

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

« » травня 2020 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 111 Математика

**на тему: «Поверхні максимумів спектральних щільностей
випадкових шумів та їх застосування у регресійному аналізі»**

Виконала:

студентка VI курсу, групи ОМ-81мн
Лиховид Світлана Павлівна



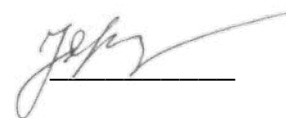
Керівник:

проф., д. ф.-м. н., проф.
Іванов Олександр Володимирович



Рецензент:

Професор кафедри дослідження операцій
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
д.ф.-м.н., с.н.с.
Мацак Іван Каленикович



Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.

Студентка _____

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

« » травня 2020 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Лиховид Світлані Павлівні

1. Тема дисертації «Поверхні максимумів спектральних щільностей випадкових шумів та їх застосування у регресійному аналізі», науковий керівник дисертації Іванов Олександр Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор,

затверджені наказом по університету від « 17 » березня 2020 р. № 891-с.

2. Термін подання студентом дисертації 11 травня 2020 р.

3. Об'єкт дослідження регресійні моделі з дискретним на неперервним часом спостереження.

4. Предмет дослідження поверхні максимумів спектральних щільностей $MA(2)$, $ARMA(1,1)$ процесів, та поверхні максимумів спектральних щільностей випадкових процесів, які відповідають коливальному контуру та руху маятника, що рухається у турбулентній рідині.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити

1) побудувати поверхні максимумів спектральних щільностей $MA(2)$ та $ARMA(1,1)$ у випадку дискретного часу спостереження;

2) побудувати поверхні максимумів спектральних щільностей випадкових шумів, які відповідають коливальному контуру та руху маятника, що рухається у турбулентній рідині у випадку неперервного часу спостереження.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу 29 слайдів.





7. Орієнтовний перелік публікацій

1) С. П. Лиховид. Поверхня максимумів спектральних щільностей $MA(2)$ - процесів та великі відхилення оцінки найменших квадратів. // Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”. – Київ. – 2019. – с. 20.

2) С. П. Лиховид. Поверхня максимумів спектральних щільностей $MA(2)$ - процесів. // ІХ Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”. – Київ. – 2020. – с. 12.

8. Дата видачі завдання 3 лютого 2020 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	04.02.2020-17.02.2020	Виконано 
2.	Побудова поверхні максимумів с. щ. $MA(2)$ та $ARMA(1,1)$ у випадку дискретного часу спостереження.	18.02.2020-17.03.2020	Виконано 
3.	Побудова поверхні максимумів с. щ. випадкових шумів, які відповідають коливальному контуру та руху маятника, що рухається у турбулентній рідині у випадку неперервного часу спостереження	18.03.2020-17.04.2020	Виконано 
4.	Оформлення роботи	20.04.2020-08.05.202	Виконано 

Студент



Світлана ЛИХОВИД

Науковий керівник дисертації



Олександр ІВАНОВ

Реферат

Магістерська дисертація: 61 сторінка, 29 слайдів для проектора, 23 першоджерела.

Вивчаються поверхні максимумів спектральних щільностей випадкових шумів та їх застосування у нелінійних моделях регресії.

Мета роботи полягає в отриманні поверхонь максимумів спектральних щільностей $MA(2)$, $ARMA(1, 1)$ процесів у випадку дискретного часу та поверхонь максимумів спектральних щільностей випадкових процесів, що відповідають коливальному контуру та руху маятника у турбулентній рідині у випадку неперервного часу.

Об'єктом дослідження є регресійні моделі з дискретним на неперервним часом спостереження. Предметом дослідження є поверхні максимумів спектральних щільностей $MA(2)$, $ARMA(1,1)$ процесів, та спектральних щільностей випадкових процесів, які відповідають коливальному контуру та руху маятника, що рухається у турбулентній рідині. Завданням роботи є побудова поверхонь максимумів спектральних щільностей вище вказаних випадкових шумів.

Для отримання вказаних результатів викристано складні поняття статистики часових рядів та регресійного аналізу, а саме: великі відхилення оцінки найменших квадратів невідомого параметра нелінійних функцій регресії, сумісно строго субгауссівські випадкові процеси, авторегресійні процеси та процеси ковзного середнього.

Ключові слова: нелінійна модель регресії, випадковий шум, сумісно строго субгауссівський випадковий процес, коваріаційна функція, спектральна щільність, великі відхилення оцінки найменших квадратів, $MA(2)$ -процес, $ARMA(1,1)$ -процес.

Abstract

Master's dissertation: 61 pages, 29 slides for a projector, 23 primary sources.

The surfaces of the maxima of the spectral densities of random noises and their application in nonlinear regression models are studied. The aim of this work is to obtain the surfaces of maxima of the spectral densities of MA(2), ARMA(1,1) of processes in the case of discrete time and the surfaces of maxima of the spectral densities of random processes corresponding to the oscillatory circuit and pendulum motion in a turbulent fluid. The object of the study are regression models with discrete and continuous observation time. The subject of the study are the surfaces of the maxima of the spectral densities of MA (2), ARMA (1,1) processes, and the spectral densities of random processes, corresponding to the oscillatory circuit and the motion of a pendulum in a turbulent fluid. The task of the work is to construct the surfaces of maxima of the spectral densities of the above-mentioned random noises.

To obtain these results, complex concepts of time series statistics and regression analysis were used, namely: large deviations of the least squares estimator of the unknown parameter of nonlinear regression functions, jointly strictly sub-Gaussian random processes, autoregression processes and processes of moving average.

Keywords: nonlinear regression model, random noise, jointly strictly sub-Gaussian random process, covariance function, spectral density, large deviations of the least squares estimate, MA(2) -process, ARMA(1,1) -process.

Зміст

Вступ	7
1 Великі відхилення оцінки найменших квадратів у нелінійних моделях регресії	9
1.1 Випадок дискретного часу спостережень	9
1.1.1 Великі відхилення в присутності сумісно строго субгауссівського шуму	10
1.1.2 Частинні випадки спільно строго субгауссівського шуму	15
1.2 Випадок неперервного часу спостережень	17
1.2.1 Великі відхилення в моделях з сумісно строго субгауссівським шумом	18
1.2.2 Великі відхилення у випадку стаціонарного сумісно строго субгауссівського шуму	23
2 Поверхня максимумів щільності $MA(2)$ - процесу	26
3 Поверхня максимумів щільності $ARMA(1,1)$ - процесу	43
4 Поверхності максимумів щільностей процесів з неперервним часом	48
4.1 Коливальний контур	48
4.2 Рух маятника у турбулентній рідині	54
Висновки	58
Список використаних джерел	59

Вступ

Теорія великих відхилень в математичній статистиці та статистиці випадкових процесів має справу з асимптотичною поведінкою хвостів функцій розподілу параметричних і непараметричних статистичних оцінок. Що стосується параметричних оцінок, то слід звернутися до монографії Ібрагімова і Хасмінського [1], де була отримана експоненціальна швидкість збіжності ймовірностей великих відхилень для оцінки максимальної вірогідності. Цей результат привів до появи великої кількості публікацій на тему великих відхилень статистичних оцінок.

Далі ми будемо говорити про оцінки найменших квадратів (ОНК) для параметрів нелінійної моделі регресії. В роботі Іванова [2] було доведено твердження про степеневу швидкість збіжності ймовірностей великих відхилень ОНК для скалярного параметра в моделі нелінійної регресії з незалежними однаково розподіленими помилками спостережень, які мають моменти скінченного порядку. Пракаса Рао [3] отримав аналогічний результат з експоненціальною швидкістю збіжності в гаусівській нелінійній регресії.

В роботі Сайдерса і Джапарідзе [4] було доведено загальну теорему 2.1 про ймовірності великих відхилень M -оцінок, яка узагальнює згаданий результат у [1] із застосуванням до ОНК параметрів нелінійної регресії з предгаусівськими і субгаусівськими незалежними однаково розподіленими помилками спостережень (див. теореми 3.1 і 3.2 в [5]). Деякі результати в цьому напрямку отримані Івановим [6].

Результати про ймовірності великих відхилень ОНК у моделях нелінійної регресії з корельованими спостереженнями можна знайти в роботах Іванова і Леоненко [7], Пракаса Рао [8], Ху [9], Янга і Ху [10], Хуанга і співавт. [11].

Наша робота складається із 4 розділів.

У 1-му розділі було розглянуто експоненціальні оцінки ймовірностей великих відхилень ОНК для параметра нелінійної регресії в моделях з дискретним часом [12], а для моделей з неперервним часом в роботі [13].

У вказаних роботах [12], [13] в константі експоненти в правій частині оцінки ймовірностей великих відхилень ОНК присутній максимум спектральної щільності(с. щ.) сумісно строго субгауссівського стаціонарного шуму. І тому дуже важливо описати поверхні максимумів с. щ. таких процесів, як функції параметрів від яких, залежать ці с.щ.

У 2-му розділі описано поверхню максимумів с. щ. $MA(2)$ -процесів в області їх оборотності. Аналогічний результат для $AR(2)$ -процесів в області їх стаціонарності було отримано в [14]

У 3-му розділі знайдено поверхню максимумів с. щ. $ARMA(1,1)$ -процесу.

У 4-му розділі отримано поверхні максимумів с. щ., коли стаціонарний строго субгауссівський випадковий шум відповідає коливальному контуру та маятнику, що рухається в турбулентній рідині, якщо на них діє субгауссівський білий шум.

Результати дисертації доповідались на VIII Всеукраїнській науковій конференції з математики та фізики [22] та IX Всеукраїнської конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики [23].

У роботі використано подвійну нумерацію формул: перше число вказує на номер розділу, друге – на номер формули.

1 Великі відхилення оцінки найменших квадратів у нелінійних моделях регресії

1.1 Випадок дискретного часу спостережень

У цьому підрозділі викладені деякі результати роботи [12]

Припустимо, що спостерігається випадкова послідовність

$$X_t = a_t(\theta) + \varepsilon_t, \quad t \geq 1, \quad (1.1)$$

де $a_t(\theta)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q) \in \Theta^c \subset \mathbb{R}^q$, $t \geq 1$ - неперервні функції, істинне значення параметра θ належить відкритій опуклій обмеженій множині Θ , часовий ряд $\varepsilon = \{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$, визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, $E\varepsilon_t = 0$.

Будемо писати $\sum = \sum_{t=1}^n$.

Означення 1. Будь-який випадковий вектор $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_{1T}, \dots, \hat{\theta}_{qT})' \in \Theta^q$, який має властивість

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \min_{\tau \in \Theta^c} Q_T(\tau), \quad Q_T(\tau) = \sum [X_t - a_t(\tau)]^2,$$

називається ОНК невідомого параметра θ , отриманою за спостереженнями $X(t)$, $t = \overline{1, T}$.

При введених вище припущеннях існує хоча б один такий випадковий вектор $\hat{\theta}_T$.

В асимптотичній теорії нелінійної регресії при розгляданні ОНК ми нормуємо різницю $\hat{\theta}_T - \theta$ діагональною матрицею [6, 7]

$$d_T(\theta) = \text{diag}(d_{iT}(\theta), i = \overline{1, q}), \quad d_{iT}^2(\theta) = \sum \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} a_t(\theta) \right)^2.$$

Далі припускається, що функції $a_t(\tau)$, $t \geq 1$, неперервно диференційовні за $\tau \in \Theta$.

1.1.1 Великі відхилення в присутності сумісно строго субгаус-сівського шуму

Наступні поняття можна знайти в [12].

Означення 2. Випадковий вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)' \in \mathbb{Z}^n$ є строго субгаус-сівським, якщо для будь-якого $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)' \in \mathbb{Z}^n$

$$E \exp\{\langle \eta, \Delta \rangle\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2}\langle B\Delta, \Delta \rangle\right\},$$

де $\langle \eta, \Delta \rangle = \sum_{i=1}^n \eta_i \Delta_i$, $B = (B(i, j))_{i, j=1}^n$ є коваріаційною функцією η , тобто $B(i, j) = E\eta_i \eta_j$, $i, j = \overline{1, n}$, $\langle B\Delta, \Delta \rangle = \sum_{i=1}^n B(i, j) \Delta_i \Delta_j$.

Означення 3. Кажуть, що часовий ряд $\varepsilon = \{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ є сумісно строго субгауссівським випадковим процесом, якщо для будь-якого $n \geq 1$ і будь-яких $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$ випадковий вектор $\varepsilon(n) = (\varepsilon_{t_1}, \dots, \varepsilon_{t_n})'$ є строго субгауссівським.

Введемо наступне припущення щодо випадкового шуму ε в моделі (1.1).

N.1.(i) Часовий ряд ε є сумісно строго субгауссівським, $B(t, s) = E\varepsilon_t \varepsilon_s$, $t, s \in \mathbb{Z}$.

(ii) Для будь-якого $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in \mathbb{R}^T$,

$$\langle B\Delta, \Delta \rangle \leq d_0 \|\Delta\|^2 \tag{1.2}$$

для деякої константи $d_0 > 0$, $\|\Delta\| = (\sum \Delta_t^2)^{\frac{1}{2}}$, і $B = (B(t, s))_{t, s=1}^T$.

Для будь-якого T точною мажорантою в (1.2) є

$$\langle B\Delta, \Delta \rangle \leq \lambda_{max}(T) \|\Delta\|,$$

де $\lambda_{max}(T)$ є максимальним власним значенням симетричної додатно напів-визначеної матриці B (норма самосопряженого додатного напіввизначеного оператора B в R^T). Звернемо увагу, що $\lambda_{max}(T)$ є монотонно неспадною числовою послідовністю, тому існує

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lambda_{max}(T) \leq d_0 < \infty.$$

Далі в цьому підрозділі наступне твердження про експоненціальну оцінку хвостів розподілів зважених сум сумісно строго субгауссівських випадкових величин відіграє важливу роль.

$$\text{Нехай } S_T = \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \Delta_t.$$

Лема 1. *За умов N.1*

$$P\{S_T \geq x\} \leq G_T(x), \quad P\{S_T \leq -x\} \leq G_T(x), \quad (1.3)$$

$$P\{|S_T| \geq x\} \leq 2G_T(x), \quad (1.4)$$

$$G_T(x) = \exp\left\{-\frac{x^2}{2d_0\|\Delta\|^2}\right\}. \quad (1.5)$$

Доведення. Доведення очевидне (див., наприклад, [15]). Для будь-яких $x > 0$, $\lambda > 0$ за нерівністю Чебишова-Маркова та (1.2)

$$P\{|S_T| \geq x\} \leq \exp\{-\lambda x\} \cdot \exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}\langle B\Delta, \Delta \rangle\right\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda^2 d_0\|\Delta\|^2 - \lambda x\right\}. \quad (1.6)$$

Мінімізація правої частини (1.6) по λ доводить першу нерівність в (1.3). Доведення другої нерівності в (1.3) аналогічне. Нерівність (1.4) випливає з (1.3). ■

Для формулювання умов на функцію регресії $a_t(\tau)$ у такому вигляді, як в [4] (дивись, також [6] і [7]) нам потрібні деякі позначення. Запишемо $U_T(\theta) = d_T(\theta)(\Theta^c - \theta)$, $\Gamma_{T,\theta,R} = U_T(\theta) \cap \{u : R \leq u \leq R+1\}$,

$u = (u_1, \dots, u_q) \in R^q$ позначимо через \mathbf{G} сім'ю всіх функцій $g = g_T(R)$,

$T \geq 1$, $R > 0$, які мають наступні властивості:

- 1) для будь-якого фіксованого T $g_T(R) \uparrow \infty$, при $R \rightarrow \infty$;
- 2) для будь-якого $r > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty} R^r \exp\{-g_T(R)\} = 0.$$

Нехай $\gamma(R)$, взагалі кажучи, різні поліноми від R з коефіцієнтами, що не залежать від значень T , θ , R , u , v . Позначимо також

$$\Delta_t(u) = a_t(\theta + d_T^{-1}(\theta)u) - a_t(\theta), \quad t = \overline{1, T},$$

$$\Phi_T(u, v) = \sum (\Delta_t(u) - \Delta_t(v))^2, \quad u, v \in U_T(\theta).$$

Припустимо, що існує функція $g \in \mathbf{G}$, константи $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, $\kappa > 0$, $\rho \in (0, 1]$, поліноми $\gamma(R)$ такі, що для достатньо великих T , R (будемо позначати $T > T_0, R > R_0$) виконуються наступні умови.

A.1. (i) Для будь-яких $u, v \in \Gamma_{T, \theta, R} = U_T(\theta)$ таких, що $\|u - v\| \leq \kappa$

$$\Phi_T(u, v) \leq \|u - v\|^{2\rho} \gamma(R). \quad (1.7)$$

(ii) Для будь-якого $u \in \Gamma_{T, \theta, R}$, $\Phi_T(u, 0) \leq \gamma(R)$.

A.2. Для будь-якого $u \in \Gamma_{T, \theta, R}$

$$\Phi_T(u, 0) \geq 2d_0\delta^{-2}g_T(R). \quad (1.8)$$

Теорема 1. За умов **N.1**, **A.1** та **A.2** існують константи B_0, b_0 такі, що для $T > T_0, R > R_0$

$$P\{\|d_T(\theta)(\hat{\theta} - \theta)\| \geq R\} \leq B_0 \exp\{-b_0 g_T(R)\}, \quad (1.9)$$

більше того, для будь-якого $\beta > 0$ константа B_0 може бути обрана таким чином, що

$$b_0 \geq \frac{\rho}{\rho + q} - \beta. \quad (1.10)$$

Доведення. Досить перевірити виконання припущень (M1) і (M2) теореми 2.1 з [4]. Нерівності (1.11) і (1.17), наведені нижче, є цими припущеннями, переформульованими так само, як і при доведенні теореми 3.1 в [4]. Покладемо $S_T(u) = \sum \Delta_t(u)\varepsilon_t$, $\varsigma_T(u) = S_T(u) - \frac{1}{2}\Phi_T(u, 0)$. Дотримуючись доведення теореми 3.1 із [3], ми доведемо, що для будь-яких $m > 0$ і $u, v \in \Gamma_{T, \theta, R}$ виконується нерівність

$$E|\varsigma_T(u) - \varsigma_T(v)|^m \leq \|u - v\|^{\rho m} \gamma(R). \quad (1.11)$$

Маємо

$$E|\varsigma_T(u) - \varsigma_T(v)|^m \leq$$

$$\max(1, 2^{m-1})(E|S_T(u) - S_T(v)|^m + 2^{-m}|\Phi_T(u, 0) - \Phi_T(v, 0)|^m), \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} |\Phi_T(u, 0) - \Phi_T(v, 0)| &\leq \sum |\Delta_t(u) - \Delta_t(v)| \cdot |\Delta_t(u) + \Delta_t(v)| \leq \\ &2^{\frac{1}{2}}\Phi_T^{\frac{1}{2}}(u, v)(\Phi_T^{\frac{1}{2}}(u, 0) + \Phi_T^{\frac{1}{2}}(v, 0)) \leq \\ 2^{\frac{2}{3}}\|u - v\|^{\rho(\gamma(R))\frac{1}{2}}(\gamma(R))^{\frac{1}{2}} &\leq 2^{\frac{1}{2}}\|u - v\|^{\rho(\gamma(R) + \gamma(R))} = \|u - v\|^{\rho\gamma(R)} \end{aligned}$$

відповідно до **A.1** (поліноми $\gamma(R)$ різні!). Таким чином, ми отримали оцінку

$$|\Phi_T(u, 0) - \Phi_T(v, 0)|^m \leq \|u - v\|^{\rho\gamma(R)}. \quad (1.13)$$

З іншого боку, за формулою для моментів невід'ємних випадкових величин (див., наприклад, [16] і пор. з [9]), і застосовуючи лему 1 до

$$\Delta_T = \Delta_T(u) - \Delta_T(v), \quad t = \overline{1, T}, \quad S_T = S_T(u, v) = S_T(u) - S_T(v),$$

$$\begin{aligned} E|S_T(u, v)|^m &\leq m \int_0^\infty x^{m-1} P\{|S_T(u, v)| \geq x\} dx \leq \\ &\leq 2m \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{x^2}{2d_0\Phi_T(u, v)}\right\} dx = \sqrt{2\pi m} d_0^{\frac{m}{2}} \Phi_T^{\frac{m}{2}}(u, v) E|z|^{m-1}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

де z стандартна гауссівська випадкова величина і

$$E|z|^{m-1} = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right), \quad m > 0. \quad (1.15)$$

Співвідношення (1.14) та (1.15) разом із (1.7) дають оцінку

$$E|S_T(u, v)|^m \leq 2^{\frac{m}{2}} m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) d_0^{\frac{m}{2}} \Phi_T^{\frac{m}{2}}(u, v) \leq \|u - v\|^{\rho\gamma(R)}. \quad (1.16)$$

З (1.12), (1.13) та (1.16) випливає (1.11).

Для завершення доведення ми повинні застосувати першу нерівність в (1.3) леми 1 для $\Delta_t = \Delta_t(u)$ і $x = \delta\Phi_T(u, 0)$. Тоді з **A.2** отримуємо

$$P\{S_T(u) \geq \delta\Phi_T(u, 0)\} \leq \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2d_0}\Phi_T(u, 0)\right\} \leq \exp\{-g_T(R)\}. \quad (1.17)$$

Як випливає з (1.11) та (1.17), теорему доведено. ■

Наступну умову і теорему 2 можна розглядати як спрощення умов **A.1**, **A.2**, теореми 1. Теорема 2 узагальнює теорему 3.2 з [4].

А.3. Існують числа $0 < c_0(\theta) < c_1(\theta) < \infty$ такі, що для будь-яких $u, v \in U_T(\theta)$ і $T > T_0$

$$c_0(\theta)\|u - v\|^2 \leq \Phi_T(u, v) \leq c_1(\theta)\|u - v\|^2. \quad (1.18)$$

Умову типу (1.18) було введено в [2] та використано в [3, 4, 9] та інших роботах.

Теорема 2. В умовах **Н.1** і **А.3** існують константи B_0 і b такі, що для $T > T_0$, $R > R_0$

$$P\{\|d_T(\theta)(\hat{\theta}_t - \theta)\| \geq R\} \leq B_0 \exp\{-bR^2\}, \quad (1.19)$$

і, більше того, для будь-якого $\beta > 0$ константа B_0 може бути обрана так, що

$$b \geq \frac{c_0(\theta)}{8d_0(1+q)} - \beta. \quad (1.20)$$

Доведення. Ми перевіримо виконання умов **А.1** та **А.2**. Тоді висновок теореми випливає з теореми 1.

Нерівність (1.7) умови **А.1 (i)** випливає з правої частини нерівності (1.18), якщо візьмемо в (1.7) $\rho = 1$, $\gamma(R) = c_1(\theta)$. Нерівність умови **А.1 (ii)** також випливає з правої частини (1.18), якщо візьмемо $v = 0$, $\gamma(R) = c_0(\theta)(R + 1)^2$.

Для перевірки виконання умови **А.2** перепишемо ліву частину (1.18) для $v = 0$:

$$\Phi_T(u, 0) \geq c_0(\theta)\|u\|^2 \geq 2d_0\delta^{-2} \left(\frac{1}{2}\delta^2 d_0^{-1} c_0(\theta) R^2 \right),$$

що в нерівності (1.8) можна взяти

$$g_T(R) = \frac{1}{2}\delta^2 d_0^{-1} c_0(\theta) R^2.$$

У цьому випадку в (1.9) показник степеня $-b_0 g_T(R) = -b_0 \left(\frac{1}{2}\delta^2 d_0^{-1} c_0(\theta) \right) R^2$. Оскільки тепер в (1.10) $\rho = 1$, то для будь-якого $\beta > 0$ в (1.19) можна обрати

$$b_\delta = \frac{1}{2}\delta^2 d_0^{-1} c_0(\theta) \geq \frac{\delta^2 c_0(\theta)}{2d_0(1+q)} - \beta.$$

Маємо нерівність (1.20) при $\delta \rightarrow \frac{1}{2}$. ■

1.1.2 Частинні випадки спільно строго субгауссівського шуму

Нижче використаємо частинний випадок означення 2 при $n = 1$.

Означення 4. Кажуть, що випадкова величина η є строго субгауссівською для будь-якого $\Delta \in \mathbb{R}$

$$E \exp\{\Delta\eta\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_\eta^2 \Delta^2\right\}$$

з $\sigma_\eta^2 = E\eta^2$.

Нехай $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ послідовність строго субгауссівських незалежних однаково розподілених випадкових величин. Таку послідовність природно називати (дискретним) білим субгауссівським шумом.

N.2. Помилки спостережень в регресійній моделі (1.1) мають вигляд

$$\varepsilon_t = \sum_{j=-\infty}^t \psi_{t-j} \xi_j = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \xi_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.21)$$

де $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ - білий субгауссівський шум ($E\xi_j = 0, E\xi_j^2 = \sigma_\xi^2$), з

$$\|\psi\|_{l_2}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty. \quad (1.22)$$

Умова **N.2** означає, що ε_t є реакцією лінійної однорідної і фізично реалізуємої системи на випадкову імпульсну послідовність $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ (фізично реалізуємий фільтр) [17].

У роботі [12] доведено, що послідовність (1.21) є сумісно строго субгауссівським часовим рядом. Крім того, як це добре відомо, (1.21) - стаціонарний часовий ряд з коваріаційною функцією

$$B(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|t|}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

та с. щ.

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e^{ij\lambda} \right|^2, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \quad (1.23)$$

N.3. Часовий ряд (1.21) має обмежену с. щ.

$$f_0 = \sup_{\lambda \in [-\pi, \pi]} f(\lambda) < \infty.$$

За умов **N.2** та **N.3** та за теоремою Герглотца

$$\langle B\Delta, \Delta \rangle = \sum_{t,s=1}^T B(t-s)\Delta_t\Delta_s = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \left| \sum e^{i\lambda t} \Delta_t \right|^2 d\lambda \leq$$

$$f_0 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum e^{i\lambda t} \Delta_t \right|^2 dt = 2\pi f_0 \|\Delta\|^2,$$

і тому можна взяти в (1.2) і (1.5) $d_0 = 2\pi f_0$.

Наслідок 1. За умов **N.2**, **N.3** і **A.2** з $d_0 = 2\pi f_0$ твердження теорему 1 справджується.

Наслідок 2. За умов **N.2**, **N.3** і **A.3** твердження теорему 2 виконуються з нерівністю

$$b \geq \frac{c_0(\theta)}{16\pi f_0(1+q)} - \beta$$

в якості нерівності (1.20).

$ARMA(p, k)$ – процеси є важливим прикладом часових рядів (1.21). Ці процеси визначені системою рекурентних рівнянь (дивись, наприклад, [18])

$$\varepsilon_t - a_1\varepsilon_{t-1} - \dots - a_p\varepsilon_{t-p} = \xi_t + b_1\xi_{t-1} + \dots + b_k\xi_{t-k}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.24)$$

де $\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}\}$ є білим субгаусівським шумом. Якщо S є оператором зворотнього зсуву, рівність (1.24) може бути переписана у формі

$$a(S)\varepsilon_t = b(S)\xi_t,$$

де $a(z) = 1 - a_1z - \dots - a_pz^p$, $b(z) = 1 + b_1z + \dots + b_kz^k$. Якщо поліноми $a(z)$, $b(z)$ не мають спільних коренів та $a(z) \neq 0$, $b(z) \neq 0$ для $|z| \leq 1$, тоді $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ є стаціонарним $ARMA(p, k)$ -процесом.

Іноді зручно переписати $ARMA(p, k)$ -процес, як процес ковзного середнього $MA(\infty)$ у вигляді

$$\varepsilon_t = \psi(S)\xi_t, \psi(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j, \quad (1.25)$$

схожому з (1.21). Якщо ряд (1.22) збіжний, то с. щ. (1.23) може бути переписана завдяки (1.25) як

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} \cdot \frac{|b(e^{i\lambda})|^2}{|a(e^{i\lambda})|^2}, \lambda \in [-\pi, \pi]. \quad (1.26)$$

Оскільки поліноми $a(z)$ не мають коренів в одиничному колі, то $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$ – неперервна.

Запишемо

$$f_{max} = \max_{-\pi \leq \lambda \leq \pi} \frac{|b(e^{i\lambda})|^2}{|a(e^{i\lambda})|^2}. \quad (1.27)$$

Н.4. Помилки спостережень в регресійній моделі (1.1) є $ARMA(p, k)$ -процесом (1.24) з білим субгауссівським шумом $\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

В цьому випадку наслідок 2 можна переформулювати так.

Наслідок 3. За умов **Н.4** і **А.3** висновок теореми 2 справджується при

$$b \geq \frac{c_0(\theta)}{8\sigma_\xi^2 f_{max}(1+q)} - \beta.$$

Дійсно, з **Н.4** відповідно до (1.26) та (1.27) $d_0 = 2\pi f_0 = \sigma_\xi^2 f_{max}$.

1.2 Випадок неперервного часу спостережень

У цьому підрозділі викладені деякі результати роботи [13].

Розглянемо регресійну модель

$$X(t) = a(t, \theta) + \varepsilon(t), \quad t \geq 0 \quad (1.28)$$

де $a(t, \theta)$, $(t, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \Theta^c$, є неперервною функцією, істинне значення параметра $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)'$ належить до відкритої опуклої обмеженої множини $\Theta \in \mathbb{R}^q$, і випадковий шум $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$ задовольняє наступну умову.

Н5. ε – неперервний у середньоквадратичному і майже напевно випадковий процес, визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, $E\varepsilon(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Будемо писати $f = \int_0^T$.

Означення 5. Будь-який випадковий вектор $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_{1T}, \dots, \hat{\theta}_{qT})' \in \Theta^q$, який має властивість

$$Q_T(\theta_T) = \inf_{\tau \in \Theta^c} Q_T(\tau), Q_T(\tau) = \int [X(t) - a(t, \tau)]^2 dt,$$

називається ОНК невідомого параметра θ , отриманого за спостереженнями $\{X(t), t \in [0, T]\}$.

При введених вище припущеннях існує хоча б один такий випадковий вектор Q_T .

В асимптотичній теорії нелінійної регресії в задачі нормального наближення розподілу ОНК різниця $\hat{\theta}_T - \theta$ нормується діагональною матрицею [7]

$$d_T(\theta) = \text{diag}(d_{iT}(\theta), i = \overline{1, q}), d_{iT}^2(\theta) = \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} a(t, \theta) \right)^2 dt.$$

Далі припускається, що функція $a(t, \cdot) \in C^1(\Theta)$ для всіх $t \geq 0$.

1.2.1 Великі відхилення в моделях з сумісно строго субгауссівським шумом

Означення 6. Кажуть, що $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ є сумісно строго субгауссівським випадковим процесом, якщо для будь-якого $n \geq 1$ і будь-яких $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ випадковий вектор $\xi_n = (\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))'$ є строго субгауссівським.

Щодо випадкового шуму ε в моделі (1.28) введемо таке припущення.

Н.6 (i) ε є сумісно строго субгауссівським випадковим процесом з коваріаційною функцією $B(t, s) = E\varepsilon(t)\varepsilon(s)$, $t, s \in \mathbb{R}$

(ii) Для будь-якого $T > 0$, $\Delta(\cdot) \in L_2([0, T])$

$$\langle B\Delta, \Delta \rangle_T = \int \int B(t, s)\Delta(t)\Delta(s)dt ds \leq d_0 \|\Delta\|^2 \quad (1.29)$$

для деякої константи $d_0 > 0$, $\|\Delta\|_T = \left(\int \Delta^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

Для фіксованого T точна границя в (1.29) є

$$\langle B\Delta, \Delta \rangle_T \leq \|B\|_T \|\Delta\|_T^2,$$

де $\|B\|_T$ є нормою додатного самоспряженого напіввизначеного оператора B в $L_2([0, T])$. Звернемо увагу на те, що $\|B\|_T$ є неспадною функцією від $T > 0$, і тому існує

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|B\|_T \leq d_0 < \infty,$$

якщо (1.2) виконується.

Нехай $\Delta(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, неперервна функція. Тоді з умови **N5** випливає існування інтегралу

$$I(t) = \int \Delta(t)\varepsilon(t)dt, \quad (1.30)$$

визначеного майже для всіх траєкторій процесу $\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$ як інтеграл Рімана. Можна довести, що за умов **N5**, **N6**, інтеграл (1.30) є строго субгауссівською випадковою величиною [13].

Лема 2. *За умов **N5** і **N6** для будь-яких $T > 0$, $x > 0$,*

$$P\{I(T) \geq x\} \leq G_T(x), P\{I(T) \leq -x\} \leq G_T(x), P\{|I(T)| \geq x\} \leq 2G_T(x),$$

$$G_T(x) = \exp\left\{-\frac{x^2}{2d_0\|\Delta\|_T^2}\right\}. \quad (1.31)$$

Доведення леми 2 не відрізняється від доведення леми 1.

Нам знадобляться деякі позначення, щоб сформулювати умови для функції регресії $a(t, \tau)$ використовуючи підхід з роботи [4] (див. також [6], [7]).

Запишемо:

$$U_T(\theta) = d_T(\theta)(\Theta^c - \theta), \quad \Gamma_{T,\theta,R} = U_T(\theta) \cap \{u : R \leq \|u\| \leq R + 1\},$$

$u = \{u_1, \dots, u_q\}' \in \mathbb{R}^q$. Позначимо через G сім'ю всіх функцій $g = g_T(R)$,

$T > 0$, $R > 0$, яка має наступні властивості:

1) для фіксованого T $g_T(R) \uparrow \infty$, при $R \rightarrow \infty$;

2) для будь-якого $r > 0$, $R^r \exp\{-g_T(R)\} \rightarrow 0$, $R, T \rightarrow \infty$.

Нехай $\gamma(R)$ поліноми від R (можливо різні), з коефіцієнтами значення, яких не залежать від T, θ, u, v . Задамо також

$$\Delta(t, u) = a(t, \theta + d_T^{-1}(\theta)u) - a(t, \theta), \quad t \in [0, T],$$

$$\Phi_T(u, v) = \int (\Delta(t, u) - \Delta(t, v))^2 dt, \quad u, v \in U_T(\theta).$$

Припустимо, що існує функція $g \in G$, константи $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, $\kappa > 0$, $\rho \in (0, 1]$ і поліном $\gamma(R)$, такі, що при достатньо великих R, T (запишемо $R > R_0, T > T_0$) виконуються наступні умови.

R.1 (i) Для будь-яких $u, v \in \Gamma_{T, \theta, R}$ таких, що $\|u - v\| \leq \kappa$,

$$\Phi_T(u, v) \leq \gamma(R) \|u - v\|^{2\rho}; \quad (1.32)$$

(ii) для будь-якого $u \in \Gamma_{T, \theta, R}$, $\Phi_T(u, 0) \leq \gamma(R)$.

R.2. Для будь-якого $u \in \Gamma_{T, \theta, R}$

$$\Phi_T(u, 0) \leq \gamma(R) \geq 2d_0 \gamma^{-2} g_T(R) \quad (1.33)$$

Теорема 3. Якщо виконуються умови **N5**, **N6**, **R1** та **R2**, то існують константи $B_0, b_0 > 0$ такі, що $R > R_0, T > T_0$

$$P\{\|d_T(\theta)(\theta_t - \theta)\| \geq R\} \leq B_0 \exp\{-b_0 g_T(R)\}, \quad (1.34)$$

де для будь-якого $\beta > 0$ константа B_0 може бути обрана так, що

$$b_0 \geq \frac{\rho}{\rho + q} - \beta. \quad (1.35)$$

Доведення. Нехай

$$I(t, u) = \int \Delta(t, u) \varepsilon(t) dt, \quad \varsigma_T(u) = I(T, u) - \frac{1}{2} \Phi_T(u, 0).$$

Для доведення теореми достатньо перевірити виконання припущень (M1) і (M2) теореми 2.1 з [4], переформульованих так само, як це було використано в доведенні теореми 3.1, там же:

(M1) Для будь-якого $m > 0$ та $u, v \in \Gamma_{T, \theta, R}$ таких, що $\|u - v\| \leq \kappa$,

$$E|\varsigma_T(u) - \varsigma_T(v)|^2 \leq \gamma(R)\|u - v\|^{\rho m}; \quad (1.36)$$

(M2)

$$P \left\{ \varsigma_T(u) - \varsigma_T(0) \geq - \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \Phi_T(u) \right\} \leq \exp\{-g_T(R)\}. \quad (1.37)$$

З першої нерівності в (1.31) леми 2 для $\Delta(t) = \Delta(t, u)$, $x = \delta\Phi_T(u, 0)$, умови **R2** враховуючи те, що $\varsigma_T(0) = 0$ в нашому конкретному випадку, маємо

$$P \left\{ \varsigma_T(u) - \varsigma_T(0) \geq - \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \Phi_T(u) \right\} = P \{I(T, u) \geq \delta\Phi_T(u, 0)\} \leq$$

$\exp\{-\delta^2(2d_0)^{-1}\Phi_T(u, 0)\} \leq \exp\{-g_T(R)\}$, тобто (1.38) виконується.

Подальше доведення цієї теореми не відрізняється від доведення теореми 1. ■

Припустимо, що існує діагональна матриця $s_T = \text{diag}(s_{iT}, i = \overline{1, q})$ з елементами, які не залежать від $\tau \in \Theta$, і константи $0 < \underline{c}_i < \overline{c}_i < \infty$, $i = \overline{1, q}$, такі, що рівномірно в $\tau \in \Theta$ для $T > T_0$

$$\underline{c}_i < s_{iT}^{-1}d_{iT}(\tau) < \overline{c}_i, i = \overline{1, q}. \quad (1.38)$$

Тоді замість матриці $d_T(\theta)$ можна без втрати загальності розглянути нормалізуючу матрицю s_T .

Наступна умова є більш обмежуючою, ніж **R1** та **R2**, однак вона є простішою через вимогу (1.38).

R.3 Існують числа $0 < c_0 < c_1 < \infty$ такі, що для будь-яких $u, v \in U_T(\theta) = s_T(\Theta^c - \theta)$ та $T > T_0$,

$$c_0\|u - v\|^2 \leq \Phi_T(u, v) \leq c_1\|u - v\|^2. \quad (1.39)$$

Очевидно, що у виразі для $\Phi_T(u, v)$ в (1.39) ми використовуємо матрицю s_T^{-1} замість $d_T^{-1}(\theta)$.

Умову типу (1.39) було введено в [2] та використано в [3, 4, 9] та інших роботах. Наступна теорема узагальнює теорему 3.2 з [4].

Теорема 4. *За умов **N5**, **N6** і **R3** існують константи B , $b > 0$ такі, що для будь-яких $T > T_0$, $R > R_0$*

$$P\{\|S_T^{-1}(\theta_T - \theta)\|\} \leq B \exp\{-bR^2\}, \quad (1.40)$$

більше того, для будь-якого $\beta > 0$ константу B можна обрати таким чином, що

$$b \geq \frac{c_0}{8d_0(1+q)} - \beta. \quad (1.41)$$

Доведення. З умови **R3** випливають умови **R1** і **R2**. Нерівність (1.32) умови **R1** (i) випливає з правої частини нерівності (1.39), якщо взяти $\rho = 1$, $\gamma(R) = c_1$. Нерівність умови **R1** (ii) також випливає з правої частини (1.39), якщо взяти $v = 0$, $\gamma(R) = c_1(R+1)^2$.

Для перевірки виконання умови **R2** слід переписати ліву частину (1.39) для $v = 0$:

$$\Phi_T(u, 0) \geq c_0 \|u\|^2 \geq 2d_0 \delta^{-2} \left(\frac{1}{2} \delta^2 d_0^{-1} c_0 R^2 \right),$$

тобто в нерівності (1.33) можна взяти $g_T(R) = \frac{1}{2} \delta^2 d_0^{-1} c_0 R^2$. В цьому випадку для експоненти маємо

$$-b_0 g_T(R) = -b_0 \left(\frac{1}{2} \delta^2 d_0^{-1} c_0 \right) R^2.$$

Тепер, оскільки $\rho = 1$ в (1.35), для будь-якого $\beta > 0$ в (1.21) ми можемо взяти

$$b = b_\delta = \frac{1}{2} \delta^2 d_0^{-1} c_0 \geq \frac{\delta^2 c_0}{2d_0(1+q)} - \beta.$$

За **R3** та **N5**, **N6** нерівність (1.34) з $g_T(R) = \frac{1}{2} \delta^2 d_0^{-1} c_0 R^2$ виконується для будь-якого $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Отримуємо нерівність (1.41), якщо $\delta \rightarrow \frac{1}{2}$. ■

1.2.2 Великі відхилення у випадку стаціонарного сумісно строго субгауссівського шуму

Накладемо додаткові обмеження на процес ε .

N.7 Випадковий процес ε є стаціонарним з коваріаційною функцією $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)$, $t \in \mathbb{R}$, та обмеженою с. щ. $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f_0 = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} f(\lambda) < \infty.$$

За припущенням **N7** наступні наслідки теореми, доведені у розділі 1.2.1, є вірними.

Наслідок 4. Якщо умови **N5**, **N6(i)**, **N7**, **R1** і **R2** виконуються, то твердження теореми 3 справджується з $d_0 = 2\pi f_0$.

Доведення. Нам потрібно показати, що умова **N2(ii)** виконується. Дійсно, завдяки тотожності Планшереля,

$$\langle B\Delta, \Delta \rangle_T = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \left| \int e^{i\lambda t} \Delta(t) dt \right|^2 \leq 2\pi f_0 \|\Delta\|_T^2. \quad \blacksquare$$

Наслідок 5. За умов **N5**, **N6(i)**, **N7** та **R1** твердження теореми 4 правильне з нерівністю (1.41), переписаною в наступному вигляді:

$$b \geq \frac{c_0}{16\pi f_0(1+q)} - \beta. \quad (1.42)$$

Наше наступне припущення - конкретизація вимог **N6** та **N7**.

N8 (i). Випадковий шум ε має вигляд

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \psi(t-s) d\xi(s) = \int_0^{\infty} \psi(s) d\xi(t-s), \quad (1.43)$$

де $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ є неперервним у середньоквадратичному сумісно строго субгауссівським випадковим процесом з ортогональними приростами, $E\xi(t) = 0$,

$$E|\xi(t+s) - \xi(t)|^2 = s, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s > 0;$$

$\psi(t) = 0$ при $t < 0$ і

$$\int_0^\infty \psi^2(t)dt < \infty.$$

Стохастичний інтеграл в (1.43) розуміється, як середньоквардратичний інтеграл Стільтьєса. Процес ξ є інтегровним білим шумом, ε може розглядатися як стаціонарний процес на виході фізично реалізуемого фільтру з коваріаційною функцією (див. там же)

$$B(t) = \int_0^\infty \psi(t+u)\psi(u)du < \infty,$$

та с. щ.

$$f(\lambda) = |h(i\lambda)|^2, \quad h(i\lambda) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \psi(t)e^{i\lambda t}dt.$$

N8 (ii). $f_0 = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |h(i\lambda)|^2 < \infty.$

Очевидно, **N8(i)** має місце, якщо $\int_0^\infty |\psi(t)|dt < \infty.$

У роботі [13] доведено, що за умов **N8(ii)** процес ε в (1.43) є сумісно строго субгауссівським процесом.

Наслідок 6. *Якщо умови **N5**, **N8(i)**, **N8(ii)**, **R1** і **R2** виконуються, то висновок теореми 3 справедливий при $d_0 = 2\pi f_0.$*

Наслідок 7. *Якщо умови **N5**, **N8(i)**, **N8(ii)** і **R3** виконуються, то висновок теореми 4 правильний з константою b , що задовольняє (1.42).*

Приклад 1. Розглянемо приклад сумісно строго субгауссівського випадкового процесу ξ з ортогональними приростами в формулі (1.43), використовуючи ряди Іто-Нісію (дивись роботу [19] та джерела в ній).

Розглянемо будь-який ортонормований базис $\{\varphi_k, k \geq 1\}$ в $L_2(\mathbb{R}_+)$ та послідовність $\{Z_k, k \geq 1\}$ незалежних $N(0, 1)$ випадкових величин. Тоді

$$w_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \int_0^t \varphi_k(u)du, \quad t \geq 0,$$

є стандартним вінерівським процесом з коваріаціями $Ew_0(t)w_0(s) = \min\{t, s\}.$

Нам треба побудувати деякий вінерівський процес на дійсній прямій \mathbb{R} . Нехай $\{w_1(t), t \geq 0\}, \{w_2(t), t \geq 0\}$ – два незалежних вінерівських процеси

наступного вигляду:

$$w_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_{ik} \int_0^t \varphi_k(u) du, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

де $\{Z_{ik}, k \geq 1, i = 1, 2\}$ є незалежними $N(0, 1)$ випадковими величинами.

Тоді потрібний вінерівський процес на \mathbb{R} може бути визначений як

$$w(t) = w_1(t), \quad t \geq 0, \quad \text{і} \quad w(t) = w_2(|t|), \quad t < 0.$$

Для будь-яких дійсних $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$

$$E(w(t_2) - w(t_1))(w(t_4) - w(t_3)) = 0, \quad (1.44)$$

тобто прирости є ортогональними. З іншого боку, для будь-яких $t > s$

$$E(w(t) - w(s))^2 = t - s.$$

Нехай $\{\xi_{ik}, k \geq 1, i = 1, 2\}$ незалежні однаково розподілені строго субгауссівські випадкові величини (і не гауссівські!) з одиничними дисперсіями. Деякі приклади строго субгауссівських випадкових величин можна знайти в [15]. Таким чином, бернуллівські випадкові величини та випадкові величини, рівномірно розподілені на $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, є строго субгауссівськими та мають одиничні дисперсії.

Введемо випадкові процеси

$$\xi_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{ik} \int_0^t \varphi_k(u) du, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

$\xi(t) = \xi_1(t)$, $t \geq 0$, та $\xi(t) = \xi_2(|t|)$, $t < 0$. Тоді $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ є процесом з ортогональними приростами і не є гауссівським.

Більше того, він є сумісно строго субгауссівським процесом.

2 Поверхня максимумів щільності $MA(2)$ - процесу

Розглянемо $MA(2)$ -процес

$$\varepsilon_t = \xi_t + b_1\xi_{t-1} + b_2\xi_{t-2}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

де ξ_t , $t \in \mathbb{Z}$, білий субгауссівський шум з одиничними дисперсіями σ_ξ^2 .

Означення 7. $MA(2)$ -процес називають оборотним, якщо корені рівняння $b(z) = 1 + b_1z + b_2z^2$ знаходяться поза межами кола $|z| \leq 1$.

Знайдемо область оборотності $MA(2)$ -процесу (2.1). Для цього знайдемо корені рівняння $y^2 + b_1y + b_2 = 0$

$$y_1 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2}, \quad y_2 = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2}.$$

Припустимо, що $b_1^2 \geq 4b_2$, тобто корені дійсні.

Розглянемо y_1 :

$$-1 < \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2} < 1. \quad (2.2)$$

Розглянемо праву частину нерівності (2.2):

$$\sqrt{b_1^2 - 4b_2} < 2 + b_1 \Rightarrow b_1 > -2, \quad b_1^2 - 4b_2 < 4 + 4b_1 + b_1^2, \quad b_1 + b_2 > -1. \quad (\mathbf{i})$$

Тепер розглянемо ліву частину нерівності (2.2):

$$b_1 - 2 < \sqrt{b_1^2 - 4b_2} \Rightarrow b_1 < 2 - \text{виконується автоматично.}$$

Значить, нехай $b_1 > 2$. Тоді, $b_1^2 - 4b_1 + 4 < b_1^2$, $b_1 - b_2 > 1$, $b_2 < b_1 - 1$,

$b_2 = b_1 - 1$ – в решті решт приводить до порожньої множини точок (b_1, b_2) .

Розглянемо тепер y_2 :

$$-1 < \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2} < 1, \quad -2 < -b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2} < 2. \quad (2.3)$$

Розглянемо праву частину нерівності (2.3):

$$-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2} > -b_1 - 2 \Rightarrow -b_1 - 2 > 0, b_1 < -2, b_1^2 - 4b_2 > b_1^2 + 4b_1 + 4, \\ b_1 + b_2 < -1 \Rightarrow \text{протиричить з (i)}.$$

Тепер розглянемо ліву частину нерівності (2.3)

$$\sqrt{b_1^2 - 4b_2} < 2 - b_1 \Rightarrow b_1 < 2, b_1^2 - 4b_2 < 4 - 4b_1 + b_1^2, b_1 - b_2 < 1. \text{ (ii)}$$

Розглянемо випадок комплексних коренів:

$$b_1^2 < 4b_2, | -b_1 \pm i\sqrt{4b_2 - b_1^2} | < 2, b^2 + 4b_2 - b_1^2 < 4, b_2 < 1. \text{ (iii)}$$

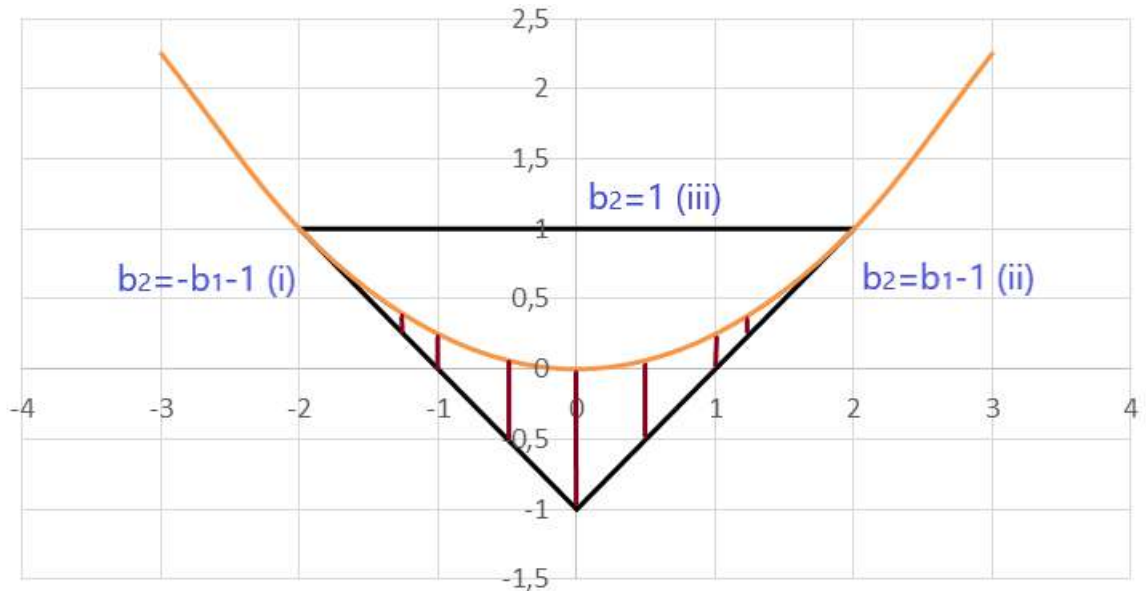


Рисунок 1. Область оборотності МА(2)-процесу.

Запишемо с. щ. МА(2)-процесу (2.1).

$$f(\lambda, b_1, b_2) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} |b(e^{-i\lambda})|^2, b(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2. \quad (2.4)$$

$$|b(e^{-i\lambda})|^2 = |1 + b_1(\cos\lambda + i\sin\lambda) + b_2(\cos 2\lambda + i\sin 2\lambda)|^2 = (1 + b_1 \cos\lambda + \\ b_2 \cos 2\lambda)^2 + (b_1 \sin\lambda + b_2 \sin 2\lambda)^2 = 1 + b_1^2 \cos^2 \lambda + b_2^2 \cos^2 2\lambda + 2b_1 \cos\lambda + 2b_2 \cos 2\lambda + \\ 2b_1 b_2 \cos\lambda \cos 2\lambda + b_1^2 \sin^2 \lambda + b_2^2 \sin^2 2\lambda + 2b_1 b_2 \sin\lambda \sin 2\lambda = 1 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1 \cos\lambda + \\ 2b_2 \cos 2\lambda + 2b_1 b_2 (\cos\lambda \cos 2\lambda + \sin\lambda \sin 2\lambda) = 1 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1(1 + b_2)\cos\lambda + \\ 2b_2 \cos 2\lambda = B(\lambda; b_1, b_2)$$

Треба знайти поверхню

$$B_0(b_1, b_2) = \max_{\lambda \in [0, \pi]} B(\lambda; b_1, b_2), \quad b_1, b_2 \in S_0,$$

$$S_0 = \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 : b_1 + b_2 > -1; b_1 - b_2 < 1; b_2 < 1\}. \quad (2.5)$$

Треба знайти максимум функції

$$B(\lambda; b_1, b_2) = 1 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1(1 + b_2)\cos\lambda + 2b_2\cos 2\lambda = B(\lambda) \quad (2.6)$$

як функції від λ за умови, що параметри b_1, b_2 знаходяться у множині (2.5).

Оскільки $B(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$ парна функція, достатньо знайти поверхню

$$B_0(b_1, b_2) = \max_{\lambda \in [0, \pi]} B(\lambda; b_1, b_2), \quad b_1, b_2 \in S_0 \quad (2.7)$$

Знайдемо похідну $B(\lambda)$, $\lambda \in [0, \pi]$, та її критичні точки.

$$B'(\lambda) = -2b_1(1 + b_2)\sin\lambda - 4b_2\sin 2\lambda \quad (2.8)$$

$$B'(\lambda) = 0, \quad b_1(1 + b_2)\sin\lambda + 2b_2\sin\lambda\cos\lambda = 0, \quad \sin\lambda(b_1(1 + b_2) + 4b_2\cos\lambda) = 0.$$

1) $\sin\lambda = 0$, тобто $\lambda = 0$, або $\lambda = \pi$ - критичні точки;

2) $\cos - \frac{b_1(1 + b_2)}{4b_2}$, $\lambda = \arccos\left(-\frac{b_1(1 + b_2)}{4b_2}\right)$ - критична точка.

Для того, щоб (2.7) було правильним, треба, щоб виконувались нерівності

$$-1 \leq -\frac{b_1(1 + b_2)}{4b_2} \leq 1 \quad (2.9)$$

Розглянемо праву частину нерівності (2.9):

$$-\frac{b_1(1 + b_2)}{4b_2} - 1 \leq 0, \quad \frac{b_1(1 + b_2)}{4b_2} + 1 \geq 0, \quad \frac{b_1b_2 + b_1 + 4b_2}{4b_2} \geq 0. \quad (2.10)$$

Якщо $b_2 > 0$, то $b_1b_2 + b_1 + 4b_2 \geq 0$, $b_2(b_1 + 4) + b_1 \geq 0$, $b_2(b_1 + 4) \geq -b_1$,

$$b_2 \geq -\frac{b_1}{b_1 + 4} \quad (2.11)$$

Знаменник у формулі (2.11) завжди більше нуля, якщо b_1 перша координата точки із множини S_0 .

Функція

$$b_2 = -\frac{b_1}{b_1 + 4} \quad (2.12)$$

є гіперболою, яка проходить через точки $(0, 0)$ та $(-2, 1)$. Ще одну точку її перетиною із прямою лінією $b_2 = b_1 - 1$ знайдемо як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} b_2 = -\frac{b_1}{b_1 + 4}, \\ b_2 = b_1 - 1. \end{cases}$$

Маємо

$$b_1 - 1 = -\frac{b_1}{b_1 + 4}, (b_1 - 1)(b_1 + 4) = b_1^2 + 3b_1 - 4 = -b_1, b_1^2 + 4b_1 - 4 = 0,$$

$$b_1 = 2(\sqrt{2} - 1), b_2 = 2\sqrt{2} - 3.$$

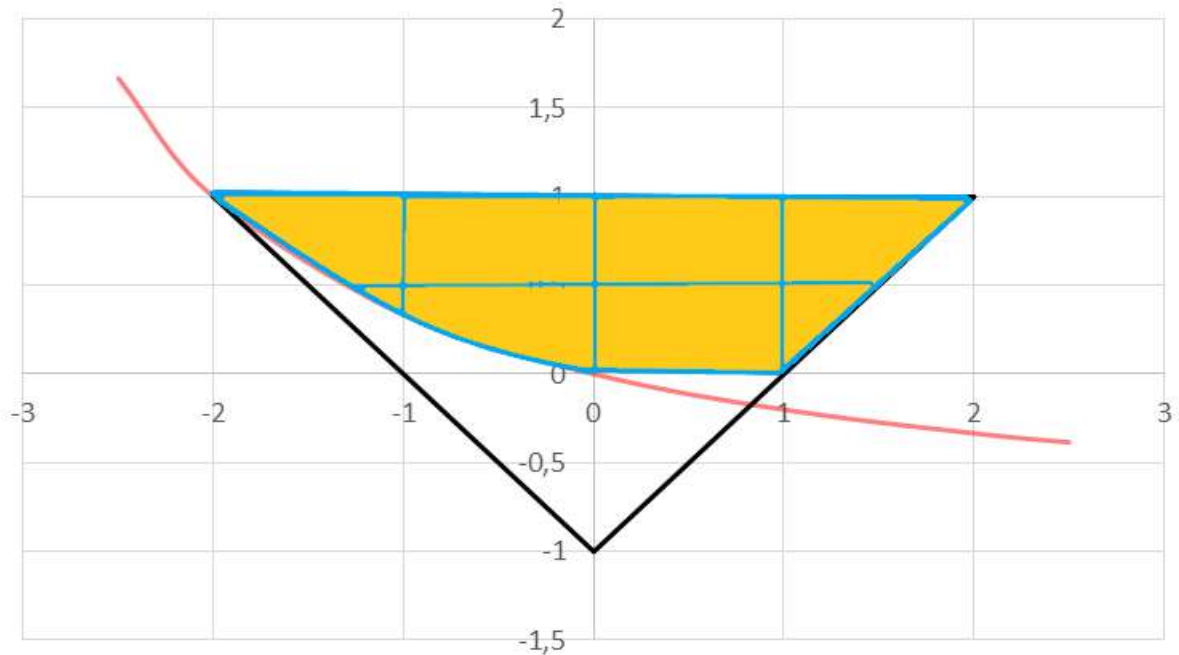


Рисунок 2. Область, де $b_2 > 0, b_2 \geq -\frac{b_1}{b_1 + 4}$.

Зауважимо, що частина гіперболи (2.12) від точки $(0, 0)$ до точки $(-2, 1)$, не включаючи ці точки, належить області на рис.2.

Нехай тепер у нерівності (2.10) $b_2 > 0$. Тоді $b_1 b_2 + b_1 + 4b_2 \leq 0$,

$$b_2(b_1 + 4) + b_1 \leq 0, b_2(b_1 + 4) \leq -b_1, b_2 \leq -\frac{b_1}{b_1 + 4}. \quad (2.13)$$

Таким чином, випадку $b_1 < 0$ відповідає область на рис.3.

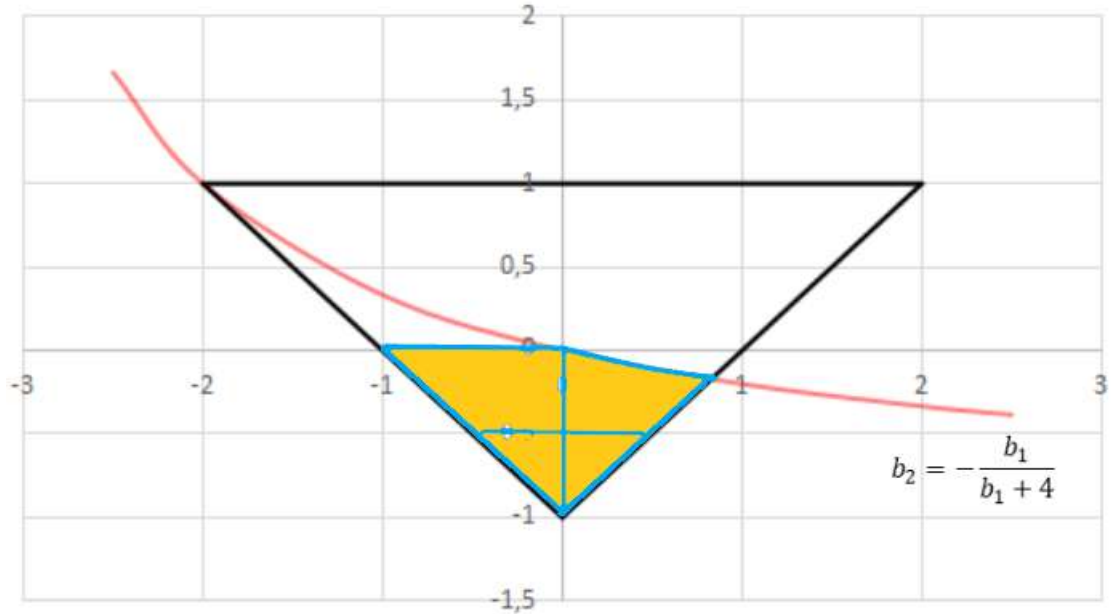


Рисунок 3. Область, де $b_2 < 0, b_2 \leq -\frac{b_1}{b_1 + 4}$.

Зауважимо, що частина гіперболи (2.13) від точки $(0, 0)$ до точки $(2(\sqrt{2} - 1), 2\sqrt{2} - 3)$, не включаючи ці точки, належить області на рис. 3.

Перейдемо до лівої частини нерівності (2.9):

$$-1 \leq -\frac{b_1(1+b_2)}{4b_2}, \quad \frac{b_1(1+b_2)}{4b_2} \leq 1, \quad \frac{b_1(1+b_2)}{4b_2} - 1 \leq 0, \quad \frac{b_1b_2 + b_1 - 4b_2}{4b_2} \leq 0. \quad (2.14)$$

Якщо $b_2 > 0$, то $b_1b_2 + b_1 - 4b_2 \leq 0$, $b_2(b_1 - 4) \leq -b_1$, або враховуючи те, що в області S_0 $b_1 < 4$,

$$b_2 \geq -\frac{b_1}{b_1 - 4} \quad (2.15)$$

Функція

$$b_2 = -\frac{b_1}{b_1 - 4} \quad (2.16)$$

є гіперболою, яка проходить через точки $(0, 0)$, $(2, 1)$ та через точку, яка є розв'язком рівняння

$$-b_1 - 1 = -\frac{b_1}{b_1 - 4}, \quad b_1 + 1 = \frac{b_1}{b_1 - 4}, \quad (2.17)$$

тобто $b_1 = 2 - 2\sqrt{2}$, $b_2 = -b_1 - 1 = 2\sqrt{2} - 3$.

Графік області (2.11) при $b_2 > 0$ має вигляд, зображений на рис.4.

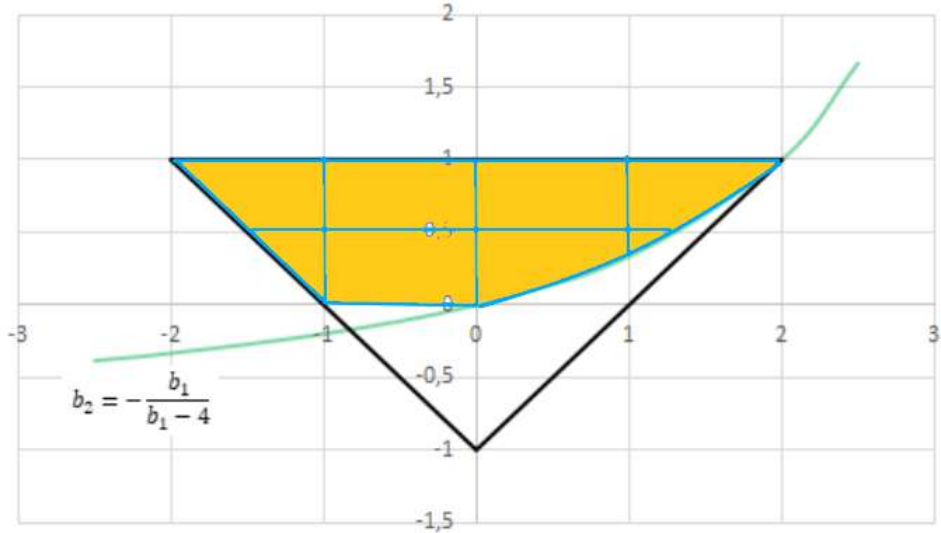


Рисунок 4. Область $b_2 > 0, b_2 \geq -\frac{b_1}{b_1 - 4}$.

Аналогічно розглянутому випадку частина гіперболи (2.17) від точки (0,0) до точки (2,1), не включаючи ці точки, входить в область на рис.4.

Якщо $b_2 < 0$, то з (2.14) отримуємо, що $b_1 b_2 + b_1 - 4b_2 \geq 0$,

$$b_2(b_1 - 4) \geq -b_1, \quad b_2 \leq -\frac{b_1}{b_1 - 4} \tag{2.18}$$

Графік області (2.17) при $b_2 < 0$ має вигляд зображений на рис.5.

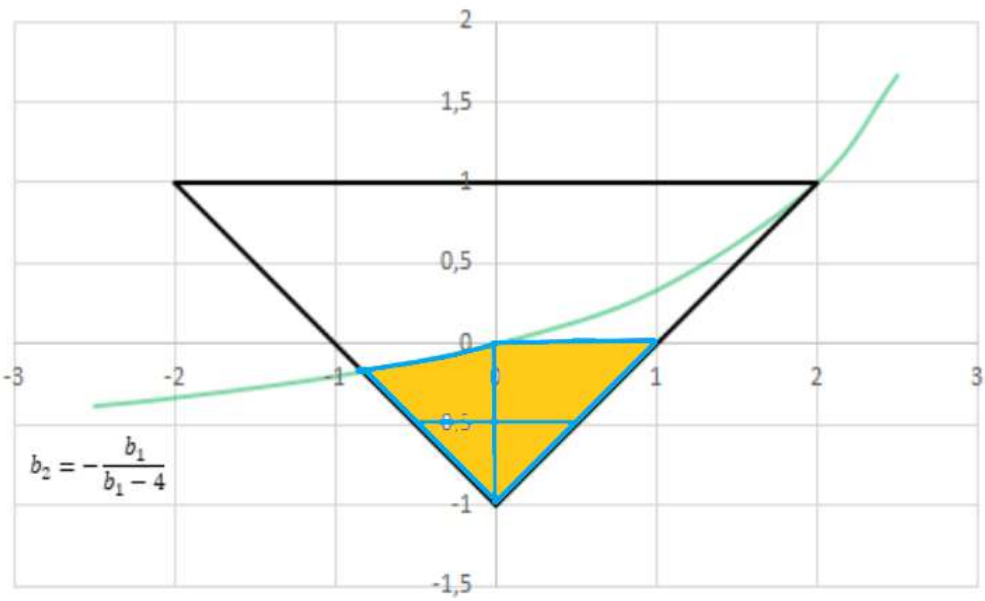


Рисунок 5. Область, де $b_2 < 0, b_2 \leq -\frac{b_1}{b_1 - 4}$

Частина гіперболи від точки (0,0) до точки $(2 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 3)$, не включаючи ці точки входить в область на рис. 5.

На рис.6 вказана область в S_0 , де виконуються нерівності (2.5), і яка отримана з областей, зображених на рис.2-рис.5.

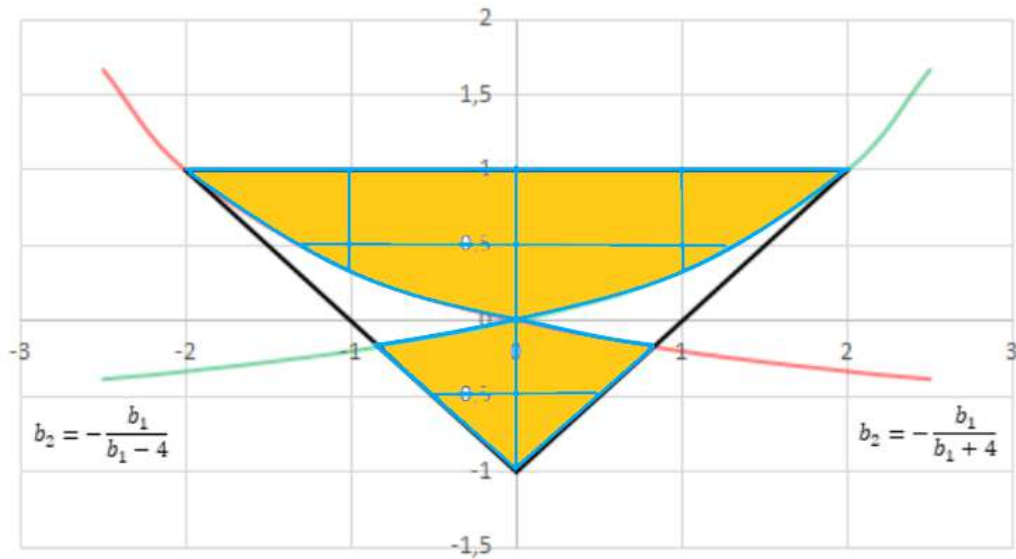


Рисунок 6. Область $-1 \leq -\frac{b_1(1+b_2)}{4b_2} \leq 1$.

Якщо точка (b_1, b_2) входить в область на рис.6, то

$$\cos \lambda = -\frac{b_1(1+b_2)}{4b_2}, \quad (2.19)$$

$$\lambda_0 = \arccos \left(-\frac{b_1(1+b_2)}{4b_2} \right) \in (0, \pi).$$

Знайдемо множини точок $(b_1, b_2) \in S_0$, в яких при критичних значеннях **1)** $\lambda = 0, \pi$; **2)** $\lambda_0 = \arccos \left(-\frac{b_1(1+b_2)}{4b_2} \right) \in (0, \pi)$ функція $B(\lambda)$ набуває максимального значення. Для цього від'ємо другу похідну за λ функції $B(\lambda)$, користуючись формулою (2.8):

$$B''(\lambda) = -2b_1(1+b_2)\cos \lambda - 8b_2\cos 2\lambda. \quad (2.20)$$

Підставимо у (2.20) критичну точку π :

$$B''(\pi) = 2b_1(1+b_2)\cos \lambda - 8b_2.$$

Якщо виконується нерівність

$$b_1(1+b_2) - 4b_2 < 0, \quad (2.21)$$

то в точці $\lambda = \pi$ досягається максимум с. щ. $MA(2)$ -процесу. Розв'яжемо нерівність (2.21): $b_1 + (b_1 - 4)b_2 < 0$, $(b_1 - 4)b_2 < -b_1$, і, остаточно,

$$b_2 > -\frac{b_1}{b_1 - 4}, \quad (2.22)$$

Область (2.22) показано на рис.7.

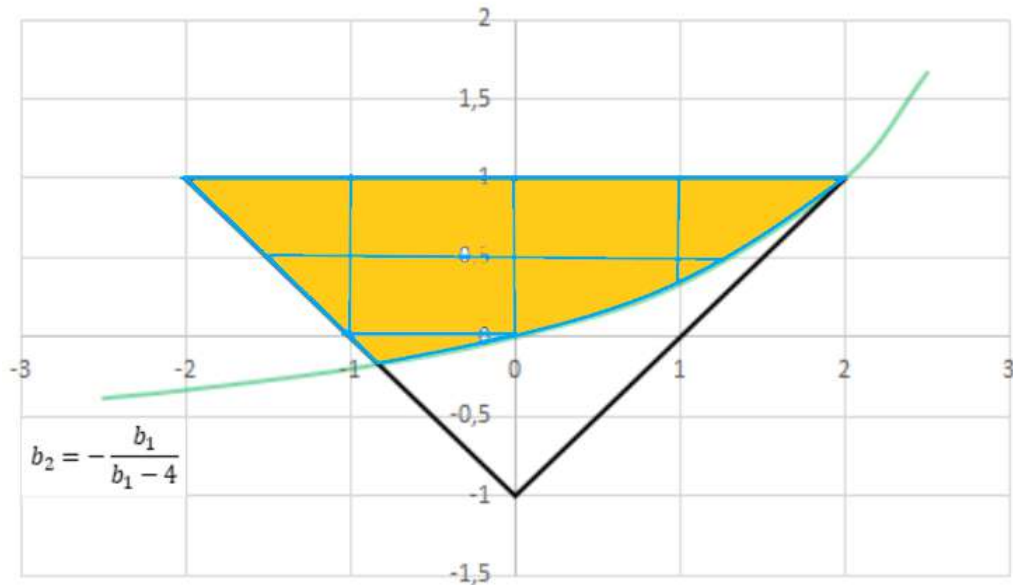


Рисунок 7. Область $b_2 > -\frac{b_1}{b_1 - 4}$.

Зауважимо, що сама гіпербола $b_2 = -\frac{b_1}{b_1 - 4}$ не входить в цю область. З іншого боку, з рівності (2.6) маємо

$$B(\pi) = 1 + b_1^2 + b_2^2 - 2b_1 - 2b_1b_2 + 2b_2 = (1 - b_1 + b_2)^2. \quad (2.23)$$

Підставимо критичну точку $\lambda = 0$ в другу похідну (2.20):

$$B''(0) = -2b_1(1 + b_2)\cos\lambda - 8b_2.$$

Якщо виконується нерівність

$$-b_1(1 + b_2) - 4b_2 < 0, \quad b_2 > -\frac{b_1}{b_1 + 4}. \quad (2.24)$$

Область (2.24) показано на рис.8.

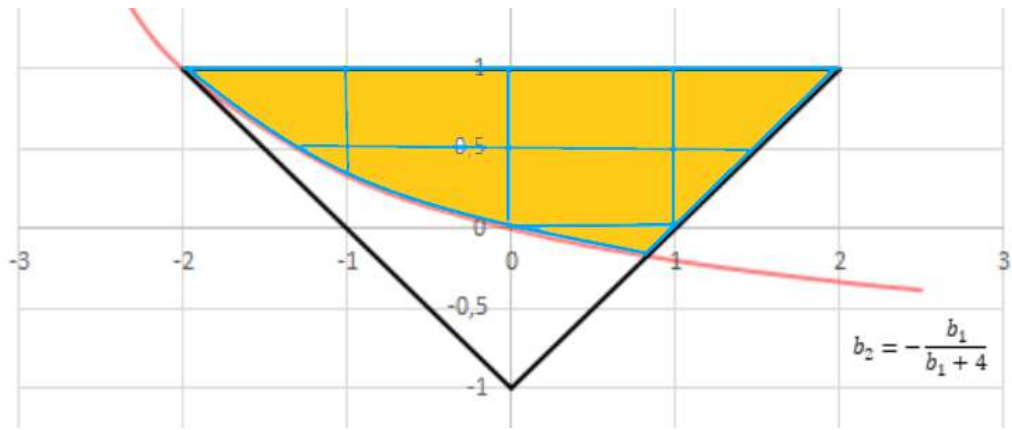


Рисунок 8. Область $b_2 > -\frac{b_1}{b_1+4}$.

Зауважимо, що сама гіпербола $b_2 = -\frac{b_1}{b_1+4}$ не входить в цю область. Крім цього, з (2.6) отримуємо

$$V(0) = 1 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1 + 2b_1b_2 + 2b_2 = (1 + b_1 + b_2)^2. \quad (2.25)$$

Порівняємо максимуми функції $V(\lambda)$ в точках 0 та π , за формулами (2.23) і (2.25). Якщо $b_1 < 0$, то нерівність

$$b_1(1 + b_2) < -b_1(1 + b_2), \quad (2.26)$$

в якій множник $1 + b_2 > 0$, еквівалентний нерівності $V(0) < V(\pi)$. Це означає, що при $b_1 < 0$ в області, зображеній на рис.9 $V(0) < V(\pi)$.

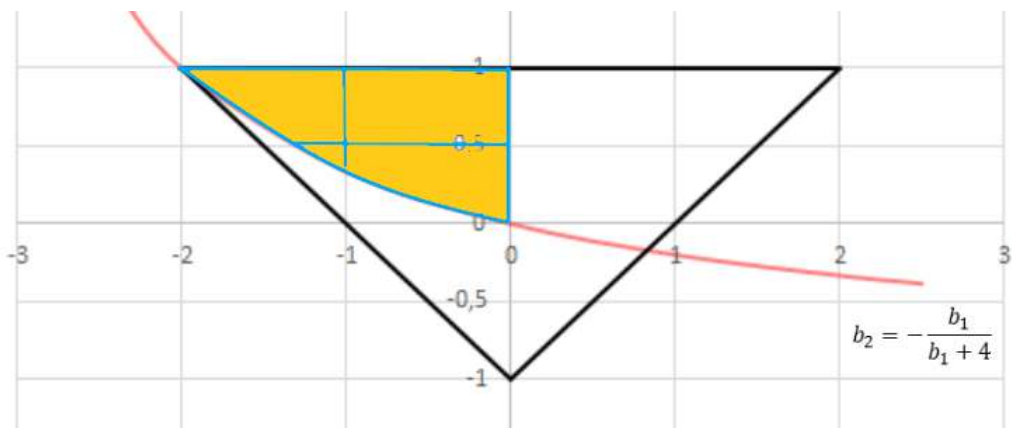


Рисунок 9. Область де максимум в точці $\lambda = 0$ менше максимуму в точці $\lambda = \pi$.

Таким чином, при $b_1 < 0$ нам треба обрати область, вказану на рис.10, і де функція $V(\lambda)$ набуває максимального значення при $\lambda = \pi$.

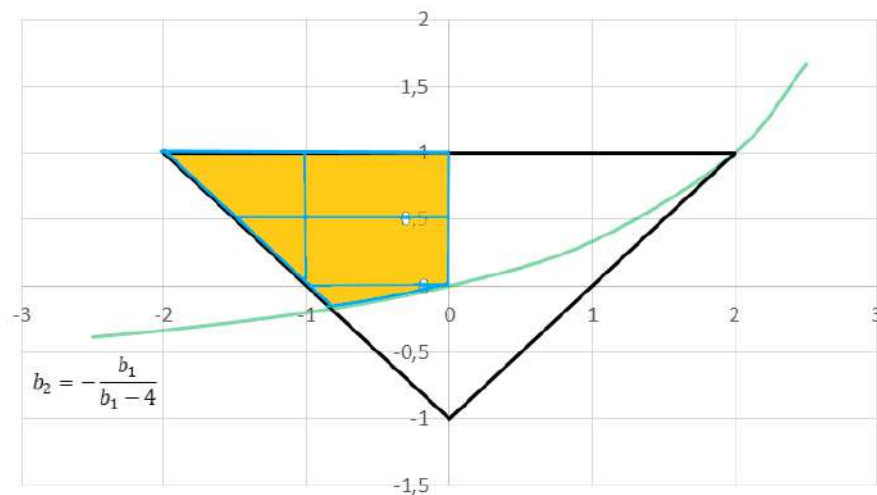


Рисунок 10. Область максимуму в точці $\lambda = \pi$.

Нехай тепер $b_1 > 0$. Тоді нерівність

$$b_1(1 + b_2) > -b_1(1 + b_2) \quad (2.27)$$

еквівалентна нерівності $B(0) > B(\pi)$. Це в свою чергу означає, що при $b_1 > 0$ в області, зображеній на рис.11 $B(0) > B(\pi)$.

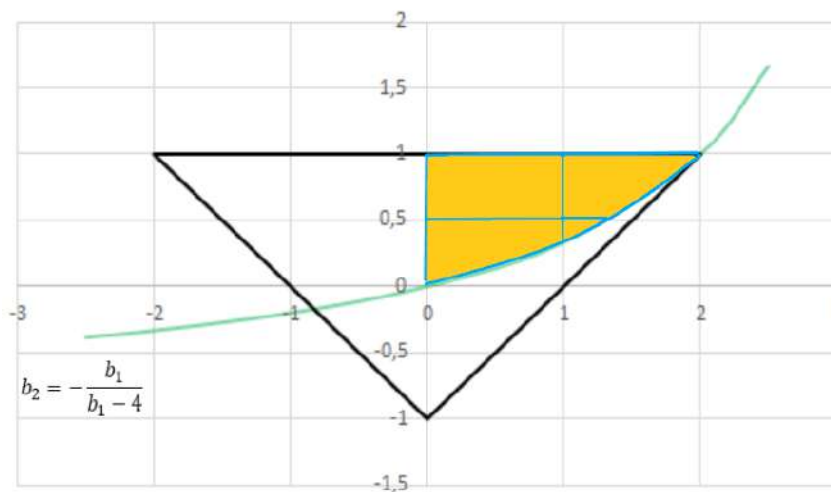


Рисунок 11. Область де максимум в точці $\lambda = 0$ більше максимуму в точці $\lambda = \pi$.

Таким чином, при $b_1 > 0$ нам треба обрати область вказану на рис.12, і де функція $B(\lambda)$ набуває максимального значення при $\lambda = 0$.



Рисунок 12. Область максимуму в точці $\lambda = 0$.

Коли $b_1 = 0$, то $B(0) = b(\pi) = (1 + b_2)^2$, тобто максимуми в точках π та 0 співпадають.

Переходимо до критичної точки $\lambda = \arccos\left(-\frac{b_1(1+b_2)}{4b_2}\right)$. За формулою (2.20):

$$\begin{aligned}
 B''(\lambda) &= -2b_1(1+b_2)\cos\lambda - 8b_2(2\cos^2\lambda - 1). \\
 B''\left(\arccos\left(-\frac{b_1(1+b_2)}{4b_2}\right)\right) &= \frac{b_1^2(1+b_2)^2}{4b_2} - 8b_2\left(2\frac{b_1^2(1+b_2)^2}{16b_2^2} - 1\right) = \\
 &= \frac{b_1^2(1+b_2)^2}{2b_2} - \frac{b_1^2(1+b_2)^2}{b_2} + 8b_2 = -\frac{b_1^2(1+b_2)^2}{2b_2} + 8b_2 = \\
 &= \frac{16b_2^2 - b_1^2(1+b_2)^2}{2b_2} \tag{2.28}
 \end{aligned}$$

З рівняння (2.25) випливає, що максимум с. щ. $MA(2)$ -процесу досягається там, де

$$\frac{16b_2^2 - b_1^2(1+b_2)^2}{2b_2} < 0 \tag{2.29}$$

Дослідимо нерівність (2.29), тобто знайдемо значення параметрів $(b_1, b_2) \in S_0$ в областях, для яких виконуються нерівності (2.9) та (2.29).

Нагадаємо, що область виконання нерівностей (2.9) зображена на рис.6.

Розглянемо спочатку випадок коли $b_2 > 0$. Тоді для виконання (2.29) потрібно, щоб виконувалась нерівність

$$(4b_2 - b_1(1 + b_2))(4b_2 + b_1(1 + b_2)) < 0. \quad (2.30)$$

Перевіримо знаки дужок (+, -) в (2.30):

1) $4b_2 - b_1(1 + b_2) > 0$, $b_2 > -\frac{b_1}{b_1 - 4}$ - цю область можна побачити на рис.4.

2) $4b_2 + b_1(1 + b_2) < 0$, $b_2 < -\frac{b_1}{b_1 + 4}$.

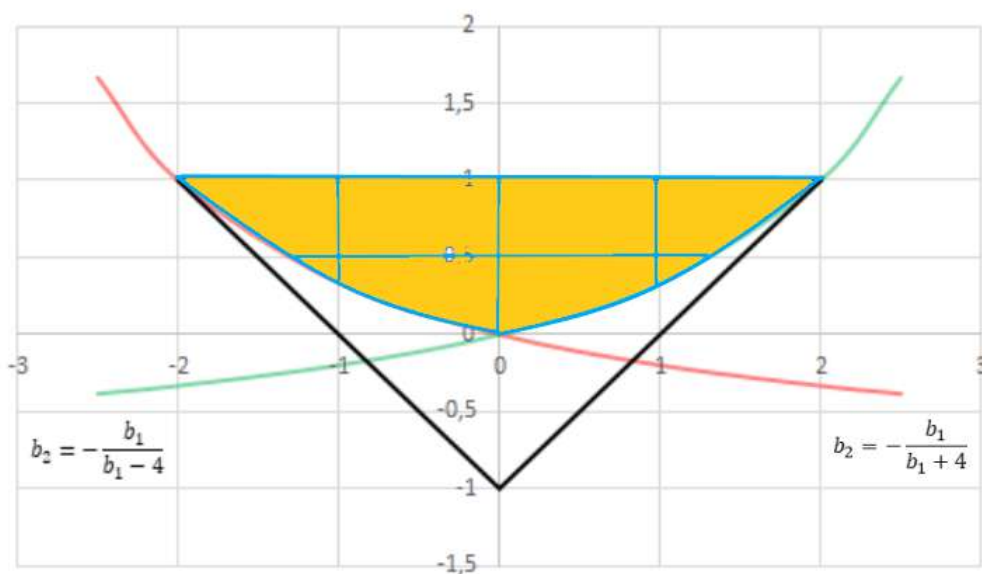


Рисунок 13. Область (+,-) в (2.30) при $b_2 > 0$.

На рис.13 позначено область одночасного виконання 1), 2) та $b_2 > 0$. Перетин цієї області з областю виконання (2.9) є порожнім.

Перевіримо знаки дужок (-,+) в (2.30):

3) $4b_2 - b_1(1 + b_2) < 0$, $b_2 < -\frac{b_1}{b_1 - 4}$.

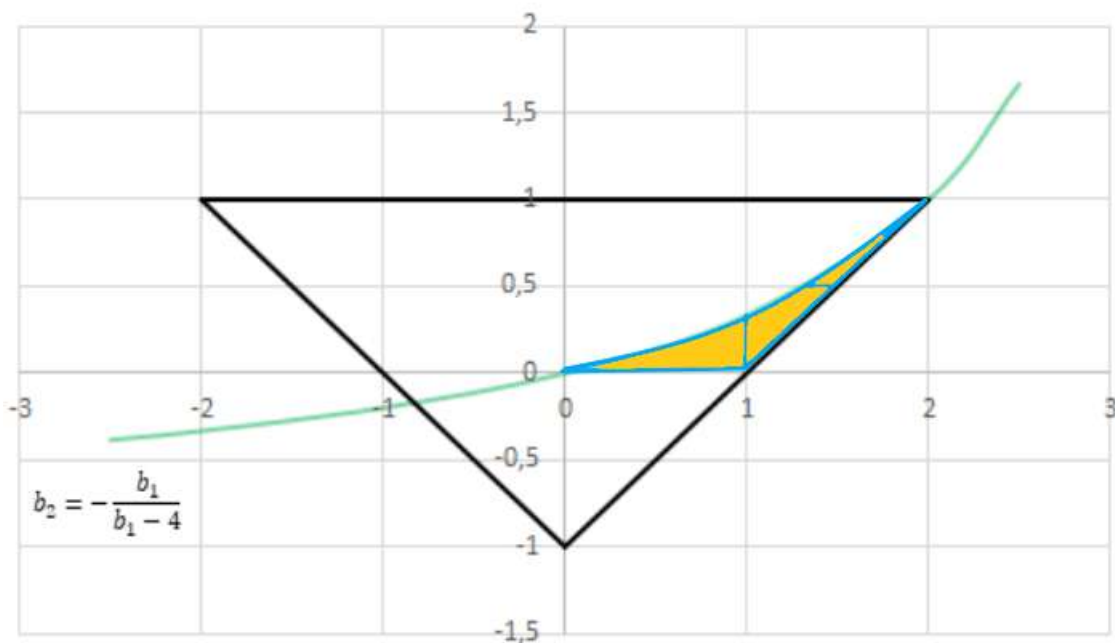


Рисунок 14. Область $b_2 > 0, b_2 < -\frac{b_1}{b_1-4}$.

4) $4b_2 + b_1(1 + b_2) > 0, b_2 > -\frac{b_1}{b_1 + 4}$ - ця область зображена на рис.2.

Перетин областей на рис.2 та рис.14 є область на рис.14, причому границя цієї області в неї не входить.

Таким чином, перетин областей, де одночасно виконується 3), 4) та $b_2 > 0$ із областю виконання нерівностей (2.9) є порожнім.

Розглянемо тепер випадок коли $b_2 < 0$. Тоді для виконання нерівності (2.29) потрібно, щоб виконувалось

$$(4b_2 - b_1(1 + b_2))(4b_2 + b_1(1 + b_2)) > 0. \quad (2.31)$$

Перевіримо знаки дужок (+,+) в (2.31):

$$1) 4b_2 - b_1(1 + b_2) > 0, b_2 > -\frac{b_1}{b_1 - 4}.$$

Відповідна область показана на наступному рисунку.

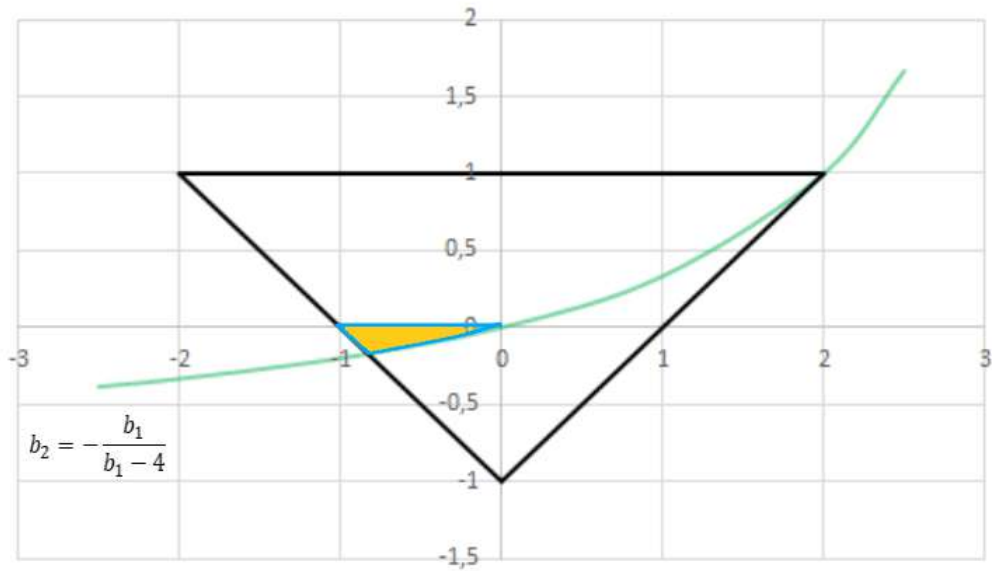


Рисунок 15. Область $b_2 < 0, b_2 > -\frac{b_1}{b_1-4}$.

$$2) 4b_2 + b_1(1 + b_2) > 0, b_2 > -\frac{b_1}{b_1 + 4}.$$

Відповідна область показана на наступному рисунку.

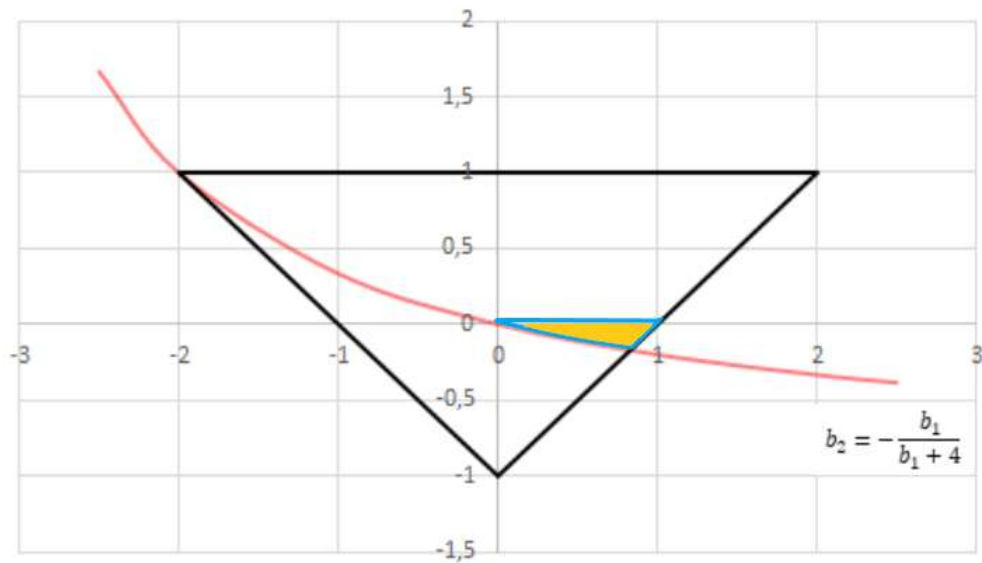


Рисунок 16. Область $b_2 < 0, b_2 > -\frac{b_1}{b_1+4}$.

Таким чином, сукупність знаків (+,+) і множників добутку (2.31) при $b_2 < 0$ дає порожню множину точок.

Залишилось перевірити знаки дужок (-,-) в (2.31):

$$3) 4b_2 - b_1(1 + b_2) < 0, b_2 < -\frac{b_1}{b_1 - 4}.$$

Цю множину точок при $b_2 < 0$ зображено на рис.5.

$$4) 4b_2 + b_1(1 + b_2) < 0, b_2 < -\frac{b_1}{b_1 + 4}.$$

Цю множину точок зображено на рис.3 при $b_2 < 0$.

Перетин областей рис.3 та рис.5 дає нам область зображено на рис.17.

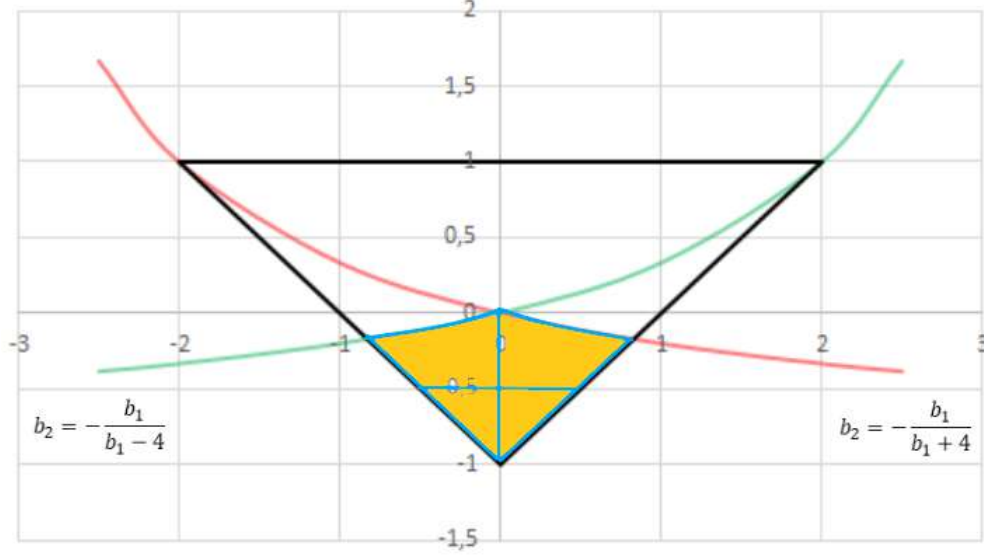


Рисунок 17. Область $b_2 < 0, b_2 < -\frac{b_1}{b_1+4}, b_2 < -\frac{b_1}{b_1-4}$.

Обчислимо значення функції $B(\lambda)$ в точці $\lambda_0 = \arccos\left(-\frac{b_1(1+b_2)}{4b_2}\right)$.

За формулою (2.6):

$$\begin{aligned} B(\lambda_0) &= 1 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1(1+b_2) \left(-\frac{b_1(1+b_2)}{4b_2}\right) + 2b_2 \left(2\frac{b_1^2(1+b_2)^2}{16b_2^2} - 1\right) = \\ &= 1 + b_1^2 + b_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{b_1^2(1+b_2)^2}{b_2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{b_1^2(1+b_2)^2}{b_2} - 2b_2 = \\ &= (1 - b_2)^2 + b_1^2 - \frac{1}{4} \frac{b_1^2(1+b_2)^2}{b_2} = (1 - b_2)^2 + \frac{b_1^2}{4b_2}(4b_2 - (1 - b_2)^2) = \\ &= (1 - b_2)^2 + \frac{b_1^2}{4b_2}(4b_2 - 1 - 2b_2 - b_2^2) = \\ &= (1 - b_2)^2 - \frac{b_1^2}{4b_2}(1 - b_2)^2 = (1 - b_2)^2 \left(1 - \frac{b_1^2}{4b_2}\right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Тоді при $b_1 < 0$ і при $b_2 = -\frac{b_1}{b_1 - 4}$

$$1 - \frac{b_1^2}{4b_2} = 1 - \frac{b_1^2}{4b_1} = 1 + \frac{b_1(b_1 - 4)}{4} = \frac{4 + b_1^2 - 4b_1}{4} = \frac{(b_1^2 - 2)^2}{4}.$$

Тоді за формулою (2.32)

$$B(\lambda_0) = \left(1 + \frac{b_1}{b_1 - 4}\right)^2 \cdot \frac{(b_1^2 - 2)^2}{4} = \frac{4(b_1 - 2)^2}{b_1 - 4} \cdot \frac{(b_1 - 2)^2}{4} = \frac{(b_1 - 2)^4}{(b_1 - 4)^2} \quad (2.33)$$

Беручи до уваги рис.10, підставимо у формулу (2.23) значення

$$b_2 = -\frac{b_1}{b_1 - 4}, b_1 < 0. \text{ Тоді}$$

$$B(\pi) = (1 - b_1 + b_2)^2 = \left(1 - b_1 - \frac{b_1}{b_1 - 4}\right)^2 = \frac{(b_1 - 4 - b_1^2 + 4b_1 - b_1)^2}{(b_1 - 4)^2} = \frac{(b_1 - 2)^4}{(b_1 - 4)^2} \quad (2.34)$$

Рівності (2.33) та (2.34) показують, що при $b_1 < 0$ максимальні значення с. щ. $MA(2)$ -процесу в точках $\lambda = \pi$ та $\lambda_0 = \arccos\left(-\frac{b_1(1 + b_2)}{4b_2}\right)$ співпадають на границі множин рис.10 та рис.6, яка є частиною гіперболи $b_2 = -\frac{b_1}{b_1 - 4}$.

Нехай $b_1 > 0$ і $b_2 = -\frac{b_1}{b_1 + 4}$. Тоді за формулою (2.32):

$$B(\lambda_0) = (1 - b_1)^2 \left(1 - \frac{b_1^2}{4b_2}\right) = \left(1 + \frac{b_1}{b_1 + 4}\right) \cdot \left(1 - \frac{b_1^2}{-\frac{4b_1}{b_1 + 4}}\right) = \frac{4(b_1 + 2)^2}{(b_1 + 4)^2} \cdot \frac{(b_1 + 2)^2}{4} = \frac{(b_1 + 2)^4}{(b_1 + 4)^2}. \quad (2.35)$$

Беручи до уваги рис.12, підставимо у формулу (2.25) значення

$$b_2 = -\frac{b_1}{b_1 + 4}, b_1 > 0. \text{ Тоді}$$

$$B(0) = (1 + b_1 + b_2)^2 = \left(1 + b_1 - \frac{b_1}{b_1 + 4}\right)^2 = \frac{(b_1 + 4 + b_1^2 + 4b_1 - b_1)^2}{(b_1 + 4)^2} = \frac{(b_1 + 2)^4}{(b_1 + 4)^2} \quad (2.36)$$

Рівності (2.35) та (2.36) показують, що при $b_1 > 0$ максимальні значення с. щ. $MA(2)$ -процесу в точках $\lambda = \pi$ та $\lambda_0 = \arccos\left(-\frac{b_1(1 + b_2)}{4b_2}\right)$

співпадають на границі множин рис.12 та рис.6, яка є частиною гіперболи $b_2 = -\frac{b_1}{b_1 + 4}$.

Зауважимо, що при $b_1 = 0$ за формулами (2.23) та (2.25) $B(\pi) = B(0) = (1 + b_2)^2$. З іншого боку, при $b_1 = 0$ за формулою (2.32) $B(\lambda_0) = (1 - b_2)^2$.

Підсумовуючи попередні міркування, сформулюємо отриманий результат користуючись рис. 18.

Теорема 5. *Максимум величини $B(\lambda) = |b(e^{i\lambda})|^2, \lambda \in (0, \pi)$, утворюється:*

1) в області $S_1 = \{b_1 > 0, b_2 > -\frac{b_1}{b_1 + 4}\}$ в точці $\lambda = 0$, та дорівнює $B_0(0) = (1 + b_1 + b_2)^2$;

2) в області $S_2 = \{b_1 < 0, b_2 > -\frac{b_1}{b_1 - 4}\}$ в точці $\lambda = \pi$, та дорівнює $B_0(\pi) = (1 - b_1 + b_2)^2$;

3) в області $S_3 = \{b_2 < -\frac{b_1}{b_1 + 4}, b_2 < -\frac{b_1}{b_1 - 4}\}$ в точці

$\lambda_0 = \arccos\left(-\frac{b_1(1 + b_1)}{4b_2}\right)$, та дорівнює $B_0(\lambda_0) = (1 - b_2)^2 \left(1 - \frac{b_1^2}{4b_2}\right)^2$.

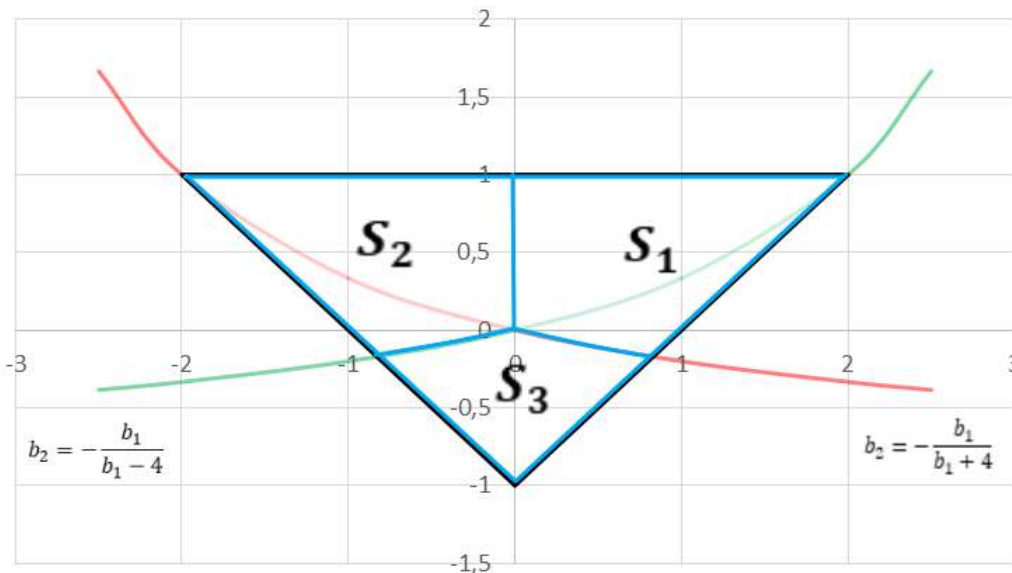


Рисунок 18.

3 Поверхня максимумів щільності ARMA(1,1) - процесу

Розглянемо ARMA(1,1)-процес

$$\varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1} = \xi_t + b\xi_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3.1)$$

де $\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}\}$ є білим субгауссівським шумом. Запишемо його с. щ.

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \cdot \frac{|b(e^{-i\lambda})|^2}{|a(e^{-i\lambda})|^2}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi], \quad (3.2)$$

де

$$(1 + be^{-i\lambda})^2 = (1 + b(\cos\lambda - i\sin\lambda))^2 = (1 + b\cos\lambda)^2 - (b\sin\lambda)^2 = 1 + 2b\cos\lambda + b^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda = 1 + 2b\cos\lambda + b^2,$$

$$(1 - ae^{i\lambda})^2 = (1 - a(\cos\lambda - i\sin\lambda))^2 = (1 - a\cos\lambda)^2 - (a\sin\lambda)^2 = 1 - 2a\cos\lambda + a^2\cos^2\lambda + a^2\sin^2\lambda = 1 - 2a\cos\lambda + a^2.$$

Маємо

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \cdot \frac{1 - 2a\cos\lambda + a^2}{1 + 2b\cos\lambda + b^2} \quad (3.3)$$

Треба знайти поверхню $\frac{1}{\max_\lambda f(\lambda)} = \frac{1}{\max_\lambda \frac{1 + 2b\cos\lambda + b^2}{1 - 2a\cos\lambda + a^2}} =$

$$\min_\lambda \frac{1}{\frac{1 + 2b\cos\lambda + b^2}{1 - 2a\cos\lambda + a^2}} = \min_\lambda \frac{1 - 2a\cos\lambda + a^2}{1 + 2b\cos\lambda + b^2} = C(\lambda, a, b), \quad \lambda \in [0, \pi],$$

тому що (3.3) - парна функція.

Треба знайти мінімум $C(\lambda, a, b)$ як функції від λ за умови, що параметри a, b знаходяться у множині

$$S_0 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : -1 < a < 1, -1 < b < 1\}. \quad (3.4)$$

Обчислимо похідну $C(\lambda)$, $\lambda \in (0, \pi)$ та знайдемо її критичні точки:

$$C'(\lambda) = \frac{2a\sin\lambda(1 + 2b\cos\lambda + b^2) + 2b\sin\lambda(1 - 2a\cos\lambda + a^2)}{(1 + 2b\cos\lambda + b^2)^2} =$$

$$\frac{2a\sin\lambda + 4ab\sin\lambda\cos\lambda + 2ab^2\sin\lambda + 2b\sin\lambda - 4ab\sin\lambda\cos\lambda + 2a^2b\sin\lambda}{(1 + 2b\cos\lambda + b^2)^2} =$$

$$\frac{(2a + 2ab^2 + 2b + 2a^2b)\sin\lambda}{(1 + 2b\cos\lambda + b^2)^2} = 0$$

$$\sin\lambda(2a + 2ab^2 + 2b + 2a^2b) = 0 \quad (3.5)$$

Рівність має місце, коли $\sin\lambda = 0$, тобто $\lambda = 0$, або $\lambda = \pi$

$$\sin\lambda((a+b)+(ab^2+a^2b)) = 0, \sin\lambda((a+b)+ab(a+b)) = 0, \sin\lambda((a+b)(1+ab)) = 0.$$

Мінімум досягається там, де друга похідна більше 0.

Знайдемо другу похідну функції $C(\lambda)$

$$C''(\lambda) = \cos\lambda(a + b)(1 + ab) > 0. \quad (3.6)$$

Підставимо критичну точку $\lambda = 0$. Для того, щоб виконувалась нерівність (3.6) треба, щоб $C''(0) = (a + b)(1 + ab) > 0$, тобто необхідно перевірити знаки дужок $(+, +)$.

$$a + b > 0, 1 + ab > 0; b > -a, ab > -1; a > 0, b > -\frac{1}{a}; a < 0, b < -\frac{1}{a}.$$



Рисунок 19. Область, де виконується $(+, +)$ та параметри $(a, b) \in S_0$.

Тепер розглянемо знаки дужок $(-, -)$:

$$a + b < 0, 1 + ab < 0; b < -a, ab < -1; 0, b < -\frac{1}{a}; a < 0, b > -\frac{1}{a}.$$

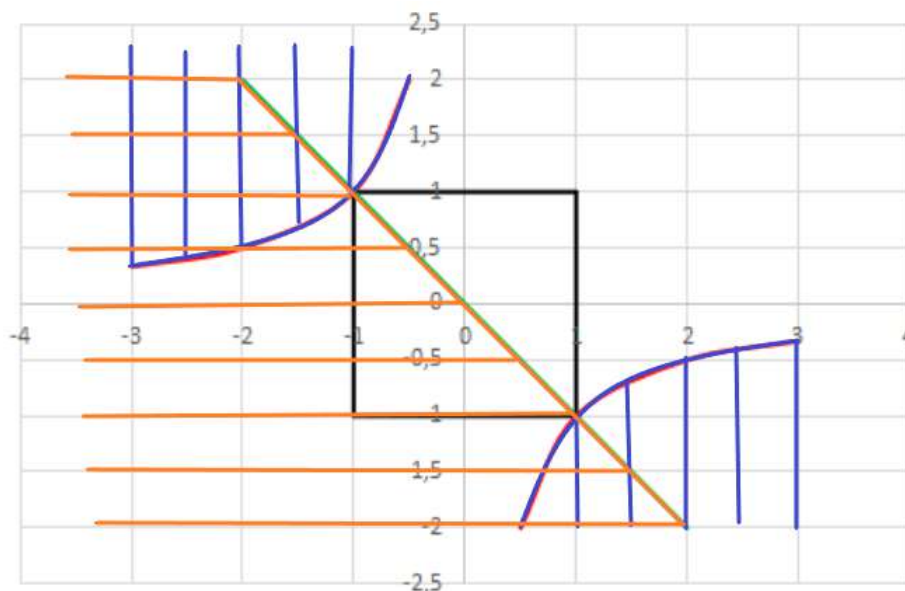


Рисунок 20. Область, де виконується $(-, -)$ та параметри $(a, b) \in S_0$.

З рисунка 20 видно, що знаки дужок $(-, -)$ дають порожню множину.

Підставимо критичну точку $\lambda = \pi$.

$$C''(\pi) = -(a + b)(1 + ab) > 0 \quad (3.7)$$

Для того, щоб виконувалась нерівність (3.7) необхідно, щоб її множники були різних знаків. Для початку перевіримо знаки дужок $(-, +)$. Маємо $a + b < 0$, $1 + ab > 0$; $b < -a$, $ab > -1$; $b < -a$; $a > 0$, $b > -\frac{1}{a}$; $a < 0$, $b < -\frac{1}{a}$.



Рисунок 21. Область, де виконується $(-, +)$ та параметри $(a, b) \in S_0$.

Перевіримо тепер знаки дужок $(+, -)$

$$a + b > 0, 1 + ab < 0; b > -a, ab < -1; b > -a; a > 0, b < -\frac{1}{a}; a < 0, b > -\frac{1}{a}.$$

Побудуємо область $(+,-)$ на рис.22 за умови, що параметри $(a, b) \in S_0$.

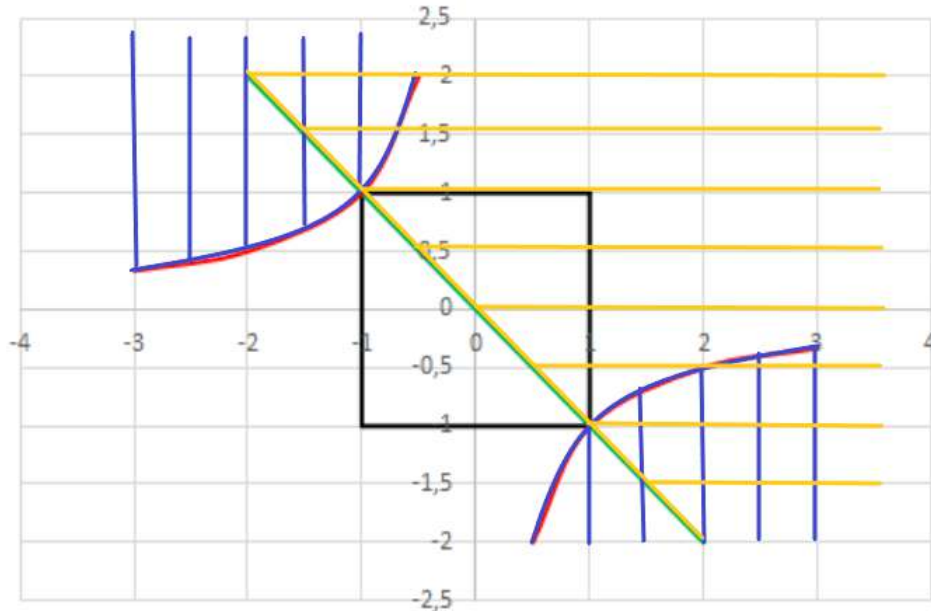


Рисунок 22.

З рисунка 22 видно, що область, де знаки дужок $(+, -)$ та те, що параметри $(a, b) \in S_0$ дає порожню множину.

Підсумовуючи попередні міркування, сформулюємо отриманий результат.

Теорема 6. $\min_{\lambda \in (0, \pi)} C(\lambda, a, b)$ утворюється:

1. в області $S_4 = \{(a, b) \in S_0 : b > -a\}$ в точці $\lambda = 0$ та дорівнює

$$C(0) = \frac{1 - 2a + a^2}{1 + 2b + b^2} = \frac{(1 - a)^2}{(1 + b)^2};$$

2. в області $S_5 = \{(a, b) \in S_0 : b < -a\}$ в точці $\lambda = \pi$ та дорівнює

$$C(\pi) = \frac{1 + 2a + a^2}{1 - 2b + b^2} = \frac{(1 + a)^2}{(1 - b)^2}.$$

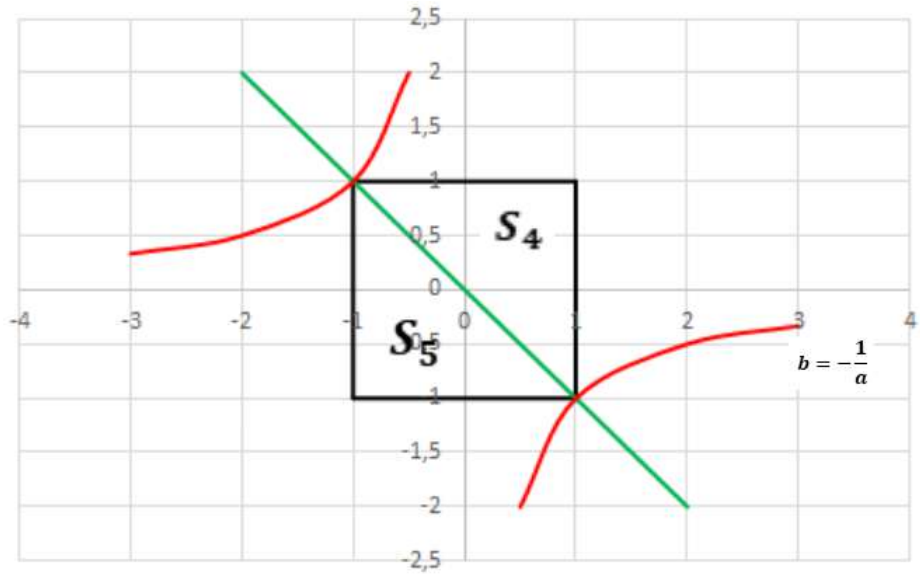


Рисунок 23.

4 Поверхності максимумів щільностей процесів з неперервним часом

В цьому розділі ми будемо спиратись на підрозділ 1.2. і застосуємо його результати до стаціонарних субгауссівських, зокрема, гауссівських випадкових процесів $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}$, із раціональними відносно λ с. щ. $f(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$.

Зауважимо, що будь-яка обмежена та додатна раціональна відносно λ функція $h(\lambda)$ може бути представлена у вигляді

$$h(\lambda) = \frac{|\tilde{P}(\lambda)|^2}{|\tilde{Q}(\lambda)|^2},$$

де поліноми

$$\tilde{P}(z) = \sum_{k=0}^m p_k z^k, \tilde{Q}(z) = \sum_{k=0}^n q_k z^k$$

не мають нулів у правій півплощині. Якщо функція $h(\lambda)$ є парною, то

$$h(\lambda) = \frac{|P(i\lambda)|^2}{|Q(i\lambda)|^2}, \quad (4.1)$$

де поліноми $P(z)$ та $Q(z)$ ($P(iz) = \tilde{P}(z)$, $Q(iz) = \tilde{Q}(z)$) мають дійсні коефіцієнти. Надалі нам буде зручно записувати раціональну с. щ. у вигляді

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{|P(i\lambda)|^2}{|Q(i\lambda)|^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

4.1 Коливальний контур

В цьому підрозділі ми розглянемо в моделі спостережень стаціонарний субгауссівський процес $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, що відповідає коливальному контуру, на який діє субгауссівський білий шум. Цей процес має коваріаційну функцію

$$B(t) = e^{-\alpha|t|} \cos \lambda_0 t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

та с. щ.

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\lambda - \lambda_0)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\lambda + \lambda_0)^2} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

де коефіцієнт затухання α та несуча частота λ_0 залежить від індуктивності L катушки, ємності C конденсатора та опору R коливального контуру.

Запишемо с. щ. (4.4) у вигляді (4.2). Маємо

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha(\alpha^2 + (\lambda - \lambda_0)^2 + \alpha^2 + (\lambda + \lambda_0)^2)}{(\alpha^2 + (\lambda - \lambda_0)^2)(\alpha^2 + (\lambda + \lambda_0)^2)}.$$

Чисельник цього дробу дорівнює

$$2\alpha(\alpha^2 + \lambda_0^2 + \lambda^2) = \sqrt{2\alpha} \left| \sqrt{\alpha^2 + \lambda_0^2} + i\lambda \right|^2 = |P(i\lambda)|^2,$$

тобто

$$P(z) = \sqrt{2\alpha} \left(\sqrt{\alpha^2 + \lambda_0^2} + z \right).$$

З іншого боку, знаменник можна записати у вигляді $|\alpha^2 + i(\lambda - \lambda_0)|^2 |\alpha^2 + i(\lambda + \lambda_0)|^2 = |(\alpha + i\lambda - i\lambda_0)(\alpha + i\lambda + i\lambda_0)|^2 = |(\alpha + i\lambda)^2 + \lambda_0^2|^2 = |Q(i\lambda)|^2$, причому поліном

$$Q(z) = (\alpha + z)^2 + \lambda_0^2 = z^2 + 2\alpha z + \alpha^2 + \lambda_0^2$$

має корені $z_{1,2} = -\alpha \pm i\lambda_0$, що розташовані в лівій півплощині, як і корінь полінома $P(z)$.

Процес $\varepsilon(t)$ припускає представлення

$$\varepsilon(t) = \int_R \hat{a}(t-s) d\xi(s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.5)$$

де $\hat{a}(t) = 0$, $t < 0$, та $a(\cdot) \in \mathbf{L}_2(R)$, $\xi(t)$ - проінтегрований субгауссівський білий шум (див. підрозділ 1.2), тобто субгауссівський шум із ортогональними приростами, для якого $E\xi(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, $E|\xi(t_2) - \xi(t_1)|^2 = t_2 - t_1$, $t_2 > t_1$. Процесу $\xi(t)$ відповідає ортогональна схоластична міра на σ -алгебрі множин, вимірних за Лебегом, та інтеграл (4.5) існує тоді і тільки тоді, коли $\hat{a} \in L_2(R)$.

Розглянемо функцію

$$a(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \hat{a}(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad a(\cdot) \in L_2(R). \quad (4.6)$$

Тоді с. щ. процесу $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}$, можна записати у вигляді

$$f(\lambda) = (2\pi)^{-1}a(\lambda)a(-\lambda) = (2\pi)^{-1}|a(\lambda)|^2, \quad (4.7)$$

тобто для процесів із раціональними с. щ. (4.2) та, зокрема, щільністю (4.4)

$$a(\lambda) = \frac{P(i\lambda)}{Q(i\lambda)}. \quad (4.8)$$

Щільність (4.4) залежить від двох параметрів $\alpha > 0, \lambda_0 > 0$ і ми можемо записати $f(\lambda; \alpha, \lambda_0)$. Таким чином, треба знайти поверхню

$$F(\alpha, \lambda_0) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}} f(\lambda; \alpha, \lambda_0), \quad \alpha > 0, \quad \lambda_0 > 0. \quad (4.9)$$

Знайдемо підозрілі на екстремум точки функції (4.4). Маємо

$$f'(\lambda) = -\frac{\alpha(\lambda - \lambda_0)}{\pi(\alpha^2 + (\lambda - \lambda_0)^2)^2} - \frac{\alpha(\lambda + \lambda_0)}{\pi(\alpha^2 + (\lambda + \lambda_0)^2)^2}. \quad (4.10)$$

Приводячи до спільного знаменника вираз (4.10), отримуємо дріб з чисельником

$$\begin{aligned} & -\alpha [(\lambda - \lambda_0)(\alpha^2 + (\lambda + \lambda_0)^2)^2 + (\lambda + \lambda_0)(\alpha^2 + (\lambda - \lambda_0)^2)^2] = \\ & -\alpha [\alpha^4(\lambda - \lambda_0) + 2\alpha^2(\lambda^2 - \lambda_0^2)(\lambda + \lambda_0) + (\lambda^2 - \lambda_0^2)(\lambda + \lambda_0)^3 + \\ & \alpha^4(\lambda + \lambda_0) + 2\alpha^2(\lambda^2 - \lambda_0^2)(\lambda - \lambda_0) + (\lambda^2 - \lambda_0^2)(\lambda - \lambda_0)^3] = \\ & -2\alpha[\alpha^4\lambda + 2\alpha^2(\lambda^2 - \lambda_0^2)\lambda + (\lambda^2 - \lambda_0^2)(\lambda^2 + 3\lambda_0^2)\lambda] = \\ & -2\alpha\lambda[\lambda^4 + 2(\lambda_0^2 + \alpha^2)\lambda^2 - 3\lambda_0^4 - 2\alpha^2\lambda_0^2 + \alpha^4]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Прирівнюючи цей вираз до нуля, отримуємо критичну точку $\lambda = 0$ та критичні точки, які ми знайдемо, розв'язавши квадратне рівняння

$$x^2 + 2(\lambda_0^2 + \alpha^2)x - 3\lambda_0^4 - 2\alpha^2\lambda_0^2 + \alpha^4. \quad (4.12)$$

Очевидно, корені рівняння (4.12) мають вигляд

$$x_{1,2} = -(\lambda_0^2 + \alpha^2) \pm 2\lambda_0\sqrt{\lambda_0^2 + \alpha^2}. \quad (4.13)$$

Корінь зі знаком "мінус" призводить до комплексних коренів вихідного біквдратного рівняння (це рівняння (4.12) відносно λ при $x = \lambda^2$). Корінь зі знаком "плюс" призводить до дійсних розв'язків λ , якщо

$$2\lambda_0\sqrt{\lambda_0^2 + \alpha^2} \geq \lambda_0^2 + \alpha^2 \geq \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \quad (4.14)$$

причому, якщо $\lambda_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$, то отримуємо корінь $\lambda = 0$.

Якщо ж у (4.13)

$$\lambda_0 > \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \quad (4.15)$$

то знаходимо точки підозрілі на екстремум

$$\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{2\lambda_0\sqrt{\lambda_0^2 + \alpha^2} - (\lambda_0^2 + \alpha^2)}. \quad (4.16)$$

Для подальшого дослідження щільності (4.4) обчислимо її другу похідну. Похідна першого доданку правої частини (4.10) має вигляд

$$-\frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{(\alpha^2 + (\lambda - \lambda_0)^2)^2 - 4(\lambda - \lambda_0)^2(\alpha^2 + (\lambda - \lambda_0)^2)}{(\alpha^2 + (\lambda - \lambda_0)^2)^4} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{3(\lambda - \lambda_0)^2 - \alpha^2}{(\alpha^2 + (\lambda - \lambda_0)^2)^3}.$$

Похідна другого доданку правої частини (4.10) має аналогічний вигляд, але з $\lambda + \lambda_0$ замість $\lambda - \lambda_0$. Таким чином,

$$f''(\lambda) = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{3(\lambda - \lambda_0)^2 - \alpha^2}{(\alpha^2 + (\lambda - \lambda_0)^2)^3} + \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{3(\lambda + \lambda_0)^2 - \alpha^2}{(\alpha^2 + (\lambda + \lambda_0)^2)^3}. \quad (4.17)$$

Перевіримо знак другої похідної в точці $\lambda = 0$ за умови $\lambda \neq \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$:

$$f''(0) = \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{3\lambda_0^2 - \alpha^2}{(\alpha^2 + \lambda_0^2)^3}, \quad \lambda_0 > \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \quad (4.18)$$

$$f''(0) < 0, \quad \lambda_0 < \frac{\alpha}{\sqrt{3}}. \quad (4.19)$$

Якщо $\lambda_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$, то, як ми з'ясували вище, $\lambda = 0$ є також критичною точкою, але $f''(0) = 0$, і характер цієї точки залишається невідомим.

Зі співвідношень (4.18) та (4.19) випливає, що при $\lambda_0 > \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ у точці $\lambda = 0$ маємо мінімум, а при $\lambda_0 < \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ у точці $\lambda = 0$ маємо максимум.

З формул (4.16) та (4.17) випливає, що $f''(\lambda_+) = f''(\lambda_-)$. Визначити знак другої похідної (4.17) в точці λ_+ , яку задано рівністю (4.16), - це складна задача. Легше з'ясувати, який знак має перша похідна (4.10) лівіше та правіше точки λ_+ . Позначимо корені квадратного рівняння (4.12)

$$x_1 = \lambda_+^2, x_2 = -(\lambda_0^2 + \alpha^2) - 2\lambda_0\sqrt{\lambda_0^2 + \alpha^2}$$

Очевидно, що графік параболи (4.12) $y = x^2 + px + q$, де позначено $p = 2(\lambda_0^2 + \alpha^2)$, $q = -3\lambda_0^4 - 2\alpha^2\lambda_0^2 + \alpha^4$, має вигляд .

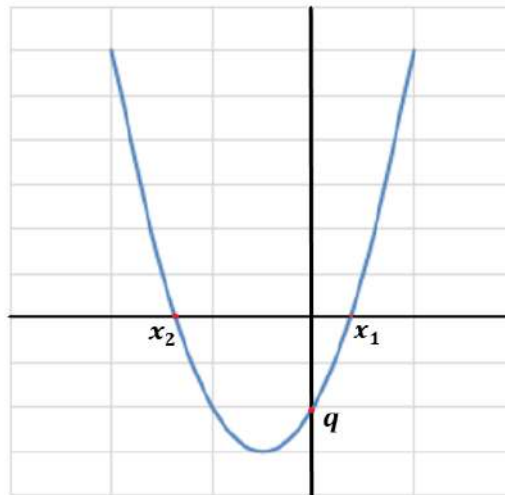


Рисунок 24.

Тоді, принаймні, для $\lambda > 0$ таких, що $x = \lambda^2 < \lambda_+^2 = x_1$, за умови $\lambda_0 > \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ вираз (4.11) є додатним. Аналогічно для додатних λ та $x = \lambda^2 > \lambda_+^2 = x_1$ при $\lambda_0 > \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ у вигляді (4.11) множник $-2\alpha\lambda < 0$, а множник у квадратних дужках є додатним, тобто перша похідна набуває від'ємного значення. Це означає, що при $\lambda_0 > \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ в точках λ_+ та λ_- досягається максимум с. щ. (4.4).

Нехай $\lambda_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$. Тоді у (4.11) $p = 2(\lambda_0^2 + \alpha^2) = 2\left(\frac{\alpha^2}{3} + \alpha^2\right) = \frac{8}{3}\alpha^2$,
 $q = -3\lambda_0^4 - 2\alpha^2\lambda_0^2 + \alpha^4 = -\frac{1}{3}\alpha^4 - \frac{2}{3}\alpha^4 + \alpha^4 = 0$. Таким чином, перша

похідна с. щ. $f(\lambda)$ набуває вигляду

$$f'(\lambda) = \frac{-2\alpha\lambda^3(\lambda^2 + \frac{8}{3}\alpha^2)}{\pi \left(\alpha^2 + \left(\lambda - \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) \cdot \left(\alpha^2 + \left(\lambda + \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right)^2 \right)}. \quad (4.20)$$

При $\lambda < 0$ $f'(\lambda) > 0$, а при $\lambda > 0$ $f'(\lambda) < 0$, тобто за умови $\lambda_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ в точці $\lambda = 0$ с. щ. $f(\lambda)$ має максимум.

Підсумовуючи отримані факти, ми можемо сформулювати наступне твердження.

Теорема 7. Якщо с. щ. $f(\lambda) = f(\lambda; \alpha, \lambda_0)$, $\alpha > 0$, $\lambda_0 > 0$, субгауссівського стаціонарного процесу (4.5) задано формулою (4.4), то її поверхня максимумів (4.9) має вигляд

$$F(\alpha, \lambda_0) = \begin{cases} f(0) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_0^2}, \quad \lambda_0 \geq \frac{\alpha}{\sqrt{3}}; \\ f(\lambda_+) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\lambda_+ - \lambda_0)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\lambda_+ + \lambda_0)^2} \right), \quad \lambda_0 < \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \\ \lambda_+ = \sqrt{2\lambda_0 \sqrt{\alpha^2 + \lambda_0^2} - (\alpha^2 + \lambda_0^2)}. \end{cases}$$

Зауважимо, що на прямій лінії $\lambda_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$

$$\frac{\alpha}{\pi \left(\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{3} \right)} = \frac{3}{4\pi} \alpha, \quad \lambda_+ = \sqrt{\frac{2\alpha}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2}{3} + \alpha^2} - \frac{4}{3}\alpha^2} = 0,$$

тобто функція $F(\alpha, \lambda_0)$ є неперервною за сукупністю змінних (α, λ_0) .

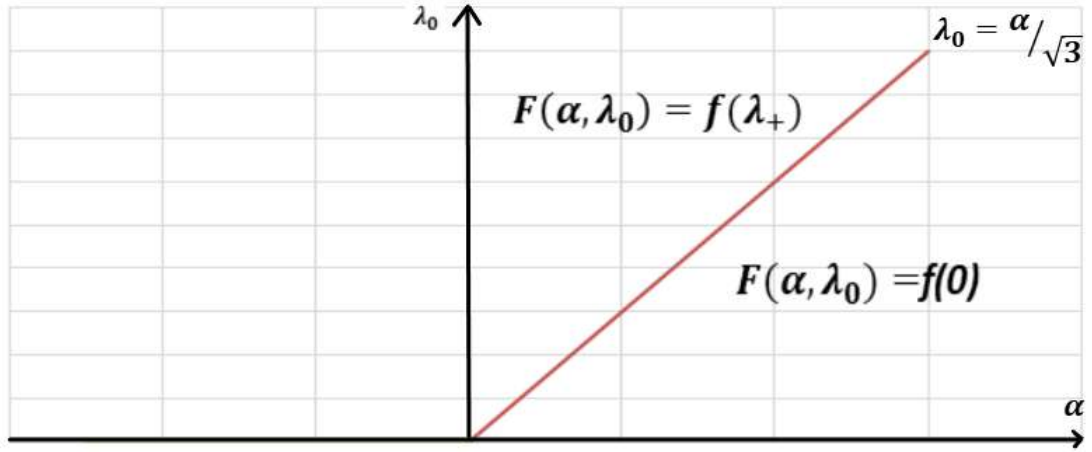


Рисунок 25.

4.2 Рух маятника у турбулентній рідині

Наведемо деякі результати, що містяться в роботах [20], [21]

Ми розглянемо стаціонарний субгауссівський випадковий процес $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, який описує рух маятника та задовольняє диференціальне рівняння

$$\ddot{\varepsilon}(t) + 2\alpha\dot{\varepsilon}(t) + (\alpha^2 + \omega^2)\varepsilon(t) = \dot{W}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.21)$$

де $\varepsilon(t)$ є його відхиленням від стану спокою, α - коефіцієнт демпфірування (затухання), ω - демпфована циклічна частота, \dot{W} - субгауссівський білий шум, тобто похідна субгауссівського процесу з ортогональними приростами W такого, що $EW(t) = 0, t \in \mathbb{R}, E|W(t_2) - W(t_1)|^2 = t_2 - t_1, t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_2 > t_1$. Похідна \dot{W} в рівності (4.22) розглядається в узагальненому сенсі. Розв'язок цього рівняння можна записати за допомогою функції Гріна як лінійний процес

$$\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{a}(t-s)dW(s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.22)$$

де функція Гріна

$$\hat{a} = e^{-\alpha t} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \mathbb{I}_{[0, \infty)}(t), \quad \alpha > 0. \quad (4.23)$$

Коваріаційна функція процесу $\varepsilon(t)$ має вигляд

$$B(t) = \int_0^\infty \hat{a}(t+s)\hat{a}(s)ds = \frac{1}{4(\alpha^2 + \omega^2)} e^{-\alpha|t|} \left(\frac{\sin(\omega|t|)}{\omega} + \frac{\cos(\omega t)}{\alpha} \right). \quad (4.24)$$

З іншого боку, для \hat{a} заданої (4.23)

$$a(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-i\lambda t} \hat{a}(t) dt = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2 - \lambda^2 + 2\alpha i\lambda}. \quad (4.25)$$

Тоді с. щ. субгауссівського стаціонарного процесу ε можна записати у вигляді (див. формулу (4.7))

$$f(\lambda) = (2\pi)^{-1} |a(\lambda)|^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(\lambda^2 - \alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.26)$$

Перепишемо знаменник правої частини рівності (4.26) у формі

$$Q(i\lambda) = (i\lambda)^2 + 2\alpha(i\lambda) + \alpha^2 + \omega^2. \quad (4.27)$$

Поліном $Q(z) = z^2 + 2\alpha z + \alpha^2 + \omega^2$ має корені $-\alpha \pm i\omega$, що знаходяться в лівій півплощині. Таким чином, рівняння (4.21) можна записати у символічному вигляді

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right) \varepsilon(t) = \dot{W}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

а щільність (4.26) як раціональну с. щ.

$$f(\lambda) = (2\pi)^{-1} |Q(i\lambda)|^{-2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.28)$$

Оскільки $f(\lambda) = f(\lambda; \alpha, \omega)$, $Q(i\lambda) = Q(i\lambda; \alpha, \omega)$, $\alpha > 0$, $\omega > 0$, то задача полягає в знаходженні поверхні

$$G(\alpha, \omega) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}} f(\lambda; \alpha, \omega) = (2\pi)^{-1} \left(\min_{\lambda \in \mathbb{R}} |Q(i\lambda; \alpha, \omega)|^2 \right)^{-1}. \quad (4.29)$$

Зауважимо, що максимум щільності входить в знаменник дробу в показнику експоненти формули (4.25), тобто для обчислення потрібної константи в (4.25) треба, насправді, знайти поверхню

$$S(\alpha, \omega) = 2\pi \min_{\lambda \in \mathbb{R}} |Q(i\lambda; \alpha, \omega)|^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.30)$$

на чому ми й зосередимось. Маємо

$$|Q(i\lambda; \alpha, \omega)|^2 = (\lambda^2 - \alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \lambda^2 =$$

$$\lambda^4 - 2(\alpha^2 + \omega^2)\lambda^2 + (\alpha^2 + \omega^2)^2 + 4\alpha^2\lambda^2 = \lambda^4 + 2(\alpha^2 - \omega^2)\lambda^2 + (\alpha^2 + \omega^2)^2. \quad (4.31)$$

Визначимо критичні точки функції (4.31):

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} |Q(i\lambda; \alpha, \omega)|^2 = 4\lambda(\lambda^2 + \alpha^2 - \omega^2) = 0. \quad (4.32)$$

Розглянемо випадок $\omega < \alpha$. Тоді множник у дужках у (4.32) завжди додатний, і ми маємо єдину критичну точку $\lambda = 0$. Очевидно, що $\lambda = 0$ точка мінімуму, тому що для від'ємних λ похідна (4.32) від'ємна, а для додатних λ - додатна. Коли $\omega = \alpha$, то точка $\lambda = 0$ також є точкою мінімуму. Таким чином,

$$S(\alpha, \omega) = 2\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2, \omega < \alpha; S(\alpha, \alpha) = 8\pi\alpha^4. \quad (4.33)$$

Нехай тепер $\omega > \alpha$. Тоді існує ще дві критичні точки $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$. Оскільки $|Q(i\lambda; \alpha, \omega)|^2$ є парною функцією, то достатньо розглянути тільки точку $\lambda_+ = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$. Отримуємо далі

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} |Q(i\lambda; \alpha, \omega)|^2 = 12\lambda_+^2 + 4(\alpha^2 - \omega^2) = 8(\omega^2 - \alpha^2) > 0,$$

тобто в точці λ_+ та одночасно в точці λ_- маємо мінімум. З іншого боку, $\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} |Q(i\lambda; \alpha, \omega)| = 4(\alpha^2 - \omega^2) < 0$, тобто в точці $\lambda = 0$ маємо максимум. Остаточно,

$$\begin{aligned} S(\alpha, \omega) &= 2\pi [(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 2(\omega^2 - \alpha^2)(\omega^2 - \alpha^2) + (\alpha^2 + \omega^2)^2] = \\ &= 2\pi [(\alpha^2 + \omega^2)^2 - (\omega^2 - \alpha^2)^2] = 8\pi\alpha^2\omega^2, \omega > \alpha. \end{aligned} \quad (4.34)$$

З огляду на рівності (4.33) та (4.34) сформуємо наступне твердження.

Теорема 8. *Нехай стаціонарний субгаусівський процес $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}$, є розв'язком диференціального рівняння (4.22). Тоді його с. щ., що задана*

формулами (4.27)-(4.29), має поверхню максимумів, яку можна записати, використовуючи функцію (4.31), у вигляді

$$S^{-1}(\alpha, \omega) = \begin{cases} f(0) = \frac{1}{2\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}, \omega \leq \alpha; \\ f(\lambda_+) = \frac{1}{8\pi\alpha^2\omega^2}, \omega > \alpha, \\ \lambda_+ = \sqrt{\omega - \alpha^2} \end{cases}$$

Зауважимо, що на прямій лінії $\omega = \alpha$, очевидно, $\lambda_+ = 0$, $2\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2 = 8\pi\alpha^2\omega^2 = 8\pi\alpha^4$, тобто поверхня (4.36) є неперервною функцією змінних $\alpha > 0, \omega > 0$.

Висновки

У магістерській дисертації розглянуто експоненціальні оцінки ймовірностей великих відхилень ОНК у нелінійних моделях регресії. Для дискретного часу спостережень побудовано поверхні максимумів с. щ. $MA(2)$, $ARMA(1,1)$ процесів. Для неперервного часу спостережень, побудовано поверхні максимумів с. щ. коли стаціонарний строго субгауссівський випадковий шум відповідає коливальному контуру та маятнику, що рухається в турбулентній рідині, якщо на них діє субгауссівський білий шум.

Природним напрямком продовження цих досліджень є перенесення результатів отриманих у магістерській дисертації на випадок загальних $ARMA(p,k)$, $AR(p)$ та $MA(2)$ процесів. Ці поверхні максимумів не можна побудувати у явному вигляді, тому треба створювати програмне забезпечення для розв'язання таких оптимізаційних задач.

Список використаних джерел

- [1] Ibragimov, I.A., Has'minskii, R.Z.: Statistical Estimation: Asymptotic Theory. Springer, New York (1981) MR0620321.
- [2] Ivanov, A.V.: An asymptotic expansion for the distribution of the least squares estimator of the non-linear regression parameter. Theory. Probab. Appl. 21(3), 557–570, (1977).
- [3] Rao, B.L.S.P.: On the exponential rate convergence of the least squares estimator in the nonlinear regression model with Gaussian errors. Statist. Probab. Lett. 2, 139–142 (1984). MR0747613. [https://doi.org/10.1016/0167-7152\(84\)90004-X](https://doi.org/10.1016/0167-7152(84)90004-X).
- [4] Sieders, A., Dzhaparidze, K.O.: A large deviation result for parameter estimators and its application to nonlinear regression analysis. Ann. Statist. 15(3), 1031–1049 (1987). MR0902244. <https://doi.org/10.1214/aos/1176350491>.
- [5] Yang, W.Z., Hu, S.H.: Large deviation for a least squares estimator in a nonlinear regression model. Stat. Probab. Lett. 91, 135–144 (2014). MR3208127. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2014.04.022>.
- [6] Ivanov, A.V.: Asymptotic Theory of Nonlinear Regression. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London (1997). MR1472234. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-8877-5>.
- [7] Ivanov, A.V., Leonenko, N.N.: Statistical Analysis of Random Fields. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London (1989). MR1009786. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1183-3>.
- [8] Rao, B.L.S.P.: The rate of convergence for the least squares estimator in a non-linear regression model with dependent errors. J. Multivariate

- Analysis 14(3), 315–322 (1984). MR0747260. [https://doi.org/10.1016/0047-259X\(84\)90036-8](https://doi.org/10.1016/0047-259X(84)90036-8).
- [9] Hu, S.H.: A large deviation result for the least squares estimators in nonlinear regression. *Stochastic Process and their Applications* 47, 345–352 (1993). MR1239845. [https://doi.org/10.1016/0304-4149\(93\)90022-V](https://doi.org/10.1016/0304-4149(93)90022-V).
- [10] Yang, W.Z., Hu, S.H.: Large deviation for a least squares estimator in a nonlinear regression model. *Stat. Probab. Lett.* 91, 135–144 (2014). MR3208127. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2014.04.022>
- [11] Huang, X., Tang, X., Deng, X., Wang, X.: The large deviation for the least squares estimator of nonlinear regression model based on WOD errors. *J. Inequal. Appl.* 125 (2016). MR3489878. <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1064-6>
- [12] Ivanov, A.V.: Large deviations of regression parameter estimate in the models with stationary sub-Gaussian noise. *Theor. Probability and Math. Statist.* 95, 99–108 (2017). MR3631646. <https://doi.org/10.1090/tpms/1024>.
- [13] Ivanov A. V., Orlovskiy I. V.: Large deviations of regression parameter estimator in continuous-time models with sub-Gaussian noise, *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 5 (2), 191–206, (2018).
- [14] Іванов О. В., Карпова Н. В.: Поверхня максимумів спектральної щільності AR(2)-процесів та її застосування в статистиці часових рядів, *Наукові вісті НТУУ "КПІ ім. Ігоря Сікорського* 39-46, №4(114), 2017.
- [15] Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.: *Metric characterization of random variables and random processes*, AMS, Providence, 2000.
- [16] Feller W.: *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 2, 2-nd Edition, Wiley, New York, 1957.

- [17] Gikhman I.I., Skorokhod A. V.: Introduction to the Theory of Random Processes, Dover Publications, Inc., 1996.
- [18] Brockwell P.J., Davis R.A.: Introduction to Time Series and Forecasting, 2-nd Edition, Springer, New York, 2002.
- [19] Ito, K., Nisio, M.: On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables. Osaka J. of Math 5(1), 35–48 (1968) MR0235593
- [20] Parzen E.: Stochastic Processes. Holden-Day, Inc., San Francisco, London, Amsterdam.(1962).
- [21] Anh V.V., Heyde C.C., Leonenko N.N. Dynamic models of long-memory processes driven by Levy noise. J.Appl.Prob.39, No 4, 730–747, (2002).
- [22] Лиховид С. П.: Поверхня максимумів спектральних щільностей MA(2)-процесів та великі відхилення оцінки найменших квадратів. // Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Нац. техн. ун-т України "КПІ ім. І. Сікорського". – Київ. – 2019. – с. 20.
- [23] Лиховид С. П.: Поверхня максимумів спектральних щільностей MA(2)-процесів. // IX Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. Нац. техн. ун-т України "КПІ ім. І. Сікорського". – Київ. – 2020. – с. 12.