**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21, 368.91

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

__________ Олег КЛЕСОВ

« 01 » грудня 2021 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-професійною програмою

«Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Методи розрахунку страхових тарифів у страхуванні життя та пенсійному страхуванні»

Виконала:
студентка ІІ курсу магістратури, групи ОМ-01мп
Чжао Кесінь __________

Керівник:
доктор фізико-математичних наук, доцент
Василик Ольга Іванівна __________

Рецензент:
Кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Яневич Тетяна Олександрівна __________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка _______________

Київ – 2021 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-професійна програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_______ Олег КЛЕСОВ

«20» вересня 2021р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Чжао Кесінь

1. Тема дисертації: «Методи розрахунку страхових тарифів у страхуванні життя та пенсійному страхуванні», науковий керівник дисертації Василик Ольга Іванівна, доктор фізико-математичних наук, доцент, затверджені наказом по університету від «26» березня 2021 р. №901-с.
2. Термін подання студентом дисертації: «01» грудня 2021 року.
3. Об’єкт дослідження: страхові тарифи у страхуванні життя та пенсійному страхуванні.
4. Предмет дослідження: методи розрахунку страхових тарифів у страхуванні життя та пенсійному страхуванні
5. Перелік завдань, які потрібно розробити
   a) ознайомлення з літературою про страхування життя та пенсійне страхування;
   b) визначення необхідних понять, видів страхування життя та довічних ануїтетів;
   c) вивчення методів розрахунку нетто-премій, брутто-премій та резервів для різних видів страхування життя;

d) виконання актуарних розрахунків у програмному середовищі R;

e) формулювання висновків з отриманих результатів.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу
   22 слайди.
7. Орієнтовний перелік публікацій
   a) Чжао Кесінь. Розвиток методу regula falsi у КИТАЇ. X Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. Нац. техн. ун-т України «КПІ ім. І. Сікорського». – Київ. – 2021. –с. 117.
8. Дата видачі завдання «20» вересня 2021 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з темою магістерської роботи та літературою	20.09.2021 — 26.09.2021	Виконано
2.	Ознайомлення з історією страхування, видами страхування життя	27.09.2021 — 10.10.2021	Виконано
3.	Вивчення необхідних означень та теорем для стандартних та загальних видів страхування життя. Методи розрахунку страхових нетто- та брутто-премій для різних видів страхування життя.	11.10.2021 — 20.10.2021	Виконано
4.	Вивчення необхідних означень та теорем для стандартних та загальних довічних ануїтетів. Методи розрахунку страхових нетто- та брутто-премій	21.10.2021 — 29.10.2021	Виконано

	для довічних ануїтетів.		
5.	Вивчення необхідних понять та методів обчислення страхових резервів нетто-премій та брутто-премій для страхування життя та пенсійного страхування. Модифікація резерву нетто-премії.	01.11.2021 — 06.11.2021	Виконано
6.	Ознайомлення з актуарними пакетами та виконання актуарних розрахунків у програмному середовищі R	08.11.2021 — 18.11.2021	Виконано
7.	Висновки: аналіз переваг та недоліків методів.	19.11.2021 — 24.11.2021	Виконано
8.	Оформлення дипломної роботи	25.11.2021 — 30.11.2021	Виконано

Студентка Кесінь ЧЖАО

Науковий керівник Ольга ВАСИЛИК

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 60 сторінок, 22 слайди для проектора, 16 першоджерел.

Страхування (insurance, assurance) – це соціальний механізм, що дозволяє індивідам і організаціям компенсувати економічні втрати, викликані тими чи іншими несприятливими обставинами. Страхування (у широкому розумінні страхування ризиків) має широкий спектр застосувань: страхування життя і здоров'я людини, пенсійне страхування, страхування відповідальності, майна, вантажних перевезень, фінансових інвестицій, гри на ринку цінних паперів тощо. Страхування має на меті зменшити збитки через невизначені фактори та ефективно уникнути ризиків. Тому при подачі заявки на страхування розрахунок страхових ставок відіграє життєво важливу роль.

Мета та завдання роботи: використати відповідні знання з теорії ймовірностей та фінансової математики для проведення поглибленого дослідження методів розрахунку страхових тарифів для страхування життя та пенсійного страхування; оволодіти методами виконання актуарних розрахунків у програмному середовищі R.

Об'єкт дослідження: страхові тарифи у страхуванні життя та пенсійному страхуванні.

Предмет дослідження: методи розрахунку страхових тарифів у страхуванні життя та пенсійному страхуванні.

Ключові слова: страхування життя, довічні ануїтети, поточна вартість, нетто-премія, брутто-премія, резерви, страховий тариф.

ABSTRACT

Master's dissertation: 60 pages, 22 slides for a projector, 16 primary sources.

Insurance (assurance) is a social mechanism that allows individuals and organizations to compensate for economic losses caused by various adverse circumstances. Insurance (in the broad sense of risk insurance) has a wide range of applications: human life and health insurance, pension insurance, liability insurance, property insurance, freight insurance, financial investments, gaming in the securities market, etc. Insurance aims to reduce losses due to uncertain factors and effectively avoid risks. Therefore, when applying for insurance, the calculation of insurance rates plays a vital role.

Purpose and objectives of the work: to use the relevant knowledge of the probability theory and financial mathematics for conducting an in-depth study of calculation methods for insurance rates in life insurance and pension schemes; master the methods of actuarial calculations in the R Programming Environment.

Object of research: insurance rates in life insurance and pension schemes.

Subject of research: calculation methods for insurance rates in life insurance and pension schemes.

Key words: life insurance, annuities, current value, net premium, gross premium, reserves, insurance rate.

ЗМІСТ

ВСТУП

Страхова галузь відіграє життєво важливу роль у фінансовій системі будь-якої держави та сприяє розвитку національної економіки. З точки зору права та економіки страхування є методом управління ризиками. Це відбувається за допомогою розподілу та передачі ризику шляхом попередньої сплати певної винагороди, акумуляції грошових коштів у деякому фонді з метою їх подальшого використання для зменшення збитків в результаті настання певних подій. Якщо говорити непрофесійною мовою, то після приєднання до певної групи учасники групи поділяють ризик.

Ще 2500 р. до н.е. у вавилонський період купці почали намагатися передавати ризики, пов’язані з перевезенням товарів, або диверсифікувати їх. У 916 р. до н.е. в регіоні Середземного моря з метою забезпечення нормального ведення морської торгівлі був прийнятий Морський закон. Судновласник, вантажовласник і бенефіціар були зобов’язані розділяти ризики разом. Звідси походить морське страхування. Через географічні фактори в Європі морське страхування швидко поширилося.

У першому столітті нашої ери римляни укладали договори «річної ренти». Такий договір річної ренти (ануїтету) означає, що страхувальник виплачує страховій компанії певну суму наперед, а потім може отримати від страхової компанії відшкодування протягом строку, зазначеного в договорі страхування, або після його смерті відшкодування отримували його спадкоємці.[3]

Зародження страхування майна можна простежити від Великої лондонської пожежі 1666 року. Усе місто сильно постраждало від пожежі, а збитки людей були непередбачуваними. Після цього британці почали усвідомлювати важливість страхування, стало популярним страхування від пожежі, поступово з’являлися страхові компанії. Британський уряд ефективно контролював це і сприяв розвитку страхового бізнесу. Страхування життя з'явилося на початку 18 століття. Сполучені Штати та Росія один за одним створили перші компанії зі страхування життя. Систему соціального страхування вперше запровадив у 19 столітті прем’єр-міністр Німеччини Отто фон Бісмарк. Відтоді європейські країни наслідували одна одну. Сьогодні ці види страхування відіграють незамінну роль у підтримці нормального функціонування сучасного суспільства.[3] Страхування від нещасних випадків з’явилося лише наприкінці 19 століття.

Починаючи з 20 століття масштаби страхування стрімко розширилися, розвинулося страхування вантажів, зокрема страхування вантажних перевезень, посилок, з’явилося страхування інструментів та промислового обладнання тощо. Тепер можна задовольнити попит на страхування всіх товарів повсякденного користування.

Страхування включає страхування життя, пенсійне страхування, страхування майна, відповідальності та фінансові інвестиції тощо. Страхування життя та страхові інвестиції відіграють важливу роль у діяльності страхових компаній. Проте поточний стан операцій з капіталом страхових компаній не є ідеальним. Страхові компанії повинні оптимізувати свою діяльність, щоб максимізувати прибуток, гарантуючись при цьому на різниці між отриманням страхових премій і виплатою страхових відшкодувань.[11] Для цього необхідно максимально скоротити витрати та збільшити прибуток при розрахунку ставок страхових премій, а також зберегти конкурентоспроможність компанії на ринку страхових послуг. Щоб мати можливість отримувати більший прибуток, страхові компанії можуть підвищити очікувану віддачу від страхових інвестицій. Всі ці завдання вимагають ретельного аналізу та складних розрахунків.

Зі стрімким розвитком страхової галузі поступово приділялося все більше уваги з боку суспільства новій професії - професії «актуарій». Спочатку актуарії в основному були пов’язані зі страхуванням життя, але тепер їх діяльність розширилася на всі види страхових послуг. У страховій компанії актуарії контролюють важливі дані та операційні системи компанії, які належать до основних відділів компанії та пов’язані з її розвитком. Розумне визначення страхових премій є одним із основних змістів розробки продукту страхування життя.[2] Обґрунтованість ставки безпосередньо пов’язана з операційним прибутком та конкурентною позицією страхової компанії. Тому при визначенні розміру страхової премії особливо важливим є оптимальний метод розрахунку.

Магістерська дисертація складається з п’яти частин. У першій частині наведено основні поняття, що стосуються страхування життя, наведено модель тривалості життя, класифікацію видів страхування життя, розглянуто методи розрахунку разових нетто премій для різних типів страхування життя. Друга частина присвячена страховим ануїтетам, наведено методи розрахунку страхових тарифів для різних типів довічних ануїтетів. У третій частині розглядаються методи розрахунку періодичних нетто-премій та брутто-премій, методи обчислення та модифікації резервів премій. У четвертій частині аналізується метод ціноутворення з урахуванням величини інвестиційного доходу або частки активів. У п’ятому розділі наведено деякі актуарні розрахунки в програмному середовищі R.

1. Страхування життя

Страхування життя - це вид страхування, в якому об’єктом страхування є життя застрахованого, а виживання чи смерть застрахованого є страховою подією (умовою для виплати страхового відшкодування). Страхувальник (той, хто купує поліс страхування) передає ризик виживання або смерті застрахованого страховику (страховій компанії), приймає умови страховика і сплачує страховий внесок. Якщо страхувальник укладає договір страхування життя для себе, то він одночасно є і застрахованим.

Для більш повного визначення цього виду страхування звернемося до Закону України «Про страхування»: «Страхування життя - це вид особистого страхування, який передбачає обов’язок страховика здійснити страхову виплату згідно з договором страхування у разі смерті застрахованої особи, а також, якщо це передбачено договором страхування, у разі дожиття застрахованої особи до закінчення строку дії договору страхування та (або) досягнення застрахованою особою визначеного договором віку. Умови договору страхування життя можуть також передбачати обов’язок страховика здійснити страхову виплату у разі нещасного випадку, що стався із застрахованою особою, та (або) хвороби застрахованої особи. У разі, якщо при настанні страхового випадку передбачено регулярні послідовні довічні страхові виплати (страхування довічної пенсії), обов’язковим є передбачення у договорі страхування ризику смерті застрахованої особи протягом періоду між початком дії договору страхування та першою страховою виплатою з числа довічних страхових виплат. В інших випадках передбачення ризику смерті застрахованої особи є обов’язковим протягом всього строку дії договору страхування життя.» [14, Стаття 6. *Добровільне страхування та його види*]

Надалі у цій роботі використовуються такі терміни [14]:

- *Страхова виплата* - грошова сума, яка виплачується страховиком відповідно до умов договору страхування при настанні страхового випадку. [14]

- *Страховий платіж* (страховий внесок, страхова премія) - плата за страхування, яку страхувальник зобов’язаний внести страховику згідно з договором страхування. [14]
- *Страховий тариф* - ставка страхового внеску з одиниці страхової суми за визначений період страхування. [14]

1.1 Основні поняття

1.1.1 Математична модель

Означення 1.1. [1] Розглянемо людину, якій виповнилося x років (індивід (x), фізична особа віку x). Будемо використовувати T для позначення тривалості її майбутнього життя. Отже, x + T — це вік людини на момент смерті. Тривалість майбутнього життя T є випадковою величиною, а її функція розподілу має вигляд

$$G(t) = P(T < t), t \geq 0 \quad (1.1)$$

Функція $G(t)$ – це ймовірність смерті людини початкового віку x впродовж t років (від моменту укладання страхової угоди до кінця року t) . Припустимо, ми вже знаємо розподіл G випадкової величини T, функція G неперервна, щільність розподілу T: g (t) = G ′ (t).

Отже, отримуємо,

$$g(t)dt = P(t < T < t + dt) \quad (1.2)$$

Згідно з прийнятими міжнародними актуарними позначеннями, ймовірності смерті і виживання індивіда можна виразити через функції g і G:

$${}_tq_x \coloneqq G(t) \quad (1.3)$$

$${}_tp_x \coloneqq 1 - G(t), \quad (1.4)$$

де ${}_tq_x$ - імовірність того, що індивід віку x помре протягом t років,

${}_tp_x$ - імовірність того, що індивід віку x проживе принаймні t років.

Інший загальноприйнятий символ

$${}_{s|t}q_x \coloneqq P(s < T < s + t) = G(s + t) - G(s) = {}_{s+t}q_x - q_x \quad (1.5)$$

${}_{s|t}q_x$ - імовірність того, що індивід віку x років проживе s років і потім помре в наступні t років.

Визначимо ще такі умовні ймовірності:

$$ {}_{t}p_{x+s} \coloneqq P(T > s + t | T > s) = \frac{1 - G(s + t)}{1 - G(s)} \qquad (1.6) $$

$$ {}_{t}q_{x+s} \coloneqq P(T \leq s + t | T > s) = \frac{G(s + t) - G(s)}{1 - G(s)} \qquad (1.7) $$

${}_{t}p_{x+s}$ - імовірність того, що індивід (x) проживе ще t років після досягнення віку x+s.

${}_{t}q_{x+s}$ - імовірність того, що індивід (x) вмре протягом t років після досягнення віку x+s. Наведені ймовірності пов'язані такими співвідношеннями:

$$ {}_{s+t}p_{x} \coloneqq 1 - G(s + t) = [1 - G(s)]\frac{1 - G(s + t)}{1 - G(s)} = {}_{s}p_{x}\, {}_{t}p_{x+s} \qquad (1.8) $$

$$ {}_{s|t}q_{x} \coloneqq G(s + t) - G(s) = [1 - G(s)]\frac{G(s + t) - G(s)}{1 - G(s)} = {}_{s}p_{x}\, {}_{t}q_{x+s} \qquad (1.9) $$

Тоді математичне сподівання E(T) представляє очікувану тривалість майбутнього життя індивіда віку x, і формула для його обчислення виглядає так:

$$ E(T) = \int_{0}^{\infty} tg(t)dt = \int_{0}^{\infty} (1 - G(t))dt = \int_{0}^{\infty} {}_{t}p_{x}dt \qquad (1.10) $$

Зауваження 1.1. [1] Якщо t=1, то через q_x позначають ймовірність померти протягом наступного року, а ${}_{s|}q_{x}$ - ймовірність прожити s років, а потім померти протягом наступного року. Для обчислення дисперсії тривалості майбутнього життя D(T) зручно користуватися такою формулою:

$$ E(T^2) = \int_{0}^{\infty} 2t\, {}_{t}p_{x}dt \qquad (1.11) $$

1.1.2 Сила смертності

Означення 1.2.[1] *Сила смертності* для людини, вік якої дорівнює x + t, визначається як

$$ \mu_x(t) \coloneqq \mu_{x+t} \coloneqq \frac{g(t)}{1 - G(t)} = -\frac{d}{dt}\ln\bigl(1 - G(t)\bigr) = -\frac{d}{dt}\ln {}_{t}p_{x} \qquad (1.12) $$

Тепер очікувану тривалість майбутнього життя індивіда можна записати так

$$E(T) = \int_0^\infty t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_x dt \tag{1.13}$$

Отже, зв'язок між ймовірністю виживання та силою смертності можна виразити так

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+t} ds} \tag{1.14}$$

1.1.3 Обмежена тривалість майбутнього життя

Означення 1.3.[1] *Обмежена тривалість майбутнього життя індивіда* (х) - це кількість повних років майбутнього життя цього індивіда, тобто К=[Т] - ціла частина випадкової величини Т. Розподіл дискретної цілочисельної випадкової величини К можна виразити так:

$$P(K = k) = P(k \leq T < k + 1) = {}_k p_x \cdot p_{x+k} \tag{1.15}$$

для k=0, 1, 2, ...

Величина E(K) - математичне сподівання випадкової величини К - називається *очікуваною обмеженою тривалістю майбутнього життя* (х) і обчислюється так:

$$E(K) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(K = k) = \sum_{k=1}^{\infty} K \cdot_k p_x \cdot q_{x+k} \tag{1.16}$$

або

$$E(K) = \sum_{k=1}^{\infty} P(K \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x \tag{1.17}$$

Лема: Нехай S – дробова частина року смерті, протягом якої (х) ще живий, тобто

$$T = K + S \tag{1.18}$$

Розподіл випадкової величини S є неперервним між 0 і 1. Припустивши, що її математичне сподівання приблизно дорівнює 1/2, очікувану тривалість майбутнього життя (х) на практиці можна визначити за формулою

$$E(T) = E(K) + \frac{1}{2} \tag{1.19}$$

1.1.4 Таблиці тривалості життя

Таблиця тривалості життя – це таблиця, в якій статистичні дані стосовно певної групи людей використовуються для розрахунку ймовірностей смерті та виживання осіб протягом року на основі кількості смертей у кожному році та кількості тих, хто вижив наприкінці кожного року.[9] Ймовірності смерті та виживання, зафіксовані у таблицях тривалості життя, є важливою основою для визначення страхових тарифів.

Для побудови таблиці тривалості життя треба відстежувати певну групу людей від народження до їх смерті та реєструвати кількість смертей у групі з року в рік.

1.2 Основні типи страхування життя

У договорі страхування життя передбачається, що страхова виплата складається з одноразового платежу (страхової суми).

У юридичному розумінні в операціях зі страхування життя діють чотири види осіб: страховик, страхувальник, застрахований і вигодонабувач. Страховик зазвичай є страховою компанією, а страхувальник і застрахований часто є однією особою.[1] Час і величина страхової виплати можуть бути випадковими величинами.

Страхування життя можна розділити на: страхування з виплатою в момент смерті та страхування з виплатою в кінці року смерті.

Означення 1.4.[1] *Страхування з виплатою в момент смерті* - це страхування, в якому страхове відшкодування виплачують одразу після настання страхового випадку (смерті застрахованого).

Означення 1.5.[1] *Страхування з виплатою наприкінці року смерті* - це страхування, в якому страхове відшкодування не виплачується негайно, а здійснюється в кінці року смерті застрахованого.

1.2.1 Довічне та тимчасове страхування

Означення 1.6.[1] *Довічне страхування* - це страхування життя, яке передбачає, що сума 1 виплачується наприкінці року смерті застрахованого. Страхова відповідальність починається з дати набрання чинності договором страхування і закінчується, коли застрахована особа помирає.

У цьому випадку страхова сума фіксована. Поточна вартість страхової виплати дорівнює

$$Z = v^{K+1}, \qquad (1.20)$$

де v – дисконтний множник: v=1/(1+i), i – річна відсоткова ставка.

Випадкова величина Z приймає значення v , v^2 , v^3 , …, а її розподіл можна виразити так:

$$P(Z = v^{k+1}) = P(K = k) = {}_kp_x \cdot q_{x+k} \qquad (1.21)$$

для k=0, 1, 2, ….

Разова нетто премія для такого страхування позначається символом A_x , а формула для її обчислення має вигляд

$$A_x := E(v^{K+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{K+1}\ {}_kp_x \cdot q_{x+k} \qquad (1.22)$$

Означення 1.7.[1] *Тимчасове страхування на термін n років* – це страхування, яке забезпечує страхову виплату лише у випадку смерті застрахованого протягом n років.

Якщо застрахований не помер протягом страхового періоду, страховик не зобов’язаний виплачувати страхову суму та відшкодовувати страховий внесок. Фактичним часом виплати надалі є кінець року смерті.

У цьому випадку поточна вартість страхової суми в розмірі 1 дорівнює:

$$Z = \begin{cases} v^{k+1}, & K = 0,1,\dots,n-1 \\ 0, & K = n, n+1, n+2 \dots \end{cases} \qquad (1.23)$$

Разова нетто-премія для цього типу страхування обчислюється так:

$$A^1_{x:\overline{n}|} := \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_k p_x q_{x+k} \qquad (1.24)$$

1.2.2 Чисте доживання

Означення 1.8.[1] *Чисте доживання* означає, що застрахований повинен дожити до кінця страхового періоду, щоб отримати страхову суму. У разі смерті протягом страхового періоду страхова сума не виплачується, а також не повертаються сплачені страхові внески.

Поточна вартість страхової суми 1 для цього типу страхування:

$$Z = \begin{cases} 0, & K = 0,1,\dots,n-1 \\ v^n, & K = n, n+1, n+2 \dots \end{cases} \tag{1.25}$$

Разова нетто-премія обчислюється за формулою

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} := v^n \, {}_n p_x \tag{1.26}$$

Формула дисперсії для бернулівської випадкової величини дає

$$D(Z) = v^{2n} \, {}_n p_x \cdot {}_n q_x \tag{1.27}$$

1.2.3 Доживання

Означення 1.9.[1] *Страхування на доживання на термін n років* – це комбінація тимчасового страхування на термін n років з виплатою наприкінці року смерті та чистого доживання.

Поточна вартість страхової суми 1 дорівнює:

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & K = 0,1,\dots,n-1, \\ v^n, & K = n, n+1, n+2 \dots \end{cases} \tag{1.28}$$

Разова нетто-премія страхування на доживання обчислюється так:

$$E(Z) = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \tag{1.29}$$

1.2.4 Довічне відкладене на *m* років страхування

Довічне відкладене на m років страхування означає, що у випадку смерті застрахованого протягом періоду відстрочки (перших m років з моменту укладання угоди) страхове відшкодування не виплачується.

Поточна вартість страхової виплати в розмірі 1 дорівнює:

$$Z = \begin{cases} 0, & K = 0,1,\dots,m-1, \\ v^{K+1}, & K = m, m+1, m+2 \dots \end{cases} \tag{1.30}$$

Відповідна разова нетто − премія позначається через ${}_{m|}A_x$ і дорівнює

$$ {}_{m|}A_x := {}_m p_x v^m A_{x+m} \tag{1.31} $$

Теорема 1.1. Довічне відкладене на m років страхування життя = Довічне страхування - тимчасове страхування на термін *m:*

$$ {}_{m|}A_x = A_x - A^1_{x:\overline{m|}} \tag{1.32} $$

1.3 Страхування з виплатою в момент смерті

У попередньому підрозділі передбачалося, що страхова сума виплачується в кінці року смерті. Перевага такого страхування в тому, що разові нетто-премії можна розрахувати безпосередньо з таблиці тривалості життя. Недоліком є те, що це не відображає фактичного стану страхування.[8]

Припустимо, що страхова сума виплачується в момент смерті, тобто в момент T. Тоді поточна вартість страхової суми 1, що виплачується безпосередньо після смерті, дорівнює

$$ Z = v^T \tag{1.33} $$

Разова нетто-премія довічного страхування позначається в цьому випадку через $\bar{A}_x$ і обчислюється за формулою

$$ \bar{A}_x = \int_0^\infty v^t \ {}_t p_x \ \mu_{x+t} \ dt \tag{1.34} $$

Аналогічно можна обчислити разову нетто-премію тимчасового страхування на термін *n* років з виплатою 1 в момент смерті:

$$ \bar{A}^1_{x:\overline{n|}} = \int_0^n v^t \ {}_t p_x \mu_{x+t} dt \tag{1.35} $$

Разова нетто-премія страхування на доживання з виплатою 1 в момент смерті застрахованого або через n з моменту укладання страхової угоди, якщо застрахований вижив:

$$ \bar{A}^1_{x:\overline{n|}} = \int_0^n v^t \ {}_t p_x \mu_{x+t} dt + v^n \ {}_n p_x \tag{1.36} $$

Аналогічно, разова нетто-премія тимчасового страхування на термін n років з виплатою 1 в момент смерті, відкладеного на m років обчислюється так:

$$ {}_{m|}\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_{m}^{m+n} v^{t}\, {}_{t}p_{x}\mu_{x+t}dt $$ (1.37)

Разова нетто-премія довічного страхування з виплатою 1 в момент смерті, відкладеного на m років визначається за формулою

$$ {}_{m|}\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = v^{m}\, {}_{m}p_{x}\overline{A}_{x+m} $$ (1.38)

Зауваження 1.2.[1] Розглянемо приблизне співвідношення між разовими нетто-преміями страхувань з виплатою страхового відшкодування в момент смерті та в кінці року смерті.

Запишемо випадкову величину T у вигляді:

$$ T = K + S = (K+1) + (S-1) \qquad (1.39) $$

За умови рівномірного розподілу смерті протягом року випадкові величини K+1 і S-1 незалежні. Тоді отримуємо

$$ E(v^{s-1}) = \int_{0}^{1} v^{t-1}\cdot 1\,dt = \frac{i}{\delta} \qquad (1.40) $$

$$ \bar{A}_x = E[v^T] = E[v^{K+1}v^{S-1}] = E[v^{K+1}]E[v^{S-1}] = \frac{i}{\delta}A_x \qquad (1.41) $$

i - річна відсоткова ставка;

δ- сила (норма) відсоткового прибутку.

Таким чином, обчислення $\bar{A}_x$ зводиться до обчислення A_x. Подібна формула може бути одержана і для тимчасових страхувань:

$$ \overline{A}_{x:\overline{n}|} = \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ 1} = A_{x:\overline{n}|} + \left(\frac{i}{\delta}-1\right)A^{1}_{x:\overline{n}|} \qquad (1.42) $$

1.4 Загальні типи страхування життя

Означення 1.10.[1] Спочатку розглянемо страхування життя зі страховою сумою, яка змінюється щороку, і припустимо, що ця сума виплачується в кінці року смерті. Якщо c_j представляє страхову суму в році j після видачі полісу, то

$$Z = c_{K+1}v^{K+1} \tag{1.43}$$

Розподіл величини Z такий самий, як і у випадку сталої страхової суми, а разова нетто-премія та вищі моменти для цього типу страхування обчислюються так:

$$E\left(Z^{h}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}^{h} v^{h(k+1)} \ {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \tag{1.44}$$

Цей вид страхування можна представити як суму відстрочених страхувань життя, кожне з яких має фіксовану страхову суму. Отже, разова нетто-премія може бути розрахована таким чином

$$E(Z) = c_1 A_x + (c_2 - c_1)_{1|}A_x + (c_3 - c_2)_{2|}A_x + \cdots \tag{1.45}$$

Якщо страховий період становить n років, тобто коли $c_{n+1} = c_{n+2}$ =…=0, страхування також може бути зображене у вигляді комбінації тимчасових страхувань, які починаються негайно:

$$E(Z) = c_n A^{1}_{x:\overline{n}|} + \left(c_{n-1} - c_n\right) A^{1}_{x:\overline{n-1}|} + \left(c_{n-2} - c_{n-1}\right) A^{1}_{x:\overline{n-2}|} + \ldots \tag{1.46}$$

Означення 1.11.[1] Альтернативні зображення (1.45) і (1.46) можна використовувати для розрахунку разової нетто-премії.

Якщо страхові відшкодування виплачуються відразу після смерті, то за звичайних обставин страхова сума може бути певною функцією c(t) від часу (t≥0), і таким чином

$$Z = c(T)v^{T} \tag{1.47}$$

а разова нетто-премія буде

$$E(Z) = \int_0^{\infty} c(t)v^{t} \ {}_{t}p_x \cdot \mu_{x+t}dt \tag{1.48}$$

На практиці розрахунок разової нетто-премії можна спростити, а саме звести до дискретної моделі. Із

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} E(Z|K = k)P(K = k) = \sum_{k=0}^{\infty} E(c(k+S)\,(1+i)^{1-s}|K = k)v^{k+1}P(K = k)$$

отримуємо

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} v^{k+1} \ {}_k p_x \cdot q_{x+k} \tag{1.49}$$

де

$$c_{k+1} = E(c(k+S)(1+i)^{1-s}|K = k)$$

1.5 Стандартні типи змінних страхувань життя

Означення 1.12.[1] Розглянемо *стандартне довічне зростаюче страхування*, де страхова сума $c_j = j$ виплачується в кінці року, в якому застрахований помер. Поточна вартість страхової суми дорівнює:

$$Z = (K+1)v^{K+1} \tag{1.50}$$

Разова нетто – премія позначається у цьому випадку через . $(IA)_x$ і дорівнює

$$(IA)_x := \sum_{k=0}^{\infty} (K+1)\, v^{K+1} \ {}_k p_x \cdot q_{x+k} \tag{1.51}$$

Для відповідного тимчасового страхування на термін n років маємо

$$Z = \begin{cases} (K+1)v^{K+1}, & K = 0,1,\dots,n-1 \\ 0, & K = n, n+1, n+2 \dots \end{cases} \tag{1.52}$$

Його разова нетто-премія може бути обчислена так:

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = A_x + {}_{1|}A_x + \ldots + {}_{n-1|}A_x - n\,{}_{n|}A_x \tag{1.53}$$

$$(IA)^1_{x,\overline{n}|} = nA^1_{x,\overline{n}|} - A^1_{x\cdot\overline{n-1}|} - A^1_{x,\overline{n-2}|} - \ldots - A^1_{x,\overline{1}|} \tag{1.54}$$

Означення 1.13.[1] *Стандартне тимчасове спадаюче страхування життя на термін n років* передбачає виплату страхової суми, яка щороку зменшується на 1 від n до 0. Тоді поточна вартість страхового відшкодування дорівнює

$$Z = \begin{cases} (n-K)v^{K+1}, & K = 0,1,\dots,n-1 \\ 0, & K = n, n+1, n+2 \dots \end{cases} \tag{1.55}$$

2. Довічні ануїтети

У пенсійному страхуванні як процеси накопичення грошового фонду, так і процеси здійснення страхових виплат описуються ануїтетами (рентами).

Означення 2.1.[6] Ануїтет (annuity) - це серія регулярних платежів, отриманих (або сплачених) через рівні проміжки часу (щороку, щомісяця тощо) протягом певного періоду часу.

Тимчасовий ануїтет визначається як послідовність платежів з обмеженим терміном тривалості, який ми позначимо через n.

Довічний ануїтет також називають довічним гарантованим ануїтетом. Якщо бенефіціар купує його у страхової компанії чи уряду, він може отримувати певну суму пенсії регулярно протягом усього життя.

Порівняно з іншими ануїтетами довічний ануїтет характеризується довічними виплатами. Якщо бенефіціар помирає достроково, так що сплачена в минулому страхова премія може бути більшою за отриману ним ренту, надлишковий платіж не повертається, але виплати можуть бути передані іншим бенефіціарам страхового полісу.

Тому людям з міцнішою статурою та здоров'ям, як правило, краще обирати довічну ренту, тоді як людям зі слабшим здоров'ям вигідніше обирати страхування життя.

Тому довічний ануїтет можна розглядати як ефективний ануїтет. Термін залежить від тривалості майбутнього життя T. Його поточна вартість є випадковою величиною, і ми будемо позначати її через Y.

Разова нетто-премія для довічного ануїтету

||

математичному сподіванню E(Y)

Крім того, ми обговоримо розподіл значень Y і його моменти.

2.1 Довічні ануїтети з виплатами розміром 1

2.1.1 Елементарні довічні ануїтети

Означення 2.2.[1] Розглянемо прямий (авансовий) довічний ануїтет з виплатами в розмірі 1. Протягом життя застрахованого передбачена виплата ануїтету один раз на рік, при цьому верхня межа кількості виплат не встановлена.

Поточна вартість цього платіжного потоку становить:

$$Z = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^K = \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \tag{2.1}$$

розподіл цієї дискретної випадкової величини дорівнює:

$$\mathrm{P}\left(Y = \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\right) = \mathrm{P}(K = k) = {}_k\, p_x \cdot q_{x+k}, k = 0,1,2\ldots \tag{2.2}$$

При цьому разова нетто – премія, що позначається символом $\ddot{a}_x$, є математичним сподіванням величини Y:

$$\ddot{a}_x := E\left(\ddot{a}_{\overline{k+1|}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\, {}_k p_x \cdot q_{x+k} \tag{2.3}$$

Поточну вартість можна також зобразити у вигляді

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^K I_{\{K \geq k\}} \tag{2.4}$$

де I_A – індикаторна функція події А. Звідси математичне сподівання величини Y дорівнює

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \;{}_k p_x \tag{2.5}$$

Таким чином, маємо зв'язок між довічним ануїтетом та довічним страхуванням життя:

$$\ddot{a}_x = E\left(\ddot{a}_{\overline{K+1|}}\right) = E\left(\frac{1 - v^{K+1}}{d}\right) = \frac{1 - E(v^{K+1})}{d} = \frac{1 - A_x}{d} \tag{2.6}$$

або

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x\,, \tag{2.7}$$

d - річна фактична ставка дисконту.

2.1.2 Тимчасові довічні ануїтети

Означення 2.3.[1] Поточною вартістю прямого довічного ануїтету , обмеженого терміном n років, є

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}, K = 0,1,\dots n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}, K = n, n+1, n+2,\dots \end{cases} \tag{2.8}$$

Разова нетто-премія тимчасового довічного ануїтети може бути зображена як

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{x:\overline{k+1|}}\ {}_k p_x \cdot q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n|}} \cdot {}_n\ p_x \tag{2.9}$$

або як

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\ {}_k p_x. \tag{2.10}$$

Таким чином, існує зв’язок між тимчасовим довічним ануїтетом, обмеженим терміном n років, та страхуванням на доживання:

$$1 = d\ddot{a}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}} \tag{2.11}$$

Разова нетто-премія довічного страхування з виплатами в кінці періоду позначається a_x і задається рівністю

$$a_x = \ddot{a}_x - 1 \tag{2.12}$$

Зв'язок між довічним ануїтетом з виплатами в кінці періоду та довічним страхуванням життя має вигляд

$$1 = ia_x + (1+i)A_x \tag{2.13}$$

2.1.3 Відкладені довічні ануїтети

Означення 2.4.[1] Поточна вартість відкладеного на m років прямого довічного ануїтету з щорічними виплатами розміром 1 дорівнює

$$Y = \begin{cases} 0, \ K = 0,1,\dots,m-1, \\ v^m + v^{m+1} + \dots + v^K, \ K = m, m+1, \dots \end{cases} \tag{2.14}$$

Разова нетто-премія відкладеного довічного ануїтету ${}_{m|}\ddot{a}_x$ може бути обчислена за формулою:

$$_{m|}\ddot{a}_x = {}_m p_x \cdot v^m \ddot{a}_{x+m} \tag{2.15}$$

Довічний ануїтет, відкладений на m років, може бути виражений як різниця між довічним ануїтетом і тимчасовим довічним ануїтетом тривалістю m років

$$_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|} \tag{2.16}$$

2.2 Довічні ануїтети з виплатами частіше, ніж раз на рік

Розглянемо ануїтет з виплатами m разів на рік, в якому щоразу сплачується 1/m частина страхової суми у моменти часу 0, 1/m, 2/m,..., де застрахований купує страховку у x років і отримує виплати, поки живий. [3]

Разова нетто – премія такого ануїтету позначається символом $\ddot{a}_x^{(m)}$. За аналогією до (2.7), отримаємо

$$1 = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)} \tag{2.17}$$

Отже, отримуємо математична сподівання

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{d^{(m)}} A_x^{(m)} \tag{2.18}$$

Це рівняння можна пояснити наступним чином: довічний ануїтет, що виплачується m разів на рік, можна розглядати як різницю між двома необмеженими потоками платежів, перший з яких починається в момент 0, а інший починається в момент $K + S^{(m)}$.

Тоді якщо замінити A_x на $1 - d\ddot{a}_x$, то математичне сподівання набуде вигляду

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{di}{d^{(m)}i^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{i - i^{(m)}}{d^{(m)}i^{(m)}}$$

Увівши позначення:

$$\alpha(m) = \frac{di}{d^{(m)}i^{(m)}} \qquad \text{та} \qquad \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{d^{(m)}i^{(m)}}$$

математичне сподівання можна записати більш коротко так:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$$

Ці наближення застосовні лише тоді, коли процентна ставка достатньо низька, і не застосовуються, якщо процентна ставка висока.

Разова нетто-премія тимчасового авансового ануїтету з виплатами m разів на рік також може бути розрахована за допомогою α(m) і β(m):

$$\ddot{a}^{(m)}_{x.\overline{n}|} = \ddot{a}^{(m)}_{x} - {}_{n}p_{x}v^{n}\ddot{a}^{(m)}_{x+n} =$$

$$= \alpha(m)\ddot{a}_{x} - \beta(m) - {}_{n}p_{x}v^{n}\left(\alpha(m)\ddot{a}_{x+n} - \beta(m)\right) =$$

$$= \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)\left(1 - {}_{n}p_{x}v^{n}\right)$$

Разова нетто-премія (заборгованість) безпосереднього тимчасового ануїтету може бути розрахована через разову нетто-премію відповідного прямого тимчасового ануїтету:

$$a^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{m}\left(1 - {}_{n}p_{x}U^{n}\right) \tag{2.19}$$

2.3 Змінні довічні ануїтети

Означення 2.5.[8] Страхові виплати можуть бути сталими або змінними. Щоб захистити бенефіціарів від впливу інфляції, сума ануїтетних платежів коливається з рівнем ринкової ціни для досягнення мети підтримки вартості. Почнемо з розгляду довічного ануїтету з розмірами виплат $r_0, r_1, r_2, \ldots$ в моменти часу 0, 1, …, K. Його поточна вартість дорівнює

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k r_k I_{\{K \geq k\}} \tag{2.20}$$

і звідси разова нетто-премія може бути обчислена безпосередньо:

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k r_k \cdot {}_{k}p_{x} \tag{2.21}$$

Тепер розглянемо загальну форму страхового ануїтету з виплатами $z_0, z_{1/m}, z_{2/m}, \ldots$ в моменти часу 0, 1/m, 2/m,…, $K + S^{(m)} - 1/m$. Спочатку замінимо m платежів щороку однією авансовою виплатою з такою поточною вартістю:

$$r_k = \sum_{j=0}^{m-1} v^{j/m} z_{k+j/m}, k = 0,1,2,\dots \qquad (2.22)$$

Корегуючий член у рік смерті віднімає страхову суму в момент $k+u,\ 0<u<l$, яка є поточною вартістю виплат, які більше не сплачується, здійснених наприкінці року:

$$c(k+1) = \sum_{j \in J} v^{j/m-u} z_{k+j/m}, k = 0,1,2,\dots$$

де J=J(u) – множина тих j∈{1, 2, …, m-1}, для яких j/m>u.

Отримаємо,

$$c_{k+1} = \int_0^1 \sum_J (1+i)^{1-j/m} z_{k+j/m} du = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} j(1+i)^{1-j/m} z_{k+j/m}.$$

Отже, разова нетто-премія для ануїтету загального виду, що виплачується m разів на рік, може бути виражена у такій формі

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k r_k \cdot{}_k\, p_x - \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} v^{k+1} p_x q_{x+k} \qquad (2.23)$$

2.4 Стандартні типи змінних довічних ануїтетів

Розглянемо довічний ануїтет вигляду (2.20) з $r_k = k+1$.

Через $(I\ddot{a})_x$ позначається разова нетто-премія такого змінного ануїтету. Разові нетто-премії $(I\ddot{a})_x$ та $(IA)_x$ пов'язує просте співвідношення, яке можна отримати наступним чином. Замінимо n на К+1 у рівності

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = d(I\ddot{a})_{\overline{n|}} + nv^n \qquad (2.24)$$

та обчислимо математичні сподівання. Тоді отримаємо

$$\ddot{a}_x = d(I\ddot{a})_x + (IA)_x \qquad (2.25)$$

Якщо виплачуються m щорічних надбавок на рік

$$z_{k+j/m} = \frac{k+1}{m}, j = 0,1,\dots,m-1$$

то символ $(I\ddot{a})_x^{(m)}$- це разова нетто-премію цього ануїтету. Подаючи цей ануїтет у вигляді суми відкладених ануїтетів, отримаємо

$$(I\ddot{a})_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x v^k \ddot{a}_{x+k}^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x v^k \left(\alpha(m)\ddot{a}_{x+k} - \beta(m)\right) =$$

$$= \alpha(m)\sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x v^k \ddot{a}_{x+k} - \beta(m)\sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x v^k = \alpha(m)(I\ddot{a})_x - \beta(m)\ddot{a}_x$$

Покладемо $m \to \infty$. Тоді отримаємо відповідний неперервний ануїтет , а інтенсивність платежів дорівнює $r(t) = [t+1]$. Оскільки неперервний ануїтет має необмежену тривалість і не має часу припинення, остаточної вартості немає, є лише поточна вартість. Неперервний ануїтет можна розглядати як особливу форму звичайних ануїтетів, тобто звичайних ануїтетів, термін яких має тенденцію бути нескінченним. Його разова нетто-премія задається рівністю:

$$I\bar{a} = \int_0^{\infty} [t+1] v^t {}_t p_x dt = \alpha(\infty)(I\ddot{a})_x - \beta(\infty)\ddot{a}_x$$

Перехід до математичних сподівань дає формулу

$$(\bar{I}\bar{a})_x = \frac{\bar{a}_x - (\overline{LA})_x}{\delta} \tag{2.26}$$

Цей вираз можемо обчислити за формулами вище при $m = \infty$.

3. Премії та резерви

Означення 3.1. *Брутто-премія* - це ціна реалізації страхових продуктів. Брутто-премія складається з нетто-премії (премії, яка є джерелом страхових виплат) і додаткових премій (комісійних страховому агенту, адміністративних витрат тощо).

Способи оплати страхування можна розділити на одноразові премії та періодичні премії. У випадку періодичних премій необхідно враховувати їх величини, частоту та тривалість виплат.

За величинами виплат їх можна розділити на періодичні премії сталої величини (однакові премії) та періодичні премії різної величини. Зазвичай премії виплачуються авансом.

3.1 Нетто-премії

Означення 3.2. *Страхова нетто-премія* - розрахункова величина, що визначається за кожним ризиком виходячи з ймовірності настання страхового випадку за даним ризиком та очікуваної величини страхової виплати, яка обчислюється таким чином, щоб на початок дії договору поточна вартість нетто-премій дорівнювала поточній вартості майбутніх виплат (без урахування бонусів) за таким ризиком;

Визначимо для страхового поліса загальний збиток L страхувальника як різницю між поточною вартістю страхових виплат та поточною вартістю премій. Цей збиток повинен розглядатися в алгебраїчному сенсі.[4]

Теорема 3.1. *Принцип еквівалентності*:

$$P_x = dA_x + P_x A_x \tag{3.1}$$

Поточна вартість страхових премій доходу = Поточна вартість премій витрат

Премія відповідає принципу еквівалентності і називається нетто-премією (чистою премією) тоді, коли вона задовольняє рівняння

$$E(L) = 0 \tag{3.2}$$

тобто, коли математичне сподівання загального збитку рівне нулю.

3.1.1 Довічне та тимчасове страхування

Означення 3.3. Розглянемо довічне страхування з страховою виплатою в розмірі 1 в кінці року смерті та щорічними преміями в розмірі P_x. Загальний (сумарний) збиток страховика становить

$$L = v^{K+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \tag{3.3}$$

Із $E(L) = 0$ випливає, що

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} \tag{3.4}$$

Платежі премії можна виразити як різницю між довічним ануїтетом з початкового моменту та довічним ануїтетом з моменту K+1. Отримуємо

$$L = \left(1 + \frac{P_x}{d}\right) v^{K+1} - \frac{P_x}{d} \tag{3.5}$$

Звідси випливає формула для обчислення дисперсії загальних збитків страховика:

$$DL = \left(1 + \frac{P_x}{d}\right)^2 Dv^{K+1} \tag{3.6}$$

Означення 3.4. Розглянемо тимчасове страхування з страховою виплатою в розмірі 1 в кінці року смерті на термін n років. Страхування оплачується щорічними нетто-преміями, які позначаються

$$\boldsymbol{P^1_{x:\overline{n|}}} \tag{3.7}$$

Разова нетто-премія тимчасового страхування дорівнює

$$A^1_{x:\overline{n|}} \tag{3.8}$$

періодичні премії сталої величини є

$$P^1_{x.\overline{n|}} \ddot{a}_{x:\overline{n|}} \tag{3.9}$$

У випадку тимчасового страхування принцип еквівалентності дає таке співвідношення:

$$P^{1}_{x.\overline{n|}} = \frac{A^{1}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{3.10}$$

Загальні збитки страховика обчислюються так:

$$L = \begin{cases} v^{K+1} - P^{1}_{x.\overline{n|}}\ \ddot{a}_{\overline{K+1|}}, K = 0,1,\ldots,n\text{-}1 \\ -P^{1}_{x:\overline{n|}}\ \ddot{a}_{\overline{n|}}, K \geq n \end{cases} \tag{3.11}$$

або

$$L = -P^{1}_{x:\overline{n|}}\ \ddot{a}_{\overline{n|}} + \left(1 + P^{1}_{x:\overline{n|}}\ \ddot{a}_{\overline{n\text{-}K\text{-}1|}}\right) v^{K+1} I_{\{K<n\}} \tag{3.12}$$

3.1.2 Чисті доживання

Означення 3.5. Розглянемо чисте доживання на термін n років зі страховою виплатою в розмірі 1. Для позначення щорічної нетто-премії у цьому випадку використовується символ $P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$. Загальні збитки страховика мають вигляд

$$L = \begin{cases} -P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}\ \ddot{a}_{\overline{K+1|}}, K = 0,1,\ldots,n\text{-}1, \\ v^{n} - P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}\ \ddot{a}_{\overline{n|}}, K \geq n. \end{cases} \tag{3.13}$$

Щорічна нетто − премія, очевидно, дорівнює

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{3.14}$$

3.1.3 Доживання

Означення 3.6. Якщо страхувальник дожив до узгодженого терміну або помер протягом узгодженого терміну, страхова сума виплачується. Премія сплачується на початку кожного року до закінчення терміну дії полісу. У разі передчасної смерті застрахованої особи внесення премій припиняється.

Символ $P_{x:\overline{n|}}$ представляє щорічну нетто-премію для страхування на доживання:

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{3.15}$$

$$P_{x:\overline{n}|} = P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}} \tag{3.16}$$

Наслідок 3.1. Збиток страхувальника = щорічна нетто-премія тимчасового страхування + чисте доживання. Аналогічно маємо

$$1/\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = d + P_{x:\overline{n}|} \tag{3.17}$$

$$P_{x:\overline{n}|} = dA_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}A_{x:\overline{n}|} \tag{3.18}$$

Наслідок 3.2. Аналогічно можна отримати зв'язок між щорічними нетто-преміями тимчасового страхування життя та разовою нетто-премією тимчасового довічного страхування життя

$$P^1_{x:\overline{n}|} = dA^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}A^1_{x:\overline{n}|} \tag{3.19}$$

та зв'язок між щорічними нетто-преміями чистого доживання на термін n років та разовою нетто-премією чистого доживання

$$P_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}} = dA_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}} + P_{x:\overline{n}|}A_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}} \tag{3.20}$$

3.2 Брутто-премії

Означення 3.7. *Страхова брутто-премія* - страхова премія, що сплачується страхувальником відповідно до умов договору;

Брутто-премія = страхова сума + інші витрати (вартість підписання страхового полісу, вартість обслуговування страхового полісу тощо)

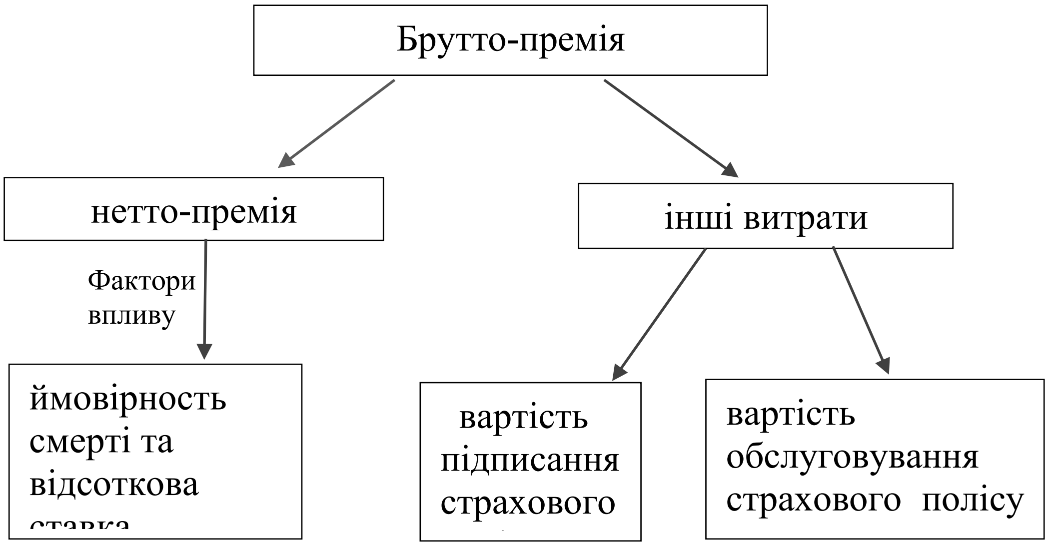

Рис.1: Структура складу брутто-премій

Теорема 3.2. *Принцип еквівалентності:*

Поточна вартість страхових брутто-премій = Поточна вартість страхових виплат + поточна вартість страхових премії

Приклад 3.1.[4] Розглянемо поліс страхування життя, термін виплати – 20 років, страхова сума 1000 грн. Витрати, які включаються до страховий премій, наведено в таблиці. На основі принципу еквівалентності треба визначити брутто-премію.

	перший рік	2-10 років	11-й рік і наступні роки
Кожен поліс (грн)	50	20	20
Відсоток страхової премії	110%	10%	5%

Припускаючи, що брутто-премія дорівнює G, поточна вартість страхових премій дорівнює

$$50+20a_x+G+0.05G\ddot{a}_{x:\overline{20|}}+0.05G\ddot{a}_{x:\overline{10|}}$$

За теоремою 3.2 (принцип еквівалентності) рівняння для визначення брутто-премії має вигляд

$$G\ddot{a}_x=1000A_x+50+20a_x+G+0.05G\ddot{a}_{x:\overline{20|}}+0.05G\ddot{a}_{x:\overline{10|}}$$

$$G = \frac{1000A_x + 50 + 20a_x}{\ddot{a}_x - 1 - 0.05G\ddot{a}_{x:\overline{20}|} - 0.05G\ddot{a}_{x:\overline{10}|}}$$

3.3 Резерви

Означення 3.8. Страхові резерви – це фонд, який страховик створює зі страхових премій або активів, які він отримує, щоб виконати свої обов'язки зі страхування і виплатити майбутні страхові відшкодування.

Страхові резерви для страхування життя поділяються на:

1. **Довгострокові боргові резерви (математичні резерви)**;

a) резерв чистих премій;

b) резерв операційних витрат;

c) збалансовані резерви;

d) бонусний резерв.

Метод розрахунку математичного резерву належить до актуарного методу.

Розрахунок математичного резерву здійснюється окремо для кожного договору з дати набрання чинності. Якщо в договорі є відповідне положення, то потрібно враховувати темпи зростання інфляції.[12]

Загальна вартість математичного резерву дорівнює сумі резервів, розрахованих окремо для кожного контракту.

2. **Резерви належних виплат страхових сум**.[7]

a) резерви на вимоги, які були подані, але ще не вирішені;;

Це грошова оцінка страхової події, яка відбулася до або протягом звітного періоду страховиком, але ще не виконана або виконана не повністю на звітну дату.

b) резерви на збитки, понесені, але не заявлені.

Це грошова оцінка смерті, нещасного випадку та/або хвороби застрахованого. Ці страхові випадки могли відбутися протягом звітного періоду або до нього, але не були оголошені на звітну дату.

3.3.1 Резерви нетто-премій

Означення 3.9. Резерв нетто-премій ${}_tV$ на певний момент часу t дії страхового полісу дорівнює математичному сподіванню різниці між поточною вартістю майбутніх страхових виплат та поточною вартістю майбутніх нетто-премій.

В момент видачі поліса за означенням нетто-премії маємо:

математичне сподівання поточної вартості майбутніх премій

математичне сподівання поточної вартості майбутніх страхових виплат

тобто, резерв нетто-премій як математичне сподівання збитків страховика L на момент видачі поліса дорівнює нулю: ${}_0V = E(L) = 0$.

Зауваження 1.1. У полісах страхування життя резерв нетто-премій зазвичай додатний або невід'ємний, оскільки страхувальник завжди повинен бути зацікавлений у продовженні страхування. Тому очікувана вартість майбутніх страхових виплат завжди повинна перевищувати очікувану вартість майбутніх премій. Страховики повинні резервувати достатній фонд, щоб покрити різницю між цими величинами, тобто резерв нетто-премій ${}_tV$.

Приклад 3.2.[10] Резерв нетто-премій довічного страхування

Розглянемо довічне страхування. Ми можемо використовувати символ ${}_kV_x$ для позначення його резерву нетто-премій на кінець k-го року. За означенням резерву нетто-премій отримаємо:

$$ {}_kV_x \coloneqq A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k} \tag{3.24}$$

Замінивши A_{x+k} на $1 - d\ddot{a}_{x+k}$, знаходимо

$$ {}_kV_x \coloneqq 1 - (P_x + d)\ddot{a}_{x+k} \tag{3.25}$$

Якщо тепер замінити $(P_x + d)$ на $\ddot{a}_x$, то отримаємо вираз для обчислення резерву нетто-премій через разові нетто-премії довічних ануїтетів:

$$ {}_kV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} \tag{3.26} $$

Формулу

$$ {}_kV_x = \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x} \tag{3.27} $$

можна отримати, якщо замінити $\ddot{a}_x$ на $(1 - A_x)/d$ і $\ddot{a}_{x+k}$ на $(1 - A_{x+k})/d$. Рівність $P_{x+k}\ddot{a}_{x+k} = A_{x+k}$ разом з ${}_kV_x \coloneqq A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k}$ дає наступні співвідношення:

$$ {}_kV_x = \left(1 - \frac{P_x}{P_{x+k}}\right) A_{x+k} \tag{3.28} $$

$$ {}_kV_x \coloneqq (P_{x+k} - P_x)\ddot{a}_{x+k} \tag{3.29} $$

Нарешті, замінимо $\ddot{a}_{x+k}$ на $1/(P_{x+k} + d)$, щоб отримати

$$ {}_kV_x = \frac{P_{x+k} - P_x}{P_{x+k} + d} \tag{3.30} $$

Крім (3.24) важливими є формули (3.25) ,(3.28) і (3.29), оскільки їх можна узагальнити на інші типи страхувань.

Для тимчасового страхування на термін *n* років резерв нетто-премій дорівнює

$$ {}_tV^1_{x:\overline{n}|} = A^{\;1}_{x+t:\overline{n-t}|} - P^1_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \tag{3.31} $$

Резерв нетто-премій для страхування на доживання обчислюється так:

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \tag{3.32} $$

Ця формула відображає той факт, що резерв премій дорівнює страховій сумі, за виключенням очікуваної поточної вартості майбутніх премій та невикористаного процентного доходу.

3.3.2 Розподіл загальних збитків за роками поліса

Для $k = 0, 1, \dots$ визначимо Λ_k як збиток, якого зазнав страхувальник за рік $(k + 1)$; початок цього року (тобто, момент часу k) вважається відправною точкою для розрахунків.

Можна виділити три випадки:

1) застрахований помер до k-го року,

2) застрахований помирає протягом (k+1)-го року,

3) застрахований доживає до кінця року, тобто, до моменту часу (k+1).

Згідно з наведеним вище, ми можемо використовувати наступну формулу для вираження випадкової величини Λ_k

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0, K \le k-1, \\ c_{k+1}v - ({}_kV + \Pi_k), K = k, \\ {}_{k+1}Vv - ({}_kV + \Pi_k), K \ge k+1 \end{cases} \tag{3.33}$$

3.3.3 Резерви брутто-премій

Як ми вже бачили раніше, страхові премії (брутто-премії), які сплачує страхувальник, складаються з нетто-премій та додаткових платежів, які покривають витрати на придбання полісу, банківські збори, адміністративні витрати тощо. Відповідно, це теж треба враховувати при розрахунку резервів.

Метод розрахунку резерву брутто- премії:

Резерв брутто-премій дорівнює обчислюється як різниця між очікуваною поточною вартістю майбутніх виплат та очікуваною поточною вартістю майбутніх премій.

Приклад 3.3. Резерв брутто-премій для довічного страхування з наступними умовами:

- Страхова сума S, застрахованому x років.
- Премія P_x (брутто-премія) сплачується на початку кожного року.
- Початкова вартість становить (a%+1) грн. премії за перший рік.
- Комісія за поновлення становить (b%+m) грн. кожної премії.
- Комісія за врегулювання претензій становить (c%+d) грн. страхової суми.

Резерв брутто-премій на момент t протягом терміну дії полісу позначимо як ${}_tV_x$.

Отримаємо:

Очікувана поточна вартість майбутніх страхових виплат на кінець року t становить

$$S \times A_{x+t}$$

Очікувана поточна вартість майбутніх витрат на відшкодування збитків на кінець року t становить

$$(c\%S + d) \times A_{x+t}$$

Очікувана поточна вартість майбутніх витрат на оновлення в кінці року t становить

$$(b\%P_x + m) \times \ddot{a}_{x+t}$$

Очікувана поточна вартість премій, які будуть сплачені в майбутньому

$$P_x \times \ddot{a}_{x+t}$$

Отже, резерв брутто-премій для такого поліса на кінець року t можна виразити як

$${}_tV_x = S \times A_{x+t} + (c\%S + d) \times A_{x+t} + (b\%P_x + m) \times \ddot{a}_{x+t} - P_x \times \ddot{a}_{x+t}$$

Звідси отримуємо

$${}_tV_x = [(1 + c\%)S + d] \times A_{x+t} - [(1 - b\%)P_x - m] \times \ddot{a}_{x+t}$$

Аналогічно, для тимчасового страхування на термін n років з такими ж додатковими витратами резерв брутто-премій дорівнює

$${}_tV^{1}_{x:\overline{n|}} = [(1 + c\%)S + d] \times A_{x+t} - [(1 - b\%)P_x - m] \times \ddot{a}_{x+t}$$

Для такого ж страхування на доживання резерв брутто-премій обчислюється так:

$${}_tV^{1}_{x:\overline{n|}} = [(1 + c\%)S + d] \times A_{x+t} - [(1 - b\%)P_x - m] \times \ddot{a}_{x+t}$$

3.4 Модифікація резерву нетто-премій

З метою врахування витрат на укладання договору може здійснюватися модифікація (цильмеризація) резерву нетто-премій. [13]

Модифікація резерву має відповідати деяким обмеженням, і це стосується лише ситуації, коли страховий внесок сплачується частинами щонайменше 3 роки.

Модифікація резерву здійснюється шляхом зменшення розміру резерву нетто-премій на фіксований для даного договору відсоток (рівень модифікації) актуарної вартості потоку майбутніх нетто-премій.

Вимоги, які повинні бути виконані під час процесу модифікації, такі:

а) наприкінці першої страхової річниці модифікований резерв не повинен бути від’ємним;

b) рівень модифікації резерву не може перевищувати 5 відсотків.

Якщо в кінці першого страхового року резерв після модифікації стає від'ємним, то резерв вважається нульовим.

1. *Основний спосіб модифікації резерву нетто-премій*

- Виходячи з передумови повного захисту інтересів страхувальника, внести коригування в структуру розподілу щорічної брутто-премій та зменшити частку нетто-премій у перший рік
- Збільшувати відсоток нетто-премій на кожен наступний рік і зменшувати відсоток інших премій;
- Загальна сума нетто-премій та інших премій залишається незмінною.

2. *Розрахунок модифікації резерву нетто-премій*

Період модифікації – це час від початку першого року до кінця модифікації

У межах періоду модифікації:

нетто- премія за перший рік < нетто-премія за наступні роки

Після періоду модифікації:

нетто-премія = щорічна брутто-премія

Резерв протягом періоду модифікації менший за резерв нетто-премії

Приклад 3.4. Період оплати h років, а період модифікації j років (j<h)

Припустимо, що страховик спочатку збирав нетто-премії, нараховуючи P на початку кожного року. Необхідно внести модифікації в структуру нетто-премій.

Після модифікації нетто-премія за перший рік дорівнює α. Під час періоду модифікації щорічна нетто-премія протягом наступних j-1 років дорівнює β. Щорічна нетто-премія, яка збирається після періоду модифікації дорівнює P. Очевидно

$$\alpha < P < \beta$$

Модифікована загальна премія дорівнює початковій щорічній нетто-премії, тобто

$$\alpha + \beta \times a_{x:\overline{j-1}|} + P \times {}_{j|}\ddot{a}_{x:\overline{h-j}|} = P \times \ddot{a}_{x:\overline{h}|} \qquad (3.34)$$

$$\alpha + \beta \times a_{x:\overline{j-1}|} = P \times \ddot{a}_{x:\overline{j}|} \tag{3.35}$$

також тому, що

$$\ddot{a}_{x:\overline{j}|} = 1 + a_{x:\overline{j-1}|} \tag{3.36}$$

отримаємо

$$P - \alpha = (\beta - P) \times a_{x:\overline{j-1}|} \tag{3.37}$$

Ми виявили, що зменшення нетто-премії за перший рік дорівнює поточній вартості збільшення нетто-премії протягом j-1 років, тобто загальна нетто-премія залишається незмінною.

Після модифікації отримаємо модифікований резерв V^{Mod}.

Приклад 3.5.[10] Період оплати h років, страхування на доживання на термін n років зі страховою сумою 1. Потрібно розрахувати модифікацію резерву на кінець року t.

Під час періоду модифікації, очікувана поточна вартість майбутніх страхових виплат дорівнює:

$$A_{x+t:\overline{n-t}|}$$

Очікувана поточна вартість майбутніх премій:

$$\beta \times \ddot{a}_{x+t:\overline{j-t}|} + {}_{h}P_{x:\overline{n}|} \times {}_{j-t|}\ddot{a}_{x+t:\overline{h-j}|}$$

Модифікація резерву на кінець року t становить:

$${}^{h}_{t}V^{Mod}_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - \beta \times \ddot{a}_{x+t:\overline{j-t}|} - {}_{h}P_{x:\overline{n}|} \times {}_{j-t|}\ddot{a}_{x+t:\overline{h-j}|} \tag{3.38}$$

$${}^{h}_{t}V^{Mod}_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_{h}P_{x:\overline{n}|} \times \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|} - (\beta - {}_{h}P_{x:\overline{n}|}) \times \ddot{a}_{x+t:\overline{j-t}|}$$

$$= {}^{h}_{t}V_{x:\overline{n}|} - (\beta - {}_{h}P_{x:\overline{n}|}) \times \ddot{a}_{x+t:\overline{j-t}|} \tag{3.39}$$

Після періоду модифікації: майбутні страхові витрати та майбутній дохід від премій такі ж, як і початкові. Модифікований резерв на кінець року t дорівнює початковому резерву нетто-премій

$$ {}_{t}^{h}V_{x:\overline{n}|}^{Mod} = {}_{t}^{h}V_{x:\overline{n}|} \tag{3.40} $$

Протягом періоду модифікації:

модифікований резерв < початковий резерв нетто-премій

Після періоду модифікації:

модифікований резерв = початковий резерв нетто-премій

4. Урахування величини інвестиційного доходу

За договорами страхування життя та пенсійного страхування при обчисленні страхових тарифів страховики повинні враховувати не тільки різного роду витрати, а й величину інвестиційного доходу. Ця величина має бути зазначена у страховому полісі. Конкретний розмір страхового тарифу визначається за згодою сторін.

У попередньому розділі показано, як обчислюються страхові тарифи для різних типів страхування життя на основі нетто-премій та додаткових навантажень. При розрахунку нетто-премій враховуються лише ймовірності смерті та відсоткові ставки. Додаткові складові страхових тарифів можна розділити на навантаження на витрати та резерви на випадок непередбачених обставин. Навантаження на витрати використовуються для покриття витрат, пов'язаних з розвитком, підтримкою та управлінням цієї категорії страхування. Резерв на непередбачені обставини використовується для покриття фактичного значення смертності, відсотків та витрат, а також врахування інших факторів, що викликають відхилення від очікуваних значень.

4.1 Метод ціноутворення з урахуванням величини інвестиційного доходу або частки активів

Метод ціноутворення з урахуванням величини інвестиційного доходу або частки активів ґрунтується на кількох основних факторах [4]. Вибирають пробну страхову премію та перевіряють її за допомогою тесту прибутку, щоб визначити, чи відповідає вона цілям страхової компанії. Після відповідного коригування отримують загальну страхова премія. Обчислення, пов’язані з частками активів, аналогічні обчисленням доходів і витрат: щорічні страхові внески та відсотки кредитуються як рахунки доходів, а страхування смерті, виплати, викупні виплати, дивіденди та витрати дебетуються рахунками витрат. Сальдо рахунку наприкінці року розраховується шляхом розподілу суми, гарантованої полісом, на суму чинного поліса на кінець року. Сальдо рахунку кожного чинного поліса є часткою активу. Частка активу за вирахуванням резервного фонду, депонованого для страхового полісу, є надлишкоим прибутком для страхового полісу. Профіцит поточного року за вирахуванням накопиченої суми профіциту попереднього року на кінець поточного року є прибутком поточного року за цим страховим полісом.

Частка активів на кінець кожного страхового року визначається за таким рекурентним співвідношенням:

$$L = \frac{(L1 + A - A1)(1 + i) - V - A2}{1 - P1 - P2}$$

L - Частка активів на кінець страхового року

L1 - Частка активів на початок страхового року

A - Загальна премія за рік

A1 - Витрати на страхування на початок страхового року

i - процентна ставка

V - Страхова виплата

A2 - Витрати на страхування в кінці року

P1 - Ймовірність смерті в страховому році

P2 - Ймовірність анулювання протягом страхового року

Частки активів, загальні премії, витрати на страхування та страхові виплати розраховуються в ефективних одиницях. Частка активів на початок першого страхового року дорівнює нулю.

Означення 4.1. *Витрати на початок страхового року* – це витрати на андерайтинг та обслуговування полісу, включаючи витрати, пов’язані з кожним діючим страховим полісом, витрати, пов'язані зі страхуванням на випадок смерті, і витрати, пов'язані зі страховими внесками.

Витрати на початок страхового року для кожної ефективної одиниці визначаються за такою формулою:

$$A1 = \frac{C}{E} + \frac{C(1000) \times V1}{1000} + C(1) \times A$$

C- Витрати, пов'язані з кожним діючим страховим полісом

E- Середня кількість ефективних одиниць на страховий поліс

C(1000) - Витрати, пов’язані з анулюванням страхування на 1000 юанів

V1 - Витрати у випадку смерті протягом страхового року

C(1)- Витрати, пов'язані з кожною премією

Означення 4.2 *Витрати на страхування на кінець страхового року* включають виплату у разі смерті, виплату у зв'язку з виживанням, витрати у випадку анулювання (скасування) страхування та витрати на бонуси.

Відшкодування у разі смерті, допомога на виживання, бонус та грошова сума при відмові у формулі розраховуються для кожної дійсної одиниці на початку страхового року.

$$A2 = [V1 \times P1 + V2 \times P2 + V3 \times (1 - P1) + V4 \times (1 - P1 - P2)]/E$$

V2- Витрати, що виникають при кожному скасуванні страхування

V3- Витрати, понесені за кожен виплачений бонус

V4- Витрати, сплачені за кожну виплату у випадку доживання

Відповідно до різного статусу застрахованого наприкінці року, страховик може вирішити, чи виплачувати страхувальнику та як платити. Оскільки статус застрахованого на кінець страхового року не може бути визначений на початку страхового року, сума страхових виплат може бути лише очікуваною величиною. Її можна розрахувати за такою формулою:

$$V = V1 \times P1 + V2 \times P2 + V3 \times (1 - P1) + V4 \times (1 - P1 - P2)$$

Наслідок 4.1. При обчисленні нетто-премії виплата в разі смерті та річна процентна ставка для кожного року однакові. У методі з урахуванням частки активів загальні премії та інші величини в кожному році є змінними.

Означення 4.3. Якщо відомі резерви на кінець року страхування, надлишок на кінець року страхування визначається як частка активів мінус резерви. Прибуток за рік страхового поліса визначається як сукупна вартість надлишку на кінець страхового року мінус надлишок на початок страхового року. Формула така:

$$R = R2 - R1 \times \frac{1 + i}{1 - P1 - P2}$$

R- прибуток протягом страхового року

R2- надлишок на кінець страхового року

R1- надлишок на початок страхового року

Коли відомі інші умови, можна вибрати набір експериментальних загальних премій для визначення річного прибутку кожного страхового полісу, який потім можна скоригувати відповідно до цільового прибутку страховика. Припустимо, що цільовий прибуток страховика — це теперішня вартість прибутку, поділена на теперішню вартість премій, що дорівнює a. Використана ставка дисконту d може відрізнятися від попередньо визначеної процентної ставки. Для обчислення сучасної вартості прибутку та сучасної вартості премій можна визначити коефіцієнт дисконтування e. Коефіцієнт дисконтування на початку першого страхового року дорівнює 1.

$$e2 = e1 \times \frac{1 - P1 - P2}{1 + d}$$

e2- Коефіцієнт дисконтування на кінець страхового року

e1- Коефіцієнт дисконтування на початку страхового року

d- ставка дисконту

Таким чином,

$$R` = \sum R \times e2 \quad \text{та} \quad A` = \sum A \times e1$$

$$d_R = \frac{R`}{A`}$$

R`- приведена вартість прибутку

A`- Поточна вартість премії

d_R- ставка прибутку

Якщо страховик хоче відкоригувати цільовий прибуток, йому необхідно відкоригувати загальну премію A. За звичайних обставин вартість полісу в загальній премії вважається фіксованою, і лише нетто-премія потребує коригування. Якщо припустити, що нетто-премії кожного року страхування подвоюються, поточна вартість загальних премій A` збільшується на ∑ нетто-премій A0×коефіцієнт дисконту e1 на початку страхового року.

Зміни прибутку R і теперішньої вартості прибутку R` за кожен рік страхування становлять:

$$\Delta R = A0 \times (1 - A2) \times \frac{1 + i}{1 - P1 - P2}$$

$$\Delta R` = \sum \Delta R \times e2$$

Для досягнення цільового показника прибутку, якщо припустити, що чисту премію потрібно збільшити в x разів

$$A0 *= (1 + x) \times A0$$

$$A *= A + A0 \times x$$

$$R` *= R` + \Delta R \times x$$

$$A` *= A` + \Delta A` \times x$$

A0*- Нова чиста премія

A*- Нова загальна премія

R`*- Поточна вартість нового прибутку

Відповідно до попередніх припущень цільовий прибуток страховика дорівнює

$$\frac{R` *}{A` *} = a$$

тоді,

$$x = \frac{a \times A` - R`}{\Delta R` - a \times \Delta A`}$$

Підставивши x у нову формулу загальної премії, можна знайти скориговані загальну премію та прибуток.

5. Актуарні розрахунки в програмному середовищі R

У цьому розділі наведено деякі актуарні розрахунки для полісів страхування життя, виконані у програмному середовищі R [15].

Надалі використовуються такі позначення:

- x – вік застрахованого на момент початку дії договору;
- n – термін дії договору;
- m – період відстрочки (значення за замовчуванням буде m = 0);
- i – відсоткова ставка;
- k – частота дробових платежів (значення за замовчуванням буде k = 1).

Усі розрахунки базуватимуться на ілюстративній таблиці тривалості життя, виданій Товариством актуаріїв (Society of Actuaries, SoA), із відсотковою ставкою 6%. Крім того, будемо вважати, що страхове відшкодування виплачується в кінці кожного періоду.

5.1. Обчислення разових та періодичних премій для страхування життя та пенсійного страхування

5.1.1. На основі ілюстративної таблиці життя SoA сформуємо об'єкт актуарної таблиці з використанням процентної ставки 6% та експортуємо такий об'єкт у фрейм даних, що показує відповідні комутаційні функції.

```
> data(soaLt)
> # 1.1
> soaAct <- new("actuarialtable", x = soaLt$x,
+   lx = soaLt$Ix, interest = 0.06)
> # 1.2
> soaActDf <- as(soaAct, "data.frame")
> head(soaActDf)
```

	x	lx	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	0	10000000	10000000	168358017	47263.585	470300.9	12487975
2	1	9949901	9386699	158358017	44588.288	423037.4	12017674
3	2	9899801	8810788	148971318	42064.422	378449.1	11594637
4	3	9849702	8270000	140160530	39683.417	336384.6	11216188
5	4	9799602	7762203	131890531	37437.186	296701.2	10879803
6	5	9749503	7285396	124128328	6191.668	259264.0	10583102

Нехай вік застрахованого - 36 років, а страхова сума становить 100 000 доларів США. Обчислимо разову нетто-премія для трирічного полісу тимчасового страхування життя

Обчислимо ймовірності фактично заплатити 100 000 доларів США для кожного року страхування:

> (probdeath < − −diff(soaActDf$lx)[soaActDf$x%in%36: 38]/ soaActDf$lx[soaActDf$x == 36])

[1] 0.002140254 0.002274272 0.002420523

Обчислимо коефіцієнти дисконтування:

> disc < − (1 + 0.06)^(−(1: 3))

Тоді шукана разова нетто премія обчислюється так:

> sum(disc ∗ probdeath) ∗ 100000

[1] 607.5519

Але всі ці обчислення можна зробити за допомогою однієї вбудованої функції **Axn**:

> P < − 100000 ∗ $Axn(actuarialtable = soaAct, x = 36, n = 3)$

> P

[1] 607.5519

В термінах комутаційних функцій разову нетто-премію можна обчислити так:

> 100000 ∗ with(soaActDf, (Mx[37] − Mx[40])/Dx[37])

[1] 607.5519

```
> (10 + 1) * Axn(soaAct, 60,10)
[1] 1.504674
> IAxn(soaAct, 60,10) + DAxn(soaAct, 60,10)
[1] 1.504674
> (probdeath <- -diff(soaActDf$lx)[soaActDf$x %in% 36:38]/soaActDf$lx[soaActDf$x == 36])
[1] 0.002140254 0.002274272 0.002420523
> #Оскільки коефіцієнти дисконту, відповідно,
> disc <- (1 + 0.06)^(-(1:3))
> #тоді актуарна теперішня вартість дорівнює
> sum(disc * probdeath) * 100000
[1] 607.5519
> k <- 2
> qxt(soaAct, x = 36 + k - 1, t = 1) * pxt(soaAct, x = 36, t = k - 1)
[1] 0.002274272
> #Але всі ці обчислення можна зробити також за допомогою функції Axn:
> P <- 100000 * Axn(actuarialtable = soaAct, x = 36, n = 3)
> P
[1] 607.5519
> (10 + 1) * Axn(soaAct, 60,10)
[1] 1.504674
```

5.1.2. Обчислимо разову нетто-премію страхування життя для індивіда віком 30 років, якщо страхування було відтерміновано на 10 років:

```
> Axn(actuarialtable = soaAct, x = 30, m = 10)
[1] 0.08829814
```

5.1.3. Страхувальник у віці 50 років хоче зараз інвестувати суму в придбання відстроченого ануїтету з геометричним збільшенням щорічного платежу на 2%

річних. За умови, що початкова вартість ануїтету становить 10 000, обчислимо, яку суму буде вимагати страховик, крім будь-яких витрат.

> #Спочатку ми повинні знайти синтетичну процентну ставку

> $\text{irate} = 1.06 / 1.02 - 1$

> #Тоді ми можемо оцінити ануїтет

> $\text{P} = 10000 * \text{axn}(\text{actuarialtable} = \text{soaAct}, \text{x} = 50, \text{i} = \text{irate})$

> p

[1] 164275.2

5.1.4. Знайдемо періодичну премію для страхування життя на все життя страхувальника у віці 25 років, сплачену на початку перших 10 років життя застрахованного.

> $\text{P} < -Axn(soa08Act, 25)/axn(soa08Act, 25{,}10)$

> P

[1] 0.01052354

5.2. Обчислення резервів

Резерви на момент t обчислюються двома методами, обидва припускають, що страхувальник живий у момент t:

1. Відповідно до перспективного методу, резерв виплат розраховується як різниця між очікуваною поточною вартістю майбутніх страхових виплат і очікуваною поточною вартістю майбутніх премій.

2. За ретроспективним методом резерв виплат розраховується як різниця між накопиченою вартістю минулих виплат за вирахуванням накопиченої вартості минулих отриманих премій.

Рівняння(5.1) показує загальне співвідношення, яке має місце для резерву виплат. Це так званий проспективний метод.

$$V_t = APV_t(Future\ Benefits) - APV_t(Future\ Premiums) \tag{5.1}$$

Резерв виплат для довічного страхування життя виражається наступним рівнянням(5.2)

$$ {}_tV_x = A_{x+t} - P \cdot \ddot{a}_{x+t} \quad (5.2) $$

де P - річна премія за виплату (фіксована на момент t = 0), $P = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$

5.2.1. Обчислимо резерв для довічного страхування життя 60-річного страхувальника, сплаченого за рахунок щорічних премій, на 10 рік.

> #По-перше, ми отримуємо щорічну премію за використання
> $\mathrm{P} <- \mathrm{Axn(soa08Act, 60)/axn(soa08Act, 60)}$
> #а потім отримуємо пільговий резерв на 10 рік
> $\mathrm{v} <- \mathrm{Axn(soa08Act, 60+10) - P * axn(soa08Act, 60+10)}$
> v
[1] 0.2311368

Резерв виплат для тимчасового страхування життя на n років виражається наступним рівнянням(5.3)

$$ {}_tV_x = {}_{n-k}A_{x+t} - P \cdot {}_{n-k}\ddot{a}_{x+t} \quad (5.3) $$

де P - річна премія (фіксована на момент t = 0), $P = \frac{{}_nA_x}{{}_n\ddot{a}_x}$

5.2.2. Розрахуємо резерв для довічного тимчасового страхування життя 60-річного страхувальника, сплаченого щорічними внесками за 30 років, на 10 рік.

> #Річна премія буде становити
> $\mathrm{P} <- \mathrm{Axn(soa08Act, 60{,}30)/axn(soa08Act, 60{,}30)}$
> #потім, пільговий резерв на 10 рік
> $\mathrm{v} <- \mathrm{Axn(soa08Act, 60+10{,}30-10) - P * axn(soa08Act, 60+10{,}30-10)}$
> v
[1] 0.209061
> #Якщо ми хочемо уявити еволюцію резерву з часом, код буде

> $v \; <- \text{function}(t)\; \text{Axn}(\text{soa08Act}, 60 + t, 30 - t) - P * \text{axn}(\text{soa08Act}, 60 + t, 30 - t)$

> $\text{VecT} \; <- \text{seq}(0{,}30)$

> $\text{plot}(\text{VecT}, \text{Vectorize}(v)(\text{VecT}), \text{type} = \text{"b"})$

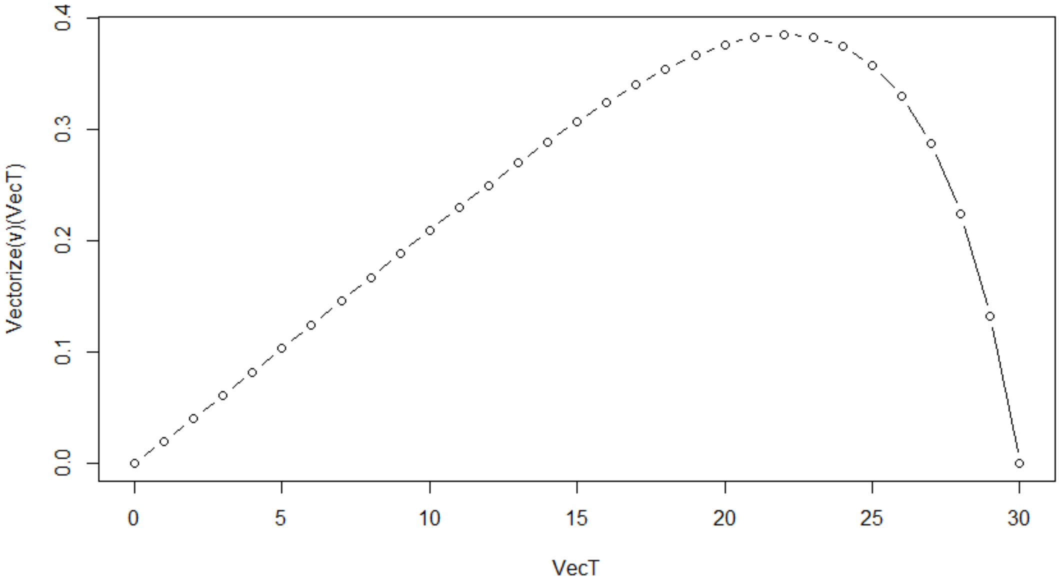

Рис 1. Еволюція резерву з часом VectT

5.2.3. Для полісу дискретного довічного страхування життя (тобто, страхування з виплатою страхової суми в кінці року смерті застрахованого) на суму 100000 доларів США для власника поліса у віці 35 років, обчислимо брутто-премію G, враховуючи, що

1) Відсоток витрат на премію становить 10% на рік.

2) Витрати за полісом становлять 25 доларів США на рік.

3) Річні витрати на технічне обслуговування в розмірі 2,50 доларів США за кожну 1000 доларів США номінальної вартості.

4) Усі витрати оплачуються на початку року.

Рівняння для знаходження G:

$$G\ddot{a}_{35} = 100000A_{35} + (25 + \frac{2.5}{1000}100000 + 0.1G)\ddot{a}_{35}$$

$> \mathrm{G} \ < -(100000 * Axn(actuarialtable = soa08Act, x = 35) \ +$

$+ \ (25 \ + \ 250) * \mathrm{axn}(\mathrm{actuarialtable} = \mathrm{soa08Act}, \mathrm{x} = 35)) \ /$

$+ \ (0.9 * \mathrm{axn}(\mathrm{actuarialtable} = \mathrm{soa08Act}, \mathrm{x} = 35))$

> G

[1] 1234.712

5.2.4. Для дискретного довічного страхування життя на суму 1000 доларів США для індивіда у віці 45 років враховано, що:

• витрати включають 10% на рік від брутто-премії.

• Додаткові витрати в розмірі $3 на рік.

• Усі витрати оплачуються на початку року.

Розрахуємо:

1) річну премія за виплату;

2) річну брутто- премію;

3) річну видаткову премію;

4) резерв виплат на кінець 1 року.

5) загальний резерв на кінець 1 року.

> #1 Річна премія за виплату.

$>\mathrm{U} \ < -1000 * \mathrm{Axn}(\mathrm{soa08Act}, \mathrm{x} = 45); \ \mathrm{P} = \mathrm{U}/\mathrm{axn}(\mathrm{soa08Act}, \mathrm{x} = 45)$

> P

[1] 14.25744

> #2 Річна брутто-премія.

$> \mathrm{G} \ < -(\mathrm{U} + 3 * \mathrm{axn}(\mathrm{soa08Act}, \mathrm{x} = 45))/((1 - .1) * \mathrm{axn}(\mathrm{soa08Act}, \mathrm{x} = 45))$

> G

[1] 19.17494

> #3 Річна видаткова премія.

> E <- G-P

> E

[1] 4.917494

> #4 Резерв виплат на кінець 1 року.

> $V <- 1000 * Axn(soa08Act, x = 45 + 1) - P * axn(soa08Act, x = 45 + 1)$

> V

[1] 11.16087

> #5 Загальний резерв на кінець 1 року.

> $Vt <- 1000 * Axn(soa08Act, x = 45 + 1) + (0.1 * G + 3) * axn(soa08Act, x = 45 + 1)$

> $-G * axn(soa08Act, x = 45 + 1)$

[1] -267.5784

> Vt

[1] 278.7392

Непередбачені обставини життя самі по собі є стохастичними змінними, оскільки вони є функціями коефіцієнта дисконтування і випадкової величини – тривалості майбутнього життя. Оцінимо страхування з точки зору непередбачених обставин, знаходячи мінімальну премію, яка змушує страховика зменшити ймовірність збитків.

5.2.5. Страхувальник у віці 25 років купує 40-річне страхування життя. Знайдемо найменшу премію, яку може стягнути страховик, щоб встановити ймовірність збитку не більше ніж 5%.

> samples $<- rLifeContingencies(n = 10\text{^}4, lifecontingency = "Axn",$

+ $\text{object} = soa08Act, x = 25, t = 40, \text{parallel} = TRUE)$

> #обчислимо разову нетто-премію

> APV $<- Axn(soa08Act, x = 25, n = 40)$

> percentilePremium $<- quantile(x = samples, p = 1 - 0.05)$

> APV

[1] 0.04797088

> percentilePremium 95%

0.2617973

5.2.6. Компанія зі страхування життя збирається застрахувати пул із 1000 пенсіонерів, всі у віці 65 років. Розрахуємо суму, яку потрібно стягнути з кожного застрахованого, щоб страхова компанія не втратила з імовірністю 99%.

Z – це випадкова величина, що представляє поточну вартість ануїтету.

> $\mathrm{ax65}\ <-rLifeContingencies(n = 10^\wedge 5, lifecontingency\ =\ "axn",$

$+\ \ \mathrm{object}\ =\ \mathrm{soa08Act}, \mathrm{x} = 65, \mathrm{parallel} = \mathrm{TRUE})$

> $\mathrm{muax65}\ <-mean(ax65)$

> $\mathrm{sdax65}\ <-sd(ax65)$

> $\mathrm{qnorm}(\mathrm{p} = 0.99, \mathrm{mean} = 1000 * \mathrm{muax65}, \mathrm{sd} = (1000)^\wedge 0.5 * \mathrm{sdax65})/1000$

[1] 10.15447

ВИСНОВКИ

У магістерській дисертації наведено основні поняття, що стосуються страхування життя, модель тривалості життя, класифікацію видів страхування життя, розглянуто методи розрахунку разових нетто премій для різних типів страхування життя, наведено методи розрахунку страхових тарифів для різних типів довічних ануїтетів, методи розрахунку періодичних нетто-премій та брутто-премій, методи обчислення та модифікації резервів премій. Проаналізовано метод ціноутворення з урахуванням величини інвестиційного доходу або частки активів. Наведено деякі актуарні розрахунки в програмному середовищі R.

Порівняно з методами розрахунку страхових тарифів на основі тільки нетто-премій та витрат, переваги методу ціноутворення з урахуванням величини інвестиційного доходу або частки активів є наступними:

a) премія, сума платежу, процентна ставка та ставка дисконту для кожного страхового року можуть бути різними, і страховик може їх вільно коригувати;
b) страхові премії безпосередньо пов'язані з прибутком, що сприяє управлінню страховиків;
c) метод ціноутворення з урахуванням величини частки активів може бути використаний для тестування прибутку для підвищення доцільності страхових премій;
d) можна скласти комп’ютерну програму для автоматичного виконання розрахунків загальної премії та перевірки страхового полісу;
e) застосування цього методу визначення вимагає створення окремого рахунку для кожного страхового полісу, що може задовольнити потреби нових видів страхування, таких як змінне страхування життя та страхування інвестиційного капіталу.

Оскільки метод ціноутворення з урахуванням частки активів має високий ступінь гнучкості, застосування цього методу пред'являє підвищені вимоги до актуарної методології та комп'ютерної техніки страховика.

У результаті проведеного дослідження можна сформулювати такі рекомендації щодо методів розрахунку страхових тарифів у сфері страхування життя:

a) пропагувати використання методу ціноутворення з урахуванням частки активів, оскільки цей метод є більш гнучким і може задовольнити визначення ставок для різних нових видів страхування;
b) провести тест на прибутковість для нового виду страхування;
c) посилити дослідження щодо контролю та обліку витрат.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж./Актуарная математика. Перев. С англ. / Под ред. В.К. Малиновського.//М.: Янус-К,2001.- 656 с., илл.
2. Shaw, E.S. Financial Deepening in Economic Development.//M.: Shanghai Branch of Sanlian Bookstore , 1988.
3. Joskow, Paul L. Foundations of Insurance Economics — Readings in Economics and Finance. 1973.
4. Сян Ю. Визначення тарифів на страхування життя. // DOI: 10.13497 /j.crki. is. 2000.07.010.
5. Yuan Xucheng. Reform of personal insurance premium rate formation mechanism. // China Finance. 2014(09).
6. Han Xiangrong, Wang Dapeng. Insurance countermeasures in the era of big asset management. // China Finance. 2014(05).
7. Zhao Wenlong. Reflection on Insurance Product Supervision——Based on the Perspective of Consumer Benefit Protection. // China Insurance. 2011(06).
8. Li Xuefeng. Insurance pricing model based on investment theory. // Journal of South-Central University for Nationalities (Natural Science Edition). 2007(04).
9. Zhao Zhengtang. Research on the Pricing Model of Financial Insurance Products. // Journal of Xiamen University (Philosophy and Social Sciences Edition). 2008(04).
10. H. Schmeiser,J. Wagner. A joint valuation of premium payment and surrender options in participating life insurance contracts. // Insurance Mathematics and Economics . 2011 (3).
11. Michael K. McShane, Larry A. Cox, Richard J. Butler. Regulatory competition and forbearance: Evidence from the life insurance industry. // Journal of Banking and Finance . 2009 (3).

12. Nadine Gatzert. Asset management and surplus distribution strategies in life insurance: An examination with respect to risk pricing and risk measurement. // Insurance Mathematics and Economics . 2007 (2).
13. Методика формування резервів із страхування життя. {Із змінами, внесеними згідно з Розпорядженням Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг № 110 від 01.03.2011, Розпорядженнями Національної комісії, що здійснює державне регулювання у сфері ринків фінансових послуг № 2421 від 27.11.2012, № 295 від 04.02.2016, № 1455 від 21.08.2018} https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0198-04#n16
14. Закон України про страхування. https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/85/96-%D0%B2%D1%80#Text
15. Charpentier A. Computational Actuarial Science with R. Chapman & Hall, 2015.
16. Чжао Кесінь. Розвиток методу regula falsi у КИТАЇ. X Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. Нац. техн. ун-т України «КПІ ім. І. Сікорського». – Київ. – 2021. –с. 117.