

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»

УДК 519.2

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«_____» _____ 2020р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Граничні теореми для послідовності рекордів»

Виконав:

студент VI курсу, групи ОМ-81мн

Колеснік Олександр Валерійович _____

Керівник:

Завідувач кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,

доктор фізико-математичних наук, професор

Клесов Олег Іванович _____

Рецензент:

Завідувач кафедри інформаційних систем і технологій,

Національний транспортний університет,

доктор фізико-математичних наук, професор

Гавриленко Валерій Володимирович _____

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.

Студент _____

Київ – 2020 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти: другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«_____» _____ 2020р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту
Колесніку Олександрю Валерійовичу

1. Тема дисертації «Граничні теореми для послідовності рекордів», науковий керівник дисертації Клесов Олег Іванович д.ф.-м.н., професор, затверджені наказом по університету від «17» березня 2020 р. № 891 - с
2. Термін подання студентом дисертації: 11 травня 2020 року
3. Об'єкт дослідження: Схеми рекордів. F^α -схема рекордів.
4. Предмет дослідження: Асимптотика кількості рекордів. Спеціальні випадки для поведінки часткових сум.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити:
 1. Отримати самостійно попередні результати досліджень на тему дисертації.
 2. Дослідити асимптотики для нових обмежень на часткові суми.
 3. Змоделювати та перевірити результати.
6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: слайди презентації, ілюстрації роботи програми, графіки функцій.

7. Результати буде представлено на Дев'ятій всеукраїнській науковій конференції молодих вчених з математики та фізики, яка пройде 10-11 квітня 2020 року у м. Києві

8. Консультанти розділів дисертації: (відсутні)

9. Дата видачі завдання: 03 лютого 2020 року

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Ознайомлення з літературою	03.02.2020-01.03.2020	
2	Доведення відомих результатів	02.03.2020-20.03.2020	
3	Дослідження нових обмежень на частковій сумі	21.03.2020-15.04.2020	
4	Знаходження нової асимптотики та практична перевірка результатів	16.04.2020-30.04.2020	
5	Оформлення роботи	01.05.2020-7.05.2020	

Студент

Олександр КОЛЕСНИК

Науковий керівник дисертації

Олег КЛЕСОВ

Реферат

Магістерська дисертація: 41 сторінка, 12 першоджерел, 9 ілюстрацій, 14 слайдів презентації. Дана робота складається з вступу, трьох основних розділів, висновків та додатку лістингу програмного коду.

У дисертації береться за мету дослідити рекорди для послідовності неперервних випадкових величин. А саме, знайти нові можливості для обчислення асимптотики кількості рекордів у рамках F^α -схеми. Базовим джерелом для досліджень будуть праці декількох авторів, серед яких є мій науковий керівник, це роботи [1, 2, 3]. Перші варіанти F^α -схеми були досліджені у роботі Янга [4], а згодом сильно узагальнені Невзоровим [5] та іншими авторами.

Об'єктом дослідження будуть асимптотики випадкових сум, для яких ми маємо деяку інформацію про розподіли на нескінченності. Однією з таких інформацій є функціональна поведінка часткових сум показників з F^α -схеми. Класичний результат асимптотики був доведений Реньї [6]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n)}{\ln n} = 1 \text{ м.н.}$$

Тут $\mu(n)$ позначає кількість рекордів до моменту n включно. Сучасну репрезентацію можна розглянути, наприклад, в [7]. На цьому результаті буде розроблено і перевірено програму з моделювання послідовностей рекордів, а потім проілюстровано її роботу на нових випадках з дисертації.

Одним з інструментів знаходження асимптотики буде підсилений закон великих чисел Колмогорова. У дисертації основну увагу буде приділено функціям з класу ORV (див. [8, 9, 3]). Результатом дисертації є узагальнення попередніх досліджень та знаходження нової асимптотики для випадку ORV поведінки часткових сум. Сформульована і самостійно доведена теорема 3, яка є узагальненням асимптотики, що була отримана у попередніх теоретичних дослідженнях:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n)}{\ln n} = \tau \frac{C - 1}{C \ln C} \text{ м.н.}$$

У першому розділі наведено головні теоретичні відомості у стислому вигляді, чого буде достатньо для розуміння стану теорії рекордів. Зазначені головні результати попередніх дослідників. Аргументовано основний інструментарій, на якому буде базуватися подальша робота над дисертацією.

Другий розділ присвячений власним дослідженням. В ньому спочатку надаються власні альтернативні доведення вже відомих фактів, які згодом дозволяють по новому підійти до знаходження важливих прикладів поведінки часткових сум F^α -схеми. Тут сформульовано і доведено основний результат дисертації.

У третьому розділі наведена теорія реалізується на практиці за допомогою комп'ютерного моделювання. Описані основні проблеми, що виникають у дослідженні неперервних функцій на дискретному пристрої. Наведені наочні результати, які додатково ілюструють правильність строго доведених у дисертації теорем.

Abstract

Master's thesis: 41 pages, 12 primary sources, 9 illustrations, 14 slides presentations. This work consists of an introduction, three main sections, conclusions and application code listing.

The dissertation aims to explore records for a sequence of continuous random variables. Namely, to find new possibilities for calculating the asymptotics of the number of records within the F^α -scheme. The basic source for research will be the works of several authors, including my supervisor, these are the works of [1, 2, 3]. The first variants of the F^α -scheme were studied in the work of Yang [4], and later strongly generalized by Nevzorov [5] and other authors.

The object of study will be the asymptotics of random sums, for which we have some information about the distributions at infinity. One of such information is the functional behavior of partial sums of exponents from the F^α -scheme. The classical result of the asymptotics was proved by Renyi [6]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n)}{\ln n} = 1 \text{ a.s.}$$

Here $\mu(n)$ denotes the number of records up to and including n . The modern representation can be considered, for example, in [7]. Based on this, a program for modeling record sequences will be developed, tested, and then its work on new cases from the dissertation will be illustrated.

One of the tools for finding asymptotics will be the strengthened law of large numbers Kolmogorov. The dissertation will focus on functions from the ORV class (see [8, 9, 3]). The result of the dissertation is a generalization of previous research and finding new asymptotics for the case of ORV behavior of partial sums. The theorem 3 is formulated and independently proved, which is a generalization of the asymptotics obtained in previous theoretical studies:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n)}{\ln n} = \tau \frac{C - 1}{C \ln C} \text{ a.s.}$$

The first section presents the main theoretical information in a concise form, which will be enough to understand the state of record theory. The main results of previous researchers are indicated. The main tools on which further work on the dissertation will be based are argued.

The second section is devoted to own research. It first provides its own alternative proofs of already known facts, which later allow a new approach to finding important examples of the behavior of partial sums of the F^α -scheme. Here the main result of the dissertation is formulated and proved.

In the third section the given theory is realized in practice by means of computer modeling. The main problems that arise in the study of continuous functions on a discrete device are described. Visual results are given, which additionally illustrate the correctness of the theorems strictly proved in the dissertation.

Зміст

Вступ	9
Розділ 1. Теоретичні відомості	11
1.1. Класичний випадок	11
1.2. F^α -схема	12
1.3. Відомі асимптотики для кількості рекордів	13
1.4. Висновки	14
Розділ 2. Власні дослідження	15
2.1. Загальні встановлені факти	15
2.2. ORV випадок	17
2.3. Асимптотика ORV випадку	22
2.4. Висновки	28
Розділ 3. Моделювання та перевірка результатів	29
3.1. Техніка моделювання	29
3.2. Степеневе зростання	31
3.3. ORV випадок	34
3.4. Висновки	36
Висновки	37
Бібліографія	38
Додатки	39

Вступ

Теорія рекордів є відносно молодою наукою, що базується на досягненнях сучасної теорії ймовірностей. В ній природним чином ставляться запитання щодо екстремальних значень, кількості рекордів, їх нескінченності або скінченності. У загальному випадку відповіді на ці питання поки не надано. Точніше кажучи існує багато теорем і результатів теорії ймовірностей, які допоможуть дати ці відповіді, але, поки що лише у частинних випадках. Це говорить про невичерпний потенціал досліджень у цій галузі. Дана робота буде присвячена кількості рекордів. А саме оцінці асимптотики зростання кількості рекордів, коли їх нескінченно багато. Протягом роботи знадобиться оперувати наступними об'єктами.

Нехай $\{X_k, k \geq 1\}$ — послідовність незалежних випадкових величин з неперервними функціями розподілу F_k .

Для даної послідовності $\{X_k\}$, як і будь-де у роботі, визначимо поняття моменту n -го рекорду $L(n)$ та кількості рекордів $\mu(n)$ до моменту n включно. Покладемо $L(1) = 1$ та

$$L(n) := \inf\{k > L(n-1) : X_k > X_{L(n-1)}\}, \quad (1)$$

$$\mu(n) := \#\{k : L(k) \leq n\}, \quad (2)$$

$$A_n := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n. \quad (3)$$

Саме поведінка суми A_n стане ключовою у визначенні асимптотики $\mu(n)$. Спочатку буде розглянуто класичну схему, коли всі випадкові величини мають однакові розподіли та незалежні. Якщо ми відмовимось від умови незалежності, то будемо мати непередбачувані наслідки, тому далі величинам буде відмовлено в однакових розподілах. Проте, мати зовсім різні розподіли означає непередбачуваність поведінки на нескінченності, тому основним предметом досліджень буде

F^α -схема розподілів, що дозволяє звести їх різноманіття до визначення послідовності додатних чисел. Разом з тим буде збережено ще низка властивостей, що дозволить досліджувати асимптотику. Поставлено за мету узагальнити вже відомі випадки, надати нові асимптотичні результати та перевірити їх за допомогою комп'ютерного моделювання. Робота складається з трьох частин. У першому розділі буде розглянуто необхідні нам результати попередніх дослідників. Друга частина буде складати мою самостійну роботу та основні результати досліджень. Третій розділ надасть роботі сучасності, та за допомогою наочних результатів буде продемонстрована поведінка кількості рекордів на довгих інтервалах.

Розділ 1

Теоретичні відомості

1.1. Класичний випадок

Маємо $\{X_k, k \geq 1\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з неперервною функцією розподілу F . Цей випадок є класичним і для нього майже все відомо.

Також введемо індикатори $I_k = I\{X_k - \text{рекорд}\}$. Відразу маємо:

$$\mu(n) = \sum_{k=1}^n I_k \quad (1.1)$$

Всі наведені далі у цьому підрозділі факти можна знайти, наприклад, у роботі Невзорова[5].

1. $\{I_k, k \geq 1\}$ - незалежні в сукупності. Це є дуже суттєвим фактом, який дозволить досліджувати асимптотику.
2. $P(I_k = 1) = \frac{1}{k}, k \geq 1$.
3. $\mu(n) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ - рекордів нескінченно багато.

Окрім кількості рекордів у теорії розглядаються й інші питання, такі як розподіл максимального значення, асимптотика моментів $L(n)$ та ін.

Навіть класична схема дає нетривіальні результати та може бути використана на практиці. Для цього необхідно проробити багато роботи над функцією розподілу. Правильно оцінити її параметри і тип, розбиратися у доцільності застосування підходу до залежних величин.

1.2. F^α -схема

Нехай знову $\{X_k, k \geq 1\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, $\alpha = \{\alpha_k, k \geq 1\}$ — додатні дійсні числа, F — неперервна функція розподілу. Припустимо, що розподіли випадкових величин X_k такі, що:

$$F_{X_k}(x) = (F(x))^{\alpha_k}. \quad (1.2)$$

Така послідовність випадкових величин називається F^α -схемою.

Узагальнюючи результати Реньї[6], Невзоров [5] довів збереження важливих властивостей для F^α -схеми.

1. Випадкові величини I_n залишаються незалежними.
2. $P(I_n = 1) = \frac{\alpha_n}{A_n}$
3. $\mu(n) \rightarrow \infty$ тоді, і тільки тоді, коли $A_n \rightarrow \infty$

Більше того, ці властивості є характеристикою саме F^α -схеми. Тобто, маючи незалежність індикаторів і деяку умову на розподіли, повинні існувати α_k .

Для теоретичних обґрунтувань нам знадобиться пройти шляхом роботи [1].

Нехай

$$\xi_k = I_k - \frac{\alpha_k}{A_k}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$$

Легко обрахувати:

$$E\xi_k = 0$$

$$\text{var}[\xi_k] = \text{var}[I_k] = \frac{\alpha_k}{A_k} \left(1 - \frac{\alpha_k}{A_k}\right)$$

1.3. Відомі асимптотики для кількості рекордів

Реньї [6] довів, що у класичному випадку:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n)}{\ln n} = 1 \text{ м.н.} \quad (1.3)$$

Поки результати для розподілів F^α -схеми були вивчені в деталях (наприклад Невзоров [5]), збіжності майже напевно було приділено небагато уваги. Наведемо деякі відомі результати. Ballerini and Resnick [10] розглянули випадок $\alpha_n = \lfloor \lambda^{n-1} + 1/2 \rfloor$, $\lambda > 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n)}{n} = 1 - \lambda^{-1} \text{ м.н.}$$

Weismann[11] дослідив F^α -схему з умовами, для яких:

$$A_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty; \max(\alpha_k : 1 \leq k \leq n) = o(A_n), n \rightarrow \infty$$

І отримав результат:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n)}{\ln A_n} = 1 \text{ м. н.}$$

Інструмент, яким ми будемо користуватись для знаходження асимптотики, коли $A_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ описаний у роботі [1]. Легко перевірити, що при $A_{n_0} > 1$:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{A_k (\ln A_k)^2} < \infty$$

Це є мажорантою ряду суми дисперсій $\xi_k / \ln A_k$, тому ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\ln A_k}$$

збігається майже напевно, дивіться, наприклад, [12] теорема 22.6.

За лемою Кронекера маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln A_n} \sum_{k=1}^n \xi_k = 0 \text{ м. н.}$$

Підставляючи вираз для ξ_k отримаємо зв'язок між частковими сумами A_n та $\mu(n)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu(n)}{\ln A_n} - \frac{1}{\ln A_n} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{A_k} \right) = 0 \text{ м. н.} \quad (1.4)$$

1.4. Висновки

У даному розділі були розглянуті результати попередніх досліджень на тему дисертації. На цей час маємо найбільш зручну для отримання нових результатів F^α -схему. Для неї існує спосіб, що дозволяє знаходити асимптотику $\mu(n)$ через оцінку асимптотики математичного сподівання $\mu(n)$ для збіжності "майже напевно". Подальша робота буде полягати у розгляді різних випадків поведінки часткових сум A_n .

Широкий огляд літератури дозволив знайти прогалини в знаннях, дізнатися про нові підходи сучасної математики. Конкретно було освоєно невідому раніше тему із знаходження асимптотики розбіжних рядів, розкрито нові зв'язки між різними типами збіжності, засвоєні теореми теорії ймовірностей такі, як підсилений Закон великих чисел Колмогорова, лема Бореля-Кантеллі, теорема про два та три ряди Колмогорова. Все це необхідно було для правильного розуміння робіт попередніх авторів, повного занурення у тонкощі теорії. У розділі наведено достатньо результатів для розширення інструментарію дослідження асимптотики кількості рекордів.

Розділ 2

Власні дослідження

2.1. Загальні встановлені факти

У даному підрозділі буде наведено деяку пророблену роботу, що допомогла зануритися у тему дисертації та зрозуміти основні аспекти теорії рекордів та поведінки часткових сум.

Теорема 1.

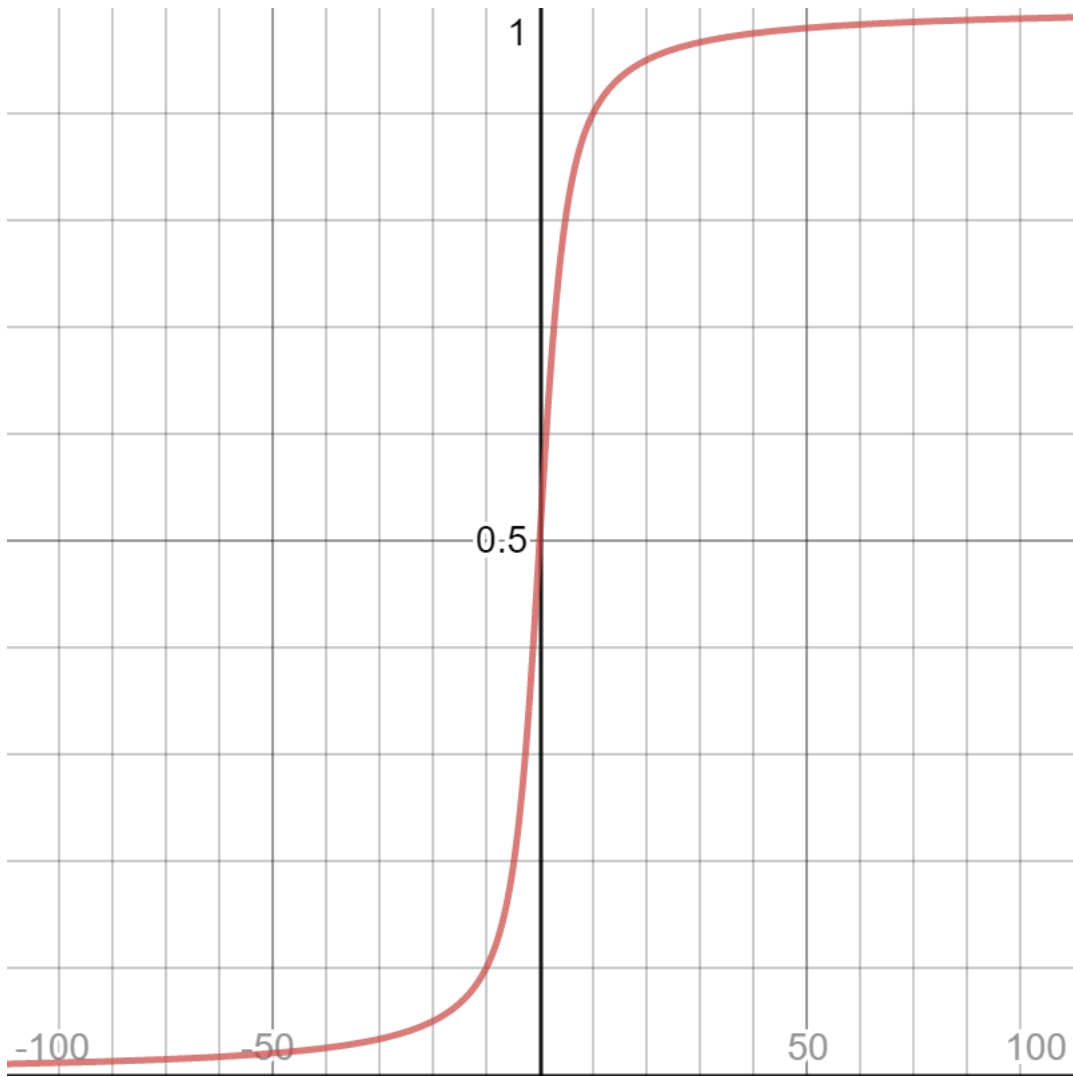
$\forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, a_k \geq 0, b_k \geq 0, 0 \leq p_k \leq 1 :$

$$\begin{aligned} & \ln \prod_{k=1}^n (1 + p_k) \leq \\ & \leq \ln \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{p_k}{p_k G(p_k + a_k) + 1 - p_k} \right) \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n p_k \leq \\ & \leq \ln \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{p_k}{p_k G(p_k - b_k) + 1 - p_k} \right) \leq \\ & \leq \ln \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{p_k}{1 - p_k} \right) \\ & \frac{1}{0} = \infty, G(0) = \frac{1}{2}, G(x) = \frac{1}{\exp(x) - 1} - \frac{1}{x} + 1, x \neq 0 \end{aligned}$$

Доведення. Доведення немає сенсу розглядати у деталях. Все базується на простій рівності

$$\sum_{k=1}^n p_k = \ln \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{p_k}{p_k G(p_k) + 1 - p_k} \right)$$

Це перевіряється безпосередньо підстановкою. Надалі помітимо монотонність функції G , яку можна строго довести, але для наочності наведемо її графік.



Далі за монотонністю усіх включених у нерівності функцій отримуємо, змінюючи аргумент $G(x)$, всі нерівності. □

Наслідок. Оцінка зверху для будь-якої F^α -схеми. При $p_k = \frac{\alpha_k}{A_k}$:

$$\sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{A_k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{\alpha_k}{A_k} \leq$$

за теоремою при $\frac{\alpha_k}{A_k} < 1, k \geq 2$

$$\leq 1 + \ln \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{\frac{\alpha_k}{A_k}}{1 - \frac{\alpha_k}{A_k}} \right) = 1 + \ln \prod_{k=2}^n \left(\frac{A_k}{A_{k-1}} \right) = 1 + \ln \left(\frac{A_n}{A_1} \right)$$

2.2. ORV випадок

Подальше узагальнення отримано для іншого обмеження на суми. ORV - O Regularly Varying означається наступним чином.

Означення. Вимірна функція $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, належить до класу ORV, якщо

$$\forall c > 0 : \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(ct)}{f(t)} < \infty.$$

Першим такі функції розглядав Авакумович[8]. Ширша теорія була розроблена Сенетою[9], а потім Булдігіним із співавторами [3].

Враховуючи специфіку A_n (монотонність), будемо накладати наступні умови, за яких вона буде належати до ORV

$$\tau > 0, C_2 \geq C_1 > 0$$

$$C_1 n^\tau \leq A_n \leq C_2 n^\tau$$

Такий характер зміни будемо також називати ORV [3].

Зауваження. Без втрати загальності достатньо розглянути

$$C_1 = 1, C_2 = C \geq 1$$

$$n^\tau \leq A_n \leq C n^\tau$$

Доведення.

$$C_1 n^\tau \leq A_n \leq C_2 n^\tau \Leftrightarrow n^\tau \leq \frac{A_n}{C_1} \leq \frac{C_2}{C_1} n^\tau$$

Перепозначивши

$$\frac{A_n}{C_1} \mapsto A_n, \frac{C_2}{C_1} \mapsto C \geq 1$$

Отримуємо

$$n^\tau \leq A_n \leq C n^\tau, C \geq 1$$

Загальні схеми отримуються множенням на C_1 .

□

Теорема 2. (Приклад, що досягає обох рівнів нескінченно часто)

Нехай: $\tau > 0; C \geq 1; \beta_0 = 0; \beta_k = 2 + \left[C^{\frac{1}{\tau}} \beta_{k-1} \right], k \geq 1.$

$$\alpha_i = \begin{cases} C(\beta_k)^\tau - (\beta_k - 1)^\tau & , i = \beta_k \\ \frac{(\beta_k - 1)^\tau - C(\beta_{k-1})^\tau}{\beta_k - \beta_{k-1} - 1} & , \beta_{k-1} < i < \beta_k \end{cases}, i \geq 1. \quad (2.1)$$

Тоді:

$$\alpha_i > 0, i \geq 1$$

$$n^\tau \leq A_n \leq Cn^\tau, n \geq 1$$

$$A_{\beta_{k-1}} = (\beta_k - 1)^\tau, A_{\beta_k} = C(\beta_k)^\tau, k \geq 1$$

Доведення.

Пункт 0 (Відомості про послідовність β_k):

$$\tau > 0; C \geq 1; \beta_0 = 0; \beta_k = 2 + \left[C^{\frac{1}{\tau}} \beta_{k-1} \right], k \geq 1.$$

$$\beta_k \in \mathbb{N}, k \geq 1$$

$$\beta_1 = 2$$

$$\beta_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$$

$$\beta_k - \beta_{k-1} - 1 \geq 1, k \geq 1$$

Перші факти є очевидними, останній доведемо:

$$\beta_k = 2 + \left[C^{\frac{1}{\tau}} \beta_{k-1} \right] \geq 2 + [\beta_{k-1}] = 2 + \beta_{k-1}$$

Звідки отримуємо $\beta_k - \beta_{k-1} - 1 \geq 1, k \geq 1.$ Саме $\beta_k - \beta_{k-1} - 1$ є знаменником у формулі для $\alpha_i.$ Як бачимо, він додатний.

Пункт 1 ($\alpha_i > 0, i \geq 1$):

$$\alpha_i = \begin{cases} C(\beta_k)^\tau - (\beta_k - 1)^\tau & , i = \beta_k \\ \frac{(\beta_k - 1)^\tau - C(\beta_{k-1})^\tau}{\beta_k - \beta_{k-1} - 1} & , \beta_{k-1} < i < \beta_k \end{cases} , i \geq 1.$$

$$C(\beta_k)^\tau - (\beta_k - 1)^\tau > 0 \Leftrightarrow C > \left(\frac{\beta_k - 1}{\beta_k} \right)^\tau$$

Нерівність є вірною, оскільки $\beta_k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, тому:

$$\left(\frac{\beta_k - 1}{\beta_k} \right)^\tau = \left(1 - \frac{1}{\beta_k} \right)^\tau < 1 \leq C, k \geq 1$$

$$\frac{(\beta_k - 1)^\tau - C(\beta_{k-1})^\tau}{\beta_k - \beta_{k-1} - 1} > 0 \Leftrightarrow (\beta_k - 1)^\tau - C(\beta_{k-1})^\tau > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left[C^{\frac{1}{\tau}} \beta_{k-1} \right] + 1 \right)^\tau - C(\beta_{k-1})^\tau > 0 \Leftrightarrow \left(\left[C^{\frac{1}{\tau}} \beta_{k-1} \right] + 1 \right)^\tau > C(\beta_{k-1})^\tau.$$

Остання нерівність є вірною. Дійсно:

$$\left(\left[C^{\frac{1}{\tau}} \beta_{k-1} \right] + 1 \right)^\tau > \left(C^{\frac{1}{\tau}} \beta_{k-1} \right)^\tau = C(\beta_{k-1})^\tau.$$

Маємо $\alpha_i > 0, i \geq 1$. Тому вони утворюють коректну F^α -схему. Пункт 1 доведено.

Пункт 2 (Нерівності для часткових сум). Необхідно довести, що:

$$n^\tau \leq A_n \leq Cn^\tau, n \geq 1; A_{\beta_{k-1}} = (\beta_{k-1})^\tau, A_{\beta_k} = C(\beta_k)^\tau, k \geq 1$$

Будемо доводити за індукцією по k , а саме: виконання твердження теореми для всіх $n \leq \beta_k$. Оскільки $\beta_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$, твердження буде вірним для всіх $n \geq 1$.

База індукції: $k = 1$.

Нагадаємо, що $\beta_0 = 0, \beta_1 = 2$, тому безпосередньо маємо:

$$A_1 = \alpha_1 = \frac{(2 - 1)^\tau - C0^\tau}{2 - 0 - 1} = 1^\tau$$

$$A_2 = A_1 + \alpha_2 = 1 + C2^\tau - (2 - 1)^\tau = C2^\tau$$

Підставивши, можемо впевнитись у виконанні тверджень теореми. Нижня та верхня нерівності досягаються вперше.

Крок індукції:

Припустимо, що твердження вірне для $n \leq \beta_{k-1}$, $k \geq 2$.

Доведемо його для $n \leq \beta_k$.

Тобто, залишилось перевірити, що воно вірне для $\beta_{k-1} < n \leq \beta_k$.

З припущення індукції нам знадобиться лише рівність $A_{\beta_{k-1}} = C(\beta_{k-1})^\tau$.

З формули для α_i маємо:

$$\alpha_{\beta_{k-1}+1} = \alpha_{\beta_{k-1}+2} = \dots = \alpha_{\beta_{k-1}} = \frac{(\beta_k - 1)^\tau - C(\beta_{k-1})^\tau}{\beta_k - \beta_{k-1} - 1}$$

$$\alpha_{\beta_k} = C(\beta_k)^\tau - (\beta_k - 1)^\tau$$

Враховуючи, що $\beta_k - 1 = \beta_{k-1} + (\beta_k - \beta_{k-1} - 1)$ та рівність всіх нових доданків, окрім останнього, маємо для $S = 1, 2, \dots, \beta_k - \beta_{k-1} - 1$:

$$A_{\beta_{k-1}+S} = A_{\beta_{k-1}} + \frac{(\beta_k - 1)^\tau - C(\beta_{k-1})^\tau}{\beta_k - \beta_{k-1} - 1} S = C(\beta_{k-1})^\tau + \frac{(\beta_k - 1)^\tau - C(\beta_{k-1})^\tau}{\beta_k - \beta_{k-1} - 1} S$$

Зокрема, для $S = \beta_k - \beta_{k-1} - 1$ на передостанньому доданку ми досягаємо нижньої границі:

$$A_{\beta_{k-1}} = C(\beta_{k-1})^\tau + (\beta_k - 1)^\tau - C(\beta_{k-1})^\tau = (\beta_k - 1)^\tau$$

Також досягаємо верхньої границі на наступному доданку:

$$A_{\beta_k} = A_{\beta_{k-1}} + \alpha_{\beta_k} = (\beta_k - 1)^\tau + C(\beta_k)^\tau - (\beta_k - 1)^\tau = C(\beta_k)^\tau$$

Тож, що для $A_{\beta_{k-1}}, A_{\beta_k}$ нерівність $n^\tau \leq A_n \leq Cn^\tau$ вірна. Залишилось перевірити для $A_{\beta_{k-1}+S}$, $S = 1, 2, \dots, \beta_k - \beta_{k-1} - 2$. Якщо вже маємо $\beta_k - \beta_{k-1} - 2 = 0$, то вже не маємо, що перевіряти, інакше, продовжуємо.

Позначимо $b = \beta_{k-1}$. Тоді $\beta_k = 2 + \left[C^{\frac{1}{\tau}} b \right]$, $\beta_k - \beta_{k-1} - 2 = \left[C^{\frac{1}{\tau}} b \right] - b$.

Підставивши формули для часткових сум та використовуючи позначення, маємо довести нерівності для $S = 1, 2, \dots, \left[C^{\frac{1}{\tau}} b \right] - b$:

$$(b + S)^\tau \leq Cb^\tau + \frac{\left(\left[C^{\frac{1}{\tau}} b \right] + 1 \right)^\tau - Cb^\tau}{\left[C^{\frac{1}{\tau}} b \right] - b + 1} S \leq C(b + S)^\tau$$

Нагадаємо, що $\left(\left[\left[C^{\frac{1}{\tau}}b\right] + 1\right)^{\tau} - Cb^{\tau} > 0$. Доведемо спочатку праву нерівність.

$$\begin{aligned} Cb^{\tau} + \frac{\left(\left[\left[C^{\frac{1}{\tau}}b\right] + 1\right)^{\tau} - Cb^{\tau}\right)S}{\left[\left[C^{\frac{1}{\tau}}b\right] - b + 1\right)} &= Cb^{\tau} + \frac{S}{\left[\left[C^{\frac{1}{\tau}}b\right] - b + 1\right)} \left(\left(\left[\left[C^{\frac{1}{\tau}}b\right] + 1\right)^{\tau} - Cb^{\tau}\right) < \\ &< Cb^{\tau} + \left(\left[\left[C^{\frac{1}{\tau}}b\right] + 1\right)^{\tau} - Cb^{\tau} \leq \left(C^{\frac{1}{\tau}}b + 1\right)^{\tau} \leq \\ &\leq \left(C^{\frac{1}{\tau}}b + C^{\frac{1}{\tau}}\right)^{\tau} = C(b + 1)^{\tau} \leq C(b + S)^{\tau}. \end{aligned}$$

Доведемо ліву нерівність, оцінивши її праву частину.

$$\begin{aligned} Cb^{\tau} + \frac{\left(\left[\left[C^{\frac{1}{\tau}}b\right] + 1\right)^{\tau} - Cb^{\tau}\right)S}{\left[\left[C^{\frac{1}{\tau}}b\right] - b + 1\right)} &> Cb^{\tau} = \left(C^{\frac{1}{\tau}}b\right)^{\tau} \geq \left(\left[\left[C^{\frac{1}{\tau}}b\right]\right)^{\tau} = \\ &= \left(b + \left[\left[C^{\frac{1}{\tau}}b\right] - b\right)\right)^{\tau} \geq (b + S)^{\tau} \end{aligned}$$

Зауважимо, що нерівності є строгими для $S = 1, 2, \dots, \left[\left[C^{\frac{1}{\tau}}b\right] - b$. Пункт 2 доведено.

□

Чому саме цей випадок є найважливішим в ORV-схемі? Якщо ми будемо мати поведінку, що суттєво не досягає верхньої та нижньої меж, то можна буде змінити константи так, щоб досягала. Отже, цей аспект є першим аргументом. Інший полягає в тому, що у цій схемі ми маємо великі показники α поруч із малими. У роботі [1] вже було розглянуто випадки, коли

$$\frac{\alpha_k}{A_k} \rightarrow \lambda \in [0; 1]$$

У цій роботі границі вже не існує і розглянуті раніше випадки стоять поруч в одній схемі.

2.3. Асимптотика ORV випадку

Нагадаємо умову на зростання A_n :

$$C_1 n^\tau \leq A_n \leq C_2 n^\tau$$

для деяких констант $0 < C_1 \leq C_2$ та $\tau > 0$.

Отже, ми намагаємось сформувати F_α схему із таким зростанням часткових сум. Було з'ясовано, що далеко не кожна A_n підходить під F^α - схему. Важливим випадком є $C_1 = C_2 = C$.

$$A_n = C n^\tau$$

Із [1] відомо, що майже напевно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu(n)}{\ln A_n} - \frac{1}{\ln A_n} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{A_k} \right) = 0$$

Підставляючи $A_n = C n^\tau$ у суму отримаємо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{A_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{C n^\tau - C(n-1)^\tau}{C n^\tau} = n - \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)^\tau = \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{\tau}{k} + \sum_{k=2}^n \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1} \tau(\tau-1) \dots (\tau-s+1)}{s!} \left(\frac{1}{k}\right)^s \sim \tau \ln n, n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\ln A_n = \ln C n^\tau \sim \tau \ln n, n \rightarrow \infty$$

Маємо наступний результат:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n)}{\ln n} = \tau \text{ м.н.}$$

Він вже фактично був отриманий у роботі [1]. Слід зауважити, що за теоремою 1 та наслідку з неї ця асимптотика є найбільшою верхньою межею у нерівності. Отже, цей результат було доведено своїм методом.

Теорема 3. Для описаного у теоремі 2 випадку при $C > 1$ маємо асимптотику:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n)}{\ln n} = \tau \frac{C-1}{C \ln C} \text{ м.н.} \quad (2.2)$$

Доведення. Нам знадобиться нагадати формули з теоремі 2.

Нехай: $\tau > 0; C \geq 1; \beta_0 = 0; \beta_k = 2 + \left[C^{\frac{1}{\tau}} \beta_{k-1} \right], k \geq 1$.

$$\alpha_i = \begin{cases} C(\beta_k)^\tau - (\beta_k - 1)^\tau & , i = \beta_k \\ \frac{(\beta_k - 1)^\tau - C(\beta_{k-1})^\tau}{\beta_k - \beta_{k-1} - 1} & , \beta_{k-1} < i < \beta_k \end{cases}, i \geq 1.$$

Як вже зрозуміло із попередніх досліджень оцінка асимптотики $\tau(n)$ еквівалентна оцінці ряду:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{A_k}$$

Нехай $n = \beta_N, N \geq 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{A_k} &= \sum_{k=1}^{\beta_N} \frac{\alpha_k}{A_k} = \sum_{t=1}^N \left(\sum_{k=\beta_{t-1}+1}^{\beta_t-1} \frac{\alpha_k}{A_k} + \frac{\alpha_{\beta_t}}{A_{\beta_t}} \right) = \\ &= \sum_{t=1}^N \left(\frac{(\beta_t - 1)^\tau - C(\beta_{t-1})^\tau}{\beta_t - \beta_{t-1} - 1} \sum_{k=\beta_{t-1}+1}^{\beta_t-1} \frac{1}{A_k} + \frac{\alpha_{\beta_t}}{A_{\beta_t}} \right) \end{aligned}$$

Нагадаємо, що для $S = 1, 2, \dots, \beta_k - \beta_{k-1} - 1$:

$$\begin{aligned} A_{\beta_{k-1}+S} &= A_{\beta_{k-1}} + \frac{(\beta_k - 1)^\tau - C(\beta_{k-1})^\tau}{\beta_k - \beta_{k-1} - 1} S = C(\beta_{k-1})^\tau + \frac{(\beta_k - 1)^\tau - C(\beta_{k-1})^\tau}{\beta_k - \beta_{k-1} - 1} S \\ A_{\beta_k} &= C(\beta_k)^\tau \end{aligned}$$

Оцінюючи $\sum_{k=\beta_{t-1}+1}^{\beta_t-1} \frac{1}{A_k}$ маємо:

$$\begin{aligned} (\beta_t - \beta_{t-1} - 1) \frac{1}{(\beta_t - 1)^\tau} &= (\beta_t - \beta_{t-1} - 1) \frac{1}{A_{\beta_{t-1}}} = \sum_{k=\beta_{t-1}+1}^{\beta_t-1} \frac{1}{A_{\beta_{t-1}}} \leq \sum_{k=\beta_{t-1}+1}^{\beta_t-1} \frac{1}{A_k} \leq \\ &\leq \sum_{k=\beta_{t-1}+1}^{\beta_t-1} \frac{1}{A_{\beta_{t-1}}} = (\beta_t - \beta_{t-1} - 1) \frac{1}{A_{\beta_{t-1}}} = (\beta_t - \beta_{t-1} - 1) \frac{1}{C(\beta_{t-1})^\tau} \end{aligned}$$

Розглянемо член зовнішнього ряду:

$$\frac{(\beta_t - 1)^\tau - C(\beta_{t-1})^\tau}{\beta_t - \beta_{t-1} - 1} \sum_{k=\beta_{t-1}+1}^{\beta_t-1} \frac{1}{A_k} + \frac{\alpha_{\beta_t}}{A_{\beta_t}}$$

Застосовуючи попередні оцінки маємо:

$$1 - C \left(\frac{\beta_{t-1}}{\beta_t - 1} \right)^\tau + \frac{\alpha_{\beta_t}}{A_{\beta_t}} \leq \frac{(\beta_t - 1)^\tau - C(\beta_{t-1})^\tau}{\beta_t - \beta_{t-1} - 1} \sum_{k=\beta_{t-1}+1}^{\beta_t-1} \frac{1}{A_k} + \frac{\alpha_{\beta_t}}{A_{\beta_t}} \leq$$

$$\frac{1}{C} \left(\frac{\beta_t - 1}{\beta_{t-1}} \right)^\tau - 1 + \frac{\alpha_{\beta_t}}{A_{\beta_t}}$$

Використовуючи попередні відомості про послідовність β маємо, що:

$$C \left(\frac{\beta_{t-1}}{\beta_t - 1} \right)^\tau \rightarrow 1, t \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{C} \left(\frac{\beta_t - 1}{\beta_{t-1}} \right)^\tau \rightarrow 1, t \rightarrow \infty$$

Отже,

$$\frac{\alpha_{\beta_t}}{A_{\beta_t}} = \frac{C(\beta_t)^\tau - (\beta_t - 1)^\tau}{C(\beta_t)^\tau} \rightarrow 1 - \frac{1}{C}, t \rightarrow \infty$$

Тому ряд

$$\sum_{t=1}^N \left(\frac{(\beta_t - 1)^\tau - C(\beta_{t-1})^\tau}{\beta_t - \beta_{t-1} - 1} \sum_{k=\beta_{t-1}+1}^{\beta_t-1} \frac{1}{A_k} + \frac{\alpha_{\beta_t}}{A_{\beta_t}} \right) \sim N \left(1 - \frac{1}{C} \right), N \rightarrow \infty$$

Ми отримали асимптотику у термінах N , тепер потрібно повернутись до n .

Для цього будемо досліджувати послідовність β_k .

Щоб закінчити доведення теореми, необхідно встановити, що:

$$N \sim \frac{\tau \ln n}{\ln C}$$

Маємо рівність

$$n = \beta_N$$

Як обернути цю послідовність? Для цього будемо її оцінювати зверху та знизу іншими послідовностями. Спочатку знизу:

$$\beta_0 = 0; \beta_k = 2 + \left[C^{\frac{1}{\tau}} \beta_{k-1} \right], k \geq 1.$$

$$\beta_k = 2 + \left[C^{\frac{1}{\tau}} \beta_{k-1} \right] > 1 + C^{\frac{1}{\tau}} \beta_{k-1}.$$

Тому задамо послідовність β_k^* наступним чином:

$$\beta_0^* = 0; \beta_k^* = 1 + C^{\frac{1}{\tau}} \beta_{k-1}^*, k \geq 1.$$

У послідовностей однакої початкові умови, вони строго монотонні, але на кожному кроці перша послідовність зростає більше і швидше ніж друга, тому

$$\beta_k^* < \beta_k, k \geq 1$$

Аналогічно, оцінку зверху отримаємо із нерівності:

$$\beta_k = 2 + \left[C^{\frac{1}{\tau}} \beta_{k-1} \right] \leq 2 + C^{\frac{1}{\tau}} \beta_{k-1}.$$

Послідовність β_k^{**} задається наступним чином:

$$\beta_0^{**} = 0; \beta_k^{**} = 2 + C^{\frac{1}{\tau}} \beta_{k-1}^{**}, k \geq 1.$$

Неважко помітити зв'язок між β_k^{**} та β_k^* (доведення безпосереднє):

$$\beta_k^{**} = 2\beta_k^*$$

Нарешті, майже закінчити дослідження дозволяє те, що для β_k^* можна отримати замкнуту формулу. Позначимо $C^{1/\tau} = r > 1$.

$$\beta_1^* = 1, \beta_2^* = 1 + r, \beta_3^* = 1 + r(1 + r) = 1 + r + r^2$$

Маємо множення попереднього на r і додавання одиниці. Очевидно, це дає нам суму геометричної прогресії.

$$\beta_k^* = \frac{r^k - 1}{r - 1}, k \geq 1$$

Запишемо нерівності:

$$\beta_k^* < \beta_k \leq \beta_k^{**} = 2\beta_k^*, k \geq 1$$

Існує така послідовність $b_n : 1 < b_k \leq 2, k \geq 1$, що;

$$\beta_k = b_k \beta_k^* = b_k \frac{r^k - 1}{r - 1}$$

Нарешті, маємо:

$$n = \beta_N = b_N \frac{r^N - 1}{r - 1}$$

Виражаючи N звідси, виходить, що

$$N = \frac{1}{\ln r} \ln \left(1 + \frac{r - 1}{b_N} n \right)$$

Поки що нам ще заважає b_N .

$$\ln \left(1 + \frac{r - 1}{2} n \right) \leq \ln \left(1 + \frac{r - 1}{b_N} n \right) \leq \ln \left(1 + \frac{r - 1}{1} n \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{r-1}{2} n \right)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{r-1}{2} / \left(1 + \frac{r-1}{2} n \right)}{1/n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{r-1}{1} n \right)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{r-1}{1} / \left(1 + \frac{r-1}{1} n \right)}{1/n} = 1$$

Тому, за теоремою про три послідовності маємо:

$$\ln \left(1 + \frac{r - 1}{b_N} n \right) \sim \ln n, n \rightarrow \infty$$

Таким чином ми позбавилися b_N і маємо фінальну еквівалентність

$$N \sim \frac{1}{\ln r} \ln n, n \rightarrow \infty.$$

Повертаючись до попередніх позначень і використовуючи асимптотику для ряду маємо:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{A_k} \sim \tau \frac{C - 1}{C \ln C} \ln n, n \rightarrow \infty.$$

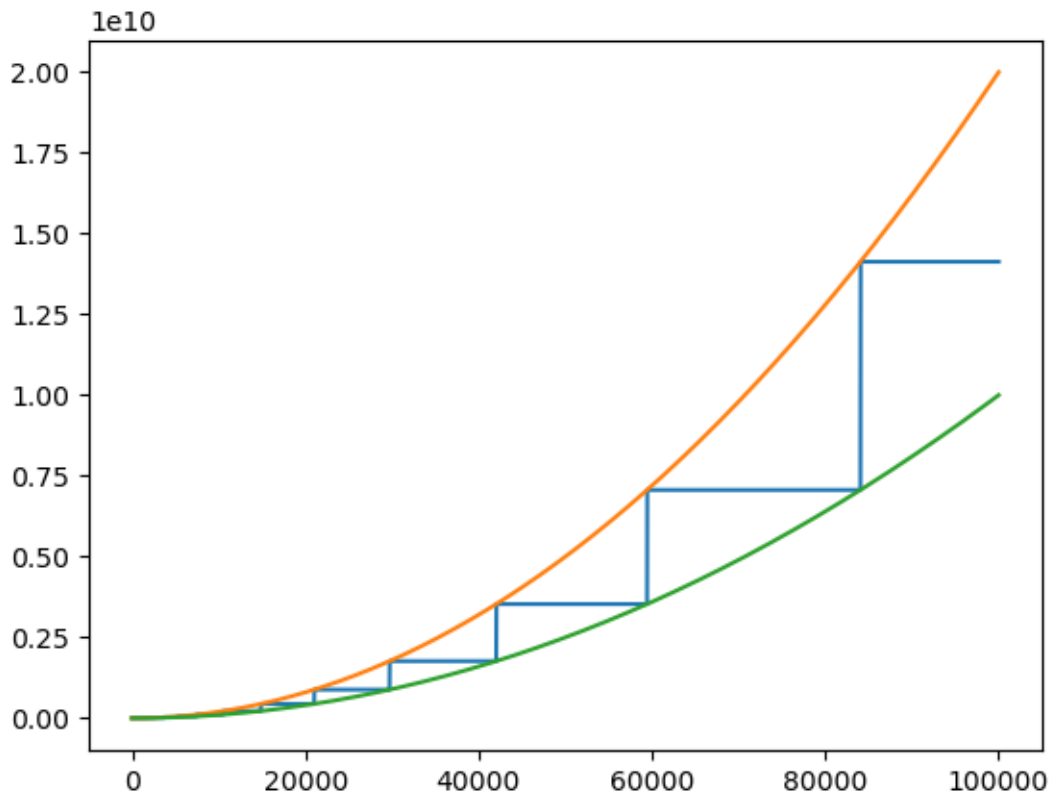
Це доводить (2.2), використовуючи метод із [1]

□

Зауваження. При доведенні оцінок для сум нерівність не коректна для $t = 1$, є ділення на нуль, бо $A_0 = 0$. Але це не впливає на асимптотику. Можна просто виписати перші скінчені члени. Це дуже б спотворило доведення, відволікло б від головного.

Зауваження. Те, що ми позбулися b_N під логарифмом фактично є властивістю SV-функцій. Тож можна було послатися на цей результат. Це також дозволяє зрозуміти, що можна зовсім по іншому визначати послідовність β_k , узагальнювати її, зберігаючи роботу у класі ORV випадку для A_n .

Як підсумок даного розділу наведемо графік ORV з деякими параметрами, щоб зрозуміти, для якого типу функцій було знайдено нову асимптотику. Синій графік нескінченно осцилює між двома рівнями.



2.4. Висновки

Були встановлені оцінки для часткових сум ряду математичного сподівання. Розглянуто ORV випадок. Побудовано конструкцію, яка, нескінченно осцилюючи, є однією з ключових при дослідженні ORV випадку. Для даної конструкції знайдено асимптотику. Результат (2.2) є прямим узагальненням попередніх, оскільки:

$$\lim_{C \rightarrow 1} \frac{C - 1}{C \ln C} = 1$$

Після даного розділу ми маємо змогу проводити експерименти із великою кількістю різних параметрів, завдяки теоремі 2. Окрім того, було проведено багато роботи по пошуку необхідного типу поведінки часткових сум, що узагальнює попередні результати. Виконано допоміжні завдання, застосовано різноманітні техніки при доведенні теорем. Основним результатом є теорема 3, яка є новою для теорії та має потенціал для узагальнень.

Розділ 3

Моделювання та перевірка результатів

3.1. Техніка моделювання

Однією з особливостей і гарних властивостей F^α -схеми є її незалежність від базового розподілу F . Тому перше, що приходить на думку – це взяти у якості базового — рівномірний розподіл U . Щоб згенерувати випадкову величину з розподілу U^{α_k} необхідно скористатись методом оберненої функції. Будемо мати для незалежних рівномірно розподілених u_k :

$$X_k = u_k^{1/\alpha_k} \quad (3.1)$$

Теоретично все є зрозумілим. Послідовно генеруємо випадкові величини та перевіряємо, чи є рекорд. Якщо настав, то додаємо до лічильника μ одиницю, інакше нуль. Далі кожного разу, або в кінці ділимо μ на асимптотику у відповідний момент. Порівнюємо результати: наочно, у середньому, для довших серій рекордів.

Насправді, маємо дуже велику проблему із порівнянням згенерованих значень. Якщо ми уявимо, що α_k можуть бути досить великими, що, власне кажучи, і відбувається в теоремі 2, то $1/\alpha_k$ може перетворитись у машинний нуль!!!

І коли це відбудеться вперше, то буде встановлено абсолютний рекорд, що дорівнює 1, і нових рекордів вже не буде. Та і взагалі при великих показниках будемо втрачати суттєву точність, втім, як і при малих, що може призвести до ділення на машинний нуль. Постає питання, чи маємо ми змогу зменшити чутливість моделювання до великих показників? Які ще проблеми подібного технічного характеру можуть виникнути?

Ця проблема частково вирішується способом описаним далі. Головним інструментом є еквівалентність нерівностей:

$$u_k^{1/\alpha_k} > u_s^{1/\alpha_s} \Leftrightarrow u_k^{\alpha_s} > u_s^{\alpha_k} \quad (3.2)$$

Доведення. Дійсно, функція $g(t) = t^{\alpha_k \alpha_s}$ строго монотонно зростає при $t > 0$.

Тому із $u_k^{1/\alpha_k} > u_s^{1/\alpha_s}$ випливає $g(u_k^{1/\alpha_k}) > g(u_s^{1/\alpha_s})$, тобто $u_k^{\alpha_s} > u_s^{\alpha_k}$.

І навпаки функція $g^{-1}(t) = t^{\frac{1}{\alpha_k \alpha_s}}$ також строго монотонно зростає при $t > 0$.

Тому із $u_k^{\alpha_s} > u_s^{\alpha_k}$ випливає $g^{-1}(u_k^{\alpha_s}) > g^{-1}(u_s^{\alpha_k})$, тобто $u_k^{1/\alpha_k} > u_s^{1/\alpha_s}$. \square

Наче все, маємо вирішену проблему для великих показників. Але постає інше питання. У машини є обмежена мантиса після коми, тому постає проблема відсутності реальної неперервності у розподілі випадкового числа, згенерованого стандартними засобами мови програмування. Ми просто маємо додатну ймовірність повторення випадкового числа при втраті точності. Ця проблема виникає не відразу, але про неї не слід забувати.

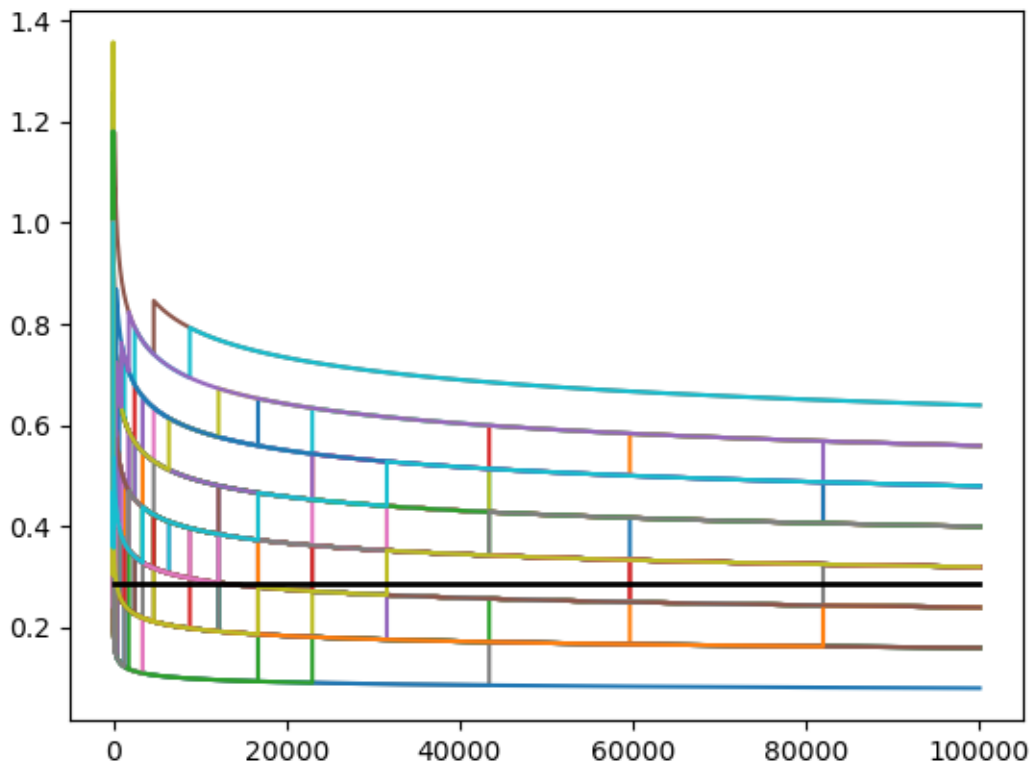
Підбираючи параметри для перевірки теоретичних результатів будемо орієнтуватися на менші за значенням. Щоб повністю позбутися таких аспектів, необхідно забезпечити динамічну точність для випадкового числа, тобто генерувати його так точно, щоб можна було з абсолютною впевненістю встановити знак у (3.2). Це занадто ускладнює програму та забирає багато часу на обрахунки, тому лістинг наведеної у додатках програми не включає це виправлення. У кінці досліджень буде наведено приклади, коли ми стикаємось із проблемою другого типу, і до чого це призводить.

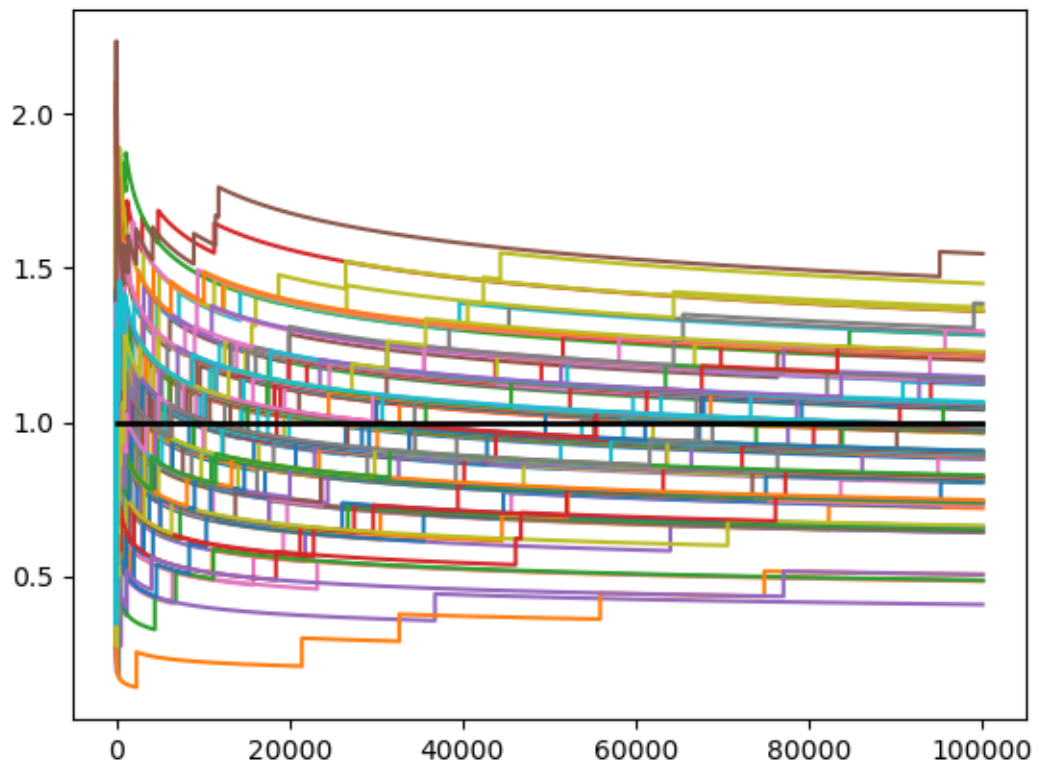
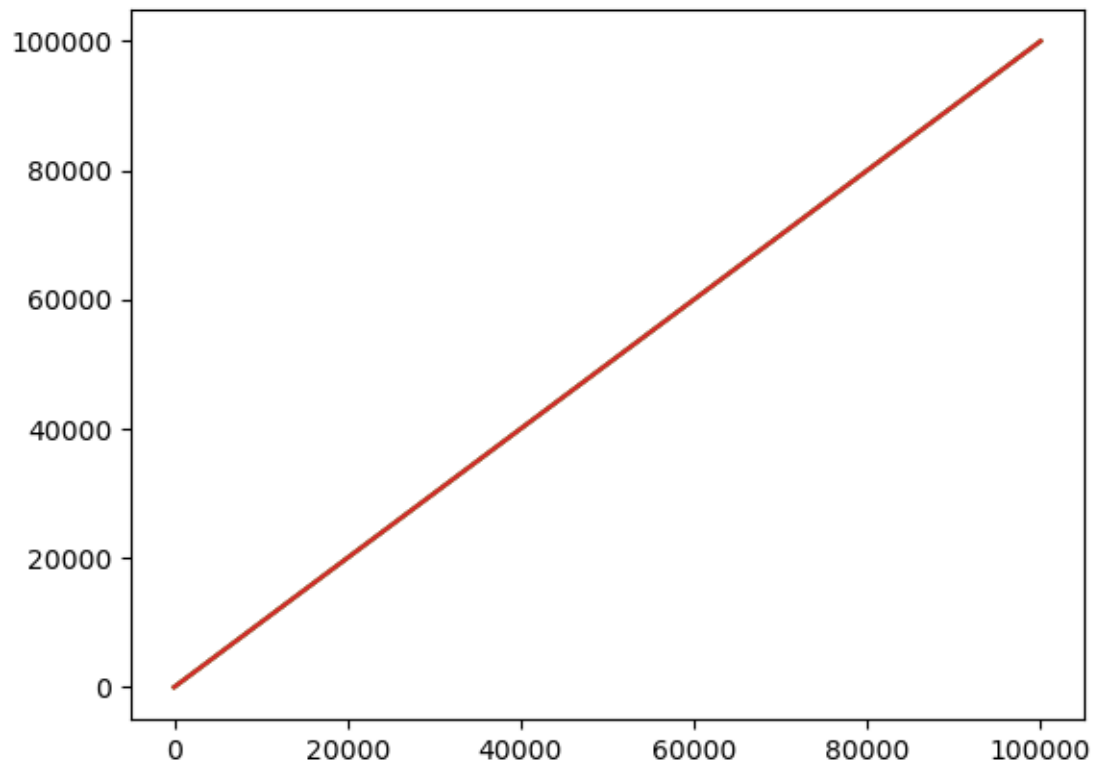
Звичайно, займаючись моделюванням, ми не маємо права підганяти результати, або шукати гарні параметри. Єдине, що можна робити, це пояснити розбіжності. Проблема більше належить до роботи з програмування, тому надалі наведені саме математичні висновки, для параметрів, що дозволяють їх робити.

3.2. Степеневе зростання

Спочатку промодельюємо і розглянемо вже відомі результати. Ми з'ясуємо, як саме поводить себе кількість рекордів у класичному випадку та коли $A_n = n^\tau$. Ми будемо спостерігати за відношенням кількості рекордів до асимптотики. Горизонтальна лінія є константою з теоретичного результату. По вісі абсцис відкладено кількість взятих випадкових величин. Нарешті, різним кольором позначено різні траєкторії. Усього їх 100 на кожному з графіків.

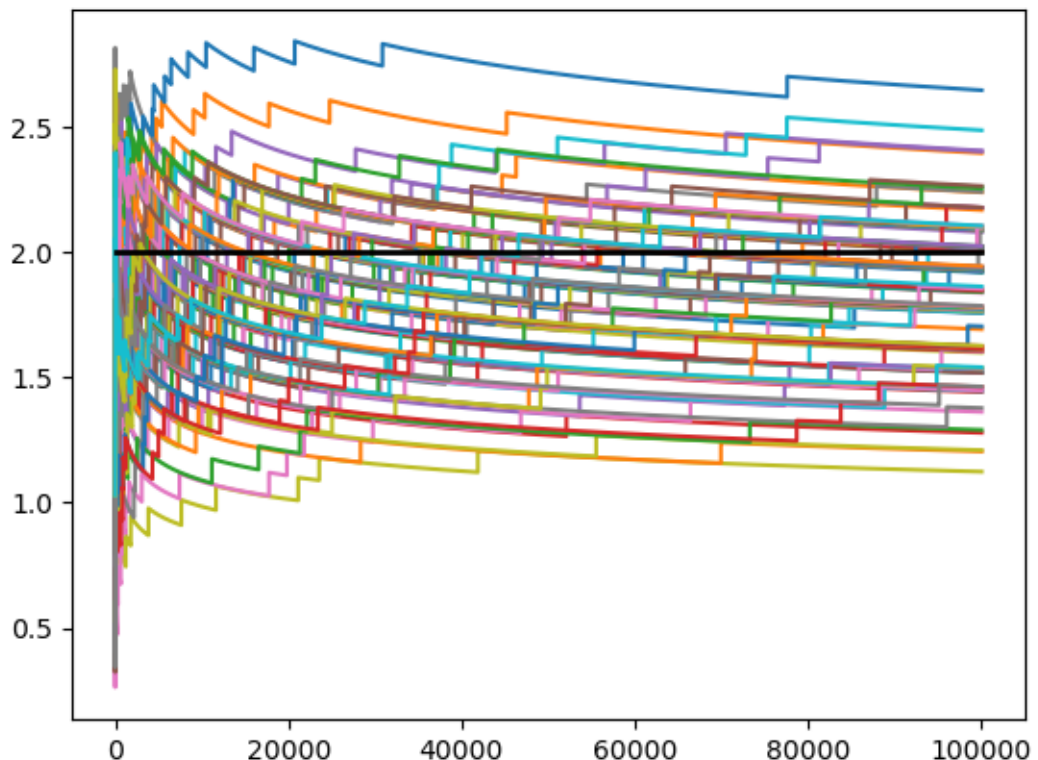
Враховуючи дискретність $\mu(n)$ при моделюванні різні траєкторії будуть збігатись. Тому кожна нова траєкторія має невелике зміщення. На рисунку наведена ця проблема збігання траєкторій. Мало що можна з такого зрозуміти, тому на наступних рисунках траєкторії будуть зміщені одна відносно одної. Чорною лінією завжди буде позначено константу, до якої повинно прямувати асимптотичне відношення майже напевно.





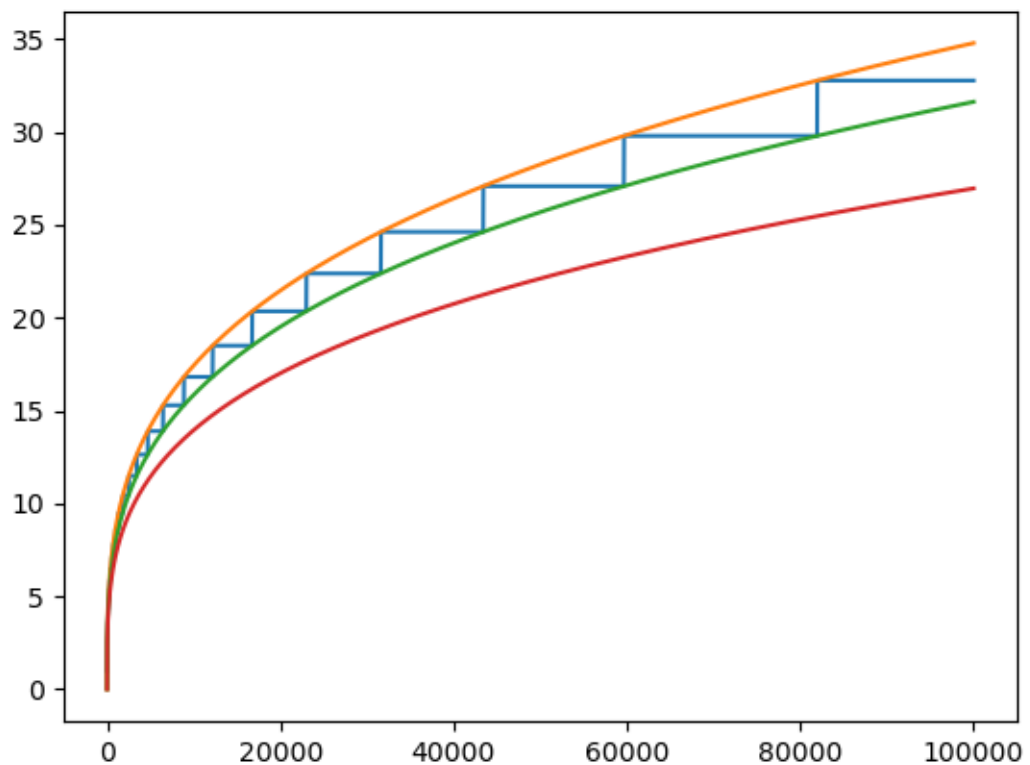
Ми будемо діяти наступним чином. На одній сторінці верхній графік буде зображати поведінку часткових сум A_n . Нижній графік — це пучок траєкторій, що являє собою відношення $\mu(n)$ до логарифма, тобто вираз під границею (2.2) з теореми 3. Чорна лінія буде позначати константу з правої частини (2.2). Докладно прокоментуємо перший класичний результат, наведений на попередній сторінці. Завдяки зміщенню ми можемо бачити, скільки траєкторій є ближчими до одиниці, а які ще не достатньо наблизилися. Стрибки, що ми бачимо є моментами коли на траєкторії відбувся рекорд. Якщо ми нижче асимптотики, то стрибки є інструментом для повернення вгору. Зауважу, рекордів нескінченно багато. І навпаки, спочатку велика кількість рекордів може надовго залишити траєкторію вище. Бачимо, що навіть в перевіреному класичному результаті деякі траєкторії дуже повільно прямують до асимптотики.

Також проілюструємо звичайне степеневе зростання $\tau = 2, C = 1$. Тут ми спостерігаємо сильно просаджені вниз траєкторії саме тому, що машинної точності не вистачає для фіксації рекордів з великими τ :

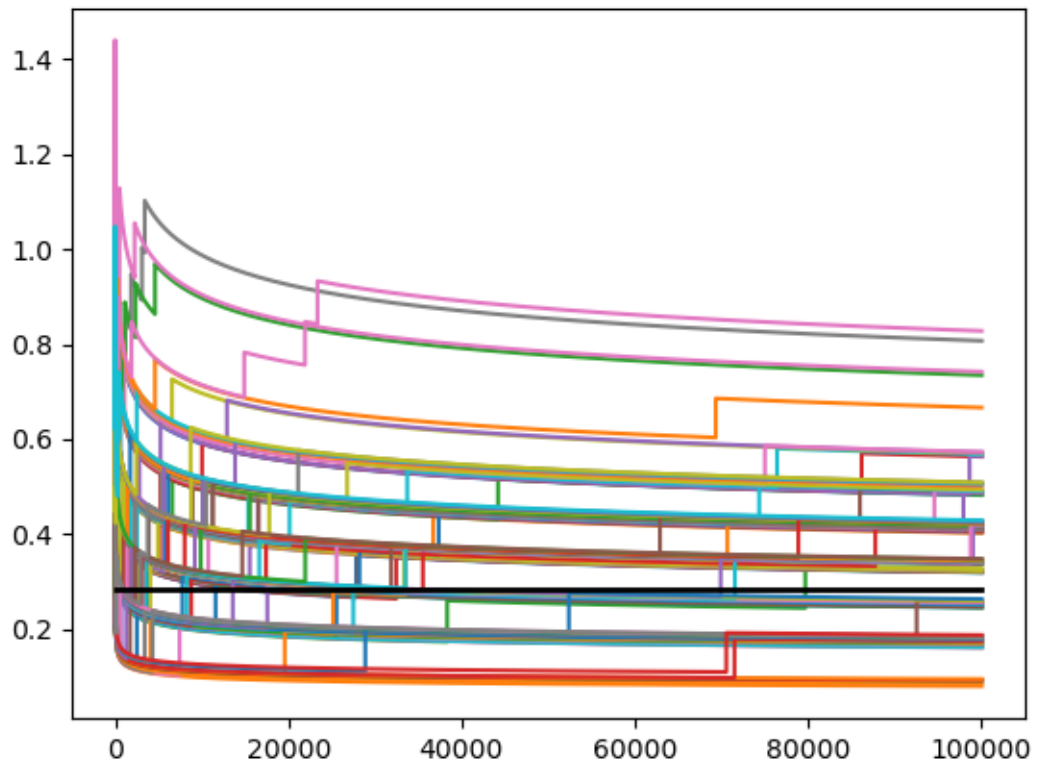
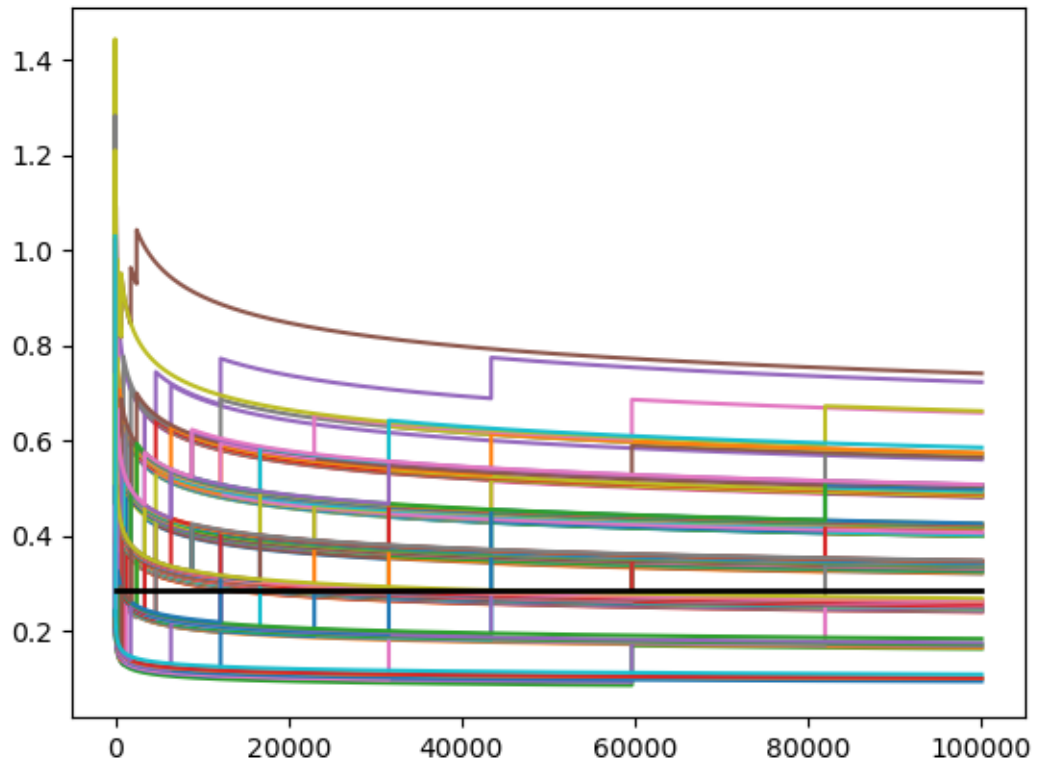


3.3. ORV випадок

ORV випадок будемо розглядати у парі з асимптотично еквівалентним йому звичайним степеневим. Спочатку на рисунку наведено графік A_n для ORV з параметрами $\tau = 0.3, C = 1.1$. Це верхній синій графік, що осцилює, демонструючи ORV поведінку. Червоний графік є звичайним степеневим зростанням з параметрами $\tau = 0.3 \frac{1.1 - 1}{1.1 \ln 1.1} \simeq 0.286, C = 1$.



На наступній сторінці зверху ми бачимо реалізацію прикладу з теореми 2. Його характерною особливістю є одночасне настання рекордів у різних реалізацій, оскільки у цих точках ми маємо сплески показників у F^α -схемі. Нижній рисунок показує більш хаотичний розподіл для моментів рекордів. Що і відрізняє його від першого. Однак теоретично і практично ми бачимо для них однакову асимптотику при різній поведінці. Переходячи до аналогій, вище ми маємо модель революційних рекордів зі сплесками α_k та нижче більш гладку еволюційну з поступовим зростанням показників у F^α -схемі.



3.4. Висновки

Головним результатом розділу є підтвердження теоретичних обрахунків. Я стикнувся з проблемами моделювання і вирішив головні з них. Наведені моделі відповідають адекватному описанню рекордів і показують, яким чином кількість рекордів асимптотично прямує до нескінченності. Головним висновком є підтвердження нових результатів, а також адекватна поведінка програми для класичних випадків. Робота над розділом розвила навички програмування та розуміння обчислювальної архітектури комп'ютера. Також я вважаю, що креативним рішенням було змістити траєкторії одна відносно однієї, що дало змогу отримати наочні результати, замість тих що повністю зливаються, хоча і правильних математично. Моделювання дозволило нам зрозуміти, що кількість встановлених рекордів може бути однаковою, а характер їх очікування і моменти зовсім різними.

Висновки

У фінальному висновку я хочу зосередити увагу на тому, як я оцінюю пророблену мною роботу. Я вважаю, що виконав всі основні завдання поставлені переді мною науковим керівником. Було опрацьовано багато спеціалізованої літератури. Її опрацювання велося не тільки в ознайомчому плані, але і в самостійному доведенні результатів. Такий підхід дозволив сформулювати та довести власні теореми, узагальнити результати та бути впевненим у їх новітності. Робота над дисертацією дозволила мені розпочати мою наукову діяльність у сфері теорії рекордів. Я збираюсь продовжити досліджувати тематику у подальшому навчанні на Ph.D. Головним результатом дисертації вважаю теорему 3 про асимптотику. Думаю, що зможу її узагальнити в майбутньому та закрити питання з ORV випадком повністю. Головне, що поставлені задачі були виконані, і був досягнутий новий результат.

Бібліографія

1. P. Doukhan, O. I. Klesov, and J. G. Steinebach. Strong laws of large numbers in an $f\alpha$ -scheme. *Mathematical Statistics and Limit Theorems, Festschrift in Honour of Paul Deheuvels (Eds.: M. Hallin, D.M. Mason, D. Pfeifer, J.G. Steinebach)*, pages 287–303, 2015.
2. P. Doukhan, O. I. Klesov, A. Pakes, and J. G. Steinebach. Limit theorems for record counts and times in the $f\alpha$ -scheme. *Extremes*, page 147–171, 1987.
3. V. V. Buldygin, K.-H. Indlekofer, O. I. Klesov, and J. G. Steinebach. *Pseudo-Regularly Varying Functions and Generalized Renewal Processes*. Springer, Berlin, 2018.
4. M. Yang. On the distribution of the inter-record times in an increasing population. *Journal of Applied Probability*, 12, page 148–154, 1975.
5. V. B. Nevzorov. *Records: Mathematical theory*. American Mathematical Society, New York, 2001.
6. A. Rényi. Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations. *Annals Faculty Science University Clermont-Ferrand*, page 7–12, 1962.
7. A. Gut. *Probability: A graduate course*. Springer, New York, 2005.
8. V.G. Avakumovi'c. Über einen o-inversionssatz. *Bull. Int. Acad. Youg. Sci.* 29–30, page 107–117, 1936.
9. E. Seneta. *Regularly Varying Functions*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
10. R. Ballerini and S. I. Resnick. Embedding sequences of successive maxima in extremal processes with applications. *Journal of Applied Probability*, page 827–837, 1987.
11. I. Weissman. Records from a power model of independent observations. *Journal of Applied Probability*, 32(4), page 982–990, 1995.
12. P. Billingsley. *Probability and measure (3rd ed.)*. Wiley, New York, 1995.

Додатки

Лістинг коду програми

```

import functools
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
offset = 0.0003
C = 1.1
T = 0.3
coeff = (C - 1) / C / np.log(C) * T if C > 1 else T
@functools.lru_cache(maxsize=None)
def beta(k):
    if k > 0:
        return 2 + int(C ** (1 / T) * beta(k - 1))
    else:
        return 0
n = 100000
alpha = []
k_start = 1
for i in range(1, n + 1):
    k = k_start
    while True:
        if beta(k) > i:
            alpha.append(((beta(k) - 1) ** T - C * beta(k - 1) ** T) /
                (beta(k) - beta(k - 1) - 1))
            k_start = k
        break
    elif beta(k) == i:

```

```

alpha.append(C * i ** T - (i - 1) ** T)
k_start = k + 1
break
else :
k+=1
for i in range(100):
print(i + 1)
res = []
A = 0
mu = 0
rec = 0
recal = 1
for k, al in enumerate(alpha):
ksi = np.random.uniform()
if ksi ** recal > rec ** al:
rec = ksi
recal = al
mu+=1

res.append(i * offset + mu / (1 + np.log(k + 1)))
plt.plot(range(1, len(res) + 1), res)
plt.plot((1, len(res)), (coeff, coeff),
linewidth = 2, color = (0,0,0))
plt.show(block = False)

A = np.cumsum(alpha)
plt.figure(2)
plt.plot(range(1, len(A) + 1), A)

```



```
ls = np.linspace(0,n, 100*n+1)
plt.plot(ls,[C*x**T for x in ls])
plt.plot(ls,[x**T for x in ls])
plt.plot(ls,[x**coeff for x in ls])
plt.show()
```