



ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА
З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
ОЧНИЙ ТУР, 2019 Р.



1. Спростіть вираз $\cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$.
2. Розв'яжіть систему
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 200 \cdot 5^x = 2^y \end{cases}$$
.
3. Які з наведених рівнянь є рівносильними?
а) $x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x} + 1$; б) $x^2 = 1$; в) $\frac{x-1}{x-1} = 1$; г) $2^{x+1} = 4$.
4. Бджоли з нектару, який містить 70% води, виробляють мед, в якому води 19%. Скільки кілограм нектару потрібно переробити бджолам, щоб одержати 1 кілограм меду?
5. Розв'яжіть нерівність $\frac{2 \sin 3x - 4}{2x - 3x^2 + 1} < 0$.
6. Розв'яжіть рівняння $\frac{1}{2} \lg(2x-1) + \lg \sqrt{x-9} = 1$.
7. У прямокутну трапецію з периметром P вписано коло. Знайдіть радіус цього кола, якщо гострий кут трапеції рівний α .
8. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{-x^2 - 2x} + \sqrt{8 - x^2 - 2x} = 4$.
9. Побудуйте графік функції $y = \frac{x(x^2 - 1)}{|x| - x}$.
10. Числа $5x - y$, $2x + y$, $x + 2y$ утворюють арифметичну прогресію, а числа $(y+1)^2$, $xy + 1$, $(y-1)^2$ утворюють геометричну прогресію. Знайдіть x та y .
11. При якому дійсному значенні a площа фігури, обмежені параболою $y = 2x^2$ і прямою $y = a$ буде дорівнювати числу $\frac{2\sqrt{2}}{3}$?
12. Чи існують на графіку функції $y = 4x^3 + 15x^2 - 18x + 2019$ точки, в яких дотична до графіка паралельна осі абсцис? Якщо так – укажіть їх абсциси.