

**Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
Національний університет «Києво-Могилянська академія»**

**X Всеукраїнська наукова конференція
молодих математиків**

16–17 квітня 2021

**X All-Ukrainian Scientific Conference
of Young Mathematicians**

April 16–17, 2021

Тези доповідей

Abstracts

Київ – 2021

Х Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків,
16–17 квітня 2021, КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Організатори

Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Програмний комітет

Василик Ольга Іванівна
Глибовець Андрій Миколайович
Гончаренко Яніна Володимирівна
Горбачук Володимир Мирославович
Дудкін Микола Євгенович
Задерей Петро Васильович
Іванов Олександр Володимирович
Клесов Олег Іванович
Михайлець Володимир Андрійович
Олійник Богдана Віталіївна
Петравчук Анатолій Петрович
Пилипенко Андрій Юрійович
Працьовитий Микола Вікторович
Сиротюк Володимир Дмитрович
Торбін Григорій Мирославович
Чорней Руслан Константинович
Швець Василь Олександрович
Шут Микола Іванович
Щестюк Наталія Юріївна

Організаційний комітет

Клесов Олег Іванович, голова
Москвичова Катерина Костянтинівна
Овчаренко Олена Валеріївна
Приходько Юрій Євгенович
Савич Ірина Миколаївна

Contents

Секція 1. Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь	6
<i>G. Di Nunno, Y. Mishura, A. Yurchenko-Tytarenko. Volterra sandwiched volatility models</i>	7
<i>M. Dimitrov, L. Jin, Y. Ni. Properties of American-type Options under a Markovian Regime Switching Model</i>	8
<i>I. Donhauzer. Strong law of large numbers for functionals of random fields</i>	9
<i>V.K. Rovnik. Underlying geometry in reservoir computing</i>	10
<i>Г.С. Андрущак. Застосування прихованих марковських моделей до розв'язання задачі розпізнавання акордів</i>	11
<i>В.Ю. Богданський. Рівномірний аналог теореми Марцинкевича–Зігмунда</i>	12
<i>М.В. Бойко. Збурення ротаційно-інваріантного α-стійкого випадкового процесу оператором псевдоградієнта</i>	14
<i>В.В. Бутовський. Стохастичні ігри на графах</i>	16
<i>Є.В. Гармаш. Про найвідоміші досягнення Фруллані та приклад вирішення одного з його інтегралів</i>	17
<i>К.Ю. Глушак. Кевелетне перетворення як узагальнення вейвлетного</i>	19
<i>О.М. Десницький, О.А. Тимошенко. Моделювання траєкторій вінерівського процесу</i>	20
<i>М.Є. Дудкін, О.Ю. Дюженкова, О.М. Дудкін. Нормальні матриці Якобі</i>	22
<i>О.О. Ковальчук. Про випадкові ігри, коли один з гравців володіє більшою інформацією ніж інший</i>	23
<i>А.С. Ковтун, О.І. Клесов. Ідея електронного голосування</i>	25
<i>І.І. Ловицька. Моделювання узагальненого дробового броунівського руху</i>	27
<i>Г.О. Маслюк. Про багатоточкові крайові задачі у просторах Гельдера</i>	29
<i>В.Ю. Матлаш, А.В. Сиротенко. Розв'язки лінійного операторного рівняння в просторі $\mathbb{R}^2$</i>	31
<i>О.В. Митрофанова. Одне узагальнення теореми Малінво</i>	33
<i>В.А. Михайлець, Т.Б. Скоробогач. Про одновимірні фредгольмові крайові задачі з параметром у просторах Соболева-Слободецького</i>	35
<i>Є.М. Окунев. Оптимізація стратегії для настільної гри на основі теорії імовірності</i>	37
<i>Р.Ю. Осауленко. Аналог логарифмічної (u,v)-похідної</i>	39
<i>І.М. Савич, А.В. Юрікова. Наближення кількості страхових позовів від'ємним біноміальним розподілом</i>	40
<i>І.О. Середенко. Асимптотичні властивості оцінок параметрів нелінійної регресії з лінійним випадковим шумом</i>	41
<i>І.В. Силенко. Рівновага Неша в несиметричній моделі гри видобутку ресурсів</i>	43
<i>Н.О. Соболев. Антогоністичні ігри з можливістю випадкового відхилення від оптимальної стратегії</i>	44
<i>В.В. Стаматієва. Застосування точкових процесів в узагальненій задачі про дні народження</i>	45
<i>М.В. Столяр. Граничні теореми в узагальненій задачі збирача купонів</i>	47
<i>О.В. Циганок, В.А. Михайлець. Про тауберові умови збіжності тригонометричних рядів Фур'є</i>	49
<i>Д.А. Шиманська. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного виродженого параболического рівняння</i>	51
<i>Р.А. Шурубур. Вейвлетне перетворення Ельзакі</i>	53

<i>В.К. Юськович.</i> Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь у багатовимірному просторі	55
<i>К.С. Яремко, І.В. Орловський.</i> Консистентність і оцінка мінімального контрасту . . .	56
Секція 2. Метричної теорії чисел, геометрії, фрактального аналізу	58
<i>С.Г. Аннагельдієва, О.Б. Панасенко.</i> Фрактальні функції, аргумент і значення яких мають однакове зображення	59
<i>Н.А. Біловицька, С.П. Ратушняк.</i> 2^∞ -зображення дійсних чисел одиничного відрізка та його застосування	60
<i>О.О. Васьковська, С.П. Ратушняк.</i> Зображення чисел рядами Люрота	61
<i>М.С. Головій, І.М. Лисенко.</i> Нега-двійкова система числення і її застосування	62
<i>Д.М. Карвацький.</i> Методи дослідження тополого-метричних та фрактальних властивостей множин неповних сум збіжних додатних рядів	63
<i>Р.В. Кривошия.</i> Про міру Лебега однієї множини побудованої в термінах Q_2^* -представлення	64
<i>І.М. Лисенко, Ю.П. Маслова.</i> G_2 -зображення чисел і його застосування	65
<i>О.П. Макачук, К.С. Сальник.</i> Про один розподіл представлений двійковим дробом .	66
<i>І.О. Манич.</i> Побудова ГПВЧ на основі фракталів	67
<i>О.О. Нікорак, С.П. Ратушняк.</i> Дробі Данжуа і медіантне зображення чисел	69
<i>Н.С. Остролицька, М.В. Працьовитий.</i> Геометрія узагальнених двійкових рядів . . .	70
<i>В.Г. Парипса, М.В. Працьовитий.</i> Двійкова система числення з надлишковим алфавітом та її застосування	71
<i>М.В. Працьовитий, С.П. Ратушняк.</i> Один клас фрактальних функцій, означених в термінах Q_2^* -зображення чисел відрізка $[0; 1]$	72
<i>І.І. Продан, С.П. Ратушняк.</i> Ознака раціональності числа за його Q_2 -зображенням . .	73
<i>М.М. Редька, М.В. Працьовитий.</i> Група неперервних перетворень одиничного відрізка, які зберігають хвости двійкового зображення чисел	74
<i>Л.М. Свінтуховська, І.М. Лисенко.</i> Функції і непервні бієкції, які зберігають хвости десятичного зображення чисел	75
<i>Д.Ю. Скакун.</i> Про обрахунок моментів випадкової величини представленої трійковим дробом	76
<i>Д.М. Таннік, М.В. Працьовитий.</i> Рівняння та системи рівнянь, пов'язані з інверсором цифр у різних системах зображення чисел	77
<i>А.І. Трачук, С.П. Ратушняк.</i> Трикутний Килим Серпінського, означений в термінах Q_2 -зображення чисел відрізка $[0; 1]$	78
<i>М.Є. Уманець, М.В. Працьовитий.</i> Ланцюгові A_2 -дроби, проблема раціональності числа	79
<i>Д.С. Шпитюк, М.В. Працьовитий.</i> Арифметичні суми числових множини	80
Секція 3. Алгебри, дискретної математики, теорії алгоритмів, інформатики	81
<i>Y.Y. Chapovskyi, D.I. Efimov.</i> On centralizers of polynomial derivations	82
<i>O.V. Grytsenko.</i> Codes on permutation groups	83
<i>A. Hak, V. Haponenko, S. Kozerenko.</i> Eccentric digraphs of unique point eccentric graphs .	84
<i>A.O. Ivaniuk.</i> Geometric properties of generated adversarial examples	86
<i>G. Solomanchuk.</i> Risk modelling approaches	87
<i>S.V. Stepaniuk.</i> Secret sharing schemes analysis	88

<i>S.V. Tyshchenko.</i> Option pricing in subdiffusive Bachelier models using Monte-Carlo simulations	89
<i>Р.В. Коваленко.</i> Систематизація та класифікації на основі метричного підходу	90
<i>В.А. Ольшевська.</i> Складність алгоритму зображення силовських 2-підгруп симетричних груп кореневими деревами	91
<i>М.С. Ольшевський.</i> Алгоритм серединного спуску для пошуку діаметра групи	92

Секція 4. Методики навчання та історії математики 94

<i>О.О. Врубльовська.</i> Порівняння результатів обчислення $\sin 1^\circ$ за допомогою методу аль-Каші та сучасних технологій	95
<i>А.В. Дворний.</i> Про ітераційні методи розв'язку рівнянь в Персії та Китаї	97
<i>О.К. Заколенко, О.О. Дем'яненко.</i> До питання підвищення математичної культури у студентів фізико-математичного факультету	98
<i>М.В. Каплаушенко, Т.В. Маловічко.</i> Сім'я Сімеона-Дені Пуассона	100
<i>А.О. Карлова.</i> Гійом де Лопіталь	102
<i>О.О. Костенко.</i> Дискусія П'єра де Ферма та Рене Декарта	104
<i>Д.Р. Лисенко, Н.В. Круглова, О.О. Диховичний.</i> Аналіз тестів типу “вбудовані відповіді” за допомогою моделей IRT	106
<i>С.Д. Марковська.</i> Бенуа Мандельброт	108
<i>І.А. Наконечний.</i> Едмунд Ландау	110
<i>С.О. Оласюк.</i> Про знаходження розв'язку рівняння аль-Каші за допомогою формули Кардано та деяких ітераційних методів	112
<i>А.О. Середенко, Л.А. Репета.</i> Геометричне тлумачення формули інтегрування частинами	114
<i>Ю.І. Скорейко.</i> Історичний огляд роботи Спора Нікейського	115
<i>Чжао Кесінь.</i> Розвиток методу <i>regula falsi</i> у Китаї	117

Секція 1.

Математичного аналізу, теорії ймовірностей,
диференціальних рівнянь

Section 1.

Mathematical analysis, probability theory,
differential equations

VOLTERRA SANDWICHED VOLATILITY MODELS

G. DI NUNNO, Y. MISHURA, A. YURCHENKO-TYTARENKO

We introduce a new financial market model with stochastic volatility given by an SDE of the form

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(s, Y_s) ds + Z_t, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

where Z is an arbitrary Gaussian Volterra process with λ -Hölder continuous paths, $\lambda \in (0, 1)$, and b is an unbounded function of a certain shape which ensures the solution to be “sandwiched” between two Hölder continuous functions $\varphi < \psi$, i.e. $\varphi(t) < Y_t < \psi(t)$ a.s., $t \in [0, T]$ (see [1] for more details).

We discuss existence and uniqueness of the solution to (1) as well as some properties of the latter including finiteness of inverse moments. Our research also covers the structure of local martingale measures on this market as well as associated numerical schemes such as a backward Euler numerical scheme for (1).

REFERENCES

- [1] Di Nunno, G., Mishura, Y., Yurchenko-Tytarenko, A. *Sandwiched SDEs with unbounded drift driven by Hölder noises*// ArXiv: 2012.11465 — 2021.
- [2] Mishura, Y., Yurchenko-Tytarenko, A. *Approximating Expected Value of an Option with Non-Lipschitz Payoff in Fractional Heston-Type Model*// International Journal of Theoretical and Applied Finance — 2020. — V. 23, No. 5.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF OSLO, OSLO, NORWAY, DEPARTMENT OF BUSINESS AND MANAGEMENT SCIENCE, NHH NORWEGIAN SCHOOL OF ECONOMICS, BERGEN, NORWAY

Email address: `giulian@math.uio.no`

DEPARTMENT OF PROBABILITY, STATISTICS AND ACTUARIAL MATHEMATICS, TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE

Email address: `myus@univ.kiev.ua`

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF OSLO, OSLO, NORWAY

Email address: `antony@math.uio.no`

PROPERTIES OF AMERICAN-TYPE OPTIONS UNDER A MARKOVIAN REGIME SWITCHING MODEL

M. DIMITROV, L. JIN, Y. NI

In this paper, a model under which the underlying asset follows a Markov regime-switching process is considered. The underlying economy is partially observable in a form of a signal stochastically related to the actual state of the economy. The American option pricing problem is formulated using a Partially Observable Markov Decision Process (POMDP). We review our previous research on the analytical structural properties of American option prices and optimal strategies. We present also results of numerical experimental studies under some deviations from our sufficient conditions.

DIVISION OF MATHEMATICS AND PHYSICS, MÄLARDALEN UNIVERSITY, VÄSTERÅS, SWEDEN

Email address: marko.dimitrov@mdh.se

DEPARTMENT OF INFORMATICS, UNIVERSITY OF ELECTRO-COMMUNICATIONS, TOKYO, JAPAN

Email address: jinlu@inf.uec.ac.jp

DIVISION OF MATHEMATICS AND PHYSICS, MÄLARDALEN UNIVERSITY, VÄSTERÅS, SWEDEN

Email address: ying.ni@mdh.se

STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR FUNCTIONALS OF RANDOM FIELDS

I. DONHAUZER

Classical probabilistic results that originally were obtained for sequences of random variables require extensions to stochastic processes due to new types of observations collected as functional curves, raster images, or spatial data. The talk discusses the Strong Law of Large Numbers (SLLN) for integral functionals of random fields with unboundedly increasing covariances. The case of functional data and increasing domain asymptotics is considered. Conditions on covariance functions such that SLLN holds true will be presented. The considered scenarios include non-stationary random fields. Examples of applications to weak and long-range dependent random fields will be given.

The talk is based on joint results [1] with A.Olenko (La Trobe university, Australia) and A.Volodin (University of Regina, Canada).

REFERENCES

- [1] Donhauzer I., Olenko A., Volodin A. *Strong Law of Large Numbers for Functionals of Random Fields with Unboundedly Increasing* // Communications in Statistics - Theory and Methods.

LA TROBE UNIVERSITY, AUSTRALIA

Email address: i.donhauzer@latrobe.edu.au

UNDERLYING GEOMETRY IN RESERVOIR COMPUTING

V.K. ROVNIK

Reservoir computing is a novel paradigm in artificial recurrent neural network (RNN) training. It overcomes the limitations of gradient-based RNN training methods by separating recurrent layer creation and readout training.

In this work, we study a network of coupled oscillators as a reservoir given by (1). The excitability of such oscillators mimics the threshold firing of biological neurons.

$$\dot{\theta}_i = \omega + I(t) - r \sin(\theta_i) + \sum_{j=1}^N \frac{\mu_{ij}}{N} \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (1)$$

Here θ is the phase of an individual oscillator, N is the number of oscillators in the network, m is the coupling strength between oscillators, ω is the eigenfrequency, $I(t)$ is the external input, r is the excitability threshold.

Inspired by the model's biological plausibility, we construct a reservoir consisting of coupled oscillators as computing elements and suggest a readout mechanism that captures the system's synchronization behavior and can perform a computational task, namely, image recognition.

REFERENCES

- [1] Mantas Lukoševičius; Herbert Jaeger (2009): Reservoir computing approaches to recurrent neural network training. In *Computer Science Review* 3 (3), pp. 127–149.
- [2] Hoppensteadt, Frank C.; Izhikevich, Eugene M. (1999): Oscillatory Neurocomputers with Dynamic Connectivity. In *Phys. Rev. Lett.* 82 (14), pp. 2983–2986.
- [3] Strogatz, Steven H. (1994): *Nonlinear dynamics and Chaos. With applications in physics, biology, chemistry, and engineering* / Steven H. Strogatz. Reading, Mass., Wokingham: Addison-Wesley Pub (Studies in nonlinearity).
- [4] Itoh, Makoto; Chua, Leon (2004): Star Cellular Neural Networks for Associative and Dynamic Memories. In *I. J. Bifurcation and Chaos* 14, pp. 1725–1772.

NATIONAL UNIVERSITY OF “KYIV-MOHYLA ACADEMY”, KYIV, UKRAINE
Email address: veronika.rovnik@ukma.edu.ua

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИХОВАНИХ МАРКОВСЬКИХ МОДЕЛЕЙ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ РОЗПІЗНАВАННЯ АКОРДІВ

Г.С. АНДРУЩАК

Задачу розпізнавання акордів можна розділити на 3 складові:

- (1) розділення аудіофайла на сегменти, кожен з яких містить один акорд;
- (2) створення нотних векторів за допомогою перетворення Фур'є;
- (3) знаходження ймовірностей переходів між акордами.

Пошук моменту початку і кінця акорду є нетривіальною задачею. Пропонуємо 3 способи її розв'язання:

- пошук квадратів амплітуд, які задовольняють певні умови;
- пошук локальних екстремумів у декілька ітерацій;
- комбінований метод;

Отримавши результати роботи одного з цих алгоритмів, ми переходимо до наступного етапу, а саме створення нотних векторів.

Застосуємо такий підхід до вирішення цієї задачі:

- перетворимо функцію амплітуди від часу на функцію амплітуди від частоти, що дозволить сформувати нотний вектор, оскільки кожній ноті відповідає певна частота у герцах (hz);
- за допомогою нотного вектора, або як його ще називають, хрома вектора [1] ми можемо ідентифікувати акорд.

На наступному етапі ідея полягає в тому, щоб представити зв'язок між спостережуваними характеристиками векторів та типами акордів (станами), використовуючи ймовірнісну структуру. Кожен стан оснащений функцією ймовірності, яка виражає ймовірність того, що певний тип акордів виводить певний вектор. В результаті ми отримуємо двошаровий процес, що складається з прихованого шару шару, що спостерігається. Прихований шар створює послідовність станів, яку не можна спостерігати («прихована»), але генерує послідовність спостережень на основі функцій ймовірностей, залежних від стану [1].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Meinard Müller *Fundamentals of music processing* // Springer International Publishing Switzerland, 2015, ISBN 978-3-319-21945-5.

РІВНОМІРНИЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМИ МАРЦИНКЕВИЧА–ЗІГМУНДА

В.Ю. БОГДАНСЬКИЙ

Нехай $1 \leq p < 2$; $\{X_j\}$ – незалежні і однаково розподілені випадкові величини з $E[X_j] = 0$, $E|X_j|^p < \infty$; $X(B) = \sum_{n=1}^{\infty} |B \cap C_n| \cdot X_n$ – міра, задана на борелевських підмножинах R , де $C_n = [n-1, n]$, $|\cdot|$ – міра Лебега; T – деяка сукупність борелевських підмножин $[0, 1]$, на яку накладено певні умови. У статті [1] доведено, що якщо $p = 1$ і T задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{A \in T} |A(\varepsilon)| = 0, \quad (1)$$

де $A(\varepsilon)$ – ε -окіл границі множини A , то виконується рівномірний закон великих чисел:

$$\frac{\sup_{A \in T} |X(nA)|}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Постає питання: якщо $1 < p < 2$, якою має бути достатня умова на T , щоб виконувався рівномірний аналог теореми Марцинкевича-Зігмунда?

$$\frac{\sup_{A \in T} |X(nA)|}{n^{1/p}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.} \quad (2)$$

Твердження 1. *Якщо існує константа q , така, що*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall A \in T : |A(\varepsilon)| < q\varepsilon,$$

то (2) виконується.

Твердження 2. *Умова*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{A \in T} \frac{|A(\varepsilon)|}{\varepsilon^{1-1/p}} < +\infty \quad (3)$$

не є достатньою для (2), тобто існує така T і така послідовність $\{X_j\}$, що (3) виконується, а (2) не виконується.

Умова

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{A \in T} \frac{|A(\varepsilon)|}{\varepsilon^{1-1/p}} = 0 \quad (4)$$

є аналогом (1) при $1 < p < 2$ і є більш обмежливою, ніж (3). Чи є вона достатньою для (2)?

Нехай Y_m^k , $k \leq m$ – випадкова величина, яка визначається як максимум по всіх наборах $\{i_0, i_1, \dots, i_k\}$, $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < i_k = m$, числа $\sum_{l=1}^k |S_{i_l} - S_{i_{l-1}}|$, де $S_i = X_1 + \dots + X_i$. Наприклад, $Y_m^1 = |S_m|$, $Y_m^2 = \max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} (|S_i| + |S_m - S_i|)$, $Y_m^m = \sum_{i=1}^m |X_i|$.

Твердження 3. Якщо існують $\{X_j\}$, функція $m = m(k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $m(k) \geq k$, і функція $\varphi = \varphi(k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\varphi \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, такі, що

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{(Y_m^k)^p \varphi(k)}{m(k) k^{p-1}} > 0 \text{ м.н.,}$$

то умова (4) не є достатньою, тобто існує таке T , що (4) виконується, а (2) не виконується.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Bass R.F., Pyke R. *Strong Law of Large Numbers for Partial-Sum Processes Indexed by Sets* // Ann. Probab. — 1984. — Т. 12, № 1. — С. 268–271.

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ, КПІ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: myemailaddress4567@gmail.com

ЗБУРЕННЯ РОТАЦІЙНО-ІНВАРІАНТНОГО α -СТІЙКОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ОПЕРАТОРОМ ПСЕВДОГРАДІЄНТА

М.В. БОЙКО

Ротаційно інваріантним α -стійким випадковим процесом в d -вимірному евклідовому просторі R^d зветься однорідний процес Маркова $(x(t))_{t \geq 0}$, що задається своїм твірним оператором $\mathbf{A}$, символом якого є функція $(-c|\varrho|^\alpha)_{\varrho \in R^d}$ з фіксованими сталими $c > 0$ та $\alpha \in (0, 2]$. Такий оператор, очевидно є оператором диференціювання чи псевдодиференціальним оператором порядку α . Псевдоградієнтом називатимемо оператор $\mathbf{B}$, який задається символом $(i|\varrho|^{\beta-1}\varrho)_{\varrho \in R^d}$ і вважатимемо, що $0 < \beta < \alpha$. Під збуренням випадкового процесу $(x(t))_{t \geq 0}$ маємо на увазі побудову випадкового процесу Маркова (якщо це можливо) з твірним оператором $\mathbf{A} + (a(\cdot), \mathbf{B})$, де $(a(x))_{x \in R^d}$ деяка R^d -значна функція, а позначення $(\cdot, \cdot)$ означає скалярний добуток в R^d . В цій доповіді розглядатимуться умови на порядок β оператора $\mathbf{B}$ та на функцію $(a(x))_{x \in R^d}$, за яких таке збурення може бути побудоване.

Щільністю ймовірності переходу випадкового процесу $(x(t))_{t \geq 0}$ є функція

$$g(t, x, y) = (2\pi)^{-d} \int_{R^d} \exp\{i(y - x, \varrho) - ct|\varrho|^\alpha\} d\varrho, \quad t > 0, x \in R^d, y \in R^d.$$

Ця функція є фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \mathbf{A}u(t, \cdot)(x)$.

З випадковим процесом $x(t)$ пов'язана напівгрупа операторів $(T_t)_{t > 0}$ заданих на множині $C_b(R^d)$ обмежених неперервних на R^d скалярних функцій рівністю

$$(T_t \varphi)(x) = \int_{R^d} g(t, x, y) \varphi(y) dy, \quad \varphi \in C_b(R^d), \quad t > 0, \quad x \in R^d.$$

Збурена напівгрупа операторів на $C_b(R^d)$ задається подібною рівністю, в якій замість функції g слід покласти функцію $(G(t, x, y))_{t > 0, x \in R^d, y \in R^d}$, яка є розв'язком наступної пари рівнянь (рівняння збурення):

$$G(t, x, y) = g(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_{R^d} g(t - \tau, x, z) (a(z), \mathbf{B}G(\tau, \cdot, y)(z)) dz;$$

$$G(t, x, y) = g(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_{R^d} G(t - \tau, x, z) (a(z), \mathbf{B}g(\tau, \cdot, y)(z)) dz.$$

Розглядаючи дві ситуації: перша, коли функція a обмежена, а друга, коли $a \in L_p(R^d)$ з деяким $p > 1$, спільний розв'язок цих рівнянь шукаємо методом послідовних наближень. Тобто функція G може бути знайдена, як сума ряду $G(t, x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t, x, y)$. Встановлено, що члени цього ряду задовольняють оцінки: якщо $a \in L_p(R^d)$ з $p > \frac{d+\alpha}{\alpha-\beta}$ при довільному $T > 0$ (тут $\theta_+ = \max(\theta, 0)$)

$$|G_k(t, x, y)| \leq R_k \frac{t^{k(1-\frac{d+\alpha}{\alpha p})-(k-1)_+\frac{\beta}{\alpha}}}{\left(t^{\frac{1}{\alpha}} + |y-x|\right)^{d+\beta}}, \quad t \in (0, T], x \in R^d, y \in R^d;$$

або ж якщо a обмежена

$$|G_k(t, x, y)| \leq R_k \frac{t^{k-(k-1)\frac{\beta}{\alpha}}}{\left(t^{\frac{1}{\alpha}} + |y-x|\right)^{d+\beta}}, \quad t \in (0, T], x \in R^d, y \in R^d.$$

В кожному випадку числові послідовності $\{R_k : k \geq 0\}$ задовольняють співвідношення $\lim_{k \rightarrow \infty} R_{k+1}/R_k = 0$.

Звідси робимо, висновок про добру збіжність ряду, що визначає функцію G . Крім того, в розглянутих випадках для кожного $T > 0$ справджується оцінка

$$|G(t, x, y)| \leq C_T \frac{t^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\left(t^{\frac{1}{\alpha}} + |y-x|\right)^{d+\beta}}, \quad t \in (0, T], x \in R^d, y \in R^d,$$

в якій $C_T > 0$ деяка стала, що залежить від T .

Основним результатом даної доповіді є наступне твердження.

Теорема. Нехай $\mathbf{A}$ — твірний оператор ротаційно-інваріантного α -стійкого випадкового процесу ($\alpha \in (1, 2)$), а $\mathbf{B}$ — псевдоградієнт порядку β ($0 < \beta < \alpha$). Якщо R^d -значна функція $(a(x))_{x \in R^d}$ обмежена або належить до $L_p(R^d)$ з $p > \frac{d+\alpha}{\alpha-\beta}$, то існує збурена напівгрупа операторів з інфінітензимальним оператором $\mathbf{A} + (a(\cdot), \mathbf{B})$. При $\beta = 1$ ця напівгрупа визначає деякий випадковий процес Маркова. В інших випадках вона не залишає інваріантним конус невід'ємних функцій і, тому, визначає тільки псевдопроцес.

ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНІКА, ІВАНО-ФРАНКІВСЬК, УКРАЇНА

Email address: boikocasper@gmail.com

СТОХАСТИЧНІ ІГРИ НА ГРАФАХ

В.В. БУТОВСЬКИЙ

Розглянемо гру, процес якої продемонстровано за допомогою графу. Нехай дано граф $G = (V, E)$, що складається з множини вершин V та множини ребер E .

Для кожної вершини $i \in E$ буде існувати X_i – певний метричний простір зі зліченим базисом. А метричний простір нашої гри позначимо за

$$X := \times X_i \quad (1)$$

Гравці розташовані на вершинах графу. Ребра — це зв'язки між гравцями, кооперація. Гравці поділені на дві коаліції K_1 та K_2 . Кожна коаліція може складатись з будь-якої кількості гравців. Виграш кожної коаліції означає програш іншої, тобто розглядаємо гру з нульовою сумою.

Нехай задано деяке значення ξ на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) зі значеннями на X , що буде описувати стан системи для деякої фіксованої часової величини t . $\xi_t (t = 0, 1, 2, \dots)$ – наша початкова точка, котра описує поведінку $|V|$ гравців, що взаємодіють між собою.

Кожен гравець має свою множину стратегій гри.

Позначимо за π_i стратегію для K_1 коаліції, тоді вектор стратегій гравців K_1 буде $\pi_i = \times \pi_i$ і. $i \in V_1$;

$i\pi_i = \pi_i^0, \dots, \pi_i^t$ – послідовність ймовірностей переходів;

Аналогічно для K_2 коаліції, де γ – стратегія для K_2 коаліції.

Мета у роботі – детально розглянути гру з 2-ма коаліціями та нульовою сумою з формалізацією. Після знаходження залежності станів, функції нагороди, визначити, яким чином буде пов'язаний виграш у кожному стані системи кожної з коаліцій. Побудувати модель гри. За можливості, сконструювати програмне забезпечення для калькуляції при будь-якій кількості гравців.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] R. K. Chorney, Hans Dadunay, P. S. Knopov. *Stochastic games for distributed players on graphs* // Math Meth Oper Res – 2004.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», Київ, Україна
Email address: b.butovskyi@ukma.edu.ua

ПРО НАЙВІДОМІШІ ДОСЯГНЕННЯ ФРУЛЛАНІ ТА ПРИКЛАД ВИРІШЕННЯ ОДНОГО З ЙОГО ІНТЕГРАЛІВ

Є.В. ГАРМАШ



Джуліано Фруллані народився в Ліворно 23.02.1795. Помер 25.05.1834 р.

Спочатку вивчав літературу в Пізанському університеті з 1808 по 1820 роки, але незабаром перейшов до математики під керівництвом професора П'єтро Паоло, а у віці 16 років він отримав ступінь бакалавра факультету природничих наук. У віці 19 років він вступив на посаду професора вищої математики. У 1825 році він увійшов до складу установчої ради директорів інженерного корпусу.

Деякі роботи в області математики:

У роботі "Sopra la integrazione della Formula. Memoria" (італ.) провів повний аналіз функції

$$\gamma(x) = \int \frac{dx}{(1 + 2qx \cos \varphi + q^2 x^2)^{n-1}}, \quad (1)$$

яку він також використовував при досліджуванні деяких рядів.

Знайшов рекурентну формулу з межами від 0 до ∞ . У разі цілого n функція (1) може бути необмежено інтегрована з процесом обчислення, який зводить її до залежності від інтеграла, який також залежатиме від аналогічної формули порядку $n-3$, і таким чином поступово спадаючи, досягне найпростішої формули цього виду, яка може бути повністю інтегрована. В роботі "Sopra gli integrali Definiti. Memoria" (італ.) висвітлив деякі міркування стосовно трансцендентних інтегралів аналогічних до інтеграла

$$\int \frac{\sin \varphi d\varphi}{\varphi}.$$

У роботі "Sopra L'uso di alcune serie. Memoria." представляє деякі інтеграли за допомогою ряду.

Наприклад такі, як

$$\int \frac{du}{a - \log u}; \quad \int \frac{a \cos \varphi - \varphi \sin \varphi d\varphi}{a^2 + \varphi^2}; \quad \int \frac{\varphi \cos \varphi - a \sin \varphi d\varphi}{a^2 + \varphi^2}.$$

Розглянемо інтеграл, який називають інтегралом Фрулані.

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x} dx$$

Зауважимо, що $I(a, a) = 0$. Диференціюємо по параметру a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a} &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial a} \operatorname{arctg}(ax) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{x}{1 + a^2 x^2} \right) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + a^2 x^2} dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(ax) \Big|_0^{\infty} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2a} \end{aligned}$$

Тепер проінтегруємо по параметру a :

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2} \ln(a) + C(b),$$

де $C(b)$ - це довільна функція (від b). Записуючи $C(b)$ в іншому вигляді як $\frac{\pi}{2} \ln(C(b))$ (ця константа зручніше), ми маємо:

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2} \ln(a) + \frac{\pi}{2} \ln(C(b)) = \frac{\pi}{2} \ln(aC(b))$$

Оскільки $I(a, a) = 0$, ми маємо $aC(a) = 1 \Rightarrow C(a) = \frac{1}{a}$. Аналогічно $C(b) = \frac{1}{b}$, і тоді

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

Опрацювання біографії та основних робіт, результати яких планую застосувати у майбутньому для знаходження невластних інтегралів, настановлює на розуміння важливості внеску праць Фрулані.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Frullani G.G. *Biografia*. — Pisa: 1830. — 19 с.
- [2] Фіхтенгольц Г.М. *Курс диференціального й інтегрального числення. Том 2*. — Москва: ФІЗМАТЛІТ, 2001. — 810 с.
- [3] Frullani G.G. *Sopra L'uso di alcune serie. Memoria..* — Pisa: 1830. — 49 с.
- [4] Frullani G.G. *Sopra gli integrali Definiti. Memoria.* — Pisa: 1829. — 20 с.
- [5] Frullani G.G. *Sopra la integrazione della Formula. Memoria.* — Pisa: 1818. — 17 с.

КЕВЕЛЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЯК УЗАГАЛЬНЕННЯ ВЕЙВЛЕТНОГО

К.Ю. ГЛУШАК

Кевелетне перетворення є продовженням концепції вейвлетів. Також воно стає популярним в обробці зображень та наукових обчисленнях. Кевелетне перетворення - це багатомасштабне напрямлене перетворення, яке забезпечує майже оптимальне неадаптивне рідке представлення об'єктів з ребрами.

За останні роки був досягнут значний прогрес у розвитку спрямованих вейвлетів. Складне перетворення вейвлетів є одним із способів поліпшити спрямованість вибіркості. Однак складне перетворення вейвлетів минулому не застосовувалось широко, оскільки складно розробити складні вейвлети з ідеальними реконструюючими властивостями та хорошими характеристиками фільтра.

Для аналізу особливостей локальної лінії або кривої природною ідеєю є розглянути розділ зображення, а потім застосувати перетворення риджлета до отриманих субмалюнків. Цей блок перетворення на основі ригелів, який отримав назву кевелетного перетворення, був вперше запропонований Кандесом та Доного у 2000 р.

З математичної точки зору, сильна сторона підходу кевелетної форми полягає в її здатності формулювати сильні теореми в наближенні та теорії операторів. Дискретне перетворення кевелетів дуже ефективно представляє кривоподібні краї.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] E. Candès and D. Donoho, "Curvelets—A surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges," in *Curves and Surface Fitting: Saint-Malo*.
- [2] E. Candès, "Harmonic analysis of neural networks," *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 6, no. 2, pp. 197–218, 1999.
- [3] E. Candès and D. Donoho, "Ridgelets: A key to higher-dimensional intermittency?," *Philos. Trans. R. Soc. London A, Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 357, no. 1760, pp. 2495–2509, 1999.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Email address: glushachokk@gmail.com

МОДЕЛЮВАННЯ ТРАЄКТОРІЙ ВІНЕРІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

О.М. ДЕСНИЦЬКИЙ, О.А. ТИМОШЕНКО

Поняття випадкового процесу є одним з найважливіших не тільки в сучасній теорії ймовірностей, але і в природничій сфері, інженерній справі, економіці, фінансах, теорії керування, теорії зв'язку й інших областях. У сучасному світі при дослідженні складних випадкових процесів, поряд з аналітичними методами широко застосовується комп'ютерне моделювання. Задачам моделювання випадкових процесів присвячено багато досліджень (див. наприклад [1],[2]), оскільки такі задачі дозволяють описувати динаміку розвитку досліджуваного випадкового явища в часі.

Дана робота присвячена моделюванню траєкторій вінерівського процесу за допомогою мови програмування Python. Відмітимо, що сам по собі вінерівський процес, наприклад, для моделювання динаміки фінансових показників (цін акцій, облігацій, значень індексів тощо), використовується рідко. Однак на його основі будуються майже всі випадкові процеси, що використовуються в сучасній фінансовій математиці. Тому візуалізація поведінки даного процесу є важливою для розуміння його властивостей.

Розглянемо випадкове блукання:

$$X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$$

таке, що $P\{\xi_k = 1\} = P\{\xi_k = -1\} = \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N}$. Тоді неперервний і нормалізований процес буде мати вигляд:

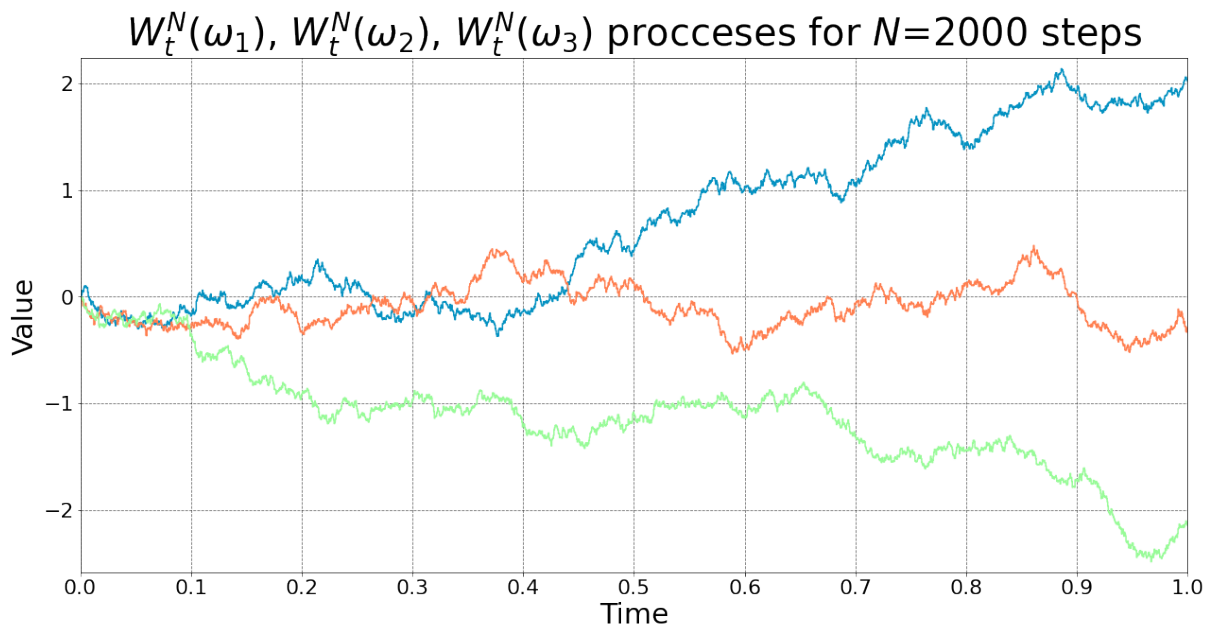
$$W_t^N = \frac{X_{Nt}}{\sqrt{N}}, \quad t \in [0, 1], \quad N \in \mathbb{N}$$

t - неперервний крок, N - дискретний крок. Тоді:

$$W_t^N \rightarrow W_t, \quad \text{при } N \rightarrow \infty$$

де W_t - броунівський рух.

Звідси, маючи спосіб генерації броунівського руху, ми можемо запрограмувати цей алгоритм для моделювання та візуалізацій, (див рис.1).



ЛІТЕРАТУРА

- [1] Peter E. Kloeden, Eckhard Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations* , Springer Verlag, 1995.
- [2] Thomas Mikosch. *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View, Advanced series on statistical science applied probability* , World Scientific Publ., 1998

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

НОРМАЛЬНІ МАТРИЦІ ЯКОБІ

М.Є. ДУДКІН, О.Ю. ДЮЖЕНКОВА, О.М. ДУДКІН

Розглядаються нескінченні три-діагональні несиметричні матриці:

$$N = \begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} & 0 & 0 & \dots \\ z_{10} & z_{11} & z_{12} & 0 & \dots \\ 0 & z_{21} & z_{22} & z_{23} & \dots \\ 0 & 0 & z_{32} & z_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де $z_{ij} \in \mathbb{C}$, (і звичайно $z_{ij} = 0$, якщо $|i - j| > 1$) $i, j = \mathbb{N}_0$. Такі матриці також мають назву – матриці Якобі.

В роботі [1] була висловлена гіпотеза про те, що якщо матриця виду (1) є нормальною, тобто комутує (є переставною) зі своєю спряженою, то вона має просту внутрішню структуру (простий опис). Цей факт підтверджено у такій теоремі.

Теорема 1. *Якщо три-діагональна матриця Якобі N (1) комутує зі своєю спряженою на фінітних (скінчених) векторах, то вона має вигляд $N = aS + bI$, де S – симетрична матриця Якобі, I – одинична матриця і $a, b \in \mathbb{C}$ – деякі числа.*

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Berezansky Yu.M. *The Integration of semi-infinite oda chain by means of inverse spectral problem.* — Київ: Ін-т математики, 1984. (Препр. / НАН України. Ін-т математики; 84.79) — 41 р.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: dudkin@imath.kiev.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: oduzen@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: linkalex469@gmail.com

ПРО ВИПАДКОВІ ІГРИ, КОЛИ ОДИН З ГРАВЦІВ ВОЛОДІЄ БІЛЬШОЮ ІНФОРМАЦІЄЮ НІЖ ІНШИЙ

О.О. КОВАЛЬЧУК

Розглянемо гру, яка подібна до карткової гри покер. У дану гру грають два гравці. Дано 52 гральні карти. Найбільшу цінність має Туз (цінність 13), найменшу – Двійка (цінність 1).

Правила гри наступні. На початку гри формується банк гри: кожен з гравців обов'язково здійснює початкову ставку по 1 фішці і дістає з перетасованої колоди по одній карті. Один з гравців не приховує цінність своєї карти і показує її своєму супротивнику, а інший триматиме свою карту у секреті.

Роблячи хід, кожен з гравців може або підвищувати ставку, при цьому додавати до банку 1 фішку, або пасувати. Якщо один гравець пасує, інший забирає увесь сформований банк. Якщо ж обоє грають, виграє той, у кого більше карта. У випадку коли карти однакові, банк ділиться навпіл.

Введемо позначення, щоб розрізняти гравців. Гравця, що знає і свою, і супротивника карту, назвемо Зрячий, а гравця, що знає лише свою карту – Сліпий. Також нехай k — цінність карти Сліпого (це значення знають обидва гравці). Розглянемо дві гри:

- (а) першим хід робить Сліпий;
- (б) першим хід робить Зрячий.

Метою є знаходження оптимальних стратегій гравців, при яких максимізується математичне сподівання виграшу, за умови правильної гри супротивника.

В обох випадках гри нульовий хід належить природі: випадкова величина, у якій гравці витягують карти з перетасованої колоди. Природа має множину ходів p, r, q :

- $p = \frac{4(k-1)}{51}$ — ймовірність того, що карта Сліпого більш цінна за карту Зрячого при умові, що у Сліпого карта цінністю k ;
- $r = \frac{3}{51}$ — ймовірність того, що карта Сліпого і карта Зрячого за цінністю однакові;
- $q = \frac{4(13-k)}{51}$ — ймовірність того, що карта Сліпого менш цінна за карту Зрячого при умові, що у Сліпого карта цінністю k ;

У випадку (а) стратегія Зрячого очевидна. Зрячий знає свою карту і карту Сліпого, і робить хід другим. Для максимізації свого виграшу він

не пасуватиме, якщо у нього карта вище чи однакова з супротивником, і навпаки, пасуватиме, якщо його карта менш цінна. Дана стратегія єдина оптимальна стратегія для Зрячого.

Тепер розглянемо стратегії Сліпого. Він робить хід першим і може або підвищити ставку, або спасувати. Якщо Сліпий підвищує ставку, то математичне очікування виграшу дорівнює: $p - 2q = \frac{12k-108}{51}$. Якщо Сліпий пасує, то його виграш дорівнює (-1) . Оптимальна стратегія Сліпого – підвищувати тоді, коли $\frac{12k-108}{51} > -1$, тобто при $k = 5, 6, 7, \dots, 13$.

У випадку (б), на відміну від випадку (а), оптимальна стратегія Зрячого – змішана стратегія, оскільки Зрячий може блефувати. Нехай у випадку, коли у Зрячого карта менш цінна, ніж у Сліпого, він підвищуватиме ставку з ймовірністю α , тоді він може виграти, якщо Сліпий спасує на наступному кроці.

Припустимо, що стратегія Сліпого теж буде змішаною, оскільки Зрячий діє непербачувано. Нехай сліпий підвищуватиме ставку з ймовірністю β і пасуватиме з ймовірністю $(1 - \beta)$, якщо Зрячий підвищив ставку.

Підрахувавши відповідні математичні очікування виграшів, знайшли оптимальні стратегії:

- (1) якщо $1 \leq k \leq 3$, то $\alpha = 1, \beta = 0$,

тобто якщо Сліпий отримав карту Двійка, Трійка чи Четвірка, то йому потрібно лише пасувати, а Зрячому – підвищувати ставку;

- (2) якщо $4 \leq k \leq 12$, то $\alpha = \frac{49-4k}{12(k-1)}, (1 - \alpha) = \frac{16k-61}{12(k-1)}, \beta = \frac{2}{3}, (1 - \beta) = \frac{1}{3}$,

тобто якщо у Сліпого цінність карти від 4 до 12 включно, то гравці гратимуть змішані стратегії з вказаними частотами;

- (3) якщо $k = 13$, то $\alpha = 0; (1 - \alpha) = 1; \beta = 1; (1 - \beta) = 0$

тобто якщо у Сліпого найвища за цінністю карта, йому потрібно підвищувати ставку, а Зрячому – пасувати.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Захаров А.В. *Теорія ігор у суспільних науках* // М.: НИУ-ВШЭ — 2013 — С. 1–198.
 [2] Писарук Н.Н. *Введення у теорію ігор* // Мінськ: БГУ — 2015 — С. 1–256.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
 Email address: olelchik1770@gmail.com

ІДЕЯ ЕЛЕКТРОННОГО ГОЛОСУВАННЯ

А.С. КОВТУН, О.І. КЛЕСОВ

Нехай перед початком голосування було опубліковано відкриті ключі $(n_a, k_a), (n_c, k_c)$ для А і С відповідно, а також сформовано приватні ключі $j_a, j_c : j_a \cdot k_a = 1(mod\ n_a), j_c \cdot k_c = 1(mod\ n_c)$. Нехай також у кожного голосуючого V є деякий ідентифікаційний номер t .

- (1) V робить свій вибір v .
- (2) V генерує деяке досить велике випадкове число e і маскує свій вибір
 $m = v \cdot e^{k_c}(mod\ n_c)$, утворюючи так званий бюлетень.
- (3) V підписує свій бюлетень за допомогою власного ідентифікатора і публічного ключа А:
 $S = m \cdot t^{k_a}(mod\ n_a)$
 і відправляє пару (m, S) до А.
- (4) А підписує бюлетень цього учасника $S_1 = S^{j_a}(mod\ n_a) = m^{j_a} \cdot t(mod\ n_a)$. За допомогою m А може обчислити t і таким чином, знаючи ідентифікаційний номер V, перевірити право V на участь у голосуванні.
 Тоді хоча А й відома особа V і А знає m , проте, не знаючи e , А не може обчислити v , отже вибір V А не знає.
- (5) А відправляє S_1 до V, V знімає свій підпис з отриманого бюлетня $S^* = \frac{S_1}{t(mod\ n_a)} = m^{j_a}(mod\ n_a)$. Таким чином V має S^* - свій бюлетень, але вже підписаний приватним ключем А. Оскільки j_a знає тільки А, то утворити цей підпис без участі А неможливо. Також, оскільки V зняв свій ідентифікатор t , то в подальшому С не зможе ідентифікувати особистість V.
- (6) V відправляє до С (e, m, S^*) . Всі ці дані необхідні, щоб перевірити наявність підпису А, тобто чи дійсно V має право голосувати, а також щоб розкодувати вибір v .
- (7) С перевіряє за допомогою відкритого ключа А наявність підпису А на надісланому бюлетні, тобто перевіряє рівність
 $(S^*)^{k_a} = m(mod\ n_a)$.
 Дійсно $(S^*)^{k_a} = (m^{j_a})^{k_a}(mod\ n_a) = m^{j_a \cdot k_a}(mod\ n_a) = m^1(mod\ n_a)$.
 Якщо рівність справджується, то С обчислює
 $m^{j_c}(mod\ n_c) = (v \cdot e^{k_c})^{j_a}(mod\ n_c) = v^{j_a} \cdot e^{k_c \cdot j_c}(mod\ n_c) =$
 $v^{j_c} \cdot e^1(mod\ n_c) \rightarrow$ С знає $v^{j_c}(mod\ n_c) \rightarrow v = (v^{j_c})^{k_c}(mod\ n_c)$.

Причому останнє обчислення може зробити тільки C , адже для цього необхідно мати приватний ключ j_c .

REFERENCES

- [1] Клесов О.І. *Елементарна теорія чисел та елементи криптографії* — С. 281–284.
- [2] Subariah I., Maznah K., Mazleena S., Shah R. A. A.B. *Secure E-Voting With Blind Signature*. Faculty Of Computer Science Information Technology University Technology Of Malaysia

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: Onkovtun0@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: klesov@matan.kpi.ua

МОДЕЛЮВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

І.І. ЛОВИЦЬКА

Методи моделювання випадкових процесів та полів використовуються в багатьох областях природничих та соціальних наук. Стохастичне моделювання активно розвивається, починаючи з другої половини 20-го століття. Особливе місце займають методи і алгоритми моделювання вінерівського процесу та процесів дробового броунівського руху. Численні дослідження показують, що дані спостереження у теорії масового обслуговування, дослідженнях телекомунікаційних мереж, фінансовій математиці ефективно описуються процесами, які мають властивості самоподібності та сильної залежності від минулого. Якраз одним із таких процесів є процес дробового броунівського руху. Але для моделювання реальних випадкових процесів є сенс розглядати не тільки класичний гауссовий дробовий броунівський рух, а і його узагальнення, зокрема, процеси φ -субгауссового дробового броунівського руху.

Нехай T – деяка параметрична множина ($T = [a, b]$ або $T = \mathbb{R}^+$).

Означення 1. [1] Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається *N-функцією Орлича*, якщо $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ та $\frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

Умова Q. Для N-функції φ виконується умова Q, якщо $\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = C > 0$. Можливо, що $C = +\infty$.

Означення 2. [1] Нехай φ — N-функція Орлича, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ (простору φ -субгауссових випадкових величин), якщо $E\xi = 0$, $E \exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$E \exp(\lambda\xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda)).$$

Означення 3. [1] Випадковий процес $X = (X(t), t \in T)$ є φ -субгауссовим (тобто, належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$), якщо для всіх $t \in T$ випадкові величини $X(t) \in \text{Sub}_\varphi(\Omega)$. Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то такий процес називається субгауссовим. Зокрема, центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим.

Означення 4. [1] Будемо називати центрований випадковий процес $Z_H = \{Z_H(t), t \in T\}$ строго φ -субгауссовим узагальненим дробовим броунівським рухом (φ -УДБР) з індексом Хюрста $H \in (0, 1)$, якщо Z_H є строго φ -субгауссовим та

$$R_H(t, s) = \mathbb{E}Z_H(s)Z_H(t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s - t|^{2H}).$$

Означення 5. Модель $\tilde{Z}$ наближає процес Z із заданими надійністю $1 - \nu$, $0 < \nu < 1$, та точністю $\delta > 0$ в $C([0, 1])$, якщо

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} |Z(t) - \tilde{Z}(t)| > \delta \right) \leq \nu.$$

У роботах [1]–[3] запропоновано алгоритм моделювання процесів строго φ -субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0; 1])$ на основі розкладу в ряд:

$$\tilde{Z}(t) = \sum_{n=1}^N \left(\tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n t) \xi_n + \tilde{d}_n (1 - \cos(\tilde{y}_n t)) \eta_n \right), \quad (1)$$

де $\tilde{c}_n$ та $\tilde{d}_n$ – деякі сталі, $\tilde{x}_n$ та $\tilde{y}_n$ – наближені значення нулів функцій Бесселя першого роду J_{-H} та J_{1-H} відповідно, ξ_n, η_n – незалежні однаково розподілені випадкові величини з простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, $\mathbb{E}\xi_n^2 = \mathbb{E}\eta_n^2 = 1$, $n = 1, 2, \dots$. Також у цих роботах отримано умови для знаходження числа N (верхньої межі ряду (1)) та наведено приклади побудови моделі у випадку строго субгауссового узагальненого дробового броунівського руху для різних значень індекса Хюрста H (тобто, коли $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$).

У моїй роботі отримано умови, за яких модель виду (1) наближає процес строго φ -субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0; 1])$ у випадках, коли $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$, та $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є. *φ -субгауссові випадкові процеси*. К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008. 231 с.
- [2] Kozachenko Yu., Sottinen T., Vasylyk O. *Simulation of Weakly Self-Similar Stationary Increment $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ -Processes: A Series Expansion Approach* // Methodology and Computing in Applied Probability. 2005. **7**. P. 379–400.
- [3] Kozachenko Yu., Vasylyk O. *Simulation of fractional Brownian motion with given reliability and accuracy in $C([0, 1])$* // Theory of Stochastic Processes. 2006. Vol.12 (28), no.3-4. P. 59–66.

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ “КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”, Київ, Україна

Email address: pasko97ira@gmail.com

ПРО БАГАТОТОЧКОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ У ПРОСТОРАХ ГЕЛЬДЕРА

Г.О. МАСЛЮК

Нехай довільно вибрано відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, цілі числа $m \geq 1$, $n \geq 0$ і $r \geq 2$ та дійсне число $\alpha \in (0, 1]$. Розглянемо на відрізку $[a, b]$ систему m лінійних диференціальних рівнянь порядку r , залежних від числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t, \varepsilon) \equiv y^{(r)}(t, \varepsilon) + \sum_{j=1}^r A_{r-j}(t, \varepsilon)y^{(r-j)}(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \quad (1)$$

де фіксовано число $\varepsilon_0 > 0$. Тут для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ є невідомою вектор-функція $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+r, \alpha})^m$, а усі матриці-функції $A_{r-j}(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n, \alpha})^{m \times m}$ і вектор-функція $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n, \alpha})^m$ є довільно заданими.

Довільно виберемо натуральні числа p і $q_1, \dots, q_p$. Для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ розглянемо таку багатоточкову крайову умову:

$$B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^p \sum_{k=1}^{q_j} \sum_{l=0}^{n+r} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon), \varepsilon) = c(\varepsilon). \quad (2)$$

Усі матриці $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm \times m}$, точки $t_{j,k}(\varepsilon) \in [a, b]$ і вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ довільно задані. Ця умова має сенс для кожної вектор-функції $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+r, \alpha})^m$.

Використання у багатоточковій крайовій умові (2) сум за індексами j і k зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{j,k}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ у залежності від значень параметра j . Припускаємо, що для кожного номера $j \in \{1, \dots, p\}$ усі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$, де $k \in \{1, \dots, q_j\}$, мають спільну границю при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Це припущення не робиться для точок $t_{0,k}(\varepsilon)$, де $k \in \{1, \dots, q_0\}$.

З огляду на сказане, розглядаємо у граничному випадку $\varepsilon = 0$ таку крайову умову:

$$B(0)y(\cdot, 0) \equiv \sum_{j=1}^p \sum_{l=0}^{n+r} \beta_j^{(l)}y^{(l)}(t_j, 0) = c(0). \quad (3)$$

Тут усі матриці $\beta_j^{(l)} \in \mathbb{C}^{rm \times m}$, точки $t_j \in [a, b]$ та вектор $c(0) \in \mathbb{C}^{rm}$ є довільно заданими.

Крайові задачі (1), (2) і (1) при $\varepsilon = 0$, (3) належать до класу найбільш загальних щодо простору $C^{n+r,\alpha}$.

Умови, достатні для однозначної розв'язності багатоточкової крайової задачі (1), (2) і неперервної залежності її розв'язку за малим параметром дає наступна теорема [1, с. 197].

Теорема 1. *Нехай гранична крайова задача $L(0)y(\cdot, 0) = 0$, $B(0)y(\cdot, 0) = 0$ має лише тривіальний розв'язок і при $\varepsilon \rightarrow 0+$ та $j \in \overline{1, p}$ виконуються такі умови:*

- (a) $A_k(\cdot, \varepsilon) \rightarrow A_k(\cdot, 0)$ в $(C^{n,\alpha})^{m \times m}$ для кожного $k \in \overline{0, r-1}$;
- (b1) $t_{j,k}(\varepsilon) \rightarrow t_j$ для усіх $k \in \overline{1, q_j}$;
- (b2) $\sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \rightarrow \beta_j^{(l)}(0)$ для усіх $l \in \overline{0, n+r}$;
- (b3) $\|\beta_{j,k}^{(n+r)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j|^\alpha \rightarrow 0$ для усіх $k \in \overline{1, q_j}$;
- (b4) $\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \rightarrow 0$ для усіх $k \in \overline{1, q_j}$, $l \in \overline{0, n+r-1}$;
- (b5) $\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \rightarrow 0$ для усіх $k \in \overline{1, q_0}$, $l \in \overline{0, n+r}$.

Тоді розв'язок крайової задачі (1), (2) неперервно залежить від параметра ε .

Відзначимо, що критерій неперервності за параметром розв'язків крайових задач було доведено у роботі [2].

Для диференціальних рівнянь першого порядку (випадок $r = 1$) теорему 1 встановив В. О. Солдатов [3, с. 273].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Маслюк Г. О. Багатоточкові крайові задачі з параметром для диференціальних рівнянь високого порядку на просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 2. — С. 193 – 203.
- [2] Maslyuk H. O. Continuity of the solutions of one-dimensional boundary-value problems in Holder spaces with respect to the parameter / H. O. Maslyuk // Ukrainian Math. J. — 2017. — V. 69, № 1. — P. 101 – 110.
- [3] Солдатов В. О. Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Гельдера / В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 2. — С. 267 – 280.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: masliuk@matan.kpi.ua

РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ В ПРОСТОРИ $\mathbb{R}^2$

В.Ю. МАТЛАШ, А.В. СИРОТЕНКО

Нехай $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ — банахові простори, оператори $B \in L(\mathbb{B}_1)$, $A \in L(\mathbb{B}_2)$ та $Y \in L(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ — задані лінійні оператори та $X \in L(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ — шуканий лінійний оператор.

Відомо [1], що рівняння

$$\sum_{j,k=0}^n c_{jk} A^j X B^k = Y, \quad (1)$$

де $c_{jk} \in \mathbb{C}$, має для кожного $Y \in L(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ єдиний розв'язок $X \in L(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$, якщо

$$P(\lambda, \mu) = \sum_{j,k=0}^n c_{jk} \lambda^j \mu^k \neq 0$$

для всіх можливих пар $(\lambda, \mu) \in \sigma(A) \times \sigma(B)$. Тут $\sigma(A)$ та $\sigma(B)$ — відповідно спектри операторів A та B .

Цей розв'язок може бути представлений у вигляді

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} \frac{(A - \lambda I)^{-1} X (B - \mu I)^{-1}}{P(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu, \quad (2)$$

де I — тотожний оператор, Γ_A та Γ_B — гладкі контури, що охоплюють спектри операторів A та B відповідно.

Розглядається частковий випадок рівняння (1)

$$AX - XB = Y \quad (3)$$

за умови $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2 = \mathbb{R}^2$.

У випадку, коли матриці A та B мають по два попарно різних власних числа, отримано явний вигляд розв'язку (2) рівняння (3):

$$\begin{aligned}
X = & \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_1 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_1 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_1 - \mu_1)} - \\
& - \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_2 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_2 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_1 - \mu_2)} - \\
& - \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_2 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_1 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_1 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_1)} + \\
& + \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_2 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_2 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_2 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_2)},
\end{aligned}$$

де $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — власні числа матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$\mu_1 \neq \mu_2$ — власні числа матриці

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

та

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*. — Москва: Наука, 1970. — 536 с.
- [2] *Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Практикум.* /Уклад.: Алексеева І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Федорова Л.Б. — Київ: НТУУ "КПІ", 2013. — 160 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: valiamatlashh@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: antonsyrotenko86@gmail.com

ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ МАЛІНВО

О.В. МИТРОФАНОВА

Розглянемо модель спостережень

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

де $g(t, \theta) : [-\gamma, +\infty) \times \Theta_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ - неперервна функція, невідомий параметр $\theta^0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$, де Θ - відкрита опукла множина, $\Theta_\gamma = \bigcup_{\|e\| \leq 1} (\Theta + e\gamma)$, $\gamma > 0$ - деяке число; $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$ - випадковий шум, який ми опишемо нижче.

Означення 1. Оцінкою найменших квадратів (ОНК) параметра θ^0 , отриманою за спостереженнями процесу $\{X(t), t \in [0, T]\}$, називається будь-який вектор $\theta_T \in \Theta^c$ (Θ^c - замикання Θ), що мінімізує функціонал

$$Q_T(\theta) = T^{-1} \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)]^2 dt.$$

1) Процес ε є лінійним вимірним процесом

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \hat{a}(t-s) dL(s), \quad t \in \mathbb{R},$$

де L - двосторонній процес Леві такий, що $EL(1) = 0$, $EL^4(t) < \infty$ та $\hat{a} \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$.

Деякі результати про консистентність ОНК θ_T у моделі (1) зі стаціонарним випадковим шумом $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}$, було отримано у [1] та [2]. У доповіді ми формулюємо одне узагальнення теореми Малінво про консистентність ОНК θ_T за умови 1) і розглядаємо нелінійну функцію регресії $g(t, \theta)$, яка задовольняє умовам, наведеним далі.

Нехай $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0), t \in \mathbb{R}$, - коваріаційна функція процесу ε .

Припустимо, що функція $g(t, \theta)$ для будь-якого $t \geq 0$ є неперервно диференційовною за $\theta \in \Theta^c$, а її похідні $g_i(t, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(t, \theta), i = \overline{1, q}$, локально інтегровані з квадратом за t . Також позначимо

$$d_T(\theta) = \text{diag}(d_{iT}(\theta), i = \overline{1, q}), \quad d_{iT}^2(\theta) = \int_0^T g_i^2(t, \theta) dt,$$

$$\nu(R) = \{u \in \mathbb{R}^q : \|u\| < R\},$$

$$\Psi_T(u_1, u_2) = \int_0^T [g(t, \theta^0 + T^{\frac{1}{2}} d_T^{-1}(\theta^0)u_1) - g(t, \theta^0 + T^{\frac{1}{2}} d_T^{-1}(\theta^0)u_2)]^2 dt.$$

Для будь-якого фіксованого $\theta^0 \in \Theta$ функцію $\Psi_T(u_1, u_2)$ будемо розглядати на множині $U_T(\theta^0) \times U_T(\theta^0)$, $U_T(\theta^0) = T^{-\frac{1}{2}} d_T(\theta^0)(\Theta^c - \theta^0)$.

Припустимо наступне.

2) Для будь-якого $\varepsilon > 0$ та $R > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, R) > 0$ таке, що

$$\sup_{\substack{u_1, u_2 \in U_T(\theta^0) \cap \nu^c(R), \\ \|u_1 - u_2\| \leq \delta}} T^{-1} \Psi_T(u_1, u_2) \leq \varepsilon.$$

3) Для деякого $R_0 > 0$ та будь-якого $\rho \in (0, R_0)$ існують $a = a(R_0) > 0$ та $b = b(\rho, R_0) > 0$ такі, що

$$\inf_{u \in U_T(\theta^0) \cap (\nu^c(R_0) \setminus \nu(\rho))} T^{-1} \Psi(u, 0) \geq b;$$

$$\inf_{u \in U_T(\theta^0) \setminus \nu^c(R_0)} T^{-1} \Psi(u, 0) \geq 4B(0) + a.$$

Теорема 1. Якщо виконано умови 1)-3), то для будь-якого $\rho > 0$

$$P\{\|T^{-\frac{1}{2}} d_T(\theta^0)(\theta_T - \theta^0)\| \geq \rho\} = O(T^{-1}) \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty.$$

В доведенні цієї теореми спираємось на роботи [1] та [2].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ivanov A.V., Leonenko N.N. *Statistical Analysis of Random Fields*. // Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, — 1989.
- [2] Ivanov A.V., Leonenko N.N., Orlovsky I.V. *On the Whittle estimation for linear random noise spectral density parameter in continuous-time nonlinear regression models* // Stat. Inference Stoch. Process. — 2020. — V. 23, — P. 129–169.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Email address: alena.mitrofanova05@gmail.com

ПРО ОДНОВИМІРНІ ФРЕДГОЛЬМОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРОМ У ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА-СЛОБОДЕЦЬКОГО

В.А. МИХАЙЛЕЦЬ, Т.Б. СКОРОВОГАЧ

Нехай задано скінченний інтервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ та числа

$$m \in \mathbb{N}, \quad s \in (1, \infty) \setminus \mathbb{N}, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Розглянемо параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ сім'ю неоднорідних крайових задач вигляду

$$L(\varepsilon)y(t; \varepsilon) := y'(t; \varepsilon) + A(t; \varepsilon)y(t; \varepsilon) = f(t; \varepsilon), \quad t \in (a, b), \quad (1)$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot; \varepsilon) = c(\varepsilon), \quad (2)$$

де при кожному фіксованому значенні параметра ε матриця-функція $A(\cdot; \varepsilon) \in W_p^{s-1}([a, b]; \mathbb{C}^{m \times m}) =: (W_p^{s-1})^{m \times m}$,

вектор-функція $f(\cdot; \varepsilon) \in W_p^{s-1}([a, b]; \mathbb{C}^m) =: (W_p^{s-1})^m$, вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, а $B(\varepsilon)$ — лінійний неперервний оператор

$$B(\varepsilon): (W_p^s)^m \rightarrow \mathbb{C}^m.$$

Під розв'язком крайової задачі (1), (2) розуміємо вектор-функцію $y(\cdot; \varepsilon) \in (W_p^s)^m$, яка задовольняє рівняння (1) майже скрізь (при $s > 1 + 1/p$ скрізь) на (a, b) та рівність (2). Крайова умова (2) є найбільш загальною для системи (1). Із крайовою задачею (1), (2) можна пов'язати лінійний оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)): (W_p^s)^m \rightarrow (W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^m. \quad (3)$$

Теорема 1. *При кожному фіксованому параметрі ε оператор (3) є неперервним фредгольмовим з індексом 0.*

Будемо вважати, що виконується

Умова (0). *Гранична однорідна крайова задача вигляду (1), (2)*

$$L(0)y(t; 0) = 0, \quad t \in (a, b), \quad B(0)y(\cdot; 0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

У цьому випадку відповідна гранична неоднорідна крайова задача має єдиний розв'язок.

Означення 1. Говоримо, що розв'язок крайової задачі (1), (2) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі умови:

- (*) існує таке додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, довільних правих частин $f(\cdot; \varepsilon) \in (W_p^s)^m$ і $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot; \varepsilon)$, який належить простору $(W_p^s)^m$;
- (**) зі збіжності правих частин $f(\cdot; \varepsilon) \rightarrow f(\cdot; 0)$ в $(W_p^s)^m$ та $c(\varepsilon) \rightarrow c(0)$ в $\mathbb{C}^m$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ випливає збіжність розв'язків

$$y(\cdot; \varepsilon) \rightarrow y(\cdot; 0) \quad \text{у} \quad (W_p^s)^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Розглянемо такі

Граничні умови при $\varepsilon \rightarrow 0+$:

- (I) $A(\cdot; \varepsilon) \rightarrow A(\cdot; 0)$ у просторі $(W_p^{s-1})^{m \times m}$;
- (II) $B(\varepsilon)y \rightarrow B(0)y$ у $\mathbb{C}^m$ для кожного $y \in (W_p^s)^m$.

Сформулюємо критерій неперервності розв'язку $y = y(t, \varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) за параметром ε при $\varepsilon \rightarrow 0+$ у просторі W_p^s .

Теорема 2. *Розв'язок крайової задачі (1), (2) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$ тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову (0) та граничні умови (I), (II).*

Покладемо

$$\tilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon) := \|L(\varepsilon)y(\cdot; 0) - f(\cdot; \varepsilon)\|_{s-1,p} + \|B(\varepsilon)y(\cdot; 0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m},$$

де $\|\cdot\|_{s-1,p}$ — норма у просторі W_p^{s-1} , а $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^m}$ — норма у просторі $\mathbb{C}^m$.

Величини

$$\|y(\cdot; 0) - y(\cdot; \varepsilon)\|_{s,p}$$

та $\tilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon)$ є відповідно похибкою і нев'язкою розв'язку $y(\cdot; \varepsilon)$ крайової задачі (1), (2), якщо $y(\cdot; \varepsilon)$ розглядати як її точний розв'язок, а $y(\cdot; 0)$ — як наближений.

Теорема 3. *Нехай крайова задача (1), (2) задовольняє умови (0), (I) і (II). Тоді існують такі додатні числа $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ і γ_1, γ_2 , що для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ має місце двобічна оцінка*

$$\gamma_1 \tilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon) \leq \|y(\cdot; 0) - y(\cdot; \varepsilon)\|_{s,p} \leq \gamma_2 \tilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon), \quad (4)$$

де числа ε_2, γ_1 і γ_2 не залежать від $y(\cdot; 0)$ і $y(\cdot; \varepsilon)$.

Згідно з цією теоремою, похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot; \varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) мають однаковий порядок малості.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: mikhailets@imath.kiev.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: tetianaskorobohach@gmail.com

ОПТИМІЗАЦІЯ СТРАТЕГІЇ ДЛЯ НАСТІЛЬНОЇ ГРИ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТІ

Є.М. ОКУНЄВ

Комплектація гри: У грі використовуються дві колоди: колода цілей та гральна колода. Гральна колода складається із 82-х карт. По десять карт із номіналом від 3-х до 9-ти включно та по 6 карт-множників $\times 2$ та $\times 3$. Колода цілей складається із 25 карт, кожна з яких має два числа: яке позначає цільове значення карти та кількість переможних балів, що дає ця карта. Ціль гри: набрати 13 переможних балів. Процес гри: кожен гравець починає гру із 5-ма картами. Гравці ходять по черзі. Хід одного гравця складається із розіграшу карт та добіру карт. Під час розіграшу карт гравець може класти карти у стопку, реалізовувати стопки та скидати стопки. Під час ходу гравець може робити такі дії: викладати карти у спеціальні стопки на стіл, скинути свою стопку карт зі столу (1 раз за хід), реалізувати стопку карт. Під час свого ходу гравець може виконувати усі ці дії до тих пір, поки їх виконання можливе. Реалізація стопок карт: з моменту початку гри обидва гравці у відкриту дістають три карти із особливої колоди цілей і кладуть на стіл. На картах колоди цілей зображене певне цільове число та число, що позначає кількість переможних балів за виконання цілі. Якщо у момент свого ходу гравець має стопку, числове значення якої співпадає з однією з карт колоди цілей, то гравець може скинути цю стопку карт і забрати собі карту цілі із відповідним числом. Коли карта цілі переходить до одного із гравців, на стіл викладається інша карта цілі.

Кожен гравець може мати одночасно до 3-х стопок карт включно. Якщо стопок менше, то гравець може покласти довільну карту з номіналом для того, щоб утворити нову стопку. У стопку карт можна складати лише карти з однаковим номіналом (наприклад, лише карти із числом 5), а також карти-множники. Обчислення значення стопки: всяка стопка має своє певне числове значення, яке є сумою усіх карт із числами, помноженою на добуток карт-множників.

Вважатимемо, що розподіл карт одного номіналу відбуватиметься за розподілом Бернуллі. У роботі вводиться поняття точної та мінімальні ймовірності. Точна ймовірність того, що в процесі гри гравець отримає рівно n карт певного номіналу, обчислюється як ймовірність кількості успіхів у серії випробувань Бернуллі. Мінімальна ймовірність обчислюється

як сума імовірностей усіх подій, за яких гравець отримує як мінімум n потрібних карт в процесі гри.

Враховуючи, що різні карти із числами дозволяють збирати різні стопки, було проаналізовано, карти якого номіналу є найбільш корисними самі по собі.

Оскільки набір карт у стопці змінюється шляхом додавання карт, то стопки, які використовують один номінал карт, були представлені у вигляді орієнтованого графа, де сполучення показують, що із однієї стопки можна перейти в іншу. Для зручності дані графи були представлені у вигляді матриць. Введення даних матриць призводить до поняття локально-оптимального стану стопки, тобто такого, із якого мінімальним додаванням карт найпростіше отримати інші стопки. Шляхом розділення кожного рядка матриці на імовірність отримати першу ненульову імовірність у рядку та множення кожного стовпчика на кількість переможних балів була отримана матриця, використання якої потрібне у знайденому алгоритмі визначення локально-оптимального стану стопки. Також був введений штраф за додавання карт до стопки. Інакше оптимальним станом стопки буде нульовий стан (без карт). Штраф реалізований як множення комірок матриці на штрафний коефіцієнт, що є штрафним числом у степені кількості доданих карт. Для того, щоб визначити основу штрафного коефіцієнту була застосована така формула:

$$\alpha = \frac{1}{1000^{\frac{1}{\beta}}}, \beta = \frac{1}{2} \cdot n_1 + \frac{1}{3} \cdot n_2 + \frac{1}{6} \cdot n_3,$$

де n_i —середня кількість карт для реалізації діючих стопок.

Отримані внаслідок дослідження градації карт, карт цілей і станів стопок використовуються для того, щоб допомогти обирати таку стратегію, що підвищує імовірність забирати майбутні карти цілей швидше за суперника. Градація карт цілей була введена для того, щоб допомогти зрозуміти, яку карту цілі слід намагатися забрати першою, коли це не є очевидним. Градація карт із номіналом була введена для того, щоб в процесі гри можна було проаналізувати, карти якого номіналу є більш корисними, порівняно із іншими. Градація станів стопки була введена для того, щоб визначити, яка у даний момент гри комплектація стопки має більшу імовірність забрати карти цілей, які з'являться після тих, що активні безпосередньо зараз.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Uspensky, J. V. // Introduction to mathematical probability. (1937). — 45 p.

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, KYIV, UKRAINE
Email address: egorky96@gmail.com

АНАЛОГ ЛОГАРИФМІЧНОЇ (u, v) -ПОХІДНОЇ

Р.Ю. ОСАУЛЕНКО

Границю $\Lambda_v^u f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_v^u f(x_0)}{\ln \square_v^u x}$ ми називаємо *аналогом логарифмічної (u, v) -похідної*, де (u, v) — пара нескінченно малих у нулі функцій, для яких існує проколотий δ -окіл нуля, у якому $u(h) \neq -v(h)$ і $u(h)v(h) \geq 0$; $\square_v^u f(x_0)$ — це коливання функції f на відрізку з кінцями в точках $x_0 + u(h)$, $x_0 - v(h)$.

Лема 1. *Якщо існує скінченна похідна $f'(x_0)$ відмінна від нуля, то $\Lambda_v^u f(x_0) = 1$. Якщо $\Lambda_v^u f(x_0) < 1$, то функція є недиференційовною в точці x_0 . Якщо $\Lambda_v^u f(x_0) > 1$, то $\mathfrak{D}_v^u(x_0) = 0$.*

Під записом $\Lambda f(x_0)$ будемо розуміти $\Lambda_0^h f(x_0)$.

Лема 2. *Якщо $\Lambda f(x_0) > 0$, то функція f — неперервна в точці x_0 .*

Лема 3. *Якщо існує $\Lambda f(x_0)$, то для всіх пар $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ виконується рівність $\Lambda_v^u f(x_0) = \Lambda f(x_0)$.*

Теорема 1. *Якщо існують $\Lambda f(\tau) \in \mathbb{R}$, $\Lambda g(x_0) \in \mathbb{R}$, де $\tau = g(x_0)$, то*

$$\Lambda(f(g))(x_0) = \Lambda f(\tau) \cdot \Lambda g(x_0).$$

Теорема 2. *Нехай задано послідовність пар дійсних чисел (l_n, r_n) таких, що $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$. При цьому $l_n < l_{n+1} < x_0 < r_{n+1} < r_n$*

для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \max\{r_n - x_0, x_0 - l_n\}}{\ln \min\{r_n - x_0, x_0 - l_n\}} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(r_{n+1} - l_{n+1})}{\ln(r_n - l_n)}$.

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[l_n, r_n]} f(x_0)}{\ln(r_n - l_n)}$ і $\Lambda_h^h f(x_0)$ існують (не існують) одночасно. У випадку існування вони рівні.

В доповіді на прикладі композиції сингулярної функції Салема та ніде не диференційовної функції Окамото буде продемонстровано застосування аналога логарифмічної (u, v) -похідної для встановлення достатніх умови сингулярності та ніде не диференційовності композиції.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Osaulenko R. Y. An analogue of the logarithmic (u, v) -derivative and its application // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2020. — Vol. 26, no. 2. — P. 179–188. — Access mode: <http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=1349>.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: r.osaulenko@kpi.ua

НАБЛИЖЕННЯ КІЛЬКОСТІ СТРАХОВИХ ПОЗОВІВ ВІД'ЄМНИМ БІНОМІАЛЬНИМ РОЗПОДІЛОМ

І.М. САВИЧ, А.В. ЮРІКОВА

Страховий ризик — прогнозовий збиток об'єкта страхування в результаті настання страхової події [1]. Важливою складовою ризику є ймовірнісний розподіл кількості страхових позовів на один договір, який необхідно оцінювати за спостережуваними даними. Кількість страхових позовів є дискретною випадковою величиною, тому для її моделювання використовують такі розподіли: біноміальний, розподіл Пуассона, геометричний та від'ємний біноміальний.

У випадку коли параметр Пуассонівського розподілу у моделі для кількості позовів є випадковою величиною з гамма-розподілу ($\lambda_i \sim \Gamma(r; \frac{1}{\theta})$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\theta > 0$), то кількість позовів має від'ємний біноміальний розподіл.

Розглянемо вибірку $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, породжену випадковою величиною ξ (кількістю страхових позовів) з розподілом $P(k, \theta) = C_{r-1+k}^{r-1} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k$, де $r \in \mathbb{Z}_+$ — фіксоване і відоме, параметр $\theta > 0$.

Тоді оцінка максимальної вірогідності для $\theta \in \theta^* = \frac{\sum_{j=1}^n \xi_j}{nr} = \frac{\bar{\xi}}{r}$, яка має такі властивості: незміщеність, консистентність, ефективність і асимптотична нормальність [2]. Асимптотичний довірчий інтервал для параметра θ з ймовірністю $1-\varepsilon$ має вигляд $\left(\frac{\bar{\xi}}{r} - \frac{\tau_{1-\varepsilon/2}}{r} \cdot \sqrt{\frac{\bar{\xi}(r+\bar{\xi})}{nr}}; \frac{\bar{\xi}}{r} + \frac{\tau_{1-\varepsilon/2}}{r} \cdot \sqrt{\frac{\bar{\xi}(r+\bar{\xi})}{nr}} \right)$, де $\tau_{1-\varepsilon/2}$ — квантиль рівня $1 - \varepsilon/2$ нормального стандартного розподілу.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Козьменко О.В., Кузьменко О.В., *Актuarні розрахунки: навчальний посібник*. — Суми: Університетська книга, 2014. — 224 с.
- [2] Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. *Теория вероятностей и математическая статистика*. — Киев, 1979. — 408 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: sim7ka@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: alenayurikova7@gmail.com

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ НЕЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ З ЛІНІЙНИМ ВИПАДКОВИМ ШУМОМ

I.O. СЕРЕДЕНКО

У роботі розглядається нелінійна модель регресії з неперервним часом спостереження

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), t \geq 0, \quad (1)$$

із випадковим шумом $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, який є лінійним випадковим процесом, керованим процесом Леві.

Ми зосередимо увагу на такій проблемі регресійного аналізу як оцінювання амплітуд та кутових частот суми гармонічних коливань

$$g(t, \theta^0) = \sum_{k=1}^N (A_k^0 \cos \varphi_k^0 t + B_k^0 \sin \varphi_k^0 t), t \geq 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \theta^0 &= (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, \dots, \theta_{3N-2}^0, \theta_{3N-1}^0, \theta_{3N}^0) = \\ &= (A_1^0, B_1^0, \varphi_1^0, \dots, (A_N^0, B_N^0, \varphi_N^0), \end{aligned}$$

маскованих випадковим шумом.

Описану регресійну модель називають тригонометричною, а вказану вище проблему — задачею про виявлення прихованих періодичностей.

Ця проблема досліджувалась у великій кількості робіт. Зокрема, вкажемо на роботи [1] та [2], де розглядалися нелінійні регресійні моделі з неперервним та дискретним часом і випадковим шумом, який є локальним перетворенням сильно залежного гауссівського процесу.

Для доведення асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів (ОНК) параметрів нелінійної регресії з лінійним випадковим шумом (1), необхідно, перш за все, виконання деяких умов на функцію регресії $g(t, \theta^0)$ та випадковий шум $\varepsilon(t)$. Це дозволить, завдяки теоремі редуkcії, перейти до вивчення асимптотичної нормальності ОНК параметрів в деякій допоміжній лінійній моделі регресії.

Наступним важливим кроком дослідження є доведення теореми про асимптотичну єдиність, яка стверджує, що з єдиності нормованої ОНК

$$\hat{w}_T = T^{-1/2} d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)$$

впливає єдиність нормованої ОНК

$$\hat{u}_T = d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta),$$

де

$$d_T(\theta) = \text{diag}(d_{iT}(\theta))_{i=1}^q, \theta \in \Theta^c,$$

$$d_{iT}^2(\theta) = \int_0^T g_i^2(t, \theta) dt, i = 1, \dots, q.$$

Варто відмітити, що теореми редукції та асимптотичної єдиності справедливі і для тригонометричної моделі регресії (1), (2).

Важливою частиною доведення асимптотичної нормальності ОНК $\hat{\theta}_T$ параметрів моделі (1) є центральна гранична теорема про асимптотичну нормальність вектора

$$\zeta_T = d_T^{-1}(\theta^0) \int_0^T \varepsilon(t) \nabla g(t, \theta^0) dt.$$

Використовуючи вказані теореми та теорему Брауера про нерухому точку, ми доводимо, що випадковий вектор $\hat{u}_T$ є асимптотично нормальним при $T \rightarrow \infty$.

Застосування цієї загальної теореми дозволяє довести асимптотичну нормальність ОНК

$$(T^{1/2}(A_{1T} - A_1^0), T^{1/2}(B_{1T} - B_1^0), T^{3/2}(\varphi_{1T} - \varphi_1^0), \dots,$$

$$T^{1/2}(A_{NT} - A_N^0), T^{1/2}(B_{NT} - B_N^0), T^{3/2}(\varphi_{NT} - \varphi_N^0))$$

векторного параметра θ^0 тригонометричної моделі регресії (1), (2).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ivanov A.V., Leonenko N.N., Ruiz-Medina M.D., Zhurakovsky B.M. *Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors* // Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics. — 2015. — Т. 49, № 1. — С. 156–186.
- [2] Драбик Т.О., Іванов О.В. *Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів у тригонометричній регресії з сильно залежним шумом* // Вісник Київського Національного університету імені Тараса Шевченка. — 2019. — № 4. — С. 24–41.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
 Email address: seredenko5312@ukr.net

РІВНОВАГА НЕША В НЕСИМЕТРИЧНІЙ МОДЕЛІ ГРИ ВИДОБУТКУ РЕСУРСІВ

І.В. СИЛЕНКО

Гра видобутку ресурсів є стохастичною грою з ненульовою сумою. Попереднім результатом існування рівноваги Неша у *несиметричній* грі є робота [1]. У доповіді представлено новий результат для несиметричної моделі, яка не потрапляє в досліджений клас.

Порядок гри:

$m \in \mathbb{N}$ учасників спільно володіють відновлюваним ресурсом протягом необмеженого періоду. На кожному з дискретних етапів $t = 1, 2, 3, \dots$ гравець $i \in [m]$ спостерігає доступну кількість ресурсу $s_t \in [0; +\infty)$, і незалежно від інших приймає рішення $x_{ti} \in [0, s_t]$. Якщо сумарні рішення всіх гравців не перевищують s_t , то кожен з них отримує моментальну корисність відповідно до власного рішення, а гра переходить в наступний стан. Сумарний виграш i -го гравця визначається як нескінченна дисконтована сума його прибутків в усі моменти часу з множником дисконтування β_i .

Припущення моделі:

A1: Функція корисності i -го гравця — $u_i(x) = c_i x^{\alpha_i}$, де $c_i \in (0; +\infty)$, $\alpha_i \in (0; 1)$.

A2: Кожен наступний стан s_{t+1} ($t \in \mathbb{N}$) визначається за правилом

$$s_{t+1} = \left(s_t - \sum_{i=1}^m x_{ti} \right) \cdot \xi_t,$$

де $s_t \in [0; +\infty)$ — попередній стан, $(x_{t1}, \dots, x_{tm})$ — рішення гравців у ньому, ξ_t — незалежна реалізація невід'ємної випадкової величини ξ , розподіл якої є відкритою інформацією;

A3: Для кожного $i \in [m]$ $\beta_i \cdot \mathbb{E}(\xi^{\alpha_i}) \in (0; 1)$.

Теорема 1. Несиметрична гра видобутку ресурсів з припущеннями **A1-A3** має стаціонарну рівновагу Неша.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Jaśkiewicz A., Nowak A.S. *On symmetric stochastic games of resource extraction with weakly continuous transitions* // TOP — 2018. — Vol. 26, № 2. — P. 239–256.

НАУКМА, Київ, УКРАЇНА

Email address: i.sylenko@ukma.edu.ua

АНТОГОНІСТИЧНІ ІГРИ З МОЖЛИВІСТЮ ВИПАДКОВОГО ВІДХИЛЕННЯ ВІД ОПТИМАЛЬНОЇ СТРАТЕГІЇ

Н.О. СОБОЛЬ

Розглянемо наступну ситуацію: Іван та Петро грають в таку гру. Перед ними на столі лежить n сірників. Можна брати $1, 2, 3, \dots, t$ сірників. Сірники вони беруть по черзі. Іван буде витягати першим, тобто його хід перший, потім Петро робить другий хід, Іван третій і т.д. Розглянемо два варіанти гри. Виграє той, хто

- (а) бере останній сірник;
- (б) не бере останній сірник.

Ця задача є класичною і її розв'язок є відомим. Наприклад оптимальною стратегією є щоб залишок сірників на столі завжди був кратний $t+1$, тоді гравець, що дотримується цього і виграє у варіанті а).

Припустимо тепер, що Іван та Петро можуть відхилятися від оптимальної стратегії, описаної вище, під впливом випадкових факторів. Введемо відповідні позначення:

- p_j^I – ймовірність того, що Іван похотив відповідно до оптимальної стратегії, взявши зі столу j сірників;
- $q_{i,j}^I$ – ймовірність того, що Іван помилився і відхилився від оптимальної стратегії, взявши зі столу кількість сірників – j , якщо потрібно було i ;
- r_j^I – ймовірність того, що Іван бере зі столу j сірників, якщо кількість сірників на столі така, що виграшна позиція зараз у Петра;

Аналогічним чином вводимо ймовірності відносно Петра $p_j^P, q_{i,j}^P, r_j^P$. Наша задача полягає в тому, щоб знайти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\text{Іван виграє} \mid \text{Спочатку було } n \text{ сірників}).$$

Розв'язання цієї задачі зводиться до дослідження певних ланцюгів Маркова. Гранична ймовірність виграшу знаходиться за допомогою розв'язання певних систем лінійних рівнянь.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: sobolonadia@gmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ ТОЧКОВИХ ПРОЦЕСІВ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ЗАДАЧІ ПРО ДНІ НАРОДЖЕННЯ

В. В. СТАМАТІЄВА

Задача про дні народження є однією з класичних задач комбінаторної теорії ймовірностей. Наведемо одне з її численних формулювань у вигляді, зручному для подальших узагальнень.

Розглянемо достатньо велику множину людей, які в послідовні цілі моменти часу один за одним заходять до кімнати. Позначимо через $T_1^{(365)}$ (випадковий) момент часу, коли до кімнати вперше зайшла людина, день народження якої збігається з днем народження когось з вже присутніх. Тут верхній індекс показує загальну кількість різних можливих днів народження (всі роки вважаються невисокосними), а нижній означає, що достатньо збігу з днем народження лише *одного* з присутніх. Задача полягає у визначенні різних характеристик величини $T_1^{(365)}$. Наприклад, можна показати, що

$$\mathbb{E}T_1^{(365)} \approx \sqrt{\frac{365\pi}{2}} + \frac{2}{3} \approx 24.6$$

(див., напр., [1]). Ця відповідь трохи відрізняється від відомого медіанного значення 23.

Під узагальненою задачею про дні народження ми будемо розуміти задачу, в якій обидва індекси величини $T_1^{(365)}$ набувають довільних натуральних значень. Більш детально, розглянемо множину об'єктів, які послідовно надходять до спостерігача в цілі моменти часу й кожен з яких рівноймовірно та незалежно від інших належить до одного з n типів. Позначимо через $T_r^{(n)}$, $r, n \in \mathbb{N}$, момент першого надходження об'єкта, тип якого вже зустрічався r разів. Ми розглядатимемо ситуацію, коли r є фіксованим, а $n \rightarrow \infty$.

Одним з перспективних підходів при доведенні граничних теорем для розподілів $T_r^{(n)}$ є застосування теорії “грубої” (vague) збіжності випадкових точкових мір. У контексті спорідненої задачі збирача купонів цей метод було запропоновано в [2] та розвинуто в [3]. Основою цього підходу є доведення збіжності за розподілом у грубій топології точкових процесів $\xi_r^{(n)}$, пов'язаних з моментами надходжень $(r+1)$ -их представників усіх типів, до деякого граничного процесу ξ_r . Надалі ми позначатимемо цю збіжність як $\xi_r^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{vd} \xi_r$.

Отримані нами в цьому напрямку результати сформулюємо у вигляді такого твердження.

Теорема 1. *Нехай $Y_{i,r}^{(n)}$, $i = 1, \dots, n$, є моментом надходження $(r + 1)$ -го представника i -го типу, а δ_a означає одиничну міру, зосереджену в точці a . Уведемо на $\mathbb{R}$ точковий процес*

$$\xi_r^{(n)} = \sum_{i=1}^n \delta_{n^{-\frac{r}{r+1}} Y_{i,r}^{(n)}},$$

а через ξ_r позначимо точковий процес Пуассона з мірою інтенсивності

$$\lambda_r(dx) = \frac{x^r}{r!} \cdot \mathbb{1}\{x \geq 0\} dx.$$

Тоді $\xi_r^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{vd} \xi_r$.

У майбутньому з цього результату буде, зокрема, отримано граничну теорему для величин $T_r^{(n)} = \min_{i=1, \dots, n} Y_{i,r}^{(n)}$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] On Ramanujan's Q -function / Philippe Flajolet, Peter J. Grabner, Peter Kirschenhofer, Helmut Prodinger // J. Comput. Appl. Math. — 1995. — Vol. 58, no. 1. — P. 103–116.
- [2] Glavaš Lenka, Mladenović Pavle. New limit results related to the coupon collector's problem // Stud. Sci. Math. Hung. — 2018. — Vol. 55, no. 1. — P. 115–140.
- [3] Iliencko Andrii. Convergence of point processes associated with coupon collector's and Dixie cup problems // Electron. Commun. Probab. — 2019. — Vol. 24. — P. 9. — Id/No 51.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Email address: stamatieva56@gmail.com

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ЗАДАЧІ ЗБИРАЧА КУПОНІВ

М. В. СТОЛЯР

Задача збирача купонів, історія якої сходить до робіт де Муавра, Ейлера та Лапласа, може бути сформульована в такий спосіб. Розглянемо необмежену послідовність купонів, які надходять один за одним у цілі моменти часу. Кожен купон незалежно від інших належить до одного з n типів з імовірностями $p_1^{(n)}, \dots, p_n^{(n)}$, $\sum_{i=1}^n p_i^{(n)} = 1$. Позначимо через $T_r^{(n)}$, $r \geq 1$, перший момент часу, коли серед отриманих купонів знайдеться r повних колекцій. Що можна сказати про числові характеристики випадкової величини $T_r^{(n)}$ (математичне сподівання, дисперсію тощо) й асимптотичну поведінку їх та самого розподілу $T_r^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$?

У випадку однакових імовірностей $p_1^{(n)} = \dots = p_n^{(n)} = \frac{1}{n}$ цій задачі присвячено безліч робіт. Зокрема, у [1] показано, що

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T_r^{(n)} &= n \ln n + (r-1)n \ln \ln n + (\gamma - \ln(r-1)!)n + o(n), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left\{\frac{T_r^{(n)}}{n} - \ln n - (r-1) \ln \ln n < x\right\} &= \exp\left\{-\frac{e^{-x}}{(r-1)!}\right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\gamma = -\Gamma'(1) \approx 0,5772$ — стала Ейлера-Маскероні. Гранична функція розподілу в правій частині (1) відповідає розподілу Гумбеля, що є типовим для граничних теорем теорії екстремальних значень. З великою кількістю інших результатів, викладених на досить елементарному рівні, можна ознайомитися за оглядовою роботою [2]. Випадок різних імовірностей $p_i^{(n)}$ є набагато складнішим. Деякі досить загальні граничні теореми для $T_r^{(n)}$ у цій ситуації було отримано в [3].

У нещодавніх роботах [4] та [5] в ситуації однакових імовірностей $p_i^{(n)}$ для дослідження асимптотичної поведінки $T_r^{(n)}$ та споріднених випадкових величин та процесів було розвинуто підхід, заснований на використанні збіжності спеціально побудованих точкових процесів, пов'язаних з моментами надходжень r -их представників усіх типів, до деякого граничного точкового процесу. Ми розглядатимемо деякі результати, що узагальнюють цей факт на випадок різних імовірностей $p_i^{(n)}$. Ці ймовірності

в нашій ситуації будуються в “інтегральній” формі

$$p_i^{(n)} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(t) dt, \quad i = 1, \dots, n,$$

де f — деяка фіксована невід’ємна функція на $[0, 1]$ з $\int_0^1 f(t) dt = 1$. Така побудова дозволяє охопити досить широкий клас наборів імовірностей $(p_i^{(n)}, i = 1, \dots, n)$.

У доповіді буде розглянуто теореми про збіжність вищеописаних точкових процесів, коли $f \in$ східчастою або степеневою функцією. Останній випадок є особливо цікавим — в ньому нормування та граничний розподіл для $T_r^{(n)}$ істотно відрізнятимуться від наведених у (1).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Erdős Pál, Rényi Alfréd. On a classical problem of probability theory. // Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., Ser. A. — 1961. — Vol. 6. — P. 215–220.
- [2] Ferrante Marco, Saltalamacchia Monica. The coupon collector’s problem // Materials matemàtics. — 2014. — P. 01–35.
- [3] Neal Peter. The generalised coupon collector problem. // J. Appl. Probab. — 2008. — Vol. 45, no. 3. — P. 621–629.
- [4] Glavaš Lenka, Mladenović Pavle. New limit results related to the coupon collector’s problem // Stud. Sci. Math. Hung. — 2018. — Vol. 55, no. 1. — P. 115–140.
- [5] Iliencko Andrii. Convergence of point processes associated with coupon collector’s and Dixie cup problems // Electron. Commun. Probab. — 2019. — Vol. 24. — P. 9. — Id/No 51.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: misha.stolyar99@gmail.com

ПРО ТАУБЕРОВІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ ФУР'Є

О.В. ЦИГАНОК, В.А. МИХАЙЛЕЦЬ

Нехай X — дійсний або комплексний лінійний нормований простір (ЛНП) довільної розмірності, $\{x_k\}$ — вектори з X . Розглянемо питання про збіжність ряду $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ у просторі X . Якщо цей ряд збігається, то він є $(C, 1)$ -сумовним, проте ця умова не достатня. Достатню умову збіжності дає наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ є $(C, 1)$ -сумовним до $S \in X$ і для деякого $p \geq 1$ виконується умова*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\|^p = O(n^{1-p}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Тоді цей ряд збігається до S в ЛНП X .

Наслідок 1. *Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ є $(C, 1)$ -сумовним і $\|x_n\| = O(\frac{1}{n})$, $n \rightarrow \infty$, то він є збіжним в ЛНП X .*

Наслідок 2. *Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ є $(C, 1)$ -сумовним і $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1} \|x_n\|^p < \infty$ то він є збіжним в ЛНП X .*

У випадку $X = \mathbb{R}$ наслідки 1 і 2 встановлені відповідно Гарді (1910) (див. [1, с. 156]) та Гарді і Літтлвудом (1914) (див. [1, с. 163]). Зауважимо, що умова (1) сильніша, ніж кожна з умов наслідків 1 і 2.

Нехай $X = C(\mathbb{T}; \mathbb{R})$, де $\mathbb{T}$ — одиничне коло. Користуючись теоремою 1 і деякими іншими результатами, можна довести наступні твердження про збіжність ряду Фур'є

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (2)$$

функції $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Теорема 2. Нехай функція f належить деякому однорідному функціональному банаховому простору X на $\mathbb{T}$ і виконані умови

$$\begin{aligned} \|e^{int}\|_X &= O(1), & |n| &\rightarrow \infty, \\ \sum_{|k| \geq n} |c_k|^p &= O(n^{1-p}), & n &\rightarrow \infty, \quad p \geq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Тоді ряд Фур'є (2) збігається до f в банаховому просторі X .

У випадку $\mathbb{X}(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$ і $p = 2$ теорема 2 іншим методом доведена раніше В.В. Жуком (1970) (див. [2]).

Зауважимо, що функціональні простори $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, сепарабельні простори Орліча, сепарабельні симетричні простори, простір $C(\mathbb{T})$, дійсний простір Гарді є однорідними.

Наступне твердження децю узагальнює відому теорему Фейєра.

Теорема 3. Нехай функція $f \in L^1(\mathbb{T})$, а $\sigma_n(f; x)$ — середнє арифметичне n -ої симетричної суми ряду Фур'є f . Тоді для довільного компакту $\mathbb{K} \subset \mathbb{T}$, що є підмножиною точок неперервності функції f

$$\sigma_n(f; x) \underset{\mathbb{K}}{\rightrightarrows} f(x). \quad (4)$$

Зауважимо, що у випадку, коли компакт $\mathbb{K}$ є відрізком, отримуємо відому теорему Фейєра.

З теорем 1 і 3 випливає наступне твердження.

Теорема 4. Якщо коефіцієнти ряду Фур'є функції $f \in L^1(\mathbb{T})$ для деякого $p > 1$ задовольняють умову

$$\sum_{|k| \geq n} |c_k|^p = O(n^{1-p}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (5)$$

то цей ряд збігається до f у кожній її точці неперервності і ця збіжність рівномірна на кожній компактній підмножині її точок неперервності.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Харди Г., *Расходящиеся ряды* — Москва, 1951. — 504 с.
- [2] Жук В.В., *Аппроксимация периодических функций* — Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1982. — 366 с.

НТУУ "КПІ імені Ігоря Сікорського Київ, Україна
Email address: tsyhanok.ok@gmail.com

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Email address: mikhailets@imath.kiev.ua

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО ВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Д.А. ШИМАНСЬКА

Розглядається рівняння

$$(Lu)(t, x, y) := \alpha(t)\partial_t u(t, x, y) - \beta(t)(x\partial_y + a\partial_x^2)u(t, x, y) - cu(t, x, y) = f(t, x, y), (t, x, y) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (1)$$

де a, c — сталі з $\mathbb{R}$, причому $a > 0$;

α і β — неперервні на $[0, T]$ функції, причому $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ на $(0, T]$,

$$\alpha(0)\beta(0) = 0;$$

$$\Pi_{(0, T]} := \{(t, x, y) \mid t \in (0, T], (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Це рівняння є виродженим з таких двох причин:

- 1) у нього не входить похідна другого порядку за змінною y , тому воно є ультрапараболічним;
- 2) воно має виродження при $t = 0$, що спричинено наявністю функцій α і β з указаними властивостями.

Виродження рівняння (1) класифікується за величинами

$$A(t, \tau) := \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \quad \text{і} \quad B(t, \tau) := \int_{\tau}^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta.$$

У випадку, коли $A(T, 0) < \infty$, рівняння має слабке виродження, а коли $A(T, 0) = \infty$, то сильне. Якщо $A(T, 0) = \infty$ і $B(T, 0) = \infty$, то маємо випадок дуже сильного виродження.

Через неявність у рівнянні (1) виродження при $t = 0$ для нього не завжди можна розглядати задачу Коші з початковими даними при $t = 0$ у звичайному розумінні, але можна говорити про фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) згідно з таким означенням.

Означення. ФРЗК для рівняння (1) називається функція

$$Z(t, x, y; \tau, \xi, \eta), 0 < \tau < t \leq T, \{x, y, \xi, \eta\} \subset \mathbb{R},$$

така, що формула

$$u(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} Z(t, x, y; \tau, \xi, \eta) \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta, (t, x, y) \in \Pi_{(\tau, T]}, \quad (2)$$

визначає розв'язок рівняння (1) для $(t, x, y) \in \Pi_{(\tau, T]}$, який задовольняє початкову умову

$$u(t, x, y) \Big|_{t=\tau} = \phi(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

для будь-якого $\tau \in (0, T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції ϕ .

Основним результатом доповіді є отримання такої явної формули для ФРЗК Z :

$$\begin{aligned} Z(t, x, y; \tau, \xi, \eta) = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2\pi(B(t, \tau))^2} \exp \left\{ cA(t, \tau) - \frac{(x - \xi)^2}{a(B(t, \tau))} + \right. \\ \left. + \frac{3(x - \xi)(y - \eta + xB(t, \tau))}{a(B(t, \tau))^2} - \frac{3(y - \eta + xB(t, \tau))^2}{a(B(t, \tau))^3} \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

Для отримання формули (3) розглядається в $\Pi_{(\tau, T]}$ задача Коші

$$Lu = 0, u \Big|_{t=\tau} = \phi.$$

розв'язок якої шукається у вигляді

$$u(t, x, y) = F^{-1}[v(t, \sigma_1, \sigma_2)](t, x, y), (t, x, y) \in \Pi_{(\tau, T]}, \quad (4)$$

де F^{-1} — обернене перетворення Фур'є за просторовими змінними, а v — невідома функція.

Для v отримується така задача:

$$\begin{aligned} (\alpha(t)\partial_t + \beta(t))(\sigma_2\partial_{\sigma_1} + a\sigma_1^2) - c)v(t, \sigma_1, \sigma_2) = 0, \\ v(t, \sigma_1, \sigma_2) \Big|_{t=\tau} = F[\phi(x, y)](\sigma_1, \sigma_2). \end{aligned}$$

Методом характеристик знаходиться розв'язок цієї задачі, він підставляється у формулу (4), обчислюється обернене перетворення Фур'є та отримується формула (2). Ядро інтеграла з (2) і є ФРЗК.

Результат знаходження ФРЗК буде використовуватися для встановлення коректної розв'язності рівняння (1) зі звичайними початковими даними у випадку слабого виродження з ваговими початковими даними, коли виродження сильне, і без початкових умов у випадку дуже сильного виродження.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Email address: shmnsk.dipht@gmail.com

ВЕЙВЛЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕЛЬЗАКІ

Р.А. ШУРУБУРА

Класичні інтегральні перетворення, такі як: перетворення Фур'є, Лапласа, Сумуду відіграють важливу роль у розв'язанні класичних задач математичного аналізу та теорії диференціальних рівнянь. Одним з сучасних та ефективних перетворень є, так зване, інтегральне перетворення Ельзакі.

Перетворення Ельзакі може бути використано для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та інженерних задач управління. Воно вважається значно легшим, ніж перетворення Лапласа, простішим у використанні та доступнішим у розумінні. Також перетворення Ельзакі може слугувати допоміжним методом для перетворення Лапласа.

Незважаючи на те, що дане перетворення не є достатньо відомим, як перетворення Лапласа, Фур'є, Меліна, Ханкеля та Сумуду, за період його існування отримано ще мало результатів, але його головною перевагою є те, що його використовують для вирішення багатьох проблем, не вдаючись до переходу до нової частотної області, оскільки воно зберігає масштаби та властивості одиниць.

Дане перетворення можна означити наступним чином (див., напр., [1]):

$$E[f(x)] = T(v) = v \int_0^{\infty} f(t) e^{-\frac{t}{v}} dt, \quad t \geq 0, \quad k_1 \leq v \leq k_2.$$

В даному інтегральному рівнянні змінна v використовується для факторизації змінної t в аргументі функції f .

Для будь-якої функції виконується

$$T(v) = \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n v^{n+2}.$$

Функцію $f(t)$, яка може бути представлена у вигляді збіжного ряду при $t > 0$, можна застосовувати як розв'язок звичайних диференціальних рівнянь та інженерних задач управління (див. [2], [3]).

Достатніми умовами існування перетворення Ельзакі є умови експоненціального порядку. Це означає, що перетворення Ельзакі може існувати, а може і не існувати.

Сформулюємо наступну теорему, що показує зв'язок перетворень Лапласа та Ельзакі:

Теорема 1. *Нехай*

$$f(t) \in A = \left\{ f(t) \in A = \{f(t) | \exists M, K_1, k_2 > 0, \text{ такі що} | \right. \\ \left. |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{k_i}}, \text{ якщо } t \in (-1)^j \times [0; \infty) \} \right\},$$

де перетворення Лапласа $F(s)$, тоді перетворення Ельзакі $T(v)$ функції $f(t)$ має вигляд

$$T(v) = vF\left(\frac{1}{v}\right).$$

Це перетворення є настільки близьким до перетворення Лапласа і перетворення Фур'є, що вимагає додаткового більш докладного порівняння з ними.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] The New Integral Transform "ELzaki Transform" / Tarig. M. Elzaki / Global Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 7(3), Number 1 (2011), p. 57–64.
- [2] On Some Application of a New Integral Transform / Eltayeb H. and A. Kilicman / International Journal of Mathematical Analysis, 4(3), p.123- 132 (2010).
- [3] A note on Integral Transforms and partial Differential Equations / Kilicman. A. and H. Eltayeb / Applied Mathematical Sciences, 4(3), p.109-118 (2010)

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: ruslanashr@icloud.com

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У БАГАТОВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ

В.К. ЮСЬКОВИЧ

Нехай X – розв'язок n -вимірного стохастичного диференціального рівняння (СДР)

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t),$$

де $a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, W – m -вимірний вінерівський процес.

Нами отримані деякі достатні умови, які при $t \rightarrow \infty$ з імовірністю 1 забезпечують:

- 1) прямування модуля розв'язку до нескінченності;
- 2) стабілізацію полярного кута розв'язку;
- 3) еквівалентність $X(t)$ до розв'язку звичайного диференціального рівняння $dY(t) = a(Y(t))dt$.

Асимптотична поведінка розв'язків автономних одновимірних СДР досліджувалася у роботах [1], [2], [4], [6], узагальнення на неавтономний випадок див. у роботі [3]. Багатовимірні СДР досліджуються, наприклад, у роботі [5].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Гихман И. И., Скороход А. В. *Стохастические дифференциальные уравнения*. – К.: Наукова думка. – 1968. – 356 с.
- [2] Keller G., Kersting G., Rösler U. *The asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations* // The Annals of Probability. – 1987. – V. 15, № 1. – P. 305–343.
- [3] Buldygin V. V., Klesov O. I., Stainebach J. G., Tymoshenko O. A. *On the φ -asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations* // Theory of stochastic processes. – 2008. – № 1. – P. 11–30.
- [4] Pilipenko A., Proske F. N. *On perturbations of an ODE with non-Lipschitz coefficients by a small self-similar noise* // Statistics & Probability Letters. – 132:62–73, 2018a.
- [5] Самойленко М. А., Станжицький О. М., Новак І. Г. *Про асимптотичну відповідність між розв'язками стохастичних та звичайних рівнянь* // Укр. мат. журн. – 2011. – Т. 63, № 8. – С. 1103–1127.
- [6] Pilipenko A., Pavlyukevich I. *Generalized selection problem with Lévy noise* // <https://arxiv.org/abs/2004.05421>. – 2020. – 17 p.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: viktyusk@gmail.com

КОНСИСТЕНТНІСТЬ І ОЦІНКА МІНІМАЛЬНОГО КОНТРАСТУ

К.С. ЯРЕМКО, І.В. ОРЛОВСЬКИЙ

На ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ розглянемо модель регресії:

$$X_j = g(j, \alpha_0) + \varepsilon_j, \quad j \geq 1, \quad (1)$$

де $g(j, \cdot) : A_\beta \rightarrow \mathbb{R}, j \geq 1$, – неперервні функції, $A_\beta = \bigcup_{\|e\| \leq 1} (A + \beta e), \beta > 0$

τ – деяке число, $A \subset \mathbb{R}^q$ – обмежена опукла відкрита множина, $\alpha_0 \in A$ – істинне значення параметра. Відносно шуму ε_j припустимо наступне:

A1. $\varepsilon_j, j \in \mathbb{Z}$, є лінійним часовим рядом вигляду $\varepsilon_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{a}(j-k)\xi(k)$,

де $\xi(k), k \in \mathbb{Z}$, – незалежні однаково розподілені випадкові величини з $E\xi(0) = 0$ і такі, що $E|\xi(0)|^k < \infty, k = 1, 2, \dots, \hat{a}(j) = 0, j \geq 1, \hat{a} \in l_1$.

З умови A1 спектральні щільності лінійного часового ряду ε усіх порядків існують і мають вигляд:

$$f_r(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}) = d_r a \left(\sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k \right) \prod_{k=1}^{r-1} a(\lambda_k),$$

де $d_r - r$ -та кумулянта $\xi(0)$, $a \in L_2[-\pi; \pi], a(\lambda) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{a}(j)e^{-i\lambda j}, \lambda \in [-\pi; \pi]$.

A2.

- i. $f_r \in L_1([-\pi; \pi]^{r-1}), r \geq 2$;
- ii. $a(\lambda) = a(\lambda, \theta^{(1)}), d_2 = d_2(\theta^{(2)}), \theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) \in \Theta_\tau, \Theta_\tau = \bigcup_{\|e\| < 1} (\Theta + \tau e), \tau > 0$ деякі числа, $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ обмежена відкрита опукла множина, така що $f(\lambda) = f(\lambda, \theta), \theta \in \Theta_\tau$, істинне значення параметра $\theta_0 \in \Theta$;
- iii. $f(\lambda, \theta) > 0, (\lambda, \theta) \in \mathbb{R} \times \Theta^c$.

Означення 1. Будь-який випадковий вектор $\hat{\alpha}_N = (\hat{\alpha}_{1N}, \dots, \hat{\alpha}_{qN})' \in A^q$ який має властивість

$$Q_N(\hat{\alpha}_N) = \min_{\tau \in \Theta} Q_N(\tau), \quad Q_N(\tau) = \sum_{j=1}^N [X_j - g(j, \tau)]^2$$

називається оцінкою найменших квадратів (ОНК) невідомого параметра α , отриманого за спостереженнями $\{X_j, j = \overline{1, N}\}$.

Розглянемо залишкову періодограму

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{j=1}^N e^{-ij\lambda} (X_j - g(j, \hat{\alpha}_N)) \right|^2, \quad \lambda \in [-\pi; \pi],$$

і поле контрасту Уїтла $U_N(\theta, \hat{\alpha}_N) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\log f(\lambda, \theta) + \frac{f(\lambda, \theta)}{I_N(\lambda)} \right) d\lambda$, $\theta \in \Theta^c$.

Означення 2. Оцінкою мінімального контрасту (ОМК) для невідомого параметра $\theta_0 \in \Theta$ називають випадковий вектор $\hat{\theta}_N = (\hat{\theta}_{1N}, \dots, \hat{\theta}_{mN})$ такий, що $U_N(\hat{\theta}_N; \hat{\alpha}_N) = \min_{\theta \in \Theta^c} U_N(\theta; \hat{\alpha}_N)$.

Нехай функції $g(j, \alpha)$, $j \geq 1$, неперервно диференційовні за $\alpha \in A^c$. Позначимо $g_i(j, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} g(j, \alpha)$, $i = \overline{1, q}$,

$$d_N(\alpha_0) = \text{diag}(d_{iN}(\alpha_0), i = \overline{1, q}), \quad d_{iN}^2(\alpha_0) = \sum_{j=1}^N g_i^2(j, \alpha_0).$$

Припустимо, що виконуються наступні умови:

C1. ОНК $\hat{\alpha}_N$ є слабкою консистентною оцінкою $\alpha_0 \in A$:

$$N^{-\frac{1}{2}} d_N(\alpha_0) (\hat{\alpha}_N - \alpha_0) \xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

C2. Існує така константа $c_0 < \infty$ така, що для будь-яких $\alpha_0 \in \Theta$ і $N > N_0$, де c_0 і N_0 можуть залежати від α_0 ,

$$\sum_{j=1}^N (g(j, \alpha) - g(j, \alpha_0))^2 \leq c_0 \|d_N(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0)\|^2, \quad \alpha \in A^c$$

C3. $f(\lambda, \theta_1) \neq f(\lambda, \theta_2)$ на множині додатної міри Лебега, при $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_1, \theta_2 \in \Theta^c$.

Теорема 1. З умов **A1**, **A2**, **C1** – **C3** $\hat{\theta}_N \xrightarrow{P} \theta$, $N \rightarrow \infty$.

Отриманий результат розширює результат [1] на випадок дискретного часу.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, I.V. Orlovskiy *On the Whittle estimator for linear random noise spectral density parameter in continuous-time nonlinear regression models.* // Stat Inference Stoch Process — Т.14. — С.129-169.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: katya.d308@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: orlovskiy@matan.kpi.ua

Секція 2.

Метричної теорії чисел, геометрії,
фрактального аналізу

Section 2.

Metric number theory, geometry,
fractal analysis

ФРАКТАЛЬНІ ФУНКЦІЇ, АРГУМЕНТ І ЗНАЧЕННЯ ЯКИХ МАЮТЬ ОДНАКОВЕ ЗОБРАЖЕННЯ

С.Г. АННАГЕЛЬДІЄВА, О.Б. ПАНАСЕНКО

В останні два десятиліття розвинулась ідея означення дійсних функцій за допомогою встановлення зв'язку між цифрами аргументу і цифрами значень, які записано в певних системах числення. Таким чином формально просто визначаються функції, які мають складну локальну поведінку (див., наприклад, [1]). Такого роду функції можуть бути визначені також як розв'язки деяких систем функціональних рівнянь [2].

Нехай $s \geq 2$ і ϵ набір відображень $\varphi_i: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ($i = \overline{0, s-1}$) такі, що усі φ_i — ін'єктивні та стискуючі та $\bigcup_{i=0}^{s-1} \varphi_i([0, 1]) = [0, 1]$. Тоді $\{\varphi_i\}$ породжують локально тонку систему покриттів, де $\varphi_i([0, 1])$ — циліндричні відрізки першого рангу, $(\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_k})([0, 1])$ — циліндричні відрізки рангу k , а кожне число з відрізка $[0, 1]$ може бути зображене у вигляді

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_{\alpha_1} \circ \varphi_{\alpha_2} \circ \dots \circ \varphi_{\alpha_n})(\tilde{x}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{\{\varphi_i\}}, \quad \tilde{x} \in [0, 1] \text{ (довільне)}$$

Для двох наборів відображень $\{\varphi_i\}_{i=1}^s$ та $\{\psi_i\}_{i=1}^s$, які задовольняють наведене вище означення, можна формально просто визначити функцію виду $f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{\{\varphi_i\}}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{\{\psi_i\}}$. Для перевірки коректності такого означення слід пересвідчитись у тому, що значення функції не залежить від різних способів зображення аргументу. Побудована функція може мислитись як розв'язок ітеративної системи функціональних рівнянь $f(\varphi_i(x)) = \psi_i(f(x))$, $i = \overline{0, s-1}$. Багато відомих прикладів фрактальних функцій можуть бути визначені у такий спосіб.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В., Панасенко О.Б. *Диференціальні і фрактальні властивості одного класу самоафінних функцій* // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. — 2009. — Т. 32, №1. — С. 3–13.
- [2] Girgensohn R. *Nowhere differentiable solutions of a functional equations* // Aequ. Math. — 1994. — Vol. 47. — P. 89–99.

ВДПУ ім. Михайла Коцюбинського, Вінниця, Україна
Email address: annageldievasvitlana@gmail.com

ВДПУ ім. Михайла Коцюбинського, Вінниця, Україна
Email address: oleksii.panasenko@vspu.edu.ua

2[∞]-ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ОДИНИЧНОГО ВІДРІЗКА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Н.А. БІЛОВИЦЬКА, С.П. РАТУШНЯК

Розглядається класичне двійкове зображення числа піввідрізку $(0; 1]$ засобами алфавіту $A = \{0, 1\}$, причому для чисел, що мають два зображення $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 1(0)}^2 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 0(1)}^2$ використовуємо лише зображення з періодом (1) . Тоді довільне число з $(0; 1]$ можна представити у вигляді:

$$x = \underbrace{\Delta_{0 \dots 0 1}^2}_{a_1-1} \underbrace{\Delta_{0 \dots 0 1}^2}_{a_2-1} \dots \underbrace{\Delta_{0 \dots 0 1}^2}_{a_n-1} \dots = \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2}} + \dots \frac{1}{2^{a_1+a_2+\dots+a_n}} + \dots = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{2^\infty},$$

де $a_i \in \mathbb{N}$. Таким чином ми отримуємо перекодування двійкового зображення в зображення засобами нескінченного алфавіту. Причому в силу бієктивності відображення одного зображення в інше маємо, що розклад числа x єдиний, а тому нове зображення має екстранульову надлишковість. Розклад числа у вигляді ряду називається 2[∞]-представленням, а скорочений запис $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{2^\infty}$ — 2[∞]-зображенням.

Геометрію 2[∞]-зображення чисел описують властивості циліндричних множин: довжина циліндра $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{2^\infty}$, що є інтервалом з такими кінцями $(\Delta_{c_1 c_2 \dots [c_m+1](1)}^{2^\infty}; \Delta_{c_1 c_2 \dots [c_m+1](1)}^{2^\infty} + \frac{1}{2^{c_1+c_2+\dots+c_m}}]$, дорівнює $|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{2^\infty}| = \frac{1}{2^{c_1+c_2+\dots+c_m}}$, а основне метричне відношення має вигляд $\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^{2^\infty}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{2^\infty}|} = \frac{1}{2^i}$.

Розглядається функція f_k для $k \in \mathbb{N}$, означена рівністю

$$f_k(\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{2^\infty}) = \Delta_{[a_1+k][a_2+k] \dots [a_n+k] \dots}^{2^\infty}. \quad (1)$$

Теорема 1. Функція f_k , визначена рівністю (1) на інтервалі $(0; 1]$ є лінійною строго зростаючою функцією $y = \frac{x}{2^k}$.

Доповідь присвячена властивостям класу функцій f_k , означених в термінах 2[∞]-зображення чисел.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В. Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій// Наук. час. НПУ ім. М.П. Драгоманова. С.1. — 2013, № 14.— С. 189–216.
- [2] Працьовитий М.В., Ісаєва Т.М. Кодування дійсних чисел з нескінченим алфавітом і основою 2. Наук. час. НПУ ім. М.П. Драгоманова. С.1. — 2013, № 15. — С. 5–23.

НПУ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА, ІМ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: n.bilovytska@gmail.com, ratush404@gmail.com

ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ РЯДАМИ ЛЮРОТА

О.О. ВАСЬКОВСЬКА, С.П. РАТУШНЯК

Представлення чисел рядами Люрота (додатними або знакозмінними) полягає в розкладі числа x з піввідізка $(0; 1]$ відповідним рядом Люрота (J. Luroth 1883 р.). Нехай $A = N$ — алфавіт, $L = N \times N \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту (послідовностей натуральних чисел). Тоді для числа $x \in (0; 1]$ існує єдина послідовність $(d_n) \in L$ така, що

$$x = \frac{1}{d_1+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{d_1(d_1+1)\dots d_n(d_n+1)(d_{n+1}+1)} \equiv \Delta_{d_1 d_2 \dots d_n \dots}^L,$$

при цьому ряд називається представленням числа рядом Люрота, а його скорочений (формальний) запис $\Delta_{d_1 d_2 \dots d_n \dots}^L$ — L -зображенням. Оскільки розклад в ряд Люрота для числа x з півінтервалу $(0; 1]$ єдиний, то L -зображення має екстранульову надлишковість.

Циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L$ як множина чисел x півінтервалу $(0; 1]$, що мають зображення $x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \alpha_1 \alpha_2 \dots}^L$, де $\alpha_i \in N$ є півінтервалом з кінцями $(a_m; a_m + \frac{1}{c_1(c_1+1)\dots c_m(c_m+1)})$, де $a_m = \Delta_{c_1 c_2 \dots [c_m+1](1)}^L$, при цьому довжина циліндра $\Delta_{c_1 \dots c_m}^L$ обчислюється: $|\Delta_{c_1 \dots c_m}^L| = \frac{1}{c_1(c_1+1)\dots c_m(c_m+1)}$, а основне метричне відношення, яке знаходиться з рівності $\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^L|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L|} = \frac{1}{i(i+1)}$, де $i \in N$ не залежить ні від основи, ні від довжини циліндра, а тому зображення додатними рядами Люрота є N -самоподібним нескінченно-символьним зображенням, яке є частковим випадком Q^∞ -зображення.

У доповіді пропонуються результати дослідження фрактальних властивостей множини $C = C[L; V_n]$, у зображенні чисел якої рядами Люрота на фіксованих місцях використовуються елементи з множини $V_n \subset N$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Жихарєва Ю.І., Працьовитий М.В. *Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи метричної теорії* // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.- мат. науки, 2008. — № 9. — С. 200–211.
- [2] Працьовитий М.В., Хворостіна Ю.В. *Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування.* // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки, 2010. — № 11. — С.102–118.

ІМ НАН УКРАЇНИ, НПУ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: Olhavaskovskaya1@gmail.com, ratush404@gmail.com

НЕГА-ДВІЙКОВА СИСТЕМА ЧИСЛЕННЯ І ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

М.С. ГОЛОВІЙ, І.М. ЛИСЕНКО

Нехай $A = \{0, 1\}$ — алфавіт, $L = A \times A \times \dots$ — простір елементів алфавіту. Тоді для $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$, така що

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots}^2.$$

Ввівши перекодування класичного двійкового зображення наступним чином: $\tau_{2n-1} = 1 - \alpha_{2n-1}$ і $\tau_{2n} = \alpha_{2n}$, отримаємо представлення числа двійковим рядом з основою (-2) , так зване нега-двійкове зображення числа [1]:

$$x = \frac{2}{3} + \frac{\tau_1}{(-2)^1} + \frac{\tau_2}{(-2)^2} + \frac{\tau_3}{(-2)^3} + \dots \equiv \overline{\Delta}_{\tau_1 \tau_2 \tau_3 \dots}^2.$$

Розклад числа в знакозмінний двійковий ряд називається нега-двійковим представленням числа, а скорочений запис $\overline{\Delta}_{\tau_1 \tau_2 \tau_3 \dots}^2$ — нега-двійковим зображенням.

Очевидно, що між двійковим і нега-двійковим зображенням одного і того ж числа встановлюється рівність:

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{2n} \alpha_{2n+1} \dots}^2 = \overline{\Delta}_{[1-\alpha_1] \alpha_2 [1-\alpha_3] \dots \alpha_{2n} [1-\alpha_{2n+1}] \dots}^2.$$

Тому тополого-метричні властивості цих зображень схожі.

Розглядається функція f , означена в термінах нега-двійкового зображення рівністю: $f(x = \overline{\Delta}_{\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \dots}^2) = \overline{\Delta}_{\tau_1 [1-\tau_2] \tau_3 [1-\tau_4] \dots}^2$. Функція f є некоректно означеною для чисел, що мають два зображення: $\overline{\Delta}_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n 0(01)}^2 = \overline{\Delta}_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n 1(10)}^2$. Тому домовимося не використовувати одне із зображень.

Доповідь присвячена тополого-метричним і фрактальним властивостям функції f , а також властивостям графіка.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В., Гончаренко Я.В., Лисенко І.М. *Нега-двійкове представлення дійсних чисел і його застосування* // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2015. — № 17. — С. 83-106.
- [2] Фомін С. В. *Системи числення* — М. : Наука, 1987. — 48 с.

НПУ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: mgolovy@gmail.com, iryna.pratsiovyta@gmail.com

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТОПОЛОГО-МЕТРИЧНИХ ТА ФРАКТАЛЬНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МНОЖИН НЕПОВНИХ СУМ ЗБІЖНИХ ДОДАТНИХ РЯДІВ

Д.М. КАРВАЦЬКИЙ

Нагадаємо, що якщо $M \in 2^N$, або іншими словами $M \subseteq N$ (N — множина натуральних чисел), то число

$$x = x(M) = \sum_{n \in M} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n,$$

де

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{при } n \in M, \\ 0, & \text{при } n \notin M, \end{cases}$$

називається *неповною сумою ряду*.

Проблема дослідження властивостей множини неповних сум ряду є досить глибокою в історичному сенсі. Тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум ряду суттєво залежать від співвідношення між його членами та залишками [2].

У роботі [1] встановлено, що множина неповних сум довільного збіжного додатного ряду є однією з трьох типів: скінченним об'єднанням відрізків, гомеоморфною до множини Кантора або канторвалом.

У доповіді буде розглядатися методика доведення канторвальності множини неповних сум певного класу рядів, члени яких пов'язані з узагальненими послідовностями Фібоначчі.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Guthrie J. A., Nymann J. E. *The topological structure of the set of subsums of an infinite series* // Colloq. Math. — 1988. — Vol. 55, № 2. — P. 323-327.
- [2] Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженні сингулярних розподілів*. — К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: d.karvatsky@gmail.com

ПРО МІРУ ЛЕБЕГА ОДНІЄЇ МНОЖИНИ ПОБУДОВАНОЇ В ТЕРМІНАХ Q_2^* -ПРЕДСТАВЛЕННЯ

Р.В. КРИВОШИЯ

Нехай $(p_{0n}; p_{1n})$ — послідовність стохастичних векторів з строго додатними координатами така, що

$$\prod_{n=1}^{\infty} \max\{p_{0n}; p_{1n}\} = 0.$$

Відомо [1], що для довільного дійсного числа $x \in [0; 1]$ існує нескінченний двійковий вектор $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n; \dots)$ такий, що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \beta_{\alpha_2 2} p_{\alpha_1 1} + \beta_{\alpha_3 3} p_{\alpha_2 2} p_{\alpha_1 1} + \dots + \beta_{\alpha_{(n+1)}(n+1)} p_{\alpha_n n} p_{\alpha_{n-1}(n-1)} \dots p_{\alpha_1 1} + \dots, \quad (1)$$

де

$$\begin{cases} \beta_{0n} = 0, \\ \beta_{1n} = p_{0n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Представлення (1) називається Q_2^* -представленням числа x і має наступне зображення:

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2^*}.$$

Теорема 1. Якщо існують числа p_0 та p_1 , такі що $p_0 + p_1 = 1$, $p_0, p_1 > 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |p_{0n} - p_0| < +\infty,$$

то 0 множини чисел x таких, що для довільного двійкового вектора $(c_1; c_2; \dots; c_r)$ виконується умова $\frac{w_k}{k} \rightarrow p_{c_1} p_{c_2} \dots p_{c_r}$ $k \rightarrow \infty$ де w_k — кількість блоків цифр $[c_1; c_2; \dots; c_r]$, що не перетинаються, серед набору цифр $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, має міру Лебега 1.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. Киев: Наук. думка, 1992. 208 с.
- [2] Borel É. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1909, 247–271.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: mostik19@gmail.com

G_2 -ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

І.М. ЛИСЕНКО, Ю.П. МАСЛОВА

Нехай $A = \{0; 1\}$ — алфавіт, $L = A \times A \times \dots \times A \times \dots$ — простір послідовностей алфавіту, $\bar{g} = (g_0; g_1)$ — фіксована пара чисел, причому $\frac{1}{2} < g_0 < 1$, $g_1 \equiv g_0 - 1$; $\delta_0 \equiv 0$, $\delta_1 \equiv g_0$. Зауважимо, що $\delta_j = jg_{1-j}$, $|g_1| = -g_1 < \frac{1}{2}$.

Теорема 1. Для будь-якого $x \in [0; g_0]$ існує $(\alpha_n) \in L$, така, що

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{G_2}. \quad (1)$$

Зображення $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}$ числа $x \in [0; g_0]$, встановлене рівністю (1), називається G_2 -зображенням. При цьому α_n називається n -ною цифрою даного зображення.

Нехай $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{G_2}$, $N_1(x, k) \equiv \alpha_1 + \dots + \alpha_k$, $N_0(x, k) = k - N_1(x, k)$.

Означення 1. Границя (у випадку її існування)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_i(x, k)}{k} = \nu_i^{G_2}(x), \quad i \in A,$$

називається частотою цифри i у G_2 -зображенні числа x .

Теорема 2. (Аналог теореми Бореля для двійкового зображення). Множина $B = \{x : \nu_0^{G_2}(x) = g_0\}$ чисел x відрізка $[0; g_0]$, частота цифри 0 у G_2 -зображенні яких дорівнює g_0 , має міру Лебега рівну g_0 .

У доповіді наводиться доведення твердження засобами аналізу.

Теорема 3. (Аналог теореми Безиковича для двійкового зображення). Множина $E = \{x : \nu_0^{G_2}(x) = p_0\}$ чисел x відрізка $[0; g_0]$, частота цифри 0 у G_2 -зображенні яких дорівнює p_0 , має розмірність Гаусдорфа-Безиковича рівну $\alpha_0(E) = \frac{\ln p_0^{p_0} (1 - p_0)^{1-p_0}}{\ln g_0^{p_0} (1 - g_0)^{1-p_0}}$.

Теорема 4. Випадкова величина $\tau = \Delta_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \dots}^{G_2}$ цифри (τ_n) G_2 — зображення якої є незалежними однаково розподіленими, причому τ_n набуває значень 0 і 1 з ймовірностями p_0 і $p_1 = 1 - p_0$ відповідно при $p_0 \neq g_0$ має чисто сингулярний розподіл салемівського типу.

НПУ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: iryna.pratsiovyta@gmail.com, julia0609mas@gmail.com

ПРО ОДИН РОЗПОДІЛ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДВІЙКОВИМ ДРОБОМ

О.П. МАКАРЧУК, К.С. САЛЬНИК

Нехай τ_n — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0, a_n$ з ймовірностями p_{0n} та p_{1n} відповідно. Послідовність $|a_n|$ складається з непарних натуральних чисел та є обмеженою. Розглянемо випадкову величину

$$\tau = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_n}{2^n}.$$

Теорема 1. Розподіл τ є чистим, причому дискретним лише тоді, коли

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \max\{p_{0n}, p_{1n}\} > 0;$$

абсолютно неперервним лише тоді, коли

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(p_{0n} - \frac{1}{2}\right)^2 < +\infty,$$

сингулярним лише тоді, коли

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(p_{0n} - \frac{1}{2}\right)^2 = +\infty,$$

та

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \max\{p_{0n}, p_{1n}\} = 0.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. Киев: Наук. думка, 1992. 208 с.
- [2] Титчмарш Е. Теория функций. Москва: Наука, 1980. 464 с.

ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА, КРОПИВНИЦЬКИЙ, УКРАЇНА

Email address: makolpet@gmail.com

ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА, КРОПИВНИЦЬКИЙ, УКРАЇНА

Email address: vikasvat20139@gmail.com

ПОБУДОВА ГПВЧ НА ОСНОВІ ФРАКТАЛІВ

І.О. МАНИЧ

У даній роботі розглянута проблема необхідності випадкових чисел у сучасних галузях, що використовують прикладну математику. Дана робота є дослідженням нових методів для постійного генерування псевдовипадкових послідовностей довільної довжини. Методи, розглянуті у роботі передбачають можливість генерування дихотомічних псевдовипадкових за допомогою побудов фрактальних структур. Актуальність даної теми пов'язана з великим попитом на генератори псевдовипадкових чисел, які відповідають загальновизнаним стандартам, таким як NIST, тести Diehard, частотним перевіркам та багатьом іншим. Попит викликаний широким спектром застосування псевдовипадкових вибірок у найрізноманітніших сферах, таких як Методи Монте-Карло, криптографія, імітаційне моделювання. Основними об'єктами дослідження є фрактали. В ході роботи запропоновані їх нові прикладні значення, розглянуті різні методи взаємодії з ними, підходи до їх програмної реалізації. Були проведені наступні кроки:

- (1) Запрограмована побудова зображення потрібного фрактала до певної ітерації.
- (2) Запропонована методика отримання випадкових чисел через координати пера при малюванні зображення фрактала.
- (3) Визначенні формул для псевдовипадкових чисел з урахуванням вирішення проблеми періодичності.

$$x_i = \sum_{j=0}^i c_j d \cos \sum_{k=0}^j \alpha_k$$

для послідовностей коефіцієнтів c_j та α_j , задання яких виводиться з методу побудови фрактальних фігур

- (4) Висунута гіпотеза H_0 про те, що ці числа є випадковими
- (5) Визначено набір перевірок, унаслідок якого буде прийняте рішення про прийняття або спростування гіпотези
- (6) Проведено тести: Фон мізеса, Колмогорова-Смірнова, Пірсона, тест кількості серій.
- (7) Наведена візуалізація

Внаслідок тестів було виявлено, наскільки ефективними є отримані ГПВЧ та які коефіцієнти краще підходять для таких формул. Також запропонований варіант, як з даного ГПВЧ отримати ГВЧ за допомогою різних джерел ентропії. За приклад взятий час виконання складних операцій процесором.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Grzegorz Rozenberg, Arto Salomaa *The mathematical theory of L systems* // New York: Academic Press — 1980.
- [2] Aristid Lindenmayer. *Mathematical models for cellular interaction in development*.
- [3] N.G. Bardis, A.P. Markovskiy, N. Doukas, N. V. Karadimas *True Random Number Generation Based on Environmental Noise Measurements for Military Applications Proceedings of the 8th // WSEAS International Conference on SIGNAL PROCESSING, ROBOTICS and AUTOMATION*. — 2009.
- [4] John Von Neumann *Various techniques used in connection with random digits National Bureau of Standards Applied Mathematics Series* — 1951.
- [5] Sherif H. AbdElHaleem, Ahmed G. Radwan and Salwa K. Abd-El-Hafiz *Design of Pseudo Random Keystream Generator Using Fractals*
- [6] 2. 1Thamizhchelvy, K. and G. Geetha *An Efficient Image Generation Algorithm Using Fractals and Chaos Theory*

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: eomega123@gmail.com

ДРОБИ ДАНЖУА І МЕДІАНТНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

О.О. НІКОРАК, С.П. РАТУШНЯК

Медіантною сумою, або просто *медіантою* двох дробів $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ називається дріб, чисельник якого дорівнює сумі чисельників, а знаменник – сумі знаменників: $\frac{a+c}{b+d}$.

Задавши розбиття відрізка $[0; 1]$ так, що $\Delta_0 \equiv [\frac{0}{1}; \frac{1}{2}]$, $\Delta_1 \equiv [\frac{1}{2}; \frac{1}{1}]$, ..., $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0} \equiv [\frac{a}{b}; \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}]$, $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1} \equiv [\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}; \frac{c}{d}]$, де $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m} \equiv [\frac{a}{b}; \frac{c}{d}]$, отримаємо систему вкладених відрізків $\Delta_{c_1}, \Delta_{c_1 c_2}, \dots, \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}, \dots$, що породжують систему зображення числа $x = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m} \equiv \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^M$, де $c_i \in \{0, 1\}$, яке називатимемо медіантним зображенням числа.

Медіантне зображення чисел є певним перекодуванням зображенням чисел ланцюговими дробами через взаємозв'язок з підхідними дробами:

$$\underbrace{\Delta_{0\dots 0 1 \dots 1}^M}_{a_1-1} \underbrace{\dots 1 \dots 1}_{a_2} \underbrace{\dots 1 \dots 1}_{a_{2n}} \underbrace{0 \dots 0}_{a_{2n+1}} = [0; a_1, a_2, \dots] \text{ і } \underbrace{\Delta_{0\dots 0 1 \dots 1}^M}_{a_1-1} \underbrace{\dots 1 \dots 1}_{a_2} \underbrace{\dots 1 \dots 1}_{a_{n-1}} \underbrace{0 \dots 0}_{a_n} = [\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}; \frac{p_n}{q_n}]$$

при непарному $n \geq 1$ і $\underbrace{\Delta_{0\dots 0 1 \dots 1}^M}_{a_1-1} \underbrace{\dots 0 \dots 0}_{a_2} \underbrace{\dots 0 \dots 0}_{a_{n-1}} \underbrace{1 \dots 1}_{a_n} = [\frac{p_n}{q_n}; \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}]$ при парному $n \geq 2$.

А тому властивості цього зображення в значній мірі є відображенням відомих фактів з теорії ланцюгових дробів.

Доповідь присвячена тополого-метричній теорії медіантного зображення і взаємозв'язку медіантного зображення з зображенням ланцюговими дробами, а також зображенням дробами Данжуа.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів* // – Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. – 296 с.
- [2] Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. *Фрактальные множества, функции, распределения*. — Киев: Наук.думка, 1992.– 208с.

НПУ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА, ІМ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: lenanikorak02@gmail.com, ratush404@gmail.com

ГЕОМЕТРІЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ДВІЙКОВИХ РЯДІВ

Н.С. ОСТРОЛУЦЬКА, М.В. ПРАЦЬОВИТИЙ

У 1914 р. в роботі «Про неповні суми числових рядів» [1] S. Kakey опублікував результати дослідження топологічного типу множини неповних сум $E\{a_n\} = \{x : x = x(M) = \sum_{n \in M \subset N} a_n, M \in 2^N\}$ абсолютно збіжного ряду $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ і встановив, що $E\{a_n\}$ є або досконалою множиною або скінченним об'єднанням відрізків ($|a_n| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots$ для всіх $n \in N$, починаючи з деякого номера) або гомеоморфною класичній множині Кантора ($|a_n| > |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots$ для всіх достатньо великих $n \in N$). Пізніше цими питаннями займалися Г. Горнич, П. Кесава Меноном. Починаючи з 1980 р. А. Вайнштейном, Б. Шапіро і Ф. Пруш-Вішньовским були побудовані контрприкладі до припущення Какея щодо критерію ніде не щільності множини $E\{a_n\}$. З цього моменту такий науковий напрям досліджень в математиці як геометрія числових рядів став плідно розвиватися. Однією з основних задач є вивчення топологічних, метричних і фрактальних властивостей множин неповних сум абсолютно збіжних рядів, яка в загальній постановці є достатньо складною. Тому дослідження проводяться у певних класах рядів.

Розглядається ряд $\frac{1-\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{1-\varepsilon_2}{2^2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \dots$, де $0 \leq \varepsilon_n \leq 1$. Коли $\varepsilon_n = 1$ або $\varepsilon_n = 0$ для будь-якого $n \in N$ маємо справу зі звичайним двійковим рядом, множиною неповних сум якого є відрізок $[0; 1]$.

Теорема 1. *Якщо послідовність (ε_n) є періодичною послідовністю, то множиною неповних сум розглядуваного ряду є скінченне об'єднання відрізків, зокрема відрізок $[0; 1]$ при $\varepsilon_n = \text{Const}$ для $n \in N$.*

Доповідь присвячена тополого-метричним властивостям множини неповних сум одного двійкового ряду.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Kakey S. *On the partial sums of an infinite series*// Tohoku Sci Rep. — 1914. — 3, no. 4. — P. 159–164.
- [2] Корсунь Н.О., Працьовитий М.В. *Про множину неповних сум знакододатних рядів з однією умовою однорідності та узагальнення двійкового зображення чисел*// Наук. час. НПУ ім. М.П. Драгоманова. С.1. Фіз.-мат. науки, 2009. — № 10. — С.28-39.

НПУ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА, ІМ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: nataliaostrolucka@gmail.com, prats4444@gmail.com

ДВІЙКОВА СИСТЕМА ЧИСЛЕННЯ З НАДЛИШКОВИМ АЛФАВІТОМ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

В.Г. ПАРИПСА, М.В. ПРАЦЬОВИТИЙ

Нехай $A_2 = \{0, 1\}$ — алфавіт, $L = A_2 \times A_2 \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту. Будь-яке число з відрізка $[0; 1]$ можна представити (не завжди єдиним чином) у вигляді двійкового ряду. Топологометрична теорія такого зображення і арифметика є добре вивченими [2]. Двійкова система є ефективною при дослідженні диференціальних властивостей функцій зі складною локальною будовою і згортка сингулярних розподілів в.в. [1]. Для останнього виявилось, що випадкова величина $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \tau_k$, де τ_k — незалежні в.в., що набувають значень 0, 1, 2 з ймовірностями p_0, p_1, p_2 , є узагальненням суми незалежних в.в. з незалежними двійковими цифрами. Тобто така згортка розподілів в.в. породжує двійкове зображення з надлишковим алфавітом $A_3 = \{0, 1, 2\}$.

Нове зображення (двійково-трійкове) має ненульову надлишковість, оскільки більшість чисел мають нескінченну кількість зображень, причому комбінації $(0, 2)$ і $(1, 2)$ можна замінити на $(1, 0)$ і $(2, 0)$ відповідно.

Для даного зображення чисел розглядається поняття хвоста зображення як клас еквівалентності за відношення мати однаковий хвіст. Два числа з номери k і m , такі що $a_{k+j} = b_{m+j}$, $j \in N$ при $a_{k-1} \neq b_{m-1}$.

Теорема 1. *Перетин двох хвостових множин двійково-трійкового зображення чисел є непорожньою множиною.*

Доповідь присвячена властивостям хвостових множин двійково-трійкового зображення чисел.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Гончаренко Я. В. *Згортки сингулярних розподілів*: — Рукопис. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фіз-мат наук зі спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика. ІМ НАНУ, Київ, 2004.
- [2] Микитюк І.О., Працьовитий М.В. *Двійкова система числення з надлишковими цифрами і її відповідна метрична теорія чисел* // Наук. зап. НПУ імені М.П. Драгоманова. — №4, 2003. — С. 270-290.
- [3] Працьовитий М.В. *Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел*. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. — 68 с.

НПУ імені М.П. Драгоманова, ІМ НАН України, Київ, Україна
Email address: parypasvova@gmail.com, prats4444@gmail.com

ОДИН КЛАС ФРАКТАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ, ОЗНАЧЕНИХ В ТЕРМІНАХ Q_2^* -ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ ВІДРІЗКА $[0; 1]$

М.В. ПРАЦЬОВИТИЙ, С.П. РАТУШНЯК

Нехай задано Q_2^* -зображення чисел $[1]$ відрізка $[0; 1]$ засобами алфавіту $A = \{0, 1\}$, визначене стохастичною матрицею $\| q_{ik} \|$

$$x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1, 1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k q_{1-\alpha_k, k} \prod_{j=1}^{k-1}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_2^*}, \alpha_i \in A$$

і послідовність $\bar{\varphi} \equiv (\varphi_k)$ фінітних функцій $\varphi_k : A \times A \rightarrow A$.

Розглядається функція $f_{\bar{\varphi}}$, означена рівністю

$$f_{\bar{\varphi}}(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_2^*}) = \Delta_{\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) \varphi_2(\alpha_2, \alpha_3) \dots \varphi_k(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \dots}^{Q_2^*}. \quad (1)$$

Означення функції $f_{\bar{\varphi}}$ є некоректним для двох зображень Q_2^* -бінарного числа, тому домовимося не використовувати зображення з періодом (1).

Оскільки множина послідовностей (φ_n) фінітних функцій φ_n є континуальною, тому мова йде про континуальний клас S функцій $f_{\bar{\varphi}}$.

Теорема 1. *Клас S містить 16 функцій, породжених сталою послідовністю (φ_n) , серед яких неперервна сингулярна функція інверсор цифр Q_2^* -зображення чисел, оператор правостороннього зсуву цифр Q_2^* -зображення, тотожне перетворення та тривіальні; серед функцій, породжених довільною послідовністю функцій (φ_n) неперервними є тривіальні функції $y = C$, $C \in [0; 1]$, що складають континуальну множину.*

Кожна з функцій класу S є фрактальною у різних аспектах: має фрактальний (самоподібний, самоафінний, автомодельний) графік, має фрактальну множину значень, має фрактальні рівні тощо.

У доповіді пропонуються результати дослідження тополого-метричних, фрактальних, інтегро-диференціальних властивостей функцій класу S , а також властивості множин рівнів деяких представників.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Торбин Г.М., Працевитий Н.В. Случайные величины с независимыми Q^* -знаками // Случ. эволюции: теор. и приклад. задачи. — К.: ИМ АНУ, 1992 г. — С.95-104.
- [2] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dyvliakh N.V., Ratushniak S.P. Inversor of digits of Q_2^* -representative // Mat. Stud. 55 (2021), 37–43.

ІМ НАН України, НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна
Email address: prats4444@gmail.com, ratush404@gmail.com

ОЗНАКА РАЦІОНАЛЬНОСТІ ЧИСЛА ЗА ЙОГО Q_2 -ЗОБРАЖЕННЯМ

І.І. ПРОДАН, С.П. РАТУШНЯК

Нехай задано $A = \{0, 1\}$ — алфавіт, $L = A \times A \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту, q_0 — додатне число з $(0; 1)$, $q_1 \equiv 1 - q_0$. Тоді [1] для числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$, така що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i} \right) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_2}, \text{ де } \beta_{\alpha_i} = \alpha_i q_{1-\alpha_i},$$

причому розклад числа x в ряд називається Q_2 -представленням числа, а скорочений (формальний) запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_2}$ — Q_2 -зображенням. Зліченна множина чисел $[0; 1]$ мають два Q_2 -зображення (Q_2 -бінарні): $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k 0(1)}^{Q_2} = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k 1(0)}^{Q_2}$. Решта чисел мають єдине Q_2 -зображення — Q_2 -унарні.

У випадку, коли $q_0 = \frac{1}{2}$, то Q_2 -зображення чисел є класичним двійковим зображенням, а тому є його узагальненням. Однією із задач, що стосуються тополого-метричної теорії Q_2 -зображення чисел, а також його арифметики є критерій раціональності числа за його Q_2 -зображенням. Оскільки в двійковій системі числення ця задача розв'язується легко, очікувано було б отримати аналогічні результати для Q_2 -зображення. Проте на сьогодні вичерпної відповіді про критерій немає.

У роботах Працьовитого М.В., Макаруча О.П. та Скрипник С.В. [2] було отримано наступні результати: якщо q_0 — раціональне і Q_2 -зображення числа x періодичне, то x є раціональним числом, при цьому Q_2 -зображення ірраціонального числа x є неперіодичне; число $\frac{1}{s-p}$ має неперіодичне Q_2 -зображення, якщо $q_0 = \frac{p}{s}$. Множина раціональних чисел, які мають неперіодичне Q_2 -зображення є ніде не щільною на відрізку $[0; 1]$.

Доповідь присвячена дослідженню взаємозв'язку раціональності числа за його Q_2 -зображенням від параметра q_0 , що визначає зображення.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працевитый Н.В. Случайные величины с независимыми Q_2 -символами // Асимпт. методы в исслед. стохастических моделей. — К.: ИМ АН УССР, 1987. — С. 92–102.
- [2] Pratsovytyi M., Makarchuk O., Skrypnyk S. Rational and algebraic Q_2 -representations of real numbers // Siauliai Mathematical Seminar, 10(18), 2015. — P. 199 – 211.

ІМ НАН УКРАЇНИ, НПУ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 19fmf.i.prodan@std.npu.edu.ua, ratush404@gmail.com

ГРУПА НЕПЕРЕРВНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ОДИНИЧНОГО ВІДРІЗКА, ЯКІ ЗБЕРІГАЮТЬ ХВОСТИ ДВІЙКОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

М.М. РЕДЬКА, М.В. ПРАЦЬОВИТИЙ

Нехай $A = \{0, 1\}$ — алфавіт, $L = A \times A \times \dots$ — простір послідовностей нулів та одиниць. Добре відомо [1], що будь-яке число $x \in [0; 1]$ можна представити у вигляді двійкового ряду $x = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \alpha_i$, де $\alpha_i \in A$ що скорочено позначають $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2$.

В просторі двійкових зображень розглядається відношення «мати однаковий хвіст»: нехай $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}^2$, $y = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots}^2$, тоді кажуть, що x та y мають однаковий хвіст ($x \sim y$), якщо існують такі номери k і m , що $\alpha_{k+n}(x) = \beta_{m+n}(y)$ для $n \in N$ і $\alpha_j(x) \neq \beta_i(y)$ при $i = \overline{1, k-1}$, $j = \overline{1, m-1}$.

Розглядається функція f_k , де $k \in N \cup \{0\}$, означена рівністю

$$f_k(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}^2) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_{k+1} \alpha_k \alpha_{k+2} \dots}^2.$$

Функція f_k , означена таким чином є некоректно означеною для двійково-раціональних чисел, тобто $f_k(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 0(1)}^2) \neq f_k(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 0(1)}^2)$. Тому домовимося не використовувати зображення з періодом (1). Оскільки $k \in N \cup \{0\}$, то мова йде про злічений клас функцій f_k .

Теорема 1. Множина функцій f_k для $k \in N \cup \{0\}$ разом з операцією $*$, де $f_k * f_n = f_{|k-n|}$ утворює комутативну групу перетворень піввідрізка $[0; 1)$, що зберігають хвости двійкового зображення.

Доповідь присвячена одній комутативній групі перетворень піввідрізка $[0; 1)$, що зберігають хвости двійкового зображення.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів* // — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
- [2] Працьовитий М.В., Торбін Г.М. *Фрактальна геометрія — наука про інваріанти перетворень простору, що зберігають фрактальну розмірність* // Український математичний конгрес. Динамічні системи. Математична теорія управління. Тези доповідей. — Київ: ІМ НАНУ, 2001. — С. 10.
- [3] Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. *Фрактальные множества, функции, распределения*. — Киев: Наук.думка, 1992.— 208с.

ІМ НАН України, НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна
Email address: redka.rita.2002@gmail.com, prats4444@gmail.com

ФУНКЦІЇ І НЕПЕРВНІ БІЄКЦІЇ, ЯКІ ЗБЕРІГАЮТЬ ХВОСТИ ДЕСЯТКОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Л.М. СВІНТУХОВСЬКА, І.М. ЛИСЕНКО

Нагадаємо, що десятковим представленням числа $x \in [0; 1]$ називається його розклад

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \dots = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{10}, \quad (1)$$

де $\alpha_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \equiv A$. При цьому скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{10}$ числа x і ряду (1) називається їх *десятковим зображенням*, число α_n називається n -ною цифрою цього зображення.

Якщо для зображення чисел $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{10}$ і $y = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^{10}$ існують цілі невід'ємні m і k такі, що $\alpha_{m+j} = \beta_{k+j}$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$, то кажуть, що зображення чисел x і y мають однаковий хвіст (це записують $x \sim y$). При цьому послідовності (α_{m+j}) і (β_{k+j}) називаються їх спільним хвостом.

Кажуть, що функція $f(x)$ з областю визначення і множиною значень $D(f) = [0; 1] = E(f)$ зберігає хвости десяткового зображення чисел, якщо для будь-якого x маємо $x \sim f(x)$.

Очевидно, що оператори лівостороннього та правостороннього зсуву цифр десяткового зображення числа зберігають хвости зображення, але вони не є неперервними функціями (мають розриви першого роду).

Теорема 1. *Множина всіх бієкцій відрізка $[0; 1]$, що зберігають хвости десяткового зображення чисел, відносно операції «суперпозиція» утворює нескінченну некомутативну групу.*

Кожна неперервна функція, що зберігає хвости десяткового зображення чисел, зберігає частоти використання цифр у зображеннях чисел. Обернене твердження не правильне.

НПУ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: iryna.pratsiovyta@gmail.com

ПРО ОБРАХУНОК МОМЕНТІВ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ ПРЕДСТАВЛЕНОЇ ТРІЙКОВИМ ДРОБОМ

Д.Ю. СКАКУН

Нехай τ_n — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0, 1, 2$ з ймовірностями p_0, p_1, p_2 відповідно. Розглянемо випадкову величину $\tau = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_n}{3^n}$. Відомо [1], що розподіл τ є чистим, тобто дискретним, абсолютно неперервним або сингулярним. $p_0 p_1 p_2 = 0$; абсолютно неперервним (рівномірним) лише, коли

$$p_0 = p_1 = p_2 = \frac{1}{3};$$

сингулярним лише, коли

$$\sum_{k=0}^2 (p_k - \frac{1}{3})^2 \neq 0$$

та

$$p_0 p_1 p_2 \neq 0.$$

Якщо $p_0 = \frac{1}{2} = p_2$, то $F_\tau(x)$ є класичною сингулярною функцією Кантора.

Теорема 1. Нехай $M(\tau^n) = a_n$, покладемо $a_0 = 1$. Якщо $0 < p_0 < 1$, то для кожного натурального n виконується рівність:

$$a_n = \frac{1}{3^n - 1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k (C_n^k + 2^{n-k} C_n^k).$$

Теорема 2. Якщо $0 < p_0 < 1$, то існує додатне число L , таке, що для кожного кожного натурального n виконується нерівність:

$$a_n < \frac{L}{n}.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. Киев: Наук. думка, 1992. 208 с.
- [2] Титчмарш Е. Теория функций. Москва: Наука, 1980. 464 с.

НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. М.П.ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: skakund2020@gmail.com

РІВНЯННЯ ТА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ, ПОВ'ЯЗАНІ З ІНВЕРСОРОМ ЦИФР У РІЗНИХ СИСТЕМАХ ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Д.М. ТАМНИК, М.В. ПРАЦЬОВИТИЙ

Нехай $A_s = \{0, 1, 2, \dots, s-1\}$ — алфавіт, $L = A_s \times A_s \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту. Тоді для довільного числа з відрізка $[0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$ така, що

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s,$$

причому s -ковий ряд називається s -ковим *представленням* числа, а скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s$ — його s -ковим *зображенням*.

Нас цікавлять рівняння, задані в термінах s -кового зображення чисел відрізка $[0; 1]$, які встановлюють взаємозв'язок інверсора цифр числа і операторів лівостороннього та правостороннього зсувів цифр. Нагадаємо, що інверсором цифр s -кового зображення називається функція, означена рівністю: $y = I(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s) = \Delta_{[s-1-\alpha_1][s-1-\alpha_2] \dots [s-1-\alpha_n] \dots}^s$. Відомо [2], що функція I для узагальнення s -кового зображення Q_s -зображення чисел є сингулярною строго спадною і лінійною для класичного s -кового.

Оператором зсуву правостороннього ω і лівостороннього δ_i з параметром $i \in A_s$ називаються перетворення, означенні рівностями відповідно:

$$\omega(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s) = \Delta_{\alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s, \quad \delta_i(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s) = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s.$$

Оператори ω і δ_i важливу роль в першу чергу відіграють в теорії динамічних систем, фрактальному аналізу, конструктивній теорії функцій зі складною локальною будовою, метричній та ймовірнісній теорії чисел [1].

Доповідь присвячена результатам досліджень рівнянь типу

$$\omega^n(x) = \delta_{i_1 i_2 \dots i_k}(x), \quad \omega^n(I(x)) = \delta_{i_1 i_2 \dots i_k}(x), \quad \omega^n(x) = \delta_i^k(I(x)),$$

для довільних $n, k \in \mathbb{N}$, $i_k \in A$, а також системам цих рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В. *Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел*. — Київ. Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. — 68 с.
- [2] Працьовитий М. В., Скрипник С. В. Q_2 -зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр // Наук. час. НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. — **15**. — С. 134–143.

ІМ НАН УКРАЇНИ, НПУ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: denis.tannk@gmail.com, prats4444@gmail.com

ТРИКУТНИЙ КИЛИМ СЕРПІНСЬКОГО, ОЗНАЧЕНИЙ В ТЕРМІНАХ Q_2 -ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ ВІДРІЗКА $[0; 1]$

А.І. ТРАЧУК, С.П. РАТУШНЯК

Розглядається одне узагальнення трикутного килима Серпінського, означеного в термінах самоподібного двосимвольного Q_2 -зображення чисел відрізка $[0; 1]$.

Нехай задано Q_2 -зображення чисел, породженого параметром $q_0 \in (0; 1)$, $q_1 \equiv 1 - q_0$, $\beta_{\alpha_i} = \alpha_i q_{1-\alpha_i}$, засобами алфавіту $A = \{0, 1\}$, тобто довільне число $x \in [0; 1]$ може бути представлене у вигляді ряду

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_n} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i} \right) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}.$$

Розглядається множина S , визначена наступним чином:

$$S = \{(x; y) \in [0; 1]^2 : x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}, y = \Delta_{\beta_1 \dots \beta_n \dots}^{Q_2}, \alpha_n + \beta_n \leq 1, n \in N\}.$$

У випадку, коли $q_0 = \frac{1}{2}$, тобто Q_2 -зображення є класичним двійковим зображенням, то множина S у афінній системі координат задає класичний трикутний килим Серпінського.

Теорема 1. *Множина S є самоафінним криволінійним трикутним килимом Серпінського, розмірність якого дорівнює $\log_{q_0, \sqrt{q_0 q_1}, \sqrt{q_0 q_1}} 1$, що обмежений осями координат і графіком сингулярної функції інверсор Q_2 -цифр зображення числа.*

Доповідь присвячена фрактальним властивостям множини S , означеної в термінах Q_2 та симетричного $\overline{Q}_2$ -зображення чисел.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Працевитый Н. В.* Случайные величины с независимыми Q_2 -символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1987. — С. 92–102.
- [2] *Працьовитий М. В., Скрипник С. В.* Q_2 -зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр // Наук. час. НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. — **15**. — С. 134–143.

НПУ імені М.П. Драгоманова, ІМ НАН України, Київ, Україна
Email address: ratush404@gmail.com, t_anastasia_i@ukr.net

ЛАНЦЮГОВІ A_2 -ДРОБИ, ПРОБЛЕМА РАЦІОНАЛЬНОСТІ ЧИСЛА

М.Є. УМАНЕЦЬ, М.В. ПРАЦЬОВИТИЙ

На початку ХХ ст. О. Хінчин у своїй роботі [2] заклав основи метричної теорії зображення чисел елементарними ланцюговими дробами:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \equiv [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n \dots], \text{ де } a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, n}.$$

В процесі розвитку теорії зображення чисел ланцюговими дробами, окрема увага приділялася питанню кількості розкладів для раціональних та ірраціональних чисел. Було встановлено, що будь-яке раціональне число можна представити скінченним ланцюговим дробом, причому існує два ланцюгових дробу, рівних даному раціональному числу.

У роботі [1] Дмитренка С.О., Кюрчева Д.В. та Працьовитого М.В. був удосконалений підхід до системи зображення, а саме розвинено топологометричну теорію зображення нескінченними ланцюговими дробами з використанням лише двох чисел α_1 і α_2 ($0 < \alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1 \alpha_2 = \frac{1}{2}$), названу ланцюговим A_2 -зображенням. Геометрія A_2 -зображення, будучи двосимвольною системою кодування чисел, має принципові відмінності від класичного двійкового зображення та зображення елементарними дробами і має свою систему циліндричних множин, що породжують свою власну геометрію, на якій ґрунтується метрична теорія зображення. Для неї існують числа, що мають два A_2 -зображення (A_2 -раціональні), решта чисел мають єдине зображення (A_2 -ірраціональні). Ідея вибору терміну полягала в взаємозв'язку між множинами раціональних чисел і A_2 -раціональних. Сьогодні відомо, що кожне A_2 -раціональне число є раціональним і твердження навпаки невірне. Проблема критерію раціональності числа за його ланцюговим A_2 -зображенням залишається відкритою. У доповіді будуть представлені результати дослідження проблеми раціональності числа за його A_2 -зображенням та наведені деякі приклади.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В. *Ланцюгове A_2 -зображення дійсних чисел* // Укр. мат. журн. – 2009, том 61, №4. – С.452-463.
- [2] Хинчин А.Я. *Цепные дроби.* -М.: Наука, 1978.-116с.

ІМ НАН УКРАЇНИ, НПУ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: muron.um@gmail.com, prats4444@gmail.com

АРИФМЕТИЧНІ СУМИ ЧИСЛОВИХ МНОЖИНИ

Д.С. ШПИТЮК, М.В. ПРАЦЬОВИТИЙ

Розглядається множина Кантора

$$C = C[3; \bar{1}] = \{x \in [0; 1] : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3, \alpha_i \in \{0, 2\}\}.$$

Тополого-метричні і фрактальні властивості цієї множини є добре вивченими [4]. Вона є самоподібною, ніде не щільною множиною нульової міри Лебега. Цікавим фактом [1, 3] є те, що арифметичною (векторною) сумою двох множин Кантора буде відрізок $[0; 2]$. Нагадаємо, що під *арифметичною сумою* двох числових множин A і B називають множину чисел $c = a + b$, де $a \in A$, $b \in B$, тобто $A \oplus B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$. Дана операція володіє властивістю комутативності, асоціативності. Якщо одна із числових множин є одноелементною $B = \{b\}$, то векторна їх сума отримується зсувом першої множини на b одиниць вліво.

Нас цікавить властивості арифметичної суми двох множин:

$$C = C[Q_3; \bar{1}] = \{x \in [0; 1] : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_3}, \alpha_i \in \{0, 2\}\},$$

де $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_3}$ — Q_3 -зображення числа x , породжене додатними числами q_0, q_1, q_2 , такими, що $q_0 + q_1 + q_2 = 1$ [4].

Зауважимо, що у випадку коли $q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$, то Q_3 -зображення є класичним трійковим, тому множина означена умовами вище є узагальненням множини Кантора.

Доповідь присвячена дослідженню тополого-метричних властивостей арифметичної суми числових множин, зокрема арифметичної суми двох множин, що узагальненням множини Кантора в термінах Q_3 -зображення чисел відрізка $[0; 1]$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] P. Mendes, F. Oliveira. *On the topological structure of the arithmetic sum of two Cantor sets*. Nonlinearity, 7(2):329–343, 1994, doi: 10.1088/0951-7715/7/2/002.
- [2] Працьовитий М.В. *Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел*. — Київ. Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. — 68 с.
- [3] Працьовитий М.В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296с.
- [4] Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. *Фрактальные множества, функции, распределения*. Киев: Наук.думка, 1992. — 208с.

НПУ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА, ІМ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
 Email address: darina.shpytyuk@gmail.com, prats4444@gmail.com

Секція 3.

Алгебри, дискретної математики,
теорії алгоритмів, інформатики

Section 3.

Algebra, discrete mathematics,
theory of algorithms, computer science

ON CENTRALIZERS OF POLYNOMIAL DERIVATIONS

Y.Y. CHAPOVSKYI, D.I. EFIMOV

Let $\mathbb{K}$ be a field of characteristic zero and $\mathbb{A}$ an algebra over the field $\mathbb{K}$. Recall that a linear map $D : A \rightarrow A$ is called a $\mathbb{K}$ -derivation of the algebra $\mathbb{A}$ if it satisfies Leibniz rule i.e. for all $a, b \in \mathbb{A}$ it holds $D(ab) = D(a)b + aD(b)$.

Let us denote the set of all $\mathbb{K}$ -derivations of an algebra $\mathbb{A}$ by $\text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$. It is well known that $\text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ is a Lie algebra over $\mathbb{K}$ with operation $[X, Y] = XY - YX$.

Consider the Lie algebras of derivations $W_n(\mathbb{K}) := \text{Der}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ and $\widetilde{W}_n(\mathbb{K}) := \text{Der}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$. For a derivation $D \in W_n(\mathbb{K})$ denote by $C_W(D)$ and $C_{\widetilde{W}}(D)$ its centralizers in the Lie algebras $W_n(\mathbb{K})$ and $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$ respectively.

The structure of centralizers of polynomial derivations is of significant importance due to applications in differential equations and geometry (see, for example [1]).

The following theorem gives a rough description of the centralizer of a polynomial derivation in the field of rational functions in n variables.

Theorem 1. *Let $D_1 \in W_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ and $F = \text{Ker } D_1$ be the field of constants in $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$. Then the centralizer $C = C_{\widetilde{W}}(D_1)$ has the form*

$$C = FD_1 + \dots + FD_k$$

for some derivations $D_i \in W_n(\mathbb{K}), 1 \leq i \leq k$ which are linearly independent over $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$.

If the field F has the transcendence degree one over $\mathbb{K}$, then either C is a Lie algebra over F , or it contains an ideal of corank one over $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ which is a Lie algebra over F .

REFERENCES

- [1] Nagloo J., Ovchinnikov A., Thompson P. *Commuting planar polynomial vector fields for conservative Newton systems* // Communications in Contemporary Mathematics — 2020. — V. 22, No 4.

TARAS SHEVCHENO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE
Email address: zchapovsky@knu.ua

TARAS SHEVCHENO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE
Email address: d_efimov@knu.ua

CODES ON PERMUTATION GROUPS

O.V. GRYTSENKO

We consider codes on the permutation groups. Let S_n be a symmetric group on the set of n elements.

Definition 1. Permutation code of length n with distance d is a subset $\Gamma \subseteq S_n$, such that distance between different elements of Γ is at least d .

A central problem is to describe the properties of such codes via different metrics. We study properties of codes in the case of Spearman metric.

Definition 2. The Spearman metric on the symmetric group S_n is defined with following equality $d(\sigma, \pi) = \sum_{i=1}^n |\sigma(i) - \pi(i)|$, where $\sigma, \pi \in S_n$ [2].

We study properties of codes in the case of Spearman metric.

Theorem 1. *Possible minimum nonzero distance between two permutations equals 2 and the diameter of the space defined with Spearman distance which equals $n \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.*

REFERENCES

- [1] Farzad Farnoud (Hassanzadeh), Vitaly Skachek, and Olgica Milenkovic. *Error-Correction in Flash Memories via Codes in the Ulam Metric*, IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. 59, No. 5.
- [2] Michel Marie Deza, Elena Deza. *Encyclopedia of Distances. 4th edition*, illustrated, Springer, 2016, 756 pages.

FACULTY OF INFORMATICS, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV MOHYLA ACADEMY

Email address: o.grytsenko@ukma.edu.ua

ECCENTRIC DIGRAPHS OF UNIQUE POINT ECCENTRIC GRAPHS

A. HAK, V. HAPONENKO, S. KOZERENKO

Let G be a simple finite connected undirected graph and $u \in V(G)$ be its vertex. A vertex $v \in V(G)$ is called an *eccentric vertex for u* if $d_G(u, v) = e_G(u)$, where $e_G(u) = \max\{d_G(u, x) : x \in V(G)\}$ denotes the *eccentricity* of a vertex u . One way to capture the local metric structure of a connected graph G is to consider the so-called *eccentric digraph* $Ecc(G)$, which is a digraph with $V(Ecc(G)) = V(G)$ and there is an arc $u \rightarrow v$ if v is an eccentric vertex for u .

A graph G is called *unique eccentric point graph* [2] if every its vertex $u \in V(G)$ has a unique eccentric vertex. In other words, G is a uep-graph if it has a *functional* (the out-degree of every vertex equals one) eccentric digraph $Ecc(G)$. Self-centered uep-graphs were characterized in [2] and their structure was extensively studied in [1]. Note that a uep-graph is self-centered if and only if its eccentric digraph is a disjoint union of 2-cycles.

A pair of vertices $u, v \in V(G)$ is called *diametral* if $d_G(u, v) = \text{diam}(G)$. It is clear that any diametral pair of vertices in G forms a cycle of length two in $Ecc(G)$. It turns out that eccentric digraphs of uep-graphs can not have cycles of other lengths.

Proposition 1. *The eccentric digraph of a nontrivial uep-graph has cycles only of length two.*

Question: does any cycle of length two in a uep-graph corresponds to some diametral pair (this is not true for general graphs)?

A *block* of a graph is its maximal biconnected subgraph. A graph is called a *block graph* if it is isomorphic to the intersection graph of the collection of all blocks in some graph. For example, each tree is a block graph.

For a pair of natural numbers $m, k \in \mathbb{Z}_+$ define the digraph $D_{m,k}$ as follows: $V(D_{m,k}) = \{u, v, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k\}$, $E(D_{m,k}) = \{(u, v), (v, u)\} \cup \{(x_i, u), (y_j, v) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k\}$. For example, $D_{0,0}$ is just a directed 2-cycle.

In general, the problem of characterizing eccentric digraphs of uep-graphs up to isomorphism seems to be very hard. However, in the class of block graphs we have the following result.

Theorem 1. *Let G be a uep-graph which is also a block graph. Then $Ecc(G)$ is isomorphic to $D_{m,k}$ for $m = k = 0$ or $m = k = 1$ or $m, k \geq 2$. Conversely, for every such $D_{m,k}$ there exists a uep-graph which is a block graph (even a tree) with $Ecc(G)$ being isomorphic to $D_{m,k}$.*

Trees which are uep-graphs were characterized in [2]. It turns out, that we can extend the same characterization to connected block graphs.

Theorem 2. *A connected block graph is a uep-graph if and only if it has exactly two central and two peripheral vertices.*

REFERENCES

- [1] Göbel F., Veldman V.L. *Even graphs* // J. Graph Theory — 1986. — V. 10. — P. 225–239.
- [2] Parthasarathy K.R., Nandakumar R. *Unique eccentric point graphs* // Discrete Math. — 1983. — V. 46. — P. 69–74.

NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV-MOHYLA ACADEMY, KYIV, UKRAINE
Email address: artikgak@ukr.net

NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV-MOHYLA ACADEMY, KYIV, UKRAINE
Email address: super.gaponenko2012@gmail.com

NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV-MOHYLA ACADEMY, KYIV, UKRAINE
Email address: kozerenkosergiy@ukr.net

GEOMETRIC PROPERTIES OF GENERATED ADVERSARIAL EXAMPLES

A.O. IVANIUK

Adversarial examples are special inputs to a machine learning model designed to cause the model to make wrong prediction. Existing protection methods, such as adversarial training [1], often require prior knowledge of adversary attacks or modifying the target model. However, detection of such malicious input remains an open problem. Additional investigation of properties of such inputs is a promising approach to development of algorithm for adversarial examples detection [2].

In this work, main types of white-box attacks are reviewed, such as limited memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno algorithm (L-BFGS), fast gradient sign, Jacobian-based Saliency map, DeepFool [3], one-pixel [4], and adversarial patch [5] attacks, geometrical properties of generated examples are studied. It is assumed that high-dimensional data, which are input to the model, lie in a lower-dimensional smooth manifold. By mapping the data to a lower-dimensional space, geometric properties are studied, such as mean distances of data points to centroids of the nearest neighbours, using different distance metrics [2].

REFERENCES

- [1] Goodfellow I., Shlens J., Szegedy C. *Explaining and harnessing adversarial examples* // arXiv:1412.6572. — 2014.
- [2] Ivanyuk-Skulskiy B., Kriukova G., Dmytryshyn A. *Geometric Properties of Adversarial Images* // 2020 IEEE Third International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP). — 2020. — P. 227–230.
- [3] Nicholas Carlini and David A. Wagner. Towards evaluating the robustness of neural networks. 2017 IEEE Symposium on Security and Privacy (SP), pages 39–57, 2017.
- [4] Su J., Vargas D.V., Sakurai K. *One pixel attack for fooling deep neural networks* // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. — 2019. — Vol. 23. — No. 5. — P. 828–841.
- [5] Brown T., Mane D., Roy A., Abadi M., Gilmer J. *Adversarial patch* // NIPS Workshop. — 2017.

NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV-MOHYLA ACADEMY, KYIV, UKRAINE
Email address: a.ivaniuk@ukma.edu.ua

RISK MODELLING APPROACHES

G. SOLOMANCHUK

Making decisions under uncertainty - is a complex and important problem, which one can face in different spheres, particularly in the area of investments, where participants strive to gain the desired level of income and protecting themselves against losses. This problem was the reason for the objective of our work: to develop instruments, which enable the investor to make a portfolio from assets in a way, which minimizes risks of losses given the fixed average level of income.

The idea of this scientific work was to demonstrate properties of the Value at Risk for optimal portfolio compared to other portfolios with the same mean return, and to measure this difference in a quantitative way. To pursue this research, we build 2 portfolios based on information about historic prices of 3 kinds of assets - Facebook, Boeing, and Goldman Sachs share prices. The first portfolio has equal distributions of assets, and the Second portfolio has optimal distribution of them.

Next to building an optimal portfolio, we compare its properties with one the equal portfolio and single assets demonstrate under fixed probabilistic scenarios. During this part of our work we simulate the possible future returns using different techniques - Historical Simulation, Normal Assumption, and Monte-Carlo Methods, which difference consists in the underlying assumptions about the distribution of the random variable - return of the portfolio.

At the end of our work, we make conclusions on which properties our optimal portfolio demonstrates under assumptions of these methods and compare them with other portfolios.

REFERENCES

- [1] Ruey S.Tsay. *Analysis of Financial Time Series* // John Wiley and Sons, Inc. — 2002. — P. 256–258 — P. 267.
- [2] John C. Hull *Options Futures and other derivatives*. // PEARSON EDUCATION INTERNATIONAL — 2009. — P. 266.
- [3] George Ch. Pflug Werner Roemisch *Modelling, Measuring and Managing Risk*. // World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. — 2007. — P. 200–201 — P. 205.

NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV-MOHYLA ACADEMY, KYIV, UKRAINE
Email address: h.solomanchuk@ukma.edu.ua

SECRET SHARING SCHEMES ANALYSIS

S.V. STEPANIUK

Using secret sharing schemes is an alternative way of secure data spreading and outsourcing. It allows to distribute and share partitioned secret among the group of scheme users. It's only possible to reconstruct the secret if threshold number of users are involved in restoration process, while every part of a secret and even smaller group of scheme users doesn't have any ability to reconstruct secret itself [1].

Research and analysis of working principles and main components of basic schemes are shortly reviewed. A new approach of secret sharing scheme realization is presented. In the talk proposed we called this new algorithm "Transitional distribution scheme" that works with number, which is our secret. This number is a sum of all the coordinates of some vector. At the beginning we have a vector $\mathbf{v}$ and its coordinates with respect to a standard basis $(e_1 \dots e_n)$ of space $\mathbb{R}^n$. We choose another not standard basis $(b_1 \dots b_n)$ in space $\mathbb{R}^n$. Now we rewrite vector $\mathbf{v}$ in the new basis $(b_1 \dots b_n)$. Let it be $(u_1 \dots u_n)$ and after that we distribute (u_i) and (b_i) coordinates between scheme users. Reconstruction process is possible using a transformation matrix and threshold number of users involved, it allows to find coordinates of vector $\mathbf{v}$. After that we can restore our secret number by calculating the sum of vector coordinates. This scheme is perfect and CPA attack resistant [2].

REFERENCES

- [1] Sreekumar A. *Simple and Efficient Secret Sharing Schemes for Sharing Data and Image* / A. Sreekumar, V.P, Binu // Macromolecules — Feb 26, 2015.
- [2] Jaya, Dofe. *Assessing CPA resistance of AES with different fault tolerance mechanisms.* / J. Dofe // — 2016 21st Asia and South Pacific Design Automation Conference 10.1109/ASPDAC.2016.7428087 — Jan 2016.

NATIONAL UNIVERSITY OF "KYIV-MOHYLA ACADEMY" , KYIV, UKRAINE.
Email address: stas.stepaniuk@gmail.com

OPTION PRICING IN SUBDIFFUSIVE BACHELIER MODELS USING MONTE-CARLO SIMULATIONS

S.V. TYSHCHENKO

In markets with illiquid assets, it is often seen relatively long periods in which economic process stays motionless. Such behaviour is typical for emerging markets with low number of transactions. Because Brownian motions and Levy processes describe continuous motion, they are not suitable for modeling periods without motion and modeling gaps caused by jumps. Notably, analogous behavior is observed in complex physical systems exhibiting subdiffusion. Subdiffusion is a well known and established phenomenon in statistical physics. It occurs if we replace the calendar time t with $S(t)$ in stochastic differential equation, what describes arithmetic Brownian motion in Bachelier model

$$dS = \mu dt + \sigma \delta W \quad (1)$$

$S(t)$ is called the inverse subordinator and is given by the following formula

$$S(t) = \inf\{\tau > 0 : U(\tau) > t\} \quad (2)$$

Here $U(t)$ is the strictly increasing Levy process.

The fair price of the European call option with expiry date T and strike price K is given by

$$C_\psi(X_0, K, T, \alpha) = \langle C(X_0, K, S_\psi(T), \alpha) \rangle = \int_0^\infty C(X_0, K, x, \alpha) g_\psi(x, T) dx \quad (3)$$

where, g_ψ is the PDF of $S_\psi(T)$.

There are two ways of finding the values of $C_\psi(X_0, K, T, \alpha)$. One of them is a Monte-Carlo method based on simulating the trajectories of the inverse subordinator $S_\psi(t)$ on the interval $[0, T]$ and calculating the expected value in (3).

NATIONAL UNIVERSITY OF "KYIV-MOHYLA ACADEMY", KYIV, UKRAINE

Email address: s.tyshchenko@ukma.edu.ua

СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ТА КЛАСИФІКАЦІЇ НА ОСНОВІ МЕТРИЧНОГО ПІДХОДУ

Р.В. КОВАЛЕНКО

Дослідження щодо класифікації товарів за характеристиками, зокрема за назвою є досить цікавою що для користувачів, що для маркетів. Досить часто, головною метою пошуку в інтернеті є порівняння цін та характеристик або отримання інформації, яка представлена іншими користувачами, наприклад, у вигляді відгуків. Однією із найголовніших причин агрегації великого обсягу інформації про товари є побудова конкурентної політики, визначення цін або ж організація рекламної кампанії групи продуктів. Обсяг та різноманітність інформації, пов'язаної з товарами, швидко зростають. Ці фактори ускладнюють для користувачів ідентифікацію та порівняння особливостей бажаних продуктів. Головною задачею дослідження є побудова системи, яка дозволить класифікувати товари за їх назвами. Для цього використовується підхід Unsupervised Product Matching. Метод побудований на принципі розбиття назв на токени та попарного порівняння комбінацій токенів. Процес порівняння супроводжується універсальною функцією, яка враховує детальну інформацію про токени та комбінації: частота використання, позиція в назві, “хот” токени та довжина. Головною задачею якої є кластеризація комбінацій та відповідне систематизація товарів. Головною перевагою такої концепції дозволяє позбутися від порогових значень, необхідних для встановлення поняття схожості продуктів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Leonidas A., Athanasios F., Panayiotis B., Christos M. *A self-verifying clustering approach to unsupervised matching of product titles.* — 2020. — P.44.
- [2] Rosie H. *Unravelling product matching in retail with AI.* — 2019.

KYIV-MOHYLA ACADEMY, KYIV, UKRAINE
Email address: r.kovalenko@ukma.edu.ua

СКЛАДНІСТЬ АЛГОРИТМУ ЗОБРАЖЕННЯ СИЛОВСЬКИХ 2-ПІДГРУП СИМЕТРИЧНИХ ГРУП КОРЕНЕВИМИ ДЕРЕВАМИ

В.А. ОЛЬШЕВСЬКА

Нехай G – група порядку $p^k s$, де s не ділиться на p , p – просте, k – деяке натуральне число. Нагадаємо, що силовською p -підгрупою групи G називається така підгрупа, що має порядок p^k і позначається $Syl_p(G)$ [1]. Властивості і структура силовських є добре вивченими [2], [3].

Множину всіх бінарних n -рівневих кореневих дерев, у яких на всіх вершинах з 0-го по $(n-1)$ -ий рівні стоять помітки 0 або 1 позначитимемо $LT_{2,n}$.

У роботі представлено алгоритм складності $O(2^n)$ зображення елементів силовської 2-підгрупи $Syl_2(S_{2^n})$ симетричної групи S_{2^n} , визначеної на множині з 2^n елементів, бінарними n -рівневими кореневими деревами, в яких на всіх вершинах із 0-го по $(n-1)$ -ий рівні стоять помітки 0 або 1. Також запропоновано алгоритм перетворення дерева із $LT_{2,n}$ у підстановку із $Syl_2(S_{2^n})$ зі складністю $O(n \cdot 2^n)$. Показано, що відображення, задані цими перетвореннями, є взаємооберненими ізоморфізмами між групами $LT_{2,n}$ та $Syl_2(S_{2^n})$. Також представлено алгоритм множення двох бінарних дерев з помітками складності $O(2^n)$. Таким чином, запропоновано алгоритм множення двох підстановок силовської 2-підгрупи $Syl_2(S_{2^n})$ симетричної групи S_{2^n} , складність по часу якого $O(n \cdot 2^n)$. Доведено коректність всіх наведених алгоритмів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ленг С. *Алгебра*. — Москва: Наука, 1965. — 431 с.
- [2] Калужнин Л.А. *Избранные главы теории групп*. — Киев: Киевский государственный университет им. Т.Г. Шевченко, 1979. — 52 с.
- [3] Dmitruk Ju. V. *Structure of Sylow two-subgroups of the symmetric group of degree 2^n* // Ukr. Math. J. — 1978. — Vol. 30, — P. 117–124.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: v.olshevsk@ukma.edu.ua

АЛГОРИТМ СЕРЕДИННОГО СПУСКУ ДЛЯ ПОШУКУ ДІАМЕТРА ГРУПИ

М.С. ОЛЬШЕВСЬКИЙ

Нехай G — скінченна група та S — її система твірних.

Графом Келі групи G відносно системи твірних S будемо називати розфарбований орієнтований граф $\Gamma = \Gamma(G, S)$, побудований наступним чином:

- (1) Кожному елементу g з G відповідає вершина графа, тобто $V(\Gamma) = G$.
- (2) Кожному елементу s з S відповідає колір c_s .
- (3) Для будь-яких $g \in G$ та $s \in S$, вершини g та $g \cdot s$ з'єднуються орієнтованим ребром кольору c_s , тобто

$$E(\Gamma) = \{(g, g \cdot s)_{c_s} | g \in G, s \in S\}.$$

Діаметром (див. напр. [1]) групи G відносно системи твірних S називається діаметр відповідного графа Келі $\Gamma(G, S)$:

$$\text{Diam}_S(G) = \text{Diam}(\Gamma(G, S)).$$

Впорядкований набір елементів $[d_1, \dots, d_m]$, у якому кожен елемент d_i , $1 \leq i \leq m$, належить множині твірних S будемо називати розкладом над S довжини m . Розклад $[d_1, \dots, d_m]$ задає елемент a групи G за правилом

$$a = d_1 \cdot \dots \cdot d_m.$$

Елемент g з G будемо називати *діаметральним* відносно S якщо $|g|_S = \text{Diam}_S(G)$, де $|g|_S$ — мінімальна довжина розкладу елемента g в системі твірних S .

Елемент g з G будемо називати *повнопородженим* відносно S якщо не можна задати розкладом у будь-якій власній підмножині S .

Система твірних S для групи G називається *строго зростаючою*, якщо кожен її діаметральний елемент є повнопородженим.

Для опису алгоритму пошуку діаметра групи введемо наступні позначення:

- (1) G_f — множина всіх повнопороджених елементів групи G ;
- (2) $D_f(S, m)$ — множина всіх таких розкладів над S довжини m , що кожен твірний елемент з S присутній у розкладі хоча б один раз;
- (3) P — природне відображення з множини розкладів над S в групу G , що переводить розклад у відповідний елемент групи.

Algorithm 1: Алгоритм серединного спуску для пошуку діаметра групи

Input: G — група, S — строго зростаюча система твірних**Output:** $level$ - діаметр групи G над S **Ініціалізація:** $found = \{\}$, $level = |S| - 1$;**while** $found \neq G_f$ **do** $level := level + 1$; **for** $decomposition \in D_f(S, level)$ **do** $element := P(decomposition)$; **if** $element \in G_f$ **then** $found := found + element$; **end** **end****end**

Теорема 1. Алгоритм серединного спуску для пошуку діаметра групи є коректним.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Babai László, Ákos Seress. On the diameter of permutation groups // European Journal of Combinatorics. — 1992. — Vol. 13, no. 4. — P. 231 – 243. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669805800290>.

КНУ ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: msolshevskyi@gmail.com

Секція 4.

Методики навчання та історії математики

Section 4.

Methods of teaching and history of mathematics

ПОРІВНЯННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ОБЧИСЛЕННЯ $\sin 1^\circ$ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ АЛЬ-КАШІ ТА СУЧАСНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

О.О. ВРУБЛЬОВСЬКА

Трисекція кута — це одна з класичних задач древності, які нерозв'язні за допомогою циркуля та лінійки. Згодом був встановлений зв'язок між обчисленням тригонометричних функцій і розв'язанням кубічних рівнянь. Виходячи з формул синуса (або косинуса) подвійного кута, а також суми та різниці кутів, можна отримати вираз для синуса (або косинуса) потрійного кута, яка є кубічною формулою функції:

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = \\ &= 3 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.\end{aligned}$$

Тобто задача про трисекцію кута зводиться до розв'язання певного кубічного рівняння. У XV столітті Аль-Каші запропонував загальний метод розв'язання цієї задачі у вигляді:

$$x = \frac{q + x^3}{p}.$$

В якості першого наближення ним було обрано:

$$x_1 = \frac{q}{p}.$$

В якості другого наближення:

$$x = \frac{q + x_1^3}{p}.$$

Кількість наближень було обрано лише 2 рази. Видатний математик вирішив, що цього буде достатньо, щоб отримати досить точний результат і, дійсно, значення $\sin 1^\circ$ вдалося отримати з точністю до 10^{-18} знаків.

Ми збільшуємо кількість ітерацій, з метою досягти більш досконалої відповіді та проведення аналізу результатів.

Збіжність даного методу була доведена за допомогою теореми Банаха (про стискуюче відображення):

Теорема Банаха про нерухому точку. *Всяке стискуjące відображення повного метричного простору в себе має єдину нерухому точку (яку можна знайти методом послідовних наближень), починаючи з будь-якої точки цього простору.*

У доповіді пропонуються наступні результати дослідження:

- (1) За допомогою інтерпретованої об'єктно-орієнтованої мови програмування Python було створено два програмних середовища, для обчислення $\sin 1^\circ$, методом аль-Каші та з використанням математичних алгоритмів електронно-обчислювального пристрою.
- (2) Доведено збіжність методу аль-Каші з використанням теореми Банаха.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Marlow Anderson, Victor Wilson. *Sherlock Holmes in Babylon: And Other Tales of Mathematical History* — 2004. — С. 141–142.
- [2] Клесов О.І. *Розвиток класичних ідей у сучасній математиці.* // конспект лекцій. — 2021.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: helenavrubel1699@gmail.com

ПРО ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ В ПЕРСІЇ ТА КИТАЇ

А.В. ДВОРНИЙ

Розглянемо рівняння вигляду

$$x^3 + p = qx, \quad p, q > 0. \quad (1)$$

Рівняння (1) з коефіцієнтами $p = \frac{\sin 3^\circ}{4}$ і $q = \frac{3}{4}$ було відоме ще 600 років тому перському математику Гійяс-ад-Діну Джамшиду аль-Каші, який використовував його для знаходження значення $\sin 1^\circ$.

Для цього аль-Каші використовував наступний ітераційний метод:

$$x_n = \frac{x_{n-1}^3 + p}{q}, \quad x_0 = \frac{p}{q}.$$

Даний метод узагальнюється на ширший клас рівнянь як

$$x_n = \frac{x_{n-1}^\alpha + p}{q}, \quad \alpha > 0.$$

Іншим методом, відомим ще у Китаї близько 2-го століття н.е., є метод "подвійного regula falsi":

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)},$$

де x_1, x_2 — деякі початкові значення.

Його також можна узагальнити на довільну функцію наступним чином:

$$x_n = \frac{x_{n-1} f(x_{n-2}) - x_{n-2} f(x_{n-1})}{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}.$$

В доповіді будуть представлені деякі властивості рівняння (1) (збіжність методу Ньютона) та узагальненого методу аль-Каші, а також комп'ютерні обчислення методу аль-Каші та "подвійного regula falsi".

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Dence, Thomas (November 1997). "Cubics, chaos and Newton's method". *Mathematical Gazette*. 81 (492): 403–408.
- [2] Клесов О. І. *Розвиток класичних ідей в сучасній математиці* // конспект лекцій.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: dvorniy@gmail.com

ДО ПИТАННЯ ПІДВИЩЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КУЛЬТУРИ У СТУДЕНТІВ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ

О.К. ЗАКОЛЕНКО, О.О. ДЕМ'ЯНЕНКО

До поняття математичної культури включається рівень сформованості знань, умінь, навичок; здатність застосовувати їх у практичній діяльності та поповнювати знання; вміння грамотно записувати та правильно формулювати твердження; вміння бачити взаємозв'язки між різними поняттями та знати історію виникнення математичних понять.

Формування математичної культури у студентів фізико-математичного факультету – це важливий, цілеспрямований, організований процес, який відображений, зокрема, в навчальних програмах дисциплін, що читають студентам. Окрім безпосереднього вивчення дисципліни, важливо вказувати на зв'язки між різними розділами дисципліни та між різними дисциплінами, що забезпечує цілісне сприйняття математичної науки. Про це, як правило йдеться на першій вступній лекції курсу і протягом подальшого викладання. З метою забезпечення розуміння таких зв'язків корисно пропонувати студентам задачі, які дозволяють отримати один і той самий результат із застосуванням різних методів розв'язання [1].

Ілюстрацією таких задач можуть бути задачі, що пов'язані з числом π . З цим магічним числом школярі знайомляться тоді, коли вчать формулу площі круга та довжини кола. В шкільних підручниках, до речі, подаються історичні довідки, що пов'язані з новим матеріалом [2]. Практика показує, що ця інформація проходить повз увагу учнів. Для майбутніх математиків ці частини історії є важливими і їх бажано нагадувати. Наведемо деякі приклади. В курсі математичного аналізу, в розділі «Ряди» розглядаються розклади в ряд функцій $y = \arcsin x$ та $y = \arctg x$. З відповідними історичними довідками маємо чудову ілюстрацію задач, пов'язаних з числом π .

У 1665-66 роках Ісаак Ньютон отримав ряд:

$$\begin{aligned} \pi &= 6 \arcsin \frac{x}{2} = 6 \left(\frac{1}{2^1 \cdot 1} + \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) \frac{1}{2^5 \cdot 5} + \dots \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{2n}{n}}{16^n (2n+1)} = 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{640} + \frac{15}{7168} + \frac{35}{98304} + \frac{693}{54525952} + \dots \end{aligned}$$

В 1706 Джон Мечин розрахував 100 десяткових цифр числа π , використовуючи ряд для арктангенса у формулі:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

де

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Це був один з перших прикладів використання нескінченних добутків.

В курсі теорії ймовірностей розглядається один з експериментальних методів обчислення числа π , який пропонує задача «Голка Бюффона». Папір розкреслюється паралельними прямими, віддаленими одна від одної на відстань в одну голку та кладеться на підлогу, а експериментатор кидає на нього голку, нікуди спеціально не цілячись. Після падіння голки, експериментатор дивиться, чи перетнула голка якусь пряму, і, якщо перетнула, цей факт враховується. Також підраховується загальна кількість кидань. Виявляється, що при великій кількості випробувань частка влучень серед всіх кидань голки необмежено наближається до числа $\frac{\pi}{2}$.

Кожна з цих задач відповідає на своє питання, але їх результати дозволяють обчислювати число з відповідною точністю. Питання точності обчислення, в свою чергу, є окремою задачею і спонукає студентів розкривати цю тему далі, підвищуючи свій математичний рівень та математичну культуру.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Крилов Т.В., Гулеша О.М., Орлова О.Ю. *Міжпредметні зв'язки математики з іншими дисциплінами при навчанні математики студентів технічних університетів* // Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки» — Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ, 2011.— С. 132–133.
- [2] Ляшенко В.Я., Кремінь В.М. *Формування математичної культури вчителя математики* — Луцьк: Волинський державний університет імені Лесі Українки, 2018.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: o.zakolenko@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: o.dem@ukr.net

СІМ'Я СІМЕОНА-ДЕНІ ПУАССОНА

М.В. КАПЛАУШЕНКО, Т.В. МАЛОВІЧКО

Сімеон-Дені Пуассон народився в селі Пітів'є, департамент Луаре, 21 червня 1781 року в сім'ї Сімеона Пуассона (1744 – 1808) і Марії Франшетер (1748 – 1819). Його батько служив рядовим під час Ганноверських війн, але, відчуваючи огиду до жорстокого поводження з боку знатних офіцерів, він дезертував. Приблизно під час народження сина він був головою місцевого уряду в революційний період.

У матері Пуассона було дуже слабе здоров'я. Його старші брати та сестри померли ще в дитинстві. Маленький Сімеон-Дені, на перший час від народження був переданий медсестрі, яка жила в ізольованому будинку недалеко від Пітів'є.

Його батько вважав, що син немає ніяких здібностей до точних наук, й вирішив відправити його на навчання до дядька-хірурга, пана Ленфанта, який практикувся в Фонтенбло. Але інтереси Пуассона все більше зверталися до математики. Він відвідував вищу школу у Фонтенбло, де посів перше місце на вступних іспитах до Політехнічної школи (l'École Polytechnique) .

У 1800 році, менш ніж через два роки після вступу, він опублікував два важливих для математики мемуари - один про метод елімінації Етьєна Безу, інший про кількість інтегралів рівняння кінцевих різниць.

Протягом Революції, Імперії та наступної реставрації, Пуассон був призначений бароном в 1821 році. Революція 1830 р. загрожувала йому втраатою всіх почесностей. Однак цю ганьбу уряду Луї-Філіпа спритно відвернув Франсуа Жан Домінік Араго, учень та автор біографії Пуассона.

Через сім років Пуассон став пером Франції, як представника французької науки. Окрім численних службових обов'язках викладача, репетитора та наукового працівника, він опублікував понад 300 праць - кілька з них були великими трактатами, а багато були мемуарами, що стосуються найбільш непростих галузей математики, прикладної математики, математичної фізики та раціональної механіки.

У 1817 році він одружився на мадмуазель Ненсі де Барді (1772 – 1873), сироті, яка народилася в Англії в сім'ї французьких емігрантів. [1] Пуассон мав четверо дітей, дві дівчинки і два хлопчики. [2]

Старша дочка – Марія Александрина Люсі Пуассон (1818 – 1845), була одружена з паном Альфредом де Вайлі (1800 – 1869) – лексикографом,

вчителем риторики, відомим і шанованим молоддю паризьких шкіл того часу. [3] Він був інспектором середньої освіти, ректором Академії Бордо. Написав "Новий латинсько-французький словник та продовжив "Новий словник віршування і латинської поезії що розпочав його батько. Дочка Марії та Альфреда – Анна Габріель Маргарита Ле Камю (1837 – 1903), вийшла заміж за Ежена Огюста Ле Камю (1824 - 1867) у віці 20 років.

Старший син - Сімеон Жан Чарльз Барон Пуассон (1819 – 1879) – офіцер артилерії, член Паризької міської ради, офіцер Почесного легіону. Був одружений з Сесіль де Ля Тур-Сен-Іжес(1809 – ?). [4]

Молодша донька - Ганна Деніс Жозефіна Марія Раффард Пуассон (1823 – ?) вийшла заміж за сина полковника Марсія, випускника Політехнічної школи.

Молодший син - Сімеон Генрі Пуассон (1827 – 1901) побудував кар'єру в галузі управління державними фінансами. Займав посади генерального керуючого, спеціального керуючого і генерального підскарбія. Він був 3-м бароном Пуассоном. Був одружений на дочці Жана-Елі Готьє [5], французького політика, що займав посаду міністра фінансів Франції в 1839 році. Його дочка Берта-Жанна Пуассон (1853 – ?) вийшла заміж за Поля Сагеса де Бревера (1842 – ?), офіцера, сина відомого географа, та археолога Жюль-Ксав'єра Сагеса де Бревері.

У 1837 р. Пуассон узагальнив «закон великих чисел» Бернуллі, та опублікував «розподіл Пуассона». За рік до смерті здоров'я Пуассона погіршилося. Проте, він продовжував відвідувати щотижневі засідання Французької академії наук, президентом якої він був.

Пуассон помер о 5 годині ранку 25 квітня 1840 року в оточенні членів своєї родини.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] [https://fr.wikisource.org/wiki/Poisson_\(Arago\)/19](https://fr.wikisource.org/wiki/Poisson_(Arago)/19)
- [2] https://www.myheritage.com.ua/person-23056516_180496402_180496402/simeon-poisson
- [3] https://www.myheritage.com.ua/person-13000616_292146141_292146141/barthelemy-alfred-de-wailly
- [4] https://www.myheritage.com.ua/person-13000447_292146141_292146141/cecile-la-tour-saint-igest-pernety
- [5] https://www.myheritage.com.ua/person-13000184_292146141_292146141/simeon-aime-henri-poisson

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Email address: kaplaushenko.maria.of01@gmail.com

ГІЙОМ ДЕ ЛОПІТАЛЬ

А.О. КАРЛОВА

Гійом де Лопіталь народився в 1661р. в Франції, в заможній родині, яка була видатною ще приблизно з 12-го століття.

Повне ім'я: Гійом-Франсуа-Антуан маркіз де Л'Хопіталь, маркіз де Сент-Месме, граф Ентремонт і сеньйор д'Уке-ла-Шез. (Guillaume-François-Antoine Marquis de l'Hôpital, Marquis de Sainte-Mesme, Comte d'Entremont and Seigneur d'Ouques-la-Chaise)

З дитинства Лопіталь захоплювався математикою, але через положення своєї родини обрав військову кар'єру, продовжуючи займатися науковою діяльністю навіть в наметі. Однак, через поганий зір (короткозорність) він звільнився з армії і повністю віддав себе математиці.

Як стверджує Джуліан Кулідж [1]: «Хтось схильний вважати, що саме любов Лопіталя до математики, а не недосконалість зору, змусила його відмовитися від військової кар'єри на користь наукової».

Вчителем Лопіталя в математиці став Йоганн Бернуллі, який навіть на той час був досить відомим математиком.

У 1692 році Лопіталь публікує вперше декілька своїх математичних записок. Бернуллі надає йому уроки в Ук (з французької - Ouques), в цей же час Лопіталь надсилає рішення проблеми Бона до Гюйгенса. Хоча Лопіталь і не стверджував, що рішення, яке він надіслав Гюйгенсу, було його власним, але Гюйгенс обґрунтовано припустив, що рішення належало саме Лопіталю. Після цього Лопіталь опублікував рішення під псевдонімом. Коли ж ця публікація дійшла й до Бернуллі, він повернувся в Базель, і, звісно, він був дуже незадоволений. Близько шести місяців листування між Лопіталем і Бернуллі припинилося.

17 березня 1694 року Лопіталь писав Бернуллі: «Я з радістю дам вам заробітню плату у розмірі 300 фунтів, починаючи з першого січня цього року... Я обіцяю найближчим часом збільшити цей гонорар, який, на мою думку, дуже скромний, як тільки мої справи дещо виправляться. ... Я прошу вас не надсилати іншим, навіть містеру Варіньйону, будь-які копії творів, які ви залишили у мене; якщо вони будуть опубліковані, я буду зовсім незадоволений» [2] Бернуллі прийняв пропозицію Лопіталя, надіслав йому конспекти зі своїми математичними знахідками та ідеями.

У 1696 р. книга Лопіталя «Analyze des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes» ("Нескінченно мале числення з додатками до кривих

ліній") [3] була опублікована; це був перший підручник з нескінченно малого числення.

У вступі Лопіталь дякує за натхнення та матеріал Лейбніцу, Якобу Бернуллі та Йоханну Бернуллі, але Лопіталь розглядав основи, над якими ним, як власні ідеї.

З прологу цієї книги: «Окрім усього я розумію, що багато чим зобов'язаний світлим ідеям мес'є Бернуллі, особливо тим, над якими він працював вже як професор із Гронінгену. Я безкоштовно скористався матеріалами пана Лейбніца. Ось чому я визнаю, що вони можуть претендувати на свої праці, які за правом довели самі».

Після смерті Бернуллі, Лопіталь розкрив світу їх домовленість. Якщо проаналізувати всі листи Лопіталю надіслані Лейбніцу та Гюйгенсу про свій математичний прогрес, бачимо, що можливо за винятком одного-двох Лопіталь не брехав, а посилався на Бернуллі з поблажливою тональністю, не визнаючи жодної заборгованості перед ним, а у нотатках про походження ідей для книги написав таким чином, що лише пропонував, фактично не стверджуючи. «М. Бернуллі був першим, хто помітив красу цього розрахунку» - з прологу «Аналіз нескінченно малих».

Попри все, педагогічний талант Лопіталю залишається всесвітньо визнаним через лаконічну подачу матеріалу.

Лопіталь одружився з Марі-Шарлоттою де Ромілі де Ла Чеснеле [4], також математиком, членом знаті та спадкоємцем великих маєтків у Бретані. Праці Марі-Шарлотти були спрямовані на геометрію та алгебру. У подружжя народився один син і три дочки.

Його «*Traité analytique des sections coniques*» («Аналітичний трактат про канонічні перерізи») була майже закінчена, коли на початку 1704 року він був схоплений з лихоманкою, яка призвела до нападу апоплексії. Він помер наступного дня, 2 лютого 1704 року. Родичі пояснювали його смерть надмірною практикою математики. Його трактат був опублікований посмертно в 1707 році.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Coolidge J.L. The Mathematics of Great Amateurs. <http://pyrkov-professor.ru/default.aspx?tabid=251&ArticleId=422>
- [2] C Truesdell, The New Bernoulli Edition, Isis 49 (1) (1958), 54-62. <https://philpapers.org/rec/TRUTNB-2>
- [3] <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k205444w/f2.vertical>
- [4] https://fr.wikipedia.org/wiki/Dictionnaire_historique,_litt%C3%A9raire_et_bibliographique_des_Fran%C3%A7aises_et_des_%C3%A9trang%C3%A8res_naturalis%C3%A9es_en_France

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: karlova.anastasiaof.01@gmail.com

ДИСКУСІЯ П'ЄРА ДЕ ФЕРМА ТА РЕНЕ ДЕКАРТА

О.О. КОСТЕНКО

У цій статті буде розглянуто та описано хід дискусії П'єра де Ферма та Рене Декарта щодо методів аналітичної геометрії.

П'єр де Ферма (1607 – 1665 рр.) – великий французький математик, який зробив значний внесок у математичний аналіз, геометричну оптику, аналітичну геометрію, а також теорію чисел. Хоч і отримав ступінь бакалавра цивільного права, та головним заняттям лишилась математика. Крім того, відомий своїми двома працями, а саме: Велика та Мала теорема Ферма.[1]

Рене Декарт (1596 – 1650 рр.) – не менш відомий французький математик, філософ, фізик та фізіолог. Один із основоположників аналітичної геометрії, запровадив Декартову систему координат, увів величину імпульсу сили у фізиці, а також був автором всім відомого виразу: “Я мислю, отже я існую”. [2]

У 1637 р. Декарт закінчив дві праці: “Роздуми про метод” та “Діоптрика”. Незабаром Ферма написав відгук на другу працю за проханням іншого вченого – Мерсенна. Ферма не визнав доведення закону синусів про заломлення світла, вважаючи, що він був виведений на основі аналогії. [3] Декарт отримав листа з критикою його праці, але поставився до цього досить легковажно і не сприймав Ферма як серйозного суперника. Прочитавши ранню роботу П'єра, він зміцнив свої переконання і написав відповідь через Мерсенна, що нехай Ферма краще прочитає ще раз його “Діоптрику”, а також, якщо загляне до праці “Геометрія” і зрозуміє її, то зможе стати непоганим учнем.

Через гординю Декарт навіть не згадував імені свого адресата, тобто Ферма, але незабаром він знайшов ахіллесову п'яту суперника – “Методи”, у якій було викладено метод (адекватності), що дозволяв знаходити точки екстремумів функцій, дотичні до кривих, площу, центр мас та розв'язувати інші важливі проблеми математичного аналізу. Так співпало, що Декарт у своїй праці “Геометрія” (1637 р.) теж описав власний метод знаходження дотичних – метод нормалей. Метод Ферма був більш геометричний, а метод Декарта – алгебраїчно-аналітичний. Філософ написав рецензію на роботу Ферма “Методи”, де розкритикував його метод за те, що він був не універсальний, приводив до вже відомих результатів і не містив нічого нового. [4]

Уривок з листа Декарта Мерсенну, надісланому 18 січня 1638 року, з відгуком на “Методи”: “Я б не хотів щось казати про статтю, яку Ви мені надіслали, оскільки я не можу нічого сказати на користь того, хто її написав.”[5]

Листування велося через Мерсенна, а така людина, як він, мала талант до розв’язування суперечок, тому він надіслав цей лист не тільки Фермі, а й паризьким “ворогам” Декарта: Етьєну Паскалю (батько відомого Блеза Паскаля) та Жилію Робервалю. Ті, у свою чергу, виступили з критикою праць Декарта, що і підтвердили підозри про змову щодо нього.

Останньою атакою Рене Декарта став виклик, де той просив Ферма знайти дотичну до певної кривої, яку згодом назвали “декартів лист”. Відповідь з правильним рішенням прийшла досить швидко, і, більше того, рівняння було отримано двома способами, другий з яких спирався на методи самого ж Декарта з використанням нормалі. [5]

Отже, після певного часу стало очевидним, що зауваження Декарта щодо методів дотичних, які залежали від методів максимумів і мінімумів, були хибними. Врешті-решт, Жерар Дезарг виступив суддею і виніс рішення, що метод знаходження дотичних Ферма був універсальним і правильним. Також слід зауважити, що Декарт, як філософ, був досить високої думки про себе на відміну від Ферма, який проявляв повагу до суперника.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Пьер Ферма. URL: <https://science.wikia.org/ru/wiki/ПьерReneDescartes>. URL : <https://mathshistory.standrews.ac.uk/Biographies/Descartes/>
- [2] Pierre de Fermat. URL: <https://mathshistory.standrews.ac.uk/Biographies/Fermat/>
- [3] Katz, Victor J. A history of Mathematics (3-rd edition). Pearson, 2008, p.510.
- [4] Самая сложная задача в мире. Ферма. Великая теорема Ферма. URL: <https://www.litmir.me/br/?b=549258p=1>

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

АНАЛІЗ ТЕСТІВ ТИПУ “ВБУДОВАНІ ВІДПОВІДІ” ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛЕЙ IRT

Д.Р. ЛИСЕНКО, Н.В. КРУГЛОВА, О.О. ДИХОВИЧНИЙ

В роботі досліджуються математичні методи аналізу тестових питань типу “вбудовані відповіді”. В якості об’єкту дослідження вибрано контрольну з теорії ймовірностей, проведену для студентів другого курсу ФІОТ Київського Політехнічного Інституту ім. І. Сікорського під час дистанційного навчання в осінньому семестрі 2020 р. на платформі Moodle. Контрольна містила 8 питань типу “вбудовані відповіді” і два питання типу “множинний вибір”. Ми провели аналіз саме питань типу «вбудовані відповіді», оскільки аналіз методами IRT таких питань не проводився вітчизняними науковцями. Питання типу “вбудовані відповіді” є доволі гнучкими: дозволяють поєднувати у собі питання типу “числові”, “множинного вибору”, “на відповідність”; перевіряють проміжні етапи розв’язання задачі, що, в деякій мірі, є способом виявлення і зменшення застосування онлайн ресурсів під час контрольних робіт.

Методи IRT і КТТ є ефективним засобом аналізу результатів педагогічних [1], [2], соціологічних, психологічних тестувань: виявляють занадто легкі і надмірно важкі завдання; питання з високою ймовірністю вгадування відповіді; питання, які безпосередньо розв’язуються за допомогою спеціального програмного забезпечення; завдання з низькою диференціюючою здатністю. Такі питання вилучаються із тесту або допрацьовуються.

Дослідження тестування проводилося в три етапи:

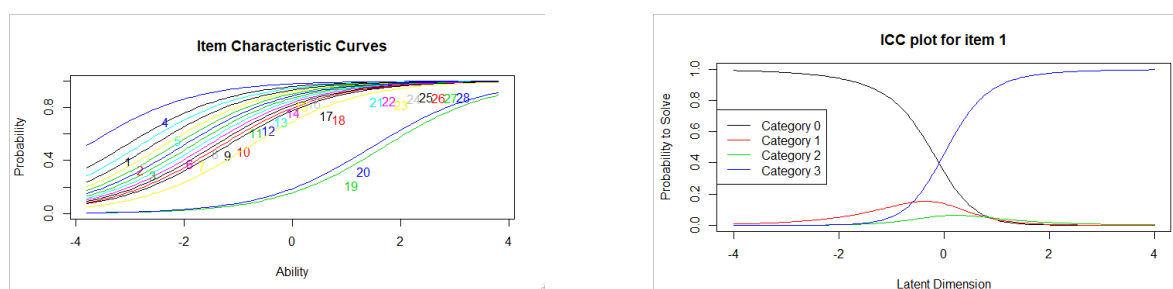
- (1) Побудова гістограми сумарних балів іспитників, знаходження коефіцієнту Кронбаха, виявлення завдань з високою кореляцією.
- (2) Застосовано політомічну модель Муракі [3] безпосередньо до матриці первинних балів, завантаженої з платформи Moodle.
- (3) Розбито кожну задачу тесту на окремі дихотомічні питання і застосовано моделі Раша, Бірнбаума і 3-PL модель [4] до дихотомічної матриці балів.

Для кожної застосованої моделі проведено аналіз адекватності моделі даним тестування за допомогою критерію χ^2 , розраховано латентні параметри моделі, побудовано ІІС та ІСС криві. Для дихотомічної матриці первинних балів даної контрольної роботи коефіцієнт Кронбаха виявився рівним 0.927, для політомічної матриці – 0.849, що свідчить про вдало

складений тест.

Гістограма сумарних балів іспитників має зміщення вправо, що пояснюється високим рівнем математичних знань іспитників даної спеціальності (бал ЗНО по математиці вище 185 балів).

На рисунках зображено ІСС моделі Раша для дихтомічних завдань і ІСС моделі Муракі першого завдання. З рисунків видно, що ІСС питань 1–18 рівномірно покривають площину, а питання 19, 20 відрізняються своєю надмірною важкістю. Їх потрібно переформулювати. В першому завданні деякі рівні ІСС просідають, що свідчить про надмірну важкість певних підзавдань. Їх потрібно змінити.



Проведений аналіз показав, що найкраще описує дані тестування модель Раша. Але в Moodle потрібно вручну створювати дихотомічну матрицю первинних балів для питань типу "вбудовані відповіді", що значно збільшує час обробки даних тестування. Тому цілком доречним є застосування для такого типу питань політомічної моделі Муракі.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Круглова Н. В., Диховичний О. О., Алексеєва І. В. *Особливості застосування математичних моделей тестів в умовах дистанційного контролю* // Математические машины и системы. — 2020. — № 2. — С. 105–116.
- [2] Карданова Е.Ю. *О применимости политомической модели Г. Раша к тестовым заданиям различных форм, оцениваемым политомически.* // Вопросы тестирования в образовании. — 2006. — № 4. — С. 44–56.
- [3] Muraki E. and Carlson E. B. *Full-information factor analysis for polytomous item responses.* // Applied Psychological Measurement. — 1995. — Т. 19, № 1. — С. 73–90.
- [4] Linden W. and Hambleton R. *Handbook of modern item response theory.* — New York: Springer, 2018. "

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: diana.listen@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: natahak@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: a.dyx@ukr.net

БЕНУА МАНДЕЛЬБРОТ

С.Д. МАРКОВСЬКА

Бенуа Мандельброт народився в Варшаві в 1924 році в родині литовських євреїв. Але в 1936 році його родина емігрувала до Франції, в Париж. Його мати була лікарем, батько кравцем, а обидва дядьки математиками. У Парижі він потрапив під вплив свого дядька Шолема Мандельбройта, відомого паризького математика, члена групи математиків, відомої під псевдонімом «Ніколя Бурбакі». І саме під керівництвом дядька почала розвиватися математична кар'єра Бенуа.

У Мандельброта відкрився незвичайний математичний дар – чудова просторова уява, що дозволяла йому розв'язувати алгебраїчні завдання геометричним способом, завдяки чому він одразу після війни став студентом Політехнічної школи (1945–1947).

На хвилі Другої світової війни, батько вченого переконував його, що професія інженера здатна забезпечити Бенуа стабільним заробітком в майбутньому, частково послухавши батька, він усе-таки віддався математиці.

Після Політехнічної школи у 1947–1949 рр. Бенуа вивчав аеронавтику у Каліфорнійському технологічному інституті, а вже після його закінчення, повернувся до Франції і захистив у Сорбонні докторську дисертацію з математики на тему «Ігри комунікацій» у 1952.

Після того він повернувся до Франції, де 1955 року одружився на Аліетт Каган і став професором в Лільському університеті, а потім у Національному центрі наукових досліджень у Парижі.

У 1958 він переїхав до США, де почав працювати в науково-дослідному центрі ІВМ в Йорктауні, де дозволив своїм науковим інтересам «дрейфувати» від чисто прикладних проблем. Він працював в галузі лінгвістики, теорії ігор, економіки, аеронавтики, географії, фізіології, астрономії, фізики. Йому подобалося перемикатися з однієї теми на іншу, вивчаючи різні напрямки. Лауреат премії Вольфа з фізики (1993).

У 1977 році він опублікував роботу «Фрактальна геометрія природи», в якій стверджував, що випадкові на перший погляд форми є насправді складними геометричними фігурами, що складаються з менших фігур, які точно повторюють більшу.

Правила фрактальної геометрії Мандельброта є надзвичайно короткими, вона працює з невеликими формулами і застосовуючи їх повторно, створює унікальні самоподібні математичні моделі. У 1919 році Гаусдорф відкрив розмірність, яка стала головним інструментом виміру заломленості поверхні, яку також активно використовував Мандельброт у своїх доведеннях.

До речі, саме поняття «фрактал» придумав сам Бенуа Мандельброт (від латинського *fractus*, що означає «подрібнений, дробовий»).

З моменту виходу книги почався бурхливий розвиток фрактальної геометрії. Фрактали виявили практично у всіх природних явищах і процесах. Ідеї і досягнення нової геометрії знайшли найрізноманітніші програми. Фрактальні моделі застосовують в медицині для ранньої діагностики ракових пухлин; в ядерній фізиці і астрономії для вивчення елементарних частинок, розподілу галактик у Всесвіті, процесів на Сонці; в інформації для стиснення даних і поліпшення трафіку в мережі Інтернет; для аналізу коливань ринкових цін в економіці, серцевого ритму в кардіології, погоди в метеорології; в хімії, мистецтвознавстві і т.д.

Бенуа Мандельброт, засновник і провідний дослідник фрактальної геометрії, помер у лікарні в Кембриджі 14 жовтня 2010 від раку підшлункової залози у віці 85 років.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] <https://users.math.yale.edu/mandelbrot/interviews.html>
- [2] https://www.ted.com/talks/benoit_mandelbrot_fractals_and_the_art_of_roughness
- [3] https://www.peoples.ru/science/mathematics/benoit_mandelbrot/
- [4] https://en.wikipedia.org/wiki/Benoit_Mandelbrot

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: markovsky.phyth.kpi@gmail.com

ЕДМУНД ЛАНДАУ

І.А. НАКОНЕЧНИЙ

Ландау народився 14 лютого 1877 в заможній сім'ї у Берліні. Так само як і його батько, він став німецьким націоналістом із сіоністськими віруваннями (іудаїзм). У дитинстві Едмунд виявляв неабиякі таланти, за що його часто називали вундеркіндом.

Існує навіть легенда: «У віці трьох років, коли мати (Джоанна Ландау) забула свою парасольку в кареті, він сказав: «354». Так він повідомив номер екіпажу, де відшукали знахідку». [3]

Ландау відвідував французький ліцей (French Lycée) у Берліні, який закінчив у віці 16 років, що на два роки раніше, ніж зазвичай. Після ліцею вчився в Берлінському університеті.

В 1899 році, написавши дисертацію з теорії чисел під керівництвом Лео Фробеніуса, Ландау отримує ступінь доктора наук.

9 червня 1900 року він пише листа до Гільберта, у якому дає короткий викладу його ідей для доведення однієї важливої теорема з області алгебраїчних числових полів.

У цьому році ми святкуємо 120 річницю видання однієї з найважливіших праць Едмунда Ландау – докторської дисертації над рядами Діріхле. Варто зазначити, що науковий керівник був проти ідеї цієї публікації. Не виникає жодних сумнівів, що Лео Фробеніус був занадто невпевненим у оцінці математичних талантів свого учня. Проте ця критика ніяк не вплинула на молодого математика. З доведень, наведених у даній дисертації, сформулювалося доведення однієї з 23-ьох проблем Гільберта.

У 1899 - 1909 роках Ландау викладає у Берлінському університеті як приват-доцент. Цей період життя можна назвати стрімким ростом його математичних талантів та публікацій. Наприклад у 1909 р. його наукова спадщина складалася майже з 70 надрукованих робіт!

Вишенькою на торті цього періоду стає трактат 1909 р. «*Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*». Двотомна робота, що дає першу систематичну презентацію аналітичної теорії чисел. У трактаті Ландау зумів зв'язати закони розподілу простих чисел і простих ідеалів алгебраїчного числового тіла. [2]

Здатність Едмунда викладати стала чітко очевидною. Він проводив курси для початківців (за власним бажанням), а також читав лекції своєї

спеціальності Теорія чисел. Крім того, Ландау викладав лекційні курси з основ математики, ірраціональних чисел та теорії множин.

У 1909 році він був призначений на посаду професора в Геттінгені. Ландау був дуже добре обізнаний і майже завжди математично коректним. Проте ніколи не втрачав нагоди подратувати своїх колег, через це колеги та студенти його не долюблювали.

В кінці 1920-х років відвідує Палестину, де бере участь у заснуванні там Інституту математики. Едмунд був обраний професором Єврейського університету в Єрусалимі та провів там цикл своїх лекцій.

В цей період він пише важливі праці з теорії аналітичних функцій однієї змінної. Наприклад *«Представлення та доведення деяких результатів теорії функції»*. (*Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktiontheorie*).

У 1924 році Ландау стає почесним членом Лондонського математичного товариства. А в 1930-му випускає книгу *«Основи аналізу»* (*Grundlagen der Analysis*), яка вважається класичним викладом даного предмета і в наші дні.

7 квітня 1933 р. в Німеччині прийняли Закон про державну службу, який передбачав засоби відсторонення єврейських викладачів від університетів. Ця подія докорінно змінила життя професора.

2 листопада цього ж року, студенти, на чолі з Тейхмюллером, організують бойкот. В ході якого, ватажок цієї групи у письмовому вигляді пояснює, чому вони вважають Ландау «непридатним для навчання». [4]

19-го листопада Едмунд отримує дозвіл працювати в Гронінгені (Нідерланди), що дозволило йому залишитись там протягом зимового семестру.

Після виходу на пенсію (7 лютого 1934 р.) Едмунд Ландау читає лекції виключно за межами Німеччини, а саме у Кембриджі та Голландії.

Помер Е. Ландау від серцевого нападу в Берліні 19 лютого 1938 р.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] <http://booknik.ru/today/all/simvoly-landau/>
- [2] <https://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/ABV2766.0001.001>
- [3] <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Landau/>
- [4] <https://mathematics.huji.ac.il/edmund-landau>

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: illia.nakonechnyi.of01@gmail.com

ПРО ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ АЛЬ-КАШІ ЗА ДОПОМОГОЮ ФОРМУЛИ КАРДАНО ТА ДЕЯКИХ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ

С.О. ОЛАСЮК

Персидський математик аль-Каші в своїй роботі “Про хорду та синус” навів ітераційний метод знаходження синуса кута одного градуса та досяг вражаючого результату отримавши значення з 17 правильними знаками після коми: $\sin 1^\circ = 0.01745240643728351$ [4].

$$\sin 3^\circ = 3 \sin 1^\circ - 4 \sin^3 1^\circ, \quad (1)$$

Поклавши $\sin 1^\circ = x$ в рівності (1) отримаємо кубічне рівняння

$$\sin 3^\circ = 3x - 4x^3 \quad (2)$$

Отже, задача знаходження синуса одного градуса зводиться до розв'язання (2).

Для знаходження коренів даного полінома в роботі було використано формулу Кардано та ітераційні методи (метод бісекції, китайський метод regula falsi та метод Н'ютона).

За допомогою формули Кардано можна знайти точний розв'язок рівняння аль-Каші, використовуючи точне значення синуса трьох градусів [3]

$$\sin 3^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{5} - 1) - 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{\sqrt{5} + 5}}{16},$$

звідки одержуємо

$$\sin 1^\circ = \frac{\sqrt[90]{\sqrt{-1}} - \sqrt[90]{-\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Оскільки, вільний член кубічного рівняння є ірраціональним числом, то для застосування ітераційних методів обчислення маємо взяти наближене значення синуса трьох градусів

$$\sin 3^\circ \approx 0.05233595624294383272212$$

Для застосування методу бісекції необхідно вибрати два перші наближені значення, так щоб виконувалась умова $f(x_0)f(x_1) < 0$. Очевидно, що значення $\sin 1^\circ$ більше за нуль, але близьке до нього, тому $x_0 := 0$. Синус одиниці менше відомого нам синуса трьох градусів, тому $x_1 := 0.052$ (в даному випадку точність не важлива).

В якості початкових наближень для знаходження $\sin 1^\circ$ методом regula falsi також візьмем $x_0 := 0, x_1 := 0.052$ зі схожих міркувань.

Метод Н'ютона потребує лише одне значення в якості початкового наближення, покладемо $x_0 := 0$ [1].

В кожному з випадків похибка обчислення однакова: $\varepsilon = 10^{-20}$, аби коректно порівняти ефективність методів. Отримаємо такі результати:

Метод бісекції	Regula falsi	Метод Н'ютона
54 ітерації	6 ітерацій	3 ітерації
0.01745240643728351512	0.01745240643728351512	0.01745240643728351512
лінійна швидкість	лінійна швидкість	квадратична швидкість

За допомогою ряду Тейлора знаходимо $\sin 1^\circ$ з похибкою $\varepsilon = 10^{-20}$:

$$\sin 1^\circ = 0.01745240643728351281942$$

Таким чином, нам вдалось досягти точності обчислень аль-Каші, а способи знаходження результату коректні.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] М. Я. Лященко, М. С. Головань. *Чисельні методи*. К. : Либідь, 1996. — 288 с.
- [2] О.І. Клесов. *Розвиток класичних ідей у сучасній математиці* // Конспект лекцій. - 2021
- [3] Travis Kowalski. *The Sine of a Single Degree*.
URL: <https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/awards/college.math.j.47.5.322.pdf>
- [4] Glen Van Brummelen. *Jamshid al-Kashi: Calculating Genius*. "Mathematics in School, Vol. 27, No. 4, History of Mathematics (Sep., 1998), pp. 40-44 URL: <https://www.jstor.org/stable/30211875>

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: nameisneedfull@gmail.com

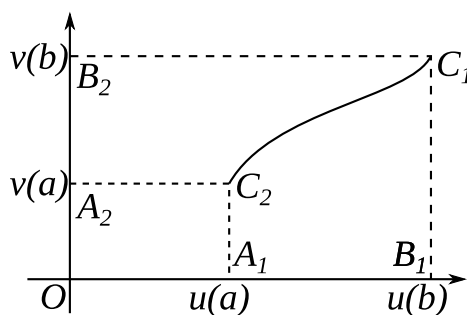
ГЕОМЕТРИЧНЕ ТЛУМАЧЕННЯ ФОРМУЛИ ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

А.О. СЕРЕДЕНКО, Л.А. РЕПЕТА

В курсі математичного аналізу вивчається тема «Визначений інтеграл», дається означення цього поняття і його геометричний зміст як площу криволінійної трапеції, обмеженої віссю абсцис, двома вертикальними прямими, що проходять через кінці відрізка інтегрування і графіком неперервної невід'ємної функції. Одним із способів обчислення визначеного інтеграла є метод інтегрування частинами.

За деяких припущень стосовно підінтегральних функцій, формулі інтегрування частинами у визначеному інтегралі можна також надати геометричну інтерпретацію [1].

Припустімо, що функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ неперервні та монотонно зростають на інтервалі (a, b) . Тоді на цьому інтервалі для них існують обернені функції. Якщо виразити обернену до $u = u(x)$ функцію і підставити її у $v = v(x)$, то ми отримаємо функцію $v = v(u^{-1}(x))$ як функцію від u , тобто $v = v(u)$. Ця функція монотонно зростає і $v(u^{-1}(a)) = v(a)$, $v(u^{-1}(b)) = v(b)$. Зобразимо схематичний графік цієї функції.



Тоді $\int_a^b u(x) d(v(x)) + \int_a^b v(x) d(u(x)) = u(b)v(b) - u(a)v(a)$, або сума площ криволінійних трапецій $A_1B_1C_1C_2$ і $A_2B_2C_1C_2$ дорівнює різниці площ прямокутників $OB_1C_1B_2$ і $OA_1C_2A_2$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Courant, R. *Differential and Integral Calculus* — vol. 1, New York, 1937.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: a.seredenko3005@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: repetalesia@gmail.com

ІСТОРИЧНИЙ ОГЛЯД РОБОТИ СПОРА НІКЕЙСЬКОГО

Ю.І. СКОРЕЙКО

Спор Нікейський — грецький математик й астроном. Про діяльність Спора ми можемо дізнатися лише зі вторинних джерел таких, як роботи Паппа Олександрійського, а також твори різних коментаторів. Велика частина робіт присвячена дослідженню задач про квадратуру круга та подвоєння куба, вони містять як власні спроби вирішити ці проблеми, так і критику вже існуючих рішень.

Вирішення задачі подвоєння куба Спора Нікейського

Спор уникає використання цисоїди, замість цього обертає лінійку навколо точки, поки певні точки перетину не стануть рівними. Потрібно провести пряму DK , як на рисунку 1, а потім навколо точки C обертати лінійку. Потрібно, щоб діаметр AB ділив відрізок EP навпіл (точки E і P — точки перетину лінійки з окружністю та прямою DK відповідно). Нехай радіус окружності, яку розглядаємо, дорівнює a . Введемо систему координат Oxy так, що $x = OH$ і $y = HP$.

Рівність $DH \cdot HP = HF \cdot HC$ перепишемо у вигляді:

$$(a + x)y = \sqrt{a^2 - x^2} \cdot (a - x)$$

$$y^2(a + x) = (a - x)^3.$$

Таким чином, цисоїда задається рівнянням третьої степені. Проведемо в окружності S перпендикулярні діаметри AB і CD (рис. 1). На промені OC візьмемо таку точку Z , що $OZ = CD$. Для побудови цисоїди використаємо прямокутний трикутник XYZ' , довжина катета XY дорівнює діаметру окружності S . Нехай P — середина відрізка XY . Якщо точка X рухається по прямій AB , а катет YZ' проходить через точку Z , то точка P рухається по цисоїді.

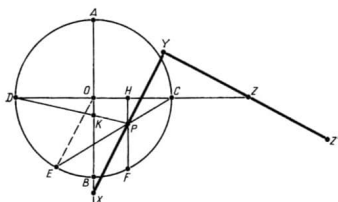


Рис. 1.

Доведемо це твердження. Точки O і Y лежать на окружності з діаметром XY , а відрізки XY і OZ дорівнюють діаметру окружності S , тому

$ХОУZ$ — рівнобедрена трапеція. Пряма PC з'єднує середини її діагоналей, отже вона паралельна до основ трапеції та ділить відрізок OX навпіл.

Крім цього, $\angle EPX = \angle YPC = \angle OCP$. Так як $OC = OE$, то $\angle OCP = \angle OEP$. Отже, $OE \parallel PX$. В чотирикутнику $EOPX$ діагональ OX ділиться діагоналлю EP навпіл, а сторони OE і PX паралельні. Тому чотирикутник $EOPX$ — паралелограм і відрізок EP ділиться діаметром AB навпіл, отже, точка P лежить на цисоїді.

Критика рішення задачі квадратури круга Спора Нікейського

Спор критикував рішення задачі квадратури круга за допомогою квадрати Дінострата. Він висунув два серйозних заперечення. По—перше, задачу квадратури круга можна вирішити за допомогою квадрати Дінострата тільки в тому випадку, коли її рішення вже відомо. Пояснюється це тим, що аби узгодити рух відрізків BC і AB (рис. 2), потрібно заздалегідь знати співвідношення довжини дуги чверті окружності до радіуса. По—друге, точку K побудувати не можна, тому що у відповідний момент часу відрізок і радіус співпадають. Як перетин відрізків $B'C'$ і AN можна будувати лише точки, які близькі до точки K , але не саму точку K . Отже, точку K можна побудувати лише як ліміт точок квадратрис.

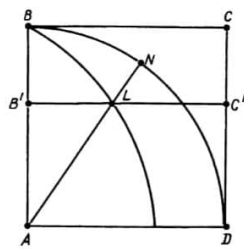


Рис. 2.

Спора також критикував Архімеда за те, що він не дав більш точного наближення числу π . Спор зазначає, що його власний вчитель Філон Гадарський звів справу до більш точного числового виразу, ніж це зробив Архімед.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Прасолов В.В. *Три класичні задачі на побудову. Подвоєння куба, трисекція кута, квадратура кола* (1992).
- [2] Дж. Дж. О'Коннор та Е. Ф. Робертсон *Коротка біографія на MacTutor* (1999).
<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sporus/>
- [3] Скрібнерз Ч. *Біографія в словнику наукової біографії* (2008).
<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/DSB/Sporus.pdf>

РОЗВИТОК МЕТОДУ REGULA FALSI У КИТАЇ

ЧЖАО КЕСІНЬ

Китайська книга “Jiuzhang suanshu” або “9 глав про математичне мистецтво” відноситься до періоду від 200 року до н.е. до 100 року н.е. Ця книга фактично є набором правил для розв’язання достатньо широкого кола математичних задач. Книга загалом містить 246 задач з різних галузей людської діяльності від інженерних потреб до торгівлі та оподаткування. Книга “Jiuzhang suanshu” довгий час вважалась у Китаї основним джерелом математичних знань, а її значення для китайських вчених було схожим на те, яке мали “Початки” Евкліда для греків.

Розділ 7 книги “9 глав про математичне мистецтво” називається “Про надлишки та недостачі” й містить 20 задач, які розв’язуються методом, який пізніше в Європі назвали методом подвійного regula falsi.

Цим методом можна розв’язати рівняння

$$ax + b = c. \quad (1)$$

При розв’язанні рівняння (1) методом подвійного regula falsi ми спочатку підставляємо x_1 у ліву частину (x_1 — це довільне число) і отримуємо $c + e_1$ замість c (похибка дорівнює e_1). Потім ми підставляємо x_2 у ліву частину (x_2 — це інше довільне число) і отримуємо $c + e_2$ замість c (тепер похибка дорівнює e_2).

$$ax_1 + b = c + e_1, \quad ax_2 + b = c + e_2.$$

Після цього правильна відповідь обчислюється за формулою

$$x = \frac{x_2 e_1 - x_1 e_2}{e_1 - e_2}.$$

У доповіді будуть представлені задачі з книги “Jiuzhang suanshu”, які розв’язуються методом подвійного regula falsi.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Чжан Канг, Ген Шоучанг *The Nine Chapters on the Mathematical Art*.
- [2] А. Ейнштейн, *Математичні факти будуть істиною завжди*.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: 1165253990@qq.com