НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

«На правах рукопису»
УДК ______________

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

__________ Олег КЛЕСОВ

«___»____________20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 111 Математика

на тему: «Асимптотична поведінка розв'язків двовимірних стохастичних диференціальних рівнянь»

Виконав:
студент VI курсу, групи ОМ-81мн
Юськович Віктор Костянтинович ___________

Керівник:
доктор фіз.-мат. наук, проф.
Пилипенко А. Ю. ___________

Рецензент:
доктор фіз.-мат. наук, старший наук. співроб.
Арясова О. В. ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент ______________

Київ – 2020 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність (спеціалізація) – 111 «Математика» («Страхова та фінансова математика»)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________ Олег КЛЕСОВ

«___»_____________20__ р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Юськовичу Віктору Костянтиновичу

1. Тема дисертації «Асимптотична поведінка розв'язків двовимірних стохастичних диференціальних рівнянь», науковий керівник дисертації Пилипенко Андрій Юрійович, доктор фізико-математичних наук, професор, затверджені наказом по університету від «17» березня 2020 р. № 891-с.

2. Термін подання студентом дисертації: 11 травня 2020 р.

3. Об'єкт дослідження: двовимірне автономне стохастичне диференціальне рівняння з одиничним коефіцієнтом дифузії.

4. Предмет дослідження: асимптотична поведінка радіуса та кута розв'язку вказаного стохастичного рівняння.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) Ознайомитись з результатами Гіхмана–Скорохода.

2) Узагальнити результати Гіхмана–Скорохода на неавтономний випадок.

3) Знайти умови прямування радіуса розв'язку до нескінченності.

4) Знайти умови стабілізації кута розв'язку на нескінченності.

5) Знайти точну асимптотику радіуса розв'язку на нескінченності.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 17 слайдів

7. Орієнтовний перелік публікацій:

1) Тези доповіді всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу», Ворохта, лютий 2020 р.

2) Тези доповіді IX всеукраїнської конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, Київ, квітень 2020 р.

8. Дата видачі завдання: 03 лютого 2020 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Ознайомлення з результатами Гіхмана–Скорохода	03.02.2020–16.02.2020	виконано
2	Узагальнення результати Гіхмана–Скорохода на неавтономний випадок	17.02.2020–01.03.2020	виконано
3	Пошук умов прямування радіуса розв'язку до нескінченності	02.03.2020–22.03.2020	виконано
4	Пошук умов стабілізації кута розв'язку на нескінченності	23.03.2020–12.04.2020	виконано
5	Пошук точної асимптотики радіуса розв'язку на нескінченності	13.04.2020–03.05.2020	виконано
6	Оформлення магістерської дисертації	04.05.2020–10.05.2020	виконано

Студент Віктор ЮСЬКОВИЧ

Науковий керівник дисертації Андрій ПИЛИПЕНКО

Реферат

Магістерська дисертація містить 35 сторінок та 9 джерел.

Актуальність теми дисертації полягає у тому, що асимптотична поведінка розв'язків багатовимірних стохастичних диференціальних рівнянь, на відміну від одновимірних, на даний момент недостатньо вивчена.

Мета роботи полягає в отриманні нових результатів щодо асимптотичної поведінки розв'язків двовимірних стохастичних диференціальних рівнянь.

Об'єктом дослідження є двовимірне автономне стохастичне диференціальне рівняння з одиничним коефіцієнтом дифузії. Предметом дослідження є асимптотична поведінка радіуса та кута розв'язку вказаного стохастичного рівняння.

Для досягнення поставленої мети в роботі використовуються методи стохастичних диференціальних рівнянь та математичного аналізу.

В результаті виконання магістерської дисертації були узагальнені результати Гіхмана–Скорохода, отримані умови прямування радіуса розв'язку до нескінченності, умови стабілізації кута розв'язку та знайдена точна асимптотика радіуса розв'язку.

Результати з магістерської дисертації були представлені на всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (Ворохта, лютий 2020 р.) та на IX всеукраїнській конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики (Київ, квітень 2020 р.).

Ключові слова: стохастичне диференціальне рівняння, асимптотика, радіус, кут, стабілізація

Abstract

The master’s thesis contains 35 pages and 9 references.

The relevance of the thesis topic is that the asymptotic behavior of solutions of multidimensional stochastic differential equations, in contrast to one-dimensional ones, is currently insufficiently studied.

The aim of this work is to obtain new results on the asymptotic behavior of solutions of two-dimensional stochastic differential equations.

The object of the study is a two-dimensional autonomous stochastic differential equation with the unit diffusion coefficient. The subject of the study is the asymptotic behavior of the radius and the angle of solution of the specified stochastic equation.

To achieve this goal, the methods of stochastic differential equations and calculus are used.

As a result of the master's thesis, the results of Gichman–Skorokhod were generalized, the conditions for the solution radius tending to infinity and the solution angle stabilizing at infinity were obtained, and the exact asymptotics of the solution radius was found.

The results of the master's thesis were presented at the All-Ukrainian scientific conference "Modern problems of probability theory and mathematical analysis" (Vorokhta, February 2020) and at the IX All-Ukrainian conference of students, graduate students and young scientists in mathematics (Kyiv, April 2020).

Keywords: stochastic differential equation, asymptotics, radius, angle, stabilization

Зміст

Вступ

Асимптотична поведінка автономних одновимірних СДР

$$\mathrm{d}X(t) = a(X(t))\mathrm{d}t + b(X(t))\mathrm{d}W(t)$$

досліджувалася Й. І. Гіхманом, А. В. Скороходом [1]. Вони розглядали задачі про умови прямування розв'язку до нескінченності та зводили дослідження точної асимптотики розв'язку СДР до дослідження асимптотики звичайного диференціального рівняння. Таке саме рівняння в іноземній літературі розглядалося, наприклад, Келлером, Керстінгом, Реслером [3].

Асимптотичну поведінку деяких неавтономних одновимірних СДР

$$\mathrm{d}X(t) = a(X(t), t)\mathrm{d}t + b(X(t), t)\mathrm{d}W(t)$$

досліджували В. В. Булдигін, К.-Х. Індлекофер, О. І. Клесов, Й. Г. Штейнбах, О. А. Тимошенко [4], [6], [7]. Зокрема, вони розглядати задачу асимптотичної еквівалентності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь та відповідних їм звичайних диференціальних рівнянь.

У статтях А. Ю. Пилипенка, Ф. Проске, І. Павлюкевича [8], [9] розглядається випадок негауссового шуму. Дослідження асимптотичної поведінки багатовимірних СДР шляхом порівняння з лінійними звичайними диференціальними рівняннями проводиться у праці А. М. Самойленка, О. М. Станжицького, І. Г. Новака [5].

У даній магістерській дисертації буде досліджено асимптотичну поведінку розв'язків двовимірних автономних стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) з одиничним коефіцієнтом дифузії, а саме:

- умови прямування розв'язку до нескінченності;
- умови стабілізації кута розв'язку на нескінченності;
- точну асимптотику радіуса розв'язку.

Розділ 1

Теоретичні відомості

У цьому розділі наведемо основні означення та теореми зі стохастичного аналізу, а також деякі результати з асимптотичної поведінки одновимірних стохастичних диференціальних рівнянь, які будуть використовуватися в основній частині цієї роботи.

1.1 Вінерівський процес

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – імовірнісний простір з потоком $\mathcal{F}_t,\ t \geq 0$.

Означення 1. *Функція $X\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ називається випадковим процесом, якщо $\forall t \in [0,T]$ $X(\cdot, t)$ є $\mathcal{F}_t$-вимірною випадковою величиною. Якщо $X_1(t), ..., X_n(t),\ t \in [0,T]$, – випадкові процеси, то $X(t) = (X_1(t), ..., X_n(t)),\ t \in [0,T]$, називається n-вимірним випадковим процесом.*

Означення 2. *Випадковий процес $W(t),\ t \geq 0$, називається вінерівським процесом, якщо:*

- *$W(0) = 0$ м. н.;*

- *W має незалежні прирости;*

- $W(t) - W(s) \sim \mathrm{Normal}(0, t-s),\ s < t.$

Нехай $W_1, W_2, ..., W_m$ *– незалежні вінерівські процеси.* m*-вимірним вінерівським процесом називається*

$$W = (W_1, W_2, ..., W_m).$$

Властивість 1. *Вінерівський процес* W *має неперервну модифікацію, тобто існує неперервний вінерівський процес* $\tilde{W}$ *такий, що* $\forall t \geq 0\colon \mathbb{P}\{W(t) = \tilde{W}(t)\} = 1$.

Властивість 2. *(Закон повторного логарифма). Для вінерівського процесу* W *майже напевно*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|W(t)|}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1.$$

Як наслідок, майже напевно $W(t) = o(t^{\frac{1}{2}+\delta}),\ t \to \infty,\ \delta > 0.$

1.2 Інтеграл Іто

Означення 3. *Випадковий процес* $X(\omega, t),\ \omega \in \Omega,\ t \in [0, T]$*, називається прогресивно вимірним, якщо* $\forall t \in [0, T]$ *відображення* $\Omega \times [0, t] \ni (\omega, s) \mapsto X(\omega, s)$ *є вимірним відносно* $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}[0, t]$.

Означення 4. *Нехай* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ *– розбиття проміжку* $[0, T]$*,* α_k *– обмежена* $\mathcal{F}_{t_k}$*-вимірна випадкова величина,* $k = \overline{0, n-1}$*,* W *– вінерівський процес. Інтегралом Іто від випадкового процесу* $X(t),\ 0 \leq t \leq T$*, вигляду*

$$X(t) = \alpha_k(W(t_{k+1}) - W(t_k)),\ t_k < t \leq t_{k+1},\ k = \overline{0, n-1}$$

назвемо випадкову величину

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(W(t_{k+1}) - W(t_k)) =: \int_0^T X(t) \mathrm{d}W(t).$$

Інтеграл Іто можна продовжити на клас прогресивно вимірних процесів таких, що м. н.

$$\int_0^T X^2(t)\mathrm{d}t < \infty.$$

Такі процеси будемо називати інтегровними за Іто.

Властивість 3. *Нехай випадковий процес $X(t),\ t \in [0,T]$, інтегровний за Іто. Тоді*

$$\mathbb{E}\int_0^T X(t)\mathrm{d}W(t) = 0.$$

Означення 5. *Випадкова величина $\tau \in [0,\infty]$ називаєтсья моментом зупинки, якщо $\forall t \geq 0\colon \{\tau \leq t\} \subset \mathcal{F}_t$.*

Властивість 4. *Нехай $X(t),\ t \geq 0$, – неперервний процес м. н., $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$. Тоді*

$$\tau = \inf\{t > 0\colon X(t) \notin [x_1, x_2]\}$$

– момент зупинки.

Властивість 5. *Нехай $X(t),\ t \in [0,T]$, – інтегровний за Іто процес, $\tau \in [0,T]$ – момент зупинки. Тоді*

$$\int_0^\tau X(s)\mathrm{d}W(s) = \int_0^T \mathbb{I}_{s<\tau} X(s)\mathrm{d}W(s).$$

Теорема 1. *(Леві). Нехай $W = (W_1, ..., W_m)$ – m-вимірний вінерівський процес, b_{ij} – випадковий процес, $i, j = \overline{1,m}$, для майже всіх $t \geq 0\ \forall i, j = \overline{1,m}$:*

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^m b_{ik}(t)b_{jk}(t) = \delta_{ij}\right\} = 1,$$

де δ – символ Кронекера. Тоді

$$\tilde{W}_k(t) := \sum_{l=1}^m \int_0^t b_{kl}(s)\mathrm{d}W_l(s),\ t \geq 0,\ k = \overline{1,m},$$

задають m-вимірний вінерівський процес $\tilde{W} = (\tilde{W}_1, ..., \tilde{W}_m)$.

1.3 Стохастичні диференціальні рівняння

Означення 6. *Нехай випадкові процеси* $a(t), b(t),\ t \in [0,T]$, *прогресивно вимірні такі, що м. н.*

$$\int_0^T |a(t)| \mathrm{d}t < \infty, \qquad \int_0^T b^2(t) \mathrm{d}t < \infty.$$

Кажуть, що випадковий процес $X(t),\ t \in [0,T]$, *має стохастичний диференціал*

$$\mathrm{d}X(t) = a(t)\mathrm{d}t + b(t)\mathrm{d}W(t),$$

якщо м. н.

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)\mathrm{d}s + \int_0^t b(s)\mathrm{d}W(s), \qquad t \in [0,T].$$

Теорема 2. *(Формула Іто). Нехай* $W = (W_1, ..., W_m)$ *– m-вимірний вінерівський процес,* $X(t) = (X_1(t), ..., X_n(t)),\ t \in [0,T]$, *– n-вимірний випадковий процес, координати якого мають стохастичні диференціали*

$$\mathrm{d}X_k(t) = a_k(t)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^m b_{ki}(t)\mathrm{d}W_i(t), \qquad k = \overline{1,n},$$

$f(x,t),\ x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T]$, *– двічі неперервно диференційовна за x та неперервно диференційовна за t функція. Тоді*

$$\mathrm{d}f(X(t),t) = \frac{\partial f}{\partial t}(X(t),t) + \frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t), \mathrm{d}W(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k \partial x_l}(X(t),t) \sum_{i=1}^m b_{ki}(t) b_{li}(t) \right) \mathrm{d}t.$$

Означення 7. *Нехай функції* $a \colon \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n, b \colon \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n \times m}$ *вимірні,* W *– m-вимірний вінерівський процес,* X_0 *– $\mathcal{F}_0$-вимірна випадкова величина. Вираз вигляду*

$$\mathrm{d}X(t) = a(X(t),t)\mathrm{d}t + b(X(t),t)\mathrm{d}W(t), \qquad X(0) = X_0, \tag{1.1}$$

називається стохастичним диференціальним рівнянням (СДР). Майже напевно неперервний n-вимірний випадковий процес $X(t),\ t \in [0,T]$, називається розв'язком цього СДР, якщо

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a(X(s),s)\mathrm{d}s + \int_0^t b(X(s),s)\mathrm{d}W(s),\ t \in [0,T].$$

Теорема 3. *(Існування та єдиність розв'язку). Розглянемо СДР (1.1). Нехай виконуються умови:*

- *функції a, b мають не більш ніж лінійне зростання за просторовою змінною:*

$$\exists C \geq 0\ \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n \colon |a(x,t)| + |b(x,t)| \leq C(1+|x|);$$

- *функції a, b ліпшицеві за просторовою змінною:*

$$\exists L \geq 0\ \forall t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^n \colon |a(x,t) - a(y,t)| + |b(x,t) - b(y,t)| \leq L|x-y|;$$

- *X_0 має скінченний другий момент:*

$$\mathbb{E}|X_0|^2 < \infty.$$

Тоді існує розв'язок X рівняння (1.1) такий, що

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |X(t)|^2 < \infty.$$

Якщо Y – розв'язок рівняння (1.1) такий, що

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |Y(t)|^2 < \infty,$$

то

$$\mathbb{P}\{\forall t \in [0,T] \colon X(t) = Y(t)\} = 1.$$

Теорема 4. *(Теорема порівняння, Ікеда–Ватанабе [2]). Нехай випадкові процеси $X_1(t), X_2(t),\ t \geq 0$, є розв'язками СДР*

$$\mathrm{d}X_1(t) = a_1(X_1(t), t)\mathrm{d}t + b(X_1(t), t)\mathrm{d}W(t),$$

$$\mathrm{d}X_2(t) = a_2(X_2(t), t)\mathrm{d}t + b(X_2(t), t)\mathrm{d}W(t),$$

причому м. н. $X_1(0) \leq X_2(0)$ та $\forall t \geq 0\colon a_1(X_1(t), t)) < a_2(X_1(t), t)$. Тоді м. н. $\forall t \geq 0\colon X_1(t) \leq X_2(t)$.

1.4 Асимптотична поведінка одновимірних СДР

У цій частині сформулюємо деякі результати, отримані Гіхманом–Скороходом [1], щодо асимптотичної поведінки одновимірних автономних СДР:

$$\mathrm{d}X(t) = a(X(t))\mathrm{d}t + b(X(t))\mathrm{d}W(t), \qquad X(0) = x_0 \in [x_1, x_2]. \tag{1.2}$$

Нехай це рівняння задовольняє умови теореми існування та єдиності розв'язку, і нехай $b(x) \neq 0$. Для наведеного стохастичного рівняння визначимо оператор

$$L[s](x) := a(x)s'(x) + \tfrac{1}{2}b(x)s''(x).$$

Функція s, яка задовольняє рівняння $L[s] = 0$, називається *L-гармонічною.* Також визначимо момент першого виходу розв'язку з проміжку $[x_1, x_2]$:

$$\tau := \inf\{t > 0\colon X(t) \notin [x_1, x_2]\}.$$

Лема 1. *(Гіхман–Скороход [1]). Припустимо, що для рівняння (1.1) існує така функція u, що*

$$L[u](x) = -1,\ x \in [x_1, x_2],\ t \geq 0, \qquad u(x_1) = u(x_2) = 0.$$

Тоді $\mathbb{E}\tau = s(x_0)$. Як наслідок, $\tau < \infty$ м. н.

Лема 2. *(Гіхман–Скороход [1]). Нехай виконуються умови леми (1) та існує строго монотонна L-гармонічна на проміжку $[x_1, x_2]$ функція s для СДР (1.1). Тоді*

$$\mathbb{P}\{X(\tau) = x_1\} = \frac{s(x_2) - s(x_0)}{s(x_2) - s(x_1)}, \qquad \mathbb{P}\{X(\tau) = x_2\} = \frac{s(x_0) - s(x_1)}{s(x_2) - s(x_1)}.$$

Лема 3. *(Гіхман–Скороход [1]). Нехай існує зростаюча L-гармонічна функція для рівняння (1.1). Тоді:*

- *якщо $s(-\infty) = -\infty$, $s(+\infty) < +\infty$, то $X(t) \to +\infty$ м. н.;*
- *якщо $s(-\infty) > -\infty$, $s(+\infty) = +\infty$, то $X(t) \to -\infty$ м. н.*

Теорема 5. *(Гіхман–Скороход [1]). Нехай для СДР (1.2) виконуються умови:*

- *$a(x) \sim Ax^{\alpha}$, $x \to \infty$, $A > 0$, $-1 < \alpha < 1$;*
- *$b(x) \neq 0$, обмежена;*
- *$X(t) \to +\infty$ м. н.*

Тоді майже напевно $X(t) \sim x(t) \sim (A(1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, де x – розв'язок відповідного звичайного диференціального рівняння

$$\mathrm{d}x(t) = Ax^{\alpha}(t)\mathrm{d}t, \qquad x(0) = 1.$$

Розділ 2

Основна частина

2.1 Система СДР, що розглядається

Розглянемо двовимірне автономне стохастичне диференціальне рівняння

$$\mathrm{d}X(t) = a(X(t))\mathrm{d}t + b(X(t))\mathrm{d}W(t), \qquad X(0) = x_0,$$

де $X = (X_1, X_2)$ – невідомий двовимірний випадковий процес, $W = (W_1, W_2)$ – двовимірний вінерівський процес, $a = (a_1, a_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, b\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ – відомі функції, $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$. Функцію a будемо називати *коефіцієнтом зносу*, а функцію b – *коефіцієнтом дифузії*.

Для простоти в якості коефіцієнта дифузії b візьмемо одиничну матрицю. Отже, надалі розглядатимемо двовимірну систему СДР вигляду

$$\mathrm{d}X_1(t) = a_1(X_1(t), X_2(t))\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_1(t), \qquad X_1(0) = x_{01}, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{d}X_2(t) = a_2(X_1(t), X_2(t))\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_2(t), \qquad X_2(0) = x_{02}. \tag{2.2}$$

Для існування та єдиності розв'язку системи (2.1)-(2.2) вимагаємо, щоб функція a задовольняла умову Ліпшиця

$$\exists L > 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}^2\colon |a(x) - a(y)| \le L|x - y|$$

та мала не більш ніж лінійне зростання:

$$\exists C > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^2 \colon |a(x)| \leq C(1 + |x|).$$

2.2 Перехід до полярної системи координат

Для дослідження асимптотичної поведінки розв'язку двовимірної системи, який є двовимірним випадковим процесом (X_1, X_2), перейдемо до полярної системи координат. Визначимо нові випадкові процеси R та Φ за допомогою формул переходу

$$X_1 = R \cos \Phi, \tag{2.3}$$

$$X_2 = R \sin \Phi. \tag{2.4}$$

Процес R будемо називати *радіусом* розв'язку, а Φ – *кутом* розв'язку. Зауважимо, що в нашому випадку не вимагається, щоб $\Phi(t) \in [0, 2\pi)$, тобто кут може «намотуватися» в процесі того, як розв'язок обертається навколо початку координат.

Знайдемо стохастичні диференціальні рівняння для R та Φ за допомогою формули Іто. Для цього нам знадобляться перші та другі частинні похідні від R та Φ за X_1 та X_2. Спочатку знайдемо, навпаки, частинні похідні від X_1 та X_2 за R та Φ (матрицю Якобі), використовуючи формули (2.3)-(2.4):

$$\frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(R, \Phi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial R} & \frac{\partial X_1}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial X_2}{\partial R} & \frac{\partial X_2}{\partial \Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Phi & -R \sin \Phi \\ \sin \Phi & R \cos \Phi \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо потрібні частинні похідні, обертаючи матрицю Якобі:

$$\frac{\partial(R, \Phi)}{\partial(X_1, X_2)} = \left(\frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(R, \Phi)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \Phi & -R \sin \Phi \\ \sin \Phi & R \cos \Phi \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi \\ -\frac{\sin \Phi}{R} & \frac{\cos \Phi}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} & \frac{X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \\ -\frac{X_2}{X_1^2 + X_2^2} & \frac{X_1}{X_1^2 + X_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial X_1} & \frac{\partial R}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо другі частинні похідні від R та Φ:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial X_1^2} = \frac{\partial}{\partial X_1}\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}} = \frac{X_2^2}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}^3} = \frac{\sin^2\Phi}{R};$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial X_2^2} = \frac{\partial}{\partial X_2}\frac{X_2}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}} = \frac{X_1^2}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}^3} = \frac{\cos^2\Phi}{R};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_1^2} = \frac{\partial}{\partial X_1}\left(-\frac{X_2}{X_1^2+X_2^2}\right) = \frac{2X_1X_2}{(X_1^2+X_2^2)^2} = \frac{\sin 2\Phi}{R^2};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_2^2} = \frac{\partial}{\partial X_2}\frac{X_1}{X_1^2+X_2^2} = -\frac{2X_1X_2}{(X_1^2+X_2^2)^2} = -\frac{\sin 2\Phi}{R^2}.$$

За формулою Іто знайдемо стохастичні диференціали $\mathrm{d}R$ та $\mathrm{d}\Phi$:

$$\mathrm{d}R = \cos\Phi\,\mathrm{d}X_1 + \sin\Phi\,\mathrm{d}X_2 + \tfrac{1}{2}R^{-1}\sin^2\Phi\,\mathrm{d}X_1^2 + \tfrac{1}{2}R^{-1}\cos^2\Phi\,\mathrm{d}X_2^2 =$$

$$= \tilde{a}_1(R,\Phi)\mathrm{d}t + \cos\Phi\,\mathrm{d}W_1 + \sin\Phi\,\mathrm{d}W_2 + \tfrac{1}{2}R^{-1}\sin^2\Phi\,\mathrm{d}t + \tfrac{1}{2}R^{-1}\cos^2\Phi\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left(\tilde{a}_1(R,\Phi) + \tfrac{1}{2}R^{-1}\right)\mathrm{d}t + \cos\Phi\,\mathrm{d}W_1 + \sin\Phi\,\mathrm{d}W_2,$$

$$\mathrm{d}\Phi = -R^{-1}\sin\Phi\,\mathrm{d}X_1 + R^{-1}\cos\Phi\,\mathrm{d}X_2 +$$

$$+\tfrac{1}{2}R^{-2}\sin 2\Phi\,(\mathrm{d}X_1)^2 - \tfrac{1}{2}R^{-2}\sin 2\Phi\,(\mathrm{d}X_2)^2 =$$

$$= \tilde{a}_2(R,\Phi)R^{-1}\mathrm{d}t - R^{-1}\sin\Phi\,\mathrm{d}W_1 + R^{-1}\cos\Phi\,\mathrm{d}W_2 +$$

$$+\tfrac{1}{2}R^{-2}\sin 2\Phi\,\mathrm{d}t - \tfrac{1}{2}R^{-2}\sin 2\Phi\,\mathrm{d}t =$$

$$= \tilde{a}_2(R,\Phi)R^{-1}\mathrm{d}t + R^{-1}(-\sin\Phi\,\mathrm{d}W_1 + \cos\Phi\,\mathrm{d}W_2),$$

де

$$\tilde{a}_1(r,\varphi) := a_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi + a_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi,$$

$$\tilde{a}_2(r,\varphi) := -a_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi + a_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi.$$

За теоремою Леві стохастичні диференціали

$$\mathrm{d}\tilde{W}_1 := \cos\Phi\,\mathrm{d}W_1 + \sin\Phi\,\mathrm{d}W_2,$$

$$\mathrm{d}\tilde{W}_2 := -\sin\Phi\,\mathrm{d}W_1 + \cos\Phi\,\mathrm{d}W_2$$

визначають новий вінерівський процес $\tilde{W} = (\tilde{W}_1, \tilde{W}_2)$.

Отже, маємо наступну систему СДР у полярній системі координат:

$$\mathrm{d}R(t) = \left(\tilde{a}_1(R(t), \Phi(t)) + \tfrac{1}{2}R^{-1}(t)\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}\tilde{W}_1(t), \qquad R(0) = r_0, \tag{2.5}$$

$$\mathrm{d}\Phi(t) = \tilde{a}_2(R(t), \Phi(t))R^{-1}(t)\mathrm{d}t + R^{-1}(t)\mathrm{d}\tilde{W}_2(t), \qquad \Phi(0) = \varphi_0, \tag{2.6}$$

де

$$r_0 = |x_0|, \qquad \varphi_0 = \arg x_0 \in [0, 2\pi).$$

Таким чином, поставлені раніше задачі в термінах радіуса та кута зводяться до наступних:

- дослідити умови, за яких $R(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ м. н.;
- дослідити умови, за яких $\exists \lim_{t\to\infty} \Phi(t) =: \Phi(\infty)$ м. н.;
- знайти точну асимптотику радіуса розв'язку м. н., тобто таку детерміновану функцію r, що $R(t) \sim r(t),\ t \to \infty$, м. н.

2.3 Узагальнення результатів Гіхмана–Скорохода

Результати Гіхмана–Скорохода дозволяють досліджувати асимптотичну поведінку одновимірних СДР, які є автономними. СДР для радіуса (2.5) нашої системи є неавтономним. У цьому розділі ми узагальнимо результати Гіхмана-Скорохода на випадок неавтономних СДР, щоб потім використати їх для дослідження СДР (2.5).

Розглянемо одновимірне СДР

$$\mathrm{d}X(t) = a(X(t), t)\mathrm{d}t + b(X(t), t)\mathrm{d}W(t), \qquad X(0) = x_0 \in [x_1, x_2], \tag{2.7}$$

що має єдиний розв'язок. Для цього рівняння визначимо оператор

$$L[s](x, t) := a(x, t)s'(x) + \tfrac{1}{2}b^2(x, t)s''(x) \tag{2.8}$$

та момент першого виходу розв'язку з проміжку $[x_1, x_2]$

$$\tau := \inf\{t > 0 \colon X(t) \notin [x_1, x_2]\}.$$

Доведемо лему, яка дає достатні умови того, що розв'язок СДР (2.7) майже напевно рано чи пізно виходить з проміжку $[x_1, x_2]$.

Лема 4. *Припустимо, що існує така функція u, що*

$$L[u](x,t) \leq -1,\ x \in [x_1, x_2], \qquad u(x_1) = u(x_2) = 0.$$

Тоді $\mathbb{E}\tau \leq u(x_0)$. Як наслідок, майже напевно $\tau < \infty$.

Доведення. Запишемо формулу Іто для $\mathrm{d}u(X(t))$:

$$\mathrm{d}u(X(t)) = u'(X(t))\mathrm{d}X(t) + \tfrac{1}{2}u''(X(t))(\mathrm{d}X(t))^2 =$$

$$= u'(X(t))a(X(t),t)\mathrm{d}t + u'(X(t))b(X(t),t)\mathrm{d}W(t) + \tfrac{1}{2}u''(X(t)b^2(X(t),t))\mathrm{d}t =$$

$$= L[u](X(t),t)\mathrm{d}t + b(X(t),t)u'(X(t))\mathrm{d}W(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(X(t)) = u(x_0) + \int_0^t L[u](X(s),s)\mathrm{d}s + \int_0^t b(X(s),s)u'(X(s))\mathrm{d}W(s).$$

Підставимо $t = \min\{\tau, n\} =: \tau \wedge n,\ n \in \mathbb{N}$, в останнє рівняння:

$$u(X(\tau \wedge n)) = u(x_0) + \int_0^{\tau\wedge n} L[u](X(s),s)\mathrm{d}s + \int_0^{\tau\wedge n} b(X(s),s)u'(X(s))\mathrm{d}W(s).$$

Математичне сподівання від стохастичного інтеграла

$$\mathbb{E}\int_0^{\tau\wedge n} b(X(s),s)u'(X(s))\mathrm{d}W(s) = \mathbb{E}\int_0^n \mathbb{I}_{s\leq\tau} b(X(s),s)u'(X(s))\mathrm{d}W(s) = 0,$$

оскільки підінтегральна функція обмежена. Отже,

$$\mathbb{E}u(X(\tau \wedge n)) = u(x_0) + \mathbb{E}\int_0^{\tau\wedge n} L[u](X(s),s)\mathrm{d}s \leq$$

$$\leq u(x_0) - \mathbb{E}\int_0^{\tau\wedge n} \mathrm{d}s = u(x_0) - \mathbb{E}[\tau \wedge n].$$

Спрямовуючи $n \to \infty$, маємо $\tau \wedge n \uparrow \tau$; тоді $\mathbb{E}[\tau \wedge n] \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathbb{E}\tau$ за теоремою про монотонну збіжність. За теоремою Леві про мажоровану збіжність $\mathbb{E}u(X(\tau \wedge n)) \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathbb{E}u(X(\tau))$. Значить, переходячи до границі при $n \to \infty$ в останній нерівності, отримуємо

$$\mathbb{E}u(X(\tau)) \leq u(x_0) - \mathbb{E}\tau.$$

Оскільки або $X(\tau) = x_1$, або $X(\tau) = x_2$, то $u(X(\tau)) = 0$. Таким чином, $\mathbb{E}\tau \leq u(x_0) < \infty$, з чого випливає, що $\tau < \infty$ майже напевно. $\square$

Доведемо наступну лему, яка дозволяє оцінювати імовірності виходу розв'язку через лівий та правий кінці проміжку $[x_1, x_2]$.

Лема 5. *Нехай виконуються умови леми 4. Припустимо, що існує така спадна функція s, що*

$$L[s](x,t) \leq 0,\ x \in [x_1, x_2].$$

Тоді

$$\mathbb{P}\{X(\tau) = x_1\} \leq \frac{s(x_0) - s(x_2)}{s(x_1) - s(x_2)}, \qquad \mathbb{P}\{X(\tau) = x_2\} \geq \frac{s(x_1) - s(x_0)}{s(x_1) - s(x_2)}.$$

Доведення. Виконуючи з функцією s аналогічні дії, як з функцією u в лемі 4, та враховуючи те, що

$$\int_0^{\tau\wedge n} L[s](X(r), r)\mathrm{d}r \leq \int_0^{\tau\wedge n} 0\ \mathrm{d}r = 0,$$

отримуємо

$$\mathbb{E}s(X(\tau)) \leq s(x_0).$$

Оскільки $\tau < \infty$ м. н., то

$$\mathbb{P}\{X(\tau) = x_1\} =: p, \qquad \mathbb{P}\{X(\tau) = x_2\} =: q,$$

причому $p + q = 1$. За формулою повної імовірності маємо

$$\mathbb{E}s(X(\tau)) = s(x_1)p + s(x_2)q = s(x_1)p + s(x_2)(1-p) = (s(x_1) - s(x_2))p + s(x_2).$$

Підставляємо знайдений вираз у нерівність:

$$(s(x_1) - s(x_2))p + s(x_2) \leq s(x_0) \Leftrightarrow$$

// оскільки s спадаюча, то $s(x_1) - s(x_2) > 0$

$$\Leftrightarrow p \leq \frac{s(x_0) - s(x_2)}{s(x_1) - s(x_2)}.$$

Оскільки $q = 1 - p$,

$$q \geq 1 - \frac{s(x_0) - s(x_2)}{s(x_1) - s(x_2)} = \frac{s(x_1) - s(x_0)}{s(x_1) - s(x_2)}.$$

$\square$

2.4 Вихід радіуса з будь-якого відрізка

У цьому та наступному розділах будемо вивчати СДР (2.5)

$$\mathrm{d}R(t) = \left(\tilde{a}_1(R(t), \Phi(t)) + \tfrac{1}{2}R^{-1}(t)\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}\tilde{W}_1(t)$$

з початковою умовою

$$R(0) = r_0 \in [r_1, r_2] \subset (0, \infty).$$

Позначимо час першого виходу розв'язку з проміжку $[r_1, r_2]$:

$$\tau := \inf\{t \geq 0 \colon R(t) \notin [r_1, r_2]\}.$$

Оператор L з формули (2.8), що відповідає СДР (2.5), переписується так:

$$L[s](r,t) = \left(\tilde{a}_1(r, \Phi(t)) + \tfrac{1}{2}r^{-1}\right)s'(r) + \tfrac{1}{2}s''(r).$$

Доведемо, що майже напевно рано чи пізно розв'язок виходить з будь-якого проміжку, використовуючи раніше доведену лему 4.

Твердження 1. $\tau < \infty$ *м. н.*

Доведення. Щоб гарантувати існування та єдиність розв'язку початкової системи (2.1)-(2.2), вимагалася ліпшицевість вектор-функції a, з чого випливає ліпшицевість її компонент a_1, a_2 та їхня неперервність. За теоремою Вейєрштрасса a_1, a_2 будуть обмежені на компактах. Зокрема, вони будуть обмежені на компакті

$$\{(x_1, x_2)\colon r_1^2 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq r_2^2\},$$

що представляє собою кільце. Відповідно, обмеженими будуть функції $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$ на множині $[r_1, r_2] \times \mathbb{R}$.

Відповідно до леми 4 будемо шукати функцію u таку, що

$$L[u](r,t) \leq -1,\ r \in [r_1, r_2], \qquad u(r_1) = u(r_2) = 0.$$

Тоді за цією теоремою будемо мати $\tau < \infty$ м. н.

Спочатку розглянемо функції

$$u_n(r) = 1 - e^{n(r-r_1)(r-r_2)},\ r \in [r_1, r_2],\ n \in \mathbb{N}.$$

Бачимо, що $u_n(r_1) = u_n(r_2) = 0$. Запишемо похідні цих функцій:

$$u_n'(r) = -ne^{n(r-r_1)(r-r_2)}(2r - r_1 - r_2),$$

$$u_n''(r) = -ne^{n(r-r_1)(r-r_2)}(n(2r - r_1 - r_2)^2 + 2).$$

У нашому випадку $L[u_n]$ має вигляд

$$L[u_n](r,t) = \left(\tilde{a}_1(r, \Phi(t)) + \tfrac{1}{2r}\right) u_n'(r) + \tfrac{1}{2}u_n''(r).$$

Розпишемо

$$-L[u_n](r,t) =$$

// через $e^{(\dots)}$ позначається $e^{n(r-r_1)(r-r_2)}$

$$= ne^{(\dots)}(2r - r_1 - r_2)\left(\tilde{a}_1(r, \Phi(t)) + \tfrac{1}{2r}\right) + \tfrac{1}{2}ne^{(\dots)}(n(2r - r_1 - r_2)^2 + 2) =$$

$$= ne^{(\dots)}\left((2r-r_1-r_2)\left(\tilde{a}_1(r,\Phi(t))+\tfrac{1}{2r}\right)+\tfrac{1}{2}n(2r-r_1-r_2)^2+1\right).$$

Якщо $r = \frac{r_1+r_2}{2}$, то $2r - r_1 - r_2 = 0$ та

$$(2r-r_1-r_2)\left(\tilde{a}_1(r,\Phi(t))+\tfrac{1}{2r}\right)+\tfrac{1}{2}n(2r-r_1-r_2)^2+1 = 1 > 0.$$

Якщо ж $r \neq \frac{r_1+r_2}{2}$, то $2r - r_1 - r_2 \neq 0$, вираз $(2r-r_1-r_2)\left(\tilde{a}_1(r,\Phi(t))+\frac{1}{2r}\right)$ обмежений і не залежить від n, а $\frac{n}{2}(2r-r_1-r_2)^2 \to \infty,\ n \to \infty$. В обох випадках $\exists n = N$, $\exists \tilde{\varepsilon} > 0$:

$$(2r-r_1-r_2)\left(\tilde{a}_1(r,\Phi(t))+\tfrac{1}{2r}\right)+\tfrac{1}{2}N(2r-r_1-r_2)^2+1 \geq \tilde{\varepsilon},$$

звідки для $\varepsilon = N\tilde{\varepsilon} > 0$ маємо

$$-L[u_N] \geq \varepsilon \Leftrightarrow L[u_N] \leq -\varepsilon.$$

Розглянемо функцію $u = \frac{1}{\varepsilon}u_N$. Оскільки L – лінійний оператор, то

$$L[u] = L[\tfrac{1}{\varepsilon}u_N] = \tfrac{1}{\varepsilon}L[u_N] \leq \tfrac{1}{\varepsilon}(-\varepsilon) = -1,$$

тобто $L[u] \leq -1$. Очевидно, що u також задовольняє умови $u(r_1) = u(r_2) = 0$. $\square$

2.5 Непотрапляння радіуса у початок координат

Як і в попередньому розділі, розглядаємо рівняння для радіуса (2.5)

$$\mathrm{d}R(t) = \left(\tilde{a}_1(R(t),\Phi(t))+\tfrac{1}{2}R^{-1}(t)\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}\tilde{W}_1(t)$$

з початковим значенням $R(0) = r_0 > 0$. У цьому розділі доведемо, що розв'язок такого СДР майже напевно ніколи не потрапляє в 0, якщо його коефіцієнт зносу невід'ємний, використовуючи лему 5.

Твердження 2. *Припустимо, що* $\tilde{a}_1 \geq 0$. *Тоді майже напевно* $\forall t \geq 0\colon R(t) \neq 0$.

Доведення. Візьмемо довільний проміжок $[r_1, r_2] \subset (0, \infty)$, що містить початкову точку r_0, та позначимо, як і раніше, $\tau := \inf\{t \geq 0\colon R(t) \notin [r_1, r_2]\}$. Оскільки твердженням 1 було доведено $\tau < \infty$ м. н., то можемо використати лему 5. Знайдемо спадаючу функцію s таку, що $L[s](r,t) \leq 0, r \in (0, r_2]$.

Розглянемо спадаючу функцію $s(r) = -\ln r$. Розпишемо $L[s]$:

$$L[s](r,t) = \left(\tilde{a}_1(r, \Phi(t)) + \tfrac{1}{2} r^{-1}\right) s'(t) + \tfrac{1}{2} s''(r) =$$

$$= -r^{-1}\left(\tilde{a}_1(r, \Phi(t)) + \tfrac{1}{2} r^{-1}\right) + \tfrac{1}{2} r^{-2} = -r^{-1}\tilde{a}_2(r, \Phi(t)) \leq 0.$$

Отже, відповідно до леми 5 маємо оцінку імовірності виходу радіуса через лівий кінець:

$$\mathbb{P}\{R(\tau) = r_1\} \leq \frac{s(r_0) - s(r_2)}{s(r_1) - s(r_2)}.$$

Оскільки $s(r_1) = -\ln r_1 \to \infty,\ r_1 \to 0$, то переходячи до границі при $r_1 \to 0$ в останній нерівності, отримуємо

$$\mathbb{P}\{R(\tau_0) = 0\} \leq 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}\{R(\tau_0) = 0\} = 0,$$

де $\tau_0 := \inf\{t \geq 0\colon R(t) \notin (0, r_2]\}$. Це означає, що майже напевно $\forall t \geq 0\colon R(t) \neq 0$. $\square$

2.6 Прямування радіуса до нескінченності

Надалі будемо розглядати наступний «відштовхувальний» коефіцієнт $\tilde{a}_1$:

$$\tilde{a}_1(r, \varphi) = \mu(\varphi) r^{\alpha},\ \mu \geq M > 0,\ -1 < \alpha < 1.$$

Таким чином, надалі розглядаємо наступне СДР для радіуса:

$$\mathrm{d}R(t) = \left(\mu(\Phi(t)) R^{\alpha}(t) + \tfrac{1}{2} R^{-1}(t)\right) \mathrm{d}t + \mathrm{d}\tilde{W}_1(t),\ R(0) = r_0 > 0. \tag{2.9}$$

За допомогою теореми порівняння порівняємо розв'язок СДР (2.9) з розв'язком СДР

$$\mathrm{d}\tilde{R}(t) = \left(\tfrac{M}{2}\tilde{R}^{\alpha}(t) + \tfrac{1}{2}R^{-1}(t)\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}\tilde{W}_1(t),\ \tilde{R}(0) = \tfrac{r_0}{2}. \tag{2.10}$$

Оскільки $\frac{M}{2} < \mu$ та $\frac{r_0}{2} < r_0$, то за теоремою порівняння $\tilde{R} \leq R$ м. н.

Знайдемо асимптотику розв'язку $\tilde{R}(t)$ при $t \to \infty$ м. н. за допомогою теореми Гіхмана–Скорохода. Оскільки $\alpha > -1$, то коефіцієнт зносу в рівнянні (2.10)

$$\tfrac{M}{2}\tilde{r}^{\alpha} + \tfrac{1}{2}\tilde{r}^{-1} \sim \tfrac{M}{2}\tilde{r}^{\alpha},\ \tilde{r} \to \infty,$$

і за теоремою Гіхмана–Скорохода $\tilde{R}(t) \sim \tilde{r}(t),\ t \to \infty$, м. н., де $\tilde{r}$ – розв'язок відповідного ЗДР

$$\mathrm{d}\tilde{r}(t) = \tfrac{M}{2}\tilde{r}^{\alpha}(t)\mathrm{d}t, \qquad \tilde{r}(0) = 1,$$

а саме майже напевно

$$\tilde{R}(t) \sim \left(\frac{M(1-\alpha)}{2}t\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, t \to \infty.$$

Таким чином, можна записати нижню оцінку асимптотики майже напевно:

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \geq \varliminf_{t\to\infty} \frac{\tilde{R}(t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{R}(t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \frac{M(1-\alpha)}{2} > 0. \tag{2.11}$$

З останньої формули випливає, що $R(t) \to \infty,\ t \to \infty$, м. н.

2.7 Стабілізація кута

Для дослідження задачі про стабілізацію кута розглядаємо систему (2.9), (2.6) з усіма раніше зробленими щодо неї припущеннями:

$$\mathrm{d}R(t) = \left(\mu(\Phi(t))R^{\alpha}(t) + \tfrac{1}{2}R^{-1}(t)\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}\tilde{W}_1(t), \qquad R(0) = r_0 > 0.$$

$$\mathrm{d}\Phi(t) = \tilde{a}_2(R(t), \Phi(t))R^{-1}(t)\mathrm{d}t + R^{-1}(t)\mathrm{d}\tilde{W}_2(t), \qquad \Phi(0) = \varphi_0.$$

Перепишемо рівняння для кута в інтегральній формі:

$$\Phi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \tilde{a}_2(R(s), \Phi(s)) R^{-1}(s) \mathrm{d}s + \int_0^t R^{-1}(s) \mathrm{d}\tilde{W}_2(s).$$

Нам треба знайти умови, при яких $\exists \lim_{t\to\infty} \Phi(t) =: \Phi(\infty)$ м. н.:

$$\Phi(\infty) = \varphi_0 + \int_0^\infty \tilde{a}_2(R(t), \Phi(t)) R^{-1}(t) \mathrm{d}t + \int_0^\infty R^{-1}(t) \mathrm{d}\tilde{W}_2(t).$$

Очевидно, границя кута буде існувати м. н., якщо збігаються інтеграли в правій частині м. н.

З нижньої асимптотики (2.11) випливає, що м. н.

$$\exists T_1 \geq 0 \; \forall t \geq T_1 \colon R(t) \geq \tfrac{M(1-\alpha)}{4} t^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Дослідимо достатню умову збіжності майже напевно другого інтеграла:

$$\left| \int_0^\infty R^{-1}(t) \mathrm{d}\tilde{W}_2(t) \right| < \infty \Leftarrow \left| \int_0^\infty R^{-2}(t) \mathrm{d}t \right| < \infty \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \int_{T_1}^\infty t^{\frac{-2}{1-\alpha}} \mathrm{d}t < \infty \Leftarrow \frac{-2}{1-\alpha} < -1 \Leftarrow \alpha > -1.$$

Оскільки раніше ми вимагали $\alpha \in (-1, 1)$, то це гарантує збіжність другого інтеграла м. н.

Припустимо, що $|a_2(r, \varphi)| = \mathrm{O}(r^\beta)$; це означає, що $\exists A \geq 0 \; \exists r^* \geq 0 \; \forall r \geq r^* \colon |a_2(r, \varphi)| \leq A r^\beta$. Оскільки $R(t) \to \infty$ м. н., то м. н. $\exists T_2 \geq 0 \; \forall t \geq T_2 \colon R(t) \geq r^*$ і тоді м. н.

$$|a_2(R(t), \Phi(t))| \leq A R^\beta(t), \; t \geq T_2.$$

Дослідимо збіжність першого інтеграла:

$$\left| \int_0^\infty \tilde{a}_2(R(t), \Phi(t)) R^{-1}(t) \mathrm{d}t \right| < \infty \Leftarrow \int_{T_2}^\infty R^{\beta-1}(t) \mathrm{d}t < \infty \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \int_{T_1 \vee T_2}^\infty t^{\frac{\beta-1}{1-\alpha}} \mathrm{d}t < \infty \Leftarrow \frac{\beta-1}{1-\alpha} < -1 \Leftarrow \beta < \alpha.$$

Таким чином, якщо вимагати $\beta < \alpha$, то гарантується збіжність м. н. першого інтеграла. Отже, за зроблених пропущень довели наступне твердження.

Твердження 3. *Нехай маємо систему СДР*

$$\mathrm{d}R(t) = \big(\mu(\Phi(t))R^{\alpha}(t) + \tfrac{1}{2}R^{-1}(t)\big)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}\tilde{W}_1(t), \qquad R(0) = r_0 > 0.$$
$$\mathrm{d}\Phi(t) = \tilde{a}_2(R(t), \Phi(t))R^{-1}(t)\mathrm{d}t + R^{-1}(t)\mathrm{d}\tilde{W}_2(t), \qquad \Phi(0) = \varphi_0,$$

де $\mu \geq M > 0,\ -1 < \alpha < 1,\ \tilde{a}_2(r, \varphi) = \mathrm{O}(r^{\beta}),\ \beta < \alpha$. *Тоді* $\exists\Phi(\infty)$.

Надалі вважаємо, що виконуються умови попереднього твердження та $\exists\Phi(\infty)$.

2.8 Точна асимптотика радіуса

У цьому розділі будемо знаходити точну асимптотику радіуса, а саме розв'язку СДР (2.9)

$$\mathrm{d}R(t) = \big(\mu(\Phi(t))R^{\alpha}(t) + \tfrac{1}{2}R^{-1}(t)\big)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}\tilde{W}_1(t),$$

тобто детерміновану функцію r таку, що $R(t) \sim r(t),\ t \to \infty$, м. н. Ідея буде полягати у спрощенні рівняння (2.9) шляхом відкидання членів, які не впливають на асимптотику. У цьому розділі буде встановлена така еквівалентність:

$$R(t) \sim r(t),\ t \to \infty,$$

де r – розв'язок відповідного звичайного диференціального рівняння

$$\mathrm{d}r(t) = \mu(\Phi(\infty))r^{\alpha}(t)\mathrm{d}t,\ r(0) = r_0.$$

Таким чином буде знайдена точна асимптотика радіуса м. н.:

$$R(t) \sim ((1-\alpha)\mu(\Phi(\infty))t)^{\frac{1}{1-\alpha}},\ t \to \infty.$$

Сформулюємо та доведемо лему, яка буде корисною для встановлення асимптотичної еквівалентності розв'язків інтегральних рівнянь.

Лема 6. *Нехай $r, \tilde{r}$ – розв'язки відповідних інтегральних рівнянь*

$$r(t) = r_0 + \int_0^t a(r(s), s)\mathrm{d}s, \qquad \tilde{r}(t) = r_0 + \int_0^t \tilde{a}(\tilde{r}(s), s)\mathrm{d}s,$$

що задовольняють умови теореми Пікара. Припустимо, що $a(\tilde{r}(t), t) < \tilde{a}(\tilde{r}(t), t),\ t \geq 0$. Тоді $r \leq \tilde{r}$.

Доведення. Припустимо, що $\tau := \inf\{t > 0\colon r(t) > \tilde{r}(t)\} < \infty$. Тоді за неперервністю $r(\tau) = \tilde{r}(\tau)$ та $r'(\tau) \geq \tilde{r}'(\tau)$. Але оскільки $a(r,t)$ та $\tilde{a}(r,t)$ неперервні за t, то в силу припущення

$$r'(\tau) = a(r(\tau), \tau) = a(\tilde{r}(\tau), \tau) < \tilde{a}(\tilde{r}(\tau), \tau) = \tilde{r}'(\tau),$$

і ми одержуємо суперечність. Отже, $\tau = \infty$, тобто $\forall t \geq 0\colon r(t) \leq \tilde{r}(t)$. □

Доведемо наступне твердження, яке є головним результатом цієї дипломної роботи.

Твердження 4. *Майже напевно*

$$R(t) \sim r(t) \sim ((1-\alpha)\mu(\Phi(\infty))t)^{\frac{1}{1-\alpha}},\ t \to \infty.$$

Доведення. Запишемо рівняння для R та r в інтегральній формі:

$$R(t) = r_0 + \int_0^t \left(\mu(\Phi(s))R^\alpha(s) + \tfrac{1}{2}R^{-1}(s)\right)\mathrm{d}s + \tilde{W}_1(t),$$

$$r(t) = r_0 + \int_0^t \mu(\Phi(\infty))R^\alpha(s)\mathrm{d}s.$$

Очевидно, друге рівняння має розв'язок

$$r(t) = \left((1-\alpha)\mu(\Phi(\infty))t + r_0^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Зведемо рівняння для R до однорідного вигляду за допомогою заміни $R - \tilde{W}_1 =: \tilde{R}$:

$$\tilde{R}(t) = r_0 + \int_0^t \left(\mu(\Phi(\infty))(\tilde{R}(s) + \tilde{W}_1(s))^\alpha + \tfrac{1}{2}(\tilde{R}(s) + \tilde{W}_1(s))^{-1}\right)\mathrm{d}s.$$

Введемо наступні інтегральні рівняння, $0 < \varepsilon < 1$:

$$r_{\pm\varepsilon}(t) = r_0 + \int_0^t (1 \pm \varepsilon)\mu(\Phi(\infty)) r_{\pm\varepsilon}^{\alpha}(s)\mathrm{d}s.$$

Легко переконатися, що вони мають розв'язки

$$r_{\pm\varepsilon}(t) = \left((1 \pm \varepsilon)(1-\alpha)\mu(\Phi(\infty))t + r_0^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Спочатку оцінимо $\tilde{R}(t)$ зверху м. н. розв'язком $r_\varepsilon(t)$, починаючи з деякого t. Для цього використаємо попередню лему. Позначимо підінтегральні вирази в рівняннях для $\tilde{R}$ та r_ε через

$$\tilde{a}(r,t) = \mu(\Phi(t))(r + \tilde{W}_1(t))^{\alpha} + \tfrac{1}{2}(r + \tilde{W}_1(t))^{-1},$$

$$a(r,t) = (1+\varepsilon)\mu(\Phi(\infty))r^{\alpha}$$

відповідно. Запишемо умову з леми:

$$\tilde{a}(r_\varepsilon(t), t) < a(r_\varepsilon(t), t) \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \mu(\Phi(t))(r_\varepsilon(t) + \tilde{W}_1(t))^{\alpha} + \tfrac{1}{2}(r_\varepsilon(t) + \tilde{W}_1(t))^{-1} < (1+\varepsilon)\mu(\Phi(t))r_\varepsilon^{\alpha}(t) \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \mu(\Phi(t))r_\varepsilon^{\alpha}(t)\left(1 + \frac{\tilde{W}_1(t)}{r_\varepsilon(t)}\right)^{\alpha} + \tfrac{1}{2}r_\varepsilon^{-1}(t)\left(1 + \frac{\tilde{W}_1(t)}{r_\varepsilon(t)}\right)^{-1} < (1+\varepsilon)\mu(\Phi(\infty))r_\varepsilon^{\alpha}(t) \Leftarrow$$

// скорочуємо на $\mu(\Phi(t))r_\varepsilon^{\alpha}(t)$, бо $\mu > 0,\ r_\varepsilon > 0$

$$\Leftarrow \left(1 + \frac{\tilde{W}_1(t)}{r_\varepsilon(t)}\right)^{\alpha} + \tfrac{1}{2}r_\varepsilon^{-1}(t)\left(1 + \frac{\tilde{W}_1(t)}{r_\varepsilon(t)}\right)^{-1} < (1+\varepsilon)\frac{\mu(\Phi(t))}{\mu(\Phi(\infty))}.$$

Покажемо, що остання нерівність виконується для $t \geq T_1$ при деякому $T_1 \geq 0$. Дійсно, оскільки $\tilde{W}_1(t) = o(t^{\frac{1}{2}+\delta}),\ \delta > 0$, м. н., і $\frac{1}{1-\alpha} > \frac{1}{2}$ при $-1 < \alpha < 1$, то $\tilde{W}_1(t) = o(t^{\frac{1}{1-\alpha}}) = o(r_\varepsilon(t))$ м. н., тобто майже напевно

$$\frac{\tilde{W}_1(t)}{r_\varepsilon(t)} \to 0,\ t \to \infty,$$

і також очевидно, що

$$\frac{\mu(\Phi(t))}{\mu(\Phi(\infty))} \to 1,\ t \to \infty, \qquad r_\varepsilon(t) \to \infty,\ t \to \infty.$$

Отже, в силу леми маємо, що майже напевно

$$\tilde{R}(t) \le r_\varepsilon(t),\ t \ge T_1.$$

Так само можемо отримати оцінку знизу м. н.:

$$r_{-\varepsilon}(t) \le \tilde{R}(t),\ t \ge T_2,$$

при деякому $T_2 \ge 0$. Таким чином, маємо оцінку м. н. з двох боків для $\tilde{R}(t)$:

$$r_{-\varepsilon}(t) \le \tilde{R}(t) \le r_\varepsilon(t),\ t \ge T := T_1 \vee T_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{r_{-\varepsilon}(t)}{r(t)} \le \frac{R(t) + \tilde{W}_1(t)}{r(t)} \le \frac{r_\varepsilon(t)}{r(t)},\ t \ge T.$$

Спочатку в останніх нерівностях будемо переходити до границі при $t \to \infty$. Перед цим знайдемо границі лівої та правої частин:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{r_{\pm\varepsilon}(t)}{r(t)} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{(1 \pm \varepsilon)(1-\alpha)\mu(\Phi(\infty))t + r_0^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\mu(\Phi(\infty))t + r_0^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} =$$

// неперервність функції $\alpha \mapsto \frac{1}{1-\alpha}$ та правило Лопіталя

$$= \left(\frac{(1 \pm \varepsilon)(1-\alpha)\mu(\Phi(\infty))}{(1-\alpha)\mu(\Phi(\infty))} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = (1 \pm \varepsilon)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Переходячи до верхньої границі в останніх нерівностях при $t \to \infty$, отримуємо майже напевно

$$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{1-\alpha}} \le \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{R(t)}{r(t)} \le (1+\varepsilon)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

(зазначимо, що м. н. $\tilde{W}_1(t) = o(r(t)) = o(t^{\frac{1}{1-\alpha}}),\ t \to \infty$), а переходячи після цього до границі при $\varepsilon \to 0$, отримуємо м. н.

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{R(t)}{r(t)} = 1.$$

Аналогічно, переходячи до нижньої границі при $t \to \infty$ та границі при $\varepsilon \to 0$, отримуємо м. н.

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{R(t)}{r(t)} = 1.$$

Отже, довели, що майже напевно

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{r(t)} = 1,$$

тобто $R(t) \sim r(t),\ t \to \infty$, м. н. З вигляду розв'язку $r(t)$ видно, що

$$r(t) \sim ((1-\alpha)\mu(\Phi(\infty))t)^{\frac{1}{1-\alpha}},\ t \to \infty.$$

$\square$

Висновки

В процесі виконання магістерської дисертації були виконані усі поставлені задачі.

Підхід Гіхмана–Скорохода пошуку L-гармонічних функцій для визначення асимптотичної поведінки одновимірних СДР був узагальнений з автономного на неавтономний випадок. За допомогою отриманих у дисертації результатів можна оцінювати середній час виходу та імовірності виходу для розв'язків неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь.

Для радіуса розглядуваної системи доведено, що він ніколи не потрапляє нуль, якщо не стартує з нуля. Доведено, що середній час виходу радіуса з будь-якого проміжку скінченний.

У магістерській дисертації були отримані наступні результати щодо асимптотичної поведінки двовимірних автономних СДР зі степеневим коефіцієнтом зносу та одиничним коефіцієнтом дифузії:

- Знайдені умови прямування радіуса розв'язку до нескінченності м. н. при $t \to \infty$.
- Знайдені умови стабілізації полярного кута розв'язку на нескінченності майже напевно.
- За умови прямування радіуса до нескінченності та стабілізації кута, знайдена точна асимптотика радіуса розв'язку м. н.

Список використаних джерел

[1] Гихман И. И., Скороход А. В. *Стохастические дифференциальные уравнения.* – К.: Наукова думка. – 1968. – 356 с.

[2] Ватанабэ С., Икэда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы:* Пер. с англ./Под ред. А. Н. Ширяева. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1986. – 448 с.

[3] Keller G. *The asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations* / Keller G., Kersting G., Rösler U. // The Annals of Probability. – 1987. – V. 15, № 1. – P. 305–343.

[4] Buldygin V. V. *On the φ-asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations* / Buldygin V. V., Klesov O. I., Stainebach J. G., Tymoshenko O. A. // Theory of stochastic processes. – 2008. – № 1. – P. 11-30.

[5] Самойленко А. М. *Про асимптотичну відповідність між розв'язками стохастичних та звичайних рівнянь* / Самойленко М. А., Станжицький О. М., Новак І. Г. // Укр. мат. журн. – 2011. – Т. 63, № 8. – С. 1103–1127.

[6] Булдигін В. В., Індлекофер К.-Х., Клесов О. І., Штайнебах Й. Г. *Псевдорегулярні функції та узагальнені процеси відновлення.* – К.: ТВіМС. – 2012. – 441 с.

[7] Булдигін В. В., Клесов О. І., Тимошенко О. А. *Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь:* монографія. – Вінниця: ФОП Кушнір Ю. В. – 2018. – 164 с.

[8] Pilipenko A. *On perturbations of an ODE with non-Lipschitz coefficients by a small self-similar noise* / Pilipenko A., Proske F. N. // Statistics & Probability Letters. – 132:62–73, 2018a.

[9] Pilipenko A. *Generalized selection problem with Lévy noise* / Pilipenko A., Pavlyukevich I. // https://arxiv.org/abs/2004.05421. – 2020. – 17 p.