною схемою:

$$X_{k+1} = X_k + a(t_k, X_k)\Delta t + b(t_k, X_k)\varepsilon_k\sqrt{\Delta t},$$

де ε_k — незалежні $N(0,1)$ випадкові величини. Якщо записувати розв’язок рівняння в інтегральному вигляді, то доданок $a(t_k, X_k)\Delta t$ є частиною звичайної інтегральної суми, а доданок $b(t_k, X_k)\varepsilon_k\sqrt{\Delta t}$ — частину інтегральної суми Іто, де приріст вінерівського процесу записано через статистичну еквівалентну гаусівську величину з дисперсією Δt . Усі ці доданки накопичуються на кожному кроці, змінюючи значення процесу. Як уже було сказано, основним для нас процесом буде вінерівський процес з переносом. Він вирізняється тим, що має постійні функції переносу та волатильності. Тому для нього ця схема навіть є статистично точною. Це також можна легко побачити з того, що розв’язок містить лінійне входження вінерівського процесу, а моделювати процес з незалежними приростами з відомим розподілом легко.

На цей момент ми маємо свободу обирати, як ми хочемо обробляти дані. Запропонувати свій метод, спираючись звичайно на математичні структури та інтерпретацію, яку ми їм надамо. Одним із цікавих інструментів для нас є накопичувальна характеристика випадкового процесу — накопичена дисперсія.

Накопиченою дисперсією нестационарного випадкового процесу з функцією волатильності $\sigma(t)$ називають функцію часу

$$G(t) = \int_0^t \sigma^2(u)du$$

Із властивостей інтеграла Іто ми бачимо, що це є фактично математичне сподівання стохастичного доданку в диференціальному рівнянні Іто. У роботі Ширяєва даний інтеграл використовується для проведення заміни часу таким чином, щоб волатильність процесу у новому часі була постійною. Це могло би спростити аналіз даних, але як тоді робити прогнози, знаходячись у заміненному часі, що залежить від внутрішніх параметрів системи. У роботі Ширяєва (Ширяев, 2016) такий час називається операційним. На прикладі економічної мови, наприклад, показнику індексу біржі, можна розуміти це так.

1. У періоди активного ринку на показник впливають дуже багато випадкових факторів і це спричиняє підвищення його волатильності, у нього є більше можливостей відреагувати на операції купівлі-продажу, бо просто таких операцій більше. Тобто в цей момент функція G зростає швидше.

2. Симетрична ситуація. Ринок не активний і функція G зростає повільніше.

Заміна часу, розглянута в Ширяев (2016) пропонує прискорювати та уповільнювати час використовуючи обернену до G функцію. Ми використовуватимемо накопичену дисперсію, як міру того, наскільки багато операцій пройшло на ринку, і відповідно приймати рішення, щодо необхідності переглянути параметри, якими зараз оцінюється ринок.

Маючи лише спостереження в дискретні моменти часу необхідно навчитися оцінювати цей параметр. У статті Никітіна (Никитин, 2007) пропонується кілька підходів до оцінки цієї величини. Якщо наші дані не є сильно зашумленими, то ми можемо оцінювати накопичену дисперсію за допомогою емпіричної волатильності, або реальної волатильності (realized volatility). Тут волатильність використовується не в тому ж сенсі, що в нашій роботі. Для рівновіддалених спостережень маємо $X_i = X_{t_i}, t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = T$:

$$\hat{G}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$$

Головна ідея полягає в тому, щоб порівнювати різні часові інтервали саме за цим параметром, який ми інтерпретуємо, як накопичену активність ринку.

Нарешті, після проведеної підготовчої роботи, ми можемо означити підходи методу кейсів та їх використання. Алгоритм обробки даних полягає в наступних етапах.

0. За необхідності деформувати статистичні дані, щоб вони краще описувались моделлю блукання з перенесенням. Наприклад, можна використовувати зв'язок між логарифмічним і звичайним блуканням.

1. Виділити в еволюції процесу інтервали з рівнонакопиченими волатильностями, тобто розбити дані на кейси.

2. У кожному кейсі оцінити параметри переносу та волатильності та об'єднати кейси у групи за схожими параметрами.

3. Дослідити чергування параметрів кейсів у часі. Даний пункт потребує використання аналізу часових рядів, підрахунків кореляції між параметрами, або використання штучного інтелекту для встановлення закономірностей у чергуванні режимів процесу, тобто кейсів.

4. Моделювання процесу в обраному режимі, тобто використання кейсу, та відповідно прогнозування поведінки процесу.

Була проведена робота з використання можливостей сучасних комп'ютерних технологій до аналізу еволюції економічних процесів.

Список літератури

- Arnold, L. (1974). *Stochastic differential equations: Theory and applications*. London: John Willey and Sons.
- Øksendal, B. (2003). *Stochastic differential equations*. Springer Verlag.
- Гихман, И. И., & Скороход, А. В. (1982). *Стохастические дифференциальные уравнения*. Киев: Наукова думка.
- Липцер, Р.Ш., & Ширяев, А. Н. (1974). *Статистика случайных процессов*. Москва: Наука.
- Никитин, Я. Ю. (2007). Статистические оценки параметров диффузионных процессов и накопленной волатильности.
<https://gsom.spbu.ru/files/upload/niim/news/2007/230407/Nikitin.pdf>
- Степанов, С. С. (2012). *Стохастический мир*. <http://synset.com/pdf/ito.pdf>
- Ширяев, А. Н. (2016). *Основы стохастической финансовой математики*. (Т. 1. Факты, модели). Москва: МЦНМО.

Застосування В-сплайнів до розв'язання задачі про деформацію тонких конічних оболонок зі скісними контурами

М. М. Крюков¹, О. М. Шутовський², О. В. Ляшко¹, А. Ю. Андрейцев¹

¹Державний університет інфраструктури та технологій, Київ, Україна

²Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна
mmkryukov@ukr.net, olgaliashko@ukr.net, shutovsk@ukr.net, andr7765@i.ua

Дано розв'язання задачі про згин тонких колових конічних оболонок зі скісними контурами. Воно базується на параметризації поверхні конічної оболонки і зведенні двовимірної крайової задачі до одновимірної за допомогою методу сплайн-колокацій та розв'язання останньої стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

Ключові слова: деформація, тонкі колові конічні оболонки, скісні контури, параметризація поверхні, періодичні В-сплайни, метод сплайн-колокацій.

Широке застосування тонких оболонок у різноманітних областях техніки стимулює необхідність розроблення ефективних методів розв'язання різних класів задач для дослідження їх напружено-деформованого стану. До тепер найбільш повно досліджено напружено-деформований стан оболонок канонічних форм. У багатьох важливих випадках елементи різних конструкцій є тонкими циліндричними й конічними оболонками зі складною конфігурацією контурів, зокрема, замкнені оболонки вздовж напрямної зі скісними контурами. Разом з тим практично всі наближені аналітичні й чисельні методи розв'язання двовимірних задач теорії оболонок і пластин найпростіше реалізуються, коли контури оболонки або пластини збігаються з координатними лініями на поверхні. Як правило, розглядаються прямокутні області інтегрування систем диференціальних рівнянь із частинними похідними. Для подолання труднощів, зв'язаних зі складною областю інтегрування, можна використовувати параметризацію поверхні (Корнишин и др., 1989). У роботах Крюков та Яковенко (2004), Григоренко та ін. (2009), Крюков та ін. (2017) запропонована параметризація областей складних форм для пластин і колових і неколових циліндричних оболонок. Параметризація дозволяє перейти до такої системи координат, у якій область інтегрування двовимірної крайової задачі є прямокутником. Це приводить, з одного боку, до ускладнення вихідних диференціальних рівнянь, але, з іншого боку, дозволяє застосовувати апробовані ефективні методи. У розвиток цього пропонується використовувати параметризацію середньої поверхні тонкої колової конічної оболонки, замкненої вздовж напрямної зі скісними контурами.

У статті запропоновано підхід до дослідження деформування тонких колових конічних оболонок зі скісними контурами. Методика базується на переході до такої криволінійної системи координат, де область інтегрування є прямокутником, використанні методу сплайн-колокації вздовж напрямної і чисельному розв'язанні одновимірної крайової задачі високого порядку методом ортогональ-

ного прогонки вздовж твірної.

Розгляньмо ортотропну замкнену конічну оболонку колового поперечного перерізу зі скісними контурами під дією поверхневого або контурного навантаження. За вихідні візьмімо співвідношення теорії тонких ортотропних оболонок змінної товщини у класичній постановці (Григоренко & Василенко, 1981). Уважаємо, що в кожній точці оболонки є три взаємноортогональні площини пружної симетрії. Тоді розв'язувальна система рівнянь має вид:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial s} = B_0 \bar{Y} + B_1 \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \theta} + B_2 \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial \theta^2} + B_3 \frac{\partial^3 \bar{Y}}{\partial \theta^3} + B_4 \frac{\partial^4 \bar{Y}}{\partial \theta^4} + \bar{g}_0, \quad (1)$$

$$\bar{Y} = \{u, v, w, \vartheta_s, N_s, S, Q_s, M_s\},$$

$$B_1 = \{b_{i,j}^{(p)}(s, \theta)\} \quad (i, j = \overline{1,8}; \quad p = \overline{0,4}),$$

$$g_0 = \{g_1^{(0)}(s, \theta), \dots, g_8^{(0)}(s, \theta)\}.$$

Тут серединна поверхня оболонки віднесена до криволінійної ортогональної системи координат s, θ , де s — довжина дуги твірної, θ — центральний кут у поперечному перерізі; u, v, w, ϑ_s — переміщення вздовж твірної, напрямної і нормалі до серединної поверхні й кут повороту нормального елемента; N_s, S, Q_s, M_s — зусилля та момент. До цих рівнянь необхідно долучити по чотири крайові умови на кожному контурі відповідно до порядку системи.

Розгляньмо випадок, коли косі зрізи нахилені до поперечного перерізу оболонки під різними кутами α_1 і α_2 ($\alpha_1 \neq \alpha_2$). Твірна задана в параметричному вигляді $r = R + s \sin \beta$, $z = s \sin \beta$, де s — довжина твірної, R — радіус поперечного перерізу при $z = 0$ (рис. 1).

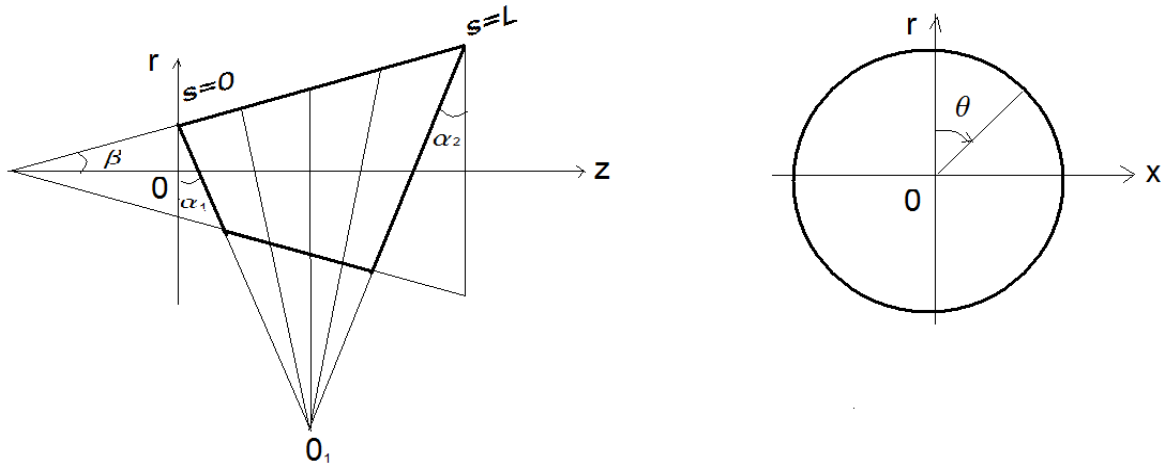


Рис. 1

Перейдімо в рівняннях (1) до нової криволінійної системи координат ξ, ζ , яка зв'язана з попередньою наступними співвідношеннями:

$$\xi = \frac{s - R(1 - \cos \theta) \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{1}{\cos \beta}}{L - R(1 - \cos \theta) \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{1}{\cos \beta} - (R + L \sin \beta)(1 - \cos \theta) \operatorname{tg} \alpha_2 \frac{1}{\cos \beta}}, \quad \zeta = \theta. \quad (2)$$

Координатними лініями в цій системі є лінії $\zeta = \text{const}$ — твірні конуса, які зміщені і стиснуті в напрямі осі Os , а також лінії $\xi = \text{const}$ — лінії перетину конічної поверхні й пучка площин, які перпендикулярні до площини rOs і проходять через точку O_1 .

У новій системі координат ξ, ζ двовимірною крайовою задачею вже розглядається у прямокутній області $\{0 \leq \xi \leq L; 0 \leq \zeta \leq 2\pi\}$.

Система рівнянь (1) у координатах ξ, ζ , набуває вигляду:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \xi} = C_0 \bar{Y} + C_1 \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \zeta} + C_2 \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial \zeta^2} + C_3 \frac{\partial^3 \bar{Y}}{\partial \zeta^3} + C_4 \frac{\partial^4 \bar{Y}}{\partial \zeta^4} + \bar{f}_0 \quad (3)$$

$$(0 \leq \xi \leq L, 0 \leq \zeta \leq 2\pi).$$

Відповідно до діючих на оболонку контурних і поверхневих навантажень та умов закріплення її контурів $\xi = 0$ і $\xi = L$, необхідно перетворити відповідні граничні умови.

Розв'язок крайової задачі будемо шукати у вигляді (Григоренко & Крюков 1995):

$$\begin{aligned} &\{u(\xi, \zeta), v(\xi, \zeta), w(\xi, \zeta), \vartheta_s(\xi, \zeta), N_s(\xi, \zeta), S(\xi, \zeta), Q_s(\xi, \zeta), M_s(\xi, \zeta)\} = \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \{u_i(\xi), v_i(\xi), w_i(\xi), \vartheta_{si}(\xi), N_{xi}(\xi), \hat{S}_i(\xi), Q_{si}(\xi), M_{si}(\xi)\} \psi_i(\zeta), \end{aligned} \quad (4)$$

де $u_i(\xi), v_i(\xi), w_i(\xi), \vartheta_{si}(\xi), N_{xi}(\xi), \hat{S}_i(\xi), Q_{si}(\xi), M_{si}(\xi)$ ($i = 0, N-1$) — невідомі функції, а $\psi_i(\zeta)$ ($i = 0, N-1, N > 6$) — лінійні комбінації В-сплайнів 5-го степеня на рівномірній сітці точок $0 = \zeta_0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_N = 2\pi$, які задовольняють умови періодичності розв'язку (Крюков, 2010). У цьому випадку функції $\psi_i(\zeta)$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Psi_0(\zeta) &= 2B_5^0(\zeta); \Psi_1(\zeta) = 2B_5^1(\zeta); \Psi_2(\zeta) = 2B_5^2(\zeta); \Psi_i(\zeta) = B_5^i(\zeta) \\ (i &= 3, N-3); \Psi_{N-2}(\zeta) = 2B_5^{N-2}(\zeta); \Psi_{N-1}(\zeta) = 2B_5^{N-1}(\zeta). \end{aligned}$$

Застосуємо метод колокацій і отримаємо наступну крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь у формі Коші, яка містить $8N$ рівнянь першого порядку:

$$\frac{d\bar{Z}(\xi)}{d\xi} = A\bar{Z}(\xi) + \bar{F}(\xi), \quad (5)$$

де

$$\vec{Z}^T(\xi) = \{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, v_0, v_1, \dots, v_{N-1}, w_0, w_1, \dots, w_{N-1}, \\ \vartheta_{s0}, \vartheta_{s1}, \dots, \vartheta_{sN-1}, \dots, Q_{s0}, Q_{s1}, \dots, Q_{sN-1}, M_{s0}, M_{sx}, \dots, M_{sN-1}\}.$$

Крайові умови на скісних контурах $\xi = \text{const}$ з урахуванням представлення розв'язку у вигляді (4) можна записати у вигляді

$$A_1 \bar{Z}(0) = \bar{a}_1, \quad A_2 \bar{Z}(L) = \bar{a}_2. \quad (6)$$

Крайова задача (5), (6) розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації (Григоренко & Василенко, 1981; Григоренко и др., 2002).

Після розв'язання задачі (5), (6) шукані функції підставляємо відповідно до розв'язків (4), а потім за їх допомогою знаходимо всі фактори напружено-деформованого стану розглядуваних оболонок.

Список літератури

- Григоренко, Я. М., & Василенко, А. Т. (1981). *Теория оболочек переменной жесткости: Т. 4. Методы расчета оболочек*. Киев: Наукова думка.
- Григоренко, Я. М., Крюков, Н. Н., & Холкина, Н. С. (2009). Решение задач о напряженно-деформированном состоянии цилиндрических оболочек с косыми срезами на основе сплайн-аппроксимации. *Прикл. механика*, 45(12), 116–123.
- Григоренко, Я. М., & Крюков, Н. Н. (1995). Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (обзор). *Прикл. механика*, 31(6), 3–27.
- Григоренко, Я. М., Шевченко, Ю. Н., Василенко, А. Т., Гузь, И. А., Коханенко, Ю. В., & Крюков, Н. Н. и др. (2002). *Механика композитов: Т. 11. Численные методы*. Киев: «А.С.К».
- Корнишин, М. С., Паймушин, В. Н., & Снигирев, В. Ф. (1989). *Вычислительная геометрия в задачах механики оболочек*. Москва: Наука.
- Крюков, М. М. (2009). Застосування В-сплайнів до розв'язання задач теорії пластин і оболонок. *У Зб. наук. праць ДЕТУТ. Серія «Транспортні системи і технології»*, (14), 106–112.
- Крюков, М. М. (2010). Застосування періодичних В-сплайнів до розв'язання задачі про згин пластин змінної товщини в двох координатних напрямках. *У Зб. наук. праць ДЕТУТ. Серія «Транспортні системи і технології»*, (17), 166–171.
- Крюков, М. М., & Яковенко, Н. С. (2004). Дослідження згину кільцевих та секторіальних пластин змінної товщини на основі сплайн-апроксимації. *У Зб. наук. праць КУЕТТ. Серія «Транспортні системи і технології»*, (6), 40–47.
- Крюков, М. М., Ляшко, О. В., Шутовський, О. М., & Андрейцев, А. Ю. (2017). Застосування В-сплайнів до розв'язання задачі про деформацію неколових циліндричних оболонок зі скісними контурами. *У Матеріалах Вісімнадцятої міжнародної наукової конф. імені академіка М. Кравчука* (Т. 1, с. 95–98). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського. <http://matan.kpi.ua/uk/kravchuk-conf2017.html>

Об одном алгоритме кластерного анализа сеточного типа

А. В. Кузьмин¹, Н. Н. Кузьмина²

¹Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,
Киев, Украина

²Национальный педагогический университет имени М. П. Драгоманова,
Киев, Украина
kuzmin_a_b@ukr.net

Рассматривается универсальный быстрый алгоритм кластерного анализа, сеточного типа, использующий параметр плотности точек в ячейке сетки и отношение соседства для объединения ячеек в кластеры. Алгоритм может использоваться для обработки больших массивов данных большой пространственной размерности, в том числе спутниковых снимков. Алгоритм не требует предварительного задания количества кластеров и данных о характере распределения точек исходного множества. Для работы алгоритма требуется задание шага сетки и связанного с ним параметра плотности отсекаемых ячеек.

Ключевые слова: алгоритм кластеризации, спутниковые космические снимки, сетка, ячейка, плотность точек, отношение соседства.

1. Введение. Процедуры кластеризации относятся к наиболее важным задачам интеллектуального анализа (Data Mining), которые предполагают разбиение некоторого множества элементов на условно непересекающиеся подмножества — кластеры на основе свойства однородности и схожести их характеристик.

Следует отметить, что в практических задачах кластеризации кластеры часто плохо делимы, имеют сложную форму, а области их значений пересекаются, что делает применение многих известных алгоритмов неэффективными.

Особенно важной сферой применения методов кластеризации является сегментация мультиспектральных спутниковых изображений (Кузьмін та ін., 2017; Sarmah & Bhattacharyya, 2012). В таких прикладных задачах данные характеризуются:

- большим объемом $10^5 - 10^7$ объектов;
- высокой пространственной размерностью данных и разнородностью их характеристик;
- отсутствием априорной информации о количестве кластеров и вероятностной их характеристике;
- наличием шума и выбросов в исходных данных.

Все это приводит к актуальности разработки эффективных методов кластерного анализа для решения прикладных задач такого типа.

Приемлемый алгоритм кластерного анализа для задач сегментации спутниковых изображений должен удовлетворять следующим требованиям (Пестунов & Синявский, 2012):

- низкая вычислительная сложность;
- возможность выделять кластеры различной структуры;
- выделение заранее неизвестного числа кластеров;

- возможность обрабатывать данные при наличии шума;
- простота параметров настройки алгоритма.

В данной работе рассматривается алгоритм кластеризации сеточного типа, использующий характеристики плотности ячейки сетки и принцип соседства ячеек с высокой плотностью. Алгоритм не требует начального задания исходного числа кластеров и использует в своей работе два настраиваемых и связанных между собой параметра:

- h — максимально допустимый шаг сетки, который определяет масштаб выделяемых кластеров;
- M_0 — плотность отсекаемых ячеек.

Метод, описанный ниже, может быть назван как *Метод объединения соседствующих ячеек* или *Method of Uniting Neighboring Cells — MUNC*.

Пусть в n -мерном евклидовом пространстве задано конечное множество векторов

$$\Omega = \{\vec{X}^{(i)} = x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}, i = \overline{1, N},$$

$$\overline{X}_{\max} = \left\{ \max_{i=1, N} x_{i,j}, j = 1, n \right\}, \overline{X}_{\min} = \left\{ \min_{i=1, N} x_{i,j}, j = 1, n \right\}.$$

Множество точек Ω принадлежит n -мерному параллелепипеду $\Pi = [x_{\min,1}, x_{\max,1}] \times \dots [x_{\min,n}, x_{\max,n}]$.

2. Построение сетки. Зададим параметр дискретизации сетки h и вычислим количество разбиений параллелепипеда Π в направлении каждой координаты:

$$m_j = \left\lfloor \frac{x_{\max,j} - x_{\min,j}}{h} \right\rfloor + 1, j = \overline{1, n},$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть числа. Таким образом, общее количество ячеек, покрываю-

щих параллелепипед Π , равно $M = \prod_{j=1}^n m_j$.

Уточним шаг сетки по каждой координате

$$h_j = \frac{x_{\max,j} - x_{\min,j}}{m_j}, j = \overline{1, n}.$$

Каждая ячейка сетки характеризуется своим целочисленным векторным индексом размерности n , $R = \{(r_1, r_2, \dots, r_n), 1 \leq r_i \leq m_i, i = \overline{1, n}\}$. Множество векторных индексов ячеек сетки R взаимно однозначно отображается на множество натуральных чисел: $R \Leftrightarrow Z = \{1, 2, \dots, M\}$.

3. Распределение точек множества Ω по ячейкам. Последовательно для каждой точки множества Ω вычисляем многомерный индекс ячейки, которой она принадлежит:

$$R^{(i)} = \left\{ r_j^i = \left\lfloor \frac{x_{i,j} - x_{\min,j}}{h_j} \right\rfloor + 1, j = \overline{1, n} \right\} \quad \forall i = \overline{1, N},$$

а также его одномерный образ $Z^{(i)}$.

В результате такого вычисления формируется двумерный список

$$\Omega_Z = \left\langle \left\langle Z^{(i)}, i \right\rangle, i = \overline{1, N} \right\rangle,$$

устанавливающий принадлежность каждой точки множества Ω одной из ячеек сетки. Очевидно, что значительная часть ячеек сетки при этом могут оставаться пустыми, а количество непустых ячеек определяется множеством:

$$Z_F = \left\{ Z^{(i_1)}, Z^{(i_2)}, \dots, Z^{(i_m)} \right\},$$

где каждый элемент повторяется лишь один раз, $|Z_F|$ — количество элементов этого множества. Как правило, $|Z_F| \ll M$.

Предварительно список Ω_Z сортируем по ключу первого элемента и формируем группирующий список следующей структуры:

$$\Omega_{ZG} = \left\langle Z^{(i)}, \Omega^{(i)}, N^{(i)}, \mu^{(i)}, i = \overline{1, |Z_F|} \right\rangle,$$

где $\Omega^{(i)}$ — множество номеров точек, принадлежащих ячейке $Z^{(i)}$, $N^{(i)}$ — множество соседей ячейки $Z^{(i)}$, $\mu^{(i)}$ — плотность ячейки (количество точек попавших в ячейку).

Список Ω_{ZG} сортируем по убыванию ключа $\mu^{(i)}$:

$$\Omega_{ZG} = \left\langle Z^{(s_i)}, \Omega^{(s_i)}, N^{(s_i)}, \mu^{(s_i)}, i = \overline{1, |Z_F|} \right\rangle,$$

где $\mu^{(s_i)} \geq \mu^{(s_{i+1})}$.

4. Объединение ячеек в кластеры. Объединение ячеек в кластеры однозначно определяет кластеризацию множества точек Ω . Поэтому достаточно объединить в кластеры одномерные индексы ячеек $Z^{(s_i)}, i = \overline{1, |Z_F|}$ с использованием отношения соседства $N^{(s_i)}$ и значений плотности $\mu^{(s_i)}$.

Индекс самой плотной ячейки $Z^{(s_1)}$ заносится в первый кластер $K_1 = \left\{ Z^{(s_1)} \right\}$.

Выбираем следующую ячейку с индексом $Z^{(s_2)}$, проверяем выполнение условия $K_1 \cap N^{(s_2)} = \emptyset$. При выполнении этого условия, ячейка $Z^{(s_2)}$ порождает новый кластер $K_2 = \left\{ Z^{(s_2)} \right\}$, в противном случае $K_1 = K_1 \cup \left\{ Z^{(s_1)} \right\}$.

Предположим, что совершено m шагов, в результате которых ячейки с индексами $Z^{(s_1)}, Z^{(s_2)}, \dots, Z^{(s_m)}$ отнесены к одному из кластеров $K_1, K_2, \dots, K_r$.

Определим порядок принадлежности ячейки с номером $Z^{(s_{m+1})}$ к некоторому кластеру.

Вычислим $K_i \cap N^{(s_{m+1})}$, $i = \overline{1, r}$ и проверим условие

$$\bigcup_{i=1}^r (K_i \cap N^{(s_{m+1})}) = \bigotimes.$$

При выполнении этого условия ячейка с индексом $Z^{(s_{m+1})}$ образует новый кластер $K_{r+1} = \{Z^{(s_{m+1})}\}$.

При нарушении этого условия существуют $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_l$ — номера уже существующих кластеров, для которых $K_{i_j} \cap N^{(s_{m+1})} \neq \bigotimes$, $j = \overline{1, l}$. В этом случае эти кластеры объединяются в один кластер K_{i_1} и присоединяют ячейку с номером $Z^{(s_{m+1})}$, т. е.

$$K_{i_1} = K_{i_1} \cup K_{i_2} \cup \dots \cup K_{i_l} \cup \{Z^{(s_{m+1})}\}.$$

Кластеры $K_{i_2}, K_{i_3}, \dots, K_{i_l}$, вошедшие в K_{i_1} удаляются, а нумерация остальных $r - r_l + 1$ кластеров сдвигается.

Процесс объединения ячеек в кластеры заканчивается на шаге m_0 , когда

$$\mu^{(m_0)} \leq M_0.$$

Оставшееся множество ячеек с малой плотностью точек, не отнесенных к одному из кластеров, можно оставить некластеризованными, воспринимая их как выбросы или шум.

Второй вариант завершения процедуры кластеризации можно выполнить методом классификации (обучения с учителем), где в качестве обучающих множеств использовать уже сформированные кластеры, например используя метод минимума расстояния или метод ближайших соседей.

5. Тестовая проверка работоспособности алгоритма. Тестирование алгоритма проводилась на искусственно сгенерированных точечных множествах в двумерном пространстве.

Множество 1 содержит 300000 точек, представляющих 7 нелинейно разделимых кластеров различного размера, формы и плотности. Смоделированная кластерная структура была искусственно зашумлена равномерно распределенным множеством из 2000 точек, покрывающих все пространство, занимаемое кластерами (рис. 1).

Процедура кластеризации проводилась для различных значений настраиваемых параметров h и M_0 . Ожидаемые и наилучшие результаты получены для значений $h \leq 0.7$ и $3 \leq M_0 \leq 10$ (рис. 2). В результате выполнения процедуры 299545 точек были кластеризованы.

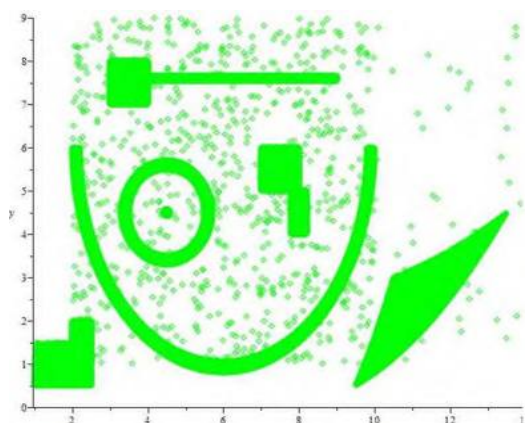


Рис. 1

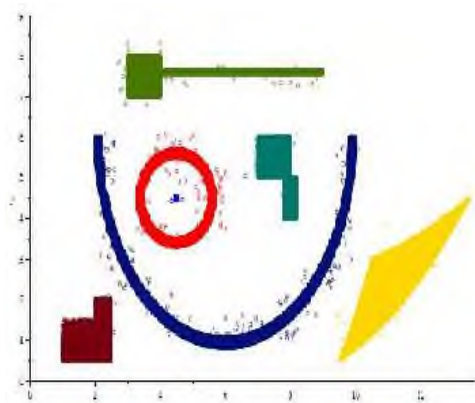


Рис.2

Множество 2 содержит 100000 точек, объединенных в 3 искусственно смоделированных кластера эллиптической формы, имеющих зоны перекрытия. Каждый кластер представляет собой множества точек на плоскости двумерного распределения Гаусса с различными векторами средних, дисперсий и нулевой ковариацией (рис. 3).

Учитывая, что кластеры имели зоны перекрытия, особенно значительную между вторым и третьим кластерами (синим и зеленым), алгоритм позволил четко выделить ядра каждого кластера, которые являются наиболее плотными их частями. Наилучшие результаты получены для значений настраиваемых параметров $h \approx 0.6$ и $M_0 \approx 25$. При этом к кластерам было отнесено около 85% всех точек множества (рис. 4).

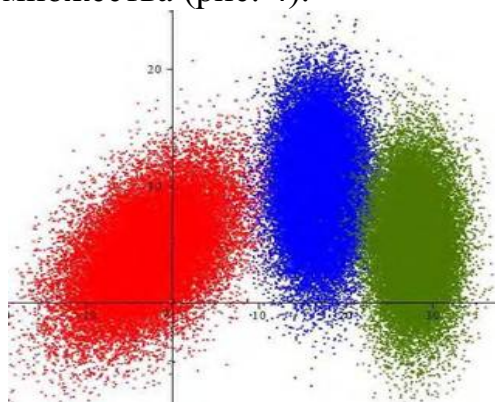


Рис. 3

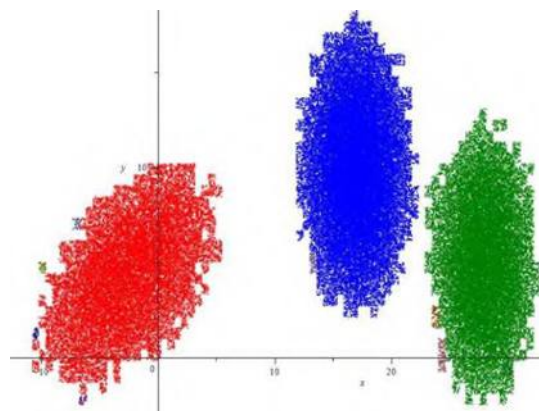


Рис. 4

Список литературы

- Sarmah, S., & Bhattacharyya, D. K. (2012). A grid-density based technique for finding clusters in satellite image. *Pattern Recognition Letters*, 33(5), 589–604. <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2011.11.021>
- Кузьмін, А. В., Греков, Л. Д., Петров, О. А., & Медведенко, О. М. (2017). Обчислювальні процедури тематичної обробки космічних знімків в інтересах моніторингу аграрних ресурсів (Частина 1). *Екологічна безпека та природокористування*, 21(1–2), 70–78. <https://doi.org/10.32347/2411-4049.2017.1>
- Пестунов, И. А., & Синявский, Ю. Н. (2012). Алгоритм кластеризации в задачах сегментации спутниковых изображений. *Вестник Кемеровского государственного университета*, (4.2), 110–125. <https://vestnik.kemsu.ru/jour/article/view/3587>

Математичні аспекти методу аналітичної ієрархії

Б. Р. Кушлик, О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

bodo_kush@hotmail.com, olgakushlyk64@gmail.com,

nvpolinv@gmail.com

Описано використання методу аналітичної ієрархії (МАІ), класичних математичних обґрунтувань та програмних продуктів. Показано використання МАІ на прикладі, проведено ієрархічний синтез.

Ключові слова: теорія прийняття рішень, метод аналітичної ієрархії, парні порівняння, матриця, вектор локальних пріоритетів, власні числа, узгодженість, друкарська машина.

Метод аналітичної ієрархії (Кушлик & Кушлик-Дивульська, 2014) ґрунтується на принципах декомпозиції та синтезу, реалізація яких дає змогу зменшити кількість можливих помилок у процесі отримання інформації від експерта. За допомогою МАІ отримують ієрархічну структуру, що дозволяє уникнути складних порівнянь, замінивши їх попарними. Цей метод дає змогу перевіряти послідовність (несуперечливість) тверджень експерта.

У роботі Кушлик та ін. (2018) показано використання критеріїв Вальда, Лапласа, Севіджа, Гурвіца прийняття рішень в умовах повної невизначеності, причому матрицю інвестування розглянуто як матрицю втрат.

Метод аналітичної ієрархії (метод аналізу), розроблений відомим американським математиком Томасом Сааті, з успіхом використовується для розв'язання багатьох практичних задач, як економічного змісту, так і при плануванні виробничих процесів, їх удосконалення. Вибір пріоритетних рішень здійснюється за допомогою парних порівнянь, метод є безрозмірним і не виникає проблем при приведенні до однакових одиниць виміру.

Відома послідовність етапів МАІ (Катренко та ін., 2009):

- 1) формулювання проблеми, яку потрібно розв'язати;
- 2) постановка проблеми загалом — включення її (якщо це необхідно) до більшої системи;
- 3) ідентифікація критеріїв, за якими буде оцінено якість розв'язання проблеми;
- 4) побудова ієрархії спільних критеріїв, окремих критеріїв, властивостей альтернатив і самих альтернатив;
- 5) задання пріоритетів первинних критеріїв (сил) щодо їх впливу на генеральну мету;
- 6) чітке формулювання питання для попарних порівнянь у кожній матриці, орієнтація кожного питання (наприклад, вартість має зменшуватись, а ефективність збільшуватись);
- 7) задання пріоритетів часткових критеріїв щодо загальних; збір результатів попарних порівнянь;

8) опрацювання зібраних даних згідно з алгоритмом МАІ для обчислення глобальних пріоритетів і глобальної узгодженості результатів.

У МАІ порівнюють пари елементів задачі попарно щодо їх впливу (дії, ваги, інтенсивності) на спільну для них характеристику будують у разі ієрархічного подання проблем матрицю. Далі складають для порівняння відносної важливості критеріїв другий рівень відносно загальної мети першого рівня (кореня ієрархії), а потім будують такі ж самі матриці попарних порівнянь наступного рівня відносно елементів попереднього.

Попарні порівняння виконують у шкалі відношень за бальною системою: 1 — однакова важливість, 3 — помірна перевага, 5 — суттєва перевага, 7 — значна перевага, 9 — дуже велика перевага; 2, 4, 6, 8 — проміжні значення (використовують у перехідних ситуаціях), $\frac{1}{k}$ — обернені величини.

Локальні пріоритети отримують, визначивши множину головних власних векторів для кожної з обернено симетричних матриць ієрархії та нормалізувавши результат. Таким чином, обчислюють складові вектора за формулою

$$x_i = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}}}{\sum_{i=1}^n \left(\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}} \right)}, \quad (1)$$

При розробці СППР «Decisioner» використано модифікований метод, суть якого: при точному процесі визначення вектора локальних пріоритетів за формулою (1) задача зводиться до знаходження власного вектора матриці попарних порівнянь. Вектор локальних пріоритетів може бути обчислений спрощеним способом:

1) для кожного рядка матриці попарних порівнянь знаходять середнє геометричне її елементів (зручно за функцією СРГЕОМ(число1; число2;...), Microsoft Excel);

2) обчислюють суму всіх середніх геометричних (СУММ(число1; число2;...), Microsoft Excel, категорія «математичні функції»), кожне середнє геометричне ділять на їх суму (нормування).

Другим етапом є оцінка узгодженості оцінок експерта, де значення індексу узгодженості для випадкових матриць наведено нижче в табл.1.

Таблиця 1

Розмір матриці	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Випадкова узгодженість	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Розглянемо на прикладі використання методу МАІ.

Для порівняння та вибору найкращого варіанту придбання для поліграфічної галузі проаналізовано 3 друкарські машини офсетного способу друку В2

формату: Speedmaster CX 75, Speedmaster SX 74, Speedmaster XL 75, які позначені надалі, як *A*, *B* та *C*, відповідно.

У табл. 2 наведено характеристики друкарських машин для офсетного друку (B2 формату), за якими побудовано ієрархічну структуру задачі їх придбання.

Таблиця 2

Характеристики	Speedmaster CX 75	Speedmaster SX 74	Speedmaster XL 75
Швидкість друку л/год (Q1)	14000	15000	18000
Товщина матеріалу, мм (Q2)	0,5	0,6	0,8
Макс. формат листа, мм ² (Q3)	397500	392200	453750
Мін. формат листа, мм ² (Q4)	98000	78400	84000
Габарити, м ² (Q5)	66,8	55,7	70,2
Ціна, € (Q6)	150000	105000	550000

Побудовано таку матрицю попарних порівнянь (табл. 3) для рівня 2 — критеріїв.

Таблиця 3

Критерій	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
Q1	1	5	1/3	3	9	7
Q2	1/5	1	1/3	5	7	5
Q3	3	3	1	5	7	7
Q4	1/3	1/5	1/5	1	3	3
Q5	1/9	1/7	1/7	1/3	1	1/5
Q6	1/7	1/5	1/7	1/3	5	1

Після цього, порівнюючи попарно три друкарські машини (*A*, *B*, *C*) за кожним із критеріїв (рівень 3), отримано вісім матриць (для кожного із критеріїв) розміром 3×3 (за кількістю альтернатив до вибору). Матриці подано в табл. 4.

Таблиця 4

Q1	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	Q2	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	Q3	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>A</i>	1	1/3	1/7	<i>A</i>	1	1/3	1/7	<i>A</i>	1	3	1/5
<i>B</i>	3	1	1/5	<i>B</i>	3	1	1/4	<i>B</i>	1/3	1	1/7
<i>C</i>	7	5	1	<i>C</i>	7	4	1	<i>C</i>	5	7	1

Визначення узгодженості матриці критеріїв, дані яких наведено в табл. 5, показало, що максимальний формат листа є найважливішим у виборі друкарської машини, друге місце посідає швидкість руху, а третє — товщина матеріалу, яка безпосередньо пов'язується з форматом листа. У реальній практичній ситуації за результатами такого аналізу несуттєві критерії можна було б відкинути (габарити — критерій Q5, табл.2), але з ілюстративною метою залишено всі.

Таблиця 5

Критерій	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Вектор пріоритетів
Q1	1	5	1/3	3	9	7	0,2869
Q2	1/5	1	1/3	5	7	5	0,1657
Q3	3	3	1	5	7	7	0,3969
Q4	1/3	1/5	1/5	1	3	3	0,0773
Q5	1/9	1/7	1/7	1/3	1	1/5	0,0254
Q6	1/7	1/5	1/7	1/3	5	1	0,0479

Для оцінювання індексу узгодженості оцінок експерта, висновків для кожної із таблиць очислюють величини:

1) вектор власних чисел матриці

$$\lambda_i = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot V_j}{V_i}, \text{ де } V_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}};$$

2) максимальне власне число матриці

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i;$$

3) індекс узгодженості

$$I_n = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

та відношення узгодженості $I_0 = \frac{I_n}{M(I_n)}$, значення $M(I_n)$ — значення індексу

узгодженості для випадкових матриць (із таблиці). Якщо отримане значення I_0 менше 10% — рівень узгодженості можна вважати задовільним (інколи доводиться задовольнятися значенням 20%).

Отримано обчислені значення локальних пріоритетів для альтернатив, які подано нижче (табл. 6–8), причому наведені результати показують рівень узгодженості як задовільний.

Таблиця 6

Q1	A	B	C	Вектор пріоритетів	Q2	A	B	C	Вектор пріоритетів
A	1	1/3	1/7	0,0810	A	1	1/3	1/7	0,0841
B	3	1	1/5	0,1884	B	3	1	1/4	0,2109
C	7	5	1	0,7306	C	7	4	1	0,7049
			Imax	3,065				Imax	3,032
			In	0,0325				In	0,016
			Io	0,056				Io	0,0275

Таблиця 7

Q3	A	B	C	Вектор пріоритетів	Q4	A	B	C	Вектор пріоритетів
A	1	3	1/5	0,1884	A	1	1/5	1/3	0,1047
B	1/3	1	1/7	0,0810	B	5	1	3	0,6370
C	5	7	1	0,7306	C	3	1/3	1	0,2583
			Imax	3,065				Imax	3,039
			In	0,0325				In	0,0195
			Io	0,056				Io	0,0336

Таблиця 8

Q5	A	B	C	Вектор пріоритетів	Q6	A	B	C	Вектор пріоритетів
A	1	1/3	4	0,2797	A	1	1/3	6	0,2785
B	3	1	5	0,6267	B	3	1	9	0,6631
C	1/4	1/5	1	0,0936	C	1/6	1/9	1	0,0585
			Imax	3,086				Imax	3,054
			In	0,043				In	0,027
			Io	0,0741				Io	0,0465

Глобальні пріоритети обчислюють на наступному етапі МАІ — ієрархічного синтезу (Приймак, 2008). Із цією метою для виявлення складених або глобальних пріоритетів вибору друкарської машини виконують зворотній хід: із передостаннього рівня рухаємось до кореня ієрархії, збираючи вектори локальних пріоритетів у матриці та множачи їх на вектори локальних пріоритетів безпосередніх предків, доки не досягнемо кореня ієрархії. У наведеному прикладі ця процедура зводиться до збирання матриці з векторів локальних пріоритетів альтернатив за критеріями — матриця A та множення її на матрицю B — вектор-стовпець локальних пріоритетів. Зручно використовувати функцію Microsoft Excel МУМНОЖ(масив1;масив2), результатом дії якої є матриця з кількістю рядків масиву 1 та стовпців, як у масиві 2. Можна використати й математичну функцію СУММПРОИЗВ(масив1; масив2; масив3;...), масиви у якій повинні мати однаковий розмір та послідовно виконувати дії множення відповідного рядка на стовпець. Для наведеного прикладу отримано матрицю C вигляду

$$C = \begin{pmatrix} 0.143271 \\ 0.218066 \\ 0.641532 \end{pmatrix}.$$

Отже, найкращим варіантом є третя друкарська машина Speedmaster XL 75.

Список літератури

- Катренко, А. В., Пасічник, В. В., & Пасько, В. П. (2009). *Теорія прийняття рішень*. Київ: Видавнича група ВНУ.
- Кушлик, Б. Р., & Кушлик-Дивульська, О. І. (2014). *Основи теорії прийняття рішень*. Київ: НТУУ «КПІ». <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/2838>.
- Кушлик, Б. Р., Кушлик-Дивульська, О. І. & Поліщук, Н. В. (2018). Задача прийняття рішення з мінімізацією можливих втрат. У *Матеріалах Сьомої Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 85–87). Вінниця: Видавець ФОП Кушнір Ю. В. <http://matan.kpi.ua/public/files/2018/mvstu7/MCTU7.pdf>
- Приймак, В. М. (2008). *Прийняття управлінських рішень*. Київ: Атіка.

Проблеми викладання у вищій школі в умовах постнекласичної науки

С. М. Лапач

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

lapach@ukr.net

Розглядаються проблеми викладання у вищій школі пов'язані з особливостями постнекласичного етапу розвитку науки і її парадигмою. Особливу увагу приділяється конфліктам, які викликані невідповідністю змісту, форми та методології викладання сучасній науковій парадигмі і стану суспільства.

Ключові слова: класична наука, постнекласична наука, вища освіта.

Наш час — це час кризи класичної і становлення постнекласичної науки (Грушевицкая & Садохин, б. д.). Перехід науки до нових станів викликаний ускладненням досліджуваних предметів і явищ, підвищеними вимогами до точності опису, а також неможливістю спрощення опису без вихолощення сутності досліджуваного явища. Розглянемо деякі особливості постнекласичної науки, які мають вплив на освіту і формування світогляду майбутніх (і сучасних) науковців (Алиева, 2008; Шор & Архипова, 2013). До таких особливостей можна віднести наступні: глобальність — зв'язок усього з усім: окремих наук, окремих сфер людської діяльності; розгляд не ізольованих об'єктів і систем, а як частину деяких загальних процесів; місце людини — спостерігач/дослідник (прилади, методика) є частиною досліджуваного світу, його вплив на експеримент і результати; дослідник формує образ дійсності із привнесенням суб'єктивності; динаміка й синергізм — розглядання процесів у динаміці, еволюційність, синергетика, самоорганізація, нелінійність; недетермінізм — випадковість і хаотичність є невід'ємними елементами досліджуваного світу; «людино розмірність» — об'єктом дослідження все більше виступають системи, де людина є невід'ємною частиною системи: у медицині екології, транспорті, генетична інженерія, будь які інформаційні системи, у яких людина є елементом; міждисциплінарність — об'єкти дослідження є складними системами, які вимагають відмови від вузькодисциплінарності для можливості їх розуміння і опису; зміна логічних основ — відмова від класичної (аристотелівської) логіки, використання багатозначних, ймовірнісної, нечіткої логік; філософія — повернення філософії до активної участі в наукових процесах у зв'язку з необхідністю зрозуміти процеси, які відбуваються з точки зору теорії пізнання і ролі науки в суспільстві; втрата ідеалу абсолютної достовірності — відмова від класичного ідеалу точного строгого в нескінченно чисельно деталізованого знання; перехід до відносно істинного, яке постійно оновлюється і змінюється знання, знання про як сукупності теорій, які частково перетинаються, знання як деякий переріз об'єктивної реальності, придатне для певних умов; віртуалізація математичного моделювання — розвиток математичного моделювання і теорій з високим рівнем абстракції привів до ситуації, коли значна кількість проводиться не з реальними си-

стемами, а з їх математичними моделями. Розвиток науки, техніки та технологій зробив можливим життя звичайної людини в повному незнанні про те, як облаштований навколишній світ. Додатково це призвело до зникнення мотивації для навчання. Можемо відзначити ряд суперечностей, як пов'язані з особливостями сучасної наукової кризи і впливають на якість навчання:

- суперечність між тим, що вчать (класична наука) і тим, що на лезі застосування;

- предмети сприймаються студентами як деякі окремі, практично не зв'язані елементи навчання, які потрібно з мінімальними затратами здати і забути, а наука як деяка збірка фактів, правил і прийомів. Виконання вимог встановлення зв'язків між предметами зупиняється (за деякими винятками) на записах у документах (робочі і навчальні програми). Тобто, системність відсутня. Відсутнє розуміння єдності світу;

- кожен предмет має вигляд (з точки зору студента) набору фактів і методів розрахунку. Відсутнє розуміння науки як системи знань і розвитку науки розуміння місця науки в суспільстві і проблем з розвитком і впровадженням наукових знань;

- невідповідність методології викладання сучасному стану інформаційної насиченості суспільства і психології студентів;

- неврахування особливостей використання обчислювальних методів і математичних моделей з використанням комп'ютерної техніки.

Загалом освіта орієнтована на викладання дисциплін класичної науки, що викликає відчуття застарілості й навіть непотрібності навчання в частини студентів. Тому завдання виховання наукового світогляду й розуміння що таке наука і її місце в суспільстві університетами не виконується. На ці невідповідності накладаються проблеми співпраці студент-викладач (частково перетинаючись зі вказаними вище суперечностями).

До них належать наступні:

- невідповідність освіти, яку дає середня школа вимогам часу. Справа зовсім не достатньому рівні знань з окремих предметів, особливо математики й мови, що найчастіше згадують у дискусіях. Справа в тому, що вчорашні школярі, а нині студенти не вміють вчитись і працювати з абстрактними поняттями;

- відсутність мотивації у студентів. Мотиви побоювання і відповідальності практично відсутні. Зрозуміти, що це корисно, неможливо за браком знань про навколишнє життя і під пресингом суспільства про непотрібність знань для особистого успіху. Зацікавити людину, якщо предмет лежить за межами його інтересів дуже важко і ненадовго. Щось може бути «круто», «прикольно», «несподівано», але при відсутності відчуття загальної потреби в цьому через тиждень уже стирається з пам'яті;

- культурний конфлікт викладач-студент, викликаний відсутністю спільної культури нинішнього покоління студентів не тільки з тими викладачами, яким за 50, але й з тими, яким 30–40 років;

– шоу/кліповість сприйняття: зосередженість продовжувана відсутня, потрібно шоу, але шоу не запам'ятовується — бо звичка в його неважливості;

– навчальний колектив і взаємодопомога загалом майже відсутні порівняно зі станом 15–20 років тому;

– бажання обмежити себе в зусиллях по навчанню і зведення його до повсякденної утилітарності: для складання іспиту, захисту курсової роботи тощо, все, що більше — «мені не потрібно».

Ми маємо справу із ситуацією, подібною до переходу до індустріальної фази розвитку цивілізації. І відповідно це потягне за собою системні зміни в усіх сферах, які стосуються освіти: у суспільстві, державній політиці, університетах тощо. Відносно невідповідності освіти сучасному суспільству (Тоффлер, 2002; Бодріяр, 2004) і необхідності пошуку нової мети існування університетів у сучасному суспільстві (Університет как центр..., 2004) існує досить великий пласт літератури. Ми ж зосередимося тільки на найнижчому рівні, де безпосередньо відбувається процес навчання, хоча зрозуміло, що без змін на всіх вище вказаних рівнях принципово значущого ефекту не доводиться чекати. Зауважимо, що є потреба певних змін і у школі, яка закладає базу для успішного навчання в університеті. Там потрібне перенесення акценту з отримання суми знань на вміння вчитися, працювати з інформацією. Розглянемо ті невідповідності сучасному стану, які можливо корегувати на рівні університету. Вони стосуються, по-перше, складу дисциплін, по-друге, зв'язку дисциплін між собою і, по-третє, методикою викладання.

До ключових (не спеціальних) дисциплін, які забезпечують відповідний рівень сучасної технічної освіти, який би відповідав постнекласичній науці, слід віднести наступні:

- 1) блок власне математичних дисциплін;
- 2) філософію;
- 3) блок дисциплін теорії систем і системного аналізу;
- 4) дисципліни математичного і комп'ютерного моделювання;
- 5) дисципліни методології проведення наукових досліджень (основи наукових дослідження, теорія планування експериментів);
- 6) основи науково-технічної творчості.

При інтенсивній математизації науки, включаючи гуманітарні складові, і фактичному проникненню математизації глибоко в побут через різного роду пристрої, рівень опанування математичними знаннями за останні два десятиліття значно знизився. До основних проблем з викладанням математики належать її невідповідність за змістом як вимогам спеціальності, так і вимогам сучасної науки. Необхідно при викладанні математики обов'язково встановлювати зв'язок з реальністю (Арнольд, 2010; Пуанкаре, 1990). Крім того, для технічних спеціальностей слід обмежитись необхідним мінімумом, який різний як за складу, так і за обсягом для різних спеціальностей (Крылов, 2003). Структура повинна краще відповідати сучасним вимогам, а не вимогам сторічної давнини (Лапач, 2013). Але, крім забезпечення бази для всієї сучасної науки, вивчення

математики є основою для наукового способу мислення. Оскільки будь яка формальна процедура є тільки переходом від неформальної постановки задачі до неформальних висновків (Лем, 2012), то критичним є уміння займатись якраз цими процедурами, які можливо засвоїти якраз під час вивчення математики (Елленберг, 2018; Оклі, 2019). Особливо це необхідно для попередження неприємностей при невмілому використанні математичних знань (О'Нил, 2018). Ситуація з філософією ще гірша: вона сприймається студентами як абсолютно непотрібна їм наука. Не зупиняючись на цьому питанні, вкажемо на критичну необхідність її для сучасної фази розвитку науки (Гьосле, 2003; Мелков, 2014; Поппер, 2001, 2004). Слід зауважити, що необхідно перенести центр викладання ваги на теорію пізнання та розв'язання нині існуючих проблем у науці та суспільстві. Інакше ніякого зв'язку з іншими дисциплінами не відбудеться і філософія далі залишиться в очах студентів непотрібним предметом.

У цілому можна сказати, що системність, як у вигляді окремих курсів, так і у зв'язку між курсами знаходиться поза увагою в університеті. Давно встановлено, що для забезпечення взаємозв'язку потрібно спеціалізуватись за проблемою (Вернадский, 2003), що змушує встановлювати зв'язок між різними науками. Звернувши увагу на величезну кількість популярної зарубіжної літератури для навчання застосування елементів теорії систем і системного аналізу на практиці (О'Коннор & Макдермотт, 2006, 2018; Медоуз, 2018; Бут, 2014), побачимо прірву відставання. З моделюванням, на перший погляд, здається все в порядку: багато різноманітних курсів. Разом з тим існує маса прогалин, які зводять усе нанівець. А саме: як правило відсутні сучасні методи моделювання (на кшталт нейронних мереж, мурашиного алгоритму тощо), відірваність від реальності (мовчання про адекватність моделей, умов застосування методів, небезпеки й особливості використання певних алгоритмів), не говориться про особливості застосування комп'ютерного моделювання (стійкість і точність обчислень, верифікація, тестування тощо), неоднозначність (можливість множини взаємозамінних моделей). Що стосується курсів за п. 5, то вони є, але, як правило, мають недостатній зв'язок з реальним навчанням за спеціальністю у зв'язку методичними й адміністративними неузгодженостями.

Повністю зник курс «Основи науково-технічної творчості». Не вказуючи про необхідність такого курсу для вміння розв'язувати творчі задачі, укажімо на тенденцію: перевидання класичної літератури (Альтшуллер, 2018), включення елементів творчих підходів в роботи по системах (О'Коннор & Макдермотт, 2006, 2018) і по прийняттю рішень (Саєд, 2018; *Про прийняття розумних рішень...*, 2019).

Як один з варіантів забезпечення міждисциплінарності й системності було б запровадження курсових робіт не як роботи за певним курсом, а як роботи за весь курс, у якій має бути застосовано більшість дисциплін. Причому основне завдання має бути в рамках спеціальності студента. Захист роботи на комісії, як, до речі, і було під час навчання автора. Звичайно, підготовка й організація таких робіт, складна і не швидка справа, але це могло б вирішити цілий ряд проблем.

Список літератури

- Алиева, Н. З. (2008). *Постнеклассическое естественнонаучное образование: концептуальные и философские основания*. Москва: Академия естествознания.
- Альтшуллер, Г. (2018). *Найти идею. Введение в ТРИЗ — теорию решения изобретательских задач* (11-е изд.). Москва: Альпина Паблишер.
- Арнольд, В. И. (2010). *Математическое понимание природы: Очерки удивительных физических явлений и их понимания математиками (с рисунками автора)* (2-е изд.). Москва: МЦНМО.
- Бодріяр, Ж. (2004). *Симулякри і симуляція*. Київ: Основи.
- Бут, С. Л. (2014). *Игры для развития системного мышления*. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний.
- Вернадский, В. И. (2003). *Биосфера и ноосфера*. Москва: Айрис-пресс.
- Грушевицкая, Т., & Садохин, А. (б. д.). *Концепции современного естествознания*. https://www.gumer.info/bibliotek_Buks/Science/grushev/07.php.
- Гьосле, В. (2003). *Практична філософія у сучасному світі*. Київ: Лібра.
- Елленберг, Д. (2018). *Як ніколи не помилятися. Сила математичного мислення*. (2-ге вид). Київ: Наш формат.
- Крылов, А.Н. (2003). *Мои воспоминания* (9-е изд.). Санкт-Петербург: Политехника.
- Лапач, С. М. (2013). *Конфлікт класичного та модернового у викладанні математики в вищій школі. У Матеріалах Другої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 178–180). Київ: НТУУ «КПІ».
- Лем, С. (2012). *Сумма технологий*. Москва: АСТ-Полиграф.
- Медоуз, Д. (2018). *Азбука системного мышления*. Москва: Манн, Иванов и Фарбер.
- Мелков, Ю. А. (2014). *Человекомерность постнеклассической науки*. Киев: Издательство ПАРАПАН.
- О'Коннор, Д., & Макдермотт, И. (2006). *Искусство системного мышления: Необходимые знания о системах и творческом подходе к решению проблем*. Москва: Альпина Бизнес Букс.
- О'Коннор, Д., & Макдермотт, И. (2018). *Системне мислення. Пошук неординарних творчих рішень*. Київ: Наш формат.
- О'Нил, К. (2018). *Убийственные большие данные: Как математика превратилась в оружие массового поражения*. Москва: Издательство АСТ.
- Оклі, Б. (2019). *Навчитися вчитися. Як запустити свій мозок на повну* (2-ге вид). Київ: Наш формат.
- Поппер, К. (2001). *Нормальная наука и опасности, связанные с ней. В Т. Кун, Структура научных революций* (с. 525–538). Москва: Издательство АСТ.
- Поппер, К. (2004). *Предположения и опровержения: Рост научного знания*. Москва: АСТ.
- Про прийняття розумних рішень. 10 найкращих статей із журналу Harvard Business review*. (2019). Київ: Вид. група КМ-БУКС.
- Пуанкаре, А. (1990). *О науке* (2-е изд.). Москва: Наука.
- Сасд, М. (2018). *Мислення за принципом «чорної скриньки»: як звести до мінімуму ризик невдач*. Київ: Вид. група КМ-БУКС.
- Тоффлер, Э. (2002). *Третья волна*. Москва: Издательство АСТ.
- Университет как центр культуропорождающего образования*. (2004). Минск: БГУ.
- Шор, Ю.М., & Архипова, О. В. (2013). *Идея образования в контексте постнеклассической парадигмы. UNIVERSUM: Вестник Герценовского университета*, (4), 3–12. https://lib.herzen.spb.ru/media/magazines/contents/2/2013_4/shor_4_13_3_12.pdf

Зображення параметрів кола змінної напруги на комплексній площині

К. Б. Медведєв, Г. Д. Нефьодова, А. Ю. Манжелій

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ

kostyamedvedev01@gmail.com, g.nefyodova@gmail.com,

afiksus@gmail.com

Відомо, що для вирішення деяких типових задач електротехніки застосовують комплексні числа. У колах змінного струму напруга і сила струму розглядають як вектори, які доцільно виразити за допомогою комплексного числа в показниковій формі. Робота з миттєвими значеннями викликає багато незручностей та вимагає обчислень непростих інтегралів, тоді, як за допомогою комплексних чисел усі обчислення зводяться до простіших арифметичних обчислень.

Ключові слова: формула Ойлера, електротехніка, комплексна площина, розрахунок кіл змінного струму, напруга.

Подання електричних струмів (напруг, ЕРС) у вигляді синусоїдальних функцій є досить простим, але операції з ними трудомісткі, а їх графічні зображення є недостатньо точними. Розрахунок кіл змінного струму значно полегшується, якщо гармонічні струми, напруги, ЕРС та інші величини зображати у вигляді векторів або комплексних чисел. Як відомо, комплексне число можна записати в різних формах:

- 1) алгебрична форма: $\dot{A} = A' + jA''$;
- 2) тригонометрична форма: $\dot{A} = A \cos \alpha + jA \sin \alpha$;
- 3) показникова форма: $\dot{A} = A e^{j\alpha}$;
- 4) вектором $\dot{A}$ на комплексній площині,

де уявна одиниця визначається рівністю $j^2 = -1$, $A' = \operatorname{Re} \dot{A} = A \cos \alpha$ — дійсна частина комплексного числа (проекція вектора $\dot{A}$ на дійсну вісь), $A'' = \operatorname{Im} \dot{A} = A \sin \alpha$ — уявна частина комплексного числа (проекція вектора $\dot{A}$ на уявну вісь)

Широко використовують також формулу Ойлера:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

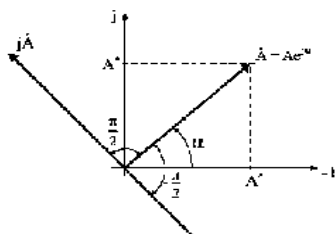


Рис.1. Площина комплексних чисел

В електротехніці для розрахунків кіл синусоїдного струму використовують основні математичні операції: додавання, віднімання, множення та ділення. Операції додавання та віднімання найбільш зручно проводити, застосовуючи алгебричну форму запису комплексних чисел, при множенні та діленні — показникову форму.

Нехай деяка величина струму i змінюється за гармонічним законом:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

Візьмімо прямокутну систему координат MON (рис. 2) і розташуємо в ній під кутом ψ відносно горизонтальної осі OM вектор $\vec{I}_m$, довжина якого в заданому масштабі дорівнює амплітуді I_m . Додатні кути ψ відкладаються проти напрямку руху годинникової стрілки, а від'ємні — у напрямку руху годинникової стрілки.

Якщо вектор $\vec{I}_m$ обертається навколо точки O проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω , то в момент часу t він утворює з віссю OM кут $\omega t + \psi$. Проекція цього вектора на вісь NN' дорівнює в заданому масштабі миттєвому значенню величини i , що розглядається.

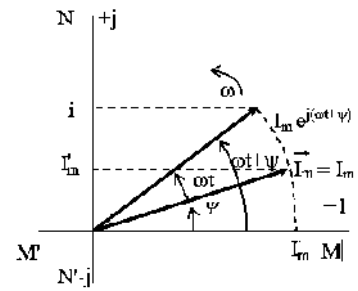


Рис. 2. Представлення гармонічної функції струму в часі у вигляді вектора

Аналогічний результат можна отримати й для нерухомого вектора $\vec{I}_m$, якщо обертати, починаючи з моменту $t = 0$, вісь NN' за годинниковою стрілкою з кутовою швидкістю ω . У цьому випадку вісь NN' називають *лінією часу*.

Таким чином, між миттєвим значенням i та вектором $\vec{I}_m$ існує однозначний зв'язок. На основі цього вектор $\vec{I}_m$ називають вектором, що зображує гармонічну функцію часу, або вектором гармонічної величини i . При цьому мають на увазі вектори напруги, ЕРС, струму, магнітного потоку та інші. Сукупність векторів, що зображують розглянуті гармонічні функції часу, називають *векторною діаграмою*.

Якщо вважати осі MM' та NN' осями дійсних та уявних величин на комплексній площині, то вектор $\vec{I}_m$ буде відповідати комплексному числу I_m , модуль якого дорівнює амплітуді гармонічної величини i , а аргумент — її початковій фазі ψ . Це комплексне число називають *комплексною амплітудою* гармонічної величини i і може бути записано в показниковій, тригонометричній та алгебричній формах.

Для однорідності позначень прийнято на комплексній площині зображати вектори, як синусоїдально змінювані у часі величини для моменту часу $\omega t = 0$. Комплексну величину струму, згідно з формулою Ойлера, можна записати у тригонометричній формі:

$$I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

Якщо порівняти останній вираз із гармонічним законом зміни струму, то видно, що:

$$i(t) = \text{Im} \left(I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} \right) = \text{Im} (I_m e^{j\omega t}).$$

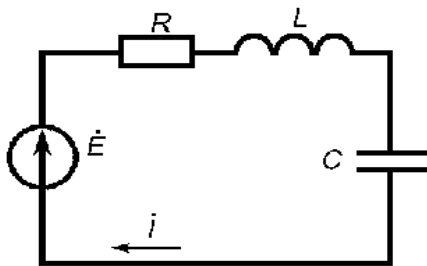
Тобто миттєве значення синусоїдального струму дорівнює проекції на уявну вісь обертового вектора, який є зображенням розглянутого комплексного числа.

Отже, синусоїдальному струму (оригіналу) може бути поставлене у відповідність комплексне число (зображення), яке відповідає виразу:

$\dot{I}_m = I_m e^{j\omega t}$ — це комплексна амплітуда або комплекс струму.

Як приклад, розглянемо задачу, яка доволі часто трапляється в лабораторних та інших завданнях з теорії електричних кіл, де доцільно використовувати відповідний спосіб розрахунку.

У наведеній схемі для миттєвих значень напруг при послідовному з'єднанні елементів правдиві наступні рівності:



$$U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) = e(t);$$

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e(t).$$

У комплексній формі рівняння для напруг можна переписати так:

$$I_m R + I_m j\omega L + I_m \left(\frac{-j}{\omega C} \right) = E_m,$$

$$I_m \left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right) = E_m,$$

$$I_m = \frac{E_m}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}} = \frac{E_m}{Z}$$

Підготовка фахівців на факультеті електроніки КПІ імені Ігоря Сікорського базується на вивченні циклу загальноінженерних дисциплін, включаючи предмет «Теорія електричних кіл». Розгляньмо задачу з теми «Основи символічного методу розрахунку кіл синусоїдального струму»:

Комплексні діючі значення напруги (U) та струму (I) дорівнюють відповідно: $U = 220e^{j\frac{\pi}{2}}$ В та $I = 2e^{j\frac{\pi}{3}}$ А. Частота $f = 100$ Гц. Знайти: кутову частоту ω , комплексні амплітудні значення напруги (U_m) та струму (I_m), записати вирази для миттєвих значень напруги ($u(t)$) та струму ($i(t)$). Побудувати миттєву діаграму схеми.

Розв'язання.

$$1. \omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 100 = 628 \text{ рад; } T = \frac{1}{f} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ с.}$$

$$2. U_m = 220\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{2}} = 310e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ В; } I_m = 2\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{3}} = 2,28e^{j\frac{\pi}{3}} \text{ А.}$$

3. $u(t) = 310 \sin\left(628t + \frac{\pi}{2}\right)$ В; $i(t) = 2,28 \sin\left(628t + \frac{\pi}{3}\right)$ А.

4. Побудуємо діаграми (рис. 3).

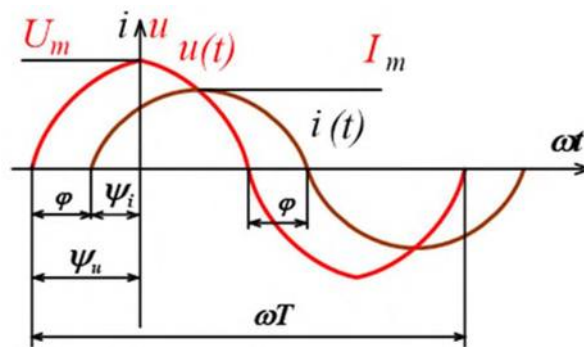


Рис. 3. Миттєва діаграма

Отже, задачі розрахунку кіл із джерелом змінної напруги полегшуються при переході від миттєвих значень до комплексних. Саме на комплексній площині ґрунтуються всі основні методи розрахунку електричних кіл синусоїдальної напруги, що дає змогу відобразити параметри на комплексній площині графічно.

Список літератури

- Бессонов, Л. А. (2016). *Теоретические основы электротехники. Электрические цепи* (12-е вид.). Москва: Высшая школа.
- Колот, О. В., Коновалов, В. А., Шелаєв, І. П., Марилов, М. Г., & Кірієнко, Т. В. (2012). *Електричні кола*. Краматорськ: Донбаська державна машинобудівна академія.
- Розводюк, М. П., & Блінкін, Є. Я. (2008). *Електротехніка*. Вінниця: Вінницький національний технічний університет. <http://ir.lib.vntu.edu.ua/handle/123456789/5021>

Математичне моделювання взаємодії пружного півпростору і жорсткої основи за появи міжконтактного зазору по кільцевій або круговій області під дією стоків тепла

М. М. Микитин, Р. М. Мартиняк, Х. І. Середницька

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів, Україна
labmtd@iapmm.lviv.ua*

Запропоновано математичну модель контактної взаємодії пружного теплопровідного півпростору та жорсткої термоізолюваної основи за появи між ними локального розшарування по круговій або кільцевій області під дією розподілених по колу стоків тепла. Розглянуті осесиметричні контактні задачі термопружності зведено до інтегрального рівняння типу Абеля та сингулярного інтегрального рівняння відносно висоти утвореного зазору, які відповідно розв'язано аналітично та числово. Проаналізовано залежності форми зазору та нормальних контактних напружень від відстані між стоком тепла й поверхнею півпростору та від інтенсивності стоку тепла.

Ключові слова: пружний півпростір, жорстка основа, коловий стік тепла, кругове і кільцеве розшарування.

При взаємодії тіл з узгодженими поверхнями між ними можуть виникати зазори під дією силових і теплових чинників, локалізованих у підповерхневих областях. У праці Monastyrskyy та Mykytyn (2011) зроблено огляд досліджень розшарувань між тілами, зумовленими механічними навантаженнями. У Comninou та Dundurs (1980), Krishtafovich та Martynyak (1998, 1999), Martynyak та Chumak (2009) вивчено термомеханічне порушення контакту півпросторів, зумовлене локальними ділянками з термоопором або термоізоляцією на поверхні розмежування. У Мартиняк (1998) вивчено розшарування на лінії контакту двох півплощин, зумовлене підповерхневим круговим включенням в одній з них при нагріванні спряжених тіл.

Тут досліджено безфрикційну взаємодію пружного півпростору та жорсткої термоізолюваної основи, що взаємно притискаються за появи між ними кругового або кільцевого зазору під дією в півпросторі на відстані d від його поверхні по колу радіуса R стоку тепла сталої інтенсивності. Задача сформульована в рамках лінійної теорії термопружності.

Спочатку побудовано аналітичний розв'язок задачі термопружності для півпростору за повного контакту з основою. Аналіз даного розв'язку показав, що стік тепла, розподілений по колу при певному співвідношенні параметрів може спричинити кільцеве або кругове відшарування.

З появою можливого відшарування задачу було переформульовано. Записано крайові умови на ділянці контакту та ділянці зазору. Для визначення напружено-деформованого стану використано метод суперпозиції. Розв'язок задачі подано у

вигляді суми розв'язків задачі про повний контакт та задачі про збурення напружено-деформованого стану, зумовлене локальним відшаруванням.

Для знаходження розв'язку задачі з кільцевим відшаруванням (Микитин та ін., 2017) використано метод функцій міжконтактних зазорів (Мартиняк, 2000) та інтегральне перетворення Ганкеля. Компоненти тензора напружень і вектора переміщень подано через висоту зазору між півпростором і основою, для визначення якої, використовуючи методику Erdogan (1968), отримано сингулярне рівняння. Для його числового розв'язання застосовано метод колокацій.

Для задачі з круговим відшаруванням побудовано аналітичний розв'язок, використовуючи методику Monastyrskyy та Mykityn (2011), що базується на інтегральному перетворенні Ганкеля, зведенні задачі до інтегрального рівняння Абеля та застосуванні формули його обернення.

Для визначення наперед невідомих радіусів зазору використано умови плавного змикання берегів зазору.

Проаналізовано залежності форми зазору й нормальних контактних напружень від інтенсивності стоку тепла та відстані від нього до поверхні півпростору. Показано, що висота й радіус зазору зростають зі збільшенням інтенсивності стоку тепла і зменшуються зі збільшенням відстані від стоку до поверхні півпростору. Нормальні контактні напруження ззовні зазору за віддалення від нього монотонно спадають до напружень, прикладених на нескінченності.

Список літератури

- Comninou, M., & Dundurs, J. (1980). On lack of uniqueness in heat conduction through a solid to solid contact. *J. Heat Transfer*, 102(2), 319–323 <https://doi.org/10.1115/1.3244281>
- Erdogan, F. F. (1968). Simultaneous dual integral equations with trigonometric and Bessel kernels. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 48(4), 217–225. <https://doi.org/10.1002/zamm.19680480402>
- Krishtafovich, A. A., & Martynyak, R. M. (1998). Thermoelastic contact of anisotropic half spaces with thermal resistance. *International Applied Mechanics*, 34(7), 629–634. <https://doi.org/10.1007/BF02702067>
- Krishtafovich, A. A., & Martynyak, R. M. (1999). Lamination of anisotropic half-spaces in the presence of contact thermal resistance. *International Applied Mechanics*, 35(2), 159–164. <https://doi.org/10.1007/BF02682149>
- Martynyak, R. M., & Chumak, K. A. (2009). Thermoelastic delamination of bodies in the presence of a heat-conducting filler of the intercontact gap. *Materials Science*, 45(4), 513–522. <https://doi.org/10.1007/s11003-010-9209-0>
- Monastyrskyy, B. Y., & Mykityn, M. M. (2011). Axially symmetric problem of local separation of an elastic half-space from a rigid base due to a point source of cooling. *Journal of Mathematical Sciences*, 178(5), 467–480. <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0563-8>
- Мартиняк, Р. М. (1998). Порушення контакту півпросторів при термомеханічній дії підповерхневого включення. *Доп. НАН України*, (12), 71–77.
- Мартиняк, Р. М. (2000). Метод функцій міжконтактних зазорів у задачах локального порушення контакту пружних півпросторів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 43(1), 102–108.
- Микитин, М. М., Середницька, Х. І., Монастирський, Б. Є., & Мартиняк, Р. М. (2017). Кільцеве розшарування між тілами за локального охолодження коловим стоком тепла. *Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології*, (26), 55–62. <http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/article/view/16>

Кадаванне інфармацыі на аснове выкарыстання сумежных класаў кода

А. І. Міцюхін

*Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт інфарматыкі і радыёэлектронікі,
Інстытут інфармацыйных тэхналогій, Мінск, Беларусь
mityuhin@bsuir.by*

У артыкуле разглядаецца прыдатнасць аперацыі над сумежнымі класамі для абароны інфармацыі кадаванай групавым перашкодаўстойлівым кодам. Аналізуецца магчымасць перахопу інфармацыі у двайковым сіметрычным канале.

Ключавыя словы: перашкодаўстойлівы код, група, падгрупа, сумежныя класы, вектар памылка, праўдападабенства, абарона інфармацыі.

Увядзенне. Асновай пабудовы лінейных перашкодаўстойлівых $[n, k]$ -кодаў з'яўляецца іх алгебраічная сістэма. Лінейны сістэматычны групавой $[n, k]$ -код над полям Галуа можа задавацца ў выглядзе падгрупы некаторай канчатковай групы G . Параметры n і k вызначаюць, адпаведна, даўжыню і памернасць кода. Кожнаму з 2^k інфармацыйных вектараў $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ блокавай крыніцы U^K можа адпавядаць элемент падгрупы H , запісаны ў выглядзе n -мернага вектара $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ кода.

Аптымальным метадам дэкадавання любога лінейнага групавога $[n, k]$ -кода з'яўляецца метада, заснаваны на аперацыі раскладання групы G на сумежныя класы па падгрупе H . Такое дэкадаванне эквівалентна да метаду максімальнага праўдападабенства. У працы разглядаецца выкарыстанне аперацыі раскладання групы па $[n, k]$ -коду для абароны інфармацыі ад перахопу ў двайковым сіметрычным канале (ДСК) (Міцюхін, 2019).

Тэарэтычныя прынцыпы. Прымаем у асноўным канале імавернасць памылкі $p = 0$, а у канале перахопу $0 < p < 0,5$. У агульным выпадку, дэкадаванне зводзіцца да аналізу стандартнага размяшчэння элементаў табліцы, якая апісвае аперацыю раскладання групы G па падгрупе H . Табліца дэкадавання складаецца з $2^{n-k} = 2^r$ радкоў, дзе r — пазначае лік праверачных сімвалаў кода. Радкі табліцы ўтвараюць мноства $C_r = \{C_i\}, i = 1, \dots, 2^r$ сумежных класаў. Сумежны клас $C_1 = \{X_i\}, i = 1, \dots, 2^k$ — гэта усе кодавыя словы кода. Табліца змяшчае $2^r \cdot 2^k = 2^n$ n -мерных вектараў. Вылічальная і часовая складанасць дэкадавання залежыць ад даўжыні n вектара. Напрыклад, у выпадку $n = 200$ і хуткасці кода $R = \frac{k}{n} = \frac{1}{2}$, табліца змяшчае $\approx 10^{30}$ вектараў. Мяркуецца, што перахопніку вядомыя метады кадавання і дэкадавання ў асноўным канале. Аднак, не маючы дастатковых звестак аб варыянце раскладання групы G на сумежныя класы, здзейсніць эфектыўнае дэкадаванне на мностве $\approx 10^{30}$ вектараў практычна немагчыма.

Няхай усе словы $\{X\}$ аднолькавай імавернасці. На выхадзе ДСК перахопнік мае да аналізу вектар

$$Y = X + E, \quad (1)$$

дзе $Y = (y_1, \dots, y_n)$ — выхад канала, $E = (e_1, \dots, e_n)$ — шумавы вектар, які замінае дакладнаму дэкадаванню ў канале падслухоўвання.

Для паскарэння дэкадавання перахопнік можа выкарыстоўваць наступную тэарэму.

Тэарэма (Мак-Вільямс & Слоэн, 1979). *Маецца ўзаемна адназначнае адпаведнасць паміж сіндромамі і сумежнымі класамі, а менавіта: два вектары a і b знаходзяцца ў адным і тым жа сумежным класе $[n, k]$ -коду, калі і толькі калі маюць адзін і той жа сіндром.*

Алгарытм дэкадавання ўключае ў сябе выкананне наступных паслядоўных лінейных пераўтварэнняў і аперацый:

– вылічэнне сіндрому

$$S = YH^T = YH^T + EH^T = EH^T,$$

дзе у якасці ядра пераўтварэння выступае правярачная матрыца кода;

– знаходжанне па S адпаведнага сумежнага класа і вектара памылак E ;

– атрыманне вектара $\tilde{X} = (Y - E)$;

– атрыманне па $\tilde{X}$ інфармацыйнага вектара u .

Відавочна, што наяўнасць вектара X ў сумежным класе C_1 можа спрашчаць працэдуру дэкадавання як у асноўным канале, гэтак і на выхадзе ДСК, дзе назіраецца працэс Y . Нявызначанасці атрымання інфармацыі ня менш, чым некаторая велічыня, можна дасягнуць, калі мноства $\{X\}$ размеркаваць па усей n -мернай прасторы, а не ў адным сумежным класе. Сумежныя класы $\{C_i\}$ не перасякаюцца. Тады для адназначнага дэкадавання сігналаў у асноўным канале кожнаму класу C_i можна паставіць у адпаведнасць адно і толькі адно слова X_i . Выкананне такога супастаўлення здзяйсняльна, калі раскладанне групы парадку G рэалізаваць па падгрупе H парадку 2^r . Для гэтага варта перайсці да дуальнага $[n, n - k]$ -коду. Тады любы вектар $Y \neq X_i$ скажоны шумам, але які знаходзіцца ў сумежным класе C_i можа выкарыстоўвацца для перадачы па ДСК.

Далей скарыстаем энтрапійны падыход для ацэнкі ступені абароны інфармацыі за кошт размеркавання усіх вектараў $\{X\}$ па мноству $\{C\}$ сумежных класаў і выкарыстання шумавога працэсу. Відавочна, што надзейная абарона інфармацыі звязана з ацэнкай сярэдняй ўзаемнай інфармацыя I_u на выхадзе ДСК. Няхай першасная крыніца з алфавітам $U = \{0, 1\}$ характарызуецца імавернасцямі $p(u_0) = p(u_1)$. Сярэдняя колькасць інфармацыі на слова n даўжынёй вызначаецца як

$$I_u = \frac{k}{n} H(U) - H(U|Y), \quad (2)$$

дзе $H(U) = \sum_{u_i \in U} p(u_i) \log_2(p(u_i))$ — ентрапія на ўваходзе ДСК,

$H(U|Y) = \sum_{u_i \in U} \sum_{y_j \in Y} p(u_i, y_j) \log_2(p(u_i|y_j))$ — умоўная ентрапія ДСК, $p(u_i|y_j)$ —

сумесная імавернасць сімвалаў ўваходу і выхаду ДСК, $p(u_i|y_j)$ апастэрыёрная імавернасць сімвалаў ДСК.

Велічыня $H(U|Y)$ вызначае сярэдняю колькасць страчанай інфармацыі з-за ўздзеяння шумавога вектара E . З (2) вынікае ўмова забеспячэння надзейнай абароны інфармацыі ад перахопу

$$\frac{k}{n} H(U) = H(U|Y).$$

Для коду над полям $GF(2)$ ентрапія ДСК апісваецца функцыяй Шэнана

$$H(p) = H(U|Y) = -[p \log_2 p + (1-p) \log_2(1-p)] \quad (3)$$

Па велічыне p вызначаецца вага вектара E даўжынёй n . З улікам роўнасці $p(u_0) = p(u_1)$ і (3) атрымліваем стасунак

$$k \leq nH(U|Y) = n[-p \log_2 p - (1-p) \log_2(1-p)]. \quad (4)$$

Выраз (4) адлюстроўвае ўзаемасувязь параметраў дуальнага $[n, n-k]$ -коду, вектару E і верагоднасці p у ДСК.

Прыклад. Няхай $n = 100$, $p = 0,1$. Функцыя Шэнана (4) $H(p) = 0,469$. Тады інфармацыйны параметр $k \leq 46$. Памернасць кода, які выкарыстоўваецца для стварэння табліцы стандартнага размяшчэння, вызначаецца як $(n-k) \geq 54$. Лік сумежных класаў $|C| \geq 2^{46}$. У кожным сумежным класе змяшчаецца $M \geq 2^{54}$ вектараў даўжынёй $n = 100$. Ажыццявіць эфектыўнае сіндромнае дэкадаванне у канале перахопа, калі лік вектараў сіндромаў $|S| \geq 2^{46}$ практычна немагчыма.

Высновы. Значная нявызначанасць выбару сумежнага класа кода, нявызначанасць выбару дакладнага слова у сумежным класе, значныя сіндромныя вылічальныя выдаткі дазваляюць с дастатковай надзейнасцю абараняць інфармацыю кадаванай с выкарыстаннем сумежных класаў.

Спіс лitarатуры

Мак-Вільямс, Ф. Д., & Слоэн, Н. Д. А. (1979). *Теория кодов, исправляющих ошибки*. Москва: Связь.
 Міцюхін, А. І. (2018). Абарона кадаванага сігнала ад перахопу. У *Матэрыялах Сьомої Міжнародной навукова-практычнай канферэнцыі «Математика в сучасному тэхнічным універсітэці»* (с. 101–104). Вінниця: Видавець ФОП Кушнір Ю. В.
<http://matan.kpi.ua/public/files/2018/mvstu7/МСТУ7.pdf>

Метод наближеного розв'язку нелінійного інтегрального рівняння руху фронту руйнування внаслідок втоми в тонкій нескінченній пластині

А. В. Плащинська

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
creep@inmech.kiev.ua

Розглянуто задачу моделювання розповсюдження тріщини втоми в тонкій нескінченній пластині при двовісному багатоцикловому асиметричному розтягу-стиску. Визначальні рівняння моделі отримано з наближеного аналітичного розв'язку інтегрального рівняння руху фронту руйнування.

Ключові слова: перетворення Лапласа, неповна гамма-функція, тріщина втоми, асиметричний цикл, двовісний розтяг-стиск.

Побудова математичної моделі розповсюдження тріщини втоми є актуальною задачею механіки руйнування і полягає в установленні залежності швидкості тріщини від параметрів циклічного навантаження. На основі сумісного розгляду концепцій механіки руйнування та механіки неперервного пошкодження побудовано двохстадійну модель розповсюдження тріщини втоми для нескінченних пластин при одновісному симетричному циклічному навантаженні (Голуб & Плащинська, 1994), для скінченних пластин при одновісному циклічному асиметричному навантаженні (Голуб & Плащинська, 2005, 2018). Визначальні співвідношення моделі отримані з розв'язку крайової задачі теорії пружності з рухомою границею та інтегрального рівняння руху фронту руйнування внаслідок втоми. Адекватність отриманих за моделлю результатів підтверджено задовільним збігом з даними експериментів.

У статті представлено метод наближеного аналітичного розв'язку інтегрального рівняння руху фронту руйнування в тонкій нескінченній ізотропній пластині при двовісному асиметричному розтягу-стиску.

1. Постановка задачі. Розгляньмо процес розповсюдження тріщини з початковою напівдовжиною ℓ_0 в тонкій нескінченній пластині з ізотропного лінійно-пружного матеріалу (рис. 1). Береги тріщини не навантажені, а зовні прикладене двовісне асиметричне циклічне навантаження

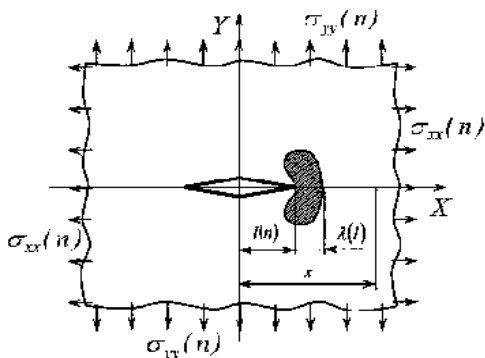


Рис. 1

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(n) = (\sigma_m)_{ij} + (\sigma_a)_{ij} \sin(2\pi n), \\ (\sigma_{\max})_{ij} = (\sigma_m)_{ij} + (\sigma_a)_{ij} < \sigma_Y, \end{cases} \quad (1.1)$$

де $i = j = 1, 2$ ($x = 1, y = 2$), $(\sigma_{\max})_{ij}$, $(\sigma_m)_{ij}$, $(\sigma_a)_{ij}$ — максимальні, середні та амплітуди циклічних напружень, відповідно; n — число циклів навантаження; σ_Y — межа течії матеріалу пластини.

Еквівалентні (1.1) за часом до руйнування напруження симетричного циклу записуємо у вигляді (Голуб та ін., 2010)

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(n) = (\sigma_{a,eqv})_{ij} \sin(2\pi n) & i = j = 1, 2; \\ (\sigma_{a,eqv})_{ij} = \left[\cos \left[\frac{\pi (\sigma_m)_{ij}}{2 \sigma_B} \right] \right]^{-\eta} (\sigma_a) & , \max((\sigma_{a,eqv})_{ij}) < \sigma_Y \end{cases} \quad (1.2)$$

де $(\sigma_{a,eqv})_{ij}$ — еквівалентні амплітудні напруження симетричних циклів; σ_B — межа міцності матеріалу пластини при розтягу; η коефіцієнт чутливості матеріалу пластини до асиметрії циклу навантаження при одновісному розтягу-стиску.

Уважаємо накопичення пошкоджень $\omega(x, n)$ внаслідок втоми — основним механізмом процесу розповсюдження тріщин втоми. Тріщину втоми розглядаємо як вузьку гострокінцеву щілину розташовану вздовж осі Ox . Уважаємо, що розповсюдження тріщини здійснюється стрибками на довжину циклічної пластичної зони $\lambda(\ell(n))$ (Rice, 1967) вздовж осі Ox , а накопичення пошкоджень $\omega(x, n)$ відбувається в півциклах розтягу.

Еволюційне рівняння кінетики накопичення пошкоджень унаслідок втоми при двовісному циклічному навантаженні записуємо у вигляді

$$\frac{\partial \omega(x, n)}{\partial n} = D \left[\frac{(\Delta \sigma_{eqv}(x, n))^q}{1 - \omega(x, n)} \right] \quad (1.3)$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} \max \{ \omega[\ell_0 + \lambda(\ell_0), \theta, n] \} = 1; & 0 \leq n \leq n_*; \\ \max \{ \omega[\ell(n) + \lambda(\ell(n)), \theta, n] \} = 1; & 0 \leq n \leq n_* \end{cases}, \quad (1.4)$$

де n_* — тривалість інкубаційної стадії, $\Delta \sigma_{eqv}(x, n)$ — еквівалентне напруження, що зводить плоский напружений в околі вершини прямолінійної тріщини до одновісного (Саврук, 1988),

$$\Delta \sigma_{eqv}(x, n) = \frac{(\sigma_{a,eqv})_{yy}(n)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\ell(n)}{x - \ell(n)}} \quad (1.5)$$

Задача полягає в отриманні співвідношень для тривалості інкубаційного періоду та стадії розповсюдження тріщин втоми при двовісному асиметричному розтягу-стиску.

2. Двохстадійна модель розповсюдження тріщин втоми. Інтегруючи еволюційне рівняння (1.3) з урахуванням умов локального руйнування (1.4), закону розподілення напружень в околі вершини тріщини (1.5) та двостадійності руйнування, отримуємо інтегральне рівняння руху фронту руйнування від втоми

$$\begin{aligned}
1 - (1 + q)D \left[\frac{(\sigma_{a,eqv})_{yy}}{\sqrt{2}} \right]^q \int_0^{n_*} \left[\frac{\ell_0}{\ell(n) + \lambda(\ell(n)) - \ell_0} \right]^{\frac{q}{2}} d\tau = \\
= (1 + q)D \left[\frac{(\sigma_{a,eqv})_{yy}}{\sqrt{2}} \right]^q \int_{n_*}^n \left[\frac{\ell(\tau)}{\ell(n) + \lambda(\ell(n)) - \ell(\tau)} \right]^{\frac{q}{2}} d\tau.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Для розв'язання (2.1) спрощуємо структуру рівняння шляхом запису $\lambda(\ell(n)) = \mu\ell(n)$ та переходу від розмірних величин до безрозмірних за допомогою заміни

$$\begin{aligned}
\alpha = \frac{n}{n_R}; \quad \alpha_* = \frac{n_*}{n_R}; \quad \alpha_1 = \frac{\tau}{n_R}; \quad \sigma = \frac{\Delta\sigma_{eqv}}{(\sigma_{a,eqv})_{yy}}; \quad \delta = \frac{\ell}{\ell_0}; \quad \nu = \frac{q}{2}; \\
n_R = \frac{1}{(1 + q)D(\sigma_{a,eqv})_{yy}},
\end{aligned} \tag{2.2}$$

де n_R — число циклів до руйнування гладкого циліндричного зразка.

Таким чином (2.1) перетвориться в наступне рівняння

$$1 - 2^{-\nu} \alpha_* J_* \int_0^{\alpha_*} \left[\frac{1}{(1 + \mu)\delta(\alpha) - 1} \right]^\nu d\alpha_1 = 2^{-\nu} \int_{\alpha_*}^{\alpha} \left[\frac{\delta(\alpha_1)}{\delta(\alpha)(1 + \mu) - \delta(\alpha_1)} \right]^\nu d\alpha_1. \tag{2.3}$$

Запроваджуємо в (2.3) наступні змінні $\delta(\alpha) = z$, $\delta(\alpha_1) = \xi$, $\alpha_1 = \varphi(\xi)$, $d\alpha_1 = \phi'(\xi)d\xi$, і в результаті отримуємо лінійне інтегральне рівняння Вольтери I роду

$$1 - 2^{-\nu} \alpha_* J_* [z(1 + \mu) - 1]^{-\nu} = 2^{-\nu} \int_1^z \left[\frac{\xi}{z(1 + \mu) - \xi} \right]^\nu \phi'(\xi) d\xi \tag{2.4}$$

з різницеvim ядром відносно функції $\xi^\nu \phi'(\xi)$. Відзначимо також, що при $z = 1$ ліва частина рівняння дорівнює нулю, так що $\alpha_* J_* = (2\mu)^\nu$.

До рівняння (2.4) застосуємо перетворення Лапласа (Лаврентьев & Шабат, 1965), у цьому разі рівняння для оригіналів перетворюється на рівняння для зображень

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} - 2^{-\nu} \alpha_* J_* e^{-\frac{p}{1+\mu}} \left[\frac{1+\mu}{p} \right]^{1-\nu} \frac{1}{1+\mu} \Gamma\left(1 - \nu, -\frac{p}{1+\mu}\right) = \\
= 2^{-\nu} \int_0^\infty (\tau + 1)^\nu \phi'(\tau + 1) e^{-p(\tau+1)} \left[e^{\frac{p\mu(\tau+1)}{1+\mu}} \frac{1}{1+\mu} \left[\frac{1+\mu}{p} \right]^{1-\nu} \Gamma\left(1 - \nu, \frac{p\mu(\tau+1)}{1+\mu}\right) \right] d\tau.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

За допомогою апроксимацій неповних гамма-функцій у вигляді нерівностей (Luke, 1969) після ряду перетворень отримаємо алгебричне рівняння

$$p^{-1} - 2^{-\nu} \alpha_* \nu^{-1} = 2^{-\nu} [\mu]^{1-\nu} \nu^{-1} \Phi(p) \quad (2.6)$$

де $\Phi(p)$ — зображення невідомої функції-оригіналу $(1 + \tau)\phi'(\tau + 1)$.

Наближене рішення відносно зображення $\Phi(p)$ записуємо у вигляді

$$\Phi(p) = 2^{\nu} [\mu]^{\nu-1} \nu p^{-1}. \quad (2.7)$$

Вернімося до оригіналів, тоді (2.7) перетвориться до виду

$$\phi'(z) = 2^{\nu} [\mu]^{\nu-1} z^{-1}, \quad (2.8)$$

Виконуємо зворотній перехід від $z \rightarrow \delta(\alpha)$

$$\phi'(z) = \phi'(\delta(\alpha)) = \frac{d\alpha}{d\delta(\alpha)} \quad (2.9)$$

Після переходу від безрозмірних величин до розмірних отримаємо диференціальне рівняння для швидкості розповсюдження тріщини втоми у вигляді

$$\frac{d\ell}{dn} = \frac{\ell}{n_R} 2^{-\nu} [\mu]^{1-\nu} \nu^{-1} \quad (2.10)$$

Застосуємо заміни (2.2) до рівняння (2.10). Тоді система визначальних рівнянь двостадійної моделі розповсюдження тріщини втоми має вигляд

$$\begin{cases} \frac{d\ell}{dn} = D \left(1 + \frac{1}{q} \right) \left[\cos \left[\frac{\pi}{2} \frac{(\sigma_m)_{yy}}{\sigma_B} \right] \right]^{-\eta} (\sigma_a)_{yy} \sqrt{\ell}^q (2\lambda(\ell))^{1-\frac{q}{2}} \\ n_* = \left[(1 + q) D \left[\cos \left[\frac{\pi}{2} \frac{(\sigma_m)_{yy}}{\sigma_B} \right] \right]^{-\eta} (\sigma_a)_{yy}^q \left[\frac{\ell_0}{2\lambda(\ell_0)} \right]^{\frac{q}{2}} \right]^{-1}, \end{cases} \quad (2.11)$$

де рівняння для розрахунку тривалості інкубаційного періоду отримано з (2.1) при $n = n_*$.

Список літератури

- Luke, Y. L. (1969). *The special functions and their approximations*. (Vol. 2). New York: Academic press.
- Rice, J. R. (1967). Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue. J. Grosskreutz (Ed.), *STP415-EB Fatigue Crack Propagation* (pp. 247–311). <https://doi.org/10.1520/STP47234S>
- Голуб, В. П., & Плащинская, А. В. (1994). Модель усталостного разрушения тонких изотропных пластин с трещинами при осевом нагружении. *Прикл. механика*, 30(7), 53–63.
- Голуб, В. П., & Плащинская, А. В. (2005). Феноменологическая модель роста усталостной трещины в идеально пластических бесконечных пластинках при одноосном симметричном знакопеременном нагружении. *Прикл. механика*, 41(12), 116–127.
- Голуб, В. П., & Плащинская, А. В. (2018). К теории усталостных трещин нормального отрыва в тонких изотропных пластинах конечных размеров при одноосном растяжении-сжатии. *Прикл. механика*, 54(2), 79–99.

- Голуб, В. П., Пелых, В. Н., & Погребняк, А. Д. (2010). Прогнозирование усталостной долговечности призматических металлических стержней при асимметричном растяжении-сжатии методом эквивалентных напряжений. *Вісник національного технічного університету України «КПІ». Серія «Машинобудування», (58), 177–182.* <http://visnyk-nmti.kpi.ua/images/stories/pdf/58/177.pdf>
- Лаврентьев, М. А., & Шабат, Б. В. (1965). *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва: Наука.
- Саврук, М. П. (1988). *Механика и прочность материалов: Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами*. Киев: Наукова думка.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Аналіз надійності роботи триканальної системи масового обслуговування

Н. В. Полішук, О. І. Кушлик-Дивульська

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

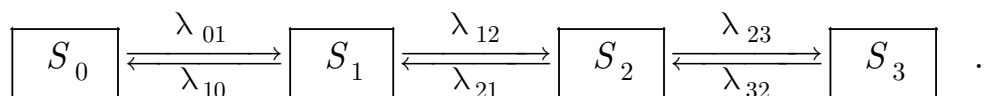
nvpolinv@gmail.com, olgakushlyk64@gmail.com

Розглянуто триканальну систему масового обслуговування з відмовами, яка може перебувати в чотирьох станах, наведені матриці інтенсивностей переходів, рівняння фінальних станів і формули Ерланга для ймовірностей станів системи. Для виробничого комплексу із трьох машин і однієї ремонтної бригади досліджено питання надійності системи.

Ключові слова: система масового обслуговування, ймовірності станів, надійність.

Багатоканальні системи масового обслуговування (СМО) широко використовуються в прикладних задачах. Вони розглядаються також в дисципліні «Дослідження операцій», «Теорії надійності», «Теорії масового обслуговування» для економічних і технічних спеціальностей вищих учбових закладів. Для цих систем досліджуються задачі ефективності, надійності роботи.

Маємо триканальну СМО з відмовами, яка може перебувати в чотирьох станах: S_0 , S_1 , S_2 , S_3 . Граф системи має вигляд:



У системі протікає найпростіший (тобто стаціонарний ординарний і без післядії) потік, який переводить її із стану S_i у стан S_j , $i, j = 0, 1, 2, 3$, з інтенсивністю λ_{ij} .

Матриця інтенсивностей переходів для станів системи має вигляд:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{00}^* & \lambda_{01} & \lambda_{02} & \lambda_{03} \\ \lambda_{10} & -\lambda_{11}^* & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & -\lambda_{22}^* & \lambda_{23} \\ \lambda_{30} & \lambda_{31} & \lambda_{32} & -\lambda_{33}^* \end{pmatrix}^T ,$$

де λ_{ii}^* , $i = 0, 1, 2$ — сумарна інтенсивність потоків, які виводять систему із стану S_i .

Складемо матрицю інтенсивностей переходів для даної системи:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{01} & \lambda_{01} & 0 & 0 \\ \lambda_{10} & -(\lambda_{10} + \lambda_{12}) & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & \lambda_{21} & -(\lambda_{21} + \lambda_{23}) & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_{32} & -\lambda_{32} \end{pmatrix}^T.$$

Позначимо $p_i(t)$ — ймовірність знаходження системи у стані S_i , $i = 0, 1, 2$, у момент часу t . Ці ймовірності задовольняють системі диференціальних рівнянь Колмогорова (Кремер и др., 2000):

$$\Lambda \cdot \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_0(t) \\ p'_1(t) \\ p'_2(t) \\ p'_3(t) \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} p'_0 = -\lambda_{01}p_0 + \lambda_{10}p_1, \\ p'_1 = \lambda_{01}p_0 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})p_1 + \lambda_{21}p_2, \\ p'_2 = \lambda_{12}p_1 - (\lambda_{21} + \lambda_{23})p_2 + \lambda_{32}p_3, \\ p'_3 = \lambda_{23}p_2 - \lambda_{32}p_3, \end{cases}$$

з початковим умовами: $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = 0$, $p_2(0) = 0$, $p_3(0) = 0$.

У кожний момент часу t , для функцій $p_i(t)$ виконуються співвідношення:

$$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1.$$

У теорії випадкових процесів доведено (Кремер и др., 2000): якщо кількість станів системи скінченна і з кожного з них можна за скінченне число кроків перейти в будь-який інший стан, то існують фінальні ймовірності станів, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

які задовольняють системі лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} -\lambda_{01}p_0 + \lambda_{10}p_1 = 0, \\ \lambda_{01}p_0 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})p_1 + \lambda_{21}p_2 = 0, \\ \lambda_{12}p_1 - (\lambda_{21} + \lambda_{23})p_2 + \lambda_{32}p_3 = 0, \\ \lambda_{23}p_2 - \lambda_{32}p_3 = 0, \end{cases}$$

при умові $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Ці ймовірності можна визначити за формулами Ерланга (Поліщук та ін., 2011):

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{32}\lambda_{21}\lambda_{10}} \right)^{-1}, \quad p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0, \quad p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0, \quad (1)$$

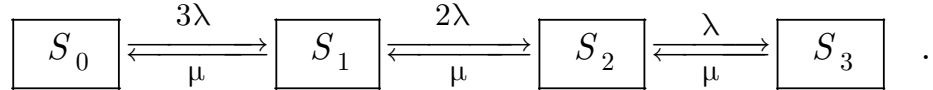
$$p_3 = \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{32}\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0, \quad p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Запропонована система масового обслуговування може бути використана для аналізу надійності роботи промислових комплексів, які містять декілька каналів обслуговування. В роботах (Поліщук, 2016а, 2016б) система масового обслуговування розглянута для дослідження роботи поліграфічного комплексу із двох друкувальних машин. Застосуємо цю систему для дослідження роботи виробничого комплексу із трьох потужностей (машин) і однієї ремонтної бригади. Розглянемо питання надійності цієї системи і дослідимо її на максимум.

Позначимо початковий стан системи S_0 — усі три машини працюють, S_1 — дві машини працюють, одна ремонтується, S_2 — одна працює, дві машини в ремонті, S_3 — три машини в ремонті. Нехай інтенсивність виходу з ладу однієї машини дорівнює $\lambda, \lambda > 0$, а інтенсивність потоку ремонту машини $\mu, \mu > 0$.

При переході із стану S_0 у стан S_1 з ладу може вийти одна із трьох працюючих машин, тому інтенсивність переходу дорівнює 3λ . При переході із стану S_1 у стан S_2 може вийти з ладу одна із двох працюючих машин, тому інтенсивність дорівнює 2λ . Зворотній потік ремонту має однакову інтенсивність μ .

Тоді граф системи буде мати вигляд



За формулами Ерланга (1) маємо:

$$p_0 = \left(1 + 3\rho + 6\rho^2 + 6\rho^3 \right)^{-1}, \quad p_1 = 3\rho p_0, \quad p_2 = 6\rho^2 p_0, \quad p_3 = 6\rho^3 p_0, \quad (2)$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$

де $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ — зведена інтенсивність потоку.

Дослідімо питання надійності цієї системи. При послідовному з'єднанні станів, надійність визначають за формулою

$$N = p_0 p_1 p_2 p_3.$$

Тоді надійність системи, як функція зведеної інтенсивності, ураховуючи (2), має вигляд

$$N(\rho) = \frac{108\rho^6}{(1 + 3\rho + 6\rho^2 + 6\rho^3)^4}.$$

Досліджуємо цю функцію $N(\rho)$ на екстремум, похідна якої має вигляд

$$N'(\rho) = 648\rho^5 \frac{1 + 3\rho + 6\rho^2 + 6\rho^3 - 2\rho(1 + 4\rho + 6\rho^2)}{(1 + 3\rho + 6\rho^2 + 6\rho^3)^4}.$$

Тоді для знаходження екстремумів отримаємо рівняння

$$\rho^5(1 - 7\rho + 6\rho^2 - 6\rho^3) = 0. \quad (3)$$

Розв'язуючи (3) за формулами Кардано і врахувавши вигляд функції $N'(\rho)$, маємо

$$\rho_{\min} = 0, \rho_{\max} = 0,1616, N_{\max} = 0,00024.$$

Список літератури

- Кремер, Н. Ш., Прутко, Б. А. & Тришкин, И. М. (2000). *Исследование операций в экономике*. Москва: ЮНИТИ.
- Поліщук, Н. В. (2016а). Дослідження надійності деякої системи масового обслуговування. В *Матеріалах П'ятої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 89–90). Київ: НТУУ «КПІ». <http://matan.kpi.ua/public/files/2016/mvstu5/MSTU5.pdf>
- Поліщук, Н. В. (2016б). Застосування систем масового обслуговування в дисципліні «Дослідження операцій». В *Матеріалах Сімнадцятої Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука* (Т. 3, с. 310–311). Київ: НТУУ «КПІ». <http://matan.kpi.ua/public/files/kk2016/kravchuk2016-volume3.pdf>
- Поліщук, Н. В., Кушлик-Дивульська, О. І. & Орел, Б. П. (2011). *Дослідження операцій*. Київ: НТУУ «КПІ». <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/1092>

Математическое моделирование системы кондиционирования воздуха летательного аппарата

С. Г. Радченко, С. Н. Лапач

КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

lapach@ukr.net

Одной из форм управления сложными системами и процессами являются математические модели. При исследовании системы кондиционирования воздуха летательного аппарата в качестве плана эксперимента использован ротатбельный план Бокса на кубе B_2 . По результатам проведенного эксперимента построены адекватные, статистически значимые математические модели критериев качества системы кондиционирования воздуха в зависимости от влияющих факторов.

Ключевые слова: математическое моделирование, сложные системы, системы кондиционирования воздуха.

Использование современных технических систем требует удобных форм управления ими. Такой формой управления являются математические модели (Душинский и др., 1977), (Радченко, 2011). Технические системы являются наукоемкими изделиями, их модели целесообразно получать, используя экспериментально-статистический подход, применять теорию планирования эксперимента, кибернетический подход к описанию объекта моделирования.

Летательные аппараты (ЛА) эксплуатируются в различных климатических зонах с различными — низкими и высокими — температурами внешней среды. Для создания необходимых условий в кабине ЛА предусмотрена система кондиционирования воздуха (СКВ) — наукоемкий объект. Для управления СКВ целесообразно использовать математические модели.

Априорный анализ СКВ позволил сформулировать гипотезу об адекватной структуре модели в виде модели 2-го порядка. В качестве плана эксперимента используется ротатбельный план Бокса B_2 .

Исследовались характеристики качества СКВ:

y_1 — весовой расход продувочного воздуха, G , кг/час;

y_2 — температура кабинного воздуха, t_k , °C;

y_3 — температура продувочного воздуха за турбохолодильником, t_x , °C;

y_4 — температура продувочного воздуха после ВВР, t_b , °C;

в зависимости от влияющих факторов

x_1 — давление воздуха на входе в систему, P , кг/см², пределы изменения 2,50...4,00;

x_2 — температура воздуха на входе в систему, t_{np} , °C, пределы изменения 200,0...300,0.

Структура математической модели имеет вид

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2.$$

Коэффициенты модели ортогональны друг к другу.

Рабочая матрица, уровни варьирования и результаты опытов эксперимента приведены в табл. 1. Каждый опыт выполнялся дважды.

Таблица 1. Рабочая матрица и результаты опытов

Кодированные значения уровней варьирования факторов	Факторы		Функции							
	Натуральное обозначение		Натуральное обозначение функций							
	P	$t_{\text{пр}}$	G	$t_{\text{к}}$	$t_{\text{х}}$	$t_{\text{в}}$				
	Кодированное обозначение		Формализованное обозначение функций							
	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4				
Звездное плечо –1,4142	2,50	200,0	Значения результатов повторных опытов							
Нижний уровень –1	2,72	214,6								
Основной уровень 0	3,25	250,0								
Верхний уровень 1	3,78	285,4								
Звездное плечо 1,4142	4,00	300,0	y_{11}	y_{12}	y_{21}	y_{22}	y_{31}	y_{32}	y_{41}	y_{42}
Опыт 1	2,72	214,6	180	182	37	35	18	19	49	49
2	3,78	214,6	258	254	30	30	5	8	53	55
3	2,72	285,4	179	178	43	42	29	29	51	51
4	3,78	285,4	248	248	35	35	17	15	55	56
5	2,50	250,0	162	164	40	41	25	27	48	51
6	4,00	250,0	269	270	32	32	11	10	56	56
7	3,25	200,0	222	221	32	33	8	11	49	51
8	3,25	300,0	212	213	41	41	24	26	53	55
9	3,25	250,0	218	216	34	36	17	18	51	52
10	3,25	250,0	215	217	35	36	15	18	49	52
11	3,25	250,0	215	216	35	37	15	18	51	53

По результатам эксперимента построены модели критериев качества СКВ

y_1, y_2, y_3, y_4 :

$$\hat{y}_1 = 216,23 + 36,89x_1 - 2,90x_2 - 1,38x_1x_2;$$

$$\hat{y}_2 = 36,00 - 3,19x_1 + 2,94x_2;$$

$$\hat{y}_3 = 17,41 - 5,87x_1 + 5,24x_2;$$

$$\hat{y}_4 = 52,09 + 2,34x_1 + 1,14x_2.$$

В табл. 2 приведены статистические характеристики вычисленных математических моделей.

Таблица 2. Статистические характеристики моделей

Параметры статистического анализа	Услов- ные обозна- чения	Значения параметров				При- меча- ния
		y_1	y_2	y_3	y_4	
Коэффициенты модели	b_0	216,17	35,50	16,83	51,33	
	b_1	36,89	−3,19	−5,87	2,34	
	b_2	−2,90	2,94	5,24	1,14	
	b_{12}	−1,38	−0,38	−0,25	−0,13	
	b_{11}	−0,15	0,22	0,65	0,71	
	b_{22}	0,23	0,47	0,15	0,33	
Доверительные интервалы для коэф- фициентов моделей	Δb_0	1,144	0,752	1,343	1,128	$t_{0,05}^{\text{крит}} =$ =2,16
	Δb_i	0,700	0,461	0,822	0,691	
	Δb_{ij}	0,991	0,651	1,163	0,977	
	Δb_{ii}	0,834	0,548	0,979	0,822	
Воспроизводимость результатов						
Среднеквадратичное отклонение	$s_{\text{восп}}$	1,297	0,853	1,523	1,279	
Число степеней свободы	f	11	11	11	11	
Экспериментальное значение G -критерия	$G^{\text{эксп}}$	0,43	0,25	0,18	0,25	
Критическое значение G -критерия	$G^{\text{крит}}$	0,57	0,57	0,57	0,57	
Уровень значимости	α	0,05	0,05	0,05	0,05	
Адекватность модели						
Экспериментальное значение F -критерия	$F^{\text{эксп}}$	2,67	1,05	0,57	0,25	
Критическое значение F -критерия	$F^{\text{крит}}$	3,41	3,41	3,41	3,41	
Уровень значимости	α	0,05	0,05	0,05	0,05	
Информативность модели						
Коэффициент множественной корреляции	R	0,9997	0,9948	0,9976	0,9849	
Экспериментальное значение F -критерия	$F^{\text{эксп}}$	10418,8	43,63	52,41	8,50	
Критическое значение F -критерия	$F^{\text{крит}}$	4,44	4,44	4,44	4,44	
Уровень значимости	α	0,01	0,01	0,01	0,01	

Все модели адекватны, информативны и статистически значимы.

Полученные математические модели позволяют построить графики зависимостей $y_i = f_i(x_1, x_2)$ и по ним выбирать режимы функционирования СКВ.

Пример поверхности отклика приведен для модели весового расхода продувочного воздуха на рис.1.

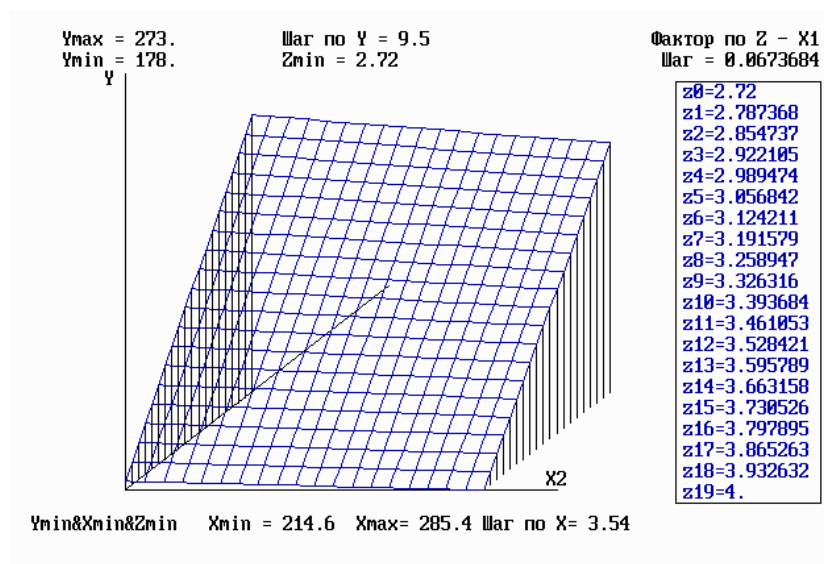


Рис. 1. Поверхность отклика для модели y_1

Список литературы

- Душинский, В. В., Пуховский, Е. С., & Радченко, С. Г. (1977). *Оптимизация технологических процессов в машиностроении*. Киев: Техника.
 Радченко, С. Г. (2011). *Методология регрессионного анализа*. Киев: «Корнійчук».

Об одном методе конкретизации функционала при определении параметров ядер наследственности в линейной теории вязкоупругости

В. С. Резник

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина;
creep@inmech.kiev.ua*

Предложен метод и изложены основные процедуры идентификации ядер наследственности линейно-вязкоупругих материалов с применением процедуры минимизации функционала. Критерием наилучшего согласования используется условие минимизации квадратичного отклонения расчетных значений ядер ползучести от экспериментальных. В качестве ядер наследственности используются дробно-экспоненциальные функции.

Ключевые слова: линейные вязкоупругие материалы, процесс ползучести, дробно-экспоненциальное ядро, параметры ядра, аппроксимация ядра, аппроксимация функции ползучести.

1. Введение. При решении прикладных задач линейной и нелинейной теории вязкоупругости важное место занимают методы определения вязкоупругих характеристик материала, которые в случае определяющих уравнений наследственного типа сводятся к отысканию ядер ползучести и релаксации. Структура ядер должна соответствовать наилучшему согласованию с экспериментальными данными, накладывающему существенные ограничения на аналитические выражения ядер и методы определения их параметров.

Нахождение параметров ядер наследственности, как правило, осуществляют по экспериментальным данным, которые проводятся на основе независимых испытаний на ползучесть по функции ползучести (Голуб та ін., 2009, 2012).

В настоящей работе предложен метод определения параметров ядер наследственности линейно вязкоупругих материалов исходя из условия минимизации функционала, построенного исходя из критерия наилучшего согласования расчетных значений ядер ползучести и экспериментальных исходя из гипотезы подобия изохронных диаграмм и диаграммы мгновенного деформирования.

2. Постановка задачи. Определяющее уравнение в нелинейной теории вязкоупругости, которое описывает процесс ползучести задается интегральным уравнением (Колтунов, 1976; Работнов, 1977)

$$\phi_0(\varepsilon(t)) = \sigma(t) + \lambda \int_0^t \tilde{K}(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau. \quad (1.1)$$

Здесь $\varepsilon(t)$ — полная деформация, включающая упругую компоненту ε^e и деформацию ползучести ε^c в моменты времени t и τ ; $\sigma(t)$, $\sigma(\tau)$ — действующее напряжение в моменты времени t и τ ; $\phi_0(\cdot)$ — функция, задающая диаграмму мгновенного деформирования; $\tilde{K}(t - \tau)$ — ядро ползучести; λ —

реологический параметр; t — время наблюдения; τ — время, предшествующее моменту наблюдения.

Для случая линейных вязкоупругих материалов $\phi_0(\cdot)$, которая в работе задается одночленной аппроксимацией в форме закона Гука

$$\phi_0(\varepsilon) = E\varepsilon, \quad (1.2)$$

где E — модуль упругости.

В качестве ядра наследственности рассматривается дробно-экспоненциальная функция (Работнов, 1977)

$$\tilde{K}(t - \tau) = \frac{1}{(t - \tau)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - \tau)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]} \quad (1.3)$$

Здесь α, β — параметры ядер наследственности, которые определяются из опытов на ползучесть или релаксацию; $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Задача заключается в построении функционала, позволяющего определить неизвестные параметры в (1.3) и выборе эффективного метода минимизации его ошибки с учетом дискретных значений ядер в области малых времен, исходя из гипотезы подобия изохронных диаграмм и диаграммы мгновенного деформирования.

2. Методика конкретизации функционала. Предложенная в работе методика справедлива, если выполняется гипотеза подобия изохронных диаграмм ползучести и диаграммы мгновенного деформирования. Считается, что единая диаграмма существует с заданной наперед точностью. Как правило рассматривается погрешностью δ в доверительном интервале $\pm 5\%$. Приведенные дискретные значения $\bar{\phi}_t(\varepsilon_i(t), 0)$ функций $\phi_t(\varepsilon_i(t), t_j)$ находим из соотношения

$$\bar{\phi}_t(\varepsilon_i(t), 0) = \overline{(1 + G(t_j))} \cdot \phi_t(\varepsilon_i(t), t_j) \quad (i = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, \ell}), \quad (2.1)$$

где коэффициент подобия имеет вид

$$\overline{1 + G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^q \{ \phi_0(\varepsilon_i(0), 0) \cdot \phi_t(\varepsilon_i(t), t_j) \}}{\sum_{i=1}^q \{ \phi_t(\varepsilon_i(t), t_j) \}^2}, \quad (2.2)$$

и осредняет значения функций $\overline{(1 + G(t_j))}$, полученных для каждой j -й изохронной диаграммы.

Аналитическое выражение для осредненной функции подобия $\overline{(1 + G(t_j))}$ может быть найдено по результатам аппроксимации дискретных значений $\overline{(1 + G(t_j))}$ функции сглаживающими кубическими сплайнами в виде

$$\overline{1 + G(t_j)} = A_j + B_j(t - t_j) + C_j(t - t_j)^2 + D_j(t - t_j)^3, \quad (2.4)$$

коэффициенты которого

$$B_j = \frac{\bar{G}_{j+1} - \bar{G}_j}{h_j} - \frac{h_j}{6}(2k_j + k_{j+1}); \quad C_j = \frac{k_j}{2}; \quad D_j = \frac{k_{j+1} - k_j}{6h_j}$$

найжены по результатам аппроксимации дискретных значений функции подобия (здесь $\bar{G}_j = 1 + G_j$ и $\bar{G}_{j+1} = 1 + G_{j+1}$ — табличные значения функции подобия в точках t_j, t_{j+1} ; k_j, k_{j+1} — коэффициенты сплайна; $h_j = t_j - t_{j+1}$).

3. Определение параметров ядер наследственности. Исходя из механического смысла ядра ползучести имеем, что ядро в теории вязкоупругости (1.1) является мерой скорости пропорционально скорости ползучести, то есть

$$K(t) = \frac{1}{\lambda} \frac{d(1 + G(t))}{dt}, \quad (3.1)$$

где все обозначения совпадают с принятыми выше.

Подставляя (2.4) в (3.1), получаем уравнение

$$\lambda K(t_j) = B_j + 2C_j(t - t_j) + 3D_j(t - t_j)^2, \quad (3.2)$$

которое позволяет рассчитывать дискретные значения $K(t_j)$ ядра ползучести $K(t)$ для произвольных моментов времени t_j .

Параметры ядер наследственности в (1.1) определяются по результатам аппроксимации дискретных значений ядер ползучести выбранным аналитическим выражением ядра. В работе аналитическое выражение ядра выбрано в форме дробно-экспоненциальной функции (1.3).

При реализации процедуры аппроксимации дискретные значения ядер ползучести, в области малых времен $\{0, t_*\}$, на которые влияют динамические эффекты мгновенного приложения нагрузки, учитываются с использованием функций уменьшающих их влияние на функционал. В этом случае задача сводится к минимизации функционала

$$F(\lambda, q_s) = \sum_{j=1}^{n_*} \left\{ p_j(t) [K(t_j) - \lambda K(t, q_s)] \right\}^2 + \sum_{j=n_*}^n [K(t_j) - \lambda K(t, q_s)]^2, \quad (3.3)$$

где функция $p_j(t)$ задается соотношением

$$p_j(t) = \frac{1}{1 + \left| \frac{K(t_j) - \lambda K(t, q_s)}{K(t_*) - \lambda K(t_*, q_s)} \right|^m}, \quad (3.4)$$

причем $p_j(t) \rightarrow 0$, когда $K(t, q_s) \rightarrow \infty$, и $p_j(t) \rightarrow 1$, когда $K(t_j) = \lambda K(t, q_s)$.

Здесь q_s — параметры ядра ползучести ($s = 1, k$); n — число дискретных значений ядра ползучести в области $\{0, t_j\}$; n_* — число дискретных значений ядер

ползучести в области малых времен $\{0, t_*\}$; m — порядок моментов разностей ($m = 2, 3, 4, 5, \dots$).

Реологический параметр λ и параметры ядра ползучести q_s в (3.3) определяются в два этапа. На первом этапе определяются начальные значения λ_0 и q_{s0} искомым параметров, т. е. значения без учета дискретных значений ядер $K(t_j)$ из области малых времен $\{0, t_*\}$. На втором этапе, используя ранее найденные значения параметров λ_0 и q_{s0} , из (3.4), и выбирая моменты разностей m , определяем первичный набор весовых $p_j(t)$. Окончательные функций $p_j(t)$ устанавливаем исходя из минимизации суммарной квадратичной ошибки функционала

$$\delta = \sum_{j=1}^{n_*} \left\{ p_j(t) [K(t_j) - \lambda_0 K(t, q_{s0})] \right\}^2, \quad (3.5)$$

которая соответствует квадратичной ошибке функционала (3.3) и является общей ошибкой функционала.

Выводы. Предложен метод определения параметров ядер наследственности в линейной модели вязкоупругости. Метод позволяет достаточно точно определять параметры ядер наследственности линейно-вязкоупругих материалов по данным испытаний на одноосную ползучесть при постоянных напряжениях и характеристикам диаграммы мгновенного деформирования. В качестве ядра наследственности использовано дробно-экспоненциальную функцию.

Список литературы

- Голуб, В. П., Кобзарь, Ю. М., & Рагулина, В. С. (2009). Метод определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов с использованием весовых функций. *Теоретическая и прикладная механика*, (46), 70–80.
- Голуб, В. П., Кобзарь, Ю. М., & Рагулина, В. С. (2012). Определение параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. *Теоретическая и прикладная механика*, (51), 26–35.
- Колтунов, А. А. (1969). Метод определения объемных и сдвиговых характеристик упруго-вязких наследственных сред по экспериментам на одноосное растяжение (сжатие). *Механика полимеров*, (4), 754–758.
- Колтунов, М. А. (1976). *Ползучесть и релаксация*. Москва: Высшая школа.
- Работнов, Ю. Н. (1977). *Элементы наследственной механики твердых тел*. Москва: Наука.

Напружений стан шаруватих неоднорідних порожнистих циліндрів з овальним поперечним перерізом

Л. С. Рожок

Національний транспортний університет, Київ, Україна

r.l.s@ua.fm

На основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є розв'язано задачу про напружений стан шаруватих неоднорідних порожнистих циліндрів з овальним поперечним перерізом за певних граничних умов на торцях при дії внутрішнього тиску. Проведено дослідження впливу форми поперечного перерізу та жорсткості середнього шару на напружений стан тришарових циліндрів розглядуваного класу.

Ключові слова: дискретні ряди Фур'є, крайова задача, напружений стан, неоднорідні порожнисті циліндри, овали Касині, шарувата структура.

Останнім часом в архітектурі та будівельній галузі широкого застосування знаходять порожнисті секції еліптичного та овального поперечного перерізу (Jasion, 2015), що викликано, з одного боку, незвичним естетичним виглядом, а з іншого — можливістю орієнтувати такі секції для найбільш ефективного опору навантаженню, оскільки вони мають різну жорсткість відносно основних осей (Железнов, 2006).

Розглядаються тришарові циліндри симетричної будови, з еліптичним та двома видами овального поперечного перерізу в ортогональній криволінійній системі координат s, ψ, γ , де s ($0 \leq s \leq l$) — довжина дуги вздовж твірної, ψ ($0 \leq \psi \leq 2\pi$) — полярний кут у поперечному перерізі, γ ($-H/2 \leq \gamma \leq H/2$) — нормальна координата по товщині циліндра. Подібні форми поперечного перерізу можна описати одним рівнянням для овалів Касині в полярній системі координат (Савелов, 1960)

$$\rho = \sqrt{c^2 \cos 2\psi + \sqrt{c^4 \cos^2 2\psi + (a^4 - c^4)}}, \quad 0 \leq \frac{c}{a} < 1, \quad a \neq 0,$$

де ρ — полярний радіус, c — половина відстані між фокусами, a — добуток відстаней від фокусів до довільної точки. Відношення параметрів c та a характеризує форму поперечного перерізу. Якщо $c = 0$ — маємо коло, при $0 < \frac{c}{a} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ — еліпс, $c = a\sqrt{2}$ — овал, $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{c}{a} < 1$ — сплюснутий овал (Рожок, 2017).

За вихідні приймаються основні рівняння лінійної просторової теорії пружності для ізотропного тіла (Тимошенко, 1972). Циліндри складені із шарів, що взаємодіють без проковзування та відриву. Напружений стан i -го шару у виб-

раній системі координат характеризується величинами $\sigma_s^i(s, \psi, \gamma), \sigma_\psi^i(s, \psi, \gamma), \sigma_\gamma^i(s, \psi, \gamma), \tau_{s\psi}^i(s, \psi, \gamma), \tau_{\psi s}^i(s, \psi, \gamma), \tau_{s\gamma}^i(s, \psi, \gamma), \tau_{\gamma s}^i(s, \psi, \gamma), \tau_{\psi\gamma}^i(s, \psi, \gamma), \tau_{\gamma\psi}^i(s, \psi, \gamma)$.

Згідно з законом парності дотичних напружень, існують залежності: $\tau_{s\psi}^i = \tau_{\psi s}^i, \tau_{s\gamma}^i = \tau_{\gamma s}^i, \tau_{\psi\gamma}^i = \tau_{\gamma\psi}^i$. Переміщення точок i -го шару при деформації тіла внаслідок дії прикладеного навантаження характеризується величинами $u_s^i(s, \psi, \gamma), u_\psi^i(s, \psi, \gamma), u_\gamma^i(s, \psi, \gamma)$.

Умови спряження шарів мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^i &= \sigma_\gamma^{i+1}, & \tau_{s\gamma}^i &= \tau_{s\gamma}^{i+1}, & \tau_{\psi\gamma}^i &= \tau_{\psi\gamma}^{i+1}; \\ u_\gamma^i &= u_\gamma^{i+1}, & u_s^i &= u_s^{i+1}, & u_\psi^i &= u_\psi^{i+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

На торцях циліндра розглядаються умови простого обпирання у вигляді

$$\sigma_s^i = u_\psi^i = u_\gamma^i = 0 \text{ при } s = 0; \quad s = l. \quad (2)$$

Циліндри знаходяться під дією внутрішнього тиску. Граничні умови на бічних поверхнях будуть

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^+ &= 0; & \tau_{s\gamma}^+ &= 0; & \tau_{\psi\gamma}^+ &= 0 & \text{при } \gamma = \frac{H}{2}; \\ \sigma_\gamma^- &= q_\gamma; & \tau_{s\gamma}^- &= 0; & \tau_{\psi\gamma}^- &= 0 & \text{при } \gamma = -\frac{H}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

За розв'язувальні функції вибираємо компоненти напруження і переміщення, у яких формулюються граничні умови на бічних поверхнях (3) та умови спряження шарів (1).

Граничні умови на торцях циліндра (2) дозволяють відокремити змінні в напрямку твірної циліндра шляхом розвинення розв'язувальних функцій та компонентів навантаження в ряди Фур'є вздовж твірної. Для відокремлення змінних у напрямку прямої циліндра, у розв'язувальній системі диференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами відносно амплітудних значень рядів Фур'є вздовж твірної, добутки розв'язувальних функцій на коефіцієнти, що перешкоджають даному відокремленню, позначаються новими доповняльними функціями.

Отримана таким чином розв'язувальна система рівнянь, формально не містить членів, що не дозволяють відокремити змінні в напрямку прямої циліндра. Подаючи далі розв'язувальні, доповняльні функції, а також компоненти навантаження у вигляді розвинень у ряди Фур'є вздовж прямої і підставляючи їх у розв'язувальну систему з доповняльними функціями, відокремлюють змінні вздовж прямої циліндра, отримавши при цьому для кожного шару систему звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у вигляді (індекс номеру шару, а також номер гармоніки в розкладі вздовж твірної в позначеннях розв'язувальних функцій та компонент навантаження опустимо)

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= (c_2 - 1)\varphi_{1,k}^1 + \lambda_n \tau_{s\gamma,k} - \varphi_{4,k}^1 + b_{22}\varphi_{1,k}^5 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22}\varphi_{4,k}^3; \\
\frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_1\lambda_n \sigma_{\gamma,k} + b_{11}\lambda_n^2 u_{s,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^3 - b_{66}\varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{4,k}^2; \\
\frac{d\tau_{\psi\gamma,k}}{d\gamma} &= b_{66}\lambda_n^2 u_{\psi,k} - c_2\varphi_{3,k}^1 - 2\varphi_{2,k}^1 - b_{22}\varphi_{5,k} + (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22}\varphi_{7,k};
\end{aligned}
\tag{4}$$

$$\frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} = c_4\sigma_{\gamma,k} - c_2\varphi_{4,k}^2 + c_1\lambda_n u_{s,k} - c_2\varphi_{1,k}^3;$$

$$\frac{du_{s,k}}{d\gamma} = a_{55}\tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,n,k}; \quad \frac{du_{\psi,k}}{d\gamma} = a_{44}\tau_{\psi\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2, \quad (k = \overline{0, K}; n = \overline{0, N})$$

із граничними умовами

$$\begin{aligned}
\gamma = H / 2 : \quad \sigma_{\gamma,k} &= 0; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0; \\
\gamma = -H / 2 : \quad \sigma_{\gamma,k} &= q_{\gamma,k}; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0.
\end{aligned}
\tag{5}$$

Отриману крайова задача (4), (5) можна розв'язати стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації (Grigorenko, 2018). Оскільки, через запровадження доповняльних функцій, кількість невідомих системи (4) перевищує кількість рівнянь, на кожному кроці застосування чисельного методу, значення амплітуд доповняльних функцій визначаються за допомогою процедури знаходження коефіцієнтів Фур'є для функцій, заданих таблицею значень (Фихтенгольц, 2003).

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина циліндра $l = 40$, товщина $H = h_1 + h_2 + h_3 = 1 + 2 + 1 = 4$; параметри поверхні відліку — $a = 20$; $c = 8$ (еліпс), $c = 14,14$ (овал), $c = 16$ (сплюснутий овал).

Механічні параметри: коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, модуль Юнга $E = E_0 = 1$ для несучих шарів; $E = dE_0$ — для середнього шару, де $d = 1; 0,5; 0,1$.

Результати розв'язування задачі наведені в таблиці для значень переміщень u_γ та напружень σ_ψ в середньому перерізі довжини в тих перерізах напрямної,

де вони приймають максимальних значень: для переміщень у перерізі $\psi = \frac{\pi}{2}$ та

для напружень у перерізі $\psi = \frac{3\pi}{10}$, на зовнішній ($\gamma = 2$), внутрішній ($\gamma = -2$) та

серединній ($\gamma = 0$) поверхнях залежно від форми поперечного перерізу та жорсткості середнього шару. При $d = 1$ маємо ізотропний однорідний циліндр.

Таблиця 1

d	γ	$u_{\gamma} E_0 / q_0 (\psi = \pi / 2)$				$\sigma_{\psi} / q_0 (\psi = 3\pi / 2)$			
		c							
		0	8	14,14	16	0	8	14,14	16
1	-2	94,29	219,36	745,72	1119,00	4,56	7,16	36,36	70,69
	0	90,57	216,09	747,99	1128,00	4,39	7,21	34,98	66,64
	2	87,20	210,30	735,94	1115,20	4,31	7,35	34,11	63,84
0,1	-2	172,01	382,95	1221,14	1758,43	8,73	13,57	61,43	114,06
	0	163,06	373,15	1217,10	1765,14	0,64	1,11	5,48	10,18
	2	154,71	361,03	1199,34	1751,16	7,57	12,54	54,04	97,26
0,5	-2	125,15	276,94	878,39	1276,52	6,19	9,54	43,91	82,02
	0	120,22	272,42	880,04	1285,78	2,85	4,63	20,89	38,32
	2	115,57	264,88	866,08	1271,91	5,70	9,52	40,79	73,34

З наведених у таблиці даних випливає, що при відхиленні форми поперечного перерізу від кругової, максимальні значення переміщень збільшуються в усіх перерізах товщини приблизно у 2,2–2,4 рази для значення коефіцієнта $c = 8$; у 7–8,4 рази для $c = 14,14$ і у 10,2–12,8 разів для $c = 16$ як для однорідного циліндра, так і для циліндрів з неоднорідною структурою по товщині. За наявності більш м'якого середнього шару спостерігається збільшення величини максимальних переміщень u_{γ} в 1,6–1,8 рази для $d = 0,1$ та в 1,2–1,3 рази для $d = 0,5$, порівняно з однорідним ізотропним циліндром.

Для розподілу максимальних значень напружень σ_{ψ} має місце така картина. При відхиленні форми поперечного перерізу від кругової, максимальні значення напружень на бічних поверхнях збільшуються приблизно в 1,5–1,7 рази для значення коефіцієнта $c = 8$; у 7,1–8,6 рази для $c = 14,14$ і у 12,8–15,5 разів для $c = 16$ як для однорідного циліндра, так і для циліндрів з неоднорідною структурою по товщині. Наявність більш м'якого середнього шару призводить до збільшення величини максимальних напружень σ_{ψ} на бічних поверхнях в 1,7–1,9 рази для $d = 0,1$ та в 1,2–1,4 рази для $d = 0,5$, порівняно з однорідним ізотропним циліндром.

Отже, варіюючи геометричними параметрами та жорсткістю середнього шару, можна впливати на перерозподіл полів переміщень та напружень у тришарових неоднорідних овальних порожнистих циліндрах з метою вибору більш раціональної структури та форми їх поперечного перерізу.

Список літератури

Grigorenko, Y. M., & Rozhok, L. S. (2018). Layered inhomogeneous hollow cylinders with concave corrugations under internal pressure. *International Applied Mechanics*, 54(5), 531–539. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0905-z>

- Jasion, P., & Magnucki, K. (2015). Elastic buckling of Cassini ovaloidal shells under external pressure—theoretical study. *Archives of Mechanics*, 67(2), 179–192.
<http://am.ippt.pan.pl/am/article/view/v67p179>
- Железнов, Л. П., Кабанов, В. В., & Бойко, Д. В. (2006). Нелинейное деформирование и устойчивость овальных цилиндрических оболочек при чистом изгибе с внутренним давлением. *Прикл. механика и техн. физика*, 47(3), 119–125.
https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=120026&ARTICLE_ID=125949
- Рожок, Л. С. (2017). Рівновага порожнистих некругових циліндрів при зміні форми їх поперечного перерізу. *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки*, (1), 36–39.
- Савелов, А. А. (1960). *Плоские кривые. Систематика, свойства, применение.* (Справочное руководство). Москва: Физматгиз.
- Тимошенко, С. П. (1972). *Курс теории упругости.* Киев: Наукова думка.
- Фихтенгольц, Г. М. (2003). *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* (Т. 3). Москва: ФИЗМАТЛИТ.

Точкові оцінки числових характеристик дискретного розподілу в контексті виборів президента

Н. П. Селезньова, Ю. О. Сараєва

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

nadijasel@gmail.com

Електоральні процеси можна досить добре моделювати за допомогою методів математичної статистики. Як правило, для цього використовують середні показники, такі як середнє значення, мода, медіана. Запропонована робота присвячена обчисленню та інтерпретації таких показників на прикладі рейтингових оцінок, отриманих при опитуванні респондентів напередодні президентських виборів 2019 року в Україні.

Ключові слова: мода, медіана, коефіцієнт варіації, коефіцієнт кореляції.

Закономірності як в економіці, так і в соціології можна виразити у вигляді зв'язків і властивостей різних показників, а також у вигляді математичних моделей. Такі залежності і моделі можна отримати тільки шляхом обробки реальних статистичних даних з урахуванням внутрішніх механізмів зв'язку й випадкових факторів за допомогою статистико-математичного інструментарію.

У статті на основі оброблення статистичних даних, отриманих шляхом опитування респондентів про вибори президента України 31 березня 2019 року, яке проводилось у період з 25 лютого по 6 березня, обчислено різні статистичні показники. Було опитано 100 респондентів. Респондентами вибрано студентів КПІ ім. Ігоря Сікорського 2–4 курсів різних факультетів. Вибіркова сукупність складається зі 100 студентів. Опитування було проведено у формі анонімного анкетування.

Хоча вибірка є, очевидно, нерепрезентативною, аналіз таких статистичних даних має сенс, у плані опису методології статистичної обробки подібних даних. Показники, обчислені після такої обробки даних, допоможуть провести глибший аналіз ситуації, краще зрозуміти настрої електорату.

Рейтинг партій та кандидатів складався за системою голосування Борда. Перед респондентами ставилось завдання поставити рейтингові бали дев'ятьом кандидатам (десятого кандидата респонденти могли запропонувати самі) від «1» до «10». «1» — найгірше ставлення респондента до кандидата, «2» — оцінка погана, ..., «10» — найкраща оцінка.

За такою ж шкалою ті самі респонденти поставили рейтингові бали партіям, лідерами яких є кандидати у президенти. Найбільше оцінок «10» отримав Зеленський (31 «десятка»), Порошенко на другому місці по кількості набраних «10» (6 «десяток»). Слід зауважити, що респонденти ставили також нульові бали, незважаючи на пояснення в анкеті. Скоріше всього ці респонденти не хотіли ні за кого голосувати. Такі анкети не ввійшли до нашого розгляду.

Цікавим є розподіл «десяток» та «одиниць» — «любові» та «нелюбові» респондентів до кандидатів.

На наступному графіку показано розподіли «10» та «1»:



Рис. 1

Із рис.1 можна зробити висновок, що респонденти віддають перевагу в першу чергу Зеленському, потім Порошенку. Одиниці розподілились між кандидатами більш рівномірно. Розрив між кількістю «1» та «10» вказує на те, що «нелюбів» виборців до кандидатів суттєво переважає симпатії. Слід зауважити, що, загалом, виборці були налаштовані негативно щодо кандидатів, а особливо щодо Тимошенко, Вілкула та Ляшка. Розрив між «любов'ю» та «нелюбів'ю», тобто між кількістю «1» та «10» найменшим є у Зеленського (16 одиниць), у Порошенка та Садового — 22 одиниці, найбільшим — у Тимошенко — 35 одиниць та у Вілкула — 34 одиниці. Очевидно, що суспільство на цих виборах показало досить велику розшарованість у своїх електоральних уподобаннях. Особливо добре видно настрої електорату з наступної діаграми, на якій у відсотках представлено загальний розподіл рейтингових балів.



Рис. 2

На рис. 2 по осі ОХ відкладено рейтингові бали від 1 до 10, а по осі ОУ кількість таких балів у відсотках по всій вибірці. Як бачимо, маємо найбільше негативних оцінок кандидатів і суттєво менше позитивних оцінок.

Характер розподілу рейтингових оцінок представлено на рис. 3.

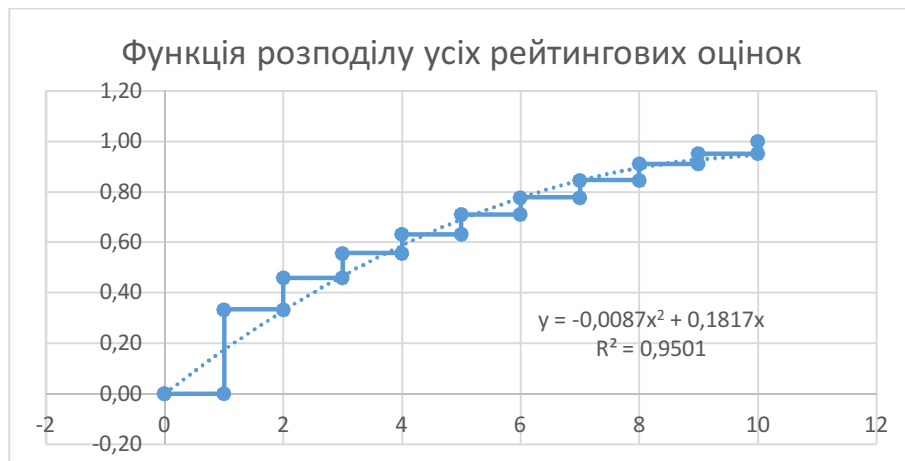


Рис. 3

Перейдімо до статистичних показників.

Найбільш поширеною є міра центральної варіації — *середнє арифметичне*, визначається такою формулою (Кремер, 2004):

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

де n — обсяг вибірки. Вона характеризує типовий розмір ознаки.

Наступна діаграма представляє середній рейтинговий бал, поставлений виборцями кандидатам.

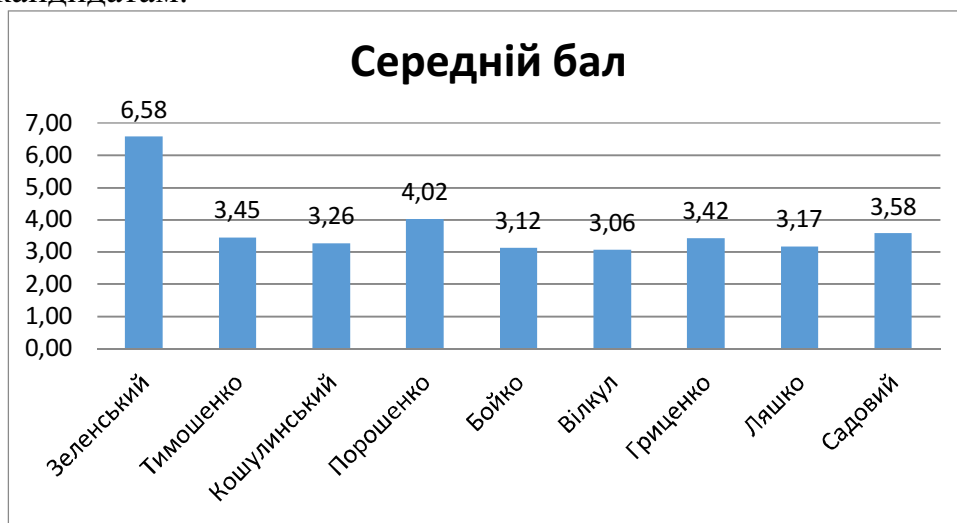


Рис. 4

Як бачимо з рис. 4, найвищий середній бал отримав Зеленський, на другому місці стоїть Порошенко. Найнижчий середній бал у Вілкула.

Коефіцієнт варіації V визначається у відсотках, як відношення середньоквадратичного відхилення до середнього (Кремер, 2004):

$$V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100\%.$$

Показник варіації характеризує однорідність сукупності, тобто надійність і типовість середньої величини. Вважають, що сукупність є однорідною, якщо показник варіації $\leq 33\%$. Отже, високі коефіцієнти варіації свідчать про те, що суспільство є досить неоднорідним у своїх вподобаннях.

Коефіцієнти варіації рейтингів кандидатів представлено наступною діаграмою (рис. 5).

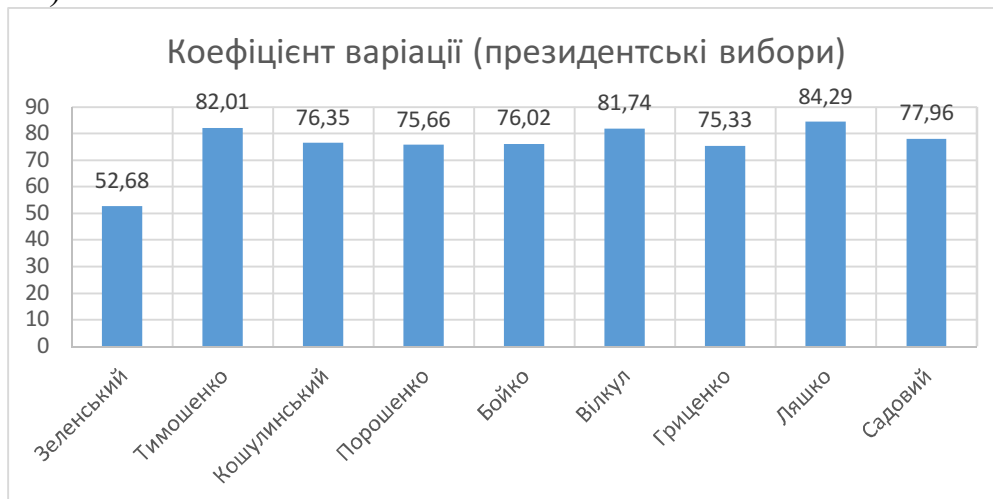


Рис. 5

З цієї діаграми (рис. 5) можна зробити висновок, що коефіцієнт варіації за даними електоральних опитувань є найменшим у Зеленського, а отже, його рейтинг є найбільш стійким. Найвищий коефіцієнт варіації в Ляшка. Його рейтинг є найменш стійким, тобто виборці ще не визначились відносно цього кандидата.

Мода — це значення в сукупності спостережень, яке зустрічається найчастіше, тобто варіанта з найбільшою частотою.

Інша міра центральної тенденції — *медіана* (Me) — варіанта, яка ділить варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант. Якщо кількість варіант непарна, тобто $n = 2k + 1$, то $Me = x_{k+1}$; при парному $n = 2k$ медіана

$$Me = \frac{x_{k+1} + x_k}{2} \text{ (у дискретному випадку) (Кремер, 2004).}$$

У наступній таблиці записано основні точкові характеристики вибірки складеної з усіх рейтингових оцінок.

Середнє значення	Мода	Середньоквадратичне відхилення	Ексцес	Асиметрія	Медіана
3,87	1	2,89	-0,85	0,66	3

З цієї таблиці, можна зробити висновок, що загальний розподіл оцінок є несиметричним тому, що

$$Мода \neq медіані \neq середньому значенню.$$

Асиметрія та ексцес суттєво відрізняються від нульового значення, що може свідчити про те, що розподіл не є гаусовським.

Тут мода показує, що оцінка «1» суттєво переважає решту оцінок, а це свідчить про те, що переважна більшість респондентів ставиться негативно до всіх

депутатів. Ці кандидати уособлюють певні парламентські партії, отже, і ставлення до цих партій також є негативним. Робота в парламенті таких партій може бути сприйнята в подальшому виборцями також негативно.

Медіана показує середню тенденцію. У контексті рейтингових оцінок медіана свідчить про те, що, оцінка «3» ділить нашу вибірку на дві частини.

Дослідімо відповідність між вподобаннями виборців до кандидатів у Президенти та відповідними партіями шляхом обчислення відповідних коефіцієнтів кореляції. Для цього обчислюємо вибіркові коефіцієнти кореляції між оцінками кандидатів у Президенти та партіями, лідерами яких є ці кандидати.

Обчислення вибіркових парних коефіцієнтів кореляції, проведемо за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y}$$

де $s_x = \sqrt{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}$ і $s_y = \sqrt{\bar{y}^2 - (\bar{y})^2}$ — середньоквадратичні відхилення, n — обсяг вибірки, (x_i, y_i) — результат i -го спостереження.

У наступній таблиці введемо позначення партій та кандидатів.

Партії		Кандидати в президенти	
Слуга народу	A1	Зеленський	A
Батьківщина	B1	Тимошенко	B
Свобода	C1	Кошуринський	C
Солідарність	D1	Порошенко	D
ОП За життя	E1	Бойко	E
Громадська опозиція	G1	Гриценко	G
Радикальна партія	H1	Ляшко	H
Самопоміч	I1	Садовий	I

Обчислені коефіцієнти кореляції між кандидатами у президенти та відповідними партіями представлено в наступній таблиці.

	A1;A	B1;B	C1;C	D1;D	E1;E	G1;G	H1;H	I1;I
коэф. корел.	0,93	0,77	0,56	0,62	0,48	0,48	0,70	0,46

Як бачимо з останньої таблиці, найвищий коефіцієнт кореляції між партією «Слуга народу» та кандидатом Зеленським, а найнижчий між «Самопоміччю» та кандидатом Садовим. У цілому, обчислені коефіцієнти кореляції є достатньо високими, що свідчить про те що виборці досить чітко зіставляють кандидатів з відповідними партіями.

Описані статистичні оцінки в цілому допоможуть проаналізувати настрої виборців перед президентськими чи парламентськими виборами. Такі статистичні показники можна обчислювати й інтерпретувати не тільки в політичних процесах, а й у прийнятті певних управлінських рішень, які приймаються шляхом голосування. Наприклад, подібні дослідження представлено в роботі Селезньова та Рудик (2018). За рейтингові оцінки взято оцінки школярів та студентів, отриманих ними під час іспитів.

Список літератури

- Кремер, Н. Ш. (2004). Теория вероятностей и математическая статистика (2-е изд.). Москва: ЮНИТИ-ДАНА.
- Селезньова, Н. П., Рудик, Т. О. (2018). Математичне моделювання моніторингу якості освіти *У Development trends in pedagogical and psychological sciences: The experience of counties of Eastern Europe and prospects of Ukraine*. Riga, Latvia: Baltija Publishing, 298–317. https://doi.org/10.30525/978-9934-571-27-5_46

Математична модель радіаційно-індукованої сегрегації в концентрованих металевих сплавах Fe-Cr-Ni

Р. В. Скороход, О. В. Коропов

Інститут прикладної фізики НАН України, Суми, Україна

r.skorokhodqq@gmail.com

Сформульована математична модель радіаційно-індукованої сегрегації в трикомпонентних концентрованих металевих сплавах Fe-Cr-Ni. Модель включає в себе систему зв'язаних нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних та початкові і граничні умови до неї. Наведена схема числового розв'язку запропонованої системи диференціальних рівнянь. Знайдені просторові залежності концентрацій компонентів сплаву. Описані та розраховані математичні характеристики радіаційно-індукованої сегрегації, такі як: збагачення (збіднення) компонента сплаву, повна ширина концентраційного профілю на рівні половини збагачення (збіднення) та сегрегаційна площа. Одержані залежності даних характеристик від температури та дози опромінення.

Ключові слова: математична модель, математичні характеристики, комп'ютерне моделювання, радіаційно-індукована сегрегація, концентровані металеві сплави, точкові дефекти, концентраційні профілі.

1. Вступ. Зміни локального елементного складу та мікроструктури, які виникають у металевих сплавах під дією опромінення негативно впливають на їх механічні й фізико-хімічні властивості та можуть призвести до радіаційного окрихчення і подальшого руйнування конструкцій ядерних реакторів (Was, 2017). Для аналізу впливу опромінення на матеріали ядерної енергетики проводять дослідження зразків-свідків, які були опромінені нейтронами в робочій камері реактора (Гриценко и др., 2011) та симуляційні експерименти з використанням електронів, протонів чи важких іонів (Was, 2017). Альтернативний підхід полягає у використанні комп'ютерного моделювання фізичних процесів, які перебігають під дією опромінення (див., наприклад, Скороход & Коропов, 2019). Останній підхід виглядає дуже перспективним зважаючи на постійний ріст потужності сучасних комп'ютерів.

Явище, яке полягає у просторовому перерозподілі концентрацій компонентів металевих сплавів під дією опромінення, називається *радіаційно-індукованою сегрегацією* (RIS). Унаслідок RIS спостерігається збіднення або збагачення зразка сплаву по головним, домішковим чи легуючим компонентам поблизу стоків дефектів (Ardell & Bellon, 2016; Was, 2017). Під дією RIS, зокрема, поблизу поверхонь матеріалу та на міжзеренних межах можуть формуватися виділення нової фази (Чуистов, 2003; Коротов, 2011, 2012; Коропов, 2014; 2016; Коротов & Скороход, 2019). Такі виділення, як відомо, гальмують рух дислокацій, які є носіями пластичної деформації (Френкель, 1972), а насамперед пластичний металевий сплав стає твердішим і навіть може окрихчуватись шляхом утворення і розростання тріщин (Котречко & Мешков, 2008). Додатково RIS може призвести до погіршення механічної міцності межзеренних меж,

корозійної стійкості та ряду інших фізико-хімічних властивостей, які є чутливими до змін локального складу сплаву.

Виходячи з вищесказаного, математичне моделювання РІС в багатокомпонентних концентрованих металевих сплавах є актуальною задачею сучасної прикладної математики. Метою даної роботи, яка природно продовжує роботу Скороход та Коропов (2019), є формулювання математичної моделі РІС в концентрованих сплавах Fe-Cr-Ni та розрахунок математичних характеристик концентраційних профілів елементів Cr і Ni.

2. Формулювання математичної моделі. Запропонована математична модель РІС в концентрованих металевих сплавах Fe-Cr-Ni базується на першому та другому законах Фіка з урахуванням оберненого ефекту Кіркендала (Allen & Was, 1998; Was, 2017; Коропов, 2017). Уважатимемо, що зразок сплаву представлений шаром з постійною товщиною ℓ (займає область $0 \leq x \leq \ell$), де поверхні зразка ($x = 0, x = \ell$) є ідеальними стоками точкових дефектів (ТД). Також до розгляду включимо дислокаційну підсистему у сплаві, яка є розосередженим стоком ТД. Тоді зміна концентрацій компонентів сплаву C_k , вакансій C_v та міжвузельних атомів C_i з часом задається системою п'яти зв'язаних нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних:

$$\begin{cases} \frac{\partial C_k}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}_k & (k = \text{Fe, Cr, Ni}), \\ \frac{\partial C_v}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}_v + K_0 - R_{iv}C_vC_i - R_{vD}(C_v - C_v^{eq}), \\ \frac{\partial C_i}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}_i + K_0 - R_{iv}C_vC_i - R_{iD}(C_i - C_i^{eq}). \end{cases} \quad (1)$$

де $\mathbf{J}_m$ — потоки атомів і ТД сорту m , K_0 — швидкість продукування (генерації) радіаційних ТД, R_{iv} — коефіцієнт рекомбінації вакансій та міжвузельних атомів, R_{dD} (нижній індекс $d = v, i$) — швидкість поглинання ТД дислокаціями. Відмітимо, що в системі рівнянь (1) концентрації атомів та ТД наведені в молярних долях, а за рахунок малості концентрацій ТД $C_{v(i)}$, для концентрацій компонентів сплаву C_k справедлива рівність

$$C_{\text{Fe}} + C_{\text{Cr}} + C_{\text{Ni}} = 1. \quad (2)$$

Потоки $\mathbf{J}_k$ атомів сорту k , вакансій $\mathbf{J}_v$ та міжвузельних атомів $\mathbf{J}_i$, які фігурують у системі рівнянь (1), мають вигляд (Was, 2017; Коропов, 2017)

$$\mathbf{J}_k = - \left(\sum_{d=v,i} d_{k,d} C_d \right) \alpha \nabla C_k + C_k (d_{k,v} \nabla C_v - d_{k,i} \nabla C_i), \quad (3)$$

$$\mathbf{J}_v = - \sum_{k=\text{Fe, Cr, Ni}} d_{k,v} C_k \nabla C_v + \alpha C_v \left(\sum_{k=\text{Fe, Cr, Ni}} d_{k,v} \nabla C_k \right), \quad (4)$$

$$\mathbf{J}_i = - \sum_{k=\text{Fe, Cr, Ni}} d_{k,i} C_k \nabla C_i - \alpha C_i \left(\sum_{k=\text{Fe, Cr, Ni}} d_{k,i} \nabla C_k \right), \quad (5)$$

де α — термодинамічний фактор, $d_{k,v}$ і $d_{k,i}$ — кінетичні коефіцієнти (diffusivity coefficients), які пов'язані з парціальними коефіцієнтами дифузії

атомів $\left(D_k = \sum_{d=v,i} d_{k,d} C_d \right)$ та точкових дефектів $\left(D_{v(i)} = \sum_{k=\text{Fe, Cr, Ni}} d_{k,v(i)} C_k \right)$.

Уважатимемо, що для потоків компонентів (3) та ТД (4), (5) у кожній точці простору виконується умова балансу (Was, 2017; Коропов, 2017)

$$\mathbf{J}_{\text{Fe}} + \mathbf{J}_{\text{Cr}} + \mathbf{J}_{\text{Ni}} = -\mathbf{J}_v + \mathbf{J}_i, \quad (6)$$

з якої випливає, що в системі (1) незалежними є тільки чотири рівняння. Розв'язуючи систему рівнянь (1) відносно концентрацій Cr (C_{Cr}), Ni (C_{Ni}), вакансій C_v та міжвузельних атомів C_i , концентрацію Fe (C_{Fe}) знайдемо з додаткової умови (2)

$$C_{\text{Fe}} = 1 - C_{\text{Cr}} - C_{\text{Ni}}.$$

3. Початкові та граничні умови. Як і в роботі Скороход та Коропов (2019), уважатимемо, що в початковий момент часу ($t = 0$) атоми сорту k розподілені рівномірно по всьому зразку, цебто

$$C_k(x, t)|_{t=0} = C_k^0, \quad (7)$$

а концентрації ТД $C_{v(i)}(x, t)$ дорівнюють термодинамічно рівноважним значенням $C_{v(i)}^{eq}$

$$C_v(x, t)|_{t=0} = C_v^{eq}, \quad C_i(x, t)|_{t=0} = C_i^{eq}. \quad (8)$$

Оскільки ТД генеруються однорідно по всьому об'єму зразка, природно вважати, що задача симетрична відносно площини $x = \frac{\ell}{2}$. Отже, надалі розгля-

датимемо лише ліву половину зразка $\left(0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \right)$, а градієнти всіх концентрацій у площині симетрії покладемо рівними нулю:

$$\left. \frac{\partial C_k(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\ell/2} = \left. \frac{\partial C_v(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\ell/2} = \left. \frac{\partial C_i(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\ell/2} = 0. \quad (9)$$

Для концентрацій компонентів $C_k(x, t)$ мають виконуватися закони збереження речовини (Was, 2017; Скороход & Коропов, 2019):

$$\int_0^{\ell/2} C_k(x, t) dx = \frac{\ell}{2} C_k(x, t) \Big|_{t=0}. \quad (10)$$

Оскільки поверхня зразка вважається ідеальним стоком ТД, концентрації $C_v(x, t)$ та $C_i(x, t)$ в безпосередній близькості від поверхні ($x \rightarrow +0$) дорівнюють відповідним термодинамічно рівноважним значенням C_v^{eq} , C_i^{eq} :

$$C_v(x, t) \Big|_{x \rightarrow +0} = C_v^{eq}, \quad C_i(x, t) \Big|_{x \rightarrow +0} = C_i^{eq}. \quad (11)$$

4. Числовий розв'язок системи рівнянь РС. Як і в попередніх роботах (Skorokhod et al., 2018; Скороход & Коропов, 2019), просторові похідні апроксимуємо відношенням відповідних скінченних різниць та проведемо процедури обезрозмірення кінетичних коефіцієнтів, часу інтегрування і масштабування концентрацій ТД. Зокрема, ∇C_j та $\nabla^2 C_j$ представимо у вигляді (Тихонов & Самарский, 1999)

$$\nabla C_j = \frac{C_{j+1} - C_{j-1}}{2\Delta x}, \quad \nabla^2 C_j = \frac{C_{j+1} - 2C_j + C_{j-1}}{\Delta x^2}, \quad (12)$$

де Δx — крок різницевої схеми (див. рис. 1). У цій статті моделювання проведено для зразка товщиною $\ell = 400$ нм з кроком різницевої схеми

$\Delta x = \frac{\ell}{2N+1} \approx 0.333$ нм ($N = 600$). Далі, безрозмірні кінетичні коефіцієнти

$d_{k,v(i)}^*$, безрозмірний час τ та масштабовані концентрації вакансій C_v^* і міжвузельних атомів C_i^* записуємо наступним чином

$$d_{k,v}^* = \frac{2Td_{k,v}}{\ell + \Delta x}, \quad d_{k,i}^* = \frac{2Td_{k,i}}{\ell + \Delta x}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad (13)$$

$$C_v^* = d_{Cr,v}^* C_v, \quad C_i^* = d_{Cr,i}^* C_i, \quad (14)$$

де характерний час опромінення $T = D/K_0$, а D — набрана доза опромінення.

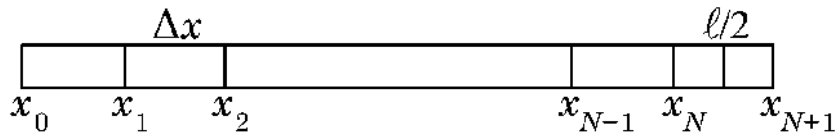


Рис. 1. Схематичне зображення різницевої схеми; x_i ($i = 0, 1, \dots, N+1$) — точки розбиття, Δx — крок різницевої схеми, $\ell/2$ — половина товщини шару сплаву

Подальші розрахунки проводилися для металевого сплаву Fe-20 ат.%Cr-8 ат.%Ni. Вхідні параметри, які використовувалися при числовому розв'язку системи (1), наведені в роботі Скороход та Коропов (2019). Значення темпера-

тури T , швидкості набору дози K_0 та набраної дози D , за замовченням, прийmemo наступними: $T = 350^\circ\text{C}$, $K_0 = 10^{-6}$ зна/с, $D = 10$ зна.

5. Математичні характеристики РІС. За математичні характеристики концентраційних профілів елементів сплаву зазвичай використовують наступні величини (Was, 2017):

1) концентрація елемента A в безпосередній близькості від поверхні зразка (поверхнева концентрація елемента A)

$$C_A(+0, t) = C_A(x, t) \Big|_{x \rightarrow +0}; \quad (15)$$

Таблиця 1. Значення поверхневих концентрацій $C_{\text{Cr}(\text{Ni})}$, $\text{FWHM}_{\text{Cr}(\text{Ni})}$ та сегрегаційних площ $S_{\text{Cr}(\text{Ni})}$ при різних значеннях дози опромінення D

Елемент	D , зна	C_A , ат.%	FWHM_A , нм	S_A , нм·ат.%
Cr	0.1	12.63	0.32	4.72
	0.2	11.36	0.44	8.19
	0.5	10,28	0.64	14.33
	1	9.8	0.78	19.46
	2	9.5	0.89	24.3
	5	9.26	0.99	29.7
	10	9.15	1.04	32.95
	20	9.09	1.07	35.43
Ni	0.1	11.46	0.26	1.55
	0.2	12.56	0.27	2.84
	0.5	13,87	0.32	5.48
	1	14.66	0.38	8.06
	2	15,25	0.43	10.85
	5	15.76	0.48	14.38
	10	16.01	0.5	16.7
	20	16.16	0.51	18.65

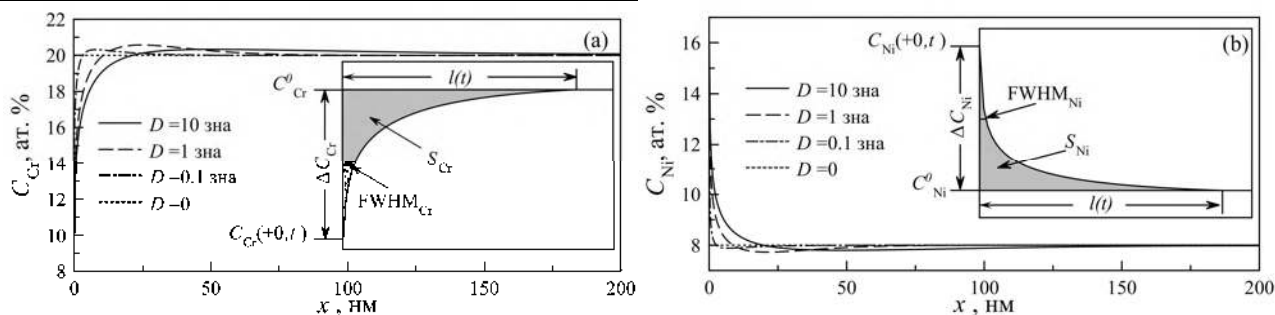


Рис. 2. Залежності концентрацій Cr (a) та Ni (b) від координати x при різних значеннях дози опромінення D .

2) величина збагачення (збіднення) елемента A

$$\Delta C_A = \left| C_A(x, t) \Big|_{x \rightarrow +0} - C_A^0 \right|, \quad (16)$$

де знак виразу під позначенням модуля вказує на збагачення ($C_A(x, t) \Big|_{x \rightarrow +0} - C_A^0 > 0$) чи збіднення ($C_A(x, t) \Big|_{x \rightarrow +0} - C_A^0 < 0$) елемента A ;

3) повна ширина концентраційного профілю елемента A на рівні половини збагачення (збіднення) FWHM_A (full width at half maximum);

4) сегрегаційна площа — площа фігури, яка обмежена кривою $C_A = C_A(x, t)$ і прямою $C_A = C_A^0$ у межах $0 \leq x \leq l(t)$:

$$S_A = \int_0^{l(t)} |C_A(x, t) - C_A^0| dx, \quad (17)$$

де $l(t)$ — відстань від початку координат ($x = 0$) до точки перетину кривої $C_A = C_A(x, t)$ та прямої $C_A = C_A^0$.

Приведені величини (п. 1–4) зображені на рис. 2. Відмітимо, що значення сегрегаційної площі S_A чутливіше до зміни форми концентраційного профілю порівняно з іншими наведеними характеристиками.

6. Залежності математичних характеристик РІС від дози опромінення та температури. На рис. 2 наведені концентраційні профілі Cr ($C_{\text{Cr}} = C_{\text{Cr}}(x)$) та Ni ($C_{\text{Ni}} = C_{\text{Ni}}(x)$) при різних значеннях дози опромінення D . Зі збільшенням дози спостерігається збільшення величин збіднення Cr і збагачення Ni, суттєве збільшення повної ширини концентраційних профілів та сегрегаційних площ елементів Cr, Ni. Величини поверхневих концентрацій $C_{\text{Cr(Ni)}}(+0, t)$, повних ширин концентраційних профілів на рівні половини збагачення (збіднення) $\text{FWHM}_{\text{Cr(Ni)}}$ і сегрегаційних площ $S_{\text{Cr(Ni)}}$ елементів Cr та Ni для дискретних значень доз опромінення від 0.1 до 20 зна представлені в табл. 1.

Залежності введених математичних характеристик РІС для елементів Cr та Ni від температури T ($\Delta C_{\text{Cr(Ni)}} = \Delta C_{\text{Cr(Ni)}}(T)$, $\text{FWHM}_{\text{Cr(Ni)}} = \text{FWHM}_{\text{Cr(Ni)}}(T)$ та $S_{\text{Cr(Ni)}} = S_{\text{Cr(Ni)}}(T)$) представлені на рис. 3. Зі зростанням температури T від $T = 200^\circ\text{C}$ спостерігається збільшення величини збіднення Cr, яка досягає максимального значення при $T = 397^\circ\text{C}$. При подальшому зростанні температури збіднення Cr зменшується і при $T \geq 624^\circ\text{C}$ стає менше 0.1 ат.%. Якісно аналогічна ситуація спостерігається і для Ni. Відмітимо, що зі збільшенням температури крутизна концентраційних профілів Cr та Ni зменшується (див. рис. 4, на якому зображені залежності $C_{\text{Cr}} = C_{\text{Cr}}(x)$ і $C_{\text{Ni}} = C_{\text{Ni}}(x)$ при різних значеннях температури T). Зазначимо також, що сегрегаційні площі $S_{\text{Cr(Ni)}}$ досягають максимальних значень при вищих температурах порівняно з максимальними значеннями збагачень (збіднень).

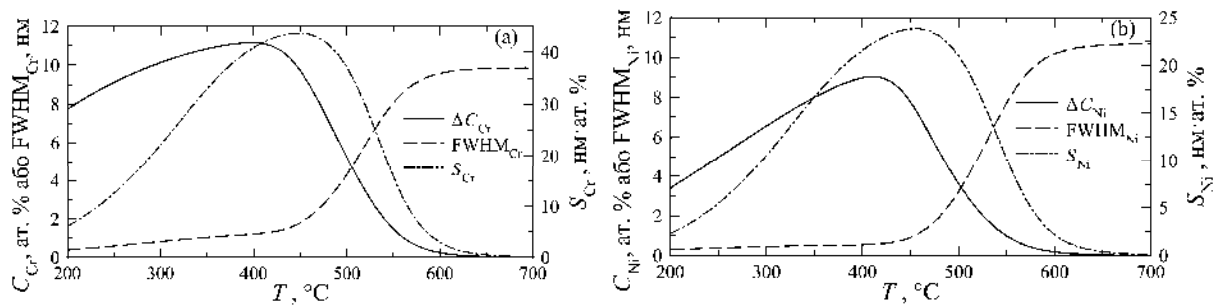


Рис. 3. Залежності збагачень $\Delta C_{Cr(Ni)}$ (суцільні лінії), $FWHM_{Cr(Ni)}$ (штрихові лінії) та сегрегаційних площ $S_{Cr(Ni)}$ (штрих-пунктирні лінії) від температури T .

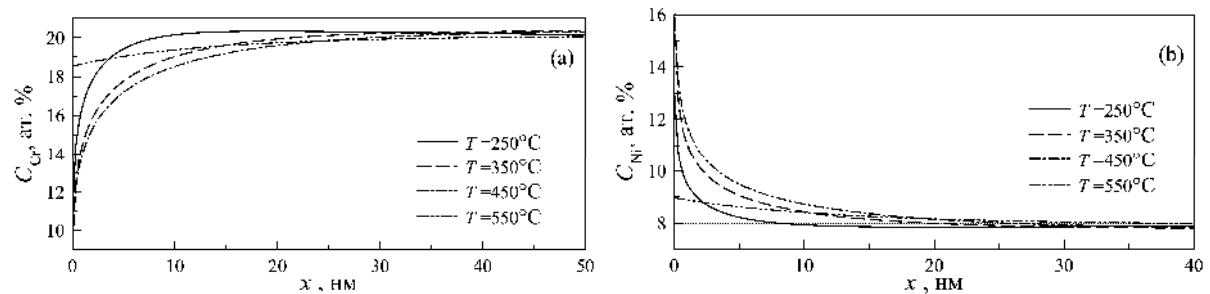


Рис. 4. Залежності концентрацій Cr (a) та Ni (b) від координати x при різних значеннях температурах T

Для всього дослідженого діапазону температур $200^{\circ}C \leq T \leq 700^{\circ}C$ спостерігається збільшення $FWHM_{Cr(Ni)}$ зі зростанням T .

7. Висновки. У роботі проведено математичне моделювання РІС в концентрованому трикомпонентному металевому сплаві Fe-20%Cr-8%Ni. Одержано концентраційні профілі Cr ($C_{Cr} = C_{Cr}(x)$) та Ni ($C_{Ni} = C_{Ni}(x)$) при різних значеннях набраної дози опромінення D й температури T . Проведено аналіз даних профілів та розрахованих математичних характеристик РІС для елементів Cr і Ni, а саме: $C_A(+0, t)$, ΔC_A , $FWHM_A$, S_A ($A = Cr, Ni$).

Список літератури

- Allen, T. R., & Was, G. S. (1998). Modeling radiation-induced segregation in austenitic Fe-Cr-Ni alloys. *Acta Mater.*, 46(10), 3679–3691. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(98\)00019-6](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(98)00019-6)
- Ardell, A. J., & Bellon, P. (2016). Radiation-induced solute segregation in metallic alloys. *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, 20(3), 115–139. <https://doi.org/10.1016/j.cossms.2015.11.001>
- Koropov, A. V. (2011). Morphological stability of two-dimensional new phase precipitate located at the grain boundary. *Tech. Phys.*, 56(12), 1781–1786. <https://doi.org/10.1134/S1063784211120097>
- Koropov, A. V. (2012). Ostwald ripening of diffusion-limited small-size precipitates at grain boundaries. *J. Nano-Electron. Phys.*, 4(3), 03013. https://jnep.sumdu.edu.ua/en/component/content/full_article/819
- Koropov, O., & Skorokhod, R. (2019). Визрівання Оствальда сферичних виділень на міжзеренній межі, яке лімітується поверхневою кінетикою. *Східно-європейський фізичний журнал*, (1), 75–85. <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2019-1-07>

- Skorokhod, R., Buhay, O., Bilyk, V., Denysenko, V., & Koropov, O. (2018). Моделювання радіаційно-індукованої сегрегації в бінарних сплавах. *Східно-європейський фізичний журнал*, 5(1), 61–69. <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2018-1-07>
- Was, G. S. (2017). *Fundamentals of radiation materials science. Metals and alloys* (2nd ed.). New York: Springer.
- Гриценко, А. В., Демехин, В. Л., Илькович, В. В., Буканов, В. Н., & Васильева, Е. Г. (2011). Некоторые этапы разработки дополнительной программы образцов-свидетелей для реактора ВВЭР-1000. *Ядерна та радіаційна безпека*, 50(2), 29–34.
- Коропов, О. В. (2014). Контрольоване поверхневою кінетикою визрівання Оствальда плоских включень на межі зерен. *Ж. нано-електрон. фіз.*, 6(1), 01025. https://jnep.sumdu.edu.ua/uk/full_article/1196
- Коропов, О. В. (2016). Математична модель пізньої стадії сегрегації домішки на міжзеренній межі у випадку утворення плоских виділень нової фази. У *Матеріалах Сімнадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука* (Т. 1, с. 161–166). Київ: НТУУ «КПІ».
- Коропов, О. В. (2017). Диференціальні рівняння радіаційно-індукованої сегрегації в п'ятикомпонентних концентрованих металевих стопах. У *матеріалах Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції ім. академіка Михайла Кравчука* (Т. 1, с. 86–90). Київ: НТУУ «КПІ». <http://matan.kpi.ua/public/files/kk2016/kravchuk2016-volume1.pdf>
- Котречко, С. А., & Мешков, Ю. Я. (2008). *Предельная прочность. Кристаллы, металлы, конструкции*. Киев: Наукова думка.
- Скороход, Р. В. & Коропов, А. В. (2019). Моделирование радиационно-индуцированной сегрегации в сплавах Fe-Cr-Ni. *Физика твердого тела*, 61(12), 2281–2288. <https://doi.org/10.21883/FTT.2019.12.48605.53ks>
- Тихонов А. Н., & Самарский, А. А. (1999). *Уравнения математической физики: Учебное пособие* (6-е изд., испр. и доп.). Москва: Изд-во МГУ.
- Френкель, Я. И. (1972). *Введение в теорию металлов* (4-е изд.). Ленинград: Наука.
- Чуистов, К. В. (2003). *Старение металлических сплавов* (2-е изд.). Киев: Академперіодика.

Про результати програмно-аналітичного моделювання динаміки неповно спостережуваних лінійних просторово розподілених систем

В. А. Стоян¹, О. О. Задорожний²

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

²КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

v_a_sroyan@ukr.net, bukashok18@gmail.com

У статті ставиться та розв'язується задача побудови програмно моделюючого комплексу для дослідження стану дискретно спостережуваних лінійних просторово розподілених динамічних систем. Задачі розв'язуються за умов неповноти інформації про їх початково-крайовий стан.

Ключові слова: просторово-розподілені системи, динамічні системи, початково-крайові задачі, системи в умовах невизначеності.

Класичні методи математичної фізики та чисельного інтегрування дозволяють досить успішно розв'язувати початково-крайові задачі для певних класів систем за умови коректного (за кількістю та якістю) задання початково-крайових спостережень за останніми. На практиці ж виникають проблеми дослідження процесів і явищ, які зазвичай функціонують в умовах неповноти інформації про їх початково-крайовий стан, або коли ця інформація не стикується з вимогами класичного математичного апарату, вибраного для дослідження.

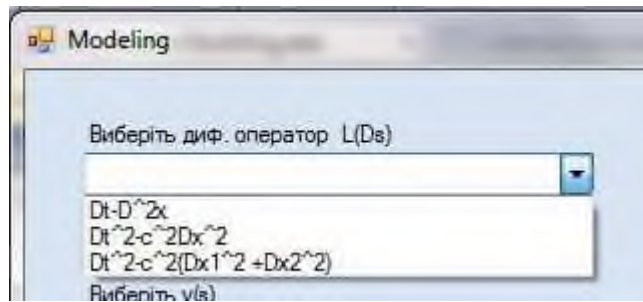
Теоретичні основи методики побудови функції стану просторово розподіленої динамічної системи, яка будучи розв'язком її диференціальної моделі, за середньоквадратичним критерієм узгоджується з наявними спостереженнями за зовнішньо-динамічним станом системи незалежно від кількості та якості останніх, розв'язані у Стоян (2019), у Стоян (2017) були підготовлені до лабораторних тестувань.

Нижче впродовж ставиться та розв'язується задача побудови програмно моделюючого комплексу для дослідження стану дискретно спостережуваних просторово розподіленої динамічної системи, функціонування якої в заданій просторово-часовій області $S_0^T = S_0 \times [0; T]$ описується лінійною диференціальною моделлю (Стоян, 2017, 2019):

$$L(\partial_S)y(s) = u(s), \quad (1)$$

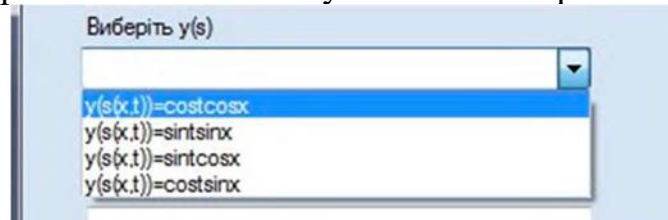
де $s = (x, t) = (x_1, \dots, x_n, t) \in S_0^T$ — просторово-часова змінна, $\partial_S = \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}, \partial_t$, а $u(s)$ — функція зовнішньо розподілених просторово-часових збурень.

Передбачено, що оператор $L(\partial_S)$ досліджуваної системи вибирається зі списку:



Для спрощення математичної частини програмно моделюючого комплексу з вибраним $L(\partial_s)$ автоматично зв'язується і передатна функція $G(s - s')$, яка буде фігурувати в розрахункових формулах задачі.

Для формулювання спостережень за зовнішньо-динамічним станом $y(s)$ системи, останній вибирається теж із списку можливих варіантів:

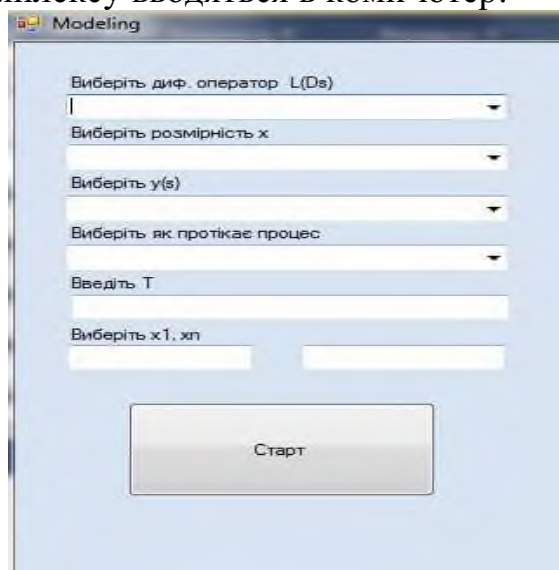


Наявність диференційного оператора $L(\partial_s)$ математичної моделі системи дозволяє у відповідність вибраному $y(s)$ поставити й функцію $u(s)$ просторово розподілених динамічних збурень. Початково-крайові спостереження

$$Y^0 = \text{col}(y_l^0, l = \overline{1, L_0}), \quad (2)$$

$$Y^\Gamma = \text{col}(y_l^\Gamma, l = \overline{1, L_\Gamma}) \quad (3)$$

за станом системи визначаються програмно значеннями $y_l^0 = y(s_l^0) \in S_0$ та $y_l^\Gamma = y(s_l^\Gamma) \in \Gamma \times [0; T]$ (тут Γ — контур просторової області S_0) функції $y(s)$ стану системи в точках $(x_l^0, 0)$ ($l = \overline{1, L_0}$) та s_l^Γ ($l = \overline{1, L_\Gamma}$) відповідно, які через інтерфейсну частину комплексу вводяться в комп'ютер:



Через інтерфейс вводяться і координати точок s_m^0 ($m = \overline{1, M_0}$) та s_m^Γ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$), у яких програмно визначаються значення u_m^0 ($m = \overline{1, M_0}$) та u_m^Γ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$) функцій $u_0(s)$ ($s \in S_0 \times (-\infty; 0)$) та $u_\Gamma(s)$ ($s \in \mathbb{R}^n \setminus S_0 \times [0; T]$), якими спостереження $Y = \text{col}(Y^0, Y^\Gamma)$ моделюються так, щоб

$$\Phi = \sum_{l=1}^{L_0} (y(s) \big|_{t=0, x=x_l^0} - y_l^0)^2 + \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (y(s) \big|_{s=s_l^\Gamma} - y_l^\Gamma)^2 \rightarrow \min_{y_*(s)}, \quad (4)$$

де $y_*(s)$ — функція стану системи (1), яка будучи розв'язком рівняння (1) (Стоян, 2017), зі спостереженнями (2) узгоджується згідно з (3).

При цьому (Стоян, 2019):

$$u_0 = \text{col}(u_m^0, m = \overline{1, M_0}) = (A_{11}^T, A_{21}^T)P^{-1}\bar{Y},$$

$$u_\Gamma = \text{col}(u_m^\Gamma, m = \overline{1, M_\Gamma}) = (A_{12}^T, A_{22}^T)P^{-1}\bar{Y},$$

де

$$A = \text{col}(\text{str}(A_{ij}, j = \overline{1, 2}), i = \overline{1, 2}), P_1 = AA^T,$$

а

$$A_{11} = \text{col}((\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^0) \big|_{t=0, x=x_l^0}, m = \overline{1, M_0}), l = \overline{1, L_0}), r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{12} = \text{col}((\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^\Gamma) \big|_{t=0, x=x_l^0}, m = \overline{1, M_\Gamma}), l = \overline{1, L_0}), r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{21} = \text{col}((\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^0) \big|_{s=s_l^\Gamma}, m = \overline{1, M_0}), l = \overline{1, L_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$A_{22} = \text{col}((\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^\Gamma) \big|_{s=s_l^\Gamma}, m = \overline{1, M_\Gamma}), l = \overline{1, L_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

а розв'язком задачі буде

$$y_*(s) = \int_{S_0^T} G(s - s')u(s')ds' + \sum_{m=1}^{M_0} G(s - s_m^0)u_m^0 + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s - s_m^\Gamma)u_m^\Gamma,$$

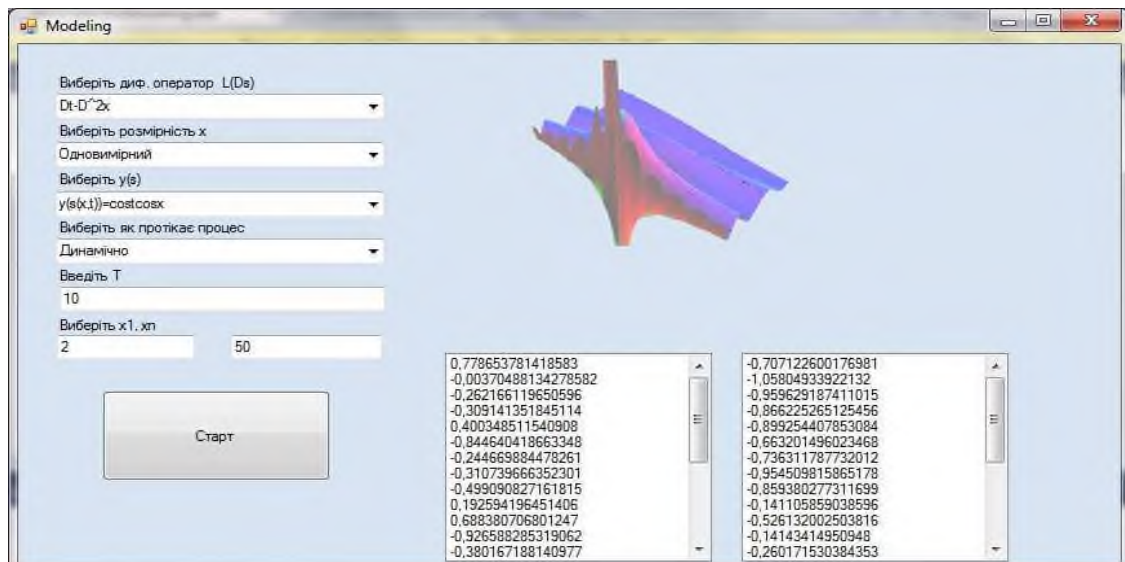
таке, що

$$\min_{y_*(s)} \Phi = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T A A^{-1} \bar{Y}.$$

Нижче наведені фрагменти інтерфейсної частини програмного комплексу та результат математичного моделювання одновимірної (для спрощення) динамічної системи

$$(\partial_t - a^2 \partial_x^2)y(x, t) = u(x, t).$$

Оцінка результатів тестування програми візуалізована порівнянням таблиць значень функції $y_*(x, t)$ в точках $(x_l^0, 0)$ ($l = \overline{1, L_0}$) та (x_l^Γ, t_l) ($l = \overline{1, L_\Gamma}$) зі спостережуваними в них значеннями y_l^0 ($l = \overline{1, L_0}$) та y_l^Γ ($l = \overline{1, L_\Gamma}$) функцій $y(x, t)$:



Незважаючи на довільність у виборі функції стану $y(x, t)$, точок $(x_i^0, 0)$, (x_i^Γ, t_i^Γ) та за невеликої кількості останніх результати тестування викладеної вище методики математичного моделювання виявилися досить успішними.

Такі ж позитивні результати були отримані при програмно-аналітичному дослідженні двовимірних за просторовими координатами дискретно спостережуваних динамічних систем, що дозволяє методику математичного моделювання стану лінійних динамічних систем з розподіленими параметрами (Стоян, 2017, 2019) рекомендувати до інженерно-прикладного використання.

Список літератури

- Стоян, В. А. (2017). *Основи лабораторного моделювання просторово розподілених динамічних систем*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
- Стоян, В. А. (2019). *Математическое моделирование динамики неполно наблюдаемых линейных пространственно распределенных систем*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Визначення параметрів ядер інтегральних операторів у нелінійній моделі в'язкопружності за їх резольвентами

П. В. Фернаті

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
creep@inmech.kiev.ua*

Досліджується метод визначення параметрів ядер інтегральних операторів нелінійної моделі в'язкопружності спадкового типу для складного напруженого стану. В основі методу покладено можливість аналітичного обернення інтегральних операторів, при цьому їх параметри знаходяться за параметрами резольвент. Параметри ядер для складного напруженого стану визначаються з дослідів на релаксацію за умов одновісного розтягу. Даний метод дозволяє підвищити варіативність вибору базових експериментів і відповідно розширює межі застосування моделі.

Ключові слова: нелінійна модель в'язкопружності, інтегральні рівняння, складний напружений стан, ядра інтегральних операторів, резольвента, релаксація напружень.

Необхідність відтворення та прогнозування деформаційних процесів, що відбуваються із плином часу, у нелінійно-в'язкопружних матеріалах сприяла появі великої кількості нелінійних моделей повзучості спадкового типу. Визначальні рівняння цих моделей здебільшого будують з використанням інтегральних операторів, що дозволяє враховувати історію навантаження і відтворювати спадкові ефекти. Параметри ядер інтегральних операторів визначають за результатами обробки базових експериментальних даних і характеризують в'язкопружні властивості даного матеріалу.

У статтях Голуб та ін. (2004, 2015, 2017, 2019) розвинуто нелінійну тривимірну модель в'язкопружності спадкового типу. Суттєвим обмеженням при використанні даної моделі як і будь-якої іншої є відсутність базових експериментальних даних необхідних для визначення параметрів і функцій, що входять до визначальних рівнянь моделі або відсутність надійних методів, які дозволяють визначити їх з наявних експериментальних даних. Ситуація значно ускладнюється у випадку складного напруженого стану, при цьому кількість параметрів і функцій, що необхідно визначати і, відповідно, кількість базових експериментів значно збільшується. У статті Голуб та ін. (2019) викладено два методи визначення параметрів ядер спадковості для випадку складного напруженого стану із двох варіантів базових експериментів на повзучість за умов одновісного розтягу та чистого скручення. Передбачається, що за базові експерименти в цьому випадку можуть слугувати експерименти на релаксацію.

Метою даного дослідження є підвищити варіативність базових експериментальних даних шляхом розроблення методу визначення параметрів ядер інтегральних операторів визначальних рівнянь повзучості за умов складного напруженого стану, з дослідів на релаксацію за умов одновісного розтягу.

Постановка задачі дослідження. Розглядаються процеси повзучості та релаксації напружень ізотропних, однорідних, нестаріючих нелінійно-

в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Визначальні рівняння повзучості, що задають залежність між компонентами тензора деформацій ε_{ij} , тензора напружень σ_{ij} і часом t за умов сталої температури записуються у вигляді

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v(t) &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(\sigma_i(t); t)}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t)) \quad (i, j = \overline{1, 3}); \\ \varphi_i(\varepsilon_i(t)) &= \sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t - \tau) \sigma_i(\tau) d\tau; \\ \varphi_v(\varepsilon_v(t)) &= \sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t - \tau) \sigma_0(\tau) d\tau.\end{aligned}\quad (1)$$

Їхнім розв'язком є рівняння релаксації:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t) &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i(\varepsilon_i(t); t)}{\varepsilon_i(t)} \left(\varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v(t) \right) \quad (i, j = \overline{1, 3}); \\ \sigma_i(t) &= \phi_i(\varepsilon_i(t)) - \lambda_i \int_0^t R_i(t - \tau) \varphi_i(\varepsilon_i(\tau)) d\tau; \\ \sigma_0(t) &= \phi_v(\varepsilon_v(t)) - \lambda_v \int_0^t R_v(t - \tau) \varphi_v(\varepsilon_v(\tau)) d\tau,\end{aligned}\quad (2)$$

де $\varepsilon_v(\cdot)$ — об'ємна деформація; $\varepsilon_i(\cdot)$ — інтенсивність деформацій; $\sigma_0(t)$ — середнє напруження; $\sigma_i(t)$ — інтенсивність напружень; $\varphi_i(\varepsilon_i(t))$, $\varphi_v(\varepsilon_v(t))$ — функції, що задають нелінійність скалярних в'язкопружних властивостей; $K_i(t - \tau)$, $K_v(t - \tau)$ і $R_i(t - \tau)$, $R_v(t - \tau)$ — ядра повзучості та релаксації, відповідно (деякі функції з параметрами $\bar{\alpha}_j$); λ_i , λ_v — реологічні параметри; $\delta_{i,j}$ — дельта-функція Кронекера.

Рівняння (1) та (2) містять шість функцій — $\varphi_i(\varepsilon_i(t))$, $\varphi_v(\varepsilon_v(t))$, $K_i(t - \tau)$, $K_v(t - \tau)$, $R_i(t - \tau)$, $R_v(t - \tau)$, параметри яких мають визначатись шляхом обробки результатів базових експериментів. Функції $\varphi_i(\varepsilon_i(t))$ та $\varphi_v(\varepsilon_v(t))$, що відповідають за склерономні властивості середовища і визначаються з короточасних дослідів на розтяг, вважаємо відомими, а методи їх визначення не розглядаємо. За в'язкопружну поведінку середовища відповідають параметри λ_i , λ_v та параметри ядер спадковості $\bar{\alpha}_j$. Ядром спадковості можна вибрати будь-яку функція, що задовольняє певним умовам, викладеним у монографії Работнова (1977).

Ядра інтегральних операторів $K(t - \tau)$ та $R(t - \tau)$ в (1) і (2) пов'язані відомим співвідношенням (Работнов, 1977)

$$R(t) - K(t) = \lambda \int_0^t K(t - \tau) R(t - \tau) d\tau. \quad (3)$$

За умов одновісного розтягу ненульовими компонентами тензора напружень та деформацій є компоненти: $\sigma_{11}(t)$, $\varepsilon_{11}(t)$, $\varepsilon_{22}(t)$, $\varepsilon_{33}(t)$, а залежності інтенсивності напружень σ_i , інтенсивності деформацій ε_i , середнього напруження σ_0 , об'ємної деформації ε_v , від компонент тензора напружень σ_{ij} та тензора деформацій ε_{ij} , які наведені в Малинин (1975), набувають вигляду:

$$\sigma_i(t) = \sigma_{11}(t); \quad \varepsilon_i(t) = \frac{2}{3}(\varepsilon_{11}(t) - \varepsilon_{22}(t)); \quad \sigma_0(t) = \frac{1}{3}\sigma_{11}(t); \quad \varepsilon_v(t) = \varepsilon_{11}(t) + 2\varepsilon_{22}(t), \quad (4)$$

де прийнято, що $\varepsilon_{22}(t) = \varepsilon_{33}(t)$. Напруження $\sigma_{11}(t)$ визначається з дослідів на релаксацію за умов одновісного розтягу.

Метою даного дослідження є розробити метод визначення реологічних параметрів та параметрів ядер інтегральних рівнянь, виходячи з дослідів на релаксацію за умов одновісного розтягу. Для цього необхідно скласти функціонали, що містять відповідні оброблені експериментальні, які дозволяють розраховувати значення шуканих параметрів шляхом їх мінімізації за допомогою чисельних методів. Експериментальна апробація даного методу є метою подальших досліджень.

Основні положення методу. Для напружень релаксації за умов одновісного розтягу $\varepsilon_{11}(t) = \text{const}$ з (2) з врахуванням (4) отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) = \sigma_{11}(t) &= \phi_i(\varepsilon_i) \left(1 - \lambda_i \int_0^t R_i(\tau) d\tau \right), \\ \sigma_0(t) = \frac{1}{3}\sigma_{11}(t) &= \phi_v(\varepsilon_v) \left(1 - \lambda_v \int_0^t R_v(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (5)$$

які використовуються згодом для побудови функціоналів.

Виходячи з (5), функціонали для знаходження реологічних параметрів та параметрів ядер беремо у вигляді:

$$\begin{aligned}
F_i(\bar{\alpha}, \lambda_i) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\sigma_{11(k)}(t_j) - \phi_i(\varepsilon_{i(k)}) \left(1 - \lambda_i \int_0^{t_j} R_i(\tau) d\tau \right) \right]^2, \\
F_v(\bar{\alpha}, \lambda_i) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{3} \sigma_{11(k)}(t_j) - \phi_v(\varepsilon_{v(k)}) \left(1 - \lambda_v \int_0^{t_j} R_v(\tau) d\tau \right) \right]^2,
\end{aligned} \tag{6}$$

де n — кількість експериментальних кривих релаксації; $\sigma_{11(k)}(t_j)$ — значення релаксуючого напруження в момент часу t_j , визначеному для k -ї експериментальної кривої релаксації. Мінімізуючи дані функціонали чисельними методами, отримуємо значення шуканих реологічних параметрів λ_i , λ_v і параметрів резольвент $R_i(t - \tau)$ і $R_v(t - \tau)$, при цьому інтеграли в (6) знаходяться аналітично, оскільки структури функцій ядер інтегральних операторів мають бути обрані заздалегідь.

Параметри ядер $K_i(t - \tau)$ і $K_v(t - \tau)$ знаходяться з визначених параметрів резольвент. У випадку резольвентних операторів, наприклад, якщо ядра $K_i(t - \tau)$ і $K_v(t - \tau)$ вибрані у вигляді дробово-експоненційної функції (Работнов, 1977), структура функцій резольвент при їх оберненні не зміниться, також деякі параметри залишаться без змін, що суттєво спрощує аналітичні процедури даного методу.

У випадку, складних структур ядер, коли аналітичне знаходження інтегралів у (6) ускладнене, параметри ядер $R_i(t - \tau)$ і $R_v(t - \tau)$ можна знаходити за диференційованими за часом кривими релаксації. У цьому випадку з (5) отримуємо рівняння

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(t)' &= \phi_i(\varepsilon_i) \lambda_i R_i(t); \\
\sigma_0(t)' &= \phi_v(\varepsilon_v) \lambda_v R_v(t),
\end{aligned} \tag{7}$$

а параметри ядер знаходяться шляхом мінімізації функціоналів:

$$\begin{aligned}
F_i(\bar{\alpha}, \lambda_i) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\sigma_{11(k)}(t_j)' - \phi_i(\varepsilon_i) \lambda_i R_i(t) \right]^2; \\
F_v(\bar{\alpha}, \lambda_i) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{3} \sigma_{11(k)}(t_j)' - \phi_v(\varepsilon_v) \lambda_v R_v(t) \right]^2,
\end{aligned} \tag{8}$$

де $\sigma_{11(k)}(t_j)'$ — значення швидкості зміни напруження релаксації в момент часу t_j , визначеному для диференційованої за часом експериментальної k -ї кривої релаксації.

Висновки. Запропоновано метод визначення параметрів ядер інтегральних рівнянь нелінійної тривимірної моделі повзучості з дослідів на релаксацію за

умов одновісного розтягу. В основі методу покладено відому аналітичну процедуру обернення інтегральних операторів. Метод розрахований на будь-яку структуру ядер, що задовольняють умовам затухаючої пам'яті. У випадку використання резольвентних ядер аналітичні процедури методу значно спрощуються. Даний метод потребує експериментальної апробації, а також порівняння його точності з існуючими методами.

Список літератури

- Голуб, В. П., Кобзарь, Ю. М., & Фернати П. В. (2004). Об одном подходе к построению реологической модели среды с упрочнением. *Прикладная механика*, 40(7), 81–91.
- Голуб, В. П., Кобзарь, Ю. М., & Фернати, П. В. (2019). К определению параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. *Прикладная механика*, 55(6), 25–45.
- Голуб, В. П., Павлюк, Я. В., & Фернати, П. В. (2017). К определению параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости. *Прикладная механика*, 53(4), 76–93.
- Голуб, В. П., Рагулина, В. С., & Фернати, П. В. (2015). Определение параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих изотропных материалов при кручении. *Прикладная механика*, 51(2), 88–101.
- Малинин, Н. Н. (1975). *Прикладная теория пластичности и ползучести* (2-е изд.). Москва: Машиностроение.
- Работнов, Ю. Н. (1977). *Элементы наследственной механики твердых тел*. Москва: Наука.

Дослідження осадку циліндричної заготовки в умовах осесиметричної деформації

Т. О. Штефан, А. В. Засовенко

Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна
tutta1120@gmail.com, zasov77@gmail.com

Під дією штамп циліндр змінює свою форму: у кінцевому положенні він стає нижче, а його осеві перерізи, починаючи з деякої глибини, збільшують свою площу. Цей ефект у літературі називають бочкоутворенням. Інженерні розрахунки процесів осадки пов'язані з визначенням необхідного зусилля операції і кінцевої форми осадженої заготовки.

Ключові слова: осадка, бочкоутворення, функція потенційної енергії формозміни, гіпотеза міцності Мізеса.

Кольорові метали та їх сплави, використовувані в промисловості, піддаються куванню або штампуванню, як в холодному, так і в гарячому стані. Осадка є найбільш поширеною технологічною операцією. На переходах ковки її застосовують найчастіше як спосіб досягнення необхідного укову. При гарячому штампуванні осадку використовують на попередніх переходах для збиття окалини та наближення форми заготовки до конфігурації поковки, при цьому, залежно від складності поковки, осадку можуть суміщати з елементами формовки, видавлювання, прошивки, що вимагає деякого ускладнення штампового інструменту (Кухарь, 2012).

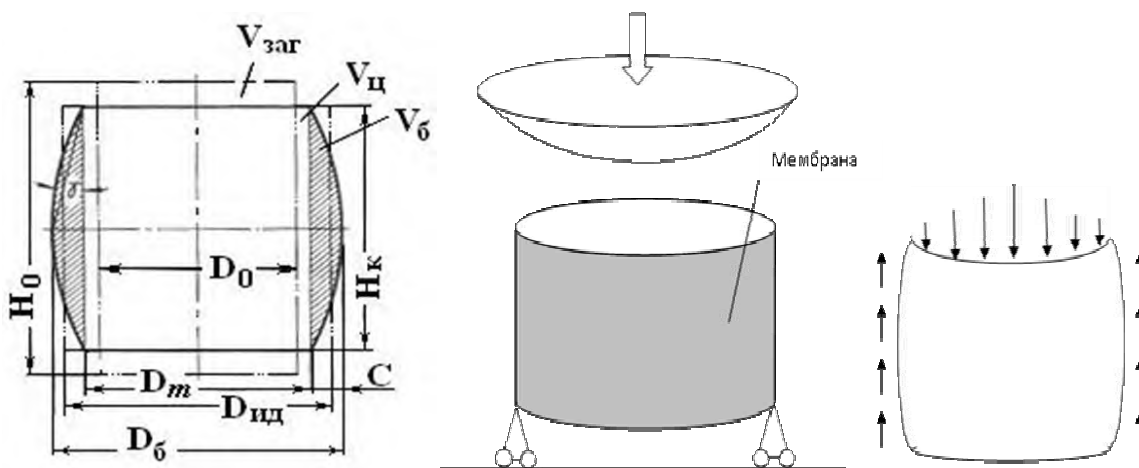


Рис. 1. Схема деформації заготовки

Розглянуто циліндр з одним вільним торцем (рис.1). Дискретизація граничних умов проведено, як в Штефан та Величко (2014), функція Ері записана за допомогою поліномів Лежандра (Shtefan & Zasovenko, 2018).

При чисельному моделюванні (рис. 2) використанні наступні параметри: радіус основи та висота заготовки прийнято рівними 1, коефіцієнт Пуассона прийнято рівним 0,4, навантаження верхньої основи пропорційне 0,1.

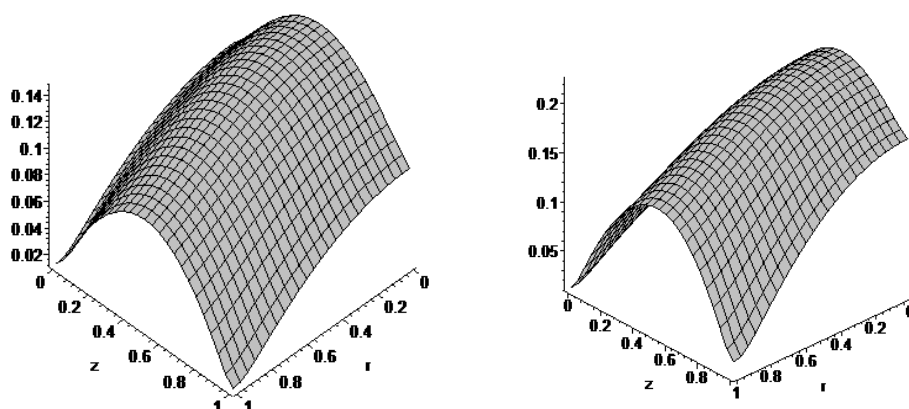


Рис. 2. Функція $F(r, z)$ при навантаженнях $p_0 = p_h$ и $p_h = 2p_0$

Під час математичного моделювання за допомогою пакету MAXIMA виявлено такі ефекти (Штефан & Величко, 2017):

1) положення точки екстремуму функції енергії формозміни на зовнішній межі при висоті циліндру 1 практично не залежить від механічних характеристик плити, інакше кажучи, положення цієї точки є геометричною характеристикою циліндра;

2) положення нормального перетину, який має максимальну площу, практично не залежить від механічних характеристик циліндра;

3) значення функції потенціальної енергії формозміни збільшується відповідно до збільшення коефіцієнта Пуассона.

Адекватність побудованої математичної моделі перевірено МСЕ. В подальшому планується провести детальний чисельний аналіз положень максимумів напружень при одночасному деформуванні обох основ циліндра. Отримані результати також планується узагальнити на випадок багат шарових циліндрів, виготовлених з різних матеріалів, що застосовуються, наприклад, у газовій промисловості.

Список літератури

- Shtefan, T., & Zasovenko, A. (2018). Numerical and analytical solution of the problem on deformation of the circular cylinder using the Bessel functions. *Вісник ТНТУ*, (2), 79–86. https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2018.02.079
- Кухарь, В. В. (2012). Макропоказатели формоизменения и работа деформации при осадке заготовок выпуклыми плитами. *Вісник Національного технічного університету України «КПІ». Серія «Машинобудування»*, (64), 227–233. <http://visnyk-mm.kpi.ua/uk/-64/75-2012-09-05-12-46-59.html>
- Штефан, Т. А., & Величко, Е. В. (2017). Численно-аналитическое решение задачи об осесимметрической деформации в цилиндре под действием сжимающих нагрузок. *Механика машин, механизмов и материалов*, (4), 89–95. <https://mmmm.by/pdf/ru/2017/04/11.pdf>
- Штефан, Т. А., Величко, Е. В. (2014). Энергия формоизменения в коротком цилиндре при аксиальной симметрической деформации. *Деформация и разрушение материалов*, (6), 12–18.

Деякі паралельні алгоритми розв'язання задач цифрової фільтрації

М. С. Яджак

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів, Україна
yadzhak_ms@ukr.net*

Для розв'язання одно- та двовимірної задач цифрової фільтрації запропоновано паралельні алгоритми з автономними гілками. Для побудови цих алгоритмів використано ідеї методу пірамід для розпаралелювання циклів. Наведено оцінки складності та прискорення запропонованих паралельних алгоритмів.

Ключові слова: задача цифрової фільтрації, режим реального часу, паралельний алгоритм, метод пірамід, прискорення обчислень, обчислювальна система.

Задачі цифрової фільтрації (ЗЦФ) зазвичай виникають під час попереднього опрацювання сигналів, плоских та просторових зображень, великих масивів експериментальних даних тощо. У багатьох випадках такі задачі необхідно розв'язувати в режимі реального часу. З цією метою був запропонований квазі-систолічний метод обчислень (Анисимов & Яджак, 2008; Яджак & Тютюнник, 2013), на підставі якого розроблено оптимальні за швидкодією та використанням пам'яті паралельноконвеєрні алгоритми розв'язання ЗЦФ будь-якої вимірності. Оптимальність доводилась у відповідних класах алгоритмів, які є еквівалентними за інформаційним графом з точністю до виконання співвідношень асоціативності та комутативності для операції додавання. Розроблені алгоритми були зорієнтовані на реалізацію на спеціалізованих обчислювальних системах — квазісистолічних структурах (Яджак, 2007; Яджак та ін., 2014). Однак, ці структури як обчислювальні засоби не є доступними для широкого кола користувачів. Тому в разі, коли маса та розміри обчислювальної системи не є суттєвими обмеженнями, для розв'язання задач фільтрації потрібно використовувати сучасні універсальні засоби (багатоядерні комп'ютери, кластери, гібридні архітектури).

Формулювання проблеми. Розгляньмо одновимірну ЗЦФ, яка загалом передбачає переобчислення значень x_{i_1} ($i_1 = \overline{1, l_1}$) за формулою

$$x_{i_1} = \sum_{s_1=-m_1}^{m_1} x_{i_1+s_1} f_{s_1}, \quad (1)$$

де вагові коефіцієнти f_{s_1} ($s_1 = -m_1, m_1$), а також «заграничні» значення $x_{1-m_1}, x_{2-m_1}, \dots, x_0; x_{l_1+1}, x_{l_1+2}, \dots, x_{l_1+m_1}$ є відомими константами. За умовою задачі здійснюється C переобчислень згладжування на N точках через рухоме вікно розміром M , де $N = l_1; M = 2m_1 + 1$. Зазвичай для більшості практичних задач виконуються нерівності: $M \ll N, C \ll N$.

У двовимірному випадку формула (1) набуває вигляду (2).

$$x_{i_1, i_2} = \sum_{s_1=-m_1}^{m_1} \sum_{s_2=-m_2}^{m_2} x_{i_1+s_1, i_2+s_2} f_{s_1, s_2}. \quad (2)$$

У разі переобчислення значень x_{i_1, i_2} ($i_1 = \overline{1, l_1}$; $i_2 = \overline{1, l_2}$) згідно з (2) одержуємо, що $N = l_1 l_2$; $M = (2m_1 + 1)(2m_2 + 1)$.

Розглянемо послідовний алгоритм (3) розв'язання одновимірної задачі фільтрації.

$$\begin{aligned} & \text{FOR } t = 1, C \quad \text{DO} \\ & \{ \text{FOR } i_1 = 1, l_1 \quad \text{DO} \\ & \quad \{ p = 0 \\ & \text{FOR } s_1 = -m_1, m_1 \quad \text{DO} \\ & \quad \{ p = p + x_{i_1+s_1}^{t-1} * f_{s_1} \} \\ & \quad x_{i_1}^t = p \} \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Із (3) випливає, що всі значення змінних для переобчислення на t -му кроці беруться з $(t-1)$ -го кроку. Тут $x_{i_1}^0, x_{i_1}^t$ — відповідно початкове значення змінної x_{i_1} та значення цієї ж змінної, переобчислене на t -му кроці. Для свого виконання наведений алгоритм потребує час $T_1 = t_{op}(2m_1+1)Cl_1$, де t_{op} — час виконання подвійної операції $a + b * c$.

Аналогічно можна записати послідовний алгоритм (4) розв'язання двовимірної ЗЦФ.

$$\begin{aligned} & \text{FOR } t = 1, C \quad \text{DO} \\ & \{ \text{FOR ALL } (i_1, i_2) \in \{(i_1, i_2) : 1 \leq i_1 \leq l_1; 1 \leq i_2 \leq l_2\} \quad \text{DO} \\ & \quad \{ p = 0 \\ & \text{FOR ALL } (s_1, s_2) \in \{(s_1, s_2) : -m_1 \leq s_1 \leq m_1; -m_2 \leq s_2 \leq m_2\} \quad \text{DO} \\ & \quad \{ p = p + x_{i_1+s_1, i_2+s_2}^{t-1} * f_{s_1, s_2} \} \\ & \quad x_{i_1, i_2}^t = p \} \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $x_{i_1, i_2}^0, x_{i_1, i_2}^t$ — відповідно початкове значення змінної x_{i_1, i_2} та значення цієї ж змінної, переобчислене на t -му кроці. Для свого виконання алгоритм (4) потребує час $T_2 = t_{op}(2m_1+1)(2m_2+1)Cl_1 l_2$.

Метою роботи є розроблення та аналіз паралельних алгоритмів з автономними гілками для розв'язання одно- та двовимірної ЗЦФ з використанням синхронної схеми обчислень (Valkovskii, 1994).

Розроблення паралельних алгоритмів. На підставі використання ідей методу пірамід (Вальковський, 1989) для розпаралелювання циклів стосовно (3) одержуємо паралельний алгоритм (5).

$$\begin{aligned}
 &FOR \quad k = 1, l_1 \quad DO \quad PAR \\
 &\quad \{ FOR \quad t = 1, C \quad DO \\
 &\quad \quad \{ FOR \quad i_1 = \max\{1, m_1(t - C) + k\}, \min\{l_1, m_1(C - t) + k\} \quad DO \\
 &\quad \quad \quad \{ p = 0 \\
 &\quad \quad \quad FOR \quad s_1 = -m_1, m_1 \quad DO \\
 &\quad \quad \quad \quad \{ p = p + x_{i_1+s_1}^{t-1} * f_{s_1} \} \\
 &\quad \quad \quad \quad x_{i_1}^t = p \} \} \}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

У даному разі тип паралельності *PAR* є *AUTON* (autonomous) (Вальковський, 1989), тобто конструкція (5) задає паралельне виконання l_1 гілок, які не взаємодіють між собою, тобто виконуються автономно. Час функціонування цього алгоритму обчислюється за формулою

$$T_p = t_{op}(2m_1+1)C(1 + m_1(C - 1)).$$

Процес згладжування можна дещо покращити, якщо в (5) останні чотири рядки замінити на такий фрагмент:

$$\begin{aligned}
 &\quad \{ p_{i_1} = 0 \\
 &FOR \quad s_1 = -m_1, m_1 \quad DO \\
 &\quad \{ p_{i_1} = p_{i_1} + x_{i_1+s_1} * f_{s_1} \} \\
 &\quad x_{i_1} = p_{i_1} \} \} \}.
 \end{aligned}$$

Одержана внаслідок цього паралельна конструкція дозволить у кожній гілці під час переобчислення значення деякої змінної на заданому кроці використовувати значення, уже переобчислені на цьому ж кроці.

Застосовуючи метод пірамід для розпаралелювання циклів стосовно (4), одержуємо паралельний алгоритм (6) для розв'язання двовимірної ЗЦФ.

$$\begin{aligned}
 &FOR \quad ALL \quad (k_1, k_2) \in \{(k_1, k_2) : 1 \leq k_1 \leq l_1; 1 \leq k_2 \leq l_2\} \quad DO \quad PAR \\
 &\quad \{ FOR \quad t = 1, C \quad DO \\
 &\quad \quad \{ FOR \quad i_1 = \max\{1, (t - C)m_1 + k_1\}, \min\{l_1, (C - t)m_1 + k_1\} \quad DO \\
 &\quad \quad \quad \{ FOR \quad i_2 = \max\{1, (t - C)m_2 + k_2\}, \min\{l_2, (C - t)m_2 + k_2\} \quad DO \\
 &\quad \quad \quad \quad \{ p = 0 \\
 &\quad \quad \quad \quad FOR \quad ALL \quad (s_1, s_2) \in \{(s_1, s_2) : -m_1 \leq s_1 \leq m_1; -m_2 \leq s_2 \leq m_2\} \quad DO \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad \{ p = p + x_{i_1+s_1, i_2+s_2}^{t-1} * f_{s_1, s_2} \}
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$x_{i_1, i_2}^t = p \} \} \} \}.$$

У цьому разі $PAR \in AUTON$ і (6) задає паралельне виконання $l_1 l_2$ автономних гілок. Час виконання даного алгоритму обчислюється за формулою

$$T_{p_1} = t_{op}(2m_1+1)(2m_2+1)C(1 + ((2/3)m_1 m_2(2C-1) + m_1 + m_2)(C-1)).$$

Аналогічно, як і в (5), у (6) можна дещо покращити процес згладжування.

Оцінювання прискорення паралельних обчислень. На підставі оцінок часу виконання паралельних алгоритмів (5), (6) та відповідних послідовних алгоритмів (3), (4) отримуємо оцінки прискорення паралельних обчислень. Зокрема, прискорення алгоритму (5) обчислюватимемо за формулою

$$S_{(5)} = T_1 / T_p = l_1 / (1 + m_1(C-1)).$$

Оскільки на практиці $l_1 \gg C$, $l_1 \gg m_1$ і l_1 відрізняється ($l_1 > m_1 C$) від $m_1 C$ не менш, як на декілька порядків, то прискорення $S_{(5)}$ буде суттєвим. Наприклад, для $l_1 = 1000$, $m_1 = 1$, $C = 5$ одержуємо, що $S_{(5)} = 200$, а для $l_1 = 10000$, $m_1 = 7$, $C = 15$ маємо: $S_{(5)} \approx 101,1$.

Прискорення паралельного алгоритму (6) подається формулою

$$S_{(6)} = T_2 / T_{p_1} = l_1 l_2 / (1 + (2m_1 m_2(2C-1) / 3 + m_1 + m_2)(C-1)).$$

Зазвичай $l_1 \gg m_1$, $l_2 \gg m_2$, $l_1 \gg C$, $l_2 \gg C$ та l_1, l_2 відрізняються ($l_1 > m_1 C^2$, $l_2 > m_2 C^2$) від $m_1 C^2$, $m_2 C^2$ відповідно не менш, як на декілька порядків, тому $S_{(6)}$ буде суттєвим. Зокрема, для $l_1 = 100$, $l_2 = 200$, $C = 5$, $m_1 = m_2 = 1$ отримуємо $S_{(6)} \approx 606$, а для $l_1 = l_2 = 1000$, $m_1 = m_2 = 5$, $C = 10$ маємо: $S_{(6)} \approx 340$.

Отже, нами запропоновано ефективні паралельні алгоритми з автономними гілками для розв'язання одно- та двовимірної ЗЦФ на багатоядерних комп'ютерах, кластерах та гібридних архітектурах. Здійснено програмну реалізацію цих алгоритмів на багатоядерному комп'ютері, унаслідок чого одержано оцінки їх реального прискорення, які підтверджують наведені вище теоретичні результати.

Список літератури

- Valkovskii, V. A. (1994). An optimal algorithm for solving the problem of digital filtering. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 4(3), 241–247.
- Анисимов, А. В., & Яджак, М. С. (2008). Построение оптимальных алгоритмов массовых вычислений в задачах цифровой фильтрации. *Кибернетика и системный анализ*, 44(4), 3–14.
- Вальковский, В. А. (1989). *Распаралеливание алгоритмов и программ. Структурный подход*. Москва: Радио и связь.
- Яджак, М. С. (2007). Квазісistolічні обчислювальні структури та їх застосування. *Академічний вестник*, (20), 53–57.

- Яджак, М. С., & Тютюнник, М. И. (2013). Оптимальный алгоритм решения задачи цифровой фильтрации с использованием адаптивного сглаживания. *Кибернетика и системный анализ*, 49(3), 142–151.
- Яджак, М. С., Тютюнник, М. И., & Бекас, Б. О. (2014). Апаратні засоби реалізації паралельно-конвеєрних алгоритмів цифрової фільтрації з використанням адаптивного згладжування. *Науковий вісник НЛТУ України*, 24(6), 335–344. https://nv.nltu.edu.ua/Archive/2014/24_6/54.pdf

**Матеріали VIII Міжнародної науково-практичної конференції.
«Математика в сучасному технічному університеті». Секція I.
Застосування математики в суміжних науках**

Повний текст матеріалів можна знайти на сторінці

<http://matan.kpi.ua/uk/mvstu8.html>