

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей**

«На правах рукопису»
УДК _____

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
_____ Олег КЛЕСОВ
«__» _____ 20__ р.

**Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
зі спеціальності 111 Математика
на тему: «Виявлення прихованих періодичностей в моделях з
дискретним часом та сильно залежним випадковим шумом»**

Виконала:

студентка VI курсу, групи ОМ-81мн
Кобеляцька Яна Сергіївна _____

Керівник:

кандидат ф.-м. н., доцент
Орловський Ігор Володимирович _____

Рецензент:

кандидат ф.-м. н., доцент
Млавець Юрій Юрійович _____

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних посилань.
Студентка _____

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою.

Спеціальність – 111 «Математика» («Страхова та фінансова математика»).

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
_____ Олег КЛЕСОВ
«__» _____ 2020 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студентці
Кобеляцькій Яні Сергіївні

1. **Тема дисертації** «Виявлення прихованих періодичностей в моделях з дискретним часом та сильно залежним випадковим шумом», науковий керівник дисертації Орловський Ігор Володимирович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, затверджена наказом по університету від «17» березня 2020 р. № 891-с.

2. **Термін здачі** студентом оформленої дисертації « 1 » травня 2020 р.

3. **Об'єкт дослідження** тригонометрична модель регресії з дискретним часом та випадковим шумом, що має сингулярний спектр або є сильно залежним.

4. **Предмет дослідження** асимптотичні властивості періодограмної оцінки параметрів вказаної тригонометричної моделі.

5. **Перелік завдань, які потрібно розробити**

1) Ознайомитись з літературою щодо періодограмної оцінки параметрів тригонометричної моделі регресії.

2) Сформулювати та довести теорему щодо консистентності періодограмної оцінки кутової частоти в тригонометричній моделі регресії з дискретним часом та сильно залежним випадковим шумом або шумом, що має сингулярний спектр.

3) Сформулювати та довести лему щодо консистентності оцінки амплітуди в заданій моделі.

4) Сформулювати та довести теорему щодо консистентності нормованої оцінки кутової частоти обраної моделі.

6. **Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу** 15 слайдів.

7. **Дата видачі завдання** « 03 » лютого 2020 р.

8. **Перелік публікацій**

1) Кухарчук Я.С., Орловський І.В. Консистентність періодограмної оцінки в задачі виявлення прихованих періодичностей із дискретним часом // VIII Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики. – 23-24 травня, 2019. – Київ. – Url: <http://www.fmi.npu.edu.ua/ua/se/konf/1100-ysmp8>

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Огляд літературних джерел	03.02.2020-09.02.2020	Виконано
2.	Висунення гіпотези щодо поведінки випадкового шуму в заданій моделі	10.02.2020-16.02.2020	Виконано
3.	Дослідження поняття діаграмної формули	17.02.2020-23.02.2020	Виконано
4.	Отримання умов консистентності оцінки амплітуди в тригонометричній моделі	24.02.2020-08.03.2020	Виконано

5.	Доведення леми щодо консистентності оцінки амплітуди в тригонометричній моделі регресії	09.03.2020-22.03.2020	Виконано
6.	Отримання умов консистентності періодограмної оцінки кутової частоти в тригонометричній моделі	23.03.2020-05.04.2020	Виконано
7.	Доведення леми щодо консистентності оцінки кутової частоти	06.04.2020-12.04.2020	Виконано
8.	Доведення теореми щодо збіжності оцінки кутової частоти	13.04.2020 - 19.04.2020	Виконано
9.	Оформлення дисертації	04.05.2020-10.05.2020	Виконано

Науковий керівник І. В. Орловський

Завдання прийняла до виконання Я.С. Кобеляцька

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація складається з: 49 сторінок, 2 рисунки, список використаної літератури містить 54 першоджерел.

Об'єкт дослідження: тригонометрична модель регресії з дискретним часом та випадковим шумом, що має сингулярний спектр або є сильнозалежним.

Предмет дослідження: асимптотичні властивості періодограмної оцінки параметрів вказаної тригонометричної моделі.

Мета роботи: дослідження асимптотичних властивостей періодограмної оцінки параметрів в задачі виявлення прихованих періодичностей.

В магістерській дисертації отримано достатні умови консистентності періодограмної оцінки амплітуди та кутової частоти тригонометричної моделі регресії з дискретним часом та сильно залежним випадковим шумом.

Результати магістерської роботи доповідались на VIII Всеукраїнській науковій конференції молодих вчених.

Ключові слова: періодограмна оцінка, кутова частота, тригонометрична модель регресії, задача виявлення прихованих періодичностей, сильно залежний випадковий шум, випадковий шум, що має сингулярний спектр, консистентність, діаграмна формула, поліноми Чебишова – Ерміта.

ABSTRACT

The master's dissertation consists of: 49 pages, 2 pictures, 54 sources.

The object of research is a trigonometric regression model with discrete time and random noise, which is either has singular spectrum or long-range dependent.

The subject of research is asymptotic properties of periodogram estimator of the trigonometric model.

The aim of the work is to study an asymptotic properties of the periodogram estimator of parameters in the problem of detecting hidden periodicities.

Sufficient conditions of the consistency of the amplitude and angular frequency periodogram estimator of the trigonometric regression model with discrete time and strongly dependent random noise are obtained in the master's thesis.

The results of the master's thesis were presented at the VIII All-Ukrainian Scientific Conference of Young Scientists.

Key words: periodogram estimator, angular frequency, trigonometric regression model, problem of detection hidden predicities, long-range dependence, random noise with singular spectrum, consistency, diagram formula, Chebyshev - Hermite polynomials.

Зміст

Вступ	8
1 Допоміжні твердження	10
1.1 Часові ряди. Характеристики та методи дослідження часових рядів	10
1.2 Поліноми Чебишова-Ерміта	14
1.2.1 Діаграмна формула	18
1.3 Стаціонарні процеси	19
1.3.1 Стаціонарні процеси	19
1.3.2 Спектральна щільність	20
1.4 Випадкові процеси, що мають сингулярний спектр	22
1.4.1 Означення та основні властивості процесів із сингулярним спектром	22
1.4.2 Асимптотичні властивості процесу із сингулярним спектром	23
1.5 Випадкові процеси, що задовольняють умові сильної залежності	35
2 Консистентність періодограмної оцінки	37
2.1 Постановка задачі	37
2.2 Консистентність	38
Висновки	43
Список використаних джерел	44

ВСТУП

В статистиці визначне місце займають регресійні моделі з випадковим шумом. Зазвичай, перед проведенням фізичних експериментів та моделюванням проходження сигналу через вузли системи, враховується майбутня зашумленість сигналу, яка притаманна як природним процесам, так і процесам в техніці. Даний факт поскладнює дослідження характеристик процесів, в тому числі характеристики періодичності.

Особливе місце серед різноманітних моделей регресії займає тригонометрична модель, яка є лінійною комбінацією простих гармонічних коливань. Зацікавлення до таких моделей зумовлений великою сферою її застосувань в природничих науках, таких, як геофізика, статистична радіофізика, метеорологія, астрономія, електротехніка, сейсмологія та інших сферах діяльності, де виникає проблема виявлення прихованих періодичностей.

Вперше питанням ідентифікації параметрів суми гармонік за результатами спостереження цієї суми почав досліджувати Ж. Л. Лагранж [48] в вісімнадцятому сторіччі. В розглянутій задачі не враховувався фактор зашумлення сигналу. Ґрунтовні дослідження з такою постановкою задачі були здійснені М.Г. Серебренніковим, А.А. Первозванським [2].

В роботах таких видатних математиків як Р.Фішер [3], А. Шустер [4] та Є.Є. Слуцький [5] задача виявлення прихованих періодичностей ставилась статистично із застосуванням періодограмної техніки.

Окрім періодограмного підходу в оцінюванні амплітуди та кутової частоти тригонометричної моделі слід зазначити використання оцінки найменших квадратів, який почав свій розвиток на початку 70-х років двадцятого сторіччя. Необхідно відзначити роботи П. Уїтла [49], А. М. Уолкер [43], О. В.

Івановим [36], Б. М. Жураковського [1] та інших.

Асимптотичні властивості періодограмних оцінок параметрів тригонометричної моделі вивчались А. Я. Дороговцевим [32], Б. Г. Квінтом та Є. Дж. Хеннаном [50], П. С. Кноповим [51], Б. М. Жураковським та О. В. Івановим [32].

В даній магістерській дисертації розглядається задача виявлення прихованих періодичностей в моделях регресії з дискретним часом та сильно залежним випадковим шумом, що має сингулярний спектр. поставлена задача є першим необхідним кроком для подальшого вивчення асимптотичних властивостей періодограмної оцінки параметрів обраної моделі. Результати дисертації продовжують дослідження роботи Іванова О. В. та Жураковського Б. М. [37] розширюючи її на випадок дискретної моделі.

Розділ 1

Допоміжні твердження

1.1 Часові ряди. Характеристики та методи дослідження часових рядів

Часові ряди це впорядкована послідовність значень змінної взята через однаково інтервали часу.

Часові ряди застосовуються для розуміння природи даних, які спостерігаються та для прогнозування, моніторингу чи навіть контролю подачі даних.

Аналіз часових рядів використовується для багатьох сфер діяльності, таких як: економічне прогнозування, прогнозування продажів, аналіз фондового ринку, прогнозування врожайності, контроль процесу та якості, інвентарні дослідження, прогнози навантаження, корисні дослідження, аналіз перепису та багато інших. Найбільш широко застосовуються методи ковзного середнього та оцінки найменших квадратів.

Формалізуємо поняття числового ряду. Під часовим рядом розуміється послідовність спостережень значення випадкової величини X , яка відповідає деякому числовому показнику в послідовні моменти часу. Окремі спостереження називаються рівнями часового ряду і позначаються $X_t (t = 1, 2, \dots, N)$, де N - число рівнів [12].

В загальному випадку часовий ряд задається у вигляді:

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_N X_{t-N} + \varepsilon_t,$$

де ε_t - джерело випадковості, тобто білий шум.

Важливу роль в аналізі часових рядів грають стаціонарні часові ряди, оскільки багато часових послідовностей можуть бути зведені до стаціонарного

ряду. Часовий ряд будемо називати стаціонарним, якщо його числові характеристики - математичне сподівання, дисперсія і коваріації випадкової величини X_t не залежать від часу t . Тоді математичне сподівання $E(X_t) = a$ і дисперсія такого ряду σ^2 можуть бути оцінені відповідно по спостереженням $X_t (t = 1, 2, \dots, N)$ за формулами:

$$\bar{X}_t = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t,$$

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X}_t)^2.$$

Ковзне середнє

Класичний метод розкладу часових рядів зародився у 1920-х роках і широко застосовувався до 1950-х років. Він все ще є основою багатьох методів розкладання часових рядів. Даний метод є альтернативним способом узагальнення відомих даних, який полягає в обчисленні середнього значення послідовних менших наборів даних та оцінки циклу трендів.

Ковзне середнє - це арифметична величина, обчислена шляхом додавання набору числових даних, а потім діленням на кількість періодів часу. Наприклад, можна додати вартість цінного папера за певний проміжок часу, а потім поділити на загальну кількість періодів. Короткострокові середні показники швидко реагують на зміни, тоді як довгострокові середні - повільніше реагують. Існують і інші типи ковзних середніх, включаючи експоненціальну ковзну середню та зважену ковзну середню.

Ковзне середнє порядку N має вигляд:

$$M_t = \frac{X_t + X_{t-1} + \dots + X_{t-N+1}}{N},$$

де X_t - числова характеристика процесу (ціна акції), а N - кількість періодів.

Зі значних недоліків ковзного середнього - оцінка дає однакову значимість як новим, так і старим даним, хоча нові дані є більш важливими, тому що відображають найбільш близьку ситуацію до поточного моменту [9].

Оцінка найменших квадратів

Оцінка найменших квадратів - це метод, який використовується лінійною регресією для отримання оцінок параметрів. Даним методом передбачає побудову випадкового вектору такого, щоб сума квадратів відстаней від кожної точки до лінії регресії була мінімальною.

Формалізуємо означення оцінка найменших квадратів (ОНК).

ОНК невідомих значень параметрів, β_0, β_1, \dots в функції регресії $f(\vec{x}, \vec{\beta})$, оцінюються шляхом знаходження числових значень параметрів, що мінімізують суму відхилень у квадраті. Метод ОНК полягає в мінімалізації функції:

$$Q = \sum_{i=1}^n \left[y_i - f(\vec{x}_i, \hat{\vec{\beta}}) \right]^2.$$

Параметри β_0, β_1, \dots трактуються як змінні які необхідно оптимізувати, а значення x_1, x_2, \dots - коефіцієнти. Необхідно підкреслити, що оцінки значень параметрів не збігаються з істинними значеннями параметрів, оцінки позначаються $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots$. Для лінійних моделей мінімізація функції Q , зазвичай, проводиться аналітично. З іншого боку, для нелінійних моделей мінімізація майже завжди здійснюватися за допомогою ітеративних чисельних алгоритмів.

Необхідно приділити особливу увагу методу ОНК, тому що він є фундаментальним в дослідженнях даної дисертації.

Розглянемо лінійну регресійну модель:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon. \quad (1.1)$$

Для моделі 1.1 оцінка найменших квадратів параметрів здійснюється шляхом мінімалізації функції Q .

$$Q = \sum_{i=1}^n \left[y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) \right]^2.$$

Мінімалізація Q проходить в три етапи:

1. Необхідно взяти часткові похідні від Q по зміним $\hat{\beta}_0$ та $\hat{\beta}_1$.

2. Прирівнюємо отримані похідні до нуля.

3. Розв'язуємо систему двох рівнянь з двома невідомими.

Після цих кроків отримуємо значення оцінок:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$
$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}.$$

Вище наведені оцінки параметрів $\hat{\beta}_0$ та $\hat{\beta}_1$ показують, що оцінки параметрів залежать один від одного, крім випадку $\bar{x} = 0$. Це означає, що якщо оцінка параметру нахилу вектора сильно відхиляється від справжнього значення, то і оцінка перехоплення також буде сильно відхилятися від справжнього значення.

Викладки, які наведені вище стосуються лише лінійних моделей регресії, але співвідношення між оцінками параметрів є аналогічним для більш складних моделей, включаючи як статистично лінійні, так і статистично нелінійні моделі [9].

1.2 Поліноми Чебишова-Ерміта

Поліноми Чебишова-Ерміта – послідовність многочленів дійсної змінної вигляду [13]:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}.$$

Наведемо перші 10 поліномів Чебишова-Ерміта в явному вигляді:

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_1(x) = x,$$

$$H_2(x) = x^2 - 1,$$

$$H_3(x) = x^3 - 3x,$$

$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3,$$

$$H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x,$$

$$H_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15,$$

$$H_7(x) = x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x,$$

$$H_8(x) = x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105,$$

$$H_9(x) = x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + 945x,$$

$$H_{10}(x) = x^{10} - 45x^8 + 630x^6 - 3150x^4 + 4725x^2 - 945.$$

Загальний вигляд многочлена Чебишова-Ерміта:

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j \frac{n!}{j!(n-2j)!} (2x)^{n-2j} = \\ &= (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1} (2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2} (2x)^{n-4} - \dots \end{aligned}$$

Сформулюємо основні властивості поліномів Ерміта-Чебишова.

1. Поліном $H_n(x)$ містить доданки тільки тієї ж парності, що і саме число n [14].
2. Поліном $H_n(x)$ парний лише при парному n та непарний при непарному n :

$$H_{2n}(-x) = H_{2n}(x), H_{2n+1}(-x) = -H_{2n+1}(x), n = 0, 1, 2, \dots$$

3. При $x = 0$ має місце співвідношення:

$$H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!}, H_{2n+1}(0) = 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

4. Рівняння $H_n(x) = 0$ має n дійсних коренів та ці корені попарно симетричні відносно початку координат та модуль кожного із них не перевищує величину $\sqrt{n(n-1)/2}$.

5. Поліном $H_n(x)$ можна представити у вигляді визначника матриці $n \times n$:

$$H_n(x) = \begin{vmatrix} x & n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & n-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & n-3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

6. Формула додавання. Має місце формула додавання поліномів Чебишова-Ерміта:

$$\begin{aligned} & \frac{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^{\frac{\mu}{2}}}{\mu!} H_\mu \left[\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}} \right] = \\ & = \sum_{m_1 + \cdots + m_n = \mu} \frac{a_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{a_n^{m_n}}{m_n!} H_{m_1}(x_1) \cdots H_{m_n}(x_n). \end{aligned}$$

7. Похідна k -го порядку поліномів Чебишова-Ерміта $H_n(x)$, $n \geq k$ також поліном Чебишова-Ерміта:

$$\frac{d^k}{dx^k} H_n(x) = 2^k n(n-1) \cdots (n-k+1) H_{n-k}(x).$$

8. Рекурентне співвідношення [15]:

$$H_n(x) - xH_{n-1}(x) + (n-1)H_{n-2}(x) = 0, n \geq 2.$$

9. Поліноми Ерміта-Чебишова утворюють повну ортогональну систему в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$, де $\varphi(x)$ - стандартна гаусівська щільність.

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2/2} dx = n! \sqrt{2\pi} \delta_{nm}.$$

Наслідок з властивості 9.

Якщо φ_j , $j \in \mathbb{Z}$, є часовим рядом, що задовольняє (A2), тоді є вірною формула

$$EH_m(\xi_j)H_l(\xi_k) = \delta_k^l m! B^m(j-k), \quad m, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

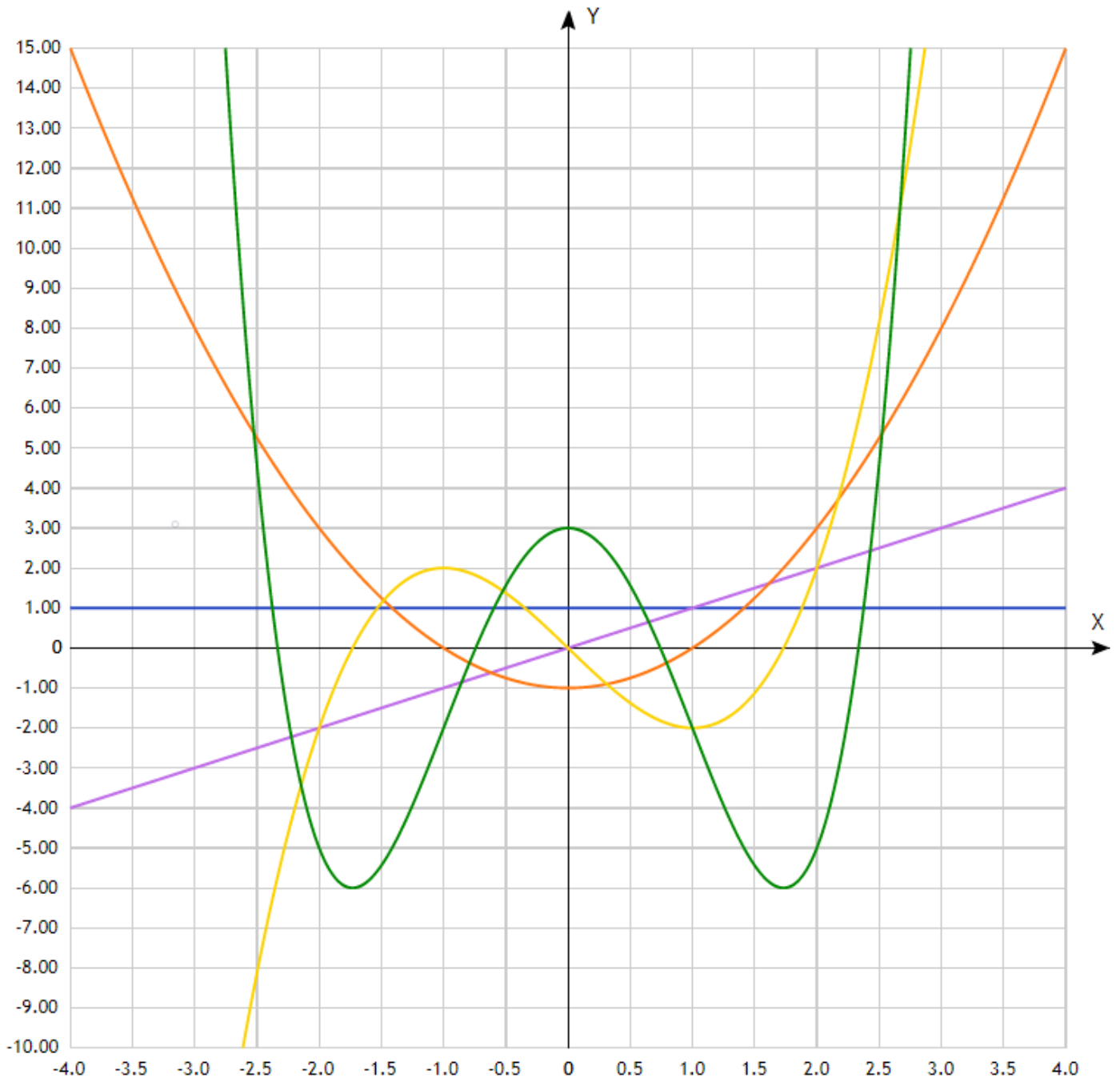


Рис. 1.1. Поліноми Чебишова-Ерміта порядку $n=0,1,2,3,4$

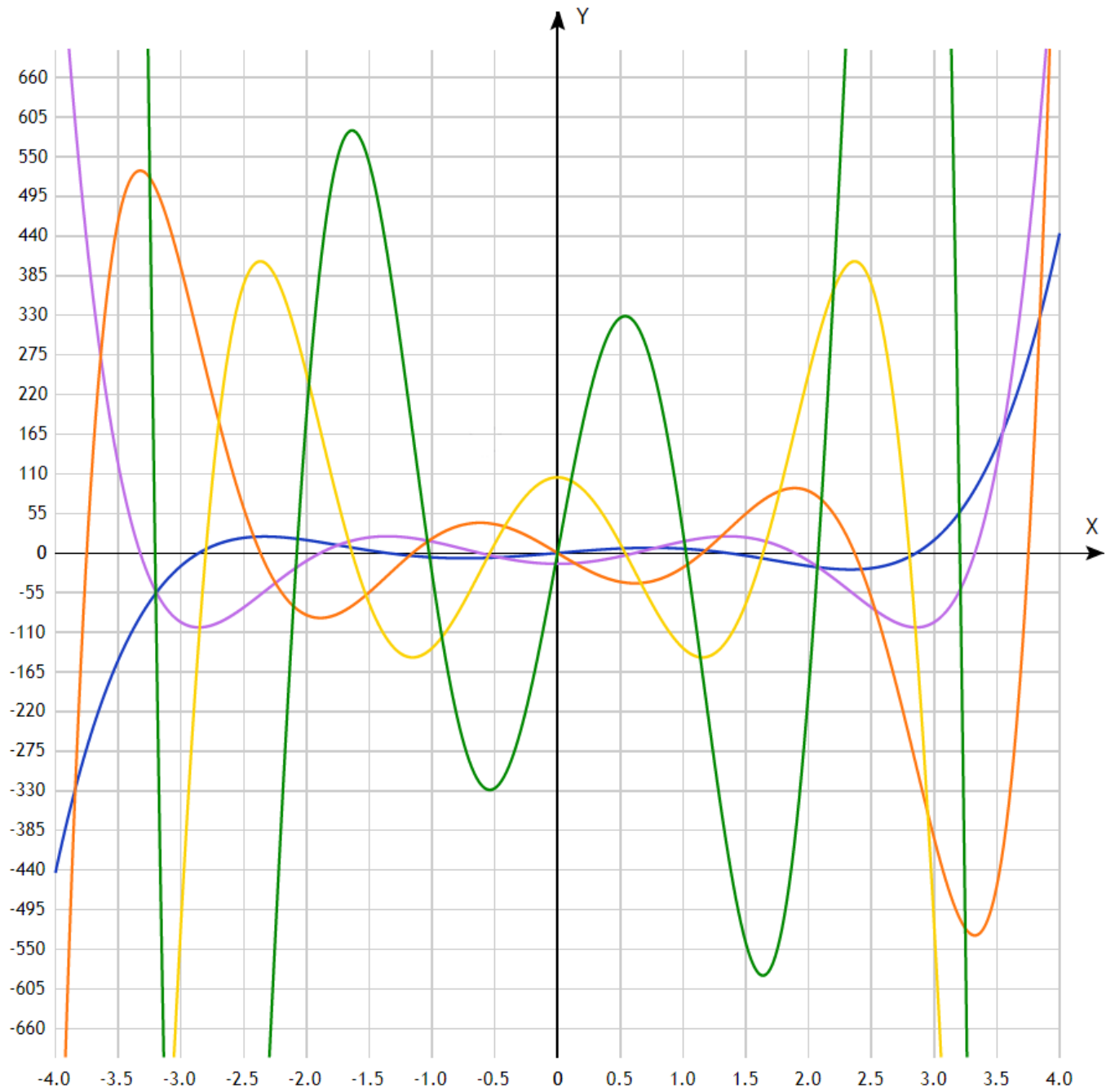


Рис. 1.2. Поліноми Чебишова-Ерміта порядку $n=5,6,7,8,9$

1.2.1 Діаграмна формула

Означення 1.1. Діаграмою порядку (l_1, \dots, l_p) будемо називати граф Γ з $l_1 + \dots + l_p$ вершинами, якщо:

- а) множина вершин Γ зображається у вигляді $V = \bigcup_{j=1}^p W_j$, де $W_j = \{(j, l) : l = \overline{1, l_j}\}$ - j -й рівень Γ , $j = \overline{1, l_j}$;
- б) кожна з вершин має ступінь 1;
- в) якщо ребро $((j_1, l_1), (j_2, l_2)) \in \Gamma$, тоді $j_1 \neq j_2$, тобто ребра Γ проходять між різними рівнями.

Нехай $L^* \subseteq L(l_1, \dots, l_p)$ - множина регулярних діаграм. Діаграма Γ називається регулярною, якщо всі рівні можна розбити на пари так, щоб не було такого ребра, яке проходить між рівнями, які належать різним парам. Якщо ж існує таке ребро, яке перетинає рівні, що належать різним парам, тоді діаграма Γ називається не регулярною діаграмою. Тобто якщо діаграма $\Gamma \in L \setminus L^*$, тоді вона є нерегулярною [38].

Діаграмна формула

Нехай (ξ_1, \dots, ξ_p) - гаусівський вектор з нульовим середнім, $E\xi_i\xi_j = B(i, j)$, $i, j = \overline{1, p}$. Нехай $H_{l_1}(x), \dots, H_{l_p}(x)$ - поліноми Чебишова-Ерміта порядків l_1, \dots, l_p . Тоді

$$E \left(\prod_{j=1}^p H_{l_j}(\xi_j) \right) = \sum_{\Gamma \in T} \prod_{\omega \in R(V)} B(d_1(\omega), d_2(\omega)).$$

1.3 Стаціонарні процеси

1.3.1 Стаціонарні процеси

Випадкові процеси класифікуються на основі багатьох різних критеріїв. Одна з найважливіших характеристик випадкового процесу - стаціонарність. Випадковий процес $\{X(t), t \in J\}$ є стаціонарним, якщо його статистичні властивості не змінюються з часом. Наприклад, для стаціонарні процеси $X(t)$ і $X(t + \Delta)$ мають однакові розподіли ймовірностей. Тобто

$$F_{X(t)}(x) = F_{X(t+\Delta)}(x),$$

де $t, t + \Delta \in J$.

В загальному випадку, для стаціонарного процесу сумісний розподіл $X(t_1)$ і $X(t_2)$ такий самий, як сумісний розподіл $X(t_1 + \Delta)$ і $X(t_2 + \Delta)$. Наприклад, якщо $X(t)$ - стаціонарний процес, то

$$P\{(X(t_1), X(t_2)) \in A\} = P\{(X(t_1 + \Delta), X(t_2 + \Delta)) \in A\}$$

для будь-якого $A \in \mathbb{R}^2$. Підсумовуючи, випадковий процес є стаціонарним, якщо зсув часу не змінює його статистичних властивостей. Формалізуємо означення стаціонарного випадкового процесу для неперервного випадку [11].

Означення 1.2. Випадковий процес $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ є стаціонарним або нерухомим, якщо для всіх $t_1, t_2, \dots, t_p \in \mathbb{R}$ і всіх $\Delta \in \mathbb{R}$ сумісний розподіл $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_p)$ такий самий, як і сумісний розподіл $X(t_1 + \Delta), X(t_2 + \Delta), \dots, X(t_p + \Delta)$. Тобто для всіх дійсних чисел x_1, x_2, \dots, x_p виконується

$$F_{X(t_1)X(t_2)\dots X(t_p)}(x_1, x_2, \dots, x_p) = F_{X(t_1+\Delta)X(t_2+\Delta)\dots X(t_p+\Delta)}(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

В роботі розглядаються стаціонарні випадкові процеси в дискретному випадку. Тому наведемо дискретний випадок означення стаціонарності випадкового процесу.

Означення 1.3. Випадковий процес $\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$ є стаціонарним, якщо для всіх $n_1, n_2, \dots, n_N \in \mathbb{Z}$ та будь-якого $D \in \mathbb{Z}$ сумісний розподіл $X(n_1), X(n_2), \dots, X(n_N)$ такий самий, як і сумісний розподіл $X(n_1 +$

$D), X(n_2 + D), \dots, X(n_N + D)$. Тобто для всіх дійсних чисел x_1, x_2, \dots, x_N виконується

$$F_{X(n_1)X(n_2)\dots X(n_N)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X(n_1+D)X(n_2+D)\dots X(n_N+D)}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Але на практиці процеси рідко бувають стаціонарними, тому поняття стаціонарності можна послабити, за допомогою поняття стаціонарності в широкому сенсі (слабка стаціонарність). Випадковий процес є стаціонарним в широкому сенсі, якщо його математичне сподівання та кореляційна функція не змінюються з плином часу [16].

Означення 1.4. Випадковий процес $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ є стаціонарним в широкому сенсі, якщо для будь-яких дійсних t_1 та t_2 виконуються:

1. $E(X(t_1)) = E(X(t_2))$,
2. $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2)$.

1.3.2 Спектральна щільність

Функція спектральної щільності також називається спектром потужності. Спектральна щільність так само, як і математичне сподівання, дисперсія та кореляційна функція відноситься до основних характеристик, за допомогою яких аналізуються властивості стаціонарних випадкових процесів та застосовують у аналізі систем, зазнавши вплив випадкових сигналів. Доволі часто, спектральну щільність використовують для оцінки співвідношення між періодичними і шумовими складовими випадкового процесу та визначають фізичну природу об'єкта або сигналу.

Розглянемо класичний підхід до задання спектральної щільності, в якому вона задається через перетворення Фур'є від коваріаційної функції.

Означення 1.5. $f(\lambda)$, де λ - дійсне число, називається спектральною щільністю стаціонарного процесу $\xi(t)$, якщо

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} B(t) dt, \quad B \in L_1(\mathbb{R})^\infty.$$

Властивості:

1. Спектральна щільність є дійсною та парною функцією.

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} B(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda t B(t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin \lambda t B(t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda t B(t) dt = f(-\lambda) \end{aligned}$$

2. Зв'язок дисперсії та спектральної щільності:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda.$$

3. Зміна масштабу по вісі часу. Якщо кореляційні функції двох процесів відрізняються одна від одної тільки масштабом по вісі t : $B(t) = f(\alpha t)$, тоді відповідні спектральні щільності пов'язані оберненим співвідношенням:

$$f(\lambda) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right).$$

4. Теорема Герглотца.

Нехай $T = \{0, 1, \dots\}$. Тоді знайдеться монотонно неспадна неперервна справа функція Φ , така, що $B(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda)$ [16].

5. Теорема Бохнера-Хінча.

Нехай $T = \mathbb{R}^+$. Тоді якщо $B(t)$ неперервна в нулі, тоді знайдеться монотонно неспадна справа функція Φ , така, що $B(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda)$ [18].

1.4 Випадкові процеси, що мають сингулярний спектр

1.4.1 Означення та основні властивості процесів із сингулярним спектром

(A1) ε_j , $j \in \mathbb{Z}$, є локальним перетворенням від гаусівського стаціонарного часового ряду ξ_j , тобто $\varepsilon_j = G(\xi_j)$, $G(x)$, $x \in \mathbb{R}$ - борелева функція, причому $E\varepsilon_0 = 0$, $E\varepsilon_0^4 < \infty$.

(A2) Часовий ряд ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, визначено на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, $E\xi_0 = 0$.

(A3) Коваріаційна функція часового ряду ξ_j має вигляд

$$B(j) = E\xi_0\xi_j = \sum_{i=0}^r D_i B_{\alpha_i, \varkappa_i}(j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad r \geq 0,$$

$$\sum_{i=0}^r D_i = 1, \quad D_i > 0, \quad i = \overline{0, r},$$

де

$$B_{\alpha_i, \varkappa_i}(j) = \frac{\cos \varkappa_i j}{(1 + j^2)^{\alpha_i/2}}, \quad 0 \leq \varkappa_0 < \varkappa_1 < \dots < \varkappa_r, \quad \alpha_j > 0, \quad i = \overline{1, r}.$$

Коваріаційну функцію такого вигляду вперше було введено у роботі [53] з метою отримання прикладу спектральної щільності, що має явний вигляд, а також, сингулярності, які розташовані не в нулі, як у випадку сильно залежних процесів.

Коваріаційна функція $B(n)$ має спектральний розклад

$$B(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f(\lambda) d\lambda, \quad n \in \mathbb{Z},$$

зі спектральною щільністю $f(\lambda) = \sum_{k=0}^r A_k f_{\alpha_k, \varkappa_k}(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi; \pi]$.

Зазначимо властивості функцій $f_{\alpha_k, \varkappa_k}$. У неперервному випадку

$$B_{\alpha_k, \varkappa_k}(t) = \frac{\cos(\varkappa_k t)}{(1 + t^2)^{\alpha_k/2}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

відповідає с.щ. вигляду

$$\tilde{f}_{\alpha_k, \varkappa_k}(\lambda) = \frac{C_1(\alpha_k)}{2} \left[K_{\frac{\alpha_k-1}{2}}(|\lambda + \varkappa_k|) |\lambda + \varkappa_k|^{\frac{\alpha_k-1}{2}} + \right. \\ \left. + K_{\frac{\alpha_k-1}{2}}(|\lambda - \varkappa_k|) |\lambda - \varkappa_k|^{\frac{\alpha_k-1}{2}} \right], \quad k = \overline{0, r},$$

де $C_1(\alpha) = 2^{\frac{1-\alpha}{2}} / (\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\alpha}{2}))$ та

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty s^{\nu-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)z\right\} ds, \quad z \geq 0, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

є модифікованими функціями Бесселя 3-го роду порядку ν .

Необхідно зауважимо, що $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$, і для $z \downarrow 0$

$$K_\nu(z) \sim \Gamma(\nu)2^{\nu-1}z^{-\nu}, \quad \nu > 0.$$

Можна довести, що при $\lambda \rightarrow \pm \varkappa_k$, $k = \overline{0, r}$,

$$\tilde{f}_{\alpha_k, \varkappa_k}(\lambda) \sim \frac{C_2(\alpha_k)}{2} |\lambda \pm \varkappa_k|^{\alpha_k-1} \left(1 - h_k(|\lambda \pm \varkappa_k|)\right),$$

де $C_2(\alpha) = [2\Gamma(\alpha) \cos(\frac{\alpha\pi}{2})]^{-1}$,

$$h_k(|\lambda|) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha_k+1}{2})}{\Gamma(\frac{3-\alpha_k}{2})} \cdot \left|\frac{\lambda}{2}\right|^{1-\alpha_k} + \frac{\Gamma(\frac{\alpha_k+1}{2})}{4\Gamma(\frac{3+\alpha_k}{2})} \cdot \left|\frac{\lambda}{2}\right|^2 - o(|\lambda|^2), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad k = \overline{0, r}.$$

Зауважимо, що спектральна щільність f та спектральна щільність $\tilde{f}(\lambda) = \sum_{k=0}^r A_k \tilde{f}_{\alpha_k, \varkappa_k}(\lambda)$ неперервного аналогу функції $B(n)$ пов'язані співвідношенням

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda + 2\pi k).$$

Тому спектральна щільність f має $2r + 2$ різні точки сингулярності $\{-\chi_r, -\chi_{r-1}, \dots, -\chi_1, -\chi_0, \chi_0, \chi_1, \dots, \chi_r\}$ за умови (A3*), коли $\chi_0 \neq 0$ та $0 < \alpha_j < 1$, $j = \overline{0, r}$. Якщо $\chi_0 = 0$, тоді f має $2r + 1$ точку сингулярності [54].

1.4.2 Асимптотичні властивості процесу із сингулярним спектром

Мною була сформульована та доведена лема наступна лема.

Лема 1.1. *Якщо для моделі (2.1) виконуються умови (A1)-(A3), тоді*

$$E\eta_N^2 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

де

$$\eta_N = N^{-1} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \sum_{j=1}^N e^{-i\lambda j} \varepsilon_j \right|.$$

Доведення. Оскільки

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^N e^{-i\lambda j} \varepsilon_j \right|^2 &= \sum_{j,k=1}^N e^{-i\lambda(j-k)} \varepsilon_j \varepsilon_k = \sum_{j=1}^N \varepsilon_j^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N 2 \cos \lambda(k-j) \varepsilon_j \varepsilon_k = \\ &= \sum_{j=1}^N \varepsilon_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \cos \lambda j \sum_{k=1}^{N-j} \varepsilon_{k+j} \varepsilon_k, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} E\eta_N^2 &= E \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} N^{-2} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \cos \lambda j \sum_{k=1}^{N-j} \varepsilon_{k+j} \varepsilon_k \right) = \\ &= N^{-2} \sum_{j=1}^N E\varepsilon_j^2 + 2E \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \sum_{j=1}^{N-1} \cos \lambda j \sum_{k=1}^{N-j} \varepsilon_{k+j} \varepsilon_k \leq \\ &\leq N^{-1} E\varepsilon_1^2 + 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} E \left| \sum_{k=1}^{N-j} \varepsilon_{k+j} \varepsilon_k \right|. \end{aligned} \quad (1.2)$$

За умови (A1) функція $G(x)$ розкладається в ряд

$$G(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{m!} H_m(x), \quad C_m = \int_{\mathbb{R}} G(x) H_m(x) \varphi(x) dx, \quad m \geq 1,$$

де

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$ за поліномами Чебишова-Ерміта

$$H_m(x) = (-1)^m e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^m}{dx^m} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Тоді

$$\varepsilon_j = G(\xi_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m}{m!} H_m(\xi_j).$$

З властивості

$$E H_m(\xi_j) H_l(\xi_k) = \delta_k^l m! B^m(j-k).$$

Маємо

$$E\varepsilon_j^2 = E \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{m!} H_m(\xi_j) \right)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^2}{(m!)^2} E H_m^2(\xi_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^2}{(m!)} \leq \infty \quad (1.3)$$

З (1.3) випливає, що для будь-якого $\epsilon > 0$ можна вказати $n = n(\epsilon)$ таке, що

$$G(x) = G_1(x) + G_2(x), \quad (1.4)$$

$$G_1(x) = \sum_{m=1}^n \frac{C_m}{m!} H_m(x),$$

$$G_2(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{C_m}{m!} H_m(x),$$

$$EG_2^2(\xi) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{C_m^2}{m!} \leq \epsilon^2 \quad (1.5)$$

Використовуючи (1.4), (1.2) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} E\eta_N^2 &\leq N^{-1} + 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} E \left| \sum_{k=1}^{N-j} (G_1(\xi_{k+j}) + G_2(\xi_{k+j})) (G_1(\xi_k) + G_2(\xi_k)) \right| \leq \\ &\leq N^{-1} + \sum_{i,l=1}^2 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} E \left| \sum_{k=1}^{N-j} G_i(\xi_{k+j}) G_l(\xi_k) \right| = \\ &= N^{-1} + S_{11,N} + S_{12,N} + S_{21,N} + S_{22,N}. \end{aligned}$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського та (1.5) маємо

$$\begin{aligned} S_{12,N} &= 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} E \left| \sum_{k=1}^{N-j} G_1(\xi_{k+j}) G_2(\xi_k) \right| \leq \\ &\leq 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} E |G_1(\xi_{k+j}) G_2(\xi_k)| \leq \\ &\leq 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} (EG_1^2(\xi_{k+j}))^{\frac{1}{2}} (EG_2^2(\xi_k))^{\frac{1}{2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) (EG_1^2(\xi_1))^{\frac{1}{2}} (EG_2^2(\xi_1))^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq 2N^{-2} \frac{(N-1)N}{2} (EG_1^2(\xi_1))^{\frac{1}{2}} \epsilon \leq \\
&\leq \epsilon (EG_1^2(\xi_1))^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Аналогічно $S_{21,N}$ та $S_{22,N}$

$$\begin{aligned}
S_{21,N} &= 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} E \left| \sum_{k=1}^{N-j} G_2(\xi_{k+j}) G_1(\xi_k) \right| \leq \\
&\leq 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} E |G_2(\xi_{k+j}) G_1(\xi_k)| \leq \\
&\leq 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} (EG_2^2(\xi_{k+j}))^{\frac{1}{2}} (EG_1^2(\xi_k))^{\frac{1}{2}} = \\
&= 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) (EG_2^2(\xi_{k+j}))^{\frac{1}{2}} (EG_1^2(\xi_k))^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) (EG_1^2(\xi_k))^{\frac{1}{2}} \epsilon = \\
&= 2N^{-2} \frac{(N-1)N}{2} (EG_1^2(\xi_k))^{\frac{1}{2}} \epsilon \leq \\
&\leq \epsilon (EG_1^2(\xi_k))^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{22,N} &= 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} E \left| \sum_{k=1}^{N-j} G_2(\xi_{k+j}) G_2(\xi_k) \right| \leq \\
&\leq 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} E |G_2(\xi_{k+j}) G_2(\xi_k)| \leq \\
&\leq 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} (EG_2^2(\xi_{k+j}))^{\frac{1}{2}} (EG_2^2(\xi_k))^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq 2N^{-2} \frac{(N-1)N}{2} \epsilon \epsilon \leq \epsilon^2.
\end{aligned}$$

Для оцінки $S_{11,N}$ будемо використовувати нерівність $|E\xi| \leq (E\xi^2)^{\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned}
S_{11,N} &= 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} E \left| \sum_{k=1}^N G_1(\xi_{k+j}) G_1(\xi_k) \right| \leq \\
&\leq 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(E \left(\sum_{k=1}^{N-j} G_1(\xi_{k+j}) G_1(\xi_k) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k=1}^{N-j} \sum_{l=1}^{N-j} E G_1(\xi_{k+j}) G_1(\xi_k) G_1(\xi_{l+j}) G_1(\xi_l) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4=1}^n \left(\prod_{q=1}^4 \frac{C_{s_q}}{s_q!} \right) \sum_{k=1}^{N-j} \sum_{l=1}^{N-j} E H_{s_1}(\xi_{k+j}) \times \right. \\
&\quad \left. \times H_{s_2}(\xi_{l+j}) H_{s_3}(\xi_k) H_{s_4}(\xi_l) \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Далі для оцінки $S_{11,N}$ застосуємо діаграмну формулу при $p = 4$.

$$\begin{aligned}
S_{11,N} &\leq 2N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4=1}^n \left(\prod_{q=1}^4 \frac{C_{s_q}}{s_q!} \right) \sum_{k, l=1}^{N-j} \prod_{\Gamma \in L} \prod_{\omega \in R(V)} B(d_1(\omega), d_2(\omega)) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq 2 \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4=1}^n \left(\prod_{q=1}^4 \frac{C_{s_q}}{s_q!} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\Gamma \in L} N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k, l=1}^{N-j} \prod_{\omega \in R(V)} B(d_1(\omega), d_2(\omega)) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Оскільки n - фіксоване, то кількість наборів $s_i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ обмежена та для кожного набору (s_1, s_2, s_3, s_4) кількість діаграм скінчена, тоді достатньо оцінити доданки

$$N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k, l=1}^{N-j} \prod_{\omega \in R(V)} B(d_1(\omega), d_2(\omega)) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.7)$$

Зауважимо, що

$$|B(j)| = \left| \sum_{j=0}^r D_j B_{\alpha_j, \alpha_j}(j) \right| \leq (1 + j^2)^{\frac{-\alpha}{2}} = \tilde{B}(j), \quad (1.8)$$

де $\alpha = \min(\alpha_0, \dots, \alpha_r)$.

Розглянемо випадок $\alpha \in (0, 1)$. Введемо функцію $\tilde{L}(j) = \left(\frac{j^2}{1+j^2} \right)^{\frac{\alpha}{2}}$, яка є неспадною повільно змінною на нескінченності функцією.

Розглянемо можливі випадки для діаграми Γ .

I. Нехай $\Gamma \in L^*(s_1, s_2, s_3, s_4)$. Оскільки, Γ має чотири рівні $(1, 2, 3, 4)$ то для регулярної діаграми можливі три випадки розбиття на пари

$$(i)(1, 2), (3, 4);$$

$$(ii)(1, 3), (2, 4);$$

$$(iii)(1, 4), (2, 3).$$

Розглянемо окремо кожен з випадків, враховуючи, що

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (\xi_{k+j}, \xi_{l+j}, \xi_k, \xi_l).$$

Зауважимо, що для будь-якого j функцію $B(j)$ можна оцінити наступним чином

$$|B(j)| \leq B(0) = 1.$$

Розглянемо випадок (i) . В даному випадку $s_1 = s_2 = r_1$, $s_3 = s_4 = r_2$ та (1.7) має вигляд

$$\begin{aligned} W_{1,N} &= N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^{r_1}(k+j-l-j) B^{r_2}(k-l) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^{r_1}(k-l) B^{r_2}(k-l) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^{r_1+r_2}(k-l) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^2(k-l) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.9)$$

З (1.8) випливає, що

$$\sum_{k,l=1}^{N-j} B^2(k-l) = \sum_{t=-(N-j-1)}^{N-j-1} (N-j-|t|) B^2(t) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{t=-(N-j-1)}^{N-j-1} (N-j-|t|)\tilde{B}^2(t) \leq \\
&\leq \sum_{t=-(N-j-1)}^{N-j-1} (N-j-|t|)\tilde{B}(t) \leq \\
&\leq (N-j) \sum_{t=-(N-j-1)}^{N-j-1} \tilde{B}(t) \leq \\
&\leq (N-j) \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{N-j-1} t^{-\alpha} \right) \leq \\
&\leq (N-j) \left(1 + 2 \int_0^{N-j} t^{-\alpha} dt \right) = \\
&= (N-j) \left(1 + \frac{2(N-j)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = \\
&= (N-j)^{2-\alpha} \left(\frac{2}{1-\alpha} + (N-j)^{-(1-\alpha)} \right) \leq \\
&\leq \frac{3-\alpha}{1-\alpha} (N-j)^{2-\alpha} < \frac{3}{1-\alpha} (N-j)^{2-\alpha};
\end{aligned}$$

Тоді, підставляючи результат в (1.9) отримаємо оцінку для $W_{1,N}$

$$W_{1,N} \leq \frac{\sqrt{3}N^{-2}}{\sqrt{1-\alpha}} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{3}N^{-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{1-\alpha}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{N} \quad (1.10)$$

Функція $g(t) = (1-t)^{1-\frac{\alpha}{2}}$ - монотонно спадна функція. В свою чергу, права частина рівності (1.10) є інтегральною сумою для функції $g(t)$. Тому можемо дати оцінку $W_{1,N}$

$$\begin{aligned}
W_{1,N} &\leq \frac{\sqrt{3}N^{-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{1-\alpha}} \int_0^1 (1-t)^{1-\frac{\alpha}{2}} dt = \\
&= \frac{\sqrt{3}N^{-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{1-\alpha}} - \frac{(1-t)^{2-\frac{\alpha}{2}}}{2-\frac{\alpha}{2}} \Big|_0^1 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\alpha}(2-\frac{\alpha}{2})} N^{-\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned} \quad (1.11)$$

Розглянемо випадок (ii). В даному випадку $s_1 = s_3 = r_1$, $s_2 = s_4 = r_2$ (1.7) має вигляд

$$\begin{aligned}
W_{2,N} &= N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^{r_1}(k+j-k) B^{r_2}(l+j-l) \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^{r_1}(j) B^{r_2}(j) \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^{r_1+r_2}(j) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left((N-j)^2 B^2(j) \right)^{\frac{1}{2}} \leq N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) |B(j)| \quad (1.12)
\end{aligned}$$

З (1.8) випливає, що

$$\begin{aligned}
N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) |B(j)| &\leq N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) \tilde{B}(j) = \\
&= N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) (1+j^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \leq N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) j^{-\alpha} = \\
&= N^{-\alpha} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{1}{N} \right) \left(\frac{j}{N} \right)^{-\alpha} \frac{1}{N}. \quad (1.13)
\end{aligned}$$

Маємо в правій частині нерівності (1.13) інтегральну суму функції

$g(t) = (1-t)t^{-\alpha}$ на відрізку $(0, 1)$.

Оскільки $g'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} - (1-\alpha)t^{-\alpha} = -[\alpha + (1-\alpha)t]t^{-\alpha-1} < 0$, $t > 0$.

Отже функція $g(t)$ є монотонно спадною на $(0, 1]$. Тоді можемо оцінити (1.13)

$$\begin{aligned}
N^{-\alpha} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{1}{N} \right) \left(\frac{j}{N} \right)^{-\alpha} \frac{1}{N} &\leq \int_0^1 (1-t)t^{-\alpha} dt = \\
&= \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{t^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \quad (1.14)
\end{aligned}$$

Таким чином, підставляючи (1.13) та (1.14) в (1.11) отримаємо, що

$$W_{2,N} \leq \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} N^{-\alpha} \quad (1.15)$$

Розглянемо випадок (iii). В даному випадку $s_1 = s_4 = r_1$, $s_2 = s_3 = r_2$ та доданок $W_{3,N}$ суми (1.7) приймає вигляд:

$$W_{3,N} = N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^{r_1}(k-l+j) B^{r_2}(k-l-j) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.16)$$

Розглянемо наступну суму

$$\begin{aligned} S_{4,N} &= \sum_{k,l=1}^{N-j} B^{r_1}(k-l+j) B^{r_2}(k-l-j) \leq \\ &\leq \sum_{k,l=1}^{N-j} \left| \tilde{B}(k-l+j) \right| \left| \tilde{B}(k-l-j) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k,l=1}^{N-j} \tilde{B}_0(k-l+j) \tilde{B}_0(k-l-j) = \\ &= \sum_{t=-(N-j-1)}^{N-j-1} \frac{(N-j-|t|)}{\tilde{B}(t+j) \tilde{B}(t-j)} \leq \\ &\leq (N-j) \sum_{t=-(N-j-1)}^{N-j-1} \tilde{B}(t+j) \tilde{B}(t-j) \leq \\ &\leq (N-j) \left(\tilde{B}^2(j) + \sum_{t=1}^{N-j-1} \tilde{B}(t+j) \tilde{B}(t-j) + \right. \\ &+ \left. \sum_{t=-(N-j-1)}^{-1} \tilde{B}(t+j) \tilde{B}(t-j) \right) \leq \\ &\leq (N-j) \left(\tilde{B}(j) + \sum_{t=1}^{N-j-1} \tilde{B}(t+j) + \sum_{t=-(N-j-1)}^{-1} \tilde{B}(t-j) \right) = \\ &= (N-j) \left(\tilde{B}(j) + \sum_{k=j+1}^{N-1} \tilde{B}(k) + \sum_{k=-N+1}^{-1-j} \tilde{B}(k) \right) \end{aligned}$$

В силу парності функції $\tilde{B}(k)$ можемо зробити наступну оцінку

$$\begin{aligned} S_{4,N} &\leq 2(N-j) \sum_{k=j}^{N-1} \tilde{B}(k) \leq 2(N-j) \sum_{k=j}^{N-1} k^{-\alpha} \leq \\ &\leq 2(N-j) N^{1-\alpha} \sum_{k=j}^{N-1} \left(\frac{k}{N} \right)^{-\alpha} \frac{1}{N} \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2(N-j)N^{1-\alpha} \int_0^1 t^{-\alpha} dt = \frac{2(N-j)N^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Підставляючи суму $S_{4,N}$ в оцінку (1.16) отримаємо

$$\begin{aligned} W_{3,N} &\leq N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{2}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} (N-j)^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1-\alpha}{2}} = \\ &= N^{-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{2}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \leq \\ &\leq N^{-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{2}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \\ &= \left(\frac{2}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} N^{-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

В результаті маємо, що в випадку регулярних діаграм $S_{11,N}$ прямує до нуля при $N \rightarrow \infty$.

II. Нехай Γ є нерегулярною діаграмою.

Розглянемо можливі випадки в сумі (1.7).

Тоді в добутку суми (1.7) завжди буде присутній множник $B(k-p)$, який з'являється в результаті з'єднання ребер 1 і 2 чи 3 і 4, або множник $B(j)$, який з'являється в результаті з'єднання ребер 1 і 3 чи 2 і 4. Якщо діаграма Γ не буде мати вказаних множників, тоді діаграма є регулярною, що протирічить сформульованому припущенню.

Оскільки, $B(0) = 1$, тоді добуток в сумі (1.7) можна мажорувати $B(k-p)$ чи $B(j)$.

Отримаємо аналогічну оцінку як і в випадку (1.10). А саме

$$\begin{aligned} &N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left[\sum_{k,l=1}^{N-j} |B(k-l)| \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left[\sum_{k,l=1}^{N-j} \tilde{B}(k-l) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left[\sum_{t=-(N-j-1)}^{N-j-1} (N-j-|t|) \tilde{B}(t) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\alpha}\left(2-\frac{\alpha}{2}\right)} N^{-\frac{\alpha}{2}}. \quad (1.17)$$

У випадку $B(j)$ оцінка аналогічна до оцінки $B(k-l)$.

Розглянемо випадок $\alpha > 1$.

Для цього достатньо показати, що $S_{11,N} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Розглянемо відповідні доданки в (1.8) при можливих випадках регулярної діаграми Γ . Враховуючи (1.7) та міркування при доведенні випадку $\alpha \in (0, 1)$ маємо

$$\begin{aligned} W_{1,N} &\leq N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^2(k-l) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{N-j-1} t^{-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} t^{-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= c_1 N^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \leq \\ &\leq c_1 N^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \tilde{c}_1 N^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

де

$$\tilde{c}_1 = \frac{2}{3} c_1 = \frac{2}{3} \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} t^{-\alpha} \right).$$

Аналогічно маємо

$$\begin{aligned} W_{2,N} &\leq N^{-1} \tilde{c}_2, \quad \tilde{c}_2 = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\alpha}, \\ W_{3,N} &\leq N^{-\frac{1}{2}} \tilde{c}_3, \quad \tilde{c}_3 = \frac{2}{3} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Випадок нерегулярних діаграмних форм є абсолютно аналогічним до розглянутого випадку $\alpha \in (0, 1)$.

Розглянемо випадок $\alpha = 1$.

В даному випадку оцінки та висновки для $W_{1,N}, W_{2,N}, W_{3,N}$ отримуються аналогічно. Проведемо доведення для $W_{1,N}$.

Розглянемо гармонічний ряд

$$\sum_{j=1}^N j^{-1} = \ln N + \gamma + \varepsilon_N,$$

де $\gamma = 0,577\dots$ - постійна Ейлера-Маскерони, $\varepsilon_N \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$.

Тоді для $N > N_0$

$$\sum_{j=1}^N j^{-1} = \ln N + \gamma + 1. \quad (1.18)$$

Із (1.18) маємо

$$\begin{aligned} W_{1,N} &\leq N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{N-j-1} t^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} (3 + 2\gamma + 2 \ln N)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq N^{\frac{-1}{2}} (\ln N)^{\frac{1}{2}} \sqrt{3} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \leq \\ &\leq \frac{2\sqrt{3}}{3} (\ln N)^{\frac{1}{2}} N^{\frac{-1}{2}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

З даних оцінок випливає, що сума (1.7) прямує до нуля при $N \rightarrow \infty$, тобто $E\eta^2(N) \rightarrow 0$. □

1.5 Випадкові процеси, що задовольняють умові сильної залежності

Означення 1.6. Функція L називається повільно змінною, якщо

1. L - вимірна;
2. L - додатна;
3. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(ct)}{L(t)} = 1$, для будь-якого $c > 0$.

(A3*) Коваріаційна функція часового ряду ξ_j має вигляд

$$B(j) = L(|j|)|j|^{-\alpha}, \quad B(0) = 1, \quad \alpha \in (0, 1),$$

$L(t), t > 0$ - монотонна неспадна повільно змінна на скінченності функція.

Часовий ряд ξ_j , що задовольняє умовам (A2), (A3*) називається процесом із сильною залежністю.

Сформулюємо основні властивості повільно змінних функцій.

1. Якщо L - повільно змінна функція, тоді для будь-якого $0 < a < b < \infty$ виконується

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(\lambda t)}{L(t)} = 1$$

рівномірно відносно $\lambda \in [a, b]$.

2. Якщо L - повільно змінна функція, тоді існує $B > 0$ таке, що всіх $T \geq B$

$$L(T) = \exp \left\{ \nu(T) + \int_B^T \frac{k(t)}{t} dt \right\},$$

де $\nu(x)$ - вимірна функція на $[B, \infty)$,

3. Для будь-якого $\delta > 0$ при $t \rightarrow \infty$, $t^\delta L(t) \rightarrow \infty$, $t^{-\delta} L(t) \rightarrow 0$.

4. Нехай функції $L_1(t)$ та $L_2(t)$ - повільно змінні. То функції $L_1(t) + L_2(t)$ та $L_1(t)L_2(t)$ є повільно змінними функціями.

5. Нехай повільно змінна функція L при досить великих B має представлення $L(T) = \exp \left\{ \nu(T) + \int_B^T \frac{k(t)}{t} dt \right\}$ для будь-якого фіксованого $\delta > 0$ та $T \geq B$ функція L визначається співвідношенням

$$T^\delta \tilde{L}(T) = \sup_{B \leq t \leq T} (t^\delta L(t)),$$

тоді $\tilde{L}(T) \sim L(T)$ при $T \rightarrow \infty$ [47].

Лема 1.2. Якщо для моделі (2.1) виконуються умови (A1)-(A3*), тоді

$$E\eta_N^2 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

де

$$\eta_N = N^{-1} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \sum_{j=1}^N e^{-i\lambda j} \varepsilon_j \right|.$$

Доведення. Доведення для випадку випадкового шуму що задовольняє умовам (A1)-(A3*) повністю повторює доведення леми 1.1 для випадку $\alpha \in (0, 1)$.

Присутні відмінності в доведенні $S_{11,N} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$. Тому продемонструємо ці відмінності на доданку $W_{1,N}$.

$$\begin{aligned} W_{1,N} &\leq N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{N-j-1} L(t)t^{-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2L(N) \sum_{t=1}^{N-j-1} t^{-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2L(N)}{1-\alpha} (N-j)^{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq N^{-2} (L(N))^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{1-\alpha} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \\ &\leq L^{\frac{1}{2}}(N) N^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\alpha} \left(2 - \frac{\alpha}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Доведення для $W_{2,N}, W_{3,N}$ та нерегулярних діаграм є аналогічними.

Тоді маємо що $E\eta^2(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. □

Розділ 2

Консистентність періодограмної оцінки

2.1 Постановка задачі

Нехай спостерігається випадковий процес:

$$X_j = A_0 \cos \varphi_0 j + \varepsilon_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (2.1)$$

де $A_0 > 0$, $\varphi_0 \in (\underline{\varphi}, \overline{\varphi})$, $0 < \underline{\varphi} < \overline{\varphi} < \pi$, а процес ε задовольняє (A1), (A2) та (A3) або (A3*) умовам.

Означення 2.1. Періодограмною оцінкою частоти φ_0 назвемо таку випадкову величину $\varphi_N \in (\overline{\varphi}, \underline{\varphi})$, для якої

$$Q_N(\varphi_N) = \max_{\varphi \in (\overline{\varphi}, \underline{\varphi})} Q_N(\varphi), \quad Q_N(\varphi) = \left| 2N^{-1} \sum_{j=1}^N X_j e^{i\varphi j} \right|^2.$$

В свою чергу, оцінку амплітуди A_0 знаходимо як значення $A_0 = Q_N^{\frac{1}{2}}(\varphi_N)$.

2.2 Консистентність

Теорема 2.1. *Якщо для моделі (2.1) виконуються умови (A1)-(A3), або (A1)-(A3*), тоді*

$$\varphi_N \rightarrow \varphi_0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Доведення. Зафіксуємо φ , тоді розглянемо поведінку $Q_N(\varphi)$ при $N \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} Q_N(\varphi) &= 4N^{-2} \left| \sum_{j=1}^N X_j e^{i\varphi j} \right|^2 = 4N^{-2} \left| \sum_{j=1}^N (A_0 \cos \varphi_0 j + \varepsilon_j) e^{i\varphi j} \right|^2 = \\ &= 4N^{-2} \left(A_0^2 \sum_{j=1}^N A_0 \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{-i\varphi j} + A_0 \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} \times \right. \\ &\times \sum_{j=1}^N \varepsilon_j e^{-i\varphi j} + A_0 \sum_{j=1}^N \varepsilon_j e^{i\varphi j} \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{-i\varphi j} + \\ &+ \left. \sum_{j=1}^N \varepsilon_j e^{i\varphi j} \sum_{j=1}^N \varepsilon_j e^{-i\varphi j} \right) = 4N^{-2} \left(A_0^2 \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} \right|^2 + \right. \\ &+ \left. 2A_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} \sum_{j=1}^N \varepsilon_j e^{-i\varphi j} \right\} + \left| \sum_{j=1}^N \varepsilon_j e^{i\varphi j} \right|^2 \right) = \\ &= S_{5,N} + S_{6,N} + S_{7,N}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Можемо дати оцінку

$$N^{-1} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} \right| \leq 1,$$

тоді з доведених лем 1.1 та 1.2 випливає, що

$$S_{6,N} = 2A_0 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} \sum_{j=1}^N \varepsilon_j e^{i\varphi j} \right] \rightarrow 0,$$

$$S_{7,N} = \left| \sum_{j=1}^N \varepsilon_j e^{i\varphi j} \right|^2 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Тоді

$$\begin{aligned} 2N^{-1} \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} &= N^{-1} \sum_{j=1}^N (e^{i\varphi_0 j} + e^{-i\varphi_0 j}) e^{i\varphi j} = \\ &= N^{-1} \sum_{j=1}^N (e^{i(\varphi+\varphi_0)j} + e^{i(\varphi-\varphi_0)j}) \end{aligned}$$

Розглянемо два випадки, коли $\varphi \neq \varphi_0$ та $\varphi = \varphi_0$.

1. $\varphi \neq \varphi_0$

$$\begin{aligned} N^{-1} \sum_{j=1}^N (e^{i(\varphi+\varphi_0)j} + e^{i(\varphi-\varphi_0)j}) &= \\ &= \frac{e^{i(\varphi+\varphi_0)(N+1)} - 1}{N(e^{i(\varphi+\varphi_0)} - 1)} + \frac{e^{i(\varphi-\varphi_0)(N+1)} - 1}{N(e^{i(\varphi-\varphi_0)} - 1)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

2. $\varphi = \varphi_0$

$$N^{-1} \sum_{j=1}^N (e^{2i\varphi_0 j} + 1) = \frac{e^{2i\varphi_0(N+1)} - 1}{N(e^{2i\varphi_0} - 1)} + 1. \quad (2.4)$$

Зафіксуємо $R > 0$. Тоді

$$\begin{aligned} P\{|Q_N(\varphi_0) - A_0^2| > R\} &\leq P\{|S_{5,N} - A_0^2| + |S_{6,N}| + |S_{7,N}| > R\} \leq \\ &\leq P\left\{|S_{5,N} - A_0^2| > \frac{R}{3}\right\} + P\left\{|S_{6,N}| > \frac{R}{3}\right\} + P\left\{|S_{7,N}| > \frac{R}{3}\right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

З (2.3), (2.4) та того, що $\varphi_0 \in (\underline{\varphi}, \bar{\varphi})$, де $0 < \underline{\varphi} < \bar{\varphi} < \pi$

$$\begin{aligned} |S_{5,N} - A_0^2| &= A_0^2 \left(\left| \frac{e^{2i\varphi_0(N+1)} - 1}{N(e^{2i\varphi_0} - 1)} \right|^2 + 2 \left| \frac{e^{2i\varphi_0(N+1)} - 1}{N(e^{2i\varphi_0} - 1)} \right| \right) \leq \\ &\leq \frac{8A_0^2 N^{-1}}{\min\{|e^{2i\underline{\varphi}} - 1|^2, |e^{2i\bar{\varphi}} - 1|^2\}} < R, \end{aligned} \quad (2.6)$$

при $N > N_0$, випливає, що

$$P\{|Q_N(\varphi_0) - A_0^2| > R\} < \varepsilon,$$

тому

$$Q_N(\varphi_0) \xrightarrow{P} A_0^2, \quad N \rightarrow \infty.$$

Розглянемо множину

$$\Phi_\delta = \{\varphi \in [\underline{\varphi}, \bar{\varphi}] : |\varphi - \varphi_0| \geq \delta\}, \quad \delta > 0.$$

та деяке фіксоване $R > 0$. Тоді

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{\varphi \in \Phi_\delta} |Q_N(\varphi)| > R\right\} &\leq P\left\{\sup_{\varphi \in \Phi_\delta} |S_{5,N}| > \frac{R}{3}\right\} + \\ &+ P\left\{\sup_{\varphi \in \Phi_\delta} |S_{6,N}| > \frac{R}{3}\right\} + P\left\{\sup_{\varphi \in \Phi_\delta} |S_{7,N}| > \frac{R}{3}\right\}. \end{aligned}$$

З (2.3), (2.4) та

$$\begin{aligned} |S_{5,N}| &= 2N^{-1} \left(\left| \frac{e^{i(\varphi+\varphi_0)(N+1)} - 1}{e^{i(\varphi+\varphi_0)} - 1} \right|^2 + \left| \frac{e^{i(\varphi-\varphi_0)(N+1)} - 1}{e^{i(\varphi-\varphi_0)} - 1} \right|^2 \right) \leq \\ &\leq 4N^{-1} \left(\frac{1}{\min\{|e^{2i\varphi} - 1|^2, |e^{2i\bar{\varphi}} - 1|^2\}} + \frac{1}{|e^{i\delta} - 1|^2} \right) < R, \end{aligned} \quad (2.7)$$

при $N > N_0$, випливає, що

$$Q_N(\varphi) \xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty$$

рівномірно на Φ_δ .

За означенням оцінки φ_N

$$\begin{aligned} P(|\varphi_N - \varphi_0| \geq \delta) &= P(|\varphi_N - \varphi_0| \geq \delta, Q_N(\varphi_N) \geq Q_N(\varphi_0)) \leq \\ &\leq P\left(\sup_{\varphi_N \in \Phi_\delta} Q_N(\varphi_N) \geq Q_N(\varphi_0)\right) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Лема 2.1. *Якщо для моделі (2.1) виконуються умови (A1) – (A3) або (A1) – (A3*), тоді*

$$A_N^2 = Q_N(\varphi_N) \xrightarrow{P} A_0^2, \quad N \rightarrow \infty,$$

Доведення.

Розглянемо

$$\begin{aligned} 0 &\leq Q_N(\varphi_N) - Q_N(\varphi_0) = \\ &= 4A_0^2 N^{-2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_N j} \right|^2 - 4A_0^2 N^{-2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_0 j} \right|^2 + \Lambda_N, \\ \Lambda_N &\xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_N j} \right| \leq \max_{\varphi_N \in [\underline{\varphi}, \bar{\varphi}]} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} \right| = \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_N^* j} \right|,$$

де $\varphi_N^* \in [\underline{\varphi}, \overline{\varphi}]$ – точка максимуму. Якщо $\varphi_N^* \neq \varphi_0$, то з (2.2) та (2.7) випливає, що

$$\begin{aligned} 2N^{-1} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_N^* j} \right| &\leq 2N^{-1} \left| \frac{e^{i(\varphi_N^* + \varphi_0)(N+1)} - 1}{N(e^{i(\varphi_N^* + \varphi_0)} - 1)} \right| + 2N^{-1} \left| \frac{e^{i(\varphi_N^* - \varphi_0)(N+1)} - 1}{N(e^{i(\varphi_N^* - \varphi_0)} - 1)} \right| \leq \\ &\leq 2N^{-1} \left(\frac{1}{\min\{|e^{2i\underline{\varphi}} - 1|^2, |e^{2i\overline{\varphi}} - 1|^2\}} + \frac{1}{|e^{i\delta} - 1|^2} \right) < R. \end{aligned}$$

У випадку, якщо $\varphi_N^* = \varphi_0$, то (2.4) та (2.6) маємо аналогічну оцінку:

$$\begin{aligned} 2N^{-1} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_0 j} \right| &\leq 2 \left(\left| \frac{e^{2i\varphi_0(N+1)} - 1}{N(e^{2i\varphi_0} - 1)} \right|^2 + \left| \frac{e^{2i\varphi_0(N+1)} - 1}{N(e^{2i\varphi_0} - 1)} \right| \right) \leq \\ &\leq \frac{4A_0^2 N^{-1}}{\min\{|e^{2i\underline{\varphi}} - 1|^2, |e^{2i\overline{\varphi}} - 1|^2\}} < R. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \max_{\varphi \in [\overline{\varphi}, \underline{\varphi}]} 4N^{-2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} \right|^2 \leq 1.$$

З іншого боку,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 4N^{-2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_0 j} \right|^2 = 1.$$

З цих співвідношень випливає, що

$$Q_N(\varphi_N) - Q_N(\varphi_0) \xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Тобто $Q_N(\varphi_0) \xrightarrow{P} A_0^2$, $N \rightarrow \infty$, тоді $Q_N(\varphi_N) \xrightarrow{P} A_0^2$, $N \rightarrow \infty$. \square

Теорема 2.2. *Якщо для моделі (2.1) виконуються умови (A1)-(A3), або (A1)-(A3*), тоді*

$$N(\varphi_N - \varphi_0) \xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Доведення. З леми 2.1 випливає, що

$$N^{-2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_N j} \right|^2 - N^{-2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_0 j} \right|^2 \xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Для того щоб при $N \rightarrow \infty$ виконувалось (2.8) необхідно та достатньо, щоб

$$\left| \frac{e^{i(\varphi + \varphi_0)(N+1)} - 1}{N(e^{i(\varphi + \varphi_0)} - 1)} + \frac{e^{i(\varphi - \varphi_0)(N+1)} - 1}{N(e^{i(\varphi - \varphi_0)} - 1)} \right|^2 - \left| \frac{e^{2i\varphi_0(N+1)} - 1}{N(e^{2i\varphi_0} - 1)} + 1 \right|^2 \xrightarrow{P} 0.$$

Зі співвідношень (2.3) та (2.4) теореми 2.1 маємо, що

$$N(\varphi_N - \varphi_o) \xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

□

ВИСНОВКИ

В дисертації отримано достатні умови консистентності періодограмної оцінки в задачі виявлення прихованих періодичностей модель регресії з дискретним часом та випадковим шумом, що має сингулярний спектр або є сильно залежним.

На основі досліджень було сформульовано та доведено 3 леми та 2 теореми. Дисертація має теоретичний характер, але отримані результати потенціально полегшують майбутні дослідження зашумлених моделей в усіх сферах діяльності, де присутні сигнали та моделі с прихованою періодичністю, а саме: геофізика, статистична радіофізика, метеорологія, астрономія, електротехніка, сейсмологія та багатьох інших сферах діяльності.

Результати роботи дають можливість розширити застосування тригонометричних моделей регресії дискретним часом, на випадок сильно залежного випадкового шуму та процесів із сингулярним спектром.

Природнім продовження дослідження є знаходження умов асимптотичної нормальності періодограмної оцінки амплітуди та кутової частоти.

Список використаних джерел

- [1] Жураковський Б. М. Виявлення прихованих періодичностей в моделях регресії з локально перетвореним гаусівським стаціонарним шумом / Жураковський Б. М. // Київ.- 2015 - С. 50-83
- [2] Слуцкий Е.Е. Сложение случайных причин как источник циклических процессов / Е.Е. Слуцкий // Проблемы экономических условий, из-во Ко- ньюктурного института при Наркомфине СССР, Москва. – 1927. – Т.3, №1. – С. 34-64.
- [3] Fisher R.A. Test of significance in Harmonic Analysis / R.A. Fisher // Proceed. Roy. Soc. – 1929. – Vol. 125. – P. 54-59.
- [4] Schuster A. On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena / A. Schuster // Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity. – 1898. – Vol. 3. – P. 13-41.
- [5] Zhurakovskiy V.M Periodogram estimator properties of the parameters of the modulate almost periodic signal / В.М. Zhurakovskiy // "Theoretical and applied aspects of cybernetics Kyiv: Conference materials. – 2014. – P. 87-90.
- [6] Н. П. Заботина О регулярности случайных процессов, являющихся функциями стационарных гауссовских / Н. П. Заботина // Пробл. передачи информ., 1993, том 29, выпуск 3, С. 42–47
- [7] Вайнштейн Л.А. Выделение сигналов на фоне случайных помех. / Го- сэнергоиздат, Вайнштейн Л.А., Зубаков В.Д. // 1960 г. - 448 с.
- [8] Fisher R.A. Test of significance in Harmonic Analysis / R.A. Fisher // Proceed. Roy. Soc. – 1929. – Vol. 125. – P. 54-59.

- [9] Yule G.V. On a method of investigating periodicities in disturbed series with special reference of Wolfer's sunspot numbers / G.V. Yule // Philos. Trans. Roy. Soc., Series A. – 1927. – Vol. 226. – P. 267-298.
- [10] Н.А. Хованова Методы анализа временных рядов / Н.А. Хованова, И.А. Хованов // Издание осуществлено при поддержке гранта CRDF REC-006, Издательство, Государственного учебно-научного центра "Колледж"; Саратов 2001, С. 123-126.
- [11] Н. Pishro-Nik Introduction to probability, statistics, and random processes / Н. Pishro-Nik, Kappa Research LLC // 2014, P. 15-18.
- [12] Мишулина О. А. Статистический анализ и обработка временных рядов / Мишулина О. А. // — М.: МИФИ, 2004. — С. 180.
- [13] Abramowitz, M. Orthogonal Polynomials / Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (Eds.) // New York: Dover, pp. 771-802, 1972.
- [14] Jeffreys H. The Parabolic Cylinder, Hermite, and Hh Functions / Jeffreys, H. and Jeffreys, B. S. // Cambridge, England: Cambridge University Press, pp. 620-622, 1988.
- [15] Roman, S. The Hermite Polynomials / Roman, S. // New York: Academic Press, pp. 30 and 87-93, 1984.
- [16] Слуцкий Е. Е. Теория корреляции стационарных стохастических процессов / Слуцкий Е. Е., // Избр. тр., М., 1960; Хинчин А. Я., «Успехи математических наук», 1938, в. 5, с, 42—51
- [17] Прохоров Ю. В. Теория вероятностей. (Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы) / Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. // 2 изд., М., 1973
- [18] Хеннан Э. Многомерные временные ряды, пер. с англ. / Хеннан Э., // М., 1974

- [19] А. В. Гасников Лекции по случайным процессам : учебное пособие / А. В. Гасников, Э. А. Горбунов, С. А. Гуз и др. ; под ред. А. В. Гасникова. // – Москва : МФТИ, 2019. – 254 с.
- [20] Doukhan Paul A new weak dependence condition and applications to moment inequalities. Stochastic Processes and Their Applications. / Doukhan, Paul // Louhichi, Sana (1999-12-01). 342.
- [21] Birkel Thomas Laws of large numbers under dependence assumptions. Statistics Probability Letters / Birkel, Thomas // (1992-07-11). 362.
- [22] O. V. Rusakov A functional limit theorem for random variables with strong residual dependence, Teor. Veroyatnost. i Primenen., / O. V. Rusakov // 1995, Volume 40, Issue 4, 813–832
- [23] И.И.Гихман Введение в теорию случайных процессов / И.И.Гихман, А.В.Скорород // 1977, Киев-Донецк, С.570
- [24] Ivanov A.V. Periodogram estimator consistency and asymptotical normality of harmonical oscillation parameters / A.V. Ivanov, B.M. Zhurakovskiy // “Modern Stochastics: Theory and Applications III”: Conference materials. – 2012. – P. 80.
- [25] Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей / М.И. Ядренко // К.: Вища школа. – 1980. – 208 с.
- [26] Хьюбер П. Робастность в статистике / П. Хьюбер // Москва, "Мир". – 1984. – 304 р.
- [27] Avram F. Generalized Holder Inequality and a Generalized Szego Theorem / F. Avram, L.A. Brown // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1989. – 107. – P. 687–695.
- [28] Buldygin V. Asymptotic Normality of Cross-correlogram Estimates of the Response Function / V. Buldygin, F. Utzet, V. Zaiats // Statis. Infer. for Stoch. Proc. – 2004. – 7. – P. 1-34.

- [29] Campbell M.J. A survey of statistical work on the Mackenzie river series of annual Canadian lynx trappings for the years 1821-1934 and a new analysis / M.J. Campbell, A.M. Walker // J. Roy. Statist. Soc. – 1977. – A140, Part 4. – P. 411-431.
- [30] Lagrange J.L. Recherches sur la maniere de former des tables des planetes d'apres les seules observations / J.L. Lagrange // Paris: Oeuvres. – 1873. – Vol. 4. – P. 507-627.
- [31] Н. Н. Леоненко, А. В. Иванов, Статистический анализ случайных полей, Киев. гос. ун-те, 1986. – 215.
- [32] Дороговцев А.Я. Теория оценок параметров случайных процессов / А.Я. Дороговцев // К.: Вища школа. – 1982. – 192 с.
- [33] Иванов А.В. Оценка угловой частоты гармонического колебания, совершаемого в присутствии стационарного шума / А.В. Иванов // Теория Вероят. и Матем. Статист. – 1976. – №14. – С. 45-53.
- [34] Иванов А.В. Одно решение задачи о выявлении скрытых периодичностей / А.В. Иванов // Теория Вероят. и Матем. Статист. – 1979. – №20. – С. 44-59.
- [35] Иванов О.В. Консистентність оцінки найменших квадратів амплітуд та кутових частот суми гармонічних коливань у моделях з сильно залежним шумом / Теорія ймов. та матем. статист. – 2009. – №80. – С. 48-55.
- [36] Иванов А.В. Статистический анализ случайных полей / А.Я. Иванов, Н.Н. Леоненко // К.: Вища Школа. – 1986. – 216 с.
- [37] Б. М. Жураковський Асимптотичні властивості періодограмних оцінок параметрів модульованого майже періодичного сигналу / Б. М. Жураковський, О. В. Иванов // Наукові вісті Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". - 2013. - № 4. - С. 45-54.

- [38] І. М. Савич Асимптотичні властивості оцінки Коенкера-Біссетта параметрів нелінійної регресії з сильно залежним випадковим шумом / І. М. Савич // Київ - 2017 - С. 70-77.
- [39] Peccati G. Gaussian limits for vector-valued multiple stochastic integrals / G. Peccati, С.А. Tudor // S eminaire de Probabilit es XXXVIII. – 2004. – P. 247–262.
- [40] Pisarenko V.F. The retrieval of harmonics from a covariance function / V.F. Pisarenko // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. – 1973. – 33. – P. 347-366.
- [41] Ratkovsky D.A. Handbook in Nonlinear Regression Models / D.A. Ratkovsky // Marcel Dekker, New York. – 1983.
- [42] Walker A.M. On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary independent residuals / A.M. Walker // Biometrika. – 1971. – Vol. 58. – P. 21-36.
- [43] Walker A.M. On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals / A.M. Walker // Adv. Appl. Probab. – 1973. – Vol. 5. – P. 217-241.
- [44] Whittle P. The statistical analysis of a seiche record / P. Whittle // Sears Foundation J. of Marine Res. – 1954. – Vol. 13. – P. 76-100.
- [45] Wilkinson J.H. The algebraic eigenvalue problem / J.H. Wilkinson // Oxford: Clarendon Press. – 1965. – 680 p.
- [46] Taqqu M.S. Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank / M.S. Taqqu // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. – 1979. – 50. – P. 53-83.
- [47] Орловський І. В. Асимптотичні властивості М-оцінок параметрів нелінійних моделей регресій / Орловський І. В. // Київ -2006, С.49.
- [48] Юшкевич А. П. История математики в 3-х томах / Юшкевич А. П. // М.: Наука, - 1972 - С.496.

- [49] Whittle P. The simultaneous estimation of a time series harmonic components and covariance structure / P. Whittle // *Trabajos Estadística*. – 1952. – Vol. 3. – P. 43-47.
- [50] Quinn B.G. The Estimation and Tracking of Frequency / B.G. Quinn, E.J. Hannan // *Cambridge Univ. Press*. – 2001. – 266 p.
- [51] Кнопов П.С. Оценивание неизвестных параметров почти- периодической функции при наличии шума / П.С. Кнопов // *Кибернетика*. – 1984. – №6. – С. 83-87.
- [52] Ivanov A.V. Consistency and asymptotic normality of periodogram estimator of harmonic oscillation parameters / A.V. Ivanov, B.M. Zhurakovskiy // *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. – 2013. – V. 89. – P. 30-39.
- [53] Anh V.V., Knopova V.P., Leonenko N.N. Continuous-time stochastic processes with cyclical long-range dependence // *Aust. NZ J. Stat.* - 2004. - Vol. 46. - P. 275-296.
- [54] О. В. Іванов, І. В. Орловський / Асимптотичні властивості М-оцінок параметрів нелінійної регресії з дискретним часом та сингулярним спектром // Київ, С.3