

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Секція II
МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ
МАТЕМАТИКИ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

Матеріали
VIII Міжнародної
науково-практичної конференції
Київ, 26–27 грудня 2019 року

<http://matan.kpi.ua/uk/mvstu8.html>

Вінниця
2020

УДК 51(082)
МЗ4

Матеріали VIII Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 27–28 грудня 2019 р. — Вінниця: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2020. — 336 с. — Укр., рос., англ., білорус.

Материалы VIII Межд. науч.-практ. конф. «Математика в современном техническом университете», Киев, 27–28 декабря 2019 г. — Винница: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2020. — 336 с. — Укр., рус., англ., белорус.

Proceedings of Eighth International Scientific-Practical Conference “Mathematics in Modern Technical University”, Kyiv, December, 27–28, 2019. Vinnytsia: Publisher FOP Kushnir Yu. V., 2020. 336 pp.

ISBN 978-617-7721-27-6

Програмний комітет

VIII Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»:

Проф. О. І. Клесов (Київ, Україна), (голова)
Проф. Н. О. Вірченко (Київ, Україна)
Проф. О. В. Іванов (Київ, Україна)
Проф. П. В. Задерей (Київ, Україна)
Доц. О. О. Диховичний (Київ, Україна)

Організаційний комітет

Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»

Доц. В. О. Гайдей (Україна), голова
В. В. Бовсуновська (Київ, Україна)
Ю. Є. Приходько (Київ, Україна)

УДК 51(082)

Матеріали подано в авторській редакції

ISBN 978-617-7721-27-6

©Автори

©КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

Про деякі проблеми викладання курсу вищої математики студентам-першокурсникам технічних напрямків підготовки

В. О. Варивода¹, О. М. Гришко¹, О. О. Гурнік²

¹Національний авіаційний університет, Київ, Україна

*²Коледж інженерії та управління Національного авіаційного університету,
Київ, Україна
viktoriaana@ukr.net*

Розглянуто проблему якості української вищої освіти, зокрема, математичної. Викладено роль математичної культури при формуванні світогляду висококваліфікованого фахівця. Запропоновано можливі підходи до викладання математики студентам-першокурсникам технічних напрямків підготовки.

Ключові слова: математична освіта, математичні знання, інтелектуальний потенціал, математична культура.

Україна готує і має значну кількість висококваліфікованих фахівців з інформаційно-комунікаційних технологій (далі — ІКТ), математики, кібернетики; у країні постійно зростає та поновлюється парк комп'ютерної техніки, сучасних систем та засобів телекомунікації та зв'язку.

Розвиток інновацій у всіх галузях життя суспільства висуває нові вимоги до професійних якостей сучасних фахівців. Новий етап розвитку суспільства характеризується якісною зміною діяльності фахівця, що безпосередньо пов'язано з широким застосуванням математичного моделювання явищ з певної галузі. У сучасному світі математична освіта відіграє особливу роль у підготовці майбутніх фахівців у галузі математики, інформатики, ІКТ, техніки, виробництва, економіки тощо. Разом з тим, у математичній освіті сьогодні накопичено ряд негативних тенденцій, серед яких можна виділити різке зниження рівня математичної культури сучасної молоді, її пізнавальної активності й самостійності, що погіршує якість знань і умінь студентів вищих навчальних закладів, уповільнює їхній інтелектуальний розвиток.

Міжнародні дослідження якості української вищої освіти засвідчують, що математична та природнича освіта поки що мають відносно непогані показники, за якими країна посідає місця не нижче 50-го. Своєю чергою загальнонаціональне опитування, яке проводилося Фондом «Демократичні ініціативи» (грудень 2016 р.), указує на невисоку оцінку якості вищої освіти в нашій державі (приблизно на рівні 3-х балів за 5-бальною шкалою). Більше половини респондентів вважають, що через реформування вищої освіти мають бути вирішеними такі основні її проблеми:

- 1) недостатня підготовка випускників вишів до виходу на ринок праці;
- 2) низький науково-культурний рівень студентів;
- 3) слабка зацікавленість молоді в отриманні саме якісної освіти.

У цей час освіта в Україні вже не перший рік перебуває у стані активного розвитку й удосконалення, але цьогорічні результати ЗНО з математики насторожують — збільшилась кількість тих, хто не зміг подолати бар'єр «склав/не склав» (2016-й — 14,82%, 2019-й — 18,17%), тобто знання школярів з року в рік стають дедалі гіршими. Автори на власному досвіді переконалися в цьому.

В інформаційному суспільстві вважається, що саме вивченню математики належить розвиваюча функція. Важливо вивчати математичні об'єкти, освоювати теорії та методи не стільки для подальшого їх використання в розв'язанні профільних задач, скільки для активації розумового апарату людини, набуття навичок самостійно мислити, що є незамінним при оцінці нестандартних ситуацій і відшуванні розв'язку незнайомих задач.

Однак, за останні два-три роки автори статті, працюючи в Національному авіаційному університеті, відзначають неприязнь, а часом і «несприйняття» студентами-першокурсниками занять з математики, хоча математичні знання мають сприяти формуванню професійної компетентності студентів і є необхідною складовою задовільної технічної освіти. Студенти не відчують ціннісних аспектів її вивчення, не бачать, за їхніми словами, шляхів подальшого використання математичних знань у профільних дисциплінах і в майбутній професії. Можливо, це пов'язано зі слабкою математичною підготовкою сьогоденних випускників середніх шкіл — очевидно що, якщо матеріал незрозумілий, то він і нецікавий, і непотрібний. А на питання, яких студентів очікувати на перших курсах завтра, відповідь надає міністерка освіти Ганна Новосад, презентуючи результати дослідження за даними PISA (2019 р.): «36% наших 15-річних учнів не досягають навіть базового рівня знання з математики. Вони мають проблеми із завданнями, де потрібно використовувати прості стратегії розв'язування, процентні співвідношення, оперувати дробами й десятковими числами». Радниця міністерки освіти і науки Іванна Коберник утішає: «... з огляду на рівень фінансування української освіти, це ще відносно непогані показники».

Викладання фундаментальних дисциплін, зокрема математики, на достатньо високому рівні вже на першому курсі розраховано на наявність якісної математичної підготовки зі школи. Зрозуміло, що недостатній рівень цієї підготовки надалі зменшує можливості для успішного навчання у виші, але першокурсники такі, які є і найближчим часом кращими не стануть. Доведеться допрацьовувати за школу. Щоб частково послабити проблему недостатньої підготовленості можна, наприклад, розмістити в посібниках додатки з означеннями та формулами зі шкільного курсу, які потрібні для розгляду нових тем. Або оскільки багато термінів у школі не використовуються як наукові, то на вступних лекціях бажано їх роз'яснити. Наприклад, що «означення» — це поняття, а «ознака» — це судження про поняття; також доводиться розтлумачувати суть методу доведення «від супротивного».

Викликають питання у студентів і терміни «необхідність»-«достатність», які доводиться пояснювати буквально «на пальцях». Тут можна запропонувати застосування апарату математичної логіки. Наприклад, маємо два простих ви-

словлювання: чотирикутник є ромбом (a) і дві протилежні сторони чотирикутника паралельні (b), до яких можна застосувати операції: імплікації $a \rightarrow b$ (якщо a , то b) та еквівалентності $a \leftrightarrow b$ (a тоді і лише тоді, коли b). Отримані за допомогою операцій твердження можуть бути істинними (позначатимемо: $= 1$) або хибними ($= 0$). Тоді:

- твердження: якщо чотирикутник є ромбом, то дві його протилежні сторони паралельні — істинне, тобто $a \rightarrow b = 1$;

- твердження: якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні, то чотирикутник є ромбом — хибне, тобто $b \rightarrow a = 0$ (наприклад, трапеція має паралельні основи, але не є ромбом);

- твердження: чотирикутник є ромбом тоді й лише тоді, коли дві його протилежні сторони паралельні — хибне, тобто $a \leftrightarrow b = 0$ (як висновок з перших двох тверджень).

Останнім часом з'явилася ще одна методологічна проблема викладання математичних дисциплін — так звана *кліпова* система мислення. Унаслідок розвитку ІКТ сучасні студенти інформаційний матеріал звикають проглядати швидко й короткими чергами («кліпово»). Нейробіологи вказують на зниження здатності розуміти складні тексти й інтерпретувати їх, установлювати глибинні зв'язки. Через це послаблюється критичне мислення. Оскільки укріплення аналітично-критичних здібностей особистості відбувається через набуття власного конкретного досвіду, то доцільно пропонувати студентам проводити самостійне конспектування окремих теоретичних моментів саме за паперовими підручниками та супроводжувати розв'язки індивідуальних завдань детально прописаним обґрунтуванням з обов'язковим подальшим захистом виконаної роботи. Тим більше, що згідно до робочих навчальних програм з вищої математики, що затверджені в НАУ, на самостійну роботу студентів виділено немало часу (приблизно половина відведених для засвоєння кожного кредитного модуля навчальних годин).

Також новою рисою першокурсників є неспроможність утримувати увагу протягом усього заняття, особливо, якщо це лекція. Тому для утримання уваги та підвищення зацікавленості предметом потрібно під час лекцій робити творчі перерви, під час яких можна запропоновувати студентам, наприклад, задачі-блискавки (знайомлячись з формулою Ойлера — обчислити комплексне число $e^{2019\pi i}$, під час розгляду канонічних рівнянь кривих другого порядку —

вказати ексцентриситет і координати фокусів шкільної гіперболи $y = \frac{1}{x}$), підк-

реслювати постійний зв'язок викладеної теорії з життям (планети Сонячної системи рухаються по еліпсах зі спільним фокусом, у якому знаходиться Сонце; математичні формули містять функції: довжина кола, площа трикутника; одне й

те саме диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx} = ky$ описує характер радіоактивного роз-

паду, швидкість розмноження бактерій, зміну атмосферного тиску й температури середовища, безперервне наростання грошового внеску до банку, хід хімічної реакції тощо), надавати історичні довідки (правило Лопітала першим відкрив Бернуллі, позначення чисел e і π належить Ойлеру), ознайомлювати з історією виникнення певних задач (в 19 ст. Абель і Галуа довели, що рівняння вище четвертого степеня в радикалах не розв'язується, що привело до застосування теорії наближених обчислень; задачі про знаходження площі криволінійної фігури привели до поняття визначеного інтеграла, задачі про обчислення маси неоднорідного тіла — до поняття потрійного інтеграла).

Іншою проблемою є небажання та невміння працювати самостійно. Першокурсники намагаються навчатися, як вони це робили у школі, просто отримуючи готові знання. Часто в середній школі технологія навчання базується на переписуванні й запам'ятовуванні навчального матеріалу з різних галузей із зосередженням на розв'язанні базових стандартних задач, що розв'язуються за певними схемами. Метою математичної освіти у виші має бути перехід від репродукції накопичених знань до самостійного продуктивного мислення, що становить для багатьох складну проблему. З метою подолання такої пасивності студентів можна пропонувати їм самостійно розглянути окремі задачі, що близько пов'язані з викладеним матеріалом, але потребують деякого теоретичного і творчого опрацювання. Заохоченням за таку працю мають бути «додаткові» бали, що нараховуються за результатами захисту розв'язаної задачі.

Одним із засобів ознайомлення студентів перших курсів з елементами математичної дослідницької діяльності є залучення їх до виконання розрахунково-графічних робіт з урахуванням специфіки фахової спрямованості. Під час виконання розрахунково-графічних робіт студентам для досягнення результату доводиться самостійно (з незначною консультаційною допомогою викладача) оволодіти цілим комплексом суджень про досліджувані математичні об'єкти й установити логічні зв'язки між ними. Диференційований підхід оцінювання результатів виконаної студентами роботи, безумовно, стимулює студентів підвищувати власні результати. При цьому талановитим студентам після виконання завдань базового рівня пропонуються додаткові цікаві задачі для поглибленого дослідження. Усі вдало виконані завдання не лише додають рейтингові бали, а й можуть стати приводом для подальшої творчої розробки досліджуваної проблеми.

Для посилення прикладної спрямованості математичних дисциплін викладачам-математикам слід підтримувати постійні методичні й наукові контакти з викладачами спеціальних кафедр. Задача формування обізнаного спеціаліста, який буде здатен систематично використовувати математичні методи, обчислювальну техніку у своїй майбутній практичній роботі, не може бути вирішена лише силами математичних кафедр. Для досягнення спільної мети — розвитку математичного мислення і формування математичних знань інженера — потрібно залучати кафедри, які беруть участь у підготовці студента до обраної ним спеціальності.

На практичних заняттях математичні задачі бажано пропонувати із профільним змістом, використовуючи термінологію спеціальних кафедр. Як правило, зміст таких задач полягає в тому, що студенту надається умова, що є деякою досить спрощеною моделлю реальної ситуації, яку потрібно перекласти спочатку на математичну мову, тобто запровадити невідомі і скласти систему обмежень (рівнянь і нерівностей), а потім розв'язати її.

В Україні, як і в усьому цивілізованому світі, престижні роботодавці приділяють значну увагу оцінюванню інтелектуального й лідерського потенціалів майбутнього працівника, особливо щодо випускників вишів в галузях інформаційних технологій та комп'ютерної техніки. Звісно, класичні знання і набуті навички є цінними активами, проте, для успішності в майбутньому важливим стає здатність випускника вищої школи орієнтуватися в сучасному інформаційному просторі, адаптуватися до змін, уміти вирішувати проблеми в умовах неповної, а часто й суперечливої інформації, самостійно навчатися протягом життя. Отже, основною метою сучасної вищої освіти є формування вмінь утворювати нові знання і втілювати їх в інновації. Якість математичної освіти залежить від успішності вирішення таких методичних проблем навчання математичним дисциплінам як невміння працювати самостійно, недостатній рівень базових знань зі шкільного курсу математики, низький рівень мотивації до вивчення математики, зміна якості уваги і способу мислення внаслідок впливу сучасних технологій.

Підбиваючи підсумки, хочеться відмітити, що університет передбачає саме творчу співпрацю викладача та студента в усіх видах навчального процесу. Дуже важливою є креативна складова навчального процесу, а також підлаштування деякою мірою викладача до рівня математичної підготовки студентів. Ці всі фактори впливають на ставлення студентів до інженерної науки та інженерної діяльності в цілому, а також формують світогляд майбутнього висококваліфікованого фахівця.

Список літератури

- Варивода, В. О., & Гришко, О. М. (2016). Зв'язок базових математичних понять із життям як особливий аспект мотивації. У *Матеріалах Дев'ятої Міжнародної науково-практичної конференції «Обдаровані діти — інтелектуальний потенціал держави»* (с. 128–130). Київ: Інститут обдарованої дитини НАПН України.
- Варивода, В. О., & Гришко, О. М. (2017). Про активізацію логічного мислення студентів при вивченні курсу вищої математики. У *Матеріалах Вісімнадцятої Міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука* (с. 202–204). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.
- Волкова, Н. П. (2007). *Педагогіка*: Київ: Академвидав.

Критериальный выбор методов аппроксимации в интерактивном режиме

В. А. Гришина¹, В. А. Гришин²

¹Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина

²Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина
grishin@onu.edu.ua

На примере темы «Аппроксимация функций» дисциплины «Численные методы» широко применяемой при моделировании различных процессов, предлагается метод адаптивного выбора вида аппроксимации (полинома Лагранжа, МНК, линейного сплайна, кубического сплайна, тригонометрической интерполяции) по ряду критериев и с элементами обучения демонстрируется в интерактивном режиме.

Ключевые слова: адаптивная система, критериальный выбор, метод аппроксимации, интерактивный режим с элементами обучения.

Интенсивное развитие и внедрение информационных технологий практически во все сферы деятельности человечества неизбежно приводит к необходимости изменять и характер этой деятельности. Этот процесс проявляется и в сфере высшего образования.

Традиционно консервативная образовательная система теперь нуждается в глубокой модернизации в соответствии с революционно изменяющейся информационной средой.

Ранее доступ к информации занимал достаточно много времени: поиск литературы в библиотеке, заказ литературы, ожидание выполнения заказа и т. д. А чтобы получить доступ к уникальным изданиям, нужно было порой ехать в другой город. Поэтому носитель информации, т.е. тот, кто знал данный вопрос и мог поделиться этой информацией, был очень ценен. Таким образом, само обладание знаниями представляло большой практический интерес. Соответственно и в обучении был сильный акцент на запоминание большого количества информации.

Само по себе обладание знаниями не потеряло своей ценности и сейчас, но акцент в современном обучении следует все же перенести на умение быстро найти в Интернет пространстве нужную (и качественную) информацию, освоить новые знания, а затем применить их к решению поставленной задачи. Это соответствует запросам практической жизни: например, в последнее время на собеседованиях в IT-компаниях все шире, помимо тестов, предлагаются задания, в которых нужно освоить новую для кандидата информацию и успешно ее использовать. Именно этот навык более всего интересует работодателя.

Рассмотрим конкретную область преподавания — лабораторный практикум по численным методам в вузе. Эта область ярко демонстрирует эволюцию процесса обучения в вузе.

До широкого внедрения компьютеров основной упор в лабораторном практикуме делался на выполнение конкретных расчетов по вычислительным методам с использованием расчетных схем, позволяющих контролировать без-

ошибочность вычислений. Очень важным было, чтобы студент освоил эти схемы и умел их применять. При этом круг задач, решаемых студентом, был очень узок, а задача выбиралась такой, чтобы решение было заведомо успешным.

С появлением компьютерной техники в вузах расчеты стали возможны для более объемных задач, изменились используемые методы, так как менее критичным стал объем вычислений, выполняемых студентом. Однако по-прежнему оставался тот же недостаток — ограниченное число решаемых заданий.

Использование современных возможностей информационных технологий позволяет построить лабораторный практикум как обучающую систему, которая позволяет широко осветить рассматриваемую тему и дать навык самостоятельного решения прикладных задач по данному разделу, включая выбор необходимого метода и параметров, наиболее эффективных для данного случая.

Одной из наиболее востребованных тем дисциплины «Численные методы» является тема «Аппроксимация функций». Это связано прежде всего со стремительным расширением областей использования компьютерной графики, моделированием различных процессов в статистических задачах, задачах обработки и анализа изображений, сжатия информации и т.д. В то же время ни один из методов аппроксимации не является универсальным и выбор удачного способа аппроксимации является неформальным процессом. Для того, чтобы успешно решать задачи аппроксимации необходимо познакомиться с возможными проблемами применения метода, научиться грамотно выбирать и использовать наиболее эффективный метод аппроксимации.

В соответствии с этим, предлагаемый подход к построению лабораторного практикума «Аппроксимация функций» позволяет в ходе выполнения лабораторной работы в интерактивном режиме с элементами обучения ознакомить студента с преимуществами и недостатками различных методов аппроксимации, научить ориентироваться в правильном выборе метода и его применении для решения поставленной задачи. В лабораторном практикуме предложены для изучения основные методы аппроксимации функций: аппроксимация полиномами Лагранжа, линейными и кубическими сплайнами, методом наименьших квадратов, тригонометрическая интерполяция (Бахвалов и др., 2010; Костомаров & Фаворский, 2004; Калиткин, 2011).

Лабораторный практикум включает в себя:

- блок тестирования знаний,
- краткие теоретические сведения,
- обучающий блок,
- блок контрольных заданий.

Перед началом выполнения лабораторной работы студент выполняет тестовые задания. Получив положительный результат, студент может далее переходить к следующему этапу. В случае неудачного выполнения тестовых заданий он получает список вопросов, на которые был дан неправильный ответ. Далее студент может обратиться к разделу с теоретическими сведениями и, изучив соответствующий материал, вновь попытаться пройти тестирование.

На следующем обучающем этапе студент в интерактивном режиме выполняет аппроксимацию заданных функций. Адаптивная система обучающего блока позволяет осуществлять критериальный выбор метода аппроксимации и настраивать параметры аппроксимации для достижения желаемого результата. При этом он пользуется направляющими подсказками, изменяя параметры аппроксимирующей функции и используемые методы. Примеры подбираются так, чтобы продемонстрировать возможные проблемы аппроксимации данным методом и показать, какие характеристики функции могут влиять на выбор способа аппроксимации. На обучающем этапе в каждом примере демонстрируется, при каком выборе параметров аппроксимация данным методом наиболее успешна, какие характеристики функции влияют на это, какие могут возникнуть сложности при использовании метода. При этом результаты аппроксимации визуализируются графически, а также оценивается погрешность аппроксимации. Предусмотрено задание функции как аналитически, так и таблично. В качестве удобного средства для реализации хорошего интерфейса можно выбрать язык C# (Зибров, 2011).

Целью обучающего этапа является формирование навыка правильного выбора метода аппроксимации и параметров аппроксимирующей функции на основании анализа характеристик заданной исходной функции и заданных критериев.

На следующем контрольном этапе студент получает индивидуальное задание и выполняет его, самостоятельно осуществляя и выбор метода аппроксимации, и параметры аппроксимирующей функции с целью достижения заданной точности аппроксимации.

Современный подход к организации лабораторного практикума при должном выборе тестовых задач способствует более глубокому пониманию и более быстрому изучению предмета, формирует навыки анализа позволяет в сжатые сроки ознакомить студента с широким кругом проблем, сформировать умение делать грамотный выбор эффективного способа аппроксимации в конкретном случае, а также и в интерактивном режиме адаптивно выполнять аппроксимацию функции с достижением заданных критериев аппроксимации.

В заключение отметим, что адаптивная система критериального выбора, как система, может быть использована не только в обучающих системах, но и при решении задач прикладного характера, например, при анализе изображений, сжатии информации, обработке статистических данных и др.

Список литературы

- Бахвалов, Н. С., Лапин, А. В., & Чижонков, Е. В. (2010). *Численные методы в задачах и упражнениях* (2-е изд.). Москва: Бином.
- Зибров, В. В. (2011). *Visual C# 2010 на примерах*. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург.
- Калиткин, Н. Н. (2011). *Численные методы* (2 изд.). Санкт-Петербург: БХВ-Петербург.
- Костомаров, Д. П., & Фаворский, А. П. (2004). *Вводные лекции по численным методам*: Москва: Логос.

Ділові та рольові ігри як метод навчання

О. О. Дем'яненко, Л. А. Репета

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

o.dem@ukr.net, repetala@bigmir.net

У статті розглянуто причини і необхідність використання ділових та рольових ігор під час вивчення математичних дисциплін у сучасних умовах, їх вплив на процес і якість навчання. Проаналізовано позитивні наслідки застосування ігрових форм навчання на активізацію і мотивацію самостійної та командної роботи студентів. Стисло описано деякі приклади проведення таких ігор на перших і старших курсах.

Ключові слова: ділова гра, рольова гра, математичні бої, робота в команді, навчальний процес.

Розвиток сучасного суспільства та технологій висуває нові вимоги до випускників технічних закладів вищої освіти. На перший план виходить вміння працювати в команді, спілкуватися у групі, швидко приймати креативні рішення користуючись набутими знаннями й нести за них відповідальність. Такі вміння важливо сформувати в молоді під час навчання в ЗВО.

Кожного року до закладів вищої освіти приходять велика кількість першокурсників. Вони відрізняються від першокурсників попередніх років. Але, спостерігаючи за ними, розумієш, що протягом останніх кількох років сформувалось нове покоління студентів, яке має спільні риси та особливості і їх треба враховувати в навчальному процесі, зокрема під час вивчення математичних курсів. Зупинимось на деяких важливих моментах.

Можливо зміни в житті суспільства, можливо якісь процеси в середній та старшій школах — це питання не нашого аналізу — сформували молодь, яка не є «колективною» в розумінні старшого покоління з одного боку, і не виділяється яскравим індивідуалізмом з іншого. Тобто, для студенти-першокурсники перебувають у групі, але більшість з них не переймається відповідальністю ні перед цією групою, ні перед самим собою. Вони просто чекають, що хтось цю групу кудись поведе і вони разом з іншими будуть робити те, що хтось скаже. Причому, знаходячись у такій групі, дехто відгороджується і від неї: одягають навушники, або «сидять» в планшеті чи ноутбуку. Зауважимо, що серед студентів є різні особистості, але ми виділяємо загальну тенденцію, яка склалась останніми роками і є викликом для викладачів. Для того, щоб подолати таку пасивність, викликати інтерес до предмету дослідження, спровокувати активні дії до вивчення дисципліни, зокрема математики, необхідно застосовувати нові методичні прийоми. На думку авторів, одними з таких ефективних прийомів є проведення ділових та рольових ігор (Панфилова, 2009).

Головною метою навчання, звичайно, є здобуття нових знань. Добре відомо, що вони успішно засвоюються, якщо здобуті в ігровій формі. Але метою таких ігор є не тільки це. Ще одна мета ділових та рольових ігор — це активізація індивідуальних здібностей і можливостей заради командного успіху. Пра-

цюючи в команді, студент бере на себе частку відповідальності за результат, якого досягає не тільки він особисто, але й уся група. Під час роботи в невеликих групах над спільною проблемою, студенти можуть вільно обговорювати її, пропонувати свої методи та шляхи її розв'язання і не хвилюватись за погану оцінку, якщо вони не є правильними. Бажано, щоб у таких групах були студенти різного рівня підготовки. Тоді більш успішні в навчанні можуть допомогти слабшим. Останні не будуть почувати себе при цьому некомфортно, оскільки спілкуються з однолітками «на рівних». Така спільна праця сприятиме підвищенню самооцінки і, можливо, покращить успіхи в навчанні.

Ще одним з позитивних моментів, які виникають у рольових та ділових іграх — динамічність їх проведення. Тут немає однієї людини, яка розв'язує задачу, а інші, у кращому випадку, переписують її з дошки. Під час рольової гри в кожного члена команди є своя роль, свої обов'язки і завдання. Розуміння, що результат залежить від дій кожного, спонукає до відповідальності за свої дії у грі. Обмеженість гри у часі сприяє виробленню вміння швидко знаходити розв'язання, обґрунтовувати й доводити їх правильність, відстоювати свої ідеї в групі.

На молодших курсах ділові ігри можна проводити як математичні бої. Для цього заздалегідь формулюється тема; групу, або потік студентів ділять на команди; оголошують правила гри і дають матеріал для підготовки. Студенти однієї команди мають змогу разом готуватись, на основі оголошених правил відпрацювати стратегію поведінки під час бою, обрати командира, якщо його не призначив викладач. У відведений час усі збираються разом і починають змагатися в розв'язанні задач або прикладів, запропонованих викладачем. Після такого змагання бали до рейтингу отримує команда-переможець або кожний студент за правильно розв'язаний приклад має власний бонус — це регулюють правила гри. На старших курсах можна, наприклад, створеним командам сформулювати досить складну задачу, яку вони повинні розв'язати за час підготовки, а під час бою захистити свій варіант розв'язку. Проведення таких боїв студенти змушує налагодити комунікацію в команді. Під час підготовки їм обов'язково необхідно розібрати та вивчити матеріал, за темою якого відбувається гра, напрацювати навички в розв'язанні прикладів. Досвід проведених математичних боїв свідчить, що кількість прикладів, які студенти розв'язують готуючись до математичних боїв в рази перевищує ту кількість, яку вони виконують як домашні завдання. Колективна робота в команді розкриває індивідуальні риси характерів і це має позитивне продовження в подальшому спілкуванні студентів між собою і з викладачем.

Наприклад, на потоці математиків 1 курсу фізико-математичного факультету провели ділову гру з назвою «Бій з невизначеними інтегралами». Було сформовано 9 груп по 5 студентів, з яких одна команда експертів та 8 команд учасників гри. Капітан кожної команди учасників отримав набір завдань, які команда буде пропонувати команді-суперниці. Наведімо приклад такого набору:

$$\begin{aligned}
& 1) \int e^x \frac{dx}{x^2}; \quad 2) \int \ln^2 x dx; \quad 3) \int \frac{6x^2 + 5x + 39}{x^3 + x^2 + 5x - 7} dx; \quad 4) \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x} dx; \\
& 5) \int 2^{\sqrt{x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}}; \quad 6) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^2}}; \quad 7) \int \ln^3 x dx; \quad 8) \int \frac{-x^2 - x}{x^3 + 5x^2 + 9x + 6} dx; \\
& 9) \int \frac{1}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}} dx; \quad 10) \int x^{-1} \cdot \sqrt[4]{1 + \sqrt{x}} dx.
\end{aligned}$$

Далі гра йшла за наступним сценарієм: експерти сформували пари команд-суперниць. У кожній парі команда, яка розпочинає гру (команда 1) пропонує команді-суперниці (команда 2) задачу зі свого набору завдань і записує умову задачі на дошці. Представник команди 2 виходить до дошки і починає розв'язувати завдання. У нього є право один раз звернутись за допомогою до своєї команди. Якщо він не може впоратись із прикладом, команді дозволяється замінити учасника. Після того, як приклад розв'язано, експерти оцінюють результат. Якщо, за рішенням експертів, приклад зараховано — це фіксується у протоколі гри і свій приклад пропонує команда 2. Якщо ж, за рішенням експертів, приклад не зараховано, його повинен розв'язати представник команди 1. Якщо задачу розв'язано правильно, то експерти фіксують це у відповідному бланку. Якщо приклад не розв'язано знову, тобто з ним не впоралась жодна з команд, експерти знову визначають, яка в цій парі команд є команда-1, а яка команда-2 і гра починається знову. Виграє та команда, яка першою розв'язала не менше 5 прикладів, причому кожний член команди розв'язав хоча б один приклад. З команд, що програли, експерти формують нові пари і починається новий тур гри. Експертам зараховується бали тоді, коли вони не допускали помилок при оцінюванні розв'язаних прикладів.

Рольові ігри проводяться без попередньої підготовки і вони є альтернативою класичним практичним заняттям або звичайним самотійним роботам. Наприклад, на практичному занятті після написання самотійної роботи, викладач може розділити групу на дві частини і запропонувати цим групам, обмінявшись попередньо роботами, перевірити їх. При цьому кожний студент грає протягом гри дві ролі: студента та викладача і має змогу не тільки розв'язати запропоновані задачі, а й подивитись як їх розв'язали інші й оцінити ці розв'язки.

Висновок. На думку авторів запровадження ділових та рольових ігор є ефективним методичним прийомом у сучасних умовах. Рольові ігри урізноманітнюють проведення практичних занять, підвищують здібності студентів у розв'язанні поставлених задач, навчають їх командної роботи, посилюють почуття відповідальності перед собою та іншими й у динамічній, легкій формі сприяють засвоєнню матеріалу, а також, перевірці якості такого засвоєння.

Список літератури

Панфилова, А. П. (2009). *Инновационные педагогические технологии: Активное обучение*. Москва: Издательский центр «Академия».

Цариця навчального процесу

В. В. Дрозд

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Slava572@ukr.net

Доповідь присвячена питанню змісту та структури такої важливої складової навчального процесу як контрольна робота для студентів спеціальності «Математика».

Ключові слова: контрольна робота, домашнє завдання, типова розрахункова робота, екзамен.

Усім добре відомо, що «зізнання — цариця доказів» (приписують «славнозвісному» прокурору сталінських часів Вишинському, хоча він добре відомий ще з часів Стародавнього Риму), а «кукурудза — цариця полів» (зазвичай приписують Першому секретареві КПРС Хрущову. Насправді це звичайна агітка шістдесятих років).

Жарти жартами, але я беру на себе сміливість наголосити ще один подібний афоризм. Я стверджую, що контрольна робота — це цариця всього навчального процесу у виші. Особливо, коли мова йде про підготовку студентів спеціальності «Математика» при викладанні такого предмету як «Математичний аналіз». Мені скажуть, а як же екзамен? Він тоді хто, цар? Ну, по-перше, якщо екзамен письмовий (а в КПІ всі екзамени з математичних дисциплін саме такі), то він є тією ж контрольною роботою, тільки з іншим статусом. А по-друге, якщо на заключній стадії екзамену відбувається усний діалог між викладачем та студентом (а на фізико-математичному факультеті має місце саме така стратегія), то такий же діалог може відбуватись і після закінчення будь-якої контрольної роботи. Ба навіть не «може», а повинен відбуватись. Єдина відмінність контрольної роботи від екзамену полягає в тому, що традиційна контрольна робота, яка зазвичай проводиться не на останньому занятті семестру, передбачає своє продовження у вигляді роботи студента над своїми помилками. У той час як екзамен — це фінальна крапка вивчення якогось курсу, або частини цього курсу.

Традиційно курс математичного аналізу починається з вивчення таких понять як множини, дії з множинами, відображення множин, потужність множин, точні межі числових множин, послідовності, підпослідовності тощо. Паралельно з цим ми маємо нагоду нагадати студентам основні поняття елементарної математики, а саме: властивості числових множин, графіки елементарних функцій, властивості нерівностей тощо.

Тому перша контрольна робота цього курсу є комбінованою. Вона містить такі приклади:

- 1) побудувати графік функції за допомогою елементарних перетворень;
- 2) довести нерівність;
- 3) довести тотожність методом математичної індукції;
- 4) знайти потужність множини;
- 5) знайти точні межі числової множини, або верхню та нижню границі послідовності. Можливо, цю контрольну варто було б розбити на дві, перша з яких містила б виключно приклади з елементарної математики. Тоді перші два наведені вище приклади можна було б доповнити такими, що містять теми: дії з множинами, обернені тригонометричні функції та логарифми.

Продовжується курс математичного аналізу вивченням таких понять як границя послідовності, границя функції, неперервні функції та їх властивості. Тому друга контрольна робота містить такі приклади:

- 1) знайти границю послідовності;
- 2) знайти границю функції;
- 3) знайти головну частину нескінченно малої функції у заданій шкалі;
- 4) дослідити функцію на неперервність;
- 5) приклад на застосування властивостей функцій, що неперервні на замкненому проміжку.

Але якщо першу контрольну роботу розбити на дві, то другу треба присвятити таким темам як потужність множин, точні межі числових множин, границя послідовності та підпослідовності. Тоді третя контрольна робота повинна складатись виключно з прикладів на границю та неперервність функцій.

Наступна контрольна робота названого курсу присвячена диференціальному численню функцій однієї змінної. Вона містить такі приклади:

- 1) обчислити похідну функції;
- 2) текстова задача на застосування рівняння дотичної та нормалі до графіка функції;
- 3) знайти границю функції, використовуючи формулу Лопітала;
- 4) застосувати формулу Тейлора;
- 5) провести повне дослідження функції за допомогою першої та другої похідної. Ця контрольна робота проводиться наприкінці першого семестру.

Другий семестр курсу математичного аналізу складається з таких тем як невизначений інтеграл, інтеграл Рімана та інтеграл Рімана — Стілтєса. Вивчення кожної з цих тем закінчується відповідною контрольною роботою.

Перша з них містить наступні приклади:

- 1) проінтегрувати раціональний дріб;
- 2) проінтегрувати тригонометричну функцію;
- 3) обчислити невизначений інтеграл, застосувавши формулу інтегрування частинами;
- 4) проінтегрувати ірраціональну функцію;
- 5) проінтегрувати диференціальний біном.

Друга контрольна робота цього семестру присвячена інтегралу Рімана та містить приклади:

- 1) знайти границю послідовності, перетворивши її на інтегральну суму Рімана;
- 2) провести грубу оцінку інтеграла Рімана, не обчислюючи його;
- 3) знайти середнє значення функції на заданому проміжку;
- 4) обчислити площу області на площині або довжину кривої;
- 5) обчислити об'єм тіла або площу поверхні обертання.

Якщо всі попередні контрольні роботи були розраховані на 90 аудиторних хвилин, то остання контрольна робота другого семестру проводиться на протязі 45 хвилин. Вона містить приклади:

- 1) представити функцію яку суму неперервної функції та функції стрибків;
- 2) представити функцію у вигляді різниці двох неспадних функцій;
- 3) обчислити інтеграл Рімана — Стілтєса.

Третій семестр курсу математичного аналізу присвячений числовим та функціональним рядам, нескінченним добуткам, інтегралу Фур'є, диференціальному численню функцій та вектор-функцій багатьох змінних.

Вивчення теми «Числові ряди та нескінченні добутки» закінчується контрольною роботою, яка містить приклади:

- 1) обчислити суму числового ряду;
- 2) дослідити на збіжність числовий ряд з невід'ємними членами;
- 3) дослідити числовий ряд на абсолютну та умовну збіжність;
- 4) обчислити нескінченний добуток;
- 5) дослідити нескінченний добуток на збіжність.

Вивчення теми «Функціональні ряди та інтеграл Фур'є» закінчується контрольною роботою, яка містить приклади:

- 1) знайти область збіжності функціонального ряду або довести рівномірну збіжність функціонального ряду на заданій множині;
- 2) знайти суму степеневого ряду за допомогою його почленного інтегрування або диференціювання;
- 3) розвинути функцію в ряд Тейлора;
- 4) розвинути функцію в ряд Фур'є;
- 5) зобразити функцію інтегралом Фур'є.

Остання контрольна робота третього семестру присвячена диференціальному численню функцій та вектор-функцій багатьох змінних та містить приклади:

- 1) обчислити диференціал функції трьох змінних, яку задано неявно;
- 2) знайти похідну функції трьох змінних у заданому напрямі;
- 3) дослідити функцію двох чи трьох змінних на екстремум;
- 4) текстова задача на знаходження найбільшого чи найменшого значення функції декількох змінних;
- 5) знайти похідну складеної вектор-функції двох змінних.

Четвертий та останній семестр курсу математичного аналізу присвячений інтегральному численню функцій багатьох змінних та інтегралам, що залежать від параметру. Вивчення теми «Кратні інтеграли» закінчується контрольною роботою, яка містить приклади:

- 1) змінити порядок у повторному інтегралі;
- 2) обчислити площу області на площині;
- 3) обчислити об'єм тіла;
- 4) приклад на застосування подвійного інтеграла в задачах з механіки;
- 5) приклад на застосування потрійного інтеграла в задачах з механіки.

Вивчення теми «Криволінійні, поверхневі інтеграли та теорія поля» закінчується контрольною роботою, яка містить приклади:

- 1) знайти масу кривої;
- 2) знайти роботу, яку виконує сила при русі вздовж кривої;
- 3) знайти масу поверхні;
- 4) знайти потік векторного поля вздовж заданої поверхні.

Застосування системи GeoGebra на заняттях з вищої математики студентів технічних спеціальностей

А. Ф. Дудко^{1, 2}, К. К. Москвичова¹

¹КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

²Інститут інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України,

Київ, Україна

afdudko@gmail.com

У доповіді обґрунтовано доцільність використання системи GeoGebra на заняттях з вищої математики студентів технічних спеціальностей. Визначено основні актуальні напрями роботи з системою динамічної математики.

Ключові слова: GeoGebra, система динамічної математики, вища математика, математичний аналіз, візуалізація.

Сучасний етап розвитку технічної освіти у зв'язку з усебічним упровадженням інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) вимагає пошуку нових засобів та інноваційних методик, що сприятимуть не лише оновленню змісту освіти, а й підвищенню її якості в цілому. Застосування засобів ІКТ дозволяє доповнити методи й форми навчання, зробити заняття сучасним і цікавішим, створити умови для розвитку творчих здібностей студента та підвищення його мотивації до навчання.

Дисципліни математичного циклу (лінійна алгебра й аналітична геометрія, математичний аналіз, теорія ймовірностей і математична статистика), що вивчаються студентами технічних спеціальностей на початковому етапі вищої професійної освіти, формують базовий математичний апарат для подальшого його застосування у професійній діяльності. Тому актуальним є питання пошуку нових засобів ІКТ-підтримки саме для викладачів вищої математики.

На сьогоднішній день серед програмного забезпечення, що застосовується при навчанні вищої математики необхідно виділити системи динамічної математики, зокрема систему GeoGebra. Залучення студентів на практичних заняттях до виконання завдань з використанням середовища GeoGebra розширює коло навчальних завдань, включаючи в нього нестандартні завдання дослідницького характеру (Гриб'юк & Юнчик, 2011).

Система GeoGebra має простий, добре продуманий інтерфейс та має такі функціональні можливості як наочність (візуалізація навчальної інформації), моделювання (експериментального спостереження за поведінкою об'єктів і їх властивостей); динаміка (реалізація комп'ютерними засобами ефекту руху досліджуваного об'єкта). Простота роботи GeoGebra дає змогу викладачам, зосередитись на матеріалі без зайвих затрат часу на пояснення роботи з системою.

Питання використання системи GeoGebra досліджено в роботах М. Борчердса, О. О. Гриб'юк, Р. А. Зіатдінова, А. Лінднера, В. В. Пікалова, В. М. Ракути, Г. Столс, М. Гохенвартера та ін. Однак аналіз літератури показав, що застосування системи GeoGebra зазвичай розглядають на прикладах розв'язання задач

аналітичної геометрії. Питання застосування системи для ілюстрації різних тем математичного аналізу розглянуто недостатньо.

Застосування системи GeoGebra для візуалізації різних розділів математичного аналізу сприяє полегшенню сприйняття студентами навчального матеріалу. Так її доцільно застосовувати, наприклад, при поясненні означення границі функції, фізичного та геометричного змісту похідної, розкладу функції в ряд Тейлора, інтеграла Рімана.

Для прикладу скріншоти роботи динамічної системи з розкладу функції $y = \cos x$ в ряд Маклорена зображено на рис. 1.

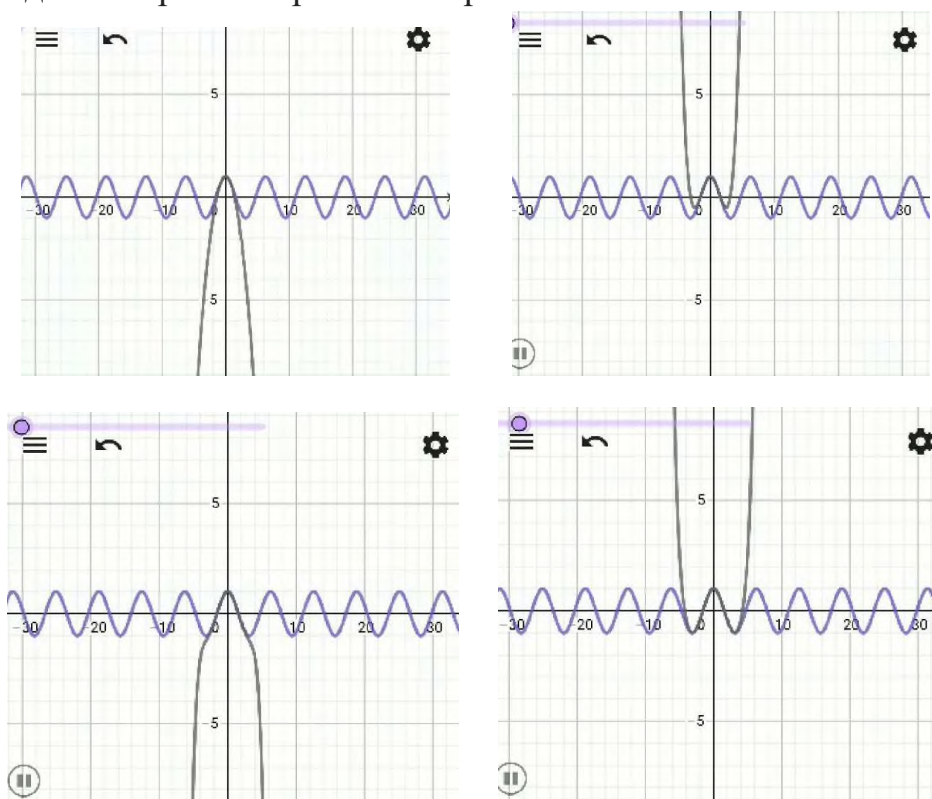


Рис. 1

Список літератури

- Little, C. (2011). Approaches to Calculus using GeoGebra. In L. Bu & R. Schoen (Eds.), *Model-centered learning: Pathways to mathematical understanding using GeoGebra* (pp. 191–204). SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-618-2_14
- Гриб'юк, О.О. & Юнчик, В.Л. (2015). Система динамічної математики GeoGebra як засіб активізації дослідницької діяльності учнів. *Інформаційно-комунікаційні технології в сучасній освіті: досвід, проблеми, перспективи*, (4.1), 163–167. http://lib.iitta.gov.ua/11188/1/Stattya_Yunchyk_Lviv.pdf

Скільки існує колокант функції із простими вузлами?

О.Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Досліджується питання про можливу множину колокант функції із простими вузлами та наведено декілька класів колокант-многочленів та дробово-раціональних колокант із параметрами. Обговорюється питання про вибір найкращих колокант.

Ключові слова: функція, многочлен, колоканта, вузли, залишковий член.

Розглянемо многочлен типу Лагранжа (у випадку алгебричного многочлена — многочлен Лагранжа)

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j = \Omega(x) Y(f), \quad (1)$$

$$\omega_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\psi_j(x_j)}, \omega_j(x_i) = \delta_{j,i}, f_j = f(x_j), \Omega(x) = (\omega_0(x) \dots \omega_n(x)), Y(f) = (f_0 \dots f_n)^T,$$

за нормальною системою базисних функцій ω_j (такою, що $Y(\Omega) = E$, E — одинична матриця, $L_n(\omega_j(x)) \equiv \omega_j(x)$). Похибка апроксимації є (Калайда, 2000)

$$r(f) = f(x) - L_n(x) = \frac{\omega(x)}{\omega^{(n+1)}(c)} (f^{(n+1)}(c) - L_n^{(n+1)}(c)), \quad (2)$$

$$\forall \omega(x) \Rightarrow \omega(x_j) = 0, \omega'(x_j) \neq 0; c \in (\min x_j, \max x_j).$$

Колокантами виду (1) являються так звані σ -колоканти (тригонометричні, експоненціальні тощо (Калайда, 2000))

$$L(\sigma(x)) = \Omega(\sigma(x)) Y(f), \sigma(x) = \{\sigma_{j,i}(x)\}, j, i = \overline{0, n},$$
$$\omega_j(\sigma(x)) = \frac{\psi_j(\sigma(x))}{\psi_j(\sigma(x_j))}, \psi_j(\sigma(x)) = \prod_{i=0, i \neq j}^n (\sigma_{j,i}(x) - \sigma_{j,i}(x_i)).$$

Вивчимо питання про множину колокант функції f , породжуваних колокантою (1), та про вибір найкращої.

Зрозуміло, що при вибраній системі базисних функцій многочлен (1) є многочленом мінімального порядку (наприклад, многочлен Лагранжа є алгебричний многочлен мінімального порядку), що задовольняє умови колокації $L_n(x_j) = f_j, j = \overline{0, n}$. Однак навіть за допомогою многочлена (1) можна побудувати нескінченну множину інших колокант, що задовольняють ті ж умови колокації. Такими колокантами, наприклад, є колоканти

$$\hat{L}(x) = \sum_{j=0}^n \omega_j^{\alpha_j}(x) f_j, \alpha_j > 0, \quad (3)$$

із залишковим членом виду (2). При $\alpha > 1$ колоканти (3) непридатні для чисельного диференціювання, оскільки $\hat{L}'(x_j) = f_j$. Очевидно, що має сенс задача вибору параметрів α_j для мінімізації похибки апроксимації (вони напевне залежать і від x , і від f ; так, наприклад, для двох вузлів маємо

$$\alpha_1 = 1 + (\ln(f(x) - f_0)h / (x - x_0)\Delta f) / \ln(x - x_0).$$

Оскільки перший співмножник у (2) мінімізується за рахунок розташування вузлів на відрізку, то зменшення залишкового члена за рахунок цих параметрів можливе зменшенням другого співмножника рівності (2). Проілюструємо на прикладі. Так, у випадку вузлів $x_0 = 0, x_1 = 1$ для $f(x) = e^x, x = 0.1$, $\alpha = 1$ з (3) дістаємо $\hat{r}(f) \approx -0.07$, а при $\alpha = 1.2132$ $\hat{r}(f) \approx 3 \cdot 10^{-7}$.

Зауважимо, що з існування та єдності наведених вище колоканти-многочленів випливає, що відповідні їм визначники типу Вандермонда відмінні від нуля.

Ще більш загально, колокантами функції, очевидно, є також многочлени вигляду

$$\bar{L}(x) = \sum_{j=0}^n \varphi(\omega_j(x)) f_j, \forall \varphi \Rightarrow \varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1, \varphi(y \neq 0) \neq 0.$$

Залишковий член $\bar{r}(f) = f(x) - \bar{L}_n(x)$ теж матиме вигляд (2), (4).

Таку ж ситуацію маємо і з дробово-раціональними колокантами, наприклад, явними колокантами вигляду (при $f_0 \dots f_n \neq 0$)

$$R(x) = \frac{f_0 \dots f_n}{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) \psi_j(f)}, \psi_j(f) = \prod_{i=0, i \neq j}^n f_i,$$

$$\tilde{R}(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j g_j}{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) g_j}, \hat{R}(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j P_j}{P(x)}$$

(залишковий член виду (2)) або напівявними колокантами виду

$$\bar{R}(x) = \frac{\omega_0(x)f_0 + \omega_1(x)\beta_1 f_1 + \dots + \omega_n(x)\beta_n f_n}{\omega_0(x) + \omega_1(x)\beta_1 + \dots + \omega_n(x)\beta_n}, \beta_j = const \neq 0,$$

$$\bar{\bar{R}}(x) = \frac{\omega_0(x) + \omega_1(x)\beta_1 + \dots + \omega_n(x)\beta_n}{\omega_0(x)/f_0 + \omega_1(x)\beta_1 f_1 + \dots + \omega_n(x)\beta_n/f_n}, \beta_j = \text{const} \neq 0, f_j \neq 0,$$

з такого ж типу базисними функціям ω_j , як і в розглянутих вище колокантах-многочленах (хоча б один з параметрів β_j відмінний від одиниці, інакше це многочлен (1) або перша з наведених вище дробово-раціональних колокант; визначати значення цих параметрів можна з умов колокацій $\bar{\bar{R}}(\bar{x}_i) = f_i, \bar{x}_i \neq x_j$, або, відповідно, $\bar{\bar{R}}(\bar{x}_i) = f_i, \bar{x}_i \neq x_j, i = \overline{1, n}$, досягаючи цим вищого порядку точності апроксимації (Калайда, 2000) і зменшення сталої Ліпшиця, оскільки при цьому використовується вдвічі менше базисних функцій.

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Двосторонні дробово-раціональні колоканти із двократними вузлами

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

За допомогою раціональної $(n + 1)$ -вузлової колоканти з параметрами побудовано двосторонні колоканти функції з n двократними вузлами, а також з одним двократним вузлом.

Ключові слова: колоканта, функція, параметри, вузли, двосторонні.

Серед наближених методів розв'язування задач найбільш надійними є двосторонні методи, а їх півсума та піврізниця дає, відповідно, точніший результат та контроль точності одержуваного наближеного розв'язку. На цю тему написано багато статей та книг. Але розроблені раніше методи практично надто трудомісткі, а тому малопридатні. Новий, практично придатний підхід до цієї теми стосовно двосторонніх чисельних методів здійснено в Калайда (1989, 2000). Побудовано двосторонні многочлени-колоканти як з простими, так і з кратними вузлами, двосторонні дробово-раціональні колоканти із простими вузлами, двосторонні формули чисельного диференціювання та чисельного інтегрування, двосторонні методи чисельного інтегрування задачі Коші для нормальних рівнянь, а також розв'язування лінійних інтегральних рівнянь. Тут дано побудову дробово-раціональних двосторонніх колокант із двократними вузлами колокації.

Розглянемо раціональну колоканту (Калайда, 2000)

$$R_n(x; f) = \frac{L_n(x; fa)}{L_n(x; a)}, \quad (1)$$
$$L_n(x; g) = \Omega(x)Y(g) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x)g_j = \bar{g} + \sum_{j=1}^n \omega_j(x)(g_j - \bar{g}),$$
$$\Omega(x) = (\omega_0(x) \dots \omega_n(x)), Y(g) = (g_0 \dots g_n)^T$$

— відповідно, нормальна матриця ($Y(\Omega) = E$, E — одинична матриця) базисних функцій ω_j , $Y(g)$ — вектор значень апроксимованої функції у вузлах колокації,

$$\alpha = (1 \ \alpha_1 \dots \alpha_n)^T \vee (\alpha_0 \dots \alpha_{n-1} \ 1)^T, \alpha_j \neq 0.$$

За побудовою, колоканта (1) апіорі задовольняє умови колокації $R(x_j; f) = f_j$, $j = \overline{0, n}$, при довільних ненульових значеннях параметрів α_j (при $\alpha_j = 1$ ця колоканта є многочлен типу Лагранжа). Тому при довільних значеннях параметрів α_j маємо (c — середня точка відрізка $[x_0, x_n]$, вузли впорядковані)

$$r(x) = f(x) - R(x; f) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_n) r^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}. \quad (2)$$

Відмітимо принагідно, що з (2) випливає, що для двосторонніх колокант з простими вузлами їх похідна дає двосторонні наближення похідної функції у вузлах двосторонності колокації (Калайда, 2000), тобто $(\hat{K}, \check{K}$ — двосторонні колоканти із простими вузлами)

$$(f'(x_i) - \hat{K}'(x_i; f)(f'(x_i) - \check{K}'(x_i; f))) < 0, i = \overline{1, n-1}.$$

Виберімо в (1) значення параметрів α_j так, щоб виконувались ще умови

$$R'(x_i; f) = f'_i, i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Звідси для $\alpha_j = \hat{\alpha}_j, j = \overline{1, n}$, маємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n \omega'_j(x_i)(f_j - f_i) \hat{\alpha}_j - f'_i \hat{\alpha}_i = \omega'_0(x_i)(f_i - f_0), i = \overline{1, n} \Rightarrow \hat{\alpha}_j = \frac{\hat{\Delta}_j}{\hat{\Delta}_0}. \quad (4)$$

Отже, дістаємо колоканту з n двократними вузлами $x_1, \dots, x_n$

$$\hat{R}_{2n+1}(x; f) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j \hat{\Delta}_j}{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) \hat{\Delta}_j} = \frac{\Omega(x) Y(f \hat{\Delta})}{\Omega(x) Y(\hat{\Delta})}.$$

Тому, аналогічно (2),

$$\hat{r}(x) = f(x) - \hat{R}_{2n+1}(x; f) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2}{(2n+1)!} \hat{r}^{(2n+1)}(\bar{c}). \quad (5)$$

Виберемо, далі, в (1) значення параметрів α_j так, щоб умови (3) виконувались при $i = \overline{0, n-1}$. У цьому випадку для параметрів $\alpha_j = \check{\alpha}_j, j = \overline{0, n-1}$, матимемо систему лінійних алгебричних рівнянь виду (4)

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega'_j(x_i)(f_j - f_i) \check{\alpha}_j - \check{\alpha}_i f'_i = \omega'_n(x_i)(f_i - f_n), i = \overline{0, n-1} \Rightarrow \check{\alpha}_j = \check{\Delta}_j / \check{\Delta}_n. \quad (6)$$

Отже,

$$\check{R}_{2n+1}(x; f) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j \check{\Delta}_j}{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) \check{\Delta}_j} = \frac{\Omega(x) Y(f \check{\Delta})}{\Omega(x) Y(\check{\Delta})}.$$

є колоканта з n двократними вузлами $x_0, \dots, x_{n-1}$. Тому, аналогічно (5),

$$\tilde{r}(x) = f(x) - \tilde{R}_{2n+1}(x; f) = \frac{(x - x_0)^2 \dots (x - x_{n-1})^2 (x - x_n)}{(2n + 1)!} \tilde{r}^{(2n+1)}(\tilde{c}). \quad (7)$$

З (5), (7) випливає, що за умови знакосталості (на відрізку апроксимації) функції $\hat{r}^{(2n+1)} \tilde{r}^{(2n+1)}$ колоканти $\hat{R}_{2n+1}(x; f)$, $\tilde{R}_{2n+1}(x; f)$ функції f будуть двосторонніми, а отже, їхнє середнє арифметичне $\frac{\hat{R} + \tilde{R}}{2}$ буде точнішим наближенням функції, а піврізниця $\frac{\hat{R} - \tilde{R}}{2}$ слугуватиме контролем їх точності.

Відмітимо, що з рівностей (5), (7) випливає, що друга похідна побудованих двосторонніх колокант у спільних двократних вузлах $x_1, \dots, x_{n-1}$ є двосторонніми наближеннями другої похідної функції f (це, очевидно, притаманне й усім іншим двостороннім колокантам із двократними вузлами, як-от, наприклад, многочленам Маркова — Ерміта (Калайда, 2015), а півсума одержаних наближень та їхня піврізниця слугуватимуть, відповідно, точнішим наближенням значень другої похідної у згаданих вузлах та контролем точності результату.

У явному (ручному) аналітичному вигляді побудовані двосторонні колоканти можуть бути виражені лише при $n = 1, 3$. Наведемо їх у найпростішому випадку при $n = 1$ (два вузли). З урахуванням систем (4), (6) дістаємо:

$$\begin{aligned} \hat{R}_3(x; f) &= \frac{(x - x_0)f_1(f_1 - f_0) - hf_1'f_0(x - x_1)}{(x - x_0)(f_1 - f_0) - hf_1'(x - x_1)}, \\ \tilde{R}_3(x, f) &= \frac{hf_1f_0'(x - x_0) - f_0(f_1 - f_0)(x - x_1)}{hf_0'(x - x_0) - (f_1 - f_0)(x - x_1)}. \end{aligned}$$

Проілюструємо їх на прикладі. При $f(x) = \exp(x)$, $x_0 = 0$, $h = 0.2$, $x = 0.1$ дістаємо ($f(0.1) = 1.105170918$):

$$\begin{aligned} \hat{R}_3(0.1, f) &= 1.105262914 \quad (\hat{r} \approx -9.2 \cdot 10^{-5}), \\ \tilde{R}_3(0.1, f) &= 1.105078909 \quad (\tilde{r} \approx 9.2 \cdot 10^{-5}). \end{aligned}$$

Півсума та піврізниця цих наближень, відповідно, є:

$$\begin{aligned} \bar{R}_3(0.1, f) &= \frac{\hat{R}_3(0.1, f) + \tilde{R}_3(0.1, f)}{2} = 1.105170912 \quad (\bar{r} \approx -6 \cdot 10^{-9}), \\ \bar{r} &= \frac{\hat{R}_3(0.1, f) - \tilde{R}_3(0.1, f)}{2} \approx 9.2 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Як бачимо, ці двосторонні наближення досить симетричні (їхня півсума на чотири порядки точніша, ніж кожна з них). Тому їх можна ефективно застосовувати фрагментарно на двовузлових відрізках відповідної довжини, тобто як ланки локальних (ермітових) неперервних сплайнів, в результаті чого матимемо двосторонні неперервні локальні сплайни.

Побудуємо, далі, клас простіших явних двосторонніх раціональних колокант із двократними вузлами, двосторонніх лише на інтервалах між двократними вузлами і, правда, меншого порядку, ніж вище розглянуті так звані повні двосторонні колоканти. Для цього побудуємо колоканти виду (1) лише з одним параметром (решту покладемо рівними одиниці), відповідно, $\hat{\alpha}_i, \check{\alpha}_k, i < k$. При цьому системи (4), (6) складатимуться лише з одного рівняння і, в результаті, дістанемо явні колоканти, двосторонні на інтервалі (x_i, x_k) , $i = 0, n - k$,

$$\begin{aligned}\hat{R}_{n+1}(x; f) &= \frac{f'_i \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega_j(x) f_j + \omega_i(x) f_i \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega'_j(x_i) (f_j - f_i)}{f'_i \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega_j(x) + \omega_i(x) \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega'_j(x_i) (f_j - f_i)}, \\ \check{R}_{n+1}(x; f) &= \frac{f'_k \sum_{j=0, j \neq k}^n \omega_j(x) f_j + \omega_k(x) f_k \sum_{j=0, j \neq k}^n \omega'_j(x_k) (f_j - f_k)}{f'_k \sum_{j=0, j \neq k}^n \omega_j(x) + \omega_k(x) \sum_{j=0, j \neq k}^n \omega'_j(x_k) (f_j - f_k)}.\end{aligned}$$

При цьому, за побудовою, аналогічно (2), (5), (7) маємо рівності

$$\begin{aligned}\hat{r}(f) = f(x) - \hat{R}_{n+1}(x; f) &= \frac{(x - x_i) \prod_{j=0}^n (x - x_j)}{(n+2)!} \hat{r}^{(n+2)}(\xi), \\ \check{r}(f) = f(x) - \check{R}_{n+1}(x; f) &= \frac{(x - x_k) \prod_{j=0}^n (x - x_j)}{(n+2)!} \check{r}^{(n+2)}(\check{\xi})\end{aligned}$$

($\hat{\xi}, \check{\xi}$ — середні точки відрізка $[x_0, x_n]$, вузли упорядковані), так що при знакосталості функції $\hat{r}^{(n+2)} \check{r}^{(n+2)}$ та при $x \in (x_i, x_k)$ маємо нерівність $\hat{r}(f) \check{r}(f) \leq 0$, звідки й випливає, що дані колоканти на інтервалі $x \in (x_i, x_k)$ двосторонні (це, зокрема, вірно й при $i = 0, k = n$).

Отже, за допомогою цих двосторонніх колокант, можемо знаходити двосторонні наближення функції на відрізку між вузлами x_i, x_k та двосторонні наближення її похідної у вузлах $x_{i+1}, \dots, x_{k-1}$, а за допомогою їхніх півсум та піврізниць, відповідно, уточнення та контроль точності одержаних результатів.

Проілюструємо це на прикладі. Покладемо $n = 2$,
 $f(x) = \exp(x)$, $x_0 = 0$, $h = 0.2$, $\bar{x}_1 = 0.1$, $\bar{x}_2 = 0.3$. Тоді:

$$\begin{aligned}\widehat{R}_2(\bar{x}_1, f) &= 1.105186683, \widehat{r}(f) \approx -1.6 \cdot 10^{-5}, \\ \check{R}_2(\bar{x}_1, f) &= 1.105130202, \check{r}(f) \approx 4.1 \cdot 10^{-5}, \\ \frac{\widehat{R}_2(\bar{x}_1, f) + \check{R}_2(\bar{x}_1, f)}{2} &= 1.105158443, \bar{r} \approx 1.2 \cdot 10^{-5}, \\ \delta &\approx \frac{R(\bar{x}_1, f) - R(\bar{x}_1, f)}{2} \approx -5.6 \cdot 10^{-5}, \\ \widehat{R}_2(\bar{x}_2, f) &= 1.349807072, \widehat{r}(f) \approx 5.2 \cdot 10^{-5}, \\ \check{R}_2(\bar{x}_2, f) &= 1.349873774, \check{r}(f) \approx -1.5 \cdot 10^{-5}, \\ \frac{\widehat{R}_2(\bar{x}_2, f) + \check{R}_2(\bar{x}_2, f)}{2} &= 1.349840423, \bar{r} \approx 1.8 \cdot 10^{-5}, \\ \delta &\approx \frac{R(\bar{x}_2, f) - R(\bar{x}_2, f)}{2} \approx -3.3 \cdot 10^{-5}; \\ \widehat{R}'_2(x_1, f) &= 1.220963475, \widehat{r}' \approx 4.4 \cdot 10^{-4}, \\ \check{R}'_2(x_1, f) &= 1.2217821, \check{r}'(f) \approx -4.1 \cdot 10^{-4}, \\ \frac{\widehat{R}'_2(\bar{x}_1, f) + \check{R}'_2(\bar{x}_1, f)}{2} &= 1.221372788, \bar{r}' \approx 3 \cdot 10^{-5}, \\ \delta' &= \frac{\widehat{R}'_2(x_1, f) - \check{R}'_2(\bar{x}_1, f)}{2} \approx -4.1 \cdot 10^{-4}. \\ \widehat{R}'_2(x_1, f) &= 1.220963475, \widehat{r}' \approx 4.4 \cdot 10^{-4}, \\ \check{R}'_2(x_1, f) &= 1.2217821, \check{r}'(f) \approx -4.1 \cdot 10^{-4}, \\ \frac{\widehat{R}'_2(\bar{x}_1, f) + \check{R}'_2(\bar{x}_1, f)}{2} &= 1.221372788, \bar{r}' \approx 3 \cdot 10^{-5}, \\ \delta' &= \frac{\widehat{R}'_2(x_1, f) - \check{R}'_2(\bar{x}_1, f)}{2} \approx -4.1 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Наостанку відмітимо, що розглядувані тут дробово-раціональні колоканти менш чутливі до неусувної похибки вхідних даних, ніж колоканти-многочлени того ж порядку точності, оскільки при цьому використовується вдвічі менше базисних функцій (відповідно й меншою являється стала Ліпшиця).

Список літератури

- Калайда, А. Ф. (1989). О двусторонних аппроксимациях функций многочленами. *Вычисл. и прикл. матем.*, (676), 31–37.
- Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
- Калайда, О. Ф. (2015). Двосторонні симетричні многочлени-колоканти з двократними вузлами. У *Матеріалах XVI Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука*. (Т. 2, с. 102–103). Київ: НТУУ «КПІ». <http://matan.kpi.ua/uk/kravchuk-conf2015.html>

Лінійні двосторонні автономні методи розв'язування задачі Коші для нормальних диференціальних рівнянь

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Побудовано двосторонні автономні інтерполяційні методи третього порядку розв'язування задачі Коші для нормальних рівнянь з уточненням до методу четвертого порядку зі збереженням автономності.

Ключові слова: задача Коші, диференціальні рівняння, метод, порядок, точність.

Задача Коші (взагалі кажучи, векторна)

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

розв'язується різноманітними чисельними методами (Калайда, 2000). Найпрактичнішими з них є автономні (двоточкові) методи, оскільки дають просту можливість застосовуватись зі змінним кроком інтегрування, а отже, при наявності такого ж простого покрокового контролю похибки легку досяжність потрібної точності результату. До таких методів відносяться методи ламаних Ойлера, метод трапецій та метод Рунге — Кутти. Перші два з них мають надто низький порядок. Тут побудовано двосторонні уточнення методу трапецій, а на їх півсумі — уточнення до рівня методу Рунге — Кутти.

Застосуємо до задачі (1) побудовані інтегруванням двосторонніх двоточкових многочленів Маркова — Ерміта з одним двократним вузлом

$$\hat{H}_2(x) = f_0 + \frac{(x - x_0)(f_1 - f_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{f_1 - f_0 - hf'_0}{h^2}, h = x_1 - x_0,$$

$$\check{H}_2(x) = f_0 + \frac{(x - x_0)(f_1 - f_0)}{h} - (x - x_0)(x - x_1) \frac{f_1 - f_0 - hf'_1}{h^2}$$

двоточкові (автономні) квадратурні формули

$$J(f) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \approx \tilde{J}(f) = h \frac{4f_0 + 2f_1 + hf'_0}{6}, \hat{r}(f) = -\frac{h^4}{72} f_0^{IV} - \frac{7}{360} h^5 f_0^{IV} + \dots \quad (2)$$

$$J(f) \approx \check{J}(f) = \frac{h}{6} (2f_0 + 4f_1 - hf'_1), \check{r}(f) = \frac{h^4}{72} f_0^{IV} - \frac{h^5}{80} f_0^{IV} + \dots \quad (2')$$

так що їхня півсума

$$\bar{J}(f) = \frac{\hat{J}(f) + \check{J}(f)}{2} = \frac{h}{2} (f_0 + f_1) - \frac{h^2}{12} (f'_1 - f'_0), \bar{r}(f) = \frac{h^5}{720} (f_1''' - f_0''') + \dots,$$

(як бачимо, утворилась одна з формул Ойлера — Маклорена) та піврізниця

$$\delta(f) = \frac{\hat{J}(f) - \check{J}(f)}{2} = \frac{h}{6} \left(\frac{h(f'_0 + f'_1)}{2} - (f_1 - f_0) \right) = \frac{7}{720} f_0^{IV} + \dots,$$

дають, відповідно, уточнення двосторонніх наближень та контроль їх похибки.

В результаті матимемо автономні двосторонні інтерполяційні методи третього порядку

$$y_{n+1} = y_n + h_n \frac{4f_n + 2f_{n+1} + h_n \varphi_n}{6}, \quad \varphi(x, y) = \frac{d}{dx} f(x, y) = f'_x + f'_y f,$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \frac{2f_n + 4f_{n+1} - h_n \varphi_{n+1}}{6}, \quad h_n = x_{n+1} - x_n$$

та їх уточнення — метод четвертого порядку

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f_n + \frac{h^2}{12} \varphi_n + \frac{h}{2} f_{n+1} - \frac{h^2}{12} \varphi_{n+1}.$$

(типу методу Рунге — Кутти). Реалізувати його можна методом простих ітерацій (k — номер ітерації) або методом Ньютона чи іншими ітеративними методами.

$$y_{n+1,0} = y_n + h f_n, \quad y_{n+1,k+1} = \left(y + \frac{h}{2} f + \frac{h^2}{12} \varphi \right)_n + \left(\frac{h}{2} f - \frac{h^2}{12} \varphi \right)_{n+1,k}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

причому збіжність ітерацій гарантовано за умови

$$\frac{h(3f'_y - h\varphi'_y)}{6} < 1.$$

При цьому контроль точності (принаймні, методу трапецій) можна здійснювати за допомогою другого доданка рівності (2), тобто нерівності

$$\frac{h^2 |f'_{n+1} - f'_n|}{12} < \varepsilon.$$

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Двосторонні многочлени Тейлора та відповідні двосторонні квадратурні формули

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Побудовано двосторонні многочлени Тейлора та відповідні їм двосторонні квадратурні формули типу квадратурних формул Ойлера.

Ключові слова: многочлен Тейлора, двосторонні, квадратурні формули, формули Ойлера.

Розглянемо многочлени Тейлора (одновузлові колоканти функції із кратним вузлом (центром)), відповідно, a та $b > a$

$$\tilde{T}_n(x; a) = f_0 + (x - a)f'_0 + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!} f_0^{(n)}, f_0^{(j)} = f^{(j)}(a) \quad (1)$$

(екстраполяція вперед),

$$\hat{T}_n(x; b) = f_1 + (x - b)f'_1 + \dots + \frac{(x - b)^n}{n!} f_1^{(n)}, f_1^{(j)} = f^{(j)}(b), x \in (a, b) \quad (2)$$

(екстраполяція назад).

Оскільки, як загальновідомо (Ляшко та ін., 1983), залишкові члени формул Тейлора є, відповідно,

$$\tilde{r}(f) = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\tilde{c}), \tilde{c} \in (a, x), \hat{r}(f) = \frac{(x - b)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\hat{c}), \hat{c} \in (x, b),$$

то при парному $n = 2k$ (при сумі непарного числа доданків многочлена) та знакосталості на інтервалі (a, b) функції $f^{(n+1)}$ маємо нерівність $\tilde{r}(f)\hat{r}(f) < 0$, тобто такі многочлени (1), (2) — многочлени нульового порядку, квадратні, четвертого порядку і т. д. — являються двосторонніми колокантами функції f на інтервалі (a, b) . Отже, відповідно, їхня півсума

$$\bar{T}_{2k}(x) = \frac{\tilde{T}_{2k}(x; a) + \hat{T}_{2k}(x; b)}{2}$$

є точніше наближення функції, ніж менш точний з цих многочленів, а піврізниця

$$\delta(f) = \frac{\hat{T}_{2k}(x; b) - \tilde{T}_{2k}(x; a)}{2}$$

— контролем точності результату апроксимації.

Двосторонні многочлени (1), (2) є ідеальними для побудови двосторонніх квадратурних формул у тому розумінні, що безпосереднє інтегрування багаточислових колокант функції без спеціальних побудов, узагалі кажучи, не дає двосторонніх квадратурних формул. У даному ж випадку, зінтегрувавши многочлени (1), (2) в межах від a до b , дістанемо квадратурні формули

$$\tilde{J}_{2k}(f) = \sum_{j=0}^{2k} \frac{h^{j+1} f_0^{(j)}}{j!}, \quad \hat{J}_{2k}(f) = \sum_{j=0}^{2k} \frac{h^{j+1} (-1)^j f_1^{(j)}}{j!}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad h = b - a,$$

що, як бачимо, є узагальненими формулами прямокутників. А з нерівності $\tilde{r}(f)\hat{r}(f) < 0$, виконуваної на інтервалі інтегрування, випливає, що ці формули двосторонні. Отже, їхня півсума являється точнішою, на одиницю вищого порядку, квадратурною формулою (узагальненою формулою трапецій, а також певним узагальненням квадратурних формул Ойлера), а піврізниця — контролем точності результату. При цьому, оскільки півсума має вигляд

$$\bar{J}_{2k}(f) = \sum_{j=0}^{2k} \frac{h^{2j+1} (f_0^{(2j)} + f_1^{(2j)})}{2(2j+1)!} - \sum_{j=1}^{2k} \frac{h^{2j+1} (f_1^{(2j+1)} - f_0^{(2j+1)})}{2(2j+1)!},$$

як різниця лінійної комбінації квадратурних формул для похідних парного порядку та лінійної комбінації приростів похідних непарного порядку, то сумарна формула на послідовних відрізках $[a_i, b_i]$ сталої довжини міститиме лише суму першої з її суми, а друга — суму різниць похідних непарного порядку функції лише у крайніх точках сумарного відрізка інтегрування. Піврізниця ж

$$\delta(f) = \sum_{j=0}^{2k} \frac{h^{2j+1} (f_1^{(2j)} - f_1^{(2j)})}{2(2j+1)!} - \sum_{j=1}^{2k} \frac{h^{2j+1} (f_1^{(2j+1)} + f_0^{(2j+1)})}{2(2j+1)!},$$

навпаки, міститиме лише у крайніх точках сумарного відрізка інтегрування лінійну комбінацію приростів похідних парного порядку та суму лінійних комбінацій формул трапецій для похідних непарного порядку.

Двосторонність многочленів (1), (2) можна покращити (більш їх симетризувати) доданком, що має нуль у протилежній точці, відповідно, b та a . Для двосторонніх квадратурних формул це не обов'язково. Правда, це вже будуть многочлени Ерміта — Маркова.

Усі виконані вище побудови узагальнюються на випадок суперпозиції функцій $g \mapsto f(g)$ з монотонною функцією g . Для цього досить у згаданих побудовах замінити x на $g(x)$, а похідні по x — на похідні за $g(x)$. Для побудови відповідних квадратурних формул при цьому, зрозуміло, необхідна можливість точно інтегрувати степені приростів функції g .

Список літератури

- Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
- Ляшко, И. И., Боярчук, Ф. Л., Гай, Я. Г., Калайда, А. Ф. (1983). *Математический анализ*. (Ч. 1.). Киев: Вища школа.

Дробово-раціональні двосторонні методи двох дотичних розв'язування скалярних скінченних рівнянь

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

За допомогою дробово-раціональних двоточкових та багатоточкових двосторонніх колокант функції із двократним вузлом побудовано двосторонні наближення коренів скалярних скінченних рівнянь.

Ключові слова: вузли, двосторонні колоканти, скінченні рівняння, корені.

Метод застосовується для відшукування відокремлених простих нулів функції f (для кратних — для функції $\varphi = \frac{f}{f'}$, оскільки вона має лише прості нулі функції f ; при цьому після завершення ітерацій можна знаходити і кратність нуля (Калайда, 2000)). Метод являється аналогом пари методів — методу хорд та методу дотичних (Ньютона).

Перша схема. Розглянемо двосторонні на інтервалі (x_0, x_1) , $x_1 - x_0 = h$, двовузлові дробово-раціональні колоканти функції f (далі $f_j = f(x_j)$)

$$\begin{aligned}\hat{R}_3(x; f) &= \frac{(x - x_0)f_1(f_1 - f_0) - hf_1'f_0(x - x_1)}{(x - x_0)(f_1 - f_0) - hf_1'(x - x_1)}, \hat{r}(f) = f(x) - \hat{R}(x; f) = O(h^3), \\ \check{R}_3(x, f) &= \frac{hf_1f_0'(x - x_0) - f_0(f_1 - f_0)(x - x_1)}{hf_0'(x - x_0) - (f_1 - f_0)(x - x_1)}, \check{r}(f) = f(x) - \check{R}(x, f) = O(h^3).\end{aligned}\quad (1)$$

Застосуємо їх до відшукування відокремленого простого нуля $\alpha \in (x_0, x_1)$ функції f , тобто при умові $f_0f_1 < 0$. Прирівнявши до нуля рівності (1), дістанемо лінійні алгебричні рівняння, а з них — двосторонні наближення шуканого нуля $\alpha \in (x_0, x_1)$ (метод третього порядку)

$$\hat{\alpha} = \frac{x_0f_1(f_1 - f_0) - x_1(x_1 - x_0)f_0f_1'}{f_1(f_1 - f_0) - (x_1 - x_0)f_0f_1'}, \check{\alpha} = \frac{x_0(x_1 - x_0)f_1f_0' - x_1f_0(f_1 - f_0)}{(x_1 - x_0)f_1f_0' - f_0(f_1 - f_0)}. \quad (2)$$

Таким чином, з (2) дістаємо новий інтервал $(\hat{\alpha}, \check{\alpha})$, якому належить шуканий нуль функції f , півсума

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha + \check{\alpha}}{2}$$

цих наближень є точніше значення шуканого нуля $\alpha \in (\hat{\alpha}, \check{\alpha})$, а піврізниця

$$\delta = \frac{\hat{\alpha} - \check{\alpha}}{2}$$

— мажоранта похибки (проте контролем точності наближень може бути також величина

$$\gamma = \frac{f(\bar{\alpha})}{f'(\bar{\alpha})},$$

оскільки

$$f(\bar{\alpha}) - f(\alpha) = (\bar{\alpha} - \alpha)f'(c) \approx (\bar{\alpha} - \alpha)f'(\bar{\alpha}) \Rightarrow |\bar{\alpha} - \alpha| \approx \left| \frac{f(\bar{\alpha})}{f'(\bar{\alpha})} \right|.$$

Звернімо увагу на доцільності тут саме раціональних колокант, оскільки при застосуванні двосторонніх, навіть двохточкових, многочленів Маркова — Ерміта (Калайда, 2015) за цією схемою довелось би, замість лінійних рівнянь (1), мати справу із квадратними рівняннями. Проілюструємо метод на прикладі.

Знайдемо двосторонні наближення кореня $\alpha = 1$ рівняння $e - e^x = 0$. Покладемо $x_0 = 0, x_1 = 1$ ($h = 1$). Тоді за формулами (2), відповідно, дістаємо:

$$\hat{\alpha} = (e - 1 + 3e^{0.5}) / (2(e - 1 + e^{0.5})) = 0.98989898..., \alpha - \hat{\alpha} = 0.0101...$$

(нижнє наближення кореня),

$$\check{\alpha} = \frac{3(e - 1) + e^{0.5}}{2(e - 1 + e^{0.5})} = 1.010329744..., \alpha - \check{\alpha} = -0.010329744...$$

(верхнє наближення кореня). Їхня півсума та піврізниця, відповідно, є:

$$\bar{\alpha} = \frac{\hat{\alpha} + \check{\alpha}}{2} = 1.000114367..., \alpha - \bar{\alpha} = -0.00011...,$$

$$\delta = \frac{\hat{\alpha} - \check{\alpha}}{2} = -0.01021537...$$

(за методом Ньютона похибка ≈ 0.1). Як бачимо, двосторонність наближень досить симетрична, а початковий одиничний інтервал для шуканого кореня звився до $2|\delta| \approx 0.02$. З такою ж точністю для e^x за даним методом знаходиться і середня точка в теоремі Лагранжа

$$e - 1 = e^c, c = \ln(e - 1) = 0.541324854... \in (0, 1).$$

Друга схема. Традиційно, як і в методах Ньютона (дотичних), Чебишова (Калайда, 2000), застосуємо колоканти (1) до оберненої функції $f^{-1} : y \mapsto x(y)$ та покладемо $y = 0$. У результаті дістанемо двосторонні наближення шуканого кореня рівняння знову у вигляді формул (2), тобто в даному випадку обидві схеми ідентичні. Застосуємо це до двосторонніх на інтервалі $(x_i, x_k), i < k$, багатоточкових дробово-раціональних колокант

$$\widehat{R}_{n+1}(x; f) = \frac{f'_i \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega_j(x) f_j + \omega_i(x) f_i \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega'_j(x_i) (f_j - f_i)}{f'_i \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega_j(x) + \omega_i(x) \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega'_j(x_i) (f_j - f_i)}, \quad (3)$$

$$\widetilde{R}_{n+1}(x; f) = \frac{f'_k \sum_{j=0, j \neq k}^n \omega_j(x) f_j + \omega_k(x) f_k \sum_{j=0, j \neq k}^n \omega'_j(x_k) (f_j - f_k)}{f'_k \sum_{j=0, j \neq k}^n \omega_j(x) + \omega_k(x) \sum_{j=0, j \neq k}^n \omega'_j(x_k) (f_j - f_k)} \quad (4)$$

при $k = i + 1$. Тут $\omega_j(x)$ — елементи нормальної системи базисних функцій многочленів типу Лагранжа. Помінявши в рівностях (3), (4) місцями символи x, f , з урахуванням рівності

$$x'_y = \frac{1}{f'_x}$$

(похідної оберненої функції), при $f_i f_{i+1} < 0$ дістанемо двосторонні наближення $\widehat{\alpha}, \widetilde{\alpha}$ шуканого простого кореня (метод $(n + 1)$ -порядку).

Зауважмо, що перша схема в цьому випадку непридатна, оскільки приводить до нелінійних (зокрема, алгебричних) рівнянь відносно шуканого кореня.

Список літератури

- Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
- Калайда, О. Ф. (2015). Двосторонні симетричні многочлени-колоканти функцій з двократними вузлами. У *Матеріалах XVI Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука* (Т. 2, с. 102–103). Київ: НТУУ «КПІ». <http://matan.kpi.ua/uk/kravchuk-conf2015.html>

Дробово-раціональні квадратурні формули на основі дробово-раціональних колокант

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Апроксимацією головної частини залишкового члена базової звичайної квадратурної формули за допомогою похідної відповідного порядку дробово-раціональної колоканти утворюється дробово-раціональна квадратурна формула.

Ключові слова: апроксимація, залишковий член, квадратурна формула, дробово-раціональна колоканта.

Безпосередньо зінтегрувати в елементарних функціях дробово-раціональну багатоточкову колоканту в загальному випадку практично неможливо (принаймні, надто важко, оскільки для цього її спочатку необхідно розгорнути в суму простих дробів; при цьому квадратурні формули міститимуть логарифми та, можливо, й арктангенси, а не дробово-раціональні вирази), тому так добувати квадратурні формули нереально, і, отже, це питання досі й не розглядалось. Тут пропонується простий спосіб залучення дробово-раціональних колокант до чисельного інтегрування, а саме, за допомогою їх чисельного диференціювання. Записавши шуканий інтеграл у вигляді суми базової (лінійної відносно значень функції у вузлах) квадратурної формули та залишку, тобто

$$J(f) = \int_a^b f(x)dx = \tilde{J}(f) + r(f), \quad (1)$$

та подавши головну частину $\tilde{r}(f)$ залишку $r(f)$ у вигляді приросту похідної відповідного порядку функції f , а приріст похідної приростом похідної того ж порядку дробово-раціональної колоканти $R(x; f)$, ми й одержимо саме дробово-раціональну квадратурну формулу

$$\tilde{J}_R(f) = \tilde{J}(f) + \tilde{\alpha}_k \Delta R^{(k)}(x; f) \quad (2)$$

($\tilde{\alpha}_k$ — відповідний коефіцієнт, при сталому кроці h сітки вузлів $\tilde{\alpha}_k = h^k \beta_k$, $\beta_k \ll 1$). Так, наприклад, у випадку формули трапецій маємо

$$\begin{aligned} \tilde{J}(f) &= \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{h^2}{12}(f_1' - f_0'), \\ r(f) &= \frac{h^4}{720}(f_1''' - f_0''') - \frac{h^6}{7!6}(f_1^V - f_0^V) + O(h^9). \end{aligned} \quad (2')$$

Важливо, що при підсумовуванні локальних елементів квадратурної формули (2) при сталому кроці інтегрування другий доданок міститиме похідну лише в початковій та кінцевій точках відрізка інтегрування (що притаманно квадратур-

ним формулам Ойлера — Маклорена); крім того, він слугуватиме контролем точності формули $\tilde{J}(f)$, а тому й самої формули.

Отже, достатньо другий доданок у цій квадратурній формулі апроксимувати дробово-раціональною колокантою з похибкою принаймні $O(h^3)$, щоб дістати дробово-раціональну квадратурну формулу виду (2), еквівалентну формулі Сімпсона. Для цього можна використати явну дробово-раціональну колоканту

$$R_n(x; f) = \frac{1}{L_n(x; 1/f)}, \quad (3)$$

де

$$L_n(x; q) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) q_j, \quad \omega_j(x) = \frac{\psi_j(\sigma(x))}{\psi_j(\sigma(x_j))},$$

$$\psi_j(\sigma(x)) = \prod_{i=0, i \neq j}^n (\sigma(x) - \sigma(x_i)), \quad q_j = q(x_j),$$

— многочлен типу Лагранжа (при $\sigma(x) = x$, тобто при алгебричній нормальній системі базисних функцій ω_j — многочлен Лагранжа) або напівявну (повну) раціональну колоканту (Калайда, 2000)

$$\hat{R}_{2n}(x; f; \alpha) = \frac{L_n(x; \alpha f)}{L_n(x; \alpha)} \Rightarrow \hat{R}_{2n}(x_j; f \alpha) = f_j, \quad j = \overline{0, n}, \quad \forall \alpha_j \neq 0, \quad (4)$$

$$L_n(x; f \alpha) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) \alpha_j f_j \equiv \Omega(x) Y(f \alpha),$$

$$\Omega(x) = (\omega_0(x) \dots \omega_n(x)), \quad Y(q) = (q_0 \dots q_n)^T,$$

(зауважимо, що многочлен типу Лагранжа доцільніше подавати у вигляді

$$L_n(x; f) = f_i + \sum_{j=0, j \neq i}^n \omega_j(x) (f_j - f_i), \quad i = \overline{0, n}, \Rightarrow L_n(x_k; f) = f_k, \quad k = \overline{0, n},$$

оскільки при цьому використовується лише n базисних функцій ω_j) при значеннях α_j , визначуваних з системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\hat{R}_{2n}(\bar{x}_i; f; \alpha) = f(\bar{x}_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad \bar{x}_i \neq x_j, \quad j = \overline{0, n}.$$

Тоді колоканта (4) при системі лише $n + 1$ базисних функцій ω_j еквівалентна за порядком точності многочлену $L_{2n}(x; f)$ за системою $2n + 1$ базисних функцій, тобто повна, що, зрозуміло, значно спрощує процес її диференціювання при використанні у формулі (2).

Так, наприклад, при трьох рівновіддалених вузлах колоканта (3) має вигляд

$$R_2(x; f) = \frac{2hf_0f_1f_2}{(x - x_1)(x - x_2)f_1f_2 - 2(x - x_0)(x - x_2)f_0f_2 + (x - x_0)(x - x_1)f_0f_1},$$

звідки

$$R_2'(x_0; f) = f_0 \frac{3f_1f_2 - 4f_0f_2 + f_0f_1}{2hf_1f_2},$$

$$R_2'(x_1; f) = f_1^2 \frac{f_2 - f_1}{2hf_0f_2}, \quad R_2'(x_2; f) = f_2 \frac{-f_1f_2 + 4f_0f_2 - 3f_0f_1}{2hf_0f_1}.$$

Підставивши приріст $\Delta_2 R_2'$ в (2), матимемо дробово-раціональну квадратурну формулу, еквівалентну формулі Сімпсона.

Аналогічно при двох основних рівновіддалених вузлах $x_0, x_2 = x_0 + 2h$ та додатковому вузлі $x_1 = x_0 + h$ колоканта (4) має вигляд (дробово-лінійна)

$$R_2(x; f\alpha) = \frac{f_2(f_1 - f_0)(x - x_0) - f_0(f_2 - f_1)(x - x_2)}{(f_1 - f_0)(x - x_0) - (f_2 - f_1)(x - x_2)}$$

і, відповідно,

$$R_2'(x_0; f\alpha) = \frac{(f_1 - f_0)(f_2 - f_0)}{2h(f_2 - f_1)}, \quad R_2'(x_2; f\alpha) = \frac{(f_2 - f_1)(f_2 - f_0)}{2h(f_1 - f_0)},$$

так що

$$\Delta R_2' = R_2'(x_2; f\alpha) - R_2'(x_0; f\alpha) = \frac{(f_2 - f_0)^2}{2h} \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{(f_1 - f_0)(f_2 - f_1)}.$$

Підставивши це в (2') з подвоєним кроком, теж матимемо дробово-раціональну квадратурну формулу, еквівалентну формулі Сімпсона

$$\tilde{J}(f) = h(f_0 + f_2) - \frac{h}{6} \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{(f_1 - f_0)(f_2 - f_1)} (f_2 - f_0)^2.$$

При цьому другий її доданок являється контролюючим для формули трапецій. Так, наприклад, за цією формулою при

$$f(x) = \exp(x), \quad h = 0.1, \quad x_0 = 0, \quad x_2 = 0.2$$

дістаємо

$$(J(f) = 0.221402758...): \tilde{J}(f) = 0.221399698 \Rightarrow \tilde{r}(f) = 3 \cdot 10^{-6},$$

причому другий доданок формули дорівнює $\delta = -0.0007405754$, тобто показує величину похибки формули трапецій. За формулою Сімпсона маємо результат з похибкою $\hat{\delta} \approx -1.2 \cdot 10^{-7}$. Це й зрозуміло, оскільки числовий коефіцієнт залишкового члена формули (2') у 8 разів більший від числового коефіцієнта залишкового члена формули Сімпсона.

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Лінійні двосторонні методи двох дотичних розв'язування скінченних рівнянь

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

За допомогою двосторонніх многочленів Маркова — Ерміта побудовано двосторонні наближення коренів скалярних скінченних рівнянь.

Ключові слова: двосторонні многочлени, скалярні рівняння, корені.

За допомогою двосторонніх невідроджених (третій доданок відмінний від нуля) двохвузлових многочленів Маркова — Ерміта (Калайда, 2000)

$$\hat{H}_2(x) = f_0 + \frac{(x - x_0)(f_1 - f_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{f_1 - f_0 - hf'_0}{h^2}, \quad h = x_1 - x_0,$$

$$\check{H}_2(x) = f_0 + \frac{(x - x_0)(f_1 - f_0)}{h} - (x - x_0)(x - x_1) \frac{f_1 - f_0 - hf'_1}{h^2}, \quad f_j = f(x_j),$$

$$(\hat{H}(x_0) = \check{H}(x_0) = f_0, \check{H}(x_1) = \hat{H}(x_1) = f_1, \hat{H}'(x_0) = f'_0, \check{H}'(x_1) = f'_1),$$

а отже $(\hat{c}, \check{c} \in (x_0, x_1)$ — середні точки),

$$\hat{r}(f) = f(x) - \hat{H}(x) = \frac{(x - x_0)^2(x - x_1)}{3!} f'''(\hat{c}), \quad \check{r}(f) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)^2}{3!} f'''(\check{c}),$$

дістаємо двосторонні двоточкові методи третього порядку розв'язування скалярних рівнянь $f(x) = 0$. Справді, у випадку простого кореня $\alpha \in (x_0, x_1)$, так що $f_0 f_1 < 0$, застосувавши дані многочлени до оберненої функції $y \mapsto x(y)$, матимемо його двосторонні (при наявності третього доданка) наближення $\hat{\alpha}, \check{\alpha}$:

$$\hat{\alpha} = x_0 - f_0 \frac{\Delta x}{\Delta f} + f_0 f_1 \frac{\Delta x f'_0 - \Delta f}{f'_0 (\Delta f)^2},$$

$$\check{\alpha} = x_0 - f_0 \frac{\Delta x}{\Delta f} - f_0 f_1 \frac{\Delta x f'_1 - \Delta f}{f'_1 (\Delta f)^2}, \quad \Delta q = q_1 - q_0.$$

Тоді півсума

$$\bar{\alpha} = \frac{\hat{\alpha} + \check{\alpha}}{2}$$

є точнішим наближенням кореня, а піврізниця

$$\delta = \frac{\hat{\alpha} - \check{\alpha}}{2}$$

може слугувати мірою точності результату (точніше нею буде слугувати величина

$$\gamma = \frac{f(\bar{\alpha})}{f'(\bar{\alpha})}.$$

Тому далі даний метод доцільно комбінувати з методом поділу навпіл: обирати далі інтервал $(\hat{\alpha}, \bar{\alpha}) \vee (\bar{\alpha}, \check{\alpha})$.

У випадку кратних коренів метод застосовний до функції

$$\frac{f}{f'}$$

(завжди із простими нулями!), а кратність визначати за допомогою виразу

$$\frac{f'^2}{f'^2 - ff''}.$$

Проілюструємо метод на прикладі рівняння $f(x) = e^x - e = 0$, $(\alpha = 1)$.

Покладемо $x_0 = 0.5$, $x_1 = 1.5$. Тоді:

$$\hat{\alpha} = 1.046339564..., \alpha - \hat{\alpha} = -0.046339564...;$$

$$\check{\alpha} = 0.963993702..., \alpha - \check{\alpha} = 0.0360...;$$

$$\bar{\alpha} = 1.0051666..., \alpha - \bar{\alpha} = -0.0051..., \delta = 0.04...$$

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Про логарифмічні квадратурні формули

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

За допомогою різноманітних колокант функцій побудовано логарифмічні і, зокрема, двосторонні квадратурні формули різного порядку.

Ключові слова: функція, двосторонні колоканти, квадратурні формули.

Квадратурні формули називатимемо логарифмічними при наявності в їх структурі логарифмів певних виразів. Побудуємо декілька таких формул.

Перш за все, оскільки степені $\ln x$ інтегруються точно (за рекурентною формулою $J_0 = x$, $J_n = x(\ln x)^n - nJ_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$), то, апроксимувавши функцію f многочленом типу Лагранжа $L_n(\ln x; f)$ та зінтегрувавши його в межах відрізка апроксимації (або відрізка, належного цьому відрізку), дістанемо клас логарифмічних квадратурних формул, аналогічний класу традиційних алгебричних квадратурних формул (типу формул Ньютона — Котеса). Так, наприклад, при $n = 1$ маємо квадратурну формулу (аналог формули трапецій)

$$J(f) = \Delta(xf) - x_0 \frac{\Delta x \Delta f}{\ln(x_1 / x_0)}.$$

У такий же спосіб, зрозуміло, використовуючи інші σ -многочлени типу Лагранжа (Калайда, 2000) можна добувати й інші так звані неалгебричні (ірраціональні, експоненціальні, тощо) квадратурні формули.

Інтегруванням, далі, двохвузлових алгебричних двосторонніх дробово-раціональних колокант функцій з одним (відповідно, лівим та правим) двократним вузлом

$$\begin{aligned}\widehat{R}_3(x, f) &= \frac{hf_1f'_0(x - x_0) - f_0(f_1 - f_0)(x - x_1)}{hf'_0(x - x_0) - (f_1 - f_0)(x - x_1)}, \\ \check{R}_3(x; f) &= \frac{(x - x_0)f_1(f_1 - f_0) - hf'_1f_0(x - x_1)}{(x - x_0)(f_1 - f_0) - hf'_1(x - x_1)}\end{aligned}$$

для інтеграла

$$J(f) = \int_{\Delta} f(x)dx, \Delta = [x_0, x_1],$$

дістаємо автономні логарифмічні двосторонні квадратурні формули третього порядку

$$\begin{aligned}\widehat{J}(f) &= \widehat{\gamma} + \widehat{\kappa} \ln(1 + (hf'_0 - \Delta f) / \Delta f), \widehat{\gamma} = \frac{hf_1f'_0 - f_0\Delta f}{hf'_0 - \Delta f}, \widehat{\kappa} = -f'_0 \left(\frac{h\Delta f}{\Delta f - hf'_0} \right)^2, \\ \check{J}(f) &= \check{\gamma} + \check{\kappa} \ln(1 + (\Delta f - hf'_1) / hf'_1), \check{\gamma} = \frac{f_1\Delta f - hf'_1f_0}{\Delta f - hf'_1}, \check{\kappa} = -f'_1 \left(\frac{h\Delta f}{\Delta f - hf'_1} \right)^2.\end{aligned}\quad (1)$$

Отже, півсума $\bar{J}(f)$ формул (1) даватиме точніше наближення інтеграла (можливо, і формулу четвертого порядку), а піврізниця

$$\delta(f) = \frac{\hat{J}(f) - \bar{J}(f)}{2}$$

слугуватиме контролем точності результату.

Також інтегруванням дробово-раціональної колоканти з вузлами $x_0 < \bar{x} < x_1$

$$R(x) = \frac{(x - x_0)((x_1 - \bar{x})(\bar{f} - f_0)f_1 - (\bar{x} - x_0)(f_1 - \bar{f})f_0) + h(\bar{x} - x_0)(f_1 - \bar{f})f_0}{(x - x_0)((x_1 - \bar{x})(\bar{f} - f_0) - (\bar{x} - x_0)(f_1 - \bar{f})) + h(\bar{x} - x_0)(f_1 - \bar{f})}$$

дістаємо квадратурну формулу

$$J(f) = \frac{A}{C}h + \frac{BC - AD}{C^2} \ln \left(1 + \frac{Ch}{D} \right), \quad (2)$$

$$A = (x_1 - \bar{x})(\bar{f} - f_0)f_1 - (\bar{x} - x_0)(f_1 - \bar{f})f_0, \quad B = h(\bar{x} - x_0)(f_1 - \bar{f})f_0, \\ C = (x_1 - \bar{x})(\bar{f} - f_0) - (\bar{x} - x_0)(f_1 - \bar{f}), \quad D = h(\bar{x} - x_0)(f_1 - \bar{f}).$$

Проілюструємо формулу (2) на прикладі.

Приклад 1. Нехай $f(x) = \exp(x)$, $x_0 = 0$, $x = 0.5$, $x_1 = 1$. Тоді за формулою (2) дістаємо $J(f)$ з похибкою $\delta(J) \approx -0.15$ (за формулою Сімпсона похибка вдвічі менша).

Крім того, множину неалгебричних, у тому числі логарифмічних, двосторонніх квадратурних формул дістаємо інтегруванням двосторонніх двоточкових з одним (лівим-правим) двократним вузлом σ -многочленів типу Ерміта — Маркова (Калайда, 2000) при $\sigma = \ln(a + x)$, $a + x > 0$,

$$\hat{H}(\sigma) = f_0 + (\sigma(x) - \sigma(x_0)) \frac{\Delta f}{\Delta \sigma} + \frac{\omega(x)}{\omega'(x_0)} \left(f'_0 - \sigma'_0 \frac{\Delta f}{\Delta \sigma} \right), \quad \omega(x_j) = 0, \quad \omega'(x_j) \neq 0,$$

$$\check{H}(\sigma) = f_0 + (\sigma(x) - \sigma(x_0)) \frac{\Delta f}{\Delta \sigma} + \frac{\omega(x)}{\omega'(x_1)} \left(f'_1 - \sigma'_1 \frac{\Delta f}{\Delta \sigma} \right), \quad \Delta q = q_1 - q_0, \quad q_j = q(x_j).$$

У результаті матимемо двосторонні не алгебричні квадратурні формули третього порядку

$$\hat{J}(f) = f_0 h + \frac{\Delta f}{\Delta \sigma} \int_{\Delta} (\sigma(x) - \sigma_0) dx + \frac{f'_0 - \sigma'_0 \frac{\Delta f}{\Delta \sigma}}{\omega'_0} \int \omega(x) dx, \quad (3) \\ \check{J}(f) = f_0 h + \frac{\Delta f}{\Delta \sigma} \int (\sigma(x) - \sigma_0) dx + \frac{f'_1 - \sigma'_1 \frac{\Delta f}{\Delta \sigma}}{\omega'_1} \int_{\Delta} \omega(x) dx$$

(при $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)$ інтеграл у третьому їхньому доданку дорівнює нулеві). Зауважимо, що у (3) сума перших двох доданків являється аналогом

формули трапецій. Як бачимо, інтегруванням цих σ -колокант-многочленів можна добувати найрізноманітніші квадратурні формули, лише аби наявні в них інтеграли практично можна було знаходити точно.

Не двосторонню логарифмічну квадратурну формулу добуваємо інтегруванням двоточної дробово-лінійної колоканти

$$R(x; f) = \frac{1}{L_1(x; 1/f)} = \frac{hf_0f_1}{(x-x_0)f_0 - (x-x_1)f_1}, h = x_1 - x_0, f_0f_1 \neq 0.$$

У результаті дістанемо елегантну логарифмічну формулу другого порядку (еквівалентну формулі трапецій)

$$J(f) \approx \hat{J}(f) = \frac{hf_0f_1}{\Delta f} \ln \left(1 + \frac{\Delta f}{f_0} \right) = \ln \left(1 + \frac{\Delta f}{f_0} \right)^\gamma, \gamma = \frac{hf_0f_1}{\Delta f}. \quad (4)$$

Отже, у сумарній формулі (3) фігуруватиме не сума логарифмів, а логарифм добутку.

Проілюструємо формулу (4) на прикладі.

Приклад 2. Для $f(x) = \exp(x)$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$ за формулою (3) дістаємо $\hat{J}(f) = 0.220666222\dots$, $\hat{r}(f) \approx 7.36 \cdot 10^{-4}$. А за формулою трапецій маємо $J(f) \approx 0.2221402758\dots$, $r(f) \approx -7.38 \cdot 10^{-4}$, тобто у даному випадку це досить симетричні двосторонні наближення (їхня півсума є наближення інтеграла з похибкою $\delta \approx -5 \cdot 10^{-7}$).

І, нарешті, ще одну логарифмічну квадратурну формулу дістаємо з інтегрально-дискретної квадратурної формули (Калайда, 2000)

$$J\left(\frac{f'}{f}\right) = J\left(\frac{ff'}{f^2}\right) = \Delta(\ln f) = -\frac{1}{h}J(f)\Delta\left(\frac{1}{f}\right) + \frac{h}{12}\Delta f\Delta\left(\frac{f'}{f^2}\right) + O(h^5).$$

У результаті дістаємо логарифмічну формулу четвертого порядку (еквівалентну формулі Сімпсона)

$$J(f) \approx \tilde{J}(f) = \frac{hf_0f_1}{\Delta f} \Delta(\ln f) + \frac{h^2}{12} \frac{f_1^2 f'_0 - f_0^2 f'_1}{f_0f_1}, J - \tilde{J} = O(h^5). \quad (5)$$

Проілюструємо формулу (5) на прикладі.

Приклад 3. Візьмемо дані з прикладу 2. Тоді $\hat{J}(f) = 0.221404231\dots$, $\tilde{r}(f) \approx -1.5 \cdot 10^{-6}$. Як бачимо, це на два порядки точніше, ніж у прикладі 3 (за формулою Сімпсона з таким же кроком $r(f) \approx -4.35 \cdot 10^{-6}$).

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Матричні алгоритми чисельного диференціювання на основі дробово-раціональних колокант

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Матричні алгоритми чисельного диференціювання на основі многочленів типу Лагранжа $L_n(x)$ вперше були винайдені й детально дослідженні (Калайда, 1982, 2000). Як відомо, для побудови алгебричних формул чисельного диференціювання традиційно покладають

$$f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x) = \Omega_n^{(k)}(x)Y(f), \Omega_n(x) = (\omega_0(x) \dots \omega_n(x)), \quad (1)$$

$$\omega_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\psi_j(x_j)}, \psi_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n (x - x_i), Y(f) = (f_0 \dots f_n)^T, f_j = f(x_j),$$

(тобто матриця-рядок $\Omega_n(x)$ є нормальна матриця алгебричних базисних функцій ω_j ; зрозуміло, що замість алгебричних базисних функцій можна вибирати й інші системи — тригонометричні, експоненціальні тощо) і тоді

$$\tilde{f}^{(k)}(x_j) = L_n^{(k)}(x_j), j = \overline{0, n}.$$

Суть матричних алгоритмів чисельного диференціювання полягає в компактній реалізації рівності (1) у вигляді рівності (Калайда, 1982)

$$f^{(k)}(x) \approx \Omega_n(x)\theta^k Y(f), \theta = \begin{pmatrix} \Omega'(x_0) \\ \dots\dots\dots \\ \Omega'(x_n) \end{pmatrix} \quad (2)$$

(матриця θ — це чисельний аналог оператора $\frac{d}{dx}$), тобто похідні вищого порядку в довільній точці (а не тільки у вузлах) подано через степені матриці коефіцієнтів формул чисельного диференціювання для похідної лише першого порядку. Порядок цієї матриці дорівнює кількості вузлів (на одиницю вищий від порядку відповідного їй многочлена Лагранжа $L_n(x)$). Зауважмо, що рівність (2) з метою зменшення на порядок кількості операцій доцільно здійснювати за одним з аналогів алгоритму Ейткена (для алгебричних многочленів)

$$(\dots(\Omega_n(x)\theta)\theta \dots)\theta Y(f), \Omega_n(x)(\theta(\dots\theta(\theta Y(f)))$$

(перший алгоритм — зліва направо, другий — справа наліво).

Тут за допомогою дробово-раціональних колокант апроксимованої функції побудовано економніші (дробово-раціональні) матричні алгоритми чисельного диференціювання.

Розгляньмо дробово-раціональну колоканту (Калайда, 2000)

$$R_n(x; f) = \frac{\Omega_n(x)Y(\alpha f)}{\Omega_n(x)Y(\alpha)}, Y(\alpha f) = (f_0 \ \alpha_1 f_1 \ \dots \ \alpha_n f_n)^T, Y(\alpha) = (1 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_n)^T, \quad (3)$$

яка, за побудовою, при довільних $\alpha_j \neq 0$ апіорі задовольняє умови колокації

$$f_j = R(x_j; f), j = \overline{0, n},$$

Якщо ж, наприклад, параметри α_j визначити з умов ко-локації

$$R(\bar{x}_i; f) = f_i, i = \overline{1, n}, \bar{x}_i \neq \forall x_j,$$

тобто з системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\Omega_n(\bar{x}_i)Y(\alpha f) = f_i \Omega_n(\bar{x}_i)Y(\alpha), i = \overline{1, n},$$

то матимемо колоканту (3), еквівалентну за порядком точності колоканті-многочленові Лагранжа $L_{2n}(x)$. У той же час формули чисельного диференціювання

$$f^{(m)}(x) \approx R^{(m)}(x, f), m < n,$$

виражатимуться через степені матриці θ нижчого, лише $(n + 1)$ -го (а не $(2n + 1)$ -го) порядку. Так, наприклад, для першої похідної маємо

$$f'(x) \approx R'_n(x, f) = \frac{\Omega_n(x)\theta Y(\alpha f)}{\Omega_n(x)Y(\alpha)} - \frac{\Omega_n(x)Y(\alpha f)\Omega_n(x)\theta Y(\alpha)}{(\Omega_n(x)Y(\alpha))^2}.$$

Звернімо також увагу на ще одну можливість побудови дробово-раціональних формул чисельного диференціювання. А саме, розглянемо просту дробово-раціональну колоканту функції f (при $f(x) \neq 0$)

$$R_n(x, f) = \frac{1}{L_n(x, 1/f)} = \frac{1}{\Omega_n(x)Y(1/f)} \Rightarrow R_n(x_j, f) = f_j, j = \overline{0, n}.$$

Звідси, очевидно, теж матимемо дробово-раціональні формули чисельного диференціювання

$$f^{(k)}(x) \approx R_n^{(k)}(x, f), k < n.$$

При диференціюванні дробово-раціональних колокант доцільно користуватись аналогом формул Ляйбніца для частки функцій (Калайда, 2012).

Формули чисельного диференціювання можна будувати також за допомогою різноманітних функціональних колокант (Калайда, 2000), як-от (для знако-сталих функцій)

$$\Phi_n(x, f) = \exp(\Omega_n(x)Y(\ln f)) \Rightarrow \Phi_n(x_j) = f_j, j = \overline{0, n},$$

так що $f^{(k)}(x) \approx \Phi_n^{(k)}(x, f)$.

Усі використовувані колоканти мають однаковий порядок точності (з порядком точності многочленів типу Лагранжа), а отже, порядок точності утворюваних з них формул чисельного диференціювання теж однаковий (Калайда, 2000).

Список літератури

- Калайда, А. Ф. (1982). Матричные алгоритмы численного дифференцирования функций. *Вычисл. и прикл. матем.*, (46), 7–13.
- Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
- Калайда, О. Ф. (2012). Про аналоги формули Лейбніца для похідних частки функцій. У *Матеріалах XIV Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука* (Т. 2, с. 122). Київ: НТУУ «КПІ».

Про одне подання многочлена типу Лагранжа за зростаючими степенями

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Многочлен типу Лагранжа подається, аналогічно многочленові Лагранжа у формі Ньютона, у вигляді суми многочленів-добутків зростаючих степенів без явного використання розділених різниць апроксимованої функції.

Ключові слова: многочлен, функція, апроксимація, степінь, розділені різниці.

Розглянемо многочлен типу Лагранжа, так званий σ -многочлен Лагранжа (Калайда, 2000б), із простими вузлами колокації x_j

$$L_n(\sigma; f) = L_n(\sigma(x)) = \sum_{j=0}^n \omega_j(\sigma(x)) f_j = \Omega(\sigma(x)) Y(f), \quad (1)$$

де

$$\omega_j(\sigma(x)) = \frac{\psi_j(\sigma(x))}{\psi_j(\sigma(x_j))}, \quad \psi_j(\sigma(x)) = \prod_{i=0, i \neq j}^n (\sigma(x) - \sigma(x_i)),$$

нормальна система базисних функцій (σ — строго монотонна функція),

$$\Omega(\sigma(x)) = (\omega_0(\sigma(x)) \dots \omega_n(\sigma(x))), \quad Y(f) = (f_0 \dots f_n)^T.$$

Оскільки кожна з базисних функцій ω_j є многочлен n -го порядку, то в такому вигляді многочленом (1) користуватись незручно, та й стала Ліпшиця при зростанні порядку многочлена значно зростає (Калайда, 2000а). Тому винайдено його подання у вигляді многочлена за зростаючими степенями-добутками (на кшталт многочлена Тейлора), як-от, многочлен (1) у формі Ньютона, Стірлінга, Еверетта, Ейткена тощо (Березин & Жидков, 1959, Калайда, 2000б). При цьому використовуються або розділені різниці значень апроксимованої функції, або ж певні визначники, що теж і незручно, і, до того ж, приводить до втрати вірних знаків (некоректність), а також до ще швидшого зростання сталої Ліпшиця (Калайда, 2000а). Тут многочлен (1) подається у вигляді многочленів виду (1) зростаючих порядків простіше, без явного використання розділених різниць.

Справді, легко переконатись, що многочлен ($f_0 = \hat{L}_0(\sigma(x_1))$)

$$L_n(\sigma(x)) = f_0 + \hat{\omega}_1(\sigma(x))(f_1 - \hat{L}_0(\sigma(x_1))) + \hat{\omega}_2(\sigma(x))(f_2 - \hat{L}_1(\sigma(x_2))) + \dots + \hat{\omega}_n(\sigma(x))(f_n - \hat{L}_{n-1}(\sigma(x_n))), \quad (2)$$

де

$$\hat{\omega}_i(\sigma(x)) = \frac{\hat{\psi}_i(\sigma(x))}{\hat{\psi}_i(\sigma(x_i))}, \quad \hat{\psi}_i(\sigma(x)) = \prod_{k=1}^i (\sigma(x) - \sigma(x_{k-1})),$$

а $\hat{L}_i(\sigma(x))$ — сума i перших доданків рівності (2), тобто многочлен i -го порядку, справджує умови колокації $L_n(\sigma(x_j)) = f_j$, а отже, з огляду на його єдиність, є многочлен (1). Оскільки ж він не залежить від індексування вузлів, то його у формі (2) можна використовувати в околі й довільного вузла (замість x_0 покласти x_k), і, таким чином, здійснювати апроксимацію функції в його околі, поступово нарощуючи точність і одночасно контролюючи її за допомогою останнього використовуваного доданка.

Практично, як і будь-який многочлен, рівність (2) реалізується за рекурентною рівністю

$$\hat{L}_i(\sigma(x)) = \hat{L}_{i-1}(\sigma(x)) + \hat{\omega}_i(\sigma(x))(f_i - \hat{L}_{i-1}(\sigma(x_i))), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

де

$$\hat{L}_0(\sigma(x)) = f_0, \quad \hat{\omega}_i(\sigma(x)) = \frac{\hat{\psi}_i(\sigma(x))}{\hat{\psi}_i(\sigma(x_i))}, \quad \hat{\psi}_i(\sigma(x)) = \prod_{k=1}^{i-1} (\sigma(x) - \sigma(x_k)).$$

Принагідно зауважимо, що многочлен (1) та многочлен того ж порядку за зсунутою вправо-вліво на один крок упорядкованою системою вузлів (відповідно, вузлів $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ або вузлів $x_{-1}, x_0, \dots, x_{n-1}$) при певній умові (Калайда, 2000б) є двосторонніми наближеннями апроксимованої функції на інтервалі (x_1, x_{n-1}) , а їхні похідні першого порядку дають двосторонні наближення у вузлах цього відрізка її похідної, а отже, півсума цих многочленів та їх похідної є уточненням наближення апроксимованої функції та, відповідно, її похідної, а піврізниця — наближенням похибки апроксимації (Калайда, 2000б).

Як відмічалось, у многочлені (2) розділені різниці явно не використовуються, однак з огляду на його єдиність вони в його структурі присутні. Як видно з рівності (3), ці різниці містяться у множнику при $\hat{\omega}_i(\sigma(x))$, а саме,

$$\gamma_i = \frac{f_i - \hat{L}_{i-1}(\sigma(x_i))}{\hat{\psi}_i(\sigma(x_i))}$$

і є, з точністю до сталого множника, i -ю σ -розділеною (при $\sigma(x) = x$ — розділеною) різницею функції. Перевага тут у тому, що вона в ітеративному процесі (3) обчислюється простіше, автоматично і за потреби.

Список літератури

- Березин, И. С., Жидков, Н. П. (1959). *Методы вычислений*. (Т. 1). Москва: Физматгиз.
 Калайда, О. Ф. (2000а). Про спадкову похибку апроксимації функцій колокантами. *Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки*, (2), 99–105.
 Калайда, О. Ф. (2000б). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Про двосторонні колоканти із простими вузлами колокації

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Побудовано двосторонні многочленні та дробово-раціональні колоканти одного і того ж порядку із простими вузлами для апроксимації функції на інтервалі та її похідної у внутрішніх вузлах колокації.

Ключові слова: функція, колоканта, похідна, прості вузли.

Двосторонні колоканти-многочлени із простими упорядкованими вузлами побудовано зсувом сітки вузлів із сталим кроком на один або непарну кількість кроків (Калайда, 2000). Тут розглянуто узагальнення таких побудов пари колокант із простими, довільно розташованими вузлами, двосторонніх для апроксимованої функції на інтервалі між їхніми спільними вузлами та її похідної в цих спільних вузлах без зсуву системи вузлів.

Розглянемо колоканти $\tilde{K}(x; f)$, $\hat{K}(x; f)$ функції f за нормальними системами базисних функцій, відповідно, $\tilde{\omega}_j$, $\hat{\omega}_j$ та простими впорядкованими вузлами колокації таких, що вузли $x_0, \dots, x_n$, $n > 2$, у них спільні, а у першій колоканти вузол $\tilde{x} \in (x_0, x_1)$, $\tilde{x} < x_0$, у другій — вузол $\hat{x} \in (x_{n-1}, x_n)$ або $\hat{x} > x_n$, як-от многочлени типу Лагранжа (ω_j — нормальна система базисних функцій)

$$\tilde{L}(x; f) = \sum_{j=0}^n \tilde{\omega}_j(x) f_j + \tilde{\omega}_n(x) \tilde{f}, \quad \hat{L}(x; f) = \sum_{j=0}^n \hat{\omega}_j(x) f_j + \hat{\omega}_n(x) \hat{f}, \quad (1)$$

$$\omega_j(x) = \psi_j(x) / \psi_j(x_j), \quad \psi_j(x_i, j \neq i) = 0, \quad f_j = f(x_j), \quad \tilde{f} = f(\tilde{x}), \quad \hat{f} = f(\hat{x}),$$

явні дробово-раціональні колоканти (з многочленами виду (1))

$$R(x; f) = \frac{1}{L_n(x; 1/f)}, \quad f(x) \neq 0, \quad \tilde{R}(x; f) = \frac{L_n(x; Pf)}{P(x)}, \quad P(x) \neq 0, \quad (2)$$

$$\hat{R}(x; f) = \frac{L_n(x; fg)}{L_n(x; g)},$$

напівявні дробово-раціональні колоканти

$$\bar{R}(x; f) = \frac{\omega_0(x) f_0 + \sum_{j=0}^n \omega_j(x) \alpha_j f_j}{\omega_0(x) + \sum_{j=0}^n \alpha_j \omega_j(x)}, \quad \alpha_j = \text{const} \neq 0, \quad \exists \alpha_j \neq 1, \quad (3)$$

а при визначених з умов колокації $\bar{R}(\bar{x}_i; f) = \bar{f}_i = f(\bar{x}_i)$, $\bar{x}_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{1, n}$, тобто з системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \omega_j(\bar{x}_i)(f_j - \bar{f}_i) = \omega_0(\bar{x}_i)(\bar{f}_i - f_0), \quad i = \overline{1, n}, \Rightarrow \alpha_i,$$

дробово-раціональної колоканти максимального порядку, тощо.

Колоканти (1), (2) еквівалентні, оскільки задовольняють одним і тим самим умовам колокації. Колоканта (3) задовольняє на n умов колокації більше. При $\alpha_j = 1$, $j = \overline{1, n}$, вона є многочлен вигляду (1) (оскільки

$$\omega_0(x) + \dots + \omega_n(x) \equiv 1).$$

Двосторонні колоканти (3) можна також добувати за допомогою параметрів α_j . Спочатку побудуємо явні двосторонні колоканти (3) виду (1), (2). А саме, з умов колокації $\bar{R}(\check{x}; f) = \check{f}$, $\check{x} \in (x_0, x_1)$, $\bar{R}(\hat{x}; f) = \hat{f}$, $\hat{x} \in (x_{n-1}, x_n)$, відповідно, при $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1$ та $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 1$ знаходимо

$$\alpha_1 = \check{\alpha} = \frac{\sum_{j=0, j \neq 1}^n \omega_j(\check{x})(f_j - \check{f})}{\omega_1(\check{x})(\check{f} - f_1)}, \quad \check{x} \in (x_0, x_1),$$

$$\alpha_n = \hat{\alpha}_n = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \omega_j(\hat{x})(f_j - \hat{f})}{\omega_n(\hat{x})(\hat{f} - f_n)}, \quad \hat{x} \in (x_{n-1}, x_n),$$

та після підстановки в (3) дістаємо відповідні дробово-раціональні колоканти $\check{K}(x)$, $\hat{K}(x)$ виду (1), (2) $(n+2)$ -го порядку. Покажемо, що всі так побудовані колоканти (1)–(3) є двосторонніми. Справді, оскільки для цих колокант

$$\begin{aligned} \check{r}(x)\hat{r}(x) &= (f(x) - \check{K}(x))(f(x) - \hat{K}(x)) \cong \\ &\cong (x - \check{x})(x - \hat{x}) \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \check{r}^{(n+2)}(\check{c}) \hat{r}^{(n+2)}(\hat{c}), \quad \check{c}, \hat{c} \in (x_0, x_{n-1}), \Rightarrow (4) \\ &\Rightarrow x - \hat{x} \leq 0, \end{aligned}$$

то при $\check{r}^{(n+2)}(x)\hat{r}^{(n+2)}(x) > 0$ та $x \in (\check{x}, \hat{x})$ (а отже, і при $x \in (x_1, x_{n-1})$, $n > 2$, або $x \in (x_0, x_n)$, $n > 0$) маємо нерівність $\check{r}(x)\hat{r}(x) < 0$. Крім того, із графіка функції $\check{r}\hat{r}$ випливає, що похідна цих колокант у їхніх спільних вузлах теж є двосторонніми наближеннями похідної апроксимованої функції. З (4) випливає, що двосторонність колокант (1)–(3) залишається чинною, якщо зліва від спільних вузлів задавати й довільну кількість додаткових вузлів, а справа — лише

непарну кількість додаткових вузлів. Це даватиме змогу завдяки двосторонності, а отже, контрольованості похибки підвищувати точність апроксимації.

Побудуємо, далі, точніші колоканти виду (3) з використанням не одного, а $(n - 1)$ з n їх параметрів α_j . Для цього покладемо в колоканті (3) по черезно $\alpha_n = 1$, а потім $\alpha_1 = 1$ та запровадимо між основними вузлами x_j , $j = \overline{0, n}$, додаткові проміжні вузли $\bar{x}_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{1, n}$. Після цього решту параметрів α_i в (3) визначимо з умов колокації, відповідно,

$$\bar{R}(\bar{x}_i, f) = \bar{f}_i = f(\bar{x}_i), i = \overline{1, n-1}, \bar{R}(\bar{x}_i; f) = \bar{f}_i, i = \overline{2, n}, n > 2.$$

У результаті для параметрів α_i дістаємо, відповідно, лінійні алгебричні системи

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^n \alpha_j \omega_j(\bar{x}_i)(f_j - \bar{f}_i) &= \omega_0(\bar{x}_i)(\bar{f}_i - f_0) + \omega_1(\bar{x}_i)(\bar{f}_i - f_1), i = \overline{1, n-1}, \Rightarrow \check{\alpha}_i, \\ \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \omega_j(\bar{x}_i)(f_j - \bar{f}_i) &= \omega_0(\bar{x}_i)(\bar{f}_i - f_0) + \omega_n(\bar{x}_i)(\bar{f}_i - f_n), i = \overline{2, n}, \Rightarrow \hat{\alpha}_i. \end{aligned} \quad (5)$$

З так визначеними в (3) параметрами $\check{\alpha}_j$, $\hat{\alpha}_j$ матимемо колоканти $\check{K}(x)$, $\hat{K}(x)$ $2n$ -го порядку (колоканти майже максимального, $(2n + 1)$ -го, порядку, оскільки в них один з параметрів наперед заданий). Легко переконатись, що для них нерівність (4) також правильна (бо, як і у випадках колокант (1), (2), ліва частина нерівності містить лише один від'ємний множник), а отже, ці колоканти теж є двосторонніми колокантами для апроксимованої функції на інтервалі (x_1, x_{n-1}) , а їх похідна — двосторонніми наближеннями у вузлах на відрізку $[x_1, x_{n-1}]$ її похідної. Отже, півсума всіх побудованих тут колокант є точнішим наближенням функції, ніж менш точна з них, а їхня піврізниця — мірою точності апроксимації, і, відповідно, півсума значень їхньої похідної у спільних вузлах — точнішим наближенням значень похідної апроксимованої функції у згаданих спільних вузлах, а їхня піврізниця — мірою точності результату. Тому, маючи вихідну колоканту $K(x)$ та двосторонні колоканти (з одним додатковим вузлом, відповідно, $\check{x}$, $\hat{x}$)

$$\check{K}(x) = K(x) + \psi(x) \frac{\check{f} - K(\check{x})}{\psi(\check{x})},$$

$$\hat{K}(x) = K(x) + \psi(x) \frac{\hat{f} - K(\hat{x})}{\psi(\hat{x})}, \psi(x_j) = 0, \psi'(x_j) \neq 0,$$

доцільніше користуватись їхньою півсумою

$$\bar{K}(x) = K(x) + \psi(x) \frac{(\check{f} - \check{K}(\check{x})) / \psi(\check{x}) + (\hat{f} - \hat{K}(\hat{x})) / \psi(\hat{x})}{2}$$

(як точнішою колокантою і при цьому колоканта $K(x)$ у точках інтерполяції використовується лише один раз) та піврізницею

$$\delta(x) = \psi(x) \frac{(\check{f} - K(\check{x})) / \psi(\check{x}) - (\hat{f} - K(\hat{x})) / \psi(\hat{x})}{2}$$

(колоканта $K(x)$ у точках інтерполяції зовсім не використовується) для контролю точності результату. Аналогічно для похідної $f'(x)$ маємо точніше наближення похідної у вузлах $x_j \in [x_1, x_{n-1}]$

$$\bar{K}'(x_j) = K'(x_j) + \psi'(x_j) \frac{(\check{f} - \check{K}(\check{x})) / \psi(\check{x}) + (\hat{f} - \hat{K}(\hat{x})) / \psi(\hat{x})}{2},$$

$j = 1, n-1$

(при цьому $K'(x_j)$ використовується лише один раз) та контроль точності результату

$$\delta'(x_j) = \psi'(x_j) \frac{(\check{f} - K(\check{x})) / \psi(\check{x}) - (\hat{f} - K(\hat{x})) / \psi(\hat{x})}{2}$$

($K'(x_j)$ не використовується).

Наведемо ілюстративний приклад.

Приклад. Для $f(x) = \ln(1+x)$ при

$$\check{x} = 0.1, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, \hat{x} = 0.5, x = 0.3$$

маємо похибки апроксимації функції двосторонніми многочленами Лагранжа (1) у точці $x = 0.3$

$$\check{\delta}(x) = -3.4 \cdot 10^{-4}, \hat{\delta}(x) = 2.7 \cdot 10^{-4}, \bar{\delta}(x) = -3.6 \cdot 10^{-5}, \hat{\delta}(x) = 3 \cdot 10^{-4}$$

та, відповідно, похибки апроксимації її похідної у внутрішніх вузлах

$$\check{\delta}'(x_1) = -3.7 \cdot 10^{-3}, \hat{\delta}'(x_1) = 8.7 \cdot 10^{-3}, \bar{\delta}'(x_1) = 2.6 \cdot 10^{-3}, \hat{\delta}'(x_1) = 6.2 \cdot 10^{-3};$$

$$\check{\delta}'(x_2) = 10^{-2}, \hat{\delta}'(x_2) = -2.6 \cdot 10^{-3}, \bar{\delta}'(x_2) = 3.5 \cdot 10^{-3}, \hat{\delta}'(x_2) = 6 \cdot 10^{-3}.$$

Зауважмо, що при табулюванні функції на великому відрізку за допомогою, наприклад, многочлена Лагранжа (у сплайновому режимі) відрізок доцільно розділити на рівні частини і на кожній з них апроксимувати функцію многочленом Лагранжа із замкнутою системою вузлів колокації. Тоді досить обчислити в точках табуляції значення базисних функцій многочлена на першому відрізку, щоб потім без змін, як і у випадку сплайнів, використовувати їх на решті відрізків розбиття. Це обумовлено тим, що значення базисних функцій визначаються відносним взаємним розташуванням вузлів колокації, а не розташуванням їх на числовій осі. Єдине, що при цьому необхідне, так це контроль точності результату, щоб гарантувати потрібну точність у всіх точках табуляції. Цього легко можна досягти за допомогою цього ж многочлена за системою тієї ж кількості вузлів, але зсунутої на один крок вправо або вліво. Тоді на спільних відрізках матимемо двосторонні наближення функції, їх півсума даватиме точ-

ніше наближення, а піврізниця слугуватиме контролем точності. Сказане стосується і раціональних колокант, виражених за допомогою многочленів Лагранжа, як-от, наприклад, колокант вигляду (2).

І ще одне про многочлени Лагранжа (1) із сталим кроком. У цьому випадку немає потреби користуватись системою базисних функцій ω_j , а можна обмежитись функціями ψ_j . Справді, легко перевірити, що в цьому випадку многочлен (1) фактично має вигляд

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{h^n n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j \psi_j(x) f_j, \quad \psi_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n (x - x_i).$$

Отже, у випадку дробово-раціональних колокант (2), (3) із многочленами Лагранжа співмножник перед сумою скорочується.

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Про колоканти типу Ерміта — Маркова

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei_kalaida@comcast.net

Розглядається задача про побудову колокант із простими вузлами для функції і також із простими іншими вузлами для її похідної.

Ключові слова: вузли, кратність, функція, похідна, колоканта.

Мова йтиме про побудову колоканти із простими вузлами для функції та також із простими іншими вузлами для її похідної — узагальнення поняття про колоканти із кратними вузлами, названими тут колокантами типу Ерміта — Маркова.

Нехай для функції $x \mapsto f(x)$ потрібно на відрізку $[x_0, x_n]$ побудувати колоканту $K(x; f)$ із простими вузлами $x_j, j = 0, n$, тобто щоб справджувались умови $K(x_j; f) = f(x_j)$, $K'(x_j; f) \neq f'(x_j)$, і таку щоб її похідна $K'(x; f)$ теж була колокантою теж з простими вузлами $\bar{x}_i, i = 0, m$, $\bar{x}_i \neq x_j$, для похідної $x \mapsto f'(x)$, тобто щоб $K'(\bar{x}_i; f) = f'(\bar{x}_i)$, $K''(\bar{x}_i; f) \neq f''(\bar{x}_i)$. При спільних вузлах $x_j, \bar{x}_i, m \leq n$, матимемо колоканти із двократними вузлами. Відомо, яку складну будову мають колоканти із кратними вузлами, особливо з вузлами вищої кратності (Калайда, 2000, див. також інші посібники з обчислювальної математики). Рекурентний алгоритм побудови колокант із кратними вузлами винайдено в Калайда (2009).

Для побудови шуканої колоканти подамо її у вигляді лінійної комбінації двох колокант із простими вузлами

$$K(x; f) = K_n(x; f) + \omega(x)L_m(x; \gamma), \quad (1)$$

де $K_n(x; f)$ — довільна колоканта (многочлен типу Лагранжа, дробово-раціональна колоканта тощо) із простими, а можливо і з кратними вузлами, ω — так звана буферна функція (Калайда, 2000), тобто в цьому випадку така, що $\omega(x_j) = 0$, $\omega'(\bar{x}_i) \neq 0$, $L_m(x; \gamma)$ — многочлен типу Лагранжа (для простоти подальших побудов) за нормальною системою базисних функцій $\bar{\omega}_i$ для невідомої функції γ . Задача тут спрощується тим, що нам необхідно знати лише її значення γ_i у вузлах $\bar{x}_i$. Встановімо умову існування та єдиності колоканти (1) (у класі вибраних систем базисних функцій).

Колоканта (1), за побудовою, априорі задовольняє умови колокації у вузлах x_j . Визначимо невідомі в (1) значення γ_i з умов колокації $K'(\bar{x}_i; f) = f'(\bar{x}_i)$. У результаті для невідомих γ_i дістаємо лінійну алгебричну систему рівнянь

$$\omega(\bar{x}_k) \sum_{i=0}^m \bar{\omega}'_i(\bar{x}_i) \gamma_i + \omega'(\bar{x}_k) \gamma_k = f'(\bar{x}_k) - K'_n(\bar{x}_k; f), \quad k = \overline{0, m}. \quad (2)$$

Отже, якщо ця система має єдиний розв'язок, то й колоканта (1) існує і єдина.

При достатньо близьких основних та проміжних вузлах система (2) є системою з діагональною перевагою, а тому матиме єдиний розв'язок, а отже, матимемо і єдину колоканту (1). Зокрема, при $m \leq n$, $x_k = \bar{x}_k$ (а також при одному вузлі $\bar{x}_k$), тоді у (2) або $\omega(\bar{x}_k) = 0$, або сума відсутня, маємо єдиний розв'язок системи (2)

$$\gamma_k = \frac{f'(\bar{x}_k) - K'_n(\bar{x}_k; f)}{\omega'(\bar{x}_k)},$$

а отже, і єдину колоканту (1).

Розглянемо питання про похибку (залишковий член) апроксимації функції колокантою (1). Залишковий член

$$r(x; f) = f(x) - K(x; f) = \hat{\omega}(x)Q(x),$$

де $\hat{\omega}(x_j) = 0$, $j = \overline{0, n}$, $\hat{\omega}'(x_j \neq \bar{x}_i) \neq 0$, $\hat{\omega}'(\bar{x}_i) = 0$. Отже, функція

$$x \mapsto \varepsilon(x) = r(x; f) - \hat{\omega}(x)Q(x)$$

на інтервалі апроксимації має $(n + 1)$ нулів і один нуль за рахунок вибору функції Q , а отже, усього $(n + 2)$ нулі. Тому за теоремою Ролля і за побудовою колоканти (1) функція ε' має принаймні $(n + m + 3)$ нулі, а отже, функція $\varepsilon^{(n+m+2)}$ — принаймні один нуль $\zeta(x)$. Отже, правдива рівність

$$\varepsilon^{(n+m+2)}(\bar{x}) = r^{(n+m+2)}(\zeta(\bar{x}); f) - \hat{\omega}^{(n+m+2)}(\zeta(\bar{x}))Q(\bar{x}) = 0.$$

З неї випливе рівність

$$Q(x) = \frac{r^{(n+m+2)}(\zeta(x))}{\hat{\omega}^{(n+m+2)}(\zeta(x))},$$

а тому, остаточно, дістаємо

$$r(x; f) = \hat{\omega}(x) \frac{f^{(n+m+2)}(\zeta(x)) - K^{(n+m+2)}(\zeta(x))}{\hat{\omega}^{(n+m+2)}(\zeta(x))} \Leftarrow \hat{\omega}^{(n+m+2)}(x) \neq 0.$$

Питання, далі, полягає в існуванні функції $\hat{\omega}$ такої, що має лише прості нулі x_j , $j = \overline{0, n}$, а її похідна $\hat{\omega}'$ — лише прості нулі $\bar{x}_i$, $i = \overline{0, m}$. Графіки таких функцій легко побудувати. Отже, такі функції існують. У класі многочленів їх можна будувати методом невизначених коефіцієнтів.

Наведемо ілюстративний приклад. Для $x \mapsto e^x$ при

$$x_0 = 0, x_1 = 0.4, \bar{x} = 0.1, x = 0.2, n = 1, K_1(x; f) = L_1(x; f)$$

дістаємо $K(x; f)$ з похибкою $\widehat{\delta} \approx 3.7 \cdot 10^{-4}$, а при $\bar{x} = 0.3$ — з похибкою $\widetilde{\delta} \approx -4.5 \cdot 10^{-4}$ (спостерігається двосторонність наближень), тоді як $L_i(x; f)$ — з похибкою $\rho \approx -2.4 \cdot 10^{-2}$.

Список літератури

- Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
- Калайда, О. Ф. (2009). Про один простий алгоритм побудови многочленів Маркова — Ерміта. У *Матеріалах III Міжнародної конференції «Обчислювальна та прикладна математика»*. Присвячена пам'яті академіка НАН України Івана Івановича Ляшка. (с. 39). Київ: Київський університет.

Про метод двох дотичних чисельного інтегрування функцій та задачі Коші для нормальних рівнянь

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

За допомогою точки перетину двох дотичних до графіка функції побудовано двосторонню до квадратурної формули трапецій так звану формулу двох трапецій. Знайдено наближення координат точки перетину дотичних у випадку задачі Коші для нормальних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: квадратурні формули, нормальні рівняння, задача Коші, метод двох дотичних.

Тут дається геометрична побудова двосторонньої до формули трапецій, так званої формули двох дотичних (двох трапецій) чисельного інтегрування функцій та чисельного розв'язування задачі Коші для нормальних звичайних диференціальних рівнянь.

1. Квадратурна формула двох трапецій. Для чисельного інтегрування функції f на відрізку $[x_0, x_1]$ знайдемо абсцису точки перетину $\bar{x} = x_0 + \alpha h$, $h = x_1 - x_0$, дотичних прямих

$$\tilde{y} = f_0 + (x - x_0) \frac{\Delta f}{h}, \hat{y} = f_1 + (x - x_1) \frac{\Delta f}{h}$$

до графіка функції в точках (x_0, f_0) , (x_1, f_1) . У результаті дістанемо

$$\alpha h = \frac{hf' - \Delta f}{\Delta f'}.$$

Тому поряд з формулою трапецій

$$\hat{J}(f) = \frac{h(f_0 + f_1)}{2}$$

із залишковим членом

$$\hat{r}(f) = -\frac{h^3 f''(c)}{12}$$

дістаємо двосторонню до неї так звану формулу двох трапецій

$$\check{J}(f) = \frac{h(f_0 + f_1)}{2} + \frac{hf'_0(f'_1 - \Delta f / h)}{\Delta f'}$$

із залишковим членом

$$\check{r}(f) \approx \frac{h^3 f''_0}{24},$$

тобто формула двох трапецій, як і формула трапецій, є формулою другого порядку й еквівалентна формулі середніх прямокутників, а тому формула

$$\bar{J}(f) = \frac{2\check{J}(f) + \hat{J}(f)}{3}$$

є на порядок точнішою

Проілюструємо ці формули на прикладі.

Приклад 1. Нехай $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Тоді за формулою трапецій маємо наближення інтеграла $J(f) = \ln 2$ з похибкою $\hat{\delta}(f) \approx -0.057$, за формулою двох трапецій — з похибкою $\check{\delta}(f) \approx 0.26$. а за формулою $\bar{J}(f)$ — з похибкою $\bar{\delta}(f) \approx -0.0017$. (за формулою Сімпсона похибка -0.0013).

2. Задача Коші для нормальних рівнянь. Розгляньмо задачу Коші

$$y' = f(x, y), x > x_0, y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Для її чисельного інтегрування знову використаємо точку перетину двох дотичних до графіка інтегральної кривої задачі (1). Тоді точне значення $y_1 = y(x_1)$ розв'язку $y(x)$ задачі (1) матиме вигляд

$$y_1 = y_0 + h(\alpha f_0 + (1 - \alpha)f_1), h = x_1 - x_0, \quad (2)$$

де

$$\alpha h = \frac{hy'_1 - \Delta y}{\Delta y'} = \frac{hf_1 - \Delta y}{\Delta f}. \Delta y = y_1 - y_0, \Delta f = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0). \quad (3)$$

Як бачимо, у цьому випадку α виражається через шукане y_1 , а отже, невідоме. Тому значення цього параметра необхідно визначати іншим шляхом, через відомі величини (так, при $\alpha = 1$, $\alpha = 0$ маємо, відповідно, методи Ойлера, при

$\alpha = \frac{1}{2}$ — метод трапецій). Якщо в (2), замість α , задати наближення $\tilde{\alpha}$, то матимемо наближення

$$\tilde{y}_1 = y_0 + h(\tilde{\alpha}f_0 + (1 - \tilde{\alpha})f_1) \quad (4)$$

з похибкою (c — середня точка)

$$y_1 - \tilde{y}_1 = -\frac{h(\alpha - \tilde{\alpha})(\tilde{f}_1 - f_0)}{1 - (1 - \tilde{\alpha})h(f'_y)_c - (\alpha - \tilde{\alpha})h(f'_y)_c} = O(h^2)(\alpha - \tilde{\alpha}).$$

Далі шукатимемо наближення $\tilde{\alpha}$. Для цього подамо розвинення (3) за степенями h в околі точки x_0 . Маємо:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\frac{1}{2} y_0'' + 2hy_0''' / 3 + h^2 y_0^{IV} / 4 + h^3 y_0^V / 15 + \dots}{\frac{1}{2} y_0'' + hy_0''' / 2 + h^2 y_0^{IV} / 6 + h^3 y_0^V / 24 + \dots} = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + h \frac{y_1'' - y_0''}{6(y_1' - y_0')} \right) - \frac{1}{720} h^3 y_0^V + O(h^4). \end{aligned}$$

Отже, наближеннями α з похибкою, відповідно, $O(h)$, $O(h^3 / 720)$ є

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}, \tilde{\alpha} = \frac{1}{2} \left(1 + h \frac{y_1'' - y_0''}{6(y_1' - y_0')} \right), y'' = \frac{d}{dx} f(x, y).$$

При першому з них з (4) маємо, як уже відмічалось, метод трапецій, при другому дістаємо теж автономний неявний метод (схему)

$$\tilde{y}_1 = y_0 + \frac{h}{2}(f_1 + f_0) - \frac{h^2}{12}(y_1'' - y_0''), y_1 - \tilde{y}_1 = O(h^5 / 720). \quad (5)$$

Як бачимо, це є уточнення методу трапецій на основі однієї з квадратурних формул Ойлера (з похибкою лише вдвічі більшою похибки формули Сімпсона).

Наведемо ще одне цікаве наближення α теж з похибкою $O(h^3)$, а саме:

$$\tilde{\alpha} = \frac{\sqrt[3]{y_1''}}{\sqrt[3]{y_0''} + \sqrt[3]{y_1''}}.$$

Тоді дістанемо (Калайда, 2000)

$$\tilde{y}_1 = y_0 + hf_0 + h \frac{(f_1 - f_0)\sqrt[3]{y_0''}}{\sqrt[3]{y_0''} + \sqrt[3]{y_1''}} \quad (6)$$

теж з похибкою $O(h^5)$, тобто автономний інтерполяційний метод (схему) четвертого порядку — уточнення екстраполяційного методу Ойлера (методу першого порядку) аж на три порядки. Цей метод характерний ще й тим, що він точний для кривих другого порядку. Це, зокрема, доводить, що інші криві локально наближені до кривих другого порядку з такою ж похибкою. Можна знайти й інші, менш точні, наближення α та, відповідно, y_1 (схеми третього порядку). На цьому не зупинятимемось. Проілюструємо побудовані наближення (5), (6) розв'язку задачі (1) на прикладі.

Приклад 2. Для задачі (1) $y' = \frac{1}{2y}$, $x > 1$, $y(1) = 1$ за формулою (5) при

$x = 2$ дістаємо значення розв'язку з похибкою $\hat{\delta} \approx 0.001$. За формулою трапецій — з похибкою $\tilde{\delta} \approx -0.01$. За формулою ж (6) дістаємо точний розв'язок задачі $y(x) = \sqrt{x}$. Це обумовлено тим, що розв'язок є крива другого порядку (парабола).

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Про студентські науково-дослідні математичні гуртки

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Студентів уже з молодших курсів слід залучати до науково-дослідницької творчості. Це дає можливість виявляти творчий потенціал молоді і допомагає їм правильно обирати свій життєвий шлях. Таку можливість дають студентські науково-дослідні гуртки. Досвід автора показав плідність такого заходу.

Ключові слова: студентські математичні гуртки, науково-дослідницька діяльність студентів.

На сайтах багатьох вишів показано, що на математичних кафедрах працюють студентські гуртки, де студенти одержують корисні інформацію за фахом. Проте студентів необхідно не тільки наповнювати знаннями з обраного фаху, а й з молодших курсів привчати до творчості, до дослідницької діяльності. Мій 13-річний досвід роботи в цьому напрямі із студентами першого-другого курсів радіофізичного та фізичного факультетів Київського національного університету імені Тараса Шевченка показав, що це конче корисно. Здібні студенти охоче займаються науковою творчістю й добувають вагомі результати. Кожному гуртківцю (або декільком, авторському колективу) ставилася задача, вони з натхненням над нею працювали, доповідали про результати на засіданні гуртка, відбувалось жваве їх обговорення, і вагомі результати публікувались у наукових виданнях (Калайда та ін., 1987, 1990, 1992, 1993, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999). Значна кількість гуртківців після закінчення університету подалась в аспірантуру (один — В. К. Магас — аж до Швеції!), стали знаними науковцями. Думаю, така практика варта уваги та наслідування.

Нижче наведено список наукових праць 25 студентів першого-другого курсу членів керованих мною науково-дослідних студентських гуртків на згаданих факультетах.

Список літератури

- Калайда, А. Ф., & Кабальок, А. А. (1992). Некоторые математические модели задачи о пульсирующем фонтане. *Вычисл. и прикл. матем.*, (74), 60–63.
- Калайда, О. Ф., & Гонга, Т. Т. (1997). Побудова двосторонніх многочленів типу Лагранжа для багатовимірних функцій. *Вісник Київськ. ун-ту, серія фіз.-мат. науки*, (1), 39–45.
- Калайда, О. Ф., & Магас, В. К. (1996). Про одновимірні лінійні інтегро-диференціальні задачі для рівнянь типу Вольтерра. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (1), 10–14.
- Калайда, О. Ф., & Магас, В. К. (1997). Двосторонній метод розв'язування одновимірних крайових задач для рівнянь другого порядку. *Вісник Київськ. ун-ту, серія фіз.-мат. науки*, (2), 28–34.
- Калайда, О. Ф., & Мельничук, Д. В. (1997). Про одне узагальнення формул Фруллані та Дирихле. *Вісник Київськ. ун-ту, серія фіз.-мат. науки*, (1), 57–59.
- Калайда, О. Ф., & Мороз, І. П. (1990). Про деякі класи інтегровних систем диференціальних рівнянь. *Вісник Київськ. ун-ту, серія матем. та мех.*, (32), 44–52.

- Калайда, О. Ф., & Рибалко, Т. Ю. (1996). Побудова двосторонніх екстраполяційних методів типу Адамса. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (2), 63–69.
- Калайда, О. Ф., & Туташконко, Т. В. (1998). Про один простий спосіб розгортання правильної раціональної функції на елементарні. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (4), 14–16.
- Калайда, О. Ф., Абросімова, Г. Ю., & Висоцький, В. В. (1995). Про побудову загального розв'язку рівняння Бернуллі та рівняння Клеро. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (1), 65–71.
- Калайда, О. Ф., Акіменко, О. В., & Рибалко, Т. Ю. (1996). Двосторонні квадратурні формули типу Ейлера — Маклорена для регулярних, слабосингулярних та сингулярних інтегралів. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (1), 94–100.
- Калайда, О. Ф., Анісімов, О. Є., & Кабалюк, Г. А. (1992). Про один варіант методу факторизації та методу варіації сталих інтегрування лінійних диференціальних рівнянь. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-матем. науки*, (7), 72–77.
- Калайда, О. Ф., Бондар, І. П., Калашніков, А. В., & Лессік, Д. М. (1999). Побудова двосторонніх квадратурних формул для регулярних інтегралів. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (1), 19–23.
- Калайда, О. Ф., Вдовенко, Є. О., & Макаренко, О. В. (1995). Про нелінійні інтегральні рівняння другого роду зі змінними межами інтегрування. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (1), 49–57.
- Калайда, О. Ф., Галкін, О. В., & Гоженко, В. В. (1995). Про один простий метод відновлення функції за її повним диференціалом. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (1), 44–48.
- Калайда, О. Ф., Галкін, О. В., & Сергеев А. Г. (1993). Новий варіант матричних алгоритмів чисельного інтегрування для регулярних, слабо сингулярних та сингулярних інтегралів. *Вісник Київськ. ун-ту, серія фіз.-мат. науки*, (3), 18–22.
- Калайда, О. Ф., Жугасвич, А. Я., & Скрипник, Т. В. (1999). Про лінійні інтегральні рівняння зі змінними межами інтегрування. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (4), 33–37.
- Калайда, О. Ф., Кабалюк, Г. А., & Ресін, А. М. (1992). Про одне узагальнення методу варіації сталих. *Вісник Київськ. ун-ту, серія фіз.-матем. науки*, (5), 32–36.
- Калайда, О. Ф., Шевченко, А. Б., & Шевченко, М. Б. (1987). Деякі питання теорії лінійних диференціальних рівнянь. *Вісник Київськ. ун-ту, серія матем. та мех.*, (29), 22–30.

Про золотий переріз, математичне сподівання, середнє арифметичне та дисперсію

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

З математичної точки зору досліджено золотий переріз. Показано його зв'язок з числами Фібоначчі. Знайдено ще одне квадратне рівняння з аналогічними властивостями. Установлено зв'язок математичного сподівання з середнім арифметичним дискретних випадкових величин, на основі чого дано відповідні оцінки.

Ключові слова: випадкові величини, середнє арифметичне, оцінки.

Первісний опис задачі про золотий переріз (абсолютний) фактично дається рівнянням

$$x^2 - ax - a^2 = 0, a > 0 \Rightarrow x_{1,2} = a \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad (1)$$

З нього виділили (відносне) рівняння

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 &= 0 \Rightarrow \\ x_1 &= (1 + \sqrt{5}) / 2 = 1.618033989..., \\ x_2 &= (1 - \sqrt{5}) / 2 = -0.618033989.... \end{aligned}$$

Про ці числа й пишуть дифірамби (див. Вікіпедію, тощо), що вони єдині і тому подібне. Проте це зовсім не так. Наведімо ще рівняння, яке має ті ж властивості. Ось воно:

$$x^2 - bx - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{2} \Rightarrow x_1 - b = 1 / x_1 = -x_2.$$

Далі, встановімо зв'язок золотого перерізу з числами Фібоначчі. Ці числа являються розв'язком задачі Коші різницевого рівняння з цілими коефіцієнтами та цілими початковими значеннями

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, F_0 = 0, F_1 = 1. \quad (2)$$

Отже, його характеристичне рівняння є рівняння (1) при $a = 1$, а тому розв'язок задачі Коші (2) має вигляд

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_1^n - \lambda_2^n).$$

Звідси й випливає захоплююче співвідношення

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \lambda_1 \frac{1 - (\lambda_2 / \lambda_1)^{n+1}}{1 - (\lambda_2 / \lambda_1)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_1.$$

Очевидно, ця властивість притаманна розв'язкам усіх різницевого рівнянь з цілими коефіцієнтами та цілими початковими даними, характеристичне рівняння яких має один максимальних за модулем корінь.

Для математичного сподівання дискретних випадкових величин правдива рівність (Калайда, 2000)

$$M(X) = \sum_{j=1}^n x_j p_j = \bar{X} + \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{X}) p_j, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j. \quad (3)$$

Це дає можливість при невідомих розподілах випадкових величин добувати оцінки їх математичного сподівання та дисперсії. По-перше, з нерівності Коші — Буняковського і нерівності

$$\sum_{j=1}^n p_j^2 \leq \sum_{j=1}^n p_j = 1$$

для математичного сподівання впливає проста оцінка

$$|M(X)| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}. \quad (4)$$

По-друге, з рівності (3) впливає оцінка

$$|M(X)| \leq |\bar{X}| + \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{X})^2}.$$

Аналогічно для дисперсії маємо

$$D(x) \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - M(X))^4}.$$

Аналогічні оцінки можна добути й при неперервних розподілах випадкових величин. Так, наприклад, аналогічно (4) маємо (f — функція випадкової величини)

$$|M(X)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx}.$$

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Про деякі особливості викладання лінійної алгебри англомовним студентам НАУ

О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко

Національний авіаційний університет, Київ, Україна
karupu@ukr.net, 111ota@ukr.net, pobeda586@gmail.com

Проаналізовано особливості викладання англійською мовою окремих розділів лінійної алгебри іноземним та українським студентам технічних спеціальностей у Національному авіаційному університеті. Надано рекомендації для покращення засвоєння студентами теоретичного матеріалу та вироблення ними навичок розв'язування задач.

Ключові слова: викладання лінійної алгебри, викладання вищої математики, викладання математики англійською.

Національний авіаційний університет є одним з найпотужніших авіаційних закладів вищої освіти, у якому навчається близько 25 тисяч студентів, серед яких майже 1500 іноземців з 55 країн світу. За роки його 85-річної історії (останні 50 років на навчання в НАУ приймають іноземців) підготовлено більш як 200 000 висококласних спеціалістів для 160 країн. Тому викладачі нашого університету завжди велику увагу приділяють вирішенню різноманітних питань, пов'язаних з навчанням іноземних студентів. Зокрема, вивчалися проблеми адаптації іноземних студентів до освітнього середовища України (Довгодько, 2013), проблеми навчання іноземних студентів природничим дисциплінам (Довгодько та ін., 2010), викладання математики іноземним студентам технічних спеціальностей (Ічанська & Наливайко, 2017), особливості викладання математичних дисциплін іноземним студентам за кредитно-модульною системою (Карупу та ін., 2013).

Оскільки англійська мова є однією з офіційних мов ІКАО (Міжнародна організація цивільної авіації), для майбутніх фахівців у галузі авіації дуже важливою є можливість отримання професійної освіти англійською мовою. У НАУ з 1999 року успішно діє Програма «Вища освіта іноземною мовою». За цією програмою протягом двадцяти років для окремих спеціальностей викладання всіх предметів здійснюється англійською мовою. Іноземні студенти обирають мову навчання залежно від їх мовної підготовки та планів на майбутнє працевлаштування. При цьому всі іноземні студенти обов'язково вивчають українську мову. Частина іноземних студентів обирає навчання в україномовних групах. В англомовних групах мають можливість навчатися також й українські студенти, які добре володіють англійською мовою і зорієнтовані на наступне працевлаштування в авіаційних компаніях, що здійснюють міжнародні перевезення.

Перед викладачами, задіяними в роботі в англомовних групах, виникає ціла низка питань щодо специфіки викладання різних дисциплін, зокрема математичних, англійською мовою студентам, для яких ця мова не є рідною. Зокрема, це стосується і лінійної алгебри, оскільки навчальними планами підготовки майбутніх фахівців технічних спеціальностей у НАУ передбачено вивчення базових

розділів лінійної алгебри. Для студентів більшості спеціальностей окремі питання лінійної алгебри викладаються в складі відповідних розділів синтетичної дисципліни «Вища математика» і тільки для окремих спеціальностей, що потребують поглибленої математичної підготовки, студентам викладають окремо дисципліну «Лінійна алгебра та аналітична геометрія».

У рамках системи англомовної освіти НАУ автори проводять дослідження з методики викладання англійською мовою математичних дисциплін іноземним та українським студентам. У своїй роботі ми орієнтуємось на відомі дослідження з методики викладання математики у вищій школі України (В. Г. Бевз, Н. О. Вірченко, О. І. Скафа, З. І. Слєпкань, Н. А. Тарасенкової, О. С. Чашечнікової та ін). Зокрема, певні особливості викладання англійською мовою деяких розділів лінійної алгебри розглядалися авторами в рамках дослідження викладання лінійної алгебри (Карупу та ін., 2017; Олешко, 2017), у рамках дослідження викладання математичних дисциплін англомовним студентам (Карупу та ін., 2011), у рамках дослідження викладання математичних дисциплін англомовним іноземним студентам (Карупу та ін., 2012, 2013) та в рамках дослідження викладання лінійної алгебри та аналітичної геометрії (Карупу та ін., 2015, 2016, 2018).

Певна частина проблем, що постають під час викладання лінійної алгебри студентам англомовних груп, обумовлена особливостями математичної та мовної підготовки цих студентів і виникає також і при викладанні технічних дисциплін. Інша їх частина є специфічною і виникає тільки при викладанні цим студентам математичних дисциплін, зокрема, саме лінійної алгебри.

Аналіз контингенту іноземних студентів, що навчаються в НАУ, показує, що вони є представниками різних систем освіти. Тому під час викладання математичних дисциплін для таких студентів необхідно враховувати, що англійська мова не є рідною для цих студентів і те, що їх навчання в середній школі відбувалось рідною мовою. Також необхідно звернути увагу на особливості викладання елементарної математики в середніх школах відповідних країн. Крім того, оскільки для українських студентів (і для іноземних також) є важливим володіння спеціальною англійською термінологією, то слід також підкреслювати певну специфіку термінів. Потрібно зауважити, що засвоєння англійської математичної термінології з лінійної алгебри, як правило, не викликає особливих труднощів ні в іноземних, ні в українських студентів.

Зазначимо, що іноземні студенти в цілому непогано засвоюють мікромодуль «Елементи векторної алгебри», причому деякі з них використовують теоретичні знання для розв'язування задач навіть краще значної частини українських студентів.

Дещо складнішим для багатьох іноземних студентів є засвоєння мікромодуля «Елементи лінійної алгебри». Відмітимо, що більшість іноземних студентів непогано оперують з визначниками та матрицями. Відносно добре засвоюється ними знаходження рангу матриці (при цьому ми вважаємо доцільним сконцентруватися на якомога досконалішому опануванні навичок застосування до цієї задачі методу елементарних перетворень). Як правило, складнішим для багатьох іноземних сту-

дентів є знаходження власних чисел і власних векторів матриці. Зазначимо, що більшість іноземних студентів і значна частина українських знають про існування систем комп'ютерної математики і намагаються їх використовувати. Ми вважаємо доцільним надати студентам рекомендації щодо використання систем комп'ютерної математики до обчислення визначників та обернених матриць, для дій з матрицями і визначниками. При цьому ми вважаємо обов'язковим показати студентам обмеження на застосування цих систем.

Мікромодуль «Системи лінійних алгебраїчних рівнянь» достатньо добре сприймається на рівні алгоритмів основних методів розв'язання систем і гірше на рівні дослідження сумісності системи. Уважаємо, що при викладанні цього матеріалу студентам усіх категорій особливу увагу слід приділяти методу Гауса з вибором провідного елемента як методу, що використовується при обчисленнях з округленням і для систем з коефіцієнтами, що є наближеними числами.

Як правило, рівень сприйняття іноземними студентами більш абстрактних питань є набагато нижчим. Значні труднощі в багатьох іноземних і певної частини українських студентів починаються при вивченні мікромодуля «Лінійні простори та лінійні оператори. Білінійні та квадратичні форми», як на рівні розуміння теоретичного матеріалу, так і при розв'язуванні навіть найпростіших задач.

Критично необхідною для переважної більшості іноземних студентів є наявність англomовних опорних матеріалів та англomовних посібників, що містять необхідний теоретичний матеріал з великою кількістю розв'язаних прикладів і необхідну термінологію з перекладом. Розділи, пов'язані з викладанням лінійної алгебри англійською мовою супроводжуються двома посібниками (Denisiuk et al., 2009; Antonova et al., 2018). Крім того, теорію квадратичних форм та її застосування до дослідження кривих та поверхонь другого порядку, вивчення яких входить у програму дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», наведено в англomовному посібнику (Grebenuik & Karuru, 2004). Ми також вважаємо корисним допомагати студентам у роботі з пошуковими системами, надаючи їм рекомендації з пошуку математичної інформації в таких системах.

Проведений аналіз практики викладання в Національному авіаційному університеті англійською мовою окремих розділів лінійної алгебри як у курсі дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», так і в курсі дисципліни «Вища математика» іноземним та українським студентам, дає можливість сформулювати рекомендації по роботі викладача в англomовних групах. Рекомендується детальна алгоритмізація процесу розв'язування типових задач. Також рекомендується приділяти достатню увагу використанню різноманітних опорних матеріалів при виробленні іноземними студентами відповідних навичок під час проведення практичних занять і консультацій. Цей підхід виявляється достатньо ефективним і для певної частини українських студентів. Також корисним для кращого сприйняття студентами матеріалу є посилення на його зв'язок з авіаційною проблематикою. Крім того, ми вважаємо доцільним рекомендувати студентам активне використання систем комп'ютерної математики та пошукових систем.

Список літератури

- Antonova, A. O., Klyus, I. S., Lastivka, I. O., & Trofymenko, V. I. (2018). *Higher mathematics. Linear algebra. Algebra of vectors. Elements of analytic geometry*. Kyiv: NAU.
- Denisiuk, V. P., Grishina, L. I., Karupu, O. V., Oleshko, T. A., Pakhnenko, V. V., & Repeta V. K. (2009). *Higher mathematics*. (P. 1). Kyiv: NAU.
- Grebeniuk, M. F., & Karupu O. W. (2004). *Bilinear and quadratic forms in geometry*. Kyiv: NAU.
- Довгодько, Т. І. (2013). Адаптація іноземних студентів до освітнього середовища України. *Педагогіка і психологія професійної освіти*, (2), 114–120. <http://ena.lp.edu.ua/handle/ntb/24215>
- Довгодько, Т. І., Пахненко, В. В., & Калашникова, Л. Є. (2010). Аналіз проблем навчання іноземних студентів природничим дисциплінам на підготовчих факультетах вищих навчальних закладів. У *Матеріалах XIII Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука* (Т. 3, с. 182). Київ: НТУУ «КПІ».
- Ічанська, Н. В., & Наливайко, Л. Г. (2017). Викладання математики іноземним студентам технічних спеціальностей. *Витоки педагогічної майстерності. Серія: Педагогічні науки*, (20), 116–120.
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2011). Про деякі особливості викладання математичних дисциплін англomовним студентам. *Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки*, (83), 76–79.
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2012). Про викладання математичних дисциплін англійською мовою іноземним студентам. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, (2(2)), 11–14.
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2013). Про деякі особливості викладання математичних дисциплін іноземним студентам за кредитно-модульною системою. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*, (8), 52–57.
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2015). Про викладання лінійної алгебри та аналітичної геометрії в Національному авіаційному університеті в рамках освіти англійською. У *Матеріалах Четвертої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 170–173). Київ: НТУУ «КПІ». <http://matan.kpi.ua/public/files/2016/mvstu4-abstracts.pdf>
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2016). Про деякі методичні аспекти викладання лінійної алгебри та аналітичної геометрії в Національному авіаційному університеті. *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*, (77), 29–32. <https://seanewdim.com/i77.html>
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2017). Про викладання деяких питань лінійної алгебри англomовним студентам в Національному авіаційному університеті. *Вісник Черкаського університету. Серія Педагогічні науки*, 12, 26–33. <http://ped-ejournal.cdu.edu.ua/article/view/2145>
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2018). Про викладання лінійної алгебри та аналітичної геометрії англomовним студентам технічних спеціальностей в НАУ. *Фізико-математична освіта*, (4), 59–64. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2018-018-4-009>
- Олешко, Т. А. (2017). Деякі дидактичні та методичні аспекти викладання лінійної алгебри студентам НН ІКІТ в рамках Програми «Вища освіта іноземною мовою». У *Матеріалах 13 Міжнародної науково-технічної конференції «ABIA-2017»* (с. 7.62–7.65). Київ: НАУ. http://avia.nau.edu.ua/doc/avia-2017/AVIA_2017.pdf

Про один ефективний метод знаходження власних векторів матриці

М. І. Кучма, Н. М. Тимошенко

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
markuchma@ukr.net, tymgosan@gmail.com

У роботі запропоновано ефективний метод знаходження власних векторів матриці лінійного оператора в термінах теорії жорданового зображення матриці. Проілюстровано роботу методу для побудови фундаментальної системи розв'язків системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами і для зведення квадратичної форми до канонічного вигляду, який легко опановується студентами.

Ключові слова: ядро й образ лінійного оператора, власні значення, власні вектори, базис простору, жорданова нормальна форма.

Розв'язання багатьох важливих математичних задач пов'язане із знаходженням власних векторів матриць. Традиційно така задача зводиться до відшукування власних значень матриці та наступного розв'язання ряду систем лінійних рівнянь, що у випадку матриць вищих порядків, не є тривіальною. Пропонований метод у першій своїй частині також вимагає визначення власних значень, але у другій частині використовує лише операцію множення певних відомих матриць і вибір базисних стовпців отриманого добутку.

Оскільки основний результат статті формулюється мовою теорії лінійних перетворень, то спочатку нагадаємо деякі основні поняття.

Нехай $\hat{A}$ — лінійне перетворення (лінійний оператор) деякого унітарного простору V . Множини $\text{Ker} \hat{A} = \{v \in V \mid \hat{A}v = 0\}$ і $\text{Im} \hat{A} = \{\hat{A}v \mid v \in V\}$ називають відповідно ядром і образом оператора $\hat{A}$. Відомо, що ядро і образ — підпростори з V , і тому кожне з них повністю задається вибором базису (Зеліско & Зеліско, 2014). Базисом $\text{Im} \hat{A}$ може бути кожна максимальна лінійно незалежна підсистема з r стовпців матриці A оператора $\hat{A}$, де $r = \dim \text{Im} \hat{A} = \text{rang } A$. Цей факт буде використовуватись далі.

Метод, запропонований у статті, оперує також термінами теорії жорданового зображення матриці (Беклемишев, 1983; Хорн & Джонсон, 1989), тому подамо стислий перелік термінів і позначень, що використовуються.

Позначимо через λ^* — корінь кратності m^* мінімального полінома $\psi_A(\lambda)$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — решта його коренів з відповідними кратностями $m_1, \dots, m_l$ (m_i — розмір максимальної жорданової клітки, яка відповідає власному значенню λ_i , $i = \overline{1, l}$), тобто

$$\psi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda^*)^{m^*} \prod_{i=1}^l (\lambda - \lambda_i)^{m_i},$$

$p^* = \dim \text{Ker} (A - \lambda^* I)$ — кількість жорданових кліток, відповідних λ^* (геометрична кратність власного значення λ^*), I — одинична матриця того ж порядку, що й матриця A , r^* — кількість жорданових кліток, що мають максимальний порядок, $1 \leq r^* \leq p^*$, $\overline{C}_A^{(i)}$ — i -й стовпець матриці A , наприклад, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}, \text{ то } \overline{C}_A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \overline{C}_A^{(2)} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Тепер сформулюємо (без доведення) теорему та наслідок з неї, який є теоретичною основою запропонованого методу.

Теорема. Нехай λ^* , m^* , $\lambda_i, m_i, i = \overline{1, l}; r^*, p^*$ — параметри, вказані вище. Тоді

$$\text{rang} \left[(A - \lambda^* I)^{m^*-1} \prod_{i=1}^l (A - \lambda_i I)^{m_i} \right] = r^*. \quad (1)$$

Наслідок. Якщо для власного значення λ^* матриці A відсутні домінуючі клітки, тобто $1 \leq r^* = p^*$ (всі жорданові клітки, що відповідають λ^* , мають однаковий порядок), то має місце рівність підпросторів

$$\text{Ker} (A - \lambda^* I) = \text{Im} \left[(A - \lambda^* I)^{m^*-1} \prod_{i=1}^l (A - \lambda_i I)^{m_i} \right]. \quad (2)$$

У властивості (2) зосереджена суть статті. Рівність (2) дозволяє в разі відсутності домінуючих жорданових кліток для власного значення λ^* знайти відразу всі p^* власних векторів $\overline{V}_{\lambda^*}^{(0, k)}$, $k = \overline{1, p^*}$ матриці A . За власні вектори вибираємо довільні p^* базисних стовпців, що фігурують у квадратних дужках рівності (2).

Проілюструємо властивість (2) на наступних двох прикладах.

Приклад 1. Знайти фундаментальну систему розв'язків лінійної системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -57 & -8 & -14 & 70 \\ -29 & -3 & -7 & 35 \\ 51 & 6 & 14 & -60 \\ -42 & -6 & -10 & 52 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матриця A даної системи рівнянь є матрицею скалярного типу, і має наступну жорданову нормальну форму

$$J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

а її мінімальний поліном $\psi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$.

Як бачимо, для власних значень $\lambda^* = 1$ і $\lambda^* = 2$ відсутні домінуючі жорданові клітки (для кожного власного значення λ^* маємо по дві клітки однакового порядку 1), тобто в обох випадках $r^* = p^* = 2$.

Застосуємо властивість (2) до власного значення $\lambda^* = 1$.

Маємо

$$\text{Ker}(A - I) = \text{Im}(A - 2I) = \text{Im} \begin{pmatrix} -59 & -8 & -14 & 70 \\ -29 & -5 & -7 & 35 \\ 51 & 6 & 12 & -60 \\ -42 & -6 & -10 & 50 \end{pmatrix}.$$

За два лінійно незалежні вектори $\overline{V}_1^{(0,1)}$, $\overline{V}_1^{(0,2)}$ матриці A можемо взяти будь-які два базисні стовпці матриці $(A - 2I)$, наприклад,

$$\overline{V}_1^{(0,1)} = \overline{C}_{A-2I}^{(2)} = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \overline{V}_1^{(0,2)} = \overline{C}_{A-2I}^{(3)} = \begin{pmatrix} -14 \\ -7 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо властивість (2) до власного значення $\lambda^* = 2$. Маємо

$$\text{Ker}(A - 2I) = \text{Im}(A - I) = \text{Im} \begin{pmatrix} -58 & -8 & -14 & 70 \\ -29 & -4 & -7 & 35 \\ 51 & 6 & 13 & -60 \\ -42 & -6 & -10 & 51 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно до попереднього випадку, беремо, наприклад,

$$\overline{V}_2^{(0,1)} = \overline{C}_{A-I}^{(2)} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \overline{V}_2^{(0,2)} = \overline{C}_{A-I}^{(3)} = \begin{pmatrix} -14 \\ -7 \\ 13 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Тепер можемо записати шукану фундаментальну систему розв'язків даної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\overline{X}_1(t) = \overline{V}_1^{(0,1)} e^t &= \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} e^t, & \overline{X}_2(t) = \overline{V}_1^{(0,2)} e^t &= \begin{pmatrix} -14 \\ -7 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix} e^t, \\ \overline{X}_3(t) = \overline{V}_2^{(0,1)} e^{2t} &= \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} e^{2t}, & \overline{X}_4(t) = \overline{V}_2^{(0,2)} e^{2t} &= \begin{pmatrix} -14 \\ -7 \\ 13 \\ -10 \end{pmatrix} e^{2t}.\end{aligned}$$

Приклад 2. Звести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$F(x_1, x_2, x_3) = 11x_1^2 + 14x_2^2 + 11x_3^2 - 6x_1x_2 - 22x_2x_3.$$

Розв'язання. Знайдемо власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 0 \\ -3 & 14 & -11 \\ 0 & -11 & 11 \end{pmatrix}$

квадратичної форми $F(x_1, x_2, x_3)$ із характеристичного рівняння:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 36\lambda^2 - 299\lambda + 264 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 11, \lambda_3 = 24.$$

Жорданова нормальна форма матриці A та її мінімальний поліном мають вигляд:

$$J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}, \quad \psi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 11)(\lambda - 24).$$

Для власних значень $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 11$, $\lambda_3 = 24$ відсутні домінуючі жорданові клітки (кожному власному значенню відповідає одна клітка порядку 1), тобто $r^* = p^* = 1$. Тому маємо по одному власному вектору $\overline{V}_1^{(0)}$, $\overline{V}_{11}^{(0)}$, $\overline{V}_{24}^{(0)}$, які внаслідок симетричності матриці A є взаємно ортогональними та утворюють базис простору (Кучма, 2018).

Згідно із властивістю (2) знаходимо для власних значень $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 11$, $\lambda_3 = 24$ відповідні власні вектори. Маємо

$$\begin{aligned}
& \text{Ker } (A - I) = \text{Im } [(A - 11I)(A - 24I)] = \\
& = \text{Im} \left[\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -11 \\ 0 & -11 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 & -3 & 0 \\ -3 & -10 & -11 \\ 0 & -11 & -13 \end{pmatrix} \right] = \\
& = \text{Im} \begin{pmatrix} 9 & 30 & 33 \\ 30 & 100 & 110 \\ 33 & 110 & 121 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{V}_1^{(0)} = \frac{1}{3} \cdot \bar{C}_{(A-11I)(A-24I)}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}, \\
& \text{Ker } (A - 11I) = \text{Im } [(A - I)(A - 24I)] = \\
& = \text{Im} \left[\begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 \\ -3 & 13 & -11 \\ 0 & -11 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 & -3 & 0 \\ -3 & -10 & -11 \\ 0 & -11 & -13 \end{pmatrix} \right] = \\
& = \text{Im} \begin{pmatrix} -121 & 0 & 33 \\ 0 & 0 & 0 \\ 33 & 0 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{V}_{11}^{(0)} = \frac{1}{11} \cdot \bar{C}_{(A-I)(A-24I)}^{(1)} = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \\
& \text{Ker } (A - 24I) = \text{Im } [(A - I)(A - 11I)] = \\
& = \text{Im} \left[\begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 \\ -3 & 13 & -11 \\ 0 & -11 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -11 \\ 0 & -11 & 0 \end{pmatrix} \right] = \\
& = \text{Im} \begin{pmatrix} -9 & -39 & 33 \\ -39 & 169 & -143 \\ 33 & -143 & 121 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{V}_{24}^{(0)} = \frac{1}{3} \cdot \bar{C}_{(A-I)(A-11I)}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 11 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Знормувавши вектори $\bar{V}_1^{(0)}$, $\bar{V}_{11}^{(0)}$, $\bar{V}_{24}^{(0)}$, отримуємо ортонормований базис, складений із власних векторів:

$$\left(\bar{V}_1^{(0)} \right)^\circ = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{230} \\ 10/\sqrt{230} \\ 11/\sqrt{230} \end{pmatrix}, \quad \left(\bar{V}_{11}^{(0)} \right)^\circ = \begin{pmatrix} -11/\sqrt{130} \\ 0 \\ 13/\sqrt{130} \end{pmatrix}, \quad \left(\bar{V}_{24}^{(0)} \right)^\circ = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{299} \\ -13/\sqrt{299} \\ 11/\sqrt{299} \end{pmatrix}.$$

Отже, за допомогою ортогонального перетворення

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{230} & -11/\sqrt{130} & 3/\sqrt{299} \\ 10/\sqrt{230} & 0 & -13/\sqrt{299} \\ 11/\sqrt{230} & 3/\sqrt{130} & 11/\sqrt{299} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

отримуємо канонічний вигляд заданої квадратичної форми

$$F(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 11y_2^2 + 24y_3^2.$$

У статті розглянута лише задача знаходження власних векторів матриці. Насправді, можливості запропонованого методу значно ширші. У разі, якщо $m^* > 1$, то метод дозволяє також знаходити відповідні приєднані вектори матриці оператора, використовуючи рівність (1).

Список літератури

- Беклемишев, Д. В. (1983). *Дополнительные главы линейной алгебры*. Москва: Наука.
- Зеліско, В. Р., & Зеліско, Г. В. (2014). *Лінійна алгебра і аналітична геометрія*. Практикум. Львів: ЛНУ імені Івана Франка.
- Кучма, М. І. (2018). *Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії*. Львів: СПОЛОМ.
- Хорн, Р., & Джонсон, Ч. (1989). *Матричный анализ*. Москва: Мир.

найменших квадратів

М. І. Кучма

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
markuchma@ukr.net

У статті запропоновано метод побудови псевдорозв'язків системи лінійних рівнянь з використанням понять ортогональної проєкції та ортогональної складової вектора відносно підпростору. Знаходження псевдорозв'язків системи лінійних рівнянь дає можливість визначати невідомі параметри регресійних моделей, для яких, як відомо, використовують метод найменших квадратів.

Ключові слова: псевдорозв'язки системи лінійних рівнянь, квадратичне відхилення, метод найменших квадратів, проєкція вектора на підпростір, ортогональна складова вектора відносно підпростору.

З лінійної алгебри відомо, що система m лінійних рівнянь з n невідомими

$$Ax = b$$

може бути сумісною, або несумісною (Кучма, 2018). Усі ці випадки мають місце на практиці. Зокрема, несумісній системі відповідає суперечлива ситуація, яка зустрічається при математичному описі якого-небудь економічного чи соціального явища, яке наприклад, описується лінійною залежністю між змінними.

Припускаємо, що величина b лінійно залежить від величин $a_1, a_2, \dots, a_n$, і маємо за мету знайти цю залежність $b = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, тобто визначити невідомі коефіцієнти $x_1, x_2, \dots, x_n$ (це називають *моделлю лінійної регресії*). Для знаходження залежності b від $a_1, a_2, \dots, a_n$ здійснюють велику кількість m вимірювань (результатів спостережень $m \gg n$), і за таблицею результатів спостережень записують систему рівнянь

[illegible]

у якій кількість невідомих менша за кількість рівнянь. Така система, як правило, несумісна. Тоді виникає необхідність змінити поняття розв'язку так, щоб довільна система лінійних рівнянь мала б єдиний розв'язок у деякому сенсі терміну «розв'язок». Тому знайдімо «найкращий наближений» розв'язок $x_1, x_2, \dots, x_n$, для якого відхилення значень b_i від $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ буде найменшим.

Метод найменших квадратів (Бессалов, 2007; Кремер, 1997) розв’язує задачу знаходження найкращого наближеного розв’язку у припущення, що за міру відхилення беруть суму квадратів різниць величин $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{in}x_n$ і b_i .

Псевдорозв'язком системи (1) називають набір величин $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$, який мінімізує суму квадратів різниць лівих і правих частин рівнянь системи, тобто величина

$$E^2 = (a_{1j}x_j - b_1)^2 + (a_{2j}x_j - b_2)^2 + \dots + (a_{mj}x_j - b_m)^2 \quad (2)$$

набуває найменшого значення для всіх $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Цю величину називають *квадратичним відхиленням*.

Нехай $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ — матриця системи (1), елементи якої вектори $a_j = (a_{1j} \ a_{2j} \ \dots \ a_{mj})^T \in \mathbb{R}^m, j = \overline{1, n}$, а $b = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ — вектор вільних членів системи (1).

Ураховуючи означення довжини (норми) вектора (Кремер, 1997), рівність (2), можна записати у матричній формі:

$$E^2 = \|Ax - b\|^2 \quad \text{або} \quad E = \|Ax - b\|.$$

Зауважмо, що якщо x — розв'язок системи (1) (у звичайному розумінні), то відхилення $E = 0$.

Величина $E = \|Ax - b\|$ є відстанню від між b і точкою Ax лінійного підпростору, породженому векторами $a_1, a_2, \dots, a_n$. Надалі, цей підпростір позначатимемо через $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. Знаходження розв'язку $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T$, який мінімізує E , з геометричних міркувань означатиме, що точка $A\hat{x}$ є найближчою до b , ніж будь-яка інша точка у підпросторі $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. Звідси вектор відхилення $e = b - A\hat{x}$ повинен бути ортогональним до цього підпростору $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. Вектор $e = b - A\hat{x}$ є ортогональною складовою вектора b відносно $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ (Lay, 2012).

З ортогональності $e = b - A\hat{x}$ до кожного з векторів $a_j = (a_{1j} \ a_{2j} \ \dots \ a_{mj})^T \in \mathbb{R}^m$ лінійного підпростору $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ отримаємо, що скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $(a_j^T, e) = 0, j = \overline{1, n}$. Маємо

$$\begin{cases} a_1^T(b - A\hat{x}) = 0, \\ \dots\dots\dots \text{або} \begin{pmatrix} a_1^T \\ \dots \\ a_n^T \end{pmatrix} (b - A\hat{x}) = 0 \quad \text{або} \quad A^T(b - A\hat{x}) = 0. \\ a_n^T(b - A\hat{x}) = 0 \end{cases}$$

Отже, вектор $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T$, який мінімізує E , є розв'язком рівняння

$$A^T A \hat{x} = A^T b. \quad (3)$$

Отриманий результат сформулюємо у вигляді теореми.

Приклад 1. Величина товарообміну x (тис. грн) та витрати обігу y (грн) задано у таблиці

x	17,28	17,05	18,3	18,8	19,2	18,5
y	537	534	550	555	560	552

Припускаючи, що між величинами x і y існує лінійна залежність, знайти параметри цієї залежності.

Розв'язання. Спочатку, розглядаючи пари значень (x_k, y_k) , $k = \overline{1,6}$ як точки координатної площини, отримуємо точковий графік (пропонуємо виконати самостійно), обираємо лінійну форму залежності $y = ax + c$.

Ураховуючи вигляд обраної залежності, складаємо систему лінійних рівнянь за даними таблиці

$$\begin{cases} 17,28a + c = 537, \\ 17,05a + c = 534, \\ 18,3a + c = 550, \\ 18,8a + c = 555, \\ 19,2a + c = 560, \\ 18,5a + c = 552. \end{cases}$$

Легко перевірити, що дана система є несумісною (не має розв'язків). Знайдемо її псевдорозв'язок за формулою (3). Тоді, записавши матрицю системи A , матрицю-стовпець вільних членів b і обчисливши $A^T A$ і $A^T b$

$$A = \begin{pmatrix} 17,28 & 1 \\ 17,05 & 1 \\ 18,3 & 1 \\ 18,8 & 1 \\ 19,2 & 1 \\ 18,5 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 537 \\ 534 \\ 550 \\ 555 \\ 560 \\ 552 \end{pmatrix},$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1988,52 & 109,13 \\ 109,13 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 59847,06 \\ 3288 \end{pmatrix},$$

із систем нормальних рівнянь $A^T A \hat{x} = A^T b$, а саме

$$\begin{cases} 1988,52 a + 109,13 c = 59847,06; \\ 109,13 a + 6 c = 3288, \end{cases}$$

знаходимо її розв'язок: $a = 12,078$, $c = 328,32$, наприклад, за формулами Крамера чи матричним методом.

Отже, $y = 12,078x + 328,32$.

Приклад 2. Знайти псевдорозв'язок $\hat{x}$ системи $Ax = b$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $E = \|A\hat{x} - b\|$.

Розв'язання. Дослідимо задану систему на сумісність. Маємо

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 3 \\ 5 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -12 & 24 \\ 0 & -7 & 14 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Отже, система сумісна і має єдиний розв'язок: $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Тепер, обчисливши $A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 41 \\ 41 & 38 \end{pmatrix}$ і зауваживши,

що $\det(A^T A) = 219 \neq 0$, знаходимо псевдорозв'язок $\hat{x}$ системи за формулою

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{pmatrix} 50 & 41 \\ 41 & 38 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{219} \begin{pmatrix} 38 & -41 \\ -41 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки псевдорозв'язок $\hat{x}$ і розв'язок $\tilde{x}$ системи збігаються, то легко перевірити, що

$$E = \|A\hat{x} - b\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 0.$$

Список літератури

- Lay, D. C. (2012). *Linear algebra and its applications* (4th ed.). Addison-Wesley.
 Барковський, В. В., & Барковська, Н. В. (1999). Вища математика для економістів. Київ: НАУ.
 Бессалов, А. В. (2007). *Эконометрика*. Киев: Кондор.
 Кремер, Н. Ш. (ред.). (1997). *Высшая математика для экономистов*. Москва: ЮНИТИ.
 Кучма, М. І. (2018). *Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії*. Львів: СПОЛОМ.

Прикладні задачі як стимул вивчення математики

О. А. Лагода

Київський національний університет технологій та дизайну, Київ, Україна
oksala@ukr.net

У контексті оприлюднених результатів PISA з математики запропоновано зміни, які необхідно внести до програм та методів викладання, які мотивуватимуть до вдумливого вивчення математики.

Ключові слова: PISA, прикладні задачі, навички та вміння з математики.

Нещодавно Україна отримала результати дослідження якості освіти за допомогою програми міжнародного оцінювання учнів та студентів PISA (Program for International Student Assessment). PISA перевіряє, чи здатні учні використовувати здобуті знання, уміння та навички з математики, читання та природничих наук у повсякденному житті. Результати, зокрема з математики, викликали значний резонанс у суспільстві. Третина учнів не мають базових навичок з математики. Українські учні ніколи не бачили в підручниках завдань, схожих на ті, що виконували на PISA. Тому в тестах багато хто не зміг впоратися з таблицями чи розв'язати задачу в реальному контексті: ось проблема, у якої є математична відповідь, спробуйте її знайти. Замість того діти «лили воду» та ставили багато відповідей там, де була потрібна одна. Творець PISA Андреас Шляйхер так коментує ситуацію в Україні (<https://goo-gl.su/K1OvzF>): «Ваш стиль викладання дещо старомодний — ви концентруєтеся на тому, щоб засвоїти величезну кількість інформації, а не на творчому мисленні та підходах. Велику роль, як і раніше, відіграють іспити — люди вчать заради того, щоб їх скласти, а не для того, щоб стати розумнішими».

Проблема, яка привела до таких провальних результатів з математики, багатоповерхова. По-перше, багато учнів справді не володіють найелементарнішими знаннями, як от, наприклад, не знають навіть таблички множення. Уже в початковій школі учні дозволяють собі використання калькуляторів в телефонах. Їхню любов до гаджетів можна використати із «зиском». Якщо на державному рівні замовити й упровадити в навчальний процес програми-тренажери для смартфонів, які будуть цікавими, різноманітними й надаватимуть можливість в ігровій формі розв'язати достатню кількість задач, а ще обов'язково вестимуть облік часу, витраченого на виконання вправ, то і вчителям, і батькам доведеться менше часу витрачати на перевірку домашніх завдань. Якщо при цьому програма буде «дозволяти» погратися на телефоні лише після виконаного домашнього завдання і виділений час буде залежати від якості, то це буде спроба якщо не подолати ігроманію, то, принаймні, загнати її в певні рамки.

Цілком очевидно, що учень, який умовно сорок разів у своєму житті додав та тридцять перемножив два числа, дуже далекий від достатнього рівня володіння арифметикою. Це якраз той випадок, коли кількість зроблених завдань «породжує» швидкість та, головне, якість їх виконання. Випускник школи

обов'язково повинен вільно оперувати цілими числами, десятковими та звичайними дробами, відсотками, розуміючи суть операції, проблеми, а не формально зазубривши, наприклад, правило порівняння дробів. Уже на цій стадії учнів важливо привчити до «прикидання» очікуваного результату та до оцінки його правдоподібності. Але якщо в молодшій школі дітей можна заохотити ігровою формою математичного тренажера, то далі гостро постає проблема мотивації навчання. Для чого вміти додавати чи ділити дроби, розв'язувати рівняння, нерівності тощо, якщо існують додатки, програми, сайти, які можуть за лічені секунди не просто дати правильну відповідь, а видати повне розв'язання. Як в епоху ІТ-технологій переконати школяра, студента займатися такою низькоінтелектуальною роботою як обчислення «вручну»? Аргумент, що математичні операції, здійснені в голові «качають» твій мозок, як гантелі біцепси, не завжди працює, оскільки збільшення вмісту «сірої речовини» віджиманням не перевіриш і в дзеркалі нею не помилуєшся. Тим більше, що існує певний скепсис із приводу покращення когнітивних навичок від розв'язування одноманітних задач (<https://goo.gl/8ZsZFV>) та (<https://goo.gl/imNLP9>). Зате відомо, що вихід із зони комфорту, подолання реальних викликів (challenges), по-перше, справді розвиває мозок, а по-друге, робить людей щасливими. Тому подання математики у вигляді актуальних прикладних задач — це три в одному. По-перше, це освічені випускники, які за роки навчання «прочитали» не один графік функції, яка описувала економічний, біологічний чи соціологічний процес, розв'язали багато оптимізаційних задач, зекономивши не одну тисячу умовних одиниць; по-друге, це впевнені у власному потенціалі молоді люди, які, по-третє, знають, що інтелектуальна праця дарує ендорфін.

Теперішня ж шкільна програма з математики настільки переобтяжена інформацією, що більшість учнів, на жаль, «сходять з математичної дистанції», не лише не отримавши належних базових навичок, та ще й з підірваною вірою в себе. Але доступність вищої освіти в Україні приводить такого випускника до університету. І починають викладачі «латати» дірки із шкільного курсу математики, замість того, щоб зосередитися на своєму. Оскільки у школі глибину засвоєння предмету замінили розширенням математичного світогляду, то дуже просто переконати студента, що границі, похідні та інтеграли складають потужний інструментарій майбутнього економіста, інженера, аналітика, адже по цих темах вже «пробіглися» в 11 класі, укравши у викладачів вищої школи ефект новизни та за браком часу для пояснень відбивши формальним підходом інтерес до них. Необхідна умова зростання якості вищої освіти полягає в піднятті рівня шкільної. Достатня — у збільшенні кількості годин на вивчення математики та систематичному розв'язуванні прикладних задач поряд з абстрактними. Мистецтву відшукування необхідної математичної моделі чи апарату для розв'язування конкретної задачі треба починати вчити учнів зі школи, тоді вони як студенти будуть краще сприймати їх під час навчання і будуть спроможними використовувати здобуті навички в майбутньому. Якщо учень розв'язував у школі різноманітні

рівняння, кількість вхідних величин у яких збільшувалася поступово, то студент не розгубиться, наприклад, перед такою задачею про банківські ставки.

У статті про дерегуляцію процентних ставок Christofi та Agapos (1984) розв'язують рівняння

$$r = \left(\frac{\eta}{\eta + 1} \right) \left(r_L - \frac{dC}{dD} \right)$$

відносно η . Тут r — ставка депозиту, що виплачується комерційним банком, r_L — це ставка, зароблена комерційними банками, C — вартість перетворення депозитів у банківські прибуткові активи, D — депозит, η — еластичність депозитів відносно ставки депозиту. Знайдіть η .

Для того, щоб майбутній спеціаліст вільно оперував поняттям похідної, потрібно, по-перше, ще у школі відійти від того, що функція це, як правило, $y = f(x)$, розглянувши її в десятках ситуацій, які описуються десятками різних літер, які прийняті в тій чи іншій сфері чи просто запропоновані автором. По-друге, диференціюючи ці функції, використовувати не лише позначення y' , а й $\frac{dy}{dx}$, урізноманітнивши позначення аргументів та функцій. Тоді наступна, насправді зовсім елементарна, задача не викликатиме труднощів ні у студентів, ні у майбутніх фахівців.

Eswaran та Kotwal (1985) розглядають деяку модель з аграрної економіки, у якій є два види працівників, постійні та тимчасові. Постійні працівники працюють за довгостроковими контрактами й можуть отримувати пільги, такі як відпустка та медичний супровід. Тимчасових працівників наймають поденно для виконання такої роботи, як прополювання, збирання врожаю тощо. Різниця z у вартості наймання постійного працівника від вартості найму тимчасового працівника задається

$$z = (1 + b)w_p - w_c,$$

де w_p і w_c — ставки заробітної плати за постійну та тимчасову роботу відповідно, b — константа, а w_p — це функція від w_c . Есваран та Котвал стверджують, що

$$\frac{dz}{dw_c} = (1 + b) \left[\frac{dw_p}{dw_c} - \frac{b}{1 + b} \right].$$

Перевірте це.

Поняття ступінчастої функції та дослідження її неперервності запроваджують, як правило, на прикладі функції $y = [x]$. Поряд з цим корисно розглянути функцію y — вартості перевезень «Новою Поштою» в межах України в гривнях

$$\begin{cases} 55, & \text{якщо } 2 < x \leq 5, \\ 65, & \text{якщо } 5 < x \leq 10, \\ 85, & \text{якщо } 10 < x \leq 20. \end{cases}$$

де x — вага в кілограмах.

До речі, на тему перевезень «Новою Поштою» можна створити не одну цікаву задачу. Ось, наприклад, задача на лінійну функцію.

Згідно з тарифами «Нової Пошти» за відправлення вагою 30 кг у межах міста, області, України доведеться заплатити 95, 100, 105 грн відповідно. При вазі понад 30 кг треба доплатити за кожен додатковий кг 1,5 грн; 2 грн; 3 грн; 3,5 грн, 4,5 грн або 6 грн залежно від того в межах міста, області чи чотирьох тарифних зон по Україні буде здійснюватися перевезення. Скласти функції вартості перевезення, побудувати їх графіки. Порахувати наскільки дорожче коштуватиме відправлення вагою 33 кг до Борисполя, ніж до одного з відділень Києва, якщо відправлення здійснюється зі столиці.

Можливо варто відокремити розв'язування прикладних задач від класичних абстрактних, запровадивши поняття розрахункової чи практичної роботи, коли на завершення кожної теми проводиться відповідне справді практичне заняття та видається домашнє завдання з реальними прикладними задачами. У контрольні роботи обов'язково включати прикладні задачі, оцінюючи їх вищими балами для більшого заохочення учнів та студентів.

Список літератури

- Christofi, A., & Agapos, A. M. (1984). Interest rate deregulation: An empirical justification. *Review of Financial Economics*, 20(1), 39–49.
- Eswaran, M., & Kotwal, A. (1985). A theory of two-tier labor markets in agrarian economies. *The American Economic Review*, 75(1), 162–177. www.jstor.org/stable/1812711

Про безпосередню оцінку логарифмічних величин (порівняння деяких логарифмів)

С. В. Левізов, І. Ф. Курбико

Владимирський державний університет імені О. Г. та М. Г. Столетових
(Vladimir State University), Владимир, Росія

levizov@rambler.ru

Оцінюються (без допоміжних «інструментальних» засобів) величини логарифмів, які неможливо обчислити точно.

Ключові слова: логарифми, степені чисел, біноміальний розклад, обчислювання «ручним» способом.

В одному із збірників тренувальних задач (до шкільного державного екзамену з математики) логарифмічна нерівність у відповіді зводиться до проміжків, кінцями яких виявляються числа $\log_7 15$, $\log_4 7$ і $\log_7 16$. Виникає питання — у якому порядку їх треба розташувати на числовій прямій? Інакше кажучи, потрібно оцінити (без допомоги калькулятора!) — яке з цих чисел найменше та найбільше? Не знаючи авторського розв'язку, запропонуємо наступні міркування.

Зрозуміло, що $\log_7 15 < \log_7 16$. Тому порівняємо $\log_7 15$ і $\log_4 7$.

Підносячи до степеня «вручну», можна виявити, що

$$\begin{aligned} 7^7 &= 7^3 \cdot 7^3 \cdot 7 = 343 \cdot 343 \cdot 7 = 823543 > \\ &> 15^5 = 5^5 \cdot 3^5 = 3125 \cdot 243 = 759375. \end{aligned}$$

Тому $7 > 5 \log_7 15 \Leftrightarrow \log_7 15 < \frac{7}{5} = 1,4$.

З другого боку, $8^5 = 32768$ та $7^5 = 16807$, звідки $8^5 < 2 \cdot 7^5$

Отже, $8^{10} < 4 \cdot 7^{10}$. але

$$8^{10} = 4^{15} \Rightarrow 4^{15} < 4 \cdot 7^{10} \Rightarrow 4^{14} < 7^{10}.$$

Логарифмуючи, одержимо, що

$$14 < 10 \log_4 7 \Leftrightarrow \log_4 7 > \frac{14}{10} = 1,4.$$

Отже,

$$\log_7 15 < 1,4 < \log_4 7.$$

Тепер порівняємо $\log_4 7$ і $\log_7 16$. Для цього спочатку перетворимо:

$$\log_4 7 = \frac{1}{2} \log_2 7, \quad \log_7 16 = 4 \log_7 2 = \frac{4}{\log_2 7}.$$

Далі, позначимо $\log_2 7 = a$, тоді $\log_7 16 = \frac{4}{a}$.

Порівнюючи величини $\frac{a}{2}$ и $\frac{4}{a}$, розгляньмо різницю:

$$\frac{a}{2} - \frac{4}{a} = \frac{a^2 - 8}{2a}.$$

Оскільки $a > 0$, то необхідно визначити знак у чисельнику, тобто порівняти a^2 з числом 8. Для цього зіставимо (це досягається уручну!) степені двійки і сімки. Очевидні рівності:

$$2^{14} = 2^{10} \cdot 2^4 = 1024 \cdot 16 = 16384, \quad 2^{15} = 32768,$$

$$7^5 = 7^2 \cdot 7^3 = 49 \cdot 343 = 16807.$$

Тому, з одного боку,

$$2^{14} < 7^5 \Rightarrow a = \log_2 7 > \frac{14}{5} = 2,8.$$

З другого боку,

$$\frac{2^{15}}{7^5} = \frac{32768}{16807} = 1,949... > 1,94$$

(встановлюється діленням «куточком»).

Легко перевірити (операцією множення в «стовпчик»), що

$$(1,94)^3 > 7.$$

Отже, маємо ланцюжок нерівностей:

$$7 < (1,94)^3 < \left(\frac{2^{15}}{7^5}\right)^3 < 2^3 = 8.$$

Звідси випливає, що $7^{16} < 2^{45}$. Отже, маємо

$$a = \log_2 7 < \frac{45}{16} = 2,8125.$$

З останньої нерівності випливає, що

$$a^2 = (\log_2 7)^2 < (2,82)^2 < 8,$$

тобто, $\frac{a^2 - 8}{2a} < 0$.

При цьому

$$2,8 < a < \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 1,4 < \frac{a}{2} < \sqrt{2} \Rightarrow \frac{4}{a} > \sqrt{2},$$

тобто

$$\frac{a}{2} < \sqrt{2} < \frac{4}{a} \Rightarrow \log_4 7 < \log_7 16.$$

Тому в підсумку маємо:

$$\log_7 15 < \log_4 7 < \log_7 16.$$

Відзначимо, що калькулятор дає такі значення:

$$\log_7 15 \approx 1,3916, \log_4 7 \approx 1,4037, \log_7 16 \approx 1,4248.$$

Отже, проміжки вельми «вузькі», і точки $\frac{7}{5} = 1,4$ і $\sqrt{2} \approx 1.4142\dots$ – практично їх середини!

Можна також запропонувати альтернативний спосіб порівняння двох останніх логарифмів.

А саме: приведемо їх до основ 7 і 8 — так, щоб вони були якомога «ближче» один до другого. Маємо:

$$\log_4 7 = \frac{3}{2} \log_8 7, \log_7 16 = \frac{4}{3} \log_7 8.$$

Отже, якщо позначити $\log_7 8 = t$, то потрібно порівняти величини $\frac{4}{3}t$ і $\frac{3}{2}t$, або t^2 і $\frac{9}{8}$.

Розкладімо степені $\frac{8}{7}$ за допомогою біноміального розкладу:

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{7}\right)^n &= \left(1 + \frac{1}{7}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{7} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{7^2} + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot \frac{1}{7^3} + \dots + \left(\frac{1}{7}\right)^n. \end{aligned}$$

Задля ручності підрахунків виконаємо оцінку для показника n , кратного числу 7. Нескладно переконатися, що вже при $n = 14$ одержимо:

$$\left(\frac{8}{7}\right)^{14} > 1 + \frac{14}{7} + \frac{14 \cdot 13}{2} \cdot \frac{1}{7^2} + \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{6} \cdot \frac{1}{7^3} + \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{24} \cdot \frac{1}{7^4} = \frac{2173}{343},$$

Тоді

$$\left(\frac{8}{7}\right)^{15} = \frac{8}{7} \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^{14} > \frac{8}{7} \cdot \frac{2173}{343} > 7$$

(обчислюється вручну!). Отже, $8^{15} > 7^{16}$.

Логарифмуючи, маємо:

$$t = \log_7 8 > \frac{16}{15} \Rightarrow (t)^2 > \left(\frac{16}{15}\right)^2 = \frac{256}{225} > \frac{9}{8}.$$

Звідси ясно, що

$$\frac{4}{3}t > \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t}, \text{ тобто } \log_7 16 > \log_4 7.$$

Також зрозуміло, що

$$\log_4 7 = \frac{3}{2} \log_8 7 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} < \frac{3}{2} \cdot \frac{15}{16} = \frac{45}{32} < 1,41,$$

тоді як

$$\log_7 16 = \frac{4}{3} \cdot t > \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} = \frac{64}{45} > 1,42..$$

Результати обох способів практично збігаються. Цікаво, чи існують простіші способи розв'язання цієї задачі?!

Про систему тестових завдань для контролю знань з математики для економістів

А. З. Мохонько¹, Л. С. Васіна², В. Д. Мохонько²

¹Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
²Технічний коледж Національного університету «Львівська політехніка»,
Львів, Україна
ludavhome@gmail.com

Розглянуто приклади тестових завдань для самостійної роботи студентів ЗВО.
Ключові слова: тестові завдання, контроль знань, комп'ютерна реалізація.

Сучасна економічна теорія і практика передбачають широке застосування математичних методів для виявлення зв'язків між економічними об'єктами, обробки інформації, оптимізації економічних задач. Така робота включає якісну і точну обробку масивів статистичних даних, що неможливо без використання ПК (зокрема, електронних таблиць MS Excel).

Контроль знань студентів з вищої математики чи економетрики містить, як правило, тестову частину. Це дозволяє оцінити наскільки студент орієнтується в навчальному матеріалі і здатний застосовувати одержані знання для розв'язання як теоретичних, так і практичних задач (зокрема, з використанням ПК), зменшити час, який витрачається на технічну частину розв'язання завдання. Інші завдання розглядаються як результат виконання домашніх чи розрахункових робіт і дають при рубіжному контролі додаткові бали.

Для прикладу, наведемо зразки тестових завдань з курсу економетрики.

Завдання 1. Дано два рівняння: 1) $y = a_0 + a_1x_1 + u$; 2) $y = \frac{x_1}{x_2}$, де y —

обсяг реалізованої продукції, x_1, x_2 — витрати на рекламу і ціна одиниці продукції. Яке з цих рівнянь є економетричною моделлю? Дайте означення моделі і всі альтернативні назви її змінних.

Завдання 2. Регресивний аналіз економетричної моделі передбачає:

Установлення тісноти та значущості зв'язку між змінними у рівнянні або рівняннях	Визначення виду рівняння або рівнянь для досліджуваних показників та розрахунок їх параметрів
--	---

Завдання 3. Кореляційний аналіз економетричної моделі передбачає:

Установлення тісноти та значущості зв'язку між змінними у рівнянні або рівняннях	Визначення виду рівняння або рівнянь для досліджуваних показників та розрахунок їх параметрів
--	---

Завдання 4. Яка з наведених моделей є функцією Кобба — Дугласа:

$Y = a \cdot (F \cdot L)^{\alpha+\beta}$	$Y = a \cdot F^{\alpha} \cdot L^{\beta}$	$Y = a \cdot (F \cdot L)^{\alpha\beta}$
--	--	---

Завдання 5. Відомі етапи побудови економетричної моделі:

Формування масивів вхідної інформації згідно з метою та завданнями дослідження.
 Оцінка параметрів ЕМ методом найменших квадратів. Аналіз залишків дає змогу відповісти на питання: чи не суперечить специфікація моделі передумовам класичної моделі лінійної регресії.
 Знайомство з економічною теорією, висунення гіпотези взаємозв'язку. Чітка постановка задачі.
 Специфікація моделі.
 Проведення аналізу достовірності моделі та прогноз за моделлю.
 Застосування інших методів оцінювання параметрів.

Покажіть взаємозв'язки між ними. Що означає кожний з етапів?

Завдання 6. Для оцінки параметрів моделі $\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \cdot x$ використовують метод найменших квадратів. Цей метод полягає у мінімізації:

Суми відхилень	Суми квадратів відхилень	Квадрату суми відхилень
----------------	--------------------------	-------------------------

Завдання 7. Сума квадратів відхилень лінійної моделі $y = a_0 + a_1 \cdot x$ згідно методу найменших квадратів мінімізується за формулою:

$\left(\sum_{i=1}^n u_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i)) \right)^2$	$\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i)]$	$\sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i)]^2$
---	---	---

Завдання 8. Значущість зв'язку між змінними моделі в кореляційному аналізі найчастіше здійснюється за допомогою:

Критерію Дарбіна — Вотсона	t -критерію Стюдента	F -критерію Фішера
----------------------------	------------------------	----------------------

Завдання 9. Аналіз вибірових даних дозволяє висунути гіпотезу про нелінійну залежність між показником x та фактором y : $y = a_0 + a_1 \ln x$. Перетворення і лінеаризована форма регресії щодо параметрів a_0, a_1 і змінних має вигляд:

$t = \ln x$ $\hat{y}_t = a_0 + a_1 t$	$t = \frac{1}{x}$ $\hat{y}_t = a_0 + a_1 t$	$\hat{y}_1 = b_0 + b_1 t$ $(a_1 = e^{b_1}, a_0 = e^{b_0})$ $\ln y = x \ln a_1 + \ln a_0$	$\hat{y}_t = b_0 + a_1 t$ $(a_0 = e^{b_0}) \hat{y}_t = b_0 + a_1 t$
--	--	--	--

Завдання 10. Скласти таблицю характеристик логарифмічної виробничої функції за схемою:

Загальний вигляд (рівняння $y = f(x), x > 0$)	Середня швидкість зміни $\frac{f(x)}{x}$	Гранична швидкість зміни $f'(x)$	Темп зміни $f''(x)$	Коефіцієнт еластичності $f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$
$y = a_0 + a_1 \cdot \ln x$				

Завдання 11. Коефіцієнт еластичності визначає:

Кількісну характеристику зв'язку між факторною і результативною ознаками	Швидкість зміни результативної ознаки при зміні факторної ознаки	Граничну швидкість зміни функції
--	--	----------------------------------

Завдання 12. Коефіцієнт еластичності попиту на певний товар від доходу рівний $K_e = -0,17$. До якої групи відноситься цей товар:

малоцінні	товари з малою еластичністю	товари з середньою еластичністю	товари з високою еластичністю
-----------	-----------------------------	---------------------------------	-------------------------------

Завдання 13. Який з показників характеризує щільність кореляційного зв'язку показника y зі всіма факторами X_i ($i = 1, 2, \dots, m$):

Коефіцієнт множинної кореляції	Коефіцієнт детермінації	Частинні коефіцієнти кореляції
--------------------------------	-------------------------	--------------------------------

Завдання 14. Встановлення значущості кореляційного зв'язку між факторними ознаками проводиться за допомогою:

Коефіцієнту множинної кореляції	t -критерію Стюдента	Частинних коеф. кореляції
---------------------------------	------------------------	---------------------------

Приклад розв'язання однієї з типових задач. Статистичні дані залежності роздрібного товарообігу (Y) від доходів населення (X) в умовних грошових одиницях, які досліджувалися протягом шести місяців наведено в таблиці:

№ спост.	$Y = y_i$	$X = x_i$
1	1,9	0,9
2	2,2	1,4
3	2,8	2,1
4	3,4	2,6
5	4,6	3,4
6	4,9	3,8

За допомогою функції ЛИНЕЙН програми обробки електронних таблиць MS Excel визначено параметри парної лінійної регресії $\hat{y} = \hat{a}_1 \cdot x + \hat{a}_0$ та обчислено регресійну статистику. Результати представлено у вигляді масиву:

	$\hat{a}_1$ 1,091053	$\hat{a}_0$ 0,717842	
$S\hat{a}_1$	0,074558	0,192364	$S\hat{a}_0$
R^2	0,981663	0,187634	σ_u
F	214,141	4	$n - m$
$\sum_{i=1}^6 (y_i - \hat{y}_i)^2$	7,539174	0,140826	$\sum_{i=1}^6 (y_i - \hat{y}_i)^2$

Чому дорівнюють параметри $\hat{a}_1$ та $\hat{a}_0$ економетричної моделі:

$\hat{a}_1 = 0,717842$	$\hat{a}_1 = 1,091053$	$\hat{a}_1 = 0,074558$
$\hat{a}_0 = 1,091053$	$\hat{a}_0 = 0,717842$	$\hat{a}_0 = 0,192364$

Розв'язання. Оцінки параметрів лінійної регресійної моделі визначаємо з першого рядка масиву: $\hat{a}_1 = 1,091053$, $\hat{a}_0 = 0,717842$.

Економетрична модель записується у вигляді: $\hat{y} = 1,091 \cdot x + 0,718$.

Параметр $\hat{a}_1 = 1,091$ характеризує граничний розмір витрат на купівлю товарів у роздрібній торгівлі. Тобто, коли дохід збільшиться на одиницю, то обсяг роздрібного товарообігу зросте на 1,091 одиниці.

Число ступенів вільності чисельника і знаменника даної моделі:

1; 6	1; 4	2; 4
------	------	------

Розв'язання. Число ступенів вільності знаменника $n - m = 6 - 2 = 4$ ($n = 6$ — кількість спостережень, $m = 2$ — кількість змінних моделі). Число ступенів вільності чисельника рівне 1, оскільки в моделі одна факторна змінна.

Записати значення F -критерію Фішера та визначити, чи адекватна модель статистичним даним:

$F = 214$ так	$F = 0,98$ так	$F = 214$ ні
---------------	----------------	--------------

Розв'язання. Дослідження адекватності моделі проводимо за допомогою F -критерію Фішера. Оскільки число ступенів вільності $n - m = 6 - 2 = 4$ ($n = 6$ — кількість спостережень, $m = 2$ — кількість змінних моделі), то:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^6 (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\frac{1}{6-2} \cdot \sum_{i=1}^6 (y_i - \hat{y}_i)^2} = \frac{4 \cdot 7,539}{0,141} \approx 214$$

Значення сум знаходяться у п'ятому рядку масиву регресійної статистики

7,539174	0,140826
----------	----------

Обчислене значення критерію збігається зі значенням, обчисленим в MS Excel (третій рядок масиву):

F	214,141	4	$n - m$
-----	---------	---	---------

Фактичне значення критерію Фішера F порівнюємо з табличним значенням $F_{кр.}$. При ступенях вільності чисельника (1) та знаменника (4) і рівні значущості $\alpha = 0,05$ для даної моделі значення $F_{кр.} = 7,71$ (визначається з таблиць). Оскільки $F = 214 > F_{кр.} = 7,71$, то гіпотеза про істотність або значущість зв'язку між залежною і незалежною змінними економічної моделі підтверджується з ймовірністю 95% і можна зробити висновок про адекватність побудованої моделі статистичним даним.

Дисперсія залишків σ_u^2 моделі становить:

0,035	0,187	0,256
-------	-------	-------

Розв'язання. Визначаємо дисперсію залишків $\sigma_u^2 = 0,187634^2 = 0,035$ (значення стандартної похибки залишків σ_u обчислене у третьому рядку масиву)

Залишкова дисперсія $\sigma_u^2 = 0,035 \rightarrow 0$ показує, що розрахункові значення роздрібного товарообігу дуже близькі до фактичних даних спостережень.

Чи присутні у даній моделі зміщення оцінок параметрів $\hat{a}_1$ та $\hat{a}_0$:

так	ні	тільки параметра $\hat{a}_1$	тільки параметра $\hat{a}_0$
-----	----	------------------------------	------------------------------

Розв'язання. Стандартні похибки оцінок параметрів моделі (другий рядок регресійної статистики):

$S\hat{a}_1$	0,074558	0,192364	$S\hat{a}_0$
--------------	----------	----------	--------------

Порівнюємо стандартні похибки оцінок параметрів моделі із значеннями цих оцінок $\hat{a}_1 = 1,091$, $\hat{a}_0 = 0,718$:

Стандартна похибка оцінки параметра $\hat{a}_1$ становить 6,84% абсолютного значення цього параметра, що свідчить про незміщенність оцінки параметра $\hat{a}_1$ моделі; стандартна похибка оцінки параметра $\hat{a}_0$ становить 26,8% абсолютного значення цього параметра, а тому параметр $\hat{a}_0$ може мати зміщення, зумовлене невеликою сукупністю спостережень (шість місяців).

У процесі навчання і під час підготовки до заліків та іспитів студенти можуть користуватися методичними матеріалами, які є на сайті навчального закладу.

Наявність тестових завдань дозволяє студентам з різнорівневою підготовкою орієнтуватися в навчальному матеріалі і засвоювати його.

Список літератури

- Васіна, Л. С. (2010). *Економетрія: Практикум з використанням MS Excel*. Львів: СПОЛОМ.
- Лондар, С. Л., & Юринець, Р. В. (2004). *Економетрія засобами MS EXCEL*. Київ: Видавництво Європейського ун-ту.

Чи треба вчити формули в час суцільної комп'ютеризації знань?

Н. М. Панасюк

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

nanipa01030@gmail.com

Розглядається актуальне в наш час питання мотивації студентів до запам'ятовування теоретичного матеріалу, зокрема математичних формул при вивченні курсів вищої математики.

Ключові слова: розвинення пам'яті і мислення, творчий підхід до вивчення математичного матеріалу, встановлення специфіки формули з метою її запам'ятовування.

Наш час — це стрімке розповсюдження Інтернету і гаджетів буквально на кожному кроці, що продукує хибні думки лінивого про те, що не треба вчити, наприклад, математичних формул, бо все можна знайти в Інтернеті. На жаль, навіть в освітянських колах, час від часу підіймається питання про доцільність вчити формули на пам'ять. Може дійсно не треба? Для відповіді звернімося до найдорожчих для нас усіх — до дітей. З чого складаються їх заняття: вивчення віршиків. Для чого? Хіба тільки для того, щоб виступити на святі й порадувати батьків, які з гордістю будуть розказувати, які геніальні в них діти, чи для участі в передачі «Найрозумніший»? Це, звичайно, також, але супутньо. Головним завданням є розвинення пам'яті для подальшого піднесення, на новий рівень наукового і творчого формування особистості, здатної орієнтуватися у швидкоплинному потоці нової інформації, уміти оцінювати її, вибрати потрібне, базуючись на фундаменті отриманих роками знань. А для цього потрібна, перш за все, пам'ять в активній і живій формі, динамічна, формуюча творче мислення і розвиток особистості, що сприймає нове, опрацьовує і творчо перероблює її. Унаслідок народжуються нові ідеї і починання.

Вернімося до малечі. Що ще роблять діти на заняттях? Так, малюють, вирізають, ліплять. Це не тільки знайомство з кольорами й формами, розвиває уяву й художній смак. Усе це значно розвиває моторику, яка, що вже доведено вченими, тісно пов'язана з розвитком мислення. Це тобі не сенсорне керування — тільки торкнешся і от: кольорові розваги, мозок засмічений, а навичок ніяких, хіба інформація, що інколи не дуже корисна. Я сама відвідала заняття художньої студії, де зовсім маленькі дітки 3–4 роки ліплять з глини, крутять гончарний круг і, після обпалу, що виконують, звісно, керівники, розмальовують. З їхніх рук виходять такі чудові вироби, що диву дивуєшся. І це звичайні дітки, яких привели розумні батьки. Цих діточок не можна відірвати від роботи, вони натхненні, усім цікавляться, щось пропонують і мимоволі думаєш, от би таку працелюбність і натхнення нашим студентам до яких і вертаємося.

Певно не один викладач помітив, що вони почали значно повільніше, нерозбірливіше писати, гірше запам'ятовують матеріал при конспектуванні, особ-

ливо у групах з низьким рівнем математичної підготовки. Цього року я працювала в потоці екологів для яких, тепер, не вимагають сертифікат ЗНО з математики, так вони не можуть законспектувати більше 2–3 слів, увесь час просять повторити, хоча я читаю матеріал достатньо повільно, повторюючи й акцентуючи на головному.

Ніколи не було проблем з конспектуванням у моїх студентів і під час лекції ми завжди спілкувались, обговорювали матеріал. Ось вам і пам'ять, яку в першу чергу розвиває математика вже у процесі вивчення елементарної, з її формулами, теоремами, правилами та перетвореннями, які розвивають логіку й узагалі мислення, а також моторика, яка сприяє його розвитку й широко застосовується у процесі математичних перетворень і розрахунків. Крім того, як уже доведено, при спілкуванні й обговоренні матеріалу на лекціях, практичних заняттях та семінарах, значно краще сприймається і запам'ятовується матеріал, ніж при простому прочитанні. Я також вже зверталась до цього питання (Панасюк, 2015). Інколи я застосовую такий прийом. Коли читається лекція, у якій використовується матеріал попередніх, я звертаюсь до студентів із проханням назвати з конспекту номер формули, яку ми використовуємо. І більшість з них з радістю її відшуковують. При цьому, зрозуміло, відбувається і зорове запам'ятовування, і орієнтування в конспекті.

І ще про формули. Їх треба не зазубрювати, а любити, знаходити в них закономірності для запам'ятовування, тобто аналізувати, а не бездумно вчити. Візьмімо з тригонометрії формули пониження степеню, що широко використовують у різних розділах математичного аналізу, зокрема для інтегрування

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Обидві формули однакові за структурою і відрізняються тільки знаком у чисельнику, при тому для однойменної функції знак «+», а для спорідненої «-».

Розгляньмо розкладення функції однієї змінної в ряд Тейлора в околі x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Тут кожний доданок з номером n , починаючи з нуля, має порядок похідних, показники степеню множника $x - x_0$ і факторіали, що стоять у знаменнику, рівними номеру відповідного члену, при цьому за похідну нульового порядку беремо значення функції в цій точці.

В операційному численні, як правило, викликає складнощі запам'ятовування формули зображення похідних n -го порядку функції оригіналу для ненульових початкових умов. Але тут усе дуже просто для сприйняття. Як ми бачимо, першим доданком стоїть добуток n -го степеню параметра p на зображення функції за Лапласом, а далі йде лінійна комбінація добутків парамет-

ра, у степені, починаючи з $n - 1$, тобто на одиницю меншого від першого доданку на значення похідних функції оригіналу в нулі, причому сума показника степеню і порядку похідної весь час стала й дорівнює $n - 1$, при цьому, як і раніше, за похідну нульового порядку приймаємо саму функцію.

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - p^{n-2} \cdot f'(0) - p^{n-3} \cdot f''(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

де $F(p)$ — зображення функції $f(t)$ за Лапласу, p — параметр.

Але вернімося до питання «вчити чи не вчити». У відповідь на «можна знайти» розгляньмо ситуацію хоча б в інтегруванні. Не знаючи таблиці інтегралів, вивченню якої зараз буває опираються студенти, як можна побачити в середині підінтегрального виразу диференціал функції, який дозволить обчислити інтеграл відповідним методом. Тут і з елементарної математики знання знадобляться. Як можна у виразі побачити те, чого не знаєш і шукати що? Наведу елементарний приклад з інтегрування. Обчислити інтеграл

$$\int \cos^3 x \cdot \sin 2x dx.$$

Тут треба в активі знати формулу синуса подвійного кута, побачити диференціал косинуса і степеневу функцію.

На вулицях, у транспорті, магазинах і, навіть, на парах більшість у смартфонах. Мимоволі виникає думка: «А коли вони думають, розвивають мислення, створюють своє, сперечаються з отриманою інформацією подумки, чи вголос?». Залежність, що зростає, ініціативність, сміливість у грамотних рішеннях зникає. Тому: треба розвивати пам'ять і мислення на основі накопичених знань, аналізу, порівнянь і узагальнень. А саме накопичена в пам'яті інформація — підґрунтя для пошуку й нових рішень, які можуть виникнути всюди: у дорозі і на відпочинку, на роботі і, навіть, уві сні. Гаджети — це тільки джерело інформації, яку ще треба вміти відсепарувати й оцінити за допомогою сформованої роками, від дитинства до зрілого віку, ерудиції та розвиненого мислення. Саме це і є запорукою нашого успіху.

Список літератури

Панасюк, Н. М. (2015). Про роль математики в розвитку творчого мислення майбутнього спеціаліста. У *Матеріалах Четвертої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 195–196). Київ: НТУУ «КПІ». <http://matan.kpi.ua/public/files/2016/mvstu4-abstracts.pdf>

Модели процессов электромагнитной индукции и особенности практических расчетов на их основе

С. Н. Потемкина¹, А. В. Розанов²,

¹Тольяттинский государственный университет, Тольятти, Россия

²Саратовский ГАУ им. Н. И. Вавилова, Саратов, Россия

s.potemkina@tltsu.ru, arosanov@yandex.ru

Рассматриваются математические модели возникновения ЭДС индукции и особенности расчета величины ЭДС и направления индукционного тока в проводящем контуре. Особое внимание обращается на применение метода ДИ к расчету величины ЭДС индукции.

Ключевые слова: Закон Фарадея для явления электромагнитной индукции, магнитный поток, скорость изменения магнитного потока, сторонняя сила, электрическая и магнитная составляющие силы Лоренца, математическое моделирование.

При выполнении самостоятельных работ по курсу «Электродинамика» в виртуальной физической лаборатории (Сизова и др., 2016) студентам предлагается использовать две математические модели явления электромагнитной индукции (ЭМИ).

В качестве феноменологической модели, опирающейся на закон Фарадея, можно выбрать П-образный проводящий стержень, помещенный в однородное магнитное поле с магнитной индукцией ($\vec{B}$), по которому с постоянной скоростью скользит проводящая перемычка (рис. 1). В соответствии с законом Фарадея ЭДС электромагнитной индукции E_i определяется выражением (Беликов, 1986, с. 107–110):

$$E_i = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{или} \quad E_i = -\frac{d\Psi}{dt},$$

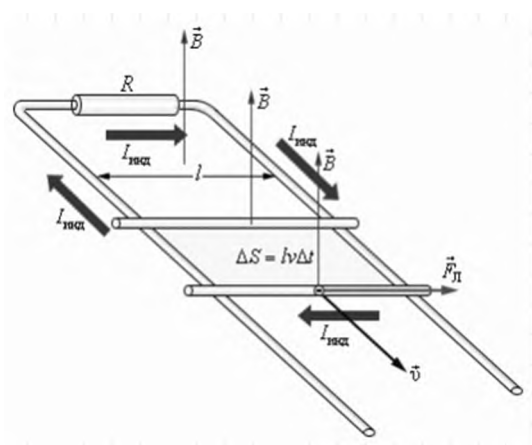


Рисунок 1

где Φ — магнитный поток, сцепленный с одним витком, $\Psi = N\Phi$ — полный магнитный поток, сцепленный с катушкой из нескольких витков, N — число витков катушки. Из закона Фарадея для ЭМИ следует, что величина E_i определяется скоростью изменения магнитного потока, сцепленного с витком или замкнутым контуром. С принципиальной точки зрения появление ЭДС индукции в модели Фарадея объясняется действием сторонней силы, роль которой играет магнитная составляющая силы Лоренца, возникающая при движении перемычки в постоянном магнитном поле. Направление индукционного тока в

замкнутом контуре противоположно направлению магнитной составляющей силы Лоренца. Модель Фарадея лежит в основе расчета индукционных генераторов тока, в которых ротор с обмоткой вращается во внешнем магнитном поле.

Рассмотрим пример расчета величины ЭДС индукции с использованием модели Фарадея. Предположим, что необходимо найти ЭДС индукции E_i , возникающую на концах крыльев самолета, летящего со скоростью v км/ч, если вертикальная составляющая напряженности магнитного поля Земли равна H , а размах крыльев самолета L (рис. 2). Вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости листа от нас ($\otimes \vec{B}$).

Обозначим первое положение самолета A_1B_1 , в момент времени $t = 0$. Второе — A_2B_2 в момент времени t . Площадь контура, пронизываемого линиями вектора $\vec{B}$ равна:

$$dS = vLdt.$$

По определению: $B = \mu_0 H$. В соответствии с законом Фарадея модуль ЭДС индукции будет равен:

$$E_i = \frac{d}{dt} \Phi = BLv.$$

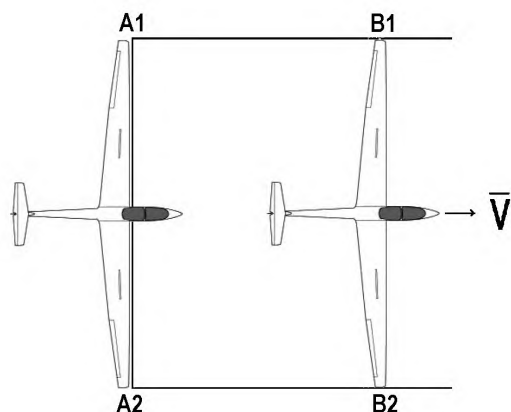


Рисунок 2

В модели Максвелла контур покоится в переменном магнитном поле. В такой системе, кроме силы Лоренца, других действующих сил нет. На покоящиеся заряды ($\vec{v} = \vec{0}$) магнитная составляющая силы Лоренца не действует. Следовательно, в данной модели роль сторонней силы играет только электрическая составляющая силы Лоренца. Изменяющееся во времени магнитное поле, согласно представлению, введенному Максвеллом (Ландау & Лившиц, 2005, с. 37), приводит к появлению в пространстве электрического поля независимо от наличия проводящего контура. Проводящий контур лишь позволяет обнаружить существование этого электрического поля по возникновению в контуре индукционного тока. Электрическое поле, порожденное меняющимся со временем магнитным полем, является вихревым. Модель Максвелла лежит в основе радиосвязи и радиолокации.

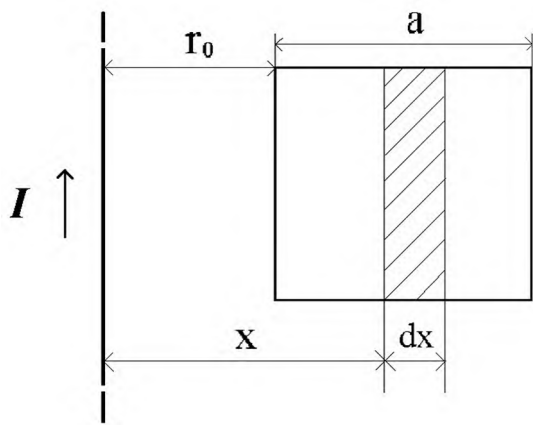


Рис. 3

Расчет величины ЭДС индукции с использованием модели Максвелла целесообразно проводить на основе метода дифференцирования и интегрирования (ДИ), в основе которого лежат два принципа:

представление рассчитываемой величины в дифференциальной форме и принцип суперпозиции (Потемкина & Розанов, 2010).

Пусть в плоскости квадратной рамки с омическим сопротивлением R и со стороной a на расстоянии r_0 от рамки расположен прямой бесконечный проводник (см. рис. 3). Проводник параллелен одной из сторон рамки. Сила тока в проводнике изменяется по закону $I = bt^3$, где $b > 0$ и $b = \text{const}$. Рассчитаем величины магнитного потока, ЭДС индукции и силу индукционного тока, возникшего в рамке.

Вследствие изменения силы тока в проводнике, магнитный поток, пронизывающий плоскость рамки, изменяется, и в ней возникает индукционный ток. Индукция магнитного поля, созданного проводником, убывает с удалением от проводника, т.е. рамка находится в неоднородном магнитном поле.

Рассчитаем сначала величину индукции магнитного поля прямого, бесконечно длинного тока силой I , на расстоянии x от него (Рис.4). Здесь l длина отрезка провода с током; dl — длина элемента проводника; $Id\vec{l}$ — линейный элемент тока; α — угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$; x — длина перпендикуляра, опущенного из точки A на отрезок проводника с током; $d\alpha$ — приращение угла при перемещении по проводнику с током на расстояние dl ; $OA = r_0 = x$; $DC = r d\alpha$;

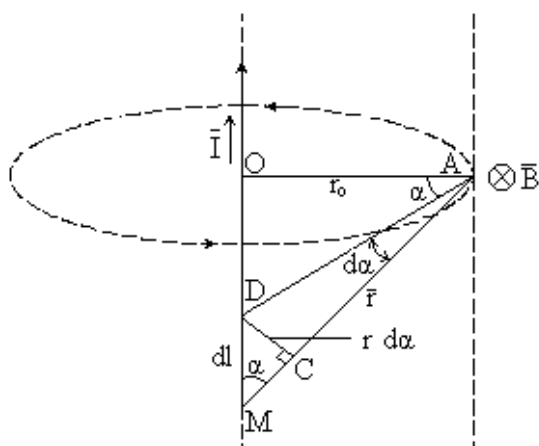


Рис. 4

$\sin \alpha = r \frac{d\alpha}{dl}$; $DM = dl$; $MA = r$. Рас-

смотрим два прямоугольных треугольника $\triangle MCD$ и $\triangle MOA$, они подобны. Из подобия этих треугольников следует пропорциональность сторон, тогда:

$$r \frac{d\alpha}{dl} = \frac{r_0}{r} \quad (1)$$

$$dl = \frac{r^2}{r_0} d\alpha \quad (2)$$

Согласно закону Био — Савара — Лапласа, модуль магнитной индукции элемента проводника с током, равен:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I r \sin \alpha}{4\pi r^3} dl. \quad (3)$$

Подставив выражение (2) в (3) получим:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi r_0} d\alpha. \quad (4)$$

Все векторы $d\vec{B}$ в данной точке, отстоящей от провода с током на расстояние $r_0 = x$, имеют одинаковое направление: они направлены перпендикулярно плоскости чертежа, за чертеж ($\otimes \vec{B}$), поэтому можно геометрическую сумму ($\sum d\vec{B}_i$) заменить на сумму их модулей ($\sum dB_i$), тогда:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi r^2 x} d\alpha. \quad (5)$$

В качестве переменной интегрирования возьмем угол α . Для всех элементов бесконечно длинного прямого тока угол α будет изменяться от 0 до π . Проинтегрировав выражение (5) получим:

$$|B| = \int dB = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi x} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \left(\frac{\mu\mu_0 I}{4\pi x} \right) \cdot (-1) [\cos \pi - \cos 0] = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi x}. \quad (6)$$

Из соотношения (6) следует, что индукция магнитного поля, созданного прямым бесконечно длинным проводником, убывает с удалением от проводника, т.е. рамка находится в неоднородном магнитном поле (учтем, что $\mu = 1$).

Выразим элементарный магнитный поток сквозь узкую полоску шириной dx :

$$d\Phi = B_x a dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi x} dx. \quad (7)$$

Интегрируя это выражение по x от r_0 до $(r_0 + a)$, получим:

$$\Phi(t) = \int_{r_0}^{r_0+a} \mu_0 \frac{Ia}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 b t^3 a}{2\pi} \int_{r_0}^{r_0+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 a b t^3}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{r_0 + a}{r_0} \right) \quad (8)$$

По закону Фарадея найдем величину ЭДС индукции:

$$E_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = 3t^2 a \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left(\frac{r_0 + a}{r_0} \right) \quad (9)$$

А из закона Ома следует, что сила тока равна:

$$I = \frac{E_1}{R} = 3 \frac{t^2 a \mu_0 b}{2\pi R} \ln \left(\frac{r_0 + a}{r_0} \right) \quad (10)$$

Таким образом, обдуманно выбирая различные математические модели и методы расчета характеристик полей, и применяя наиболее приемлемые из них для конкретных условий, студенты получают возможность выработать и закрепить практические навыки, которые потребуются им в сфере их будущей профессиональной деятельности.

Список литературы

- Беликов, Б. С. (1986). *Решение задач по физике. Общие методы*. Москва: Высшая школа.
- Ландау, Л. Д., & Лившиц, Е. М. (2005). *Теоретическая физика: Т. 8. Электродинамика сплошных сред*. Москва: ФИЗМАТЛИТ.

- Потемкина, С. Н., & Розанов, А. В. (2010). Математические методы в преподавании курса физики. В *Матеріалах Тринадцятої Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука* (Т. 3, с. 268). Киев: НТУУ «КПІ».
- Сизова, Ю. В., Лиманова, Н. И., & Потемкина, С. Н. (2016). Виртуальная физическая лаборатории для системы дистанционного обучения. В *Материалах III Международной научно-практической конференции «Математическое моделирование в сфере АПК»* (с. 123–127). Саратов: Амирит.

Застосування теорем Ролля, Лагранжа та Коші для розв'язання задач студентських математичних олімпіад

С. М. Сапрікін

Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського, Одеса, Україна,
sergey.saprikin@gmail.com

У статті розглянуто задачі, що були запропоновані на різноманітних математичних олімпіадах студентів, для розв'язання яких використано теореми Ролля, Лагранжа чи Коші.

Ключові слова: задачі студентських математичних олімпіад, теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коші.

Студентські математичні олімпіади щорічно проводять в багатьох закладах вищої освіти різних країн і мають на меті виділення найталановитіших студентів, які мають математичні здібності, активізацію наукової творчості студентів, розвиток математичного мислення, нарешті, закріплення знань основної програми і одержання нових знань.

Завдання, які пропонують на математичних олімпіадах, зазвичай мають нестандартний характер і ілюструють ту чи іншу математичну ідею, вивчення якої, як правило, не входить до складу обов'язкових університетських програм з математики.

Розгляньмо задачі, для розв'язання яких застосовується одна із трьох відомих теорем диференціального числення — Ролля, Лагранжа чи Коші. Ці теореми присутні в будь-якому курсі математичного аналізу, наприклад, Дороговцев (2004, с. 139–144).

Задача. Нехай функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ диференційовна на проміжку $[a; b]$, причому $f(a) = f(b) = 0$. Доведіть для всіх $n \in \mathbb{N}$ та для всіх $\alpha \in \mathbb{R}$ рівняння $f'(x) = \alpha x^{n-1} f(x)$ має розв'язок на $[a; b]$.

Розв'язання. Ідея розв'язання цієї задачі полягає в тому, щоб знайти функцію, застосування теореми Ролля до якої давало б рівність, що є еквівалентною рівності

$$f'(x) = \alpha x^{n-1} f(x).$$

Розгляньмо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) e^{-\frac{\alpha x^n}{n}}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{-\frac{\alpha x^n}{n}} (f'(x) - f(x) \alpha x^{n-1}), \\ F(a) &= f(a) e^{-\frac{\alpha a^n}{n}} = 0, \quad F(b) = f(b) e^{-\frac{\alpha b^n}{n}} = 0. \end{aligned}$$

Застосовуючи теорему Ролля для цієї функції на відрізку $[a; b]$, отримаємо таку точку $c \in (a; b)$, що $F'(c) = 0$, тобто

$$e^{-\frac{\alpha c^n}{n}} (f'(c) - f(c)\alpha c^{n-1}) = 0,$$

звідки ми отримуємо потрібне твердження.

Задача. Нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є двічі диференційованою функцією, причому $f(0) = 0$. Доведіть, що існує така точка $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, для якої виконується рівність

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \xi).$$

Розв'язання. Для розв'язання задачі розглядаємо допоміжну функцію

$$g(x) = f(x) \cos x$$

і застосуємо для неї на проміжках $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ і $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ теорему Ролля (очевидно, що

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

і за умовою $g(0) = f(0) \cos 0 = 0$): існують такі точки $\xi_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ і $\xi_2 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, для яких виконуються рівності $g'(\xi_1) = 0$ і $g'(\xi_2) = 0$.

Розгляньмо далі нову допоміжну функцію

$$h(x) = \frac{g'(x)}{\cos^2 x} = \frac{f'(x) \cos x - f(x) \sin x}{\cos^2 x}.$$

Маємо, що $h(\xi_1) = h(\xi_2) = 0$, тому за теоремою Ролля існує таке $\xi \in (\xi_1; \xi_2) \subset \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, що $h'(\xi) = 0$. Оскільки

$$h'(\xi) = \frac{1}{\cos \xi} \left(f''(\xi) - f(\xi) (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \xi) \right),$$

ми отримуємо потрібну рівність.

Задача. Нехай функція $f(x)$ $(n+1)$ разів диференційована на $\mathbb{R}$. Доведіть, що для довільних точок a і b , $a < b$, для яких виконано співвідношення

$$\ln \left(\frac{f(b) + f'(b) + \dots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \dots + f^{(n)}(a)} \right) = b - a,$$

існує число $c \in (a; b)$, для якого $f^{(n+1)}(c) = f(c)$.

Розв'язання. Розгляньмо допоміжну функцію

$$g(x) = \ln(f(x) + f'(x) + \dots + f^{(n)}(x)),$$

тоді

$$g'(x) = \frac{f'(x) + f''(x) + \dots + f^{(n+1)}(x)}{f(x) + f'(x) + \dots + f^{(n)}(x)}.$$

Застосуємо теорему Лагранжа для функції $g(x)$ на відрізку $[a; b]$: існує таке число $c \in (a; b)$, що $g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$, тобто

$$g'(c) = \frac{\ln(f(b) + f'(b) + \dots + f^{(n)}(b)) - \ln(f(a) + f'(a) + \dots + f^{(n)}(a))}{b - a}.$$

Оскільки за умовою

$$\ln \left(\frac{f(b) + f'(b) + \dots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \dots + f^{(n)}(a)} \right) = b - a,$$

то $g'(c) = 1$, що еквівалентно потрібній рівності $f^{(n+1)}(c) = f(c)$.

Задача. Нехай $0 < x_1 < x_2$, функція $f : [x_1; x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ диференційовна на $[x_1; x_2]$. Доведіть, що існує така точка $\xi \in (x_1; x_2)$, для якої виконується рівність

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розглянемо допоміжні функції

$$F(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ і } G(x) = \frac{1}{x}.$$

Тоді

$$F'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}, \quad G'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

За теоремою Коші існує така точка $\xi \in (x_1; x_2)$, що

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{G(x_2) - G(x_1)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}, \text{ тобто } \frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \frac{\frac{f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi)}{\xi^2}}{\frac{1}{\xi^2}},$$

що еквівалентно потрібній рівності.

Список літератури

Дороговцев, А. Я. (2004). *Математический анализ: Краткий курс в современном изложении*. Киев: Факт.

Фігури Ліссажу

Б. О. Тригубець, В. В. Листопадова

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

truhybetsbohdan@gmail.com, listopadovavv@gmail.com

У статті розглянуто рух матеріальної точки по деякій криволінійній траєкторії, а також досліджено вигляд кривої та залежність форми фігури від різниці фаз коливань та співвідношення частот.

Ключові слова: фігури Ліссажу, частота коливань, амплітуда коливань.

Фігурами Ліссажу називають криві, які викреслює точка, що коливається гармонічно у двох взаємно перпендикулярних напрямках.

Уперше було описані американським математиком, астрономом та фізиком Натанієлем Бавдичем (N. Bowditch) у 1799 р. та детальні вивчені французьким фізиком та математиком Жюлем Антуаном Ліссажу (J A. Lissajous) у 1855–1886 рр.

Уявімо маятник, який ззаду розгойдуємо однією рукою, а збоку — другою. Тобто маятник буде одночасно відхилятися вперед-назад, а також вліво-вправо. Якщо в сонячний день подивитися на землю, то можна побачити, що тінь маятника вимальовує різну траєкторію руху.

Фігури Ліссажу можна спостерігати досліджуючи механічні чи акустичні коливання (рис. 1) або електромагнітні коливання (рис. 2), маятник з піском (рис. 3), який викреслює фігури Ліссажу можна побачити, зокрема й у цьому навчальному відео (<https://youtu.be/uPbzhxYTioM>).

Криві Ліссажу мають такі параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \\ y(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{cases} t \in [0; +\infty).$$

Вигляд кривої залежить від співвідношення між періодами (частотами), фазами та амплітудами обох коливань (рис. 4).

У найпростішому випадку рівних частот, криві є еліпсами, які для різниці фаз 0 та π вироджуються у прямих, а для різниці фаз $\frac{\pi}{2}$ та рівності амплітуд перетворюється на коло.

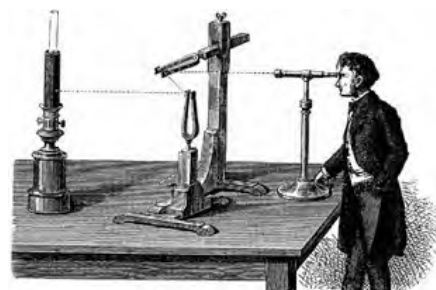


Рис. 1. Спостереження фігур Ліссажу за допомогою оптичного складання коливань камертонів

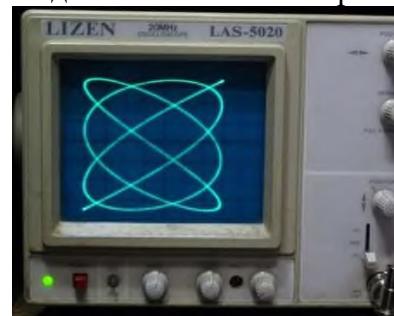


Рис. 2. Фігура Ліссажу на екрані осцилографа



Рис. 3. Пісчаний гармонограф

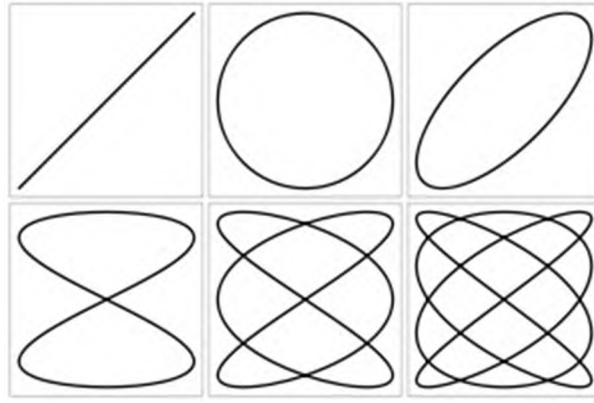


Рис. 4. Криві Ліссажу різної форми

Якщо частоти близькі, але не рівні, то різниця фаз увесь час змінюється, і еліпс неперервно деформується. Для суттєво різних частот еліпс деформується швидко і картина розмивається, фігур Ліссажу не утворюється.

Однак, якщо відношення частот раціональне, то через проміжок часу, який є найменшим спільним кратним періодів, рухома точка вертається в початкове положення — маємо фігуру Ліссажу.

Одержимо неявне рівняння кривої для випадку $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Для спрощення виберімо початок відліку кутів так, щоб $\varphi_1 = 0$.

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t, \\ y = A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi). \end{cases}$$

З першого рівняння маємо:

$$\cos \omega t = \frac{x}{A_1}, \sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}. \quad (1)$$

Із другого рівняння маємо

$$\frac{y}{A_2} = \cos \omega t \cos \Delta\varphi - \sin \omega t \sin \Delta\varphi. \quad (2)$$

Підставляючи співвідношення (1) в рівність (2), одержуємо:

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \cos \Delta\varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \Delta\varphi.$$

Перетворімо останню рівність:

$$\begin{aligned} \frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \cos \Delta\varphi &= -\sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \Delta\varphi; \\ \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos^2 \Delta\varphi + \frac{x^2}{A_1^2} \cos^2 \Delta\varphi &= \sin^2 \Delta\varphi - \frac{x^2}{A_1^2} \sin^2 \Delta\varphi; \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos^2 \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi.$$

У загальному випадку маємо рівняння еліпса (рис. 5).

Якщо $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, то маємо еліпс, з осями, які збігаються з осями координат (рис. 6).

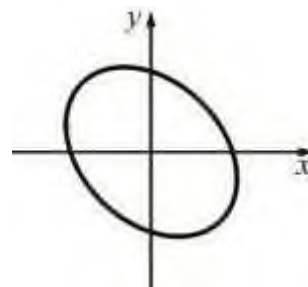


Рис. 5

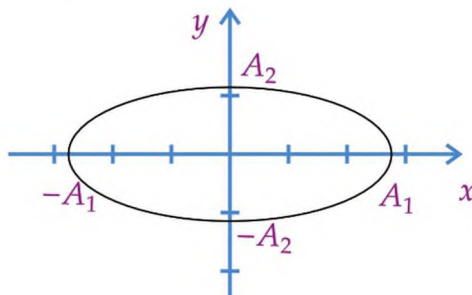


Рис. 6

Спектр використання фігур Ліссажу дуже широкий. Їх іноді використовують у дизайні як логотипи, у фільмах, а також у сучасному мистецтві. Відома в усьому світі лабораторія має логотипі також фігуру Ліссажу (рис. 7).



Рис. 7

Проекспериментувати з фігури Ліссажу можна за допомогою динамічного геометричного середовища GeoGebra, переходячи за посиланням <https://www.geogebra.org/m/vRA9prdc>

В електроніці фігури Ліссажу можна використовувати тоді, коли потрібно дізнатись частоту невідомого генератора через еталонний генератор з відомою частотою, а також дізнатись зсув фаз між двома однаковими сигналами.

Список літератури

- Прохоров А. М. (ред.). (1990). Фигуры Лиссажу. В *Физическая энциклопедия* (Т. 2, с. 597–598). Москва: Советская энциклопедия.
- Яворский, Б. М., & Детлаф, А. А. (2002). *Справочник по физике*. Москва: Высшая школа.

Аспекти викладання вищої математики для студентів технологічних спеціальностей

Г. А. Циганкова, С. В. Марченко

Національний університет харчових технологій, Київ, Україна

tsgk.anna@gmail.com

Розглянуто деякі проблеми при вивченні математичних дисциплін у технологічному університеті.

Ключові слова: вища математика, математична освіта, математичні методи.

У сучасних умовах зростання обсягу інформаційного потоку — наукового і не тільки — процес формування освіченої людини включає в себе як набуття нею певних знань та навичок, так і вміння бути успішною в житті, компетенції якої можуть інтегруватись в європейський освітній простір (Рендюк, 2012).

Вища математика — дисципліна, навчання якої починається з першого курсу, а вільне володіння її методами дозволяє науковцю чи інженеру-технологу проводити нові дослідження і розвивати новітні технології. Предметом вищої математики є логічно пов'язана між собою послідовність означень, теорем, правил. Кожна нова теорема, правило спираються на попередні, що розглядалися раніше. Усі розділи математики пов'язані між собою, взаємозалежні й доповнювані. Нова задача, що розглядається, включає в себе елементи раніше розв'язаних задач. Такий зв'язок усіх розділів математики, їх взаємозалежність, обумовлює несумісність з пропусками в навчанні. Крім того, математика — це система розумових вправ, які вимагають логічних висновків, обґрунтувань, доведень, пояснень, підтвердження аргументації. Тобто, розв'язування математичних задач сприяє розвитку вдумливості й наполегливості, розвитку логічного та абстрактного математичного мислення, логічної строгості в судженнях, умінь будувати відповідні математичні моделі.

Навчання студентів математики спрямовано на розвиток умінь виконувати розрахунки й обчислення, розв'язувати рівняння та нерівності, на розв'язання практичних задач, опанування системою математичних знань з метою подальшого вивчення суміжних навчальних дисциплін. На сучасних виробництвах харчової промисловості виникають задачі, що потребують проведення складних розрахунків, обґрунтування і вибору оптимальних умов, математичного моделювання технологічного процесу. Розв'язання таких задач здійснюється з використанням сучасних комп'ютерних засобів. Тому важливим фактором модернізації сучасної математичної освіти є застосування програмних інформаційних засобів, математичних пакетів прикладних програм.

Найпопулярнішою з прикладних математичних програм є програмний пакет MathCAD (Васютинська та ін., 2013). Цей пакет містить текстовий редактор, потужний обчислювач та графічний процесор. Завдяки простоті застосування, наочності математичних дій, великій бібліотеці вбудованих функцій і методів, а також зручному апарату представлення отриманих результатів, ним

зручно користуватись як студентам, так і технічним фахівцям і всім, кому потрібно проводити математичні розрахунки, починаючи від елементарної математики і до реалізації чисельних методів.

Під час вивчення курсу вищої математики звертається увага на застосування математичних методів і моделей у галузі майбутньої спеціалізації студента. Наприклад, методи диференціального числення, складання і розв'язання звичайних диференціальних рівнянь при дослідженні хіміко-технологічних процесів, диференціювання функцій багатьох змінних у хімічній термодинаміці. Основне поняття диференціального числення — поняття похідної — застосовується для розв'язання хімічних задач про визначення кількості бактерій у деякій біомасі, швидкості розчинення речовини, з'ясування питання про зростання чи зменшення популяції бактерій тощо.

Наприклад, нехай чисельність популяції бактерій у момент часу t задається формулою $p(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$.

Визначимо, протягом якого часу популяція буде зростати. Для цього потрібно знайти похідну й визначити проміжок, на якому вона зростає. На основі ознаки про зростання функції робимо висновок, що протягом 5 годин чисельність популяції збільшуватиметься. А оскільки при $t > 5$ $p'(t) < 0$, то можна стверджувати, що після 5 годин чисельність популяції почне зменшуватись.

Значну кількість процесів хімічної технології описують за допомогою диференціальних рівнянь або систем, оскільки швидкість реакції є похідною концентрації речовини за часом. Математичною реалізацією хімічного закону, наприклад, «швидкість витрачення реагента пропорційна його поточній концентрації», є диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = -kx,$$

розв'язком якого при заданій початковій концентрації реагента x_0 , є кінетичне рівняння реакції $x = x_0 e^{-kt}$. Засобами MathCAD можна аналітично розв'язувати диференціальні рівняння без застосування спеціальних методів, зауважимо, що тільки рівняння з відокремленими змінними і лише, коли змінні вже відокремлено.

Якість математичної освіти у виші значною мірою залежить від творчого підходу викладача до використання традиційних та інноваційних методів і форм навчання. Проблема реалізації професійної спрямованості навчання математики студентів технологічних університетів також є актуальною.

Список літератури

- Васютинська, Ю. О., Гузенко, С.В., Кузьмінська, Н. Л., Палагута А. М., & Ткачук, А. М. (2013). *Вища математика: Лабораторний практикум*. Київ: НУХТ.
- Рендюк, С. (2012). Вища математична освіта в сучасних умовах і інноваційні технології. *Витоки педагогічної майстерності. Серія: Педагогічні науки*, (9), 217–222. <http://dSPACE.pnpu.edu.ua/bitstream/123456789/10254/1/Rendyuk.pdf>

**Концепція Нової української школи
і доцільність змістової перебудови традиційної структури
освітньої програми Середня освіта(Фізика)
для здобувачів вищої освіти
за першим (бакалаврським) рівнем**

О. Л. Чепок, Д. М. Белітченко

*Південноукраїнський національний педагогічний університет
ім. К. Д. Ушинського, Одеса, Україна
olachepok@ukr.net, belca@te.net.ua*

Наявність нерозривного зв'язку фізики природи з геометрією природи обумовлює особливу роль геометрії як навчального предмета при підготовці майбутніх учителів фізики закладів загальної середньої освіти. Як результат проведених міркувань, запропоновано певну змістову перебудову традиційної структури освітньої програми Середня освіта (Фізика) для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем.

Ключові слова: фізика, геометрія, природа, учитель фізики закладу загальної середньої освіти, освітня програма, здобувач вищої освіти.

Відповідно до традиційної освітньої програми Середня освіта (Фізика), здобувачі вищої освіти, які намагаються в подальшому стати вчителями фізики закладів загальної середньої освіти, починають опановувати багатосеместровий курс загальної фізики вже з першого семестру першого року навчання. При цьому, починаючи вже з першої лекції, викладач даного курсу вимушений оперувати такими математичними поняттями, сутність яких для студентів-першокурсників є зрозумілою лише частково, або не є зрозумілою взагалі. Концепція Нової української школи для всіх рівнів середньої освіти передбачає, зокрема, формування у здобувачів освіти здатності до критичного та системного мислення, спроможності відчувати радість пізнання (<http://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf>). При цьому, очевидно, що подібні компетентності в першу чергу повинні бути сформовані у відповідного вчителя, принаймні, по відношенню до свого предмету. А майбутній вчитель, як і кожна людина, аж ніяк не може набути досвіду і звички відчуття радості пізнання, якщо не розуміє, про що йде мова. А достатній рівень сформованості системного мислення спроможна забезпечити лише системна організація всього процесу навчання. І лише при подібній організації процесу навчання критичне мислення здобувачів освіти може формуватися по відношенню до сутності змістового наповнення предметів навчання, а не в тому нігілістичному напрямку, першим критичним питанням якого є питання про те, навіщо той чи інший предмет навчання взагалі є потрібним.

Першу лекцію курсу загальної фізики, традиційно, присвячено висвітленню тих аспектів природи, які безпосередньо опановує фізика, як одна з основних наук про природу. І вже при цьому миттєво зрозумілим стає наявність не-

розривного зв'язку фізики природи з геометрією природи. Певна геометрична модель простору є базовою складовою кожної відповідної його фізичної моделі. Так, перші розділи курсу загальної фізики традиційно присвячені класичній нерелятивістській механіці (механіці Ньютона), яка апелює до простору, підкореному положенням евклідової геометрії. Релятивістська і квантова механіки, знайомство з якими передбачено наступним курсом теоретичної фізики, розглядаються у просторах складнішої геометричної природи (Сивухин, 1979). Усе це беззаперечно висвітлює той особливий взаємно проникливого характеру зв'язок, який є притаманним фізиці й геометрії, визначає саме геометрію, як ту математичну дисципліну, опануванню різних розділів якої при підготовці майбутніх вчителів фізики закладів загальної середньої освіти варто приділити найбільшій уваги. Автори вважають, що ситуація, коли для майбутніх вчителів фізики закладів загальної середньої освіти навчальний матеріал з геометрії відноситься лише до аналітичної геометрії і, до того ж, лише до об'єднаного курсу лінійної алгебри й аналітичної геометрії, є неприпустимою. Та підготовка майбутніх учителів фізики закладів загальної середньої освіти, яка є насущною потребою сьогодення, вимагає розділення вищевказаного курсу, створення нових, окремих курсів алгебри й геометрії, реального відпрацювання їх доцільного змісту. Щодо останнього, то мова йде саме про єдиний, інтегрований курс геометрії, а не окремі, скажімо, курси аналітичної геометрії, векторного і тензорного аналізу, диференціальної геометрії. По-перше, зазначених курсів замало. Тоді потрібним є ще й курс, у якому розглядаються певні загальні положення основ математики та певні неевклідові геометрії. По-друге, на подібну кількість повноцінних курсів, які по відношенню до традиційних, «фізичних», курсів носять допоміжний, супроводжувальний характер, ніколи не вистачить навчальних годин. Якщо мова йде про створення в майбутніх учителів фізики закладів загальної середньої освіти цілісного геометричного світогляду, то варто розглядати доцільну концепцію єдиного курсу геометрії, компактного і, одночасно, такого, що охоплює всі найбільш значущі для фізики напрямки розвитку геометричної науки. Як перше наближення до подібного курсу можна запропонувати, наприклад, таку послідовність опанування відповідного навчального матеріалу.

1. Аксиоматика шкільного курсу евклідової геометрії та її найпростіші наслідки.

2. Поняття про вектор в евклідовій геометрії. Алгебра векторів. Базис множини векторів, координати вектора в заданому базисі. Зміна базису на множині векторів. Алгебраїчні операції над векторами у координатах.

3. Поняття про систему координат на евклідовій прямій, в евклідовому просторі, зокрема, про довільну афінну систему координат та її окремий випадок — прямокутну декартову систему координат, про полярну систему координат на евклідовій площині, про циліндричні та сферичні координати в евклідовому просторі. Зміна систем координат. Аналітичний спосіб означення та задання фігур евклідової геометрії відносно вибраної системи координат. Метод координат як основний метод дослідження фігур як в аналітичній, так і в

диференціальній геометрії. Предмет аналітичної геометрії евклідового простору. Предмет диференціальної геометрії евклідового простору.

4. Геометричні образи першого і другого порядків на евклідовій площині.

5. Геометричні образи першого і другого порядків у евклідовому просторі.

6. Геометричні перетворення евклідової площини та евклідового простору.

Інверсія.

7. Поняття про вектор-функцію одного скалярного аргументу та її координатні функції. Границя, неперервність, похідна, ряд Тейлора, невизначений та визначений інтеграли для вектор-функції.

8. Поняття про криву на евклідовій площині та в евклідовому просторі. Елементи довільної теорії кривих.

9. Поняття про контраваріантний та коваріантний вектори в евклідовій геометрії, про коваріантні та контраваріантні компоненти вектора. Загальне поняття про тензор.

10. Поняття про вектор-функцію двох скалярних змінних та її координатні функції у евклідовій геометрії. Границя, неперервність, частинні похідні, ряд Тейлора.

11. Загальне поняття про криволінійну систему координат, про змінні тензори. Коваріантне диференціювання тензорів у тривимірному евклідовому просторі.

12. Поняття про поверхню у тривимірному евклідовому просторі. Елементи загальної теорії поверхонь.

13. Загальне поняття про аксіоматику та аксіоматичну теорію. Різні види аксіоматик. Співвідношення між аксіоматиками. Основні характеристики аксіоматик та аксіоматичних теорій.

14. Поняття про неевклідові геометрії. Геометрія Лобачевського та геометрія Рімана. Ріманова геометрія та геометрія Мінковського.

Автори вважають, що опанування подібного курсу геометрії повинно відбуватися протягом перших чотирьох семестрів навчання. Автори вважають також, що для майбутніх вчителів фізики закладів загальної середньої освіти систематичний курс фізики доцільніше було би почати опановувати з третього семестру навчання, а перші два семестри навчання присвятити виключно створенню відповідного математичного підґрунтя.

Список літератури

Сивухин, Д. В. (1979). *Общий курс физики* (Т. 1). Москва: Наука.

Про деякі методи обчислення інтеграла Гауса

Т. О. Шершень, Я. В. Симчук

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

yar_simchuk@ukr.net

У статті розглянуто різні способи обчислення інтеграла Гауса.

Ключові слова: інтеграл Гауса, декартова система координат, полярна система координат.

Інтегралом Гауса (також інтегралом Ойлера — Пуассона) називають інтеграл від гаусової функції (Abramowitz & Romer, 1988)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Доводити цю формулу можна різними методами.

1. Обчислення Гаусового інтеграла без полярних координат (Dunham, 1988). Позначаючи

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

маємо

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Запровадимо у внутрішньому інтегралі нову змінну:

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Тоді,

$$x = \frac{yu}{\sqrt{1-u^2}}, \quad dx = y(1-u^2)^{-3/2} du, \quad x^2 + y^2 = \frac{y^2}{1-u^2}.$$

Зауважуємо, що при $x = 0$, $u = 0$ та при $x \rightarrow \infty$, $u \rightarrow 1$.

Виконуємо заміну змінної:

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^1 e^{-\frac{y^2}{1-u^2}} y(1-u^2)^{-\frac{3}{2}} du dy.$$

Змініюємо порядок інтегрування:

$$I^2 = \int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{3}{2}} du \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{1-u^2}} y dy.$$

Виконуємо заміну змінної у внутрішньому інтегралі:

$$v = \frac{y^2}{1-u^2}, \quad dv = \frac{2y}{1-u^2} dy, \quad y = 0 \Rightarrow v = 0, y \rightarrow +\infty \Rightarrow v \rightarrow +\infty.$$

$$I^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} (e^{-v}) \Big|_0^{+\infty} du = \frac{1}{2} \arcsin u \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Отже,

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

2. Перейдемо до обчислення інтеграла Гауса за допомогою переходу до полярних координат у подвійному інтегралі.

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ x^2 + y^2 = \rho^2, \\ dx dy = \rho d\rho d\varphi \end{array} \right| =$$

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} d(-\rho^2) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot e^{-\rho^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4};$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3 (Georgakis, 1994). Розгляньмо ще один метод обчислення інтеграла Гауса, схожий на метод, який використовують для доведенні рівності

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b)$$

для гамма- та бета-функцій у спеціальному випадку $a = b = \frac{1}{2}$ (Georgakis, 1994).

Покладаючи $y = xs$, маємо $dy = xds$. Тоді

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy = \\ &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+s^2)} x ds = \int_0^{+\infty} ds \int_0^{+\infty} e^{-(1+s^2)x^2} x dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{-2(1+s^2)} e^{-x^2(1+s^2)} \right]_0^{+\infty} ds = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{2} \arctg s \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Із ще одним способом обчислення Гаусового інтеграла можна ознайомитись у статті Lord (2003).

Список літератури

- Abramowitz, M., Stegun, I. A., & Romer, R. H. (1988). Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. New York: Dover.
- Dunham, W. (1988). Integrating e^{-x^2} without polar coordinates. *Mathematics Teacher*, 81(1), 34–35. <https://www.jstor.org/stable/27965672>
- Georgakis, C. (1994). A note on the Gaussian integral. *Mathematics Magazine*, 67(1), 47. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1994.11996181>
- Lord, N. (2003). An elementary single-variable proof of $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$. *The Mathematical Gazette*, 87(509), 308–311. <http://www.jstor.org/stable/3621052>

**Матеріали VIII Міжнародної науково-практичної конференції.
«Математика в сучасному технічному університеті». Секція II.
Методика викладання математики у вищій школі**

Повний текст матеріалів можна знайти на сторінці

<http://matan.kpi.ua/uk/mvstu8.html>