**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК _______________

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

________ Олег КЛЕСОВ

«___»____________20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Полівекторні поля в нескінченновимірному аналізі»

Виконав:
студент VI курсу, групи ОМ-81мн
Шрам Владислав Юрійович ___________

Керівник:
професор НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
доктор фіз.-мат. наук, професор
Богданський Юрій Вікторович ___________

Рецензент:
провідний науковий співр.
Інституту математики НАН України,
доктор фіз.-мат. наук, старший наук. співр.
Калюжний Олександр Олександрович ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент ______________

Київ – 2020 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
_______ Олег КЛЕСОВ
«___»____________20__ р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Шраму Владиславу Юрійовичу

1. Тема дисертації «Полівекторні поля в нескінченновимірному аналізі», науковий керівник дисертації Богданський Юрій Вікторович д.ф.-м.н., професор, затверджені наказом по університету від «17» березня 2020 р. № 891-с.

2. Термін подання студентом дисертації: 11 травня 2020 р.

3. Об’єкт дослідження: полівекторні поля на банахових многовидах

4. Предмет дослідження: дивергенція полівекторних полів на банахових многовидах та її основні властивості

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) Ознайомитись зі скінченновимірною конструкцією дивергенції полівекторних полів

2) Узагальнити її на випадок нескінченновимірного многовиду

3) Встановити основні властивості побудованого оператора дивергенції

4) Дослідити зв’язок дивергенці на многовиді з дивергенцією на підмноговидах.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: слайди презентації.

7. Орієнтовний перелік публікацій:

1) Представити результати дисертації на IX Всеукраїнській науковій конференції молодих вчених з математики, яка пройде 10-11 квітня у м. Києві, та опублікувати тези доповіді.

2) Підготувати статтю для наукової публікації

8. Дата видачі завдання: 03 лютого 2020 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Ознайомлення з літературою. Оволодіння необхідним апаратом диференціальної геометрії та аналізу на многовидах	03.02.2020–23.02.2020	виконано
2	Узагальнення скінченновимірної версії оператора дивергенції полівекторних полів на випадок нескінченновимірного многовиду	24.02.2020–08.03.2020	виконано
3	Отримання аналогів основних властивостей скінченновимірної дивергенції у нескінченновимірному випадку	09.03.2020–29.03.2020	виконано
4	Дослідження зв’язку дивергенції полівекторних полів на банаховому многовиді із дивергенцією на підмноговидах	30.03.2020–30.04.2020	виконано
5	Оформлення магістерської дисертації	01.05.2020–06.05.2020	виконано

Студент Владислав ШРАМ

Науковий керівник Юрій БОГДАНСЬКИЙ

АНОТАЦІЯ

Магістерська дисертація: 44 сторінки, 14 джерел.

Актуальність теми роботи зумовлена необхіднісю побудови розвиненого апарату нескінченновимірного аналізу та знаходження його застосувань в інших областях математики, таких як нескінченновимірна диференціальна геометрія та теорія випадкових процесів.

Мета роботи полягає в дослідженні оператора дивергенції полівекторних полів на банахових многовидах.

Об'єктом дослідження є полівекторні поля на скінченновимірних та нескінченновимірних многовидах.

Предметом дослідження є дивергенція полівекторних полів на банахових многовидах з радоновою мірою та її основні властивості.

У ході дослідження активно використовуються поняття та методи полілінійної алгебри, аналізу на многовидах, функціонального аналізу, диференціальної геометрії та топології.

Результати роботи можна умовно розділити на три групи. По-перше, було побудовано узагальнення скінченновимірної версії оператора дивергенції полівекторноих полів на випадок (нескінченновимірного) банахового многовиду. По-друге, у роботі були отримані важливі нові результати щодо властивостей цього оператора, які узагальнюють відповідні властивості скінченновимірної дивергенції. Насамкінець, було отримано нетривіальний зв'язок дивергенції полівекторних полів на многовиді $\mathcal{M}$ та дивергенції на вкладеній поверхні $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ скінченної корозмірності.

Ключові слова та фрази: полівекторне поле, дивергенція, банахів многовид, радонова міра, поверхнева міра.

ABSTRACT

Master's thesis: 44 pages, 14 references.

The relevance of the topic of this work is due to the necessity of building developed machinery of infinite-dimensional analysis and finding applications of the latter to other areas of mathematics, such as infinite-dimensional differential geometry and the theory of stochastic processes.

The aim of this work is to study the divergence operator on multivector fields on Banach manifolds.

The object of the study is multivector fields on finite-dimensional and infinite-dimensional manifolds.

The subject of the study is the divergence of multivector fields on Banach manifolds with a Radon measure and its main properties.

In the course of the study we actively employ notions and methods of multilinear algebra, analysis an manifolds, functional analysis, differential geometry and topology.

The results of the study can be devided into three groups. First, we constructed a generalisation of the finite-dimensional version of the divergence operator to the case of an (infinite-dimensional) Banach manifold. Second, we obtained important mew results on the properties of this operator, which generalise the corresponding properties of the finite-dimensional divergence. Finally, we obtained a non-trivial connection between the divergence of multivector fields on a manifold $\mathcal{M}$ and the divergence on the embedded surface $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ of finite codimension.

Key words and phrases: multivector field, divergence, Banach manifold, Radon measure, surface measure.

ЗМІСТ

ВСТУП

Задача узагальнення відомих конструкцій та результатів аналізу на многовидах на випадок нескінченної розмірності є однією з центральних тем нескінченновимірного аналізу. Це дозволить не тільки побудувати адекватний апарат нескінченновимірного аналізу, але й знайти важливі застосування останнього у різних областях математики, зокрема у нескінченновимірній диференціальній геометрії та теорії ймовірностей.

Метою даної роботи є побудова конструкції оператора дивергенції полівекторних полів на нескінченновимірних многовидах та дослідження його основних властивостей. У скінченновимірному випадку оператор дивергенції полівекторних полів будується за допомогою форми об'єму, заданої на многовиді. Оскільки на нескінченновимірних многовидах немає форм об'єму, то така конструкція в цьому випадку втрачає сенс. Альтернативна конструкція, яка є узагальненням скінченновимірної версії, дозволяє визначити оператор дивергенції полівекторних полів для широкого класу банахових многовидів.

У роботі досліджується зв'язок скінченновимірної та нескінченновимірної версій оператора дивергенції, а також встановлюються його основні властивості як у скінченновимірному, так і у нескінченновимірному випадках, до яких належать, серед інших, правило Лейбніца та зв'язок оператора дивергенції на многовиді з операторами дивергенції на відповідних підмноговидах.

РОЗДІЛ 1 ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Тензорний добуток та зовнішній степінь модулів

У цьому підрозділі будуть наведені означення тензорного добутку та зовнішнього степеня модулів та результати про їх існування та єдиність. Більш детально дані відомості описано, наприклад, у роботі [13].

Означення 1. Нехай R — довільне кільце. *(Лівим) R-модулем* називається абелева група $(M, +)$ разом з операцією множення на скаляр $R \times M \ni (a, m) \mapsto am \in M$, яка задовольняє наступні властивості

а) $(a + b)m = am + bm$ для будь-яких $a, b \in R$ та $m \in M$;

б) $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$ для будь-яких $a \in R$ та $m_1, m_2 \in M$;

в) $(ab)m = a(bm)$ для будь-яких $a, b \in R$ та $m \in M$.

Якщо R — кільце з одиницею та $1_R m = m$ для будь-якого $m \in M$, то R-модуль M називають *унітарним.*

Означення 2. Нехай M та N — два R-модулі. Відображення $L : M \to N$ називається *лінійним*, якщо

$$L(am_1 + bm_2) = aL(m_1) + bL(m_2) \tag{1.1}$$

для будь-яких $a, b \in R$ та $m_1, m_2 \in M$.

Означення 3. Нехай $M_1, \ldots, M_k$ та N — R-модулі. Відображення $\alpha : M_1 \times \cdots \times M_k \to N$ називається *полілінійним* (k-*лінійним*), якщо для будь-якого i, $1 \leq i \leq k$, і довільного фіксованого

$(m_1, \dots, \widehat{m_i}, \dots, m_k) \in M_1 \times \dots \times \widehat{M_i} \times \dots \times M_k$ відображенння

$$m \mapsto \alpha(m_1, \dots, m_{i-1}, \underset{i\text{-те місце}}{m}, m_{i+1}, \dots, m_k) \tag{1.2}$$

є лінійним.

Зауваження 1. Тут і далі символом $\widehat{\cdot}$ позначатимемо той факт, що відповідна координата пропускається. Наприклад, $(m_1, \dots, \widehat{m_i}, \dots, m_k)$ означає $(m_1, \dots, m_{i-1}, m_{i+1}, \dots, m_k)$.

Надалі вважаємо, що R — фіксоване комутативне кільце з одиницею 1_R, а усі модулі є унітарними R-модулями.

Означення 4. Модуль T разом із полілінійним відображенням $\otimes : M_1 \times \dots \times M_k \to T$ називається *тензорним добутком* модулів $M_1, \dots, M_k$, якщо для будь-якого R-модуля N і будь-якого полілінійного відображення $\varphi : M_1 \times \dots \times M_k \to N$ існує єдине лінійне відображення $\tilde{\varphi} : T \to N$ таке, що $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \otimes$, тобто діаграма

$$\begin{tikzcd} M_1 \times \dots \times M_k \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\otimes"'] & N \\ T \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

є комутативною.

Твердження 1 (Єдиність тензорного добутку)**.** *Нехай* $(T_1, \otimes_1)$ *та* $(T_2, \otimes_2)$ *обидва є тензорними добутками* $M_1, \dots, M_k$*. Тоді існує єдиний ізоморфізм*

$\Phi : T_1 \to T_2$ *такий, що* $\Phi \circ \otimes_1 = \otimes_2$, *тобто діаграма*

$$\begin{tikzcd} & M_1 \times \cdots \times M_k \arrow[dl, "\otimes_1"'] \arrow[dr, "\otimes_2"] & \\ T_1 \arrow[rr, "\Phi"] & & T_2 \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

є комутативною.

Твердження 2. *Для довільних* R*-модулів* $M_1, \ldots, M_k$ *існує їх тензорний добуток* $(T, \otimes)$.

Тензорний добуток модулів $M_1, \ldots, M_k$ позначається $M_1 \otimes \cdots \otimes M_k$. Якщо $(m_1, \ldots, m_k) \in M_1 \times \cdots \times M_k$, то елемент $\otimes(m_1, \ldots, m_k)$ позначають $m_1 \otimes \cdots \otimes m_k$. Елементи, які допускають представлення у вигляді $m_1 \otimes \cdots \otimes m_k$, називаються *розкладними*. Нескладно зрозуміти, що тензорний добуток $M_1 \otimes \cdots \otimes M_k$ породжується множиною своїх розкладних елементів. [13]

Означення 5. Модуль E разом із полілінійним відображенням $\wedge : \underbrace{M \times \cdots \times M}_{\text{k копій}} \to E$ називається k*-м зовнішнім степенем* модуля M, якщо для будь-якого R-модуля N і будь-якого полілінійного кососиметричного відображення $\varphi : \underbrace{M \times \cdots \times M}_{\text{k копій}} \to N$ існує єдине лінійне відображення $\tilde{\varphi} : E \to N$ таке, що $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \wedge$, тобто діаграма

$$\begin{tikzcd} M \times \cdots \times M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\wedge"'] & N \\ E \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

є комутативною.

Твердження 3 (Єдиність зовнішнього степеня)**.** *Нехай* $(E_1, \wedge_1)$ *та*

$(E_2, \wedge_2)$ *обидва є* k*-ми зовнішніми степенями* M*. Тоді існує єдиний ізоморфізм* $\Phi : E_1 \to E_2$ *такий, що* $\Phi \circ \wedge_1 = \wedge_2$*, тобто діаграма*

$$\begin{tikzcd} & M \times \cdots \times M \arrow[dl, "\wedge_1"'] \arrow[dr, "\wedge_2"] & \\ E_1 \arrow[rr, "\Phi"] & & E_2 \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

є комутативною.

Твердження 4 (Існування зовнішнього степеня)**.** *Для довільного* R*-модуля* M *існує його* k*-й зовнішній степінь* $(E, \wedge)$*.*

k-тий зовнішній степінь M позначається $\bigwedge^k M$. Елементи $\bigwedge^k M$ називаються *полівекторами.* Якщо $(m_1, \ldots, m_k) \in \underbrace{M \times \cdots \times M}_{\text{k копій}}$, то полівектор $\wedge(m_1, \ldots, m_k)$ позначають $m_1 \wedge \cdots \wedge m_k$. Полівектори, які допускають представлення у вигляді $m_1 \wedge \cdots \wedge m_k$, називають *розкладними.* Аналогічно до тензорного добутку, зовнішній степінь $\bigwedge^k M$ породжується множиною своїх розкладних полівекторів.

1.2 Банахові многовиди, полівекторні поля та диференцальні форми

У цьому підрозділі ми наведемо означення банахового многовиду та опишемо деякі конструкції та поняття, які з ним пов'язані. Зауважимо, що певна частина цих понять переноситься без змін із скінченновимірної диференціальної геометрії, тому ми не будемо детально зупинятися на кожному з них. Більш детально дані відомості описано, наприклад, у роботі [12].

Означення 6. Нехай $\mathcal{M}$ — множина, а E — банахів простір. *E-атласом класу C^p* ($p \geq 0$) на $\mathcal{M}$ називається набір пар $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ (які називаються *картами*) такий, що

а) Кожен U_α є підмножиною $\mathcal{M}$ та $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = \mathcal{M}$;

б) Кожен φ_α є взаємно однозначним відображенням U_α на відкриту підмножину $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ простору E та для будь-яких α, β множина $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ є відкритою в E;

в) Для будь-яких α, β *відображення склейки* (або *відображення заміни координат*)

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

є C^p-дифеоморфізмом.

Зауваження 2. Можна показати, що існує єдина топологія на $\mathcal{M}$ така, що усі множини U_α є відкритими, а відображення φ_α є гомеоморфізмами.

Два E-атласи Ω_1 та Ω_2 на $\mathcal{M}$ класу C^p називаються *еквівалентними*, якщо $\Omega_1 \cup \Omega_2$ також є атласом класу C^p. Клас еквівалентних E-атласів на $\mathcal{M}$ класу C^p називається *C^p-сруктурою* на $\mathcal{M}$. Множина $\mathcal{M}$ разом із фіксованою C^p-сруктурою називається банаховим *многовидом* класу C^p, змодельованим на просторі E.

Аналогічно до скінченновимірного випадку вводиться поняття C^p-морфізму. А саме, нехай $\mathcal{M}$ та $\mathcal{N}$ — многовиди. Відображення $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ називається *C^p-морфізмом*, якщо для будь-якого $x \in \mathcal{M}$ існує карта (U, φ) в точці x (тобто $x \in U$) та карта (V, ψ) в точці $f(x)$

такі, що $f(U) \subset V$ та відображення

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

належить до класу C^p.

Зрозуміло, що композиція C^p-морфізмів є знову C^p-морфізмом.

Нехай $\mathcal{M}$ — банахів многовид класу C^p ($p \geq 1$) з модельним простором E. Нехай $x \in \mathcal{M}$. Розглянемо трійку (U, φ, v), де (U, φ) — карта в точці x, а v — елемент E. Дві такі трійки (U, φ, v) та (V, ψ, w) називають еквівалентними, якщо $(\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))v = w$. Нескладно перевірити, що це відношення еквівалентності. Тоді, клас еквівалентності таких трійок називається *дотичним вектором* до многовиду $\mathcal{M}$ у точці x. Множина усіх дотичних векторів у точці x називається *дотичним простором* до многовиду $\mathcal{M}$ у точці x і позначається $T_x\mathcal{M}$. [12]

Природним чином будується дотичне розшарування $T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ банахового многовиду $\mathcal{M}$ та k-тий зовнішній степінь $\bigwedge^k T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ дотичного розшарування. Для многовиду $\mathcal{M}$ класу C^p його дотичне розшарування $T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ належить до класу C^{p-1}.

Так само як і у скінченновимірній диференціальній геометрії вводиться поняття *векторного поля* на банаховому многовиді $\mathcal{M}$. А саме, векторне поле класу C^s на банаховому многовиді $\mathcal{M}$ класу C^p (де $1 \leq s \leq p-1$) визначається як C^s-переріз дотичного розшарування $T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ многовиду $\mathcal{M}$. Аналогічно, *полівекторні поля* (а саме *k-векторні поля*) визначаються як перерізи k-го зовнішнього степеня $\bigwedge^k T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ дотичного розшарування (зазначимо при цьому, що у подальшому дослідженні ми розглядаємо лише полівекторні поля, які є лінійними комбінаціями розкладних полівекторних полів).

Під диференціальною k-формою класу C^s на банаховому многовиді $\mathcal{M}$ класу C^p (де $1 \leq s \leq p-1$) ми розуміємо C^s-переріз розшарування $L^k_{\mathrm{alt}}(T\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$, де $L^k_{\mathrm{alt}}(T\mathcal{M})$ отримано диз'юнктним об'єднанням просторів $L^k_{\mathrm{alt}}(T_x\mathcal{M})$ усіх обмежених кососиметричних k-лінійниїх форм на $T_x\mathcal{M}$ (структура веторного розшарування надається природним чином), так що простір $L^k_{\mathrm{alt}}(T_x\mathcal{M})$ є шаром в точці $x \in \mathcal{M}$ цього розшарування.

РОЗДІЛ 2 ПОЛІВЕКТОРНІ ПОЛЯ ТА ОПЕРАТОР ДИВЕРГЕНЦІЇ

2.1 Класична дивергенція

Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтовний дійсний n-вимірний многовид класу C^2. Вибір форми об'єму Ω на $\mathcal{M}$ дозволяє ввести оператор дивергенції, який задається наступним чином. Нехай $\boldsymbol{X}$ — векторне поле (класу C^1). Тоді $\operatorname{div}\boldsymbol{X}$ — це функція на $\mathcal{M}$, яка визначається формулою (див., наприклад, [11])

$$\operatorname{div}\boldsymbol{X}\cdot\Omega = \mathrm{d}\, i_{\boldsymbol{X}}\Omega,$$

де $i_{\boldsymbol{X}}$ позначає внутрішній добуток диференціальної форми на векторне поле $\boldsymbol{X}$ (а саме, $i_{\boldsymbol{X}}\omega(\boldsymbol{Z_1},\ldots,\boldsymbol{Z_{k-1}}) = \omega(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z_1},\ldots,\boldsymbol{Z_{k-1}})$).

Нехай $\vec{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{X_m}$ — розкладне m-веторне поле, а ω — диференціальна k-форма. Внутрішній добуток $i_{\vec{\boldsymbol{X}}}\omega = i(\vec{\boldsymbol{X}})\omega$ диференціальної форми ω на $\vec{\boldsymbol{X}}$ визначається наступним чином

$$i_{\vec{\boldsymbol{X}}}\omega := i_{\boldsymbol{X_m}}\ldots i_{\boldsymbol{X_1}}\omega,\ \text{якщо}\ m\le k, \tag{2.1}$$

та

$$i_{\vec{\boldsymbol{X}}}\omega := 0,\ \text{якщо}\ m>k.$$

Всюди у подальшому дослідженні під m-векторним полем класу C^p ми розуміємо **лінійну комбінацію розкладних m-векторних полів**, компоненти яких є векторними полями класу C^p. При цьому, деякі означення та результати, отримані у роботі, можуть бути перенесені на полівекторні поля у більш загальному сенсі.

Очевидним чином означення внутрішнього добутку $i_{\vec{\boldsymbol{X}}}$ вводиться для довільного полівекторного поля $\vec{\boldsymbol{X}}$.

Ця операція задовольняє таку властивість: для будь-якого k-векторного поля $\vec{\boldsymbol{X}}$, m-векторного поля $\vec{\boldsymbol{Z}}$ та диференціальної $(k+m)$-форми ω виконується рівність

$$\langle i_{\vec{\boldsymbol{X}}}\omega, \vec{\boldsymbol{Z}}\rangle = \langle \omega, \vec{\boldsymbol{X}} \wedge \vec{\boldsymbol{Z}}\rangle, \tag{2.2}$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначає спарювання диференціальної форми та полівекторного поля однакових порядків.

Тоді дивергенція $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{X}}$ k-векторного поля $\vec{\boldsymbol{X}}$ визначається наступною формулою (у роботі [6] приводиться еквівалентне означення в термінах оператора Ходжа)

$$i_{\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega = (-1)^{k-1}\,\mathrm{d}\,i_{\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega. \tag{2.3}$$

Зауваження 3. В принципі, ми могли ввести операцію внутрішнього добутку на полівекторне поле іншим чином, а саме $i'_{\boldsymbol{X_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{X_m}} = i_{\boldsymbol{X_1}}\circ\cdots\circ i_{\boldsymbol{X_m}}$. У цьому випадку, рівняння (2.3) із означення дивергенції перетворюється на $i'_{\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega = \mathrm{d}\,i'_{\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega$. Проте у даній роботі ми завжди використовуємо означення внутрішнього добутку $i_{\vec{\boldsymbol{X}}}$, що задається формулою (2.1).

Існування $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{X}}$ для полівекторного поля $\vec{\boldsymbol{X}}$ буде випливати із твердження 5, а єдиність випливає із загальних фактів полілінійної алгебри (див., наприклад, [5, chap. III]).

Нехай $\mathcal{M}$ — многовид класу C^3. Для $(k+1)$-векторного поля $\vec{\boldsymbol{X}}$ класу

C^2 та диференціальної k-форми ω класу C_0^2 (тобто, $\omega \in C^2(\mathcal{M})$ і має компактний носій) на $\mathcal{M}$, із теореми Стокса випливає, що

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \mathrm{d}(\omega \wedge i_{\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega) = 0,$$

що можна переписати у вигляді

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \mathrm{d}\,\omega \wedge i_{\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega = (-1)^{k+1} \int\limits_{\mathcal{M}} \omega \wedge \mathrm{d}\, i_{\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega. \tag{2.4}$$

Лема 1. *Нехай ω та $\vec{\boldsymbol{X}}$ — відповідно диференціальна k-форма та k-векторне поле на $\mathcal{M}$. Тоді справедлива наступна рівність*

$$\omega \wedge i_{\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega = \langle \omega, \vec{\boldsymbol{X}} \rangle \Omega. \tag{2.5}$$

Доведення. Без втрати загальності ми можемо вважати, що полівекторне поле $\vec{\boldsymbol{X}}$ є розкладним: $\vec{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{X_k}$.

Тоді, маємо

$$\omega \wedge i_{\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega = \omega \wedge (i_{\boldsymbol{X_k}} \dots i_{\boldsymbol{X_1}}\Omega) = (-1)^{k-1}(i_{\boldsymbol{X_k}}\omega) \wedge (i_{\boldsymbol{X_{k-1}}} \dots i_{\boldsymbol{X_1}}\Omega) = \dots =$$
$$= (-1)^{\frac{(k-1)k}{2}}(i_{\boldsymbol{X_1}} \dots i_{\boldsymbol{X_k}}\omega) \wedge \Omega = (i_{\boldsymbol{X_k}} \dots i_{\boldsymbol{X_1}}\omega) \wedge \Omega = \langle \omega, \vec{\boldsymbol{X}} \rangle \Omega.$$

□

Нехай μ — міра на $\mathcal{M}$, що породжена формою об'єму Ω (для будь-якої $f \in C^1(\mathcal{M})$ маємо рівність $\int\limits_{\mathcal{M}} f\, d\mu = \int\limits_{\mathcal{M}} f\Omega$). Для довільної диференціальної k-форми ω та $(k+1)$-векторного поля $\vec{\boldsymbol{X}}$, використовуючи (2.4) та (2.5), ми отримуємо

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \langle \mathrm{d}\,\omega, \vec{\boldsymbol{X}}\rangle\, d\mu = \int\limits_{\mathcal{M}} \mathrm{d}\,\omega \wedge i_{\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega = (-1)^{k+1} \int\limits_{\mathcal{M}} \omega \wedge \mathrm{d}\, i_{\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega =$$
$$= -\int\limits_{\mathcal{M}} \omega \wedge i_{\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega = -\int\limits_{\mathcal{M}} \langle \omega, \operatorname{div}\vec{\boldsymbol{X}}\rangle\, d\mu.$$

Таким чином, рівність (2.4) еквівалентна наступному

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \langle \mathrm{d}\,\omega, \vec{\boldsymbol{X}}\rangle\, d\mu = -\int\limits_{\mathcal{M}} \langle \omega, \operatorname{div}\vec{\boldsymbol{X}}\rangle\, d\mu. \tag{2.6}$$

Використовуючи міру μ, ми тепер можемо дивитися на дивергенцію $(k+1)$-векторного поля $\vec{\boldsymbol{X}}$ на $\mathcal{M}$ як на k-векторне поле $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{X}}$, яке задовольняє (2.6) для будь-якої диференціальної k-форми класу C^1_0. Для моговиду класу C^3 формула (2.6) приводить до визначення $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{X}}$, яке є еквівалентним вихідному.

Твердження 5. *Нехай $\boldsymbol{X}$ та $\vec{\boldsymbol{Z}}$ — відповідно векторне та k-векторне поле класу C^1 на $\mathcal{M}$. Тоді справедлива наступна формула*

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{X} \wedge \vec{\boldsymbol{Z}}) = \operatorname{div}\boldsymbol{X} \cdot \vec{\boldsymbol{Z}} - \boldsymbol{X} \wedge \operatorname{div}\vec{\boldsymbol{Z}} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\vec{\boldsymbol{Z}}. \tag{2.7}$$

де $\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}$ позначає диференціювання Лі вздовж векторного поля $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Достатньо довести формулу (2.7) лише для розкладного полівекторного поля $\vec{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{Z_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{Z_k}$.

Ми маємо

$$(-1)^k\, \mathrm{d}\, i_{\boldsymbol{X}\wedge\vec{\boldsymbol{Z}}}\Omega = \mathrm{d}\, i_{\vec{\boldsymbol{Z}}\wedge\boldsymbol{X}}\Omega = \mathrm{d}\, i_{\boldsymbol{X}}(i_{\vec{\boldsymbol{Z}}}\Omega) = -i_{\boldsymbol{X}}\,\mathrm{d}(i_{\vec{\boldsymbol{Z}}}\Omega) + \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(i_{\vec{\boldsymbol{Z}}}\Omega).$$

Для першого доданку справа ми отримуємо

$$-i_{\boldsymbol{X}}\,\mathrm{d}(i_{\vec{\boldsymbol{Z}}}\Omega) = -(-1)^{k-1} i_{\boldsymbol{X}} i_{\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{Z}}}\Omega = -(-1)^{k-1} i_{\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{Z}}\wedge\boldsymbol{X}}\Omega = -i_{\boldsymbol{X}\wedge\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{Z}}}\Omega.$$

Для другого доданку

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(i_{\vec{\boldsymbol{Z}}}\Omega) = \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(i_{\boldsymbol{Z_k}}\dots i_{\boldsymbol{Z_1}}\Omega) = i_{\boldsymbol{Z_k}}\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(i_{\boldsymbol{Z_{k-1}}}\dots i_{\boldsymbol{Z_1}}\Omega) +$$
$$+ i_{\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z_k}}(i_{\boldsymbol{Z_{k-1}}}\dots i_{\boldsymbol{Z_1}}\Omega) = \dots = i_{\boldsymbol{Z_k}}\dots i_{\boldsymbol{Z_1}}\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\Omega + \sum_{r=1}^{k} i_{\boldsymbol{Z_k}}\dots i_{\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z_r}}\dots i_{\boldsymbol{Z_1}}\Omega =$$
$$= i_{\vec{\boldsymbol{Z}}}\,\mathrm{d}\,i_{\boldsymbol{X}}\Omega + \sum_{r=1}^{k} i_{\boldsymbol{Z_1}\wedge\dots\wedge\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z_r}\wedge\dots\wedge\boldsymbol{Z_k}}\Omega = i_{\vec{\boldsymbol{Z}}}\operatorname{div}\boldsymbol{X}\cdot\Omega + i_{\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\vec{\boldsymbol{Z}}}\Omega =$$
$$= i_{\operatorname{div}\boldsymbol{X}\cdot\vec{\boldsymbol{Z}}}\Omega + i_{\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\vec{\boldsymbol{Z}}}\Omega = i_{\operatorname{div}\boldsymbol{X}\cdot\vec{\boldsymbol{Z}}+\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\vec{\boldsymbol{Z}}}\Omega.$$

Додаючи ці два доданки, отримуємо (2.7). □

Наслідок 1. *Дивергенція k-векторного поля (класу C^p) існує та є $(k-1)$-векторним полем (класу C^{p-1}).*

Доведення. Твердження наслідку негайно випливає з формули (2.7). □

Нехай ω — диференціальна k-форма та $\vec{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X_1}\wedge\dots\wedge\boldsymbol{X_m}$ — розкладне m-векторне поле. Визначимо *внутрішній добуток* $j_\omega\vec{\boldsymbol{X}} = j(\omega)\vec{\boldsymbol{X}}$ полівекторного поля $\vec{\boldsymbol{X}}$ на ω наступним чином

$$j_\omega\vec{\boldsymbol{X}} := \frac{1}{k!(m-k)!}\sum_{\sigma\in S_m}\operatorname{sign}(\sigma)\omega(\boldsymbol{X_{\sigma(1)}},\dots,\boldsymbol{X_{\sigma(k)}})\boldsymbol{X_{\sigma(k+1)}}\wedge\dots\wedge\boldsymbol{X_{\sigma(m)}},$$
$$\text{якщо } k\le m,$$

та

$$j_\omega\vec{\boldsymbol{X}} := 0,\ \text{якщо } k>m.$$

Очевидним чином дане означення продовжується на довільне полівекторне поле $\vec{\boldsymbol{X}}$. Схоже означення дається, наприклад, у роботі [14].

Внутрішній добуток полівекторного поля на диференціальну форму задовольняє наступну властивість: для будь-якої диференціальної k-форми ω, диференціальної m-форми η та $(k+m)$-векторного поля $\vec{\boldsymbol{X}}$ маємо рівність

$$\langle \eta, j_\omega \vec{\boldsymbol{X}} \rangle = \langle \omega \wedge \eta, \vec{\boldsymbol{X}} \rangle.$$

Можна довести наступне узагальнення Леми 1 (див. [6]): для довільної диференціальної k-форми ω та m-векторного поля $\vec{\boldsymbol{X}}$, виконуєтся наступна рівність:

$$i_{j(\omega)\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega = (-1)^{k(m+1)} \omega \wedge i_{\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega. \tag{2.8}$$

Твердження 6. *Нехай ω та $\vec{\boldsymbol{X}}$ — відповідно диференціальна k-форма та m-векторне поле ($k < m$). Тоді виконується наступне правило Лейбніца*

$$\operatorname{div}(j(\omega)\vec{\boldsymbol{X}}) = (-1)^k j(\mathrm{d}\,\omega)\vec{\boldsymbol{X}} + (-1)^k j(\omega) \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{X}}.$$

Доведення. Використовуючи (2.8), ми маємо

$$\begin{aligned}
&(-1)^{m-k-1}\,\mathrm{d}\, i_{j(\omega)\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega = \\
&= (-1)^{m-k-1+k(m+1)}\,\mathrm{d}\,\omega \wedge i_{\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega + (-1)^{m-k-1+k(m+1)+k}\omega \wedge \mathrm{d}\, i_{\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega = \\
&= (-1)^{km+m-1}\,\mathrm{d}\,\omega \wedge i_{\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega + (-1)^{km+k}\omega \wedge \mathrm{d}\, i_{\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega = \\
&= (-1)^{km+m-1+(k+1)(m+1)} i_{j(\mathrm{d}\,\omega)\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega + (-1)^{km+k+km} i_{j(\omega)\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega = \\
&= (-1)^k i_{j(\mathrm{d}\,\omega)\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega + (-1)^k i_{j(\omega)\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{X}}}\Omega.
\end{aligned}$$

$\square$

2.2 Асоційовані міри на банахових многовидах

Нехай $\mathcal{M}$ — зв'язний хаусдорфовий дійсний банахів многовид класу C^2 з модельним простором E.

Будемо казати, що атлас $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ на $\mathcal{M}$ є *обмеженим*, якщо існує дійсне число $K > 0$ таке, що для будь-якої пари карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ та (U_β, φ_β) відображення заміни координат $F_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ задовольняє умову

$$(x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)) \implies (\|F'_{\beta\alpha}(x)\| \leq K, \|F''_{\beta\alpha}(x)\| \leq K).$$

Також ми будемо казати, що два атласи Ω_1 та Ω_2 є *еквівалентними*, якщо їх об'єднання $\Omega_1 \cup \Omega_2$ знову є обмеженим атласом. *Обмежена структура* (класу C^2) на $\mathcal{M}$ тоді визначається як клас еквівалентності обмежених атласів на $\mathcal{M}$.

Нехай $(\mathcal{M}_1, \Omega_1)$ та $(\mathcal{M}_2, \Omega_2)$ — банахові многовиди $\mathcal{M}_1$ та $\mathcal{M}_2$ класу C^2, змодельовані на E_1 та E_2, разом із обмеженими атласами Ω_1 та Ω_2, відповідно. Будемо казати, що відображення $f\colon M_1 \to \mathcal{M}_2$ є *обмеженим морфізмом*, якщо існує дійсне число $C > 0$ таке, що для довільної пари карт $(U, \varphi) \in \Omega_1$ та $(V, \psi) \in \Omega_2$ виконується наступна умова

$$(p \in U,\ f(p) \in V) \implies \Big(\|(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{(k)}(\varphi(p))\| \leq C,\ k = 1, 2\Big).$$

Прородним чином визначається *обмежений ізоморфізм* між $(\mathcal{M}_1, \Omega_1)$ та $(\mathcal{M}_2, \Omega_2)$.

Властивість відображення f бути обмеженим морфізмом не залежить від вибору представників відповідних класів еквівалентності обмежених атласів на $\mathcal{M}_1$ та $\mathcal{M}_2$.

Фіксація обмеженого атласу $\mathcal{M}$ дозволяє коректно ввести поняття довжини $L(\Gamma)$ кусково-гладкої кривої Γ в $\mathcal{M}$. Відповідна внутрішня метрика ρ є узгодженою з вихідною топологією. Обмежений морфізм $f\colon (\mathcal{M}_1, \Omega_1) \to (\mathcal{M}_2, \Omega_2)$ є Ліпшицевим відносно відповідних внутрішніх метрик.

Вибір обмеженого атласу також дозволяє ввести норму $|||\cdot|||_p$ на дотичному просторі $T_p\mathcal{M}$ до многовиду $\mathcal{M}$, яка визначається як

$$|||\xi|||_p := \sup_{\alpha} \|\xi_{\varphi_\alpha}\|,$$

де $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — множина карт вихідного атласу, для яких $p \in U_\alpha$, та $\xi_\varphi \in E$ є представленням дотичного вектора ξ в карті φ. При цьому, виконується властивість *рівномірного топологічного ізоморфізму* просторів $T_p\mathcal{M}$ та модельного простору E, а саме $\|\xi_\varphi\| \le |||\xi|||_p \le K\|\xi_\varphi\|$, де K — константа із означення обмеженого атласу, а φ — карта в точці $p \in \mathcal{M}$.

На многовиді з обмеженим атласом $(\mathcal{M}, \Omega)$ коректно вводиться поняття *обмеженого* тензорного поля $\boldsymbol{T}$ класу C^1. Припускається, що існує константа $C > 0$ така, що для будь-якої карти (U, φ) локальне представлення $\boldsymbol{T}_\varphi$ тензора $\boldsymbol{T}$ задовольняє $\|\boldsymbol{T}_\varphi(\varphi(x))\| \le C$ та $\|\boldsymbol{T}'_\varphi(\varphi(x))\| \le C$ для усіх $x \in \varphi(U)$. Обмеженість тензорного поля не залежить від вибору обмеженого атласу з відповідного класу еквівалентності. Будемо казати, що такі тензорні поля належать до класу $C^1_b(\mathcal{M})$. Природним чином визначаємо гладкі функції класу C^p_b

$(p = 0, 1, 2)$; $C_b = C_b^0$. Ми будемо використовувати ці самі позначення також у тому випадку, коли область визначення поля або функції є областю V в $\mathcal{M}$, в E або в поверхні в $\mathcal{M}$. Будемо казати, що тензорне поле класу $C_b^1(V)$ належить до класу $C_0^1(V)$ якщо його носій є обмеженим і міститься в V разом з деяким його ε-околом.

Будемо казати, що обмежений атлас Ω є *рівномірним*, якщо існує дійсне число $r > 0$ таке, що для будь-якої точки $p \in \mathcal{M}$ існує карта $(U, \varphi) \in \Omega$ така, що $\varphi(U)$ містить кулю радіуса r в E з центром в точці $\varphi(p)$. [12, 7, 1]

Внутрішня метрика на $\mathcal{M}$, породжена рівномірним атласом, перетворює $\mathcal{M}$ в повний метричний простір. Більш того, якщо обмежений атлас еквівалентний рівномірному, то метрика, породжена цим атласом, також є повною. Якщо клас еквівалентності атласів, який визначає обмежену структуру на $\mathcal{M}$, містить рівномірний атлас, ми називатимемо таку структуру *рівномірною*. Якщо многовиди $\mathcal{M}_1$ та $\mathcal{M}_2$ є обмежено ізоморфними, то їхні структури є одночасно або рівномірними, або ні.

Потік $\Phi(t,x)$ векторного поля $\boldsymbol{X}$ класу C_b^1 на многовиді $\mathcal{M}$ з рівномірною структурою визначений на $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$. [12, p. 92]

Якщо V — відкрита підмножина в $\mathbb{R}^m$, а $(\mathcal{M}, \Omega)$ — многовид із рівномірним атласом, ми домовимося задавати обмежену структуру на $\mathcal{M} \times V$ (з модельним простором $E \oplus \mathbb{R}^m$) наступним атласо

$$\Omega \times \mathrm{id} = \{(U \times V, \varphi \times \mathrm{id})\colon (U, \varphi) \in \Omega\}.$$

Елементарну поверхню $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ корозмірності m визначаємо наступним чином. Нехай $\mathcal{N}$ — многовид з обмеженою структурою, змодельований на підпросторі E_1 простору E корозмірності m (в подальшому ми будемо ототожнювати E із $E_1 \oplus \mathbb{R}^m$). Нехай V — відкритий окіл нуля $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ та $g\colon \mathcal{N} \times V \to \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ — обмежений (спрямлюючий) ізоморфізм на відкритий підпростір $\mathcal{U}$ в $\mathcal{M}$. Тоді, за означенням, елементарна поверхність — це $\mathcal{S} = g(\mathcal{N} \times \{\vec{0}\})$.

Для довільного $\varepsilon > 0$ покладемо

$$\mathcal{S}_{-\varepsilon} := \mathcal{S} \cap \{x\colon \rho(x, \mathcal{M} \setminus \mathcal{U}) \geq \varepsilon\}.$$

Тоді маємо рівність $\mathcal{S} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_{-\frac{1}{n}}$.

Будемо казати, що диференціальна m-форма ω класу C_b^1, що визначена на $\mathcal{U}$, є *асоційованою m-формою вкладення* $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$, якщо для будь-якого $x \in \mathcal{S}$ дотичний простір $T_x\mathcal{S}$ є асоційованим підпростором зовнішньої форми $\omega(x)$ в $T_x\mathcal{M}$ (тобто $T_x\mathcal{S} = \{Y \in T_x\mathcal{M}\colon i_Y\omega(x) = 0\}$, де i_Y — внутрішній добуток зовнішньої форми на вектор Y).

Якщо $g\colon \mathcal{N} \times V \to \mathcal{U}$ — спрямлюючий ізоморфізм елементарної поверхні $\mathcal{S}$, P — проекція $\mathcal{N} \times V$ на V, та h — неперервно диференційовна функція на V така, що $h(\vec{0}) \neq 0$, тоді $\omega = (g^{-1})^* P^*(h\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_m)$ є прикладом асоційованої m-форми вкладення $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$. Зазначимо, що побудована m-форма ω є замкнутою.

Розглянемо борелеву міру μ на $\mathcal{M}$. Асоційована міра $\sigma = \sigma_{\vec{\boldsymbol{Y}}}$ будується наступним чином.

Ми спочатку розглядаємо строго трансверсальний до $\mathcal{S}$ набір $\vec{\boldsymbol{Y}} = \{\boldsymbol{Y_1}, \ldots, \boldsymbol{Y_m}\}$ попарно комутуючих векторних полів класу C_b^1, визначених на $\mathcal{U}$. Строга трансверсальність системи $\vec{\boldsymbol{Y}}$ розуміється в наступному сенсі: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для довільного $x \in \mathcal{S}_{-\varepsilon}$ виконується рівність

$$|\omega(\vec{\boldsymbol{Y}})(x)| = |\omega(\boldsymbol{Y_1}, \ldots, \boldsymbol{Y_m})(x)| \geq \delta.$$

Існування такої системи полів було доведене у роботі [2].

Нехай $\Phi_t^{\boldsymbol{Y_k}}$ — потік векторного поля $\boldsymbol{Y_k}$. Визначимо

$$\Phi_{\vec{t}}^{\vec{\boldsymbol{Y}}} := \Phi_{t_1}^{\boldsymbol{Y_1}} \ldots \Phi_{t_m}^{\boldsymbol{Y_m}}.$$

Тоді виконується наступна властивість

$$\Phi_{\vec{t}+\vec{s}}^{\vec{\boldsymbol{Y}}} = \Phi_{\vec{t}}^{\vec{\boldsymbol{Y}}} \Phi_{\vec{s}}^{\vec{\boldsymbol{Y}}}.$$

Для борелевих множин $W \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ та $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ множина $\Phi_W A = \Phi_W^{\vec{\boldsymbol{Y}}} A := \{\Phi_{\vec{t}}^{\vec{\boldsymbol{Y}}}(x) \colon \vec{t} \in W,\ x \in A\}$ є борелевою в $\mathcal{M}$. Більш того, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $p > 0$ таке, що

$$(A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_{-\varepsilon}),\, W \in \mathcal{B}(B_p)) \implies (\Phi_W^{\vec{\boldsymbol{Y}}} A \in \mathcal{B}(U)),$$

де $B_p = \{\vec{t} \colon \|\vec{t}\| < p\} \subset \mathbb{R}^m$.

Для довільної множини $B \in \mathcal{B}(B_p)$ ми визначаємо ν_B на $\mathcal{B}(\mathcal{S}_{-\varepsilon})$, поклавши $\nu_B(A) := \mu(\Phi_B^{\vec{\boldsymbol{Y}}} A)$.

Нехай λ_m — міра Лебега на $\mathbb{R}^m$. Якщо для будь-якого $A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_{-\varepsilon})$ існує наступна границя

$$\sigma(A) = \sigma_{\vec{\boldsymbol{Y}}}(A) = \lim_{r \to 0} \frac{\nu_{B_r}(A)}{\lambda_m(B_r)}, \tag{2.9}$$

то з теореми Нікодима випливає, що відображення $\mathcal{B}(\mathcal{S}_{-\varepsilon}) \ni A \mapsto \sigma_{\vec{\mathbf{Y}}}(A) \in \mathbb{R}$ є борелевою мірою на $\mathcal{S}_{-\varepsilon}$. Представлення множини $A \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ у вигляді $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A \cap \mathcal{S}_{-\frac{1}{n}})$ дозволяє продовжити міру $\sigma_{\vec{\mathbf{Y}}}$ на $\mathcal{B}(\mathcal{S})$.

Достатні умови існування границі (2.9) були встановлені у роботі [2]; автори роботи запропонували називати $\sigma_{\vec{\mathbf{Y}}}$ *поверхневою мірою* на $\mathcal{S}$ першого роду, породжену набором векторних полів $\vec{\boldsymbol{Y}}$.

У подальшому в даній роботі ми завжди припускаємо, що поверхнева міра існує.

Для заданих $\varepsilon > 0$ та $r > 0$, нехай σ_r — міра на $\mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$, визначена рівністю

$$\sigma_r(A) := \frac{1}{\lambda_m(B_r)}\mu(\Phi_{B_r}A).$$

Тоді, з (2.9) випливає, що $\sigma_r(A) \to \sigma(A)$ при $r \to 0$ для будь-якої борелевої множини $A \subset \mathcal{S}_{-\varepsilon}$.

Наступні дві леми були доведені в роботі [4].

Лема 2. *Нехай μ — радонова міра на $\mathcal{M}$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ міри σ_r та σ є радоновими на $\mathcal{S}_{-\varepsilon}$.*

Лема 3. *Нехай μ радонова міра на $\mathcal{M}$; $u \in C_b(\mathcal{M})$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ та $A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_{-\varepsilon})$ виконується рівність*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\int\limits_{\Phi_{B_r}A} u\,d\mu = \int\limits_{A} u\,d\sigma.$$

2.3 Дивергенція полівекторних полів на банахових многовидах

Нехай $\mathcal{M}$ — банахів многовид з обмеженою структурою та μ — борелева міра на $\mathcal{M}$. Будемо називати k-векторне поле $\vec{\boldsymbol{Z}}$ на $\mathcal{M}$ *μ-вимірним*, якщо існує послідовність неперервних k-векторних полів $\vec{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{n}}$ така, що

$$\lim_{n\to\infty} \left|\!\left|\!\left| \vec{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{n}}(p) - \vec{\boldsymbol{Z}}(p) \right|\!\right|\!\right|_p = 0 \ (\operatorname{mod} \mu)$$

(тут $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_p$ — норма в $\bigwedge^k(T_p\mathcal{M})$, див. п. 2.2).

Для довільного вимірного полівекторного поля $\vec{\boldsymbol{Z}}$ функція $x \mapsto \left|\!\left|\!\left|\vec{\boldsymbol{Z}}(x)\right|\!\right|\!\right|_x$ є μ-вимірною на $\mathcal{M}$. У тому випадку, коли ця функція є інтегровною на $\mathcal{M}$ відносно міри μ ми називаємо полівекторне поле $\vec{\boldsymbol{Z}}$ *інтегровним*: $\vec{\boldsymbol{Z}} \in L_1(\mu)$ (див. [3]). Аналогічно визначаються полівекторні поля класу $L_p(\mu)$ $(1 < p \le \infty)$.

Нескладно перевірити, що у випадку, якщо векторні поля $\boldsymbol{Z_2}, \ldots, \boldsymbol{Z_k}$ є вимірними та обмеженими на $\mathcal{M}$, а поле $\boldsymbol{Z_1}$ належить до класу $L_p(\mu)$, то $\vec{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{Z_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{Z_k} \in L_p(\mu)$. Можна таклж довести, що

$$(\vec{\boldsymbol{Z}} \in L_p(\mu),\ \omega \text{ — диференціальна } k\text{-форма класу } C_b(\mathcal{M})) \implies (\omega(\vec{\boldsymbol{Z}}) \in L_p(\mu)).$$

Лінійні комбінації розкладних k-векторних полів класу $L_p(\mu)$ утворюють лінійний простір, який ми будемо позначати $L_p \bigwedge^k(\mu)$.

Означення 7. Нехай $\vec{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{Z_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{Z_k}$ — розкладне k-векторне поле класу $C_b^1(\mathcal{M})$ (тобто $\boldsymbol{Z_i} \in C_b^1(\mathcal{M})$ для $i = 1, \ldots, k$). Назвемо $(k-1)$-векторне $\vec{\boldsymbol{W}}$ *дивергенцією* $\vec{\boldsymbol{Z}}$ ($\vec{\boldsymbol{W}} = \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{Z}}; \vec{\boldsymbol{Z}} \in D(\operatorname{div})$), якщо для будь-якої диференціальної $(k-1)$-форми $\omega \in C_0^1(\mathcal{M})$ виконуєтся рівність

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \langle \omega, \vec{\boldsymbol{W}} \rangle \, d\mu = - \int\limits_{\mathcal{M}} \langle \mathrm{d}\,\omega, \vec{\boldsymbol{Z}} \rangle \, d\mu. \tag{2.10}$$

Очевидним чином означення 7 продовжується на лінійні комбінації розкладних полівекторних полів.

Теорема 1. *Припустимо, що існує функція класу C_0^1 на E з непорожнім обмеженим носієм (достатньо вимагати рефлексивності простору E, див. [10]), та нехай міра μ є радоновою. Тоді для довільного k-векторного поля $\vec{\boldsymbol{Z}}$ класу C_b^1 існує не більше одного елементу $\vec{\boldsymbol{W}} \in L_1 \bigwedge^{k-1}(\mu)$, що задовольняє означення 7.*

Доведення. Достатньо показати, що якщо $\vec{\boldsymbol{W}} \neq \vec{0} \pmod{\mu}$, то існує диференціальна $(k-1)$-форма $\omega \in C_0^1(\mathcal{M})$ така, що $\int\limits_{\mathcal{M}} \langle \omega, \vec{\boldsymbol{W}} \rangle \, d\mu \neq 0$.

Крок 1. Оскільки міра μ є радоновою, то знайдеться компактна множина $L \subset \mathcal{M}$ з $\mu(L) > 0$ така, що $\vec{\boldsymbol{W}}(x) \neq 0$ для кожного $x \in L$ і тому існує карта $\varphi\colon V \to \varphi(V) \subset E$ для якої

$$\mu\Big(\{x \in V : \vec{\boldsymbol{W}}(x) \neq 0\}\Big) > 0. \tag{2.11}$$

Гомеоморфізм φ індукує радонову міру μ_φ на $\varphi(V)$ і тензорне поле $\vec{\boldsymbol{W}}_\varphi$. При цьому $\vec{\boldsymbol{W}}_\varphi \in L_1 \bigwedge^k(\mu_\varphi)$.

Крок 2. Нехай α — зовнішня $(k-1)$-форма на E. Тоді $f := \langle \alpha, \vec{\boldsymbol{W}}_\varphi \rangle \in L_1(\mu_\varphi)$. Ми доведемо, що із того, що $\int\limits_{\varphi(V)} uf \, d\mu_\varphi = 0$ для будь-якої функції $u \in C_0^1(\varphi(V))$, витікає те, що $f = 0 \pmod{\mu_\varphi}$.

Якщо $u \in C_0^1(E)$ така, що $U = \{x\colon u(x) > 0\} \neq \varnothing$, тоді для довільної функції $h \in C^1(\mathbb{R})$ такої, що $h(0) = 0$, числа $k \in \mathbb{R}$ та вектора $b \in E$ функція $v(x) = h \circ u(kx + b)$ також налеить до $C_0^1(E)$. Тому існує сім'я функція $u_\alpha \in C_0^1(E)$ зі значеннями в $[0, 1]$ така, що множини $U_\alpha = \{x \colon u_\alpha(x) > 0\}$ утворюють базу топології простору E.

Застосовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність, ми заключаємо, що $\int_{U_\alpha} f \, d\mu_\varphi = 0$ для будь-якої множини U_α. Оскільки сім'я множин $\{U_\alpha\}$ замкнена відносно скінченних об'єднань, то для будь-якого компакта $K \subset \varphi(V)$ та $\varepsilon > 0$ знайдеться множина U_α така, що $K \subset U_\alpha \subset K_\varepsilon$ (тут і надалі A_ε позначає ε-окіл множини A), звідки випливає те, що $\int_K f \, d\mu_\varphi = 0$. Так як міра μ_φ радонова, то $\int_A f \, d\mu_\varphi = 0$ для будь-якої $A \in \mathcal{B}(\varphi(V))$, тобто $f = 0 \pmod{\mu_\varphi}$.

Крок 3. Застосовуючи узагальнену теорему Лузіна (див. [9]) до $\vec{\boldsymbol{W}}_\varphi$ і використовуючи (2.11), ми отримуємо, що існує компакт $K \subset \varphi(V)$ такий, що $\vec{\boldsymbol{W}}_\varphi\big|_K$ є неперервним на K і $\mu_\varphi\Big(\{x \in K \colon \vec{\boldsymbol{W}}_\varphi(x) \neq 0\}\Big) > 0$.

Множина $\vec{\boldsymbol{W}}_\varphi(K)$ є підмножиною сепарабельного підпростору F простору $\bigwedge^{k-1} E$, і тому існує злічення сім'я $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ зовнішніх $(k-1)$-форм на E, що розділяє точки F. Але із Кроку 2 витікає, що $\langle \beta_n, \vec{\boldsymbol{W}}_\varphi \rangle = 0 \pmod{\mu_\varphi}$ для усіх $n \in \mathbb{N}$, а тому $\mu_\varphi\Big(\{x \in K \colon \vec{\boldsymbol{W}}_\varphi(x) \neq 0\}\Big) = 0$. Суперечність. $\square$

Твердження 7. *Припустимо, що векторне поле $\boldsymbol{X}$ та k-векторне поле $\vec{\boldsymbol{Z}}$ лежать у $C_b^1(\mathcal{M}) \cap D(\operatorname{div})$. Тоді $\boldsymbol{X} \wedge \vec{\boldsymbol{Z}} \in C_b^1(\mathcal{M}) \cap D(\operatorname{div})$ і виконується рівність*

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{X} \wedge \vec{\boldsymbol{Z}}) = \operatorname{div} \boldsymbol{X} \cdot \vec{\boldsymbol{Z}} - \boldsymbol{X} \wedge \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{Z}} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}} \vec{\boldsymbol{Z}}. \tag{2.12}$$

Доведення. Нехай ω — диференціальна k-форма класу C_0^1 на $\mathcal{M}$. Маємо наступну рівність

$$\langle \mathrm{d}\,\omega, \boldsymbol{X} \wedge \vec{\boldsymbol{Z}} \rangle = \langle i_{\boldsymbol{X}}\, \mathrm{d}\,\omega, \vec{\boldsymbol{Z}} \rangle = \boldsymbol{X} \langle \omega, \vec{\boldsymbol{Z}} \rangle - \langle \mathrm{d}\, i_{\boldsymbol{X}} \omega, \vec{\boldsymbol{Z}} \rangle - \langle \omega, \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}} \vec{\boldsymbol{Z}} \rangle. \quad (2.13)$$

Тепер, використовуючи (2.10) та (2.13), ми отримуємо

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \langle \mathrm{d}\,\omega, \boldsymbol{X} \wedge \vec{\boldsymbol{Z}} \rangle \, d\mu = - \int\limits_{\mathcal{M}} \langle \omega, - \operatorname{div} \boldsymbol{X} \cdot \vec{\boldsymbol{Z}} + \boldsymbol{X} \wedge \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{Z}} - \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}} \vec{\boldsymbol{Z}} \rangle \, d\mu,$$

що доводить твердження. □

Наслідок 2. *Якщо* $\vec{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{Z_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{Z_k}$ *та усі* $\boldsymbol{Z_i} \in C_b^1(\mathcal{M}) \cap D(\operatorname{div})$*, то* $\vec{\boldsymbol{Z}} \in C_b^1(\mathcal{M}) \cap D(\operatorname{div})$.

Твердження 8. *Припустимо, що* m*-векторне поле* $\vec{\boldsymbol{Z}}$ *лежить у* $C_b^1(\mathcal{M}) \cap D(\operatorname{div})$ *і нехай* ω *— диференціальна* k*-форма* $(k < m)$ *класу* $C_b^1(\mathcal{M})$*. Тоді* $j(\omega)\vec{\boldsymbol{Z}}$ *також лежить у* $C_b^1(\mathcal{M}) \cap D(\operatorname{div})$ *і справедливе наступне правило Лейбніца*

$$\operatorname{div}(j(\omega)\vec{\boldsymbol{Z}}) = (-1)^k j(\mathrm{d}\,\omega)\vec{\boldsymbol{Z}} + (-1)^k j(\omega) \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{Z}}.$$

Доведення. Для будь-якої $(m-k-1)$-форми η класу $C_0^1(\mathcal{M})$ ми маємо

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathcal{M}} \left(\left\langle \mathrm{d}\,\eta, j(\omega)\vec{\boldsymbol{Z}} \right\rangle + \left\langle \eta, (-1)^k j(\mathrm{d}\,\omega)\vec{\boldsymbol{Z}} + (-1)^k j(\omega) \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{Z}} \right\rangle \right) d\mu = \\
&= \int\limits_{\mathcal{M}} \left(\langle \omega \wedge \mathrm{d}\,\eta, \vec{\boldsymbol{Z}} \rangle + (-1)^k \langle \mathrm{d}\,\omega \wedge \eta, \vec{\boldsymbol{Z}} \rangle + (-1)^k \langle \omega \wedge \eta, \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{Z}} \rangle \right) d\mu = \\
&= \int\limits_{\mathcal{M}} \left((-1)^k \langle \mathrm{d}(\omega \wedge \eta), \vec{\boldsymbol{Z}} \rangle + (-1)^k \langle \omega \wedge \eta, \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{Z}} \rangle \right) d\mu = 0.
\end{aligned}$$

□

2.4 Дивергенція на підмноговидах

Якщо $\mathcal{M}$ — скінченновимірний (орієнтовний) многовид із заданою на ньому формою об'єму Ω, та $\mathcal{U}$ — його відкритий підмноговид, то природньо взяти $\Omega\big|_{\mathcal{U}}$ у якості форми об'єму на $\mathcal{U}$. У цьому випадку виконується наступна рівність

$$\operatorname{div}_{\mathcal{U}}(\vec{\boldsymbol{Z}}\big|_{\mathcal{U}}) = (\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{Z}})\big|_{\mathcal{U}}, \tag{2.14}$$

де $\operatorname{div}_{\mathcal{U}}$ — дивергенція на $\mathcal{U}$, що породжена формою об'єму $\Omega\big|_{\mathcal{U}}$.

У випадку, коли $\mathcal{U}$ — відкритий підмноговид банахового многовида $\mathcal{M}$, означення дивергенції $\operatorname{div}_{\mathcal{U}}$ полівекторного поля отримується із Означення 7 заміною рівності (2.10) на рівність

$$\int\limits_{\mathcal{U}} \langle \omega, \vec{\boldsymbol{W}} \rangle \, d\mu = - \int\limits_{\mathcal{U}} \langle \mathrm{d}\, \omega, \vec{\boldsymbol{Z}} \rangle \, d\mu,$$

яка тепер має виконуватись для будь-якої диференціальної форми класу $C_0^1(\mathcal{U})$. У цьому випадку формула (2.14) також виконується.

Нехай тепер $\mathcal{M}$ — орієнтовний многовид скінченної розмірності n; $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ — орієнтовний вкладений підмноговид розмірності $m = n - p$, який є елементарною поверхнею в сенсі п. 2.2; α — асоційована диференціальна p-форма вкладення $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$; $\vec{\boldsymbol{Y}} = \{\boldsymbol{Y_1}, \ldots, \boldsymbol{Y_p}\}$ — комутуючий строго трансверсальний до $\mathcal{S}$ набір векторних полів класу $C_b^1(\mathcal{U})$, де $\mathcal{U}$ береться із означення елементарної поверхні.

Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого

$(\vec{t}, x) \in B_\gamma \times \mathcal{S}_{-\varepsilon}$ маємо $\Phi_{\vec{t}} x \in \mathcal{U}$ та $\langle \alpha, \vec{\boldsymbol{Y}} \rangle(\Phi_{\vec{t}} x) \neq 0$ (тут $B_\gamma = \{\vec{t} \in \mathbb{R}^p \colon \|\vec{t}\| < \gamma\}$).

Без втрати загальності ми можемо припустити $\langle \alpha, \vec{\boldsymbol{Y}} \rangle(\Phi_{\vec{t}} x) > 0$. При цьому відображення $q : \Phi_{B\gamma} \mathcal{S}_{-\varepsilon} \ni \Phi_{\vec{t}} x \mapsto x \in \mathcal{S}_{-\varepsilon}$ є неперервно диференційовним.

Нехай $\Omega_{\mathcal{S}}$ — форма об'єму на $\mathcal{S}$; $\boldsymbol{X}$ — векторне поле на $\mathcal{S}$; $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ — q-зв'язане із $\boldsymbol{X}$ векторне поле на $\Phi_{B_\gamma} \mathcal{S}_{-\varepsilon}$ ($q_*(\widetilde{\boldsymbol{X}}(\Phi_{\vec{t}} x)) = \boldsymbol{X}(x)$); $\widetilde{\Omega} = q^* \Omega$ — диференціальна p-форма на $\Phi_{B_\gamma} \mathcal{S}_{-\varepsilon}$.

Припустимо, що $\vec{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{X_m}$ — полівекторне поле на $\mathcal{S}_{-\varepsilon}$, яке ніде не обертається в нуль, і нехай $\beta = \widetilde{\Omega} \wedge \alpha$. Тоді для будь-якого $x \in \mathcal{S}_{-\varepsilon}$ маємо

$$\langle \beta, \widetilde{\vec{\boldsymbol{X}}} \wedge \vec{\boldsymbol{Y}} \rangle(x) = \widetilde{\Omega}(\widetilde{\vec{\boldsymbol{X}}})(x) \cdot \alpha(\vec{\boldsymbol{Y}})(x) = (\Omega(\vec{\boldsymbol{X}}) \cdot \alpha(\vec{\boldsymbol{Y}}))(x) > 0.$$

(тут врахована умова $(i_{\boldsymbol{X_j}} \alpha)(x) = 0$). Зменшуючи за необхідності $\gamma > 0$, робимо висновок, що β є формою об'єму на $\Phi_{B_\gamma} \mathcal{S}_{-\varepsilon} \subset \mathcal{M}$.

Твердження 9. *Нехай $\boldsymbol{Z}$ — векторне поле класу C_b^1 на $\mathcal{S}$ і нехай $\operatorname{div}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{Z}$ — дивергенція $\boldsymbol{Z}$ відносно форми об'єму Ω на $\mathcal{S}$. Для $\varepsilon > 0$, нехай $\widetilde{\boldsymbol{Z}}$ — q-зв'язане з $\boldsymbol{Z}$ векторне поле на $\Phi_{B_\gamma} \mathcal{S}_{-\varepsilon}$, і нехай $\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}}$ — дивергенція $\widetilde{\boldsymbol{Z}}$ відносно форми об'єму β. Припустимо, що α є замкнутою. Тоді*

$$\operatorname{div}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{Z} = (\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}})\big|_{\mathcal{S}}. \tag{2.15}$$

Доведення. Візьмемо $x \in \mathcal{S}_{-\varepsilon}$. Твердження випливає з наступних рівностей

$$(\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \cdot \beta)(x) = (\mathrm{d}\, i_{\widetilde{\boldsymbol{Z}}}(\widetilde{\Omega} \wedge \alpha))(x) = (\mathrm{d}\, i_{\boldsymbol{Z}} \Omega)(x) \wedge \alpha(x) = (\operatorname{div}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{Z} \cdot \beta)(x).$$

□

Наслідок 3. *В умовах Твердження 9 припустимо, що* $\vec{\boldsymbol{Z}}$ *— полівекторне поле класу* C_b^1 *на* $\mathcal{S}$*;* $\widetilde{\vec{\boldsymbol{Z}}}$ *— q-зв'язане з* $\vec{\boldsymbol{Z}}$ *полівекторне поле на* $\mathcal{V} = \Phi_{B_\gamma}\mathcal{S}_{-\varepsilon}$*;* $\operatorname{div}_{\mathcal{S}}$ *та* div *— відповідно оператори дивергенції на* $(\mathcal{S}, \Omega)$ *та* $(\mathcal{V}, \beta)$*. Тоді*

$$\operatorname{div}_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{Z}} = (\operatorname{div} \widetilde{\vec{\boldsymbol{Z}}})\big|_{S}. \tag{2.16}$$

Доведення. Формула (2.16) випливає за індукцією із формули (2.15); рекурентної формули (2.7), застосованої до $\operatorname{div}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{X} \wedge \vec{\boldsymbol{Z}})$ та $\operatorname{div}(\widetilde{\boldsymbol{X}} \wedge \widetilde{\vec{\boldsymbol{Z}}})$; рівностей $\widetilde{\boldsymbol{X} \wedge \vec{\boldsymbol{Z}}} = \widetilde{\boldsymbol{X}} \wedge \widetilde{\vec{\boldsymbol{Z}}}$ та $\widetilde{\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}} \vec{\boldsymbol{Z}}} = \mathcal{L}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}} \widetilde{\vec{\boldsymbol{Z}}}$. □

Нехай $\mathcal{M}$ — банахів многовид із рівномірним атласом, змодельований на просторі E, де E задовольняє припущення Теореми 1. Припустимо, що $\mathcal{S}$ — елементарна поверхня в $\mathcal{M}$ корозмірності m; μ — радонова міра на $\mathcal{M}$ і відповідна міра $\sigma = \sigma_{\vec{\boldsymbol{Y}}}$ на поверхні $\mathcal{S}_{-\varepsilon} \subset \mathcal{S}$ будується як описано у п. 2.2.

Із загальної теорії диференціальних рівнянь у банахових просторах випливає, що існує $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$, для якого коректно визначено відображення $q : \Phi_{B_\gamma}\mathcal{S}_{-\varepsilon} \ni \Phi_{\bar{t}} x \mapsto x \in \mathcal{S}_{-\varepsilon}$ класу C_b^1. Нехай $\boldsymbol{Z}$ — векторне поле класу C_b^1 на $\mathcal{S}$. Тоді q-зв'язане з $\boldsymbol{Z}$ векторне поле $\widetilde{\boldsymbol{Z}}$ визначене на $\mathcal{V} = \Phi_{B_\gamma}\mathcal{S}_{-\varepsilon}$ і також належить до класу C_b^1.

Теорема 2. *Припустимо, що* $\widetilde{\boldsymbol{Z}}$ *має дивергенцію* $\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \in L_\infty(\mathcal{V}, \mu)$*. Тоді* $\boldsymbol{Z}$ *має дивергенцію* $\operatorname{div}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{Z} \in L_\infty(\mathcal{S}, \sigma)$ *і для будь-якої обмеженої борелевої* *функції* $u : \mathcal{S}_{-\varepsilon} \to \mathbb{R}$ *виконується рівність*

$$\int\limits_{\mathcal{S}_{-\varepsilon}} u \operatorname{div}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{Z}\, d\sigma = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \widehat{u} \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}}\, d\mu \tag{2.17}$$

(тут і надалі $\widehat{u}(\Phi_{\vec{t}}x) = u(x)$ *для* $(\vec{t}, x) \in B_\gamma \times \mathcal{S}_{-\varepsilon}$*).*

Доведення. **Крок 1**. Нехай $u \in C^1_0(\mathcal{S})$. Тоді $u \in C^1_0(\mathcal{S}_{-\varepsilon})$ для деякого $\varepsilon > 0$. Доведемо, що для будь-якого $r \in (0, \gamma)$ виконується наступна рівність

$$\int\limits_{\Phi_{B_r}\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \widehat{u} \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}}\, d\mu = - \int\limits_{\Phi_{B_r}\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \widehat{u}\, d\mu. \tag{2.18}$$

Функція $\widehat{u}$ не є функцією класу $C^1_0(\mathcal{V})$. Скористаємося тим фактом, що поле $\widetilde{\boldsymbol{Z}}$ є дотичним до кожної поверхні $\Phi_{\vec{t}}\mathcal{S}_{-\varepsilon}$ при фіксованому $\vec{t} \in B_\gamma$.

Визначимо послідовність функцій $\varphi_n \in C[0, r]$ для $n > 3$ наступним чином

$$\varphi_n(s) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } s \in \left[0, \frac{n-3}{n} r\right] \cup \left[\frac{n-1}{n} r, r\right], \\ -\frac{n^2}{r^2} s + \frac{n(n-3)}{r}, & \text{якщо } s \in \left[\frac{n-3}{n} r, \frac{n-2}{n} r\right], \\ \frac{n^2}{r^2} s - \frac{n(n-1)}{r}, & \text{якщо } s \in \left[\frac{n-2}{n} r, \frac{n-1}{n} r\right]. \end{cases}$$

Тоді послідовність функцій $h_n(s) = 1 + \int\limits_0^s \varphi_n(s)\, ds$ є такою, що функції $u_n(\Phi_{\vec{t}}x) = h_n(\|\vec{t}\|) \cdot u(x)$ збігаються з функцією $\widehat{u}(\Phi_{\vec{t}}x)$ при $\|\vec{t}\| \le \frac{n-3}{n} r$, і при цьому $u_n \in C^1_0(\Phi_{B_r}\mathcal{S}_\varepsilon)$.

Тому має місце рівність

$$\int\limits_{\Phi_{B_r}\mathcal{S}_{-\varepsilon}} u_n \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}}\, d\mu = -\int\limits_{\Phi_{B_r}\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \widetilde{\boldsymbol{Z}} u_n\, d\mu. \tag{2.19}$$

При цьому

$$(\widetilde{\boldsymbol{Z}} u_n)(\Phi_{\vec{t}} x) = h_n(\|\vec{t}\|) \cdot (\widetilde{\boldsymbol{Z}} \widehat{u})(\Phi_{\vec{t}} x) \text{ при } x \in \mathcal{S}_{-\varepsilon}.$$

Граничним переходом при $n \to \infty$ із (2.19) приходимо до рівності (2.18).

Оскільки функція $\widetilde{\boldsymbol{Z}}\widehat{u} \in C_b(\Phi_{B_\gamma}\mathcal{S}_{-\varepsilon})$, із Леми 3 випливає існування границі

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \widetilde{\boldsymbol{Z}}\widehat{u}\, d\mu = \int\limits_{\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \boldsymbol{Z} u\, d\sigma.$$

Тому на підставі формули (2.18) приходимо до рівності

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \widehat{u} \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}}\, d\mu = -\int\limits_{\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \boldsymbol{Z} u\, d\sigma, \tag{2.20}$$

яка має місце для будь-якої функції $u \in C_0^1(\mathcal{S}_{-\varepsilon})$.

Крок 2. Модельний простір E_1 многовиду $\mathcal{S}$ має скінченну корозмірність в E і тому також допускає функцію класу $C^1(E_1)$ з обмеженим непорожнім носієм. Міркування, що були використані при доведенні Теореми 1, також доводять, що сім'я множин $U_\alpha = \{x\colon u_\alpha(x) > 0\}$, де $\{u_\alpha\} = C_0^1(\mathcal{S}_{-\varepsilon})$, утворює базу топології в $\mathcal{S}_{-\varepsilon}$.

Нехай $u \in \{u_\alpha\}$; $U = \{x\colon u(x) > 0\}$ — одна із множин цієї бази. За допомогою послідовності гладких функцій $h_n \in C^1(\mathbb{R})$, яка апорксимує функцію Хевісайда χ, формуємо послідовність функцій $v_n = h_n \circ u$, для яких $\{x\colon v_n(x) > 0\} = U$; $v_n \nearrow j_U = \chi \circ u$ (де j_A — індикатор множини A) та $V_n = \{x\colon v_n(x) = 1\} \nearrow U$.

Із теореми Нікодима випливає рівномірна відносно $r \in (0, \gamma)$ збіжність

$$\sigma_r(U \setminus V_n) = \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \mu(\Phi_{B_r}(U \setminus V_n)) \to 0,\ n \to \infty.$$

Оскільки $\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \in L_\infty(\mu)$, ми також маємо рівномірну відносно $r \in (0, \gamma)$ збіжність

$$\frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \left|(\widehat{v_n} - \widehat{j_U}) \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}}\right| \, d\mu \to 0,\ n \to \infty.$$

Ця рівномірна збіжність та збіжність (2.20), разом із нерівністю

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}U} \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \, d\mu - \frac{1}{\lambda_m(B_s)} \int\limits_{\Phi_{B_s}U} \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \, d\mu \right| \le \\
&\le \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \left|(\widehat{v_n} - \widehat{j_U}) \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}}\right| \, d\mu + \\
&+ \frac{1}{\lambda_m(B_s)} \int\limits_{\Phi_{B_s}\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \left|(\widehat{v_n} - \widehat{j_U}) \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}}\right| \, d\mu + \\
&+ \left| \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \widehat{v_n} \cdot \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \, d\mu - \frac{1}{\lambda_m(B_s)} \int\limits_{\Phi_{B_s}\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \widehat{v_n} \cdot \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \, d\mu \right|
\end{aligned}$$

дозволяють зробити висновок про існування границі

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}U} \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \, d\mu. \tag{2.21}$$

Крок 3. Нехай K — компакт в $\mathcal{S}_{-\varepsilon}$. Тоді існує послідовність множин $U_n \in \{U_\alpha\}$ така, що $U_n \searrow K$.

Знову, використовуючи теорему НІкодима і той факт, що $\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \in L_\infty(\mu)$, ми приходимо до рівномірної відносно $r \in (0,\gamma)$ збіжності

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}(U_n\setminus K)} \left|\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}}\right| \, d\mu = 0.$$

Із цієї рівномірної збіжності, збіжності (2.21) та наступної нерівності (тут $r, s \in (0,\gamma)$)

$$\left| \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}K} \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \, d\mu - \frac{1}{\lambda_m(B_s)} \int\limits_{\Phi_{B_s}K} \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \, d\mu \right| \le$$
$$\le \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}(U_n\setminus K)} \left|\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}}\right| \, d\mu + \frac{1}{\lambda_m(B_s)} \int\limits_{\Phi_{B_s}(U_n\setminus K)} \left|\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}}\right| \, d\mu +$$
$$+ \left| \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}U_n} \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \, d\mu - \frac{1}{\lambda_m(B_s)} \int\limits_{\Phi_{B_s}U_n} \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \, d\mu \right|$$

випливає існування границі

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}K} \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \, d\mu. \tag{2.22}$$

Крок 4. Нехай A — довільна борелева підмножина $\mathcal{S}_{-\varepsilon}$. Нехай K_n — неспадна послідовність компактних множин, що задовольняє $\sigma(A\setminus K_n) < \frac{1}{n}$.

Тоді для $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (A \setminus K_n)$ ми маємо $\sigma(C) = 0$, а тому

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r} C} \left| \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \right| \, d\mu = 0. \tag{2.23}$$

За аналогією з кроком 3, спочатку робимо висновок про рівномірну відносно $r \in (0, \gamma)$ збіжність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}((A\setminus C)\setminus K_n)} \left| \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \right| \, d\mu = 0,$$

а потім, враховуючи границю (2.23) та існування границі (2.22) приходимо до висновку про існування наступної границі

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r} A} \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \, d\mu. \tag{2.24}$$

Позначимо через τ_r міру на $\mathcal{B}(\mathcal{S}_{-\varepsilon})$, що визначена рівністю

$$\tau_r(A) := \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r} A} \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \, d\mu.$$

Існування границі (2.24) означає, що для кожної борелевої множини $A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_{-\varepsilon})$ існує границя $\lim\limits_{r\to 0} \tau_r(A) =: \tau(A)$. Так як $\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \in L_\infty(\mu)$, міра τ є абсолютно неперервноб відносно σ і при цьому $g_\varepsilon = \frac{d\tau}{d\sigma} \in L_\infty(\mathcal{S}_{-\varepsilon}, \sigma)$ та

$$\|g_\varepsilon\|_{L_\infty(\sigma)} \le \|\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z}}\|_{L_\infty(\mu)}. \tag{2.25}$$

Для будь-якої обмеженої борелевої функції u на $\mathcal{S}_{-\varepsilon}$, має місце рівність

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\int\limits_{\Phi_{B_r}\mathcal{S}_{-\varepsilon}}\widehat{u}\,\mathrm{div}\,\widetilde{\boldsymbol{Z}}\,d\mu=\lim_{r\to 0}\int\limits_{\mathcal{S}_{-\varepsilon}}u\,d\tau_r=\int\limits_{\mathcal{S}_{-\varepsilon}}u\cdot g_\varepsilon\,d\sigma. \tag{2.26}$$

Оскільки рівність (2.26) виконується для кожної обмеженої борелевої функції на $\mathcal{S}_{-\varepsilon}$, має місце рівність $g_{\varepsilon_1}=g_{\varepsilon_2}\big|_{\mathcal{S}_{-\varepsilon_1}}$ при $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$, а тому існує борелева функція g, що визначена на всій поверхні $\mathcal{S}$, для якої при кожному $\varepsilon>0$ має місце рівність $g_\varepsilon=g\big|_{\mathcal{S}_{-\varepsilon}}$; більш того, із (2.25) випливає, що $g\in L_\infty(\mathcal{S},\sigma)$.

Зокрема для кожної функції $u\in C_0^1(\mathcal{S})$ із (2.20) отримуємо рівність

$$-\int\limits_{\mathcal{S}}\boldsymbol{Z}u\,d\sigma=\int\limits_{\mathcal{S}}u\cdot g\,d\sigma.$$

Тож існує $\mathrm{div}_{\mathcal{S}}\,\boldsymbol{Z}=g$ на $\mathcal{S}$; $\mathrm{div}_{\mathcal{S}}\,\boldsymbol{Z}\in L_\infty(\sigma)$ і при цьому для будь-якої обмеженої борелевої функції u, що визначена на $\mathcal{S}_{-\varepsilon}$ при деякому $\varepsilon>0$, має місце рівність (2.17).

Теорему доведено. $\square$

Зауваження 4. За аналогією з Лемою 3 можна довести, що

$$\int\limits_{\mathcal{S}_{-\varepsilon}}u\,\mathrm{div}_{\mathcal{S}}\,\boldsymbol{Z}\,d\sigma=\lim_{r\to 0}\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\int\limits_{\Phi_{B_r}\mathcal{S}_{-\varepsilon}}u\,\mathrm{div}\,\widetilde{\boldsymbol{Z}}\,d\mu$$

для будь-якої функції $u\in C_b(\mathcal{M})$.

Для диференціальної k-форми α класу C_b^1, що визначена на $\mathcal{S}$, покладемо $\widehat{\alpha}:=q^*\alpha$. При кожному $\varepsilon>0$ форма $\widehat{\alpha}$ визначена на $\Phi_{B_{\gamma(\varepsilon)}}\mathcal{S}_{-\varepsilon}$.

Наслідок 4. *В умовах Теореми 2, нехай* $\vec{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{Z_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{Z_{k+1}}$ —

розкладне полівекторне поле класу C_b^1 *на* $\mathcal{S}$; $\varepsilon > 0$; $\widetilde{\vec{\boldsymbol{Z}}} = \widetilde{\boldsymbol{Z_1}} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\boldsymbol{Z_{k+1}}}$ *— q-зв'язане із* $\vec{\boldsymbol{Z}}$ *полівекторне поле на* $\Phi_{B_\gamma}\mathcal{S}_{-\varepsilon}$, *та припустимо, що для кожного* $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ *існує* $\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{Z_i}} \in L_\infty(\mu)$. *Тоді полівекторне поле* $\vec{\boldsymbol{Z}} \in D(\operatorname{div}_\mathcal{S})$ *та* $\operatorname{div}_\mathcal{S} \boldsymbol{Z_i} \in L_\infty(\sigma)$ *для кожного* $i \in \{1, \ldots, k+1\}$. *Крім цього, для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *та диференціальної* k*-форми* α *класу* $C_0^1(\mathcal{S})$ *має місце рівність*

$$\int\limits_{\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \langle \alpha, \operatorname{div}_\mathcal{S} \vec{\boldsymbol{Z}} \rangle \, d\sigma = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \langle \widehat{\alpha}, \operatorname{div} \widetilde{\vec{\boldsymbol{Z}}} \rangle \, d\mu.$$

Доведення. Індукція за k. Теорема 2 складає базу індукції. Індуктивний крок ґрунтується на формулі (2.12).

Нехай $\vec{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{X} \wedge \vec{\boldsymbol{Y}}$, де $\vec{\boldsymbol{Y}}$ — k-векторне поле. Тоді $\widetilde{\vec{\boldsymbol{Z}}} = \widetilde{\boldsymbol{X}} \wedge \widetilde{\vec{\boldsymbol{Y}}}$ та

$$\langle \widehat{\alpha}, \operatorname{div} \widetilde{\vec{\boldsymbol{Z}}} \rangle = \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{X}} \cdot \langle \widehat{\alpha}, \widetilde{\vec{\boldsymbol{Y}}} \rangle - \langle i_{\widetilde{\boldsymbol{X}}} \widehat{\alpha}, \operatorname{div} \widetilde{\vec{\boldsymbol{Y}}} \rangle + \langle \widehat{\alpha}, \mathcal{L}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}} \widetilde{\vec{\boldsymbol{Y}}} \rangle.$$

Оскільки $\langle \widehat{\alpha}, \widetilde{\vec{\boldsymbol{Y}}} \rangle = \widehat{\langle \alpha, \vec{\boldsymbol{Y}} \rangle}$, то в силу Теореми 2 виконується рівність

$$\int\limits_{\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \operatorname{div}_\mathcal{S} \boldsymbol{X} \cdot \langle \alpha, \vec{\boldsymbol{Y}} \rangle \, d\sigma = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{X}} \cdot \langle \widehat{\alpha}, \widetilde{\vec{\boldsymbol{Y}}} \rangle \, d\mu.$$

Оскільки $i_{\widetilde{\boldsymbol{X}}} \widehat{\alpha} = \widehat{i_{\boldsymbol{X}} \alpha}$, то рівність

$$\int\limits_{\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \langle i_{\boldsymbol{X}} \alpha, \operatorname{div}_\mathcal{S} \vec{\boldsymbol{Y}} \rangle \, d\sigma = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \langle i_{\widetilde{\boldsymbol{X}}} \widehat{\alpha}, \operatorname{div} \widetilde{\vec{\boldsymbol{Y}}} \rangle \, d\mu$$

є наслідком припущення індукції.

Функція $\langle \widehat{\alpha}, \mathcal{L}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}} \widetilde{\vec{\boldsymbol{Y}}} \rangle = \widehat{u}$, де $u = \langle \alpha, \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}} \vec{\boldsymbol{Y}} \rangle$ — функція класу $C_b(\mathcal{S}_{-\varepsilon})$, а тому рівність

$$\int\limits_{\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \langle \alpha, \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}} \vec{\boldsymbol{Y}} \rangle \, d\sigma = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}\mathcal{S}_{-\varepsilon}} \langle \widehat{\alpha}, \mathcal{L}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}} \widetilde{\vec{\boldsymbol{Y}}} \rangle \, d\mu$$

є безпосереднім наслідком Леми 3.

Залишилось лише скористатися формулою (2.12) відносно $\mathrm{div}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{X} \wedge \vec{\boldsymbol{Y}})$.

Наслідок доведено. $\square$

ВИСНОВКИ

У даній роботі було досліджено дивергенцію полівекторних полів на скінченновимірних та нескінченновимірних многовидах. Проведено порівняння двох наведених версій оператора дивергенції та доведено їх еквівалентність у випадку, коли відповідний многовид є скінченновимірним.

Крім того, було отримано ряд важливих результатів щодо властивостей дивергенції полівекторних полів. Спочатку відповідні властивості було сформульовано та доведено для випадку скінченновимірного многовиду, після чого були знайдені їхні аналоги для більш загального класу банахових (нескінченновимірних) многовидів. Прикладом такого результату може слугувати, наприклад, формула Лейбніца, яка дозволяє записати дивергенцію внутрішнього добутку полівекторного поля на диференціальну форму в термінах дивергенції самого полівекторного поля та зовнішньої похідної диференціальної форми.

Значна частина роботи присвячена дослідженню дивергенції на підмноговидах та зв'язку останньої із дивергенцією на вихідному многовиді. Ця частина роботи є найбільш технічно складною, і вимагає використання розвиненого апарату аналізу на многовидах. Проте така складність є цілком виправданою, оскільки дане дослідження привело до отримання низки нетривіальних та важливих результатів у цьому напрямку.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Ю. В. Богданский, *Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса-Остроградского*, Укр. мат. журн. **64** (2012), № 10, 1299–1313.

2. Ю. В. Богданский, Е. В. Моравецкая, *Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой*, Укр. мат. журн. **69** (2017), № 8, 1030–1048.

3. Ю. В. Богданский, А. Ю. Потапенко, *Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. I*, Укр. мат. журн. **68** (2016), № 7, 897–907.

4. Ю. В. Богданський, *Формула Стокса на банахових многовидах*, подано для публікації в Укр. мат. журн. 05.01.2020.

5. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Algèbre*, chap. I-III, Hermann (1970); chap. IV-VII, Masson (1981); chap. VIII-X, Springer (2007, 2012).

6. N. Broojerdian, E. Peyghan, and A. Heydari, *Differentiation along multivector fields*, IJMSI **6** (2011), № 1, 79–96, DOI 10.7508/ijmsi.2011.01.007.

7. Ю. Л. Далецкий, Я. И. Белопольская, *Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия*, Киев, "Выща школа 1989.

8. Ю. Л. Далецкий, Б. Д. Марянин, *Гладкие меры на бесконечномерных многообразиях*, Докл. АН СССР **285** (1985), № 6, 1297–1300.

9. D. H. Fremlin, *Measurable functions and almost continuous functions*, Manuscripta Math. **33** (1981), № 3–4, 387–405, DOI

10.1007/BF01798235.

10. R. Fry and S. McManus, *Smooth bump functions and the geometry of Banach spaces: a brief survey*, Expo. Math. **20** (2002), № 2, 143–183, DOI 10.1016/S0723-0869(02)80017-2.

11. S. Kobayashi, and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol. 1, Interscience Publ., 1963.

12. S. Lang, *Fundamentals of differential geometry*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1999.

13. J. M. Lee, *Manifolds and differential geometry*, Graduate studies in mathematics, Vol. 107, 2009.

14. C.-M. Marle, *Schouten-Nijenhuis bracket and interior products*, J. Geom. and Phys. **23** (1997), № 3–4, 350–359.