НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК ____517.983____

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
________ Олег КЛЕСОВ,
«___»___травня___2023 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Розв'язки лінійного операторного рівняння у скінченновимірному банаховому просторі»

Виконав:
студент II курсу, групи ОМ-11мн
Антонюк Назарій Олександрович __________

Керівник:
кандидат фіз.-мат. наук,
старший викладач
Сиротенко Антон Володимирович __________

Рецензент:
кандидат фіз.-мат. наук,
асистент кафедри математичної фізики
КНУ ім. Тараса Шевченка
Гап’як Ігор Васильович __________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____________

Київ – 2023 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_______ Олег КЛЕСОВ

«08»_лютого_2023 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Антонюку Назарію Олександровичу

1. Тема дисертації «Розв'язки лінійного операторного рівняння у скінченновимірному банаховому просторі», науковий керівник дисертації Сиротенко Антон Володимирович, кандидат фізико-математичних наук, затверджені наказом по університету від «27» березня 2023 р. №1337-с

2. Термін подання студентом дисертації 19 травня 2023 року

3. Об’єктом дослідження є лінійні операторні рівняння в банаховому просторі.

4. Предметом дослідження є формули єдиного розв’язку для операторного рівняння в банаховому просторі у різних випадках.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1). Ознайомитися з літературою та навести основні означення.

2). Навести класичні результати, що забезпечують існування єдиного розв’язку для широкого класу операторних рівнянь.

3). Дослідити частковий випадок операторного рівняння в конкретному просторі та отримати явні формули для розв’язку рівняння у різних випадках щодо операторів.

4). Навести приклади конкретних рівнянь, розв’язати їх, використовуючи отримані формули.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 17 слайдів.

7. Орієнтовний перелік публікацій:

- Тези доповідей XI Всеукраїнської конференції молодих математиків, Київ, травень 2023 р.

8. Дата видачі завдання 08 лютого 2023 року

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Огляд літератури	08.02.23-21.02.23	виконано
2.	Нотування основних результатів та тверджень	22.02.23-28.02.23	виконано
3.	Розв’язання завдань на знаходження спектру різних операторів	01.03.23-14.03.23	виконано
4.	Формулювання відомих теорем щодо операторних рівнянь та їх розв’язків	15.03.23-21.03.23	виконано
5.	Знаходження явного вигляду розв’язку матричного рівняння у випадку усіх різних власних чисел матриць	22.03.23-31.03.23	виконано
6.	Знаходження явного вигляду розв’язку матричного рівняння у випадку двох різних власних чисел матриць	01.04.23-10.04.23	виконано
7.	Підготовка тез доповідей для конференції	11.04.23-18.04.23	виконано
8.	Знаходження явного вигляду розв’язку матричного рівняння у випадку однакових власних чисел матриць	19.04.23-25.04.23	виконано

9.	Наведення прикладів, що підтверджують отримані результати.	26.04.23-03.05.23	виконано
10.	Оформлення результатів	04.05.23-16.05.23	виконано

Студент Назарій АНТОНЮК

Науковий керівник Антон СИРОТЕНКО

Реферат

Магістерська дисертація: 50 сторінки, 22 першоджерела, 17 слайдів презентації. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаної літератури.

В дисертаційній роботі досліджується лінійне операторне рівняння у банаховому просторі для випадку конкретно заданих скінченновимірних просторів. Основною метою дисертаційного дослідження є знаходження явних формул розв'язку матричного рівняння в залежності від загального вигляду множин власних чисел наявних у рівнянні матриць. Об'єктом дослідження є лінійні операторні рівняння в банаховому просторі. Предметом дослідження є формули єдиного розв'язку для операторного рівняння в банаховому просторі у різних випадках.

Перший розділ магістерської дисертації містить теоретичні відомості з комплексного аналізу, який здебільшого є основним апаратом дослідження. Також наведені відомі результати з теорії операторів та операторних рівнянь у банахових просторах. Розпочинається розділ з переліку умовних позначень, що використовуються у дисертації.

Другий розділ містить основні результати дослідження. Ці результати сформульовані наприкінці підрозділів у вигляді теорем існування єдиного розв'язку матричного рівняння залежно від структури множин власних чисел матриць. Кожна теорема також наводить явну формулу для знаходження таких розв'язків.

В роботі над дисертацією використовувалися фундаментальні результати з теорії функцій комплексної змінної, а також методи лінійної алгебри та функціонального аналізу.

Ключові слова: лишки функції, спектр оператора, банахів простір, матричне рівняння, власні числа.

Abstract

Master's thesis: 50 pages, 22 primary sources, 17 slides of the presentation. The work consists of the introduction, two sections, conclusions and the list of references.

In the dissertation linear operator equation in a Banach space for a concrete example of the finite-dimensional space is studied. The aim of the dissertation research is to establish explicit formulas for solution for the matrix equation depending on how the sets of eigenvalues of the matrices present in the equation look like. The object of research is linear operator equations in a Banach space. The subject of the study is the formulas of a single solution for the operator equation in a Banach space in different cases.

The first section of the dissertation contains theoretical information from complex analysis which is much more the main instrument for research. Some well-known results from the theory of operators and operator equations in Banach spaces are also formulated. The section begins with a list of notations used in the dissertation.

The second section contains the main results of the study. These results are formulated at the end of the subsections in the form of a theorem about existence of unique solution of the matrix equation depending on the structure of the set of eigenvalues of the matrices. Each theorem also provides an explicit formula for finding such solutions.

In the process of work on the dissertation, fundamental theorems of the theory of functions of a complex variable were used, as well methods of linear algebra and functional analysis.

Key words: function residues of function, spectrum of an operator, Banach space, matrix equation, eigenvalues.

Зміст

Вступ

Диференціальні рівняння – один із найважливіших розділів сучасної математики. Винахідником диференціальних рівнянь вважається І.Ньютон [1]. Згодом з розвитком прикладної математики, диференціальні рівняння почали виникати в найрізноманітніших напрямках не тільки математики, а й інших наук. Разом з тим важливе питання про існування та єдиність обмеженого розв’язку для диференціального рівняння з’явилося на порядку денному відносно недавно. Започаткували роботи в цьому напрямку такі відомі математики, як А.Пуанкаре [2], О.Перрон та О.Ляпунов. Їхніми стопами пішли й інші видатні вчені, серед яких М.Г.Крейн, Ю.Л. Далецький [3-4], А.М.Самойленко [6], А.Я.Дороговцев [7-8] та інші. Цікавий результат отримав М.Г.Крейн, який виявив, що при вивченні складних диференціальних рівнянь різного типу виникають операторні рівняння на кшталт $AX + XB = Y$, а також схожі на нього. Дослідженню властивостей та розв’язків подібних рівнянь, зокрема, присвячена його фундаментальна робота [3]. Таким чином, можна стверджувати, що знаходження розв’язків рівнянь такого типу є корисним не лише саме по собі, а й може використовуватися для ширшого класу проблем.

Враховуючи загальний вигляд вищенаведеного операторного рівняння, навіть у випадку скінченновимірних банахових просторів знаходження та існування єдиного розв’язку не є тривіальним питанням (принаймні, для розмірності простору більше за 1). Таким чином, можна говорити про актуальність дисертаційної роботи, що присвячена знаходженню таких розв’язків.

Мета магістерської дисертації полягає в отриманні явних формул розв’язку конкретного матричного рівняння для різних випадків, що відрізняються кількістю власних чисел матриць, що фігурують у рівнянні, а також у формулюванні теорем про існування такого розв’язку.

В першому розділі магістерської дисертації наведено теоретичні відомості, на яких ґрунтується дане дослідження, а також ті, що використовуються в ньому як апарат. В тому числі, сформульовано класичний результат, доведений М.Г.Крейном та Ю.Л.Далецьким.

Другий розділ повністю присвячений отриманим результатам та перевірці їх коректності. Розглянуто матричне рівняння $AX - XB = Y$ для заданих матриць A, B та Y. Сформульовано та доведено теореми про існування єдиного розв'язку X такого рівняння у різних випадках, що залежать від структури множин власних чисел матриць A та B. Крім того, отримано та перевірено за допомогою відповідних прикладів явні формули для знаходження розв'язків такого рівняння.

Наприкінці дисертації сформульовано висновки проведеної роботи, а також наведено список використаних джерел.

Частина отриманих результатів була опублікована у вигляді тез XI Всеукраїнської конференції молодих математиків, що відбулася у травні 2023 року.

Розділ 1. Теоретичні відомості

1.1. Список позначень, що використовуються в дисертаційній роботі.

$d\Omega$ – межа області Ω;

$int(\gamma)$ – внутрішня область, яка обмежена замкненою кривою γ;

$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)$ – лишок функції f в точці $z = z_0$;

$\mathfrak{B}$ – банахів простір;

$[\mathfrak{B}_1; \mathfrak{B}_2]$ – простір лінійних обмежених операторів, які визначені у просторі $\mathfrak{B}_1$ та набувають значень у просторі $\mathfrak{B}_2$;

$[\mathfrak{B}]$ – простір лінійних обмежених операторів, які визначені у просторі $\mathfrak{B}$ і набувають значень у ньому ж;

$\sigma(A)$ – спектр оператора A;

A^{-1} – обернений до оператора A оператор;

I – одиничний оператор;

$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ – резольвента оператора A;

1.2. Інтеграли по контуру. Теорема Коші про лишки.

Нехай Ω – деяка область, що задана в множині комплексних чисел $\mathbb{C}$.

Означення 1.1. Нехай f – деяка функція, неперервна в області Ω, а також нехай z=γ(t), t ∈ $[a, b]$ - кусково-гладка крива така, що має шлях, який належить області Ω. Тоді можемо визначити інтеграл від функції f по кривій γ наступним чином:

$$\int_{\gamma} \mathrm{f}(z)\, dz \overset{\text{def}}{=} \int_{a}^{b} \mathrm{f}(\gamma(\mathrm{t}))\gamma'(\mathrm{t})\, d\mathrm{t}. \tag{1.1}$$

У випадку, коли $\gamma(a) = \gamma(b)$, крива називається замкненою.

Означення 1.2. Ми будемо казати, що функція f є диференційованою в деякій точці $z_0 \in \mathbb{C}$, якщо існує таке $\alpha \in \mathbb{C}$, що $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \alpha\Delta z + \bar{o}(\Delta z), (\Delta z \to 0)$.

Означення 1.3. Функцію $f(z)$ називатимемо аналітичною в деякій області Ω, якщо ця функція є диференційованою в кожній точці області.

Розглянемо криву z = γ(t), t ∈ $[a, b]$. Введемо наступні позначення: z = $\gamma^{-}(\tau)$ = γ(a + b - τ), $\tau \in [a, b]$. Тоді γ та γ^{-} будуть протилежно орієнтовані. З властивостей криволінійного інтегралу можемо зробити висновок, що

$$\int_{\gamma^{-}} \mathrm{f}(z)\, dz = - \int_{\gamma} \mathrm{f}(z)\, dz.$$

Означення 1.4. Припустимо, що функція $f(z)$ є аналітичною в проколотому крузі з радіусом r та із центром в деякій точці $a \in \mathbb{C}$. Величину

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z-a|=\rho\}^{+}} f(z) dz \tag{1.2}$$

будемо називати лишком функції f у точці a. Тут $\rho \in (0; a)$.

Має місце наступна теорема, що також відома як інтегральна формула Коші:

Теорема 1.1. *Нехай* Ω *- деяка обмежена область комплексної площини. Покладемо* $d\Omega = \bigcup_{k=0}^{n} E_{\gamma_k}$, *де* γ_k *– такі замкнені жорданові криві, що мають попарно неперетинні шляхи, а також для всіх* $k \in \{1, \dots, n\}$ $E_{\gamma_k} \subset int(\gamma_0)$ *і орієнтація кожної кривої* γ_k *узгоджується з додатною орієнтацією межі області* Ω.

Якщо $f \in A(\overline{\Omega})$, *то має місце формула*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d+\Omega} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon - z} d\varepsilon, \forall z \in \Omega. \qquad (1.3)$$

Теорема 1.1 дозволяє отримати значення будь-якої аналітичної в області функції через значення цієї функції на межі області. Відтак формула (1.3) має широке застосування в різних математичних задачах.

Наступна теорема, що також належить Коші, пов'язую значення інтеграла від аналітичної за винятком скінченної кількості точок в області функції із лишками цієї функції у точках неаналітичності.

Теорема 1.2. *Припустимо, що* Ω *- деяка обмежена область, причому* $d\Omega = \bigcup_{k=0}^{k} E_{\gamma_j}$, *де* $\{\gamma_j\}_{j=0}^{k}$ *– замкнені жорданові криві, які мають шляхи, що попарно не перетинні, а також* $E_{\gamma_j} \subset int(\gamma_0)$ *для кожного* $j \in \{1, \dots, k\}$. *Нехай функція* f *є аналітичною в замиканні області* Ω, *крім точок* $a_1, \dots, a_p$, *що належать* Ω, *тобто* $f \in A(\overline{\Omega} \backslash \{a_1, \dots, a_p\})$. *Тоді*

$$\int_{d+\Omega} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \underset{z=a_k}{res} f(z). \qquad (1.4)$$

Теорема 1.2 є одним з потужних інструментів, що використовуються в математичних дослідження, зокрема і в цій дисертаційній роботі.

Для обчислення лишків використовуються наступні формули:

У випадку, якщо точка $a \in \mathbb{C}$ є полюсом першого порядку функції f, то для знаходження лишку зручно використовувати формулу

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{1.5}$$

Якщо ж точка $a \in \mathbb{C}$ є полюсом m-ого порядку функції f, причому $m \geq 2$, то для знаходження лишку функції доцільно використовувати формулу

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right). \tag{1.6}$$

1.3. Функції від лінійних неперервних операторів.

Наведемо деякі важливі означення та теореми, що використовуються в дисертаційній роботі.

Означення 1.5. Множину ξ називають дійсним (або, відповідно, комплексним) нормованим простором, якщо виконуються такі умови:

1) ξ - лінійний (векторний) простір, який задано над полем дійсних (відповідно, комплексних) чисел.
2) Для будь-якого елемента $x \in \xi$ визначено деяке невід'ємне число $\|x\|$ - норма x, що має властивості:

а) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ для кожного $x \in \xi$ та довільного дійсного (комплексного) числа α;

б) $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$ для всіх $x, y \in \xi$ (нерівність трикутника);

в) $\|x\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$.

Функція $\rho(x, y) = \|x - y\|$ визначає метрику в заданому нормованому просторі, а отже ξ із відповідною метрикою є метричним простором.

Означення 1.6. Послідовність $\{x_n\} \subset \xi$ називають фундаментальною, якщо $\lim\limits_{n.m\to\infty}\|x_n - x_m\|=0$.

Фундаментальним поняттям, що використовується в дисертаційній роботі, є поняття банахового простору.

Означення 1.7. Нормований простір називають банаховим, якщо кожна фундаментальна послідовність елементів цього простору має границю, тобто елемент x із цього простору, що $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\|=0$.

Якщо в нормованому просторі ξ з нормою $\|x\|_1$ задано ще одну норму $\|x\|_2$, то для того, щоб будь-яка збіжна за нормою $\|x\|_1$ послідовність була збіжною за нормою $\|x\|_2$, необхідно і достатньо, щоб існувала додатна константа c_1 така, що

$\|x\|_2 \leq c_1\|x\|_1$.

Дві норми $\|x\|_1$ і $\|\|x\|_2$, задані в лінійному просторі ξ, називаються топологічно еквівалентними, якщо збіжність за однією нормою веде до збіжності за іншою.

Для того, щоб норми були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб існували додатні константи c_1 і c_2 такі, що

$$c_2 \leq \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \leq c_1 \; (x \neq 0).$$

Означення 1.8. Банахові простори називаються ізоморфними, якщо існує взаємно-однозначне лінійне та неперервне відображення одного простору на інший. Це відображення називається ізоморфізмом. Якщо ізоморфізм зберігає норму, то він називається ізометричним.

Нехай тепер $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ - банахові простори.

Означення 1.9. Відображення A: $\mathfrak{B}_1 \rightarrow \mathfrak{B}_2$ називається лінійним оператором, якщо

A$(\alpha x+\beta y)$=αAx+βAy для будь-яких чисел α, β і будь-яких x, y $\in \mathfrak{B}_1$.

Означення 1.10. Оператор B: $\mathfrak{B}_2 \rightarrow \mathfrak{B}_1$ називається оберненим до оператора A: $\mathfrak{B}_1 \rightarrow \mathfrak{B}_2$ і позначається B = A^{-1}, якщо

$$\text{AB} = I_2, \text{ BA}=I_1$$

де I_k - тотожний оператор $\mathfrak{B}_k$, тобто I_kx = x для будь-якого x $\in \mathfrak{B}_k$ (k=1,2).

Важливим результатом в теорії операторів є наступна теорема, сформульована С.Банахом.

Теорема 1.3. *Нехай оператор $A \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$ взаємно однозначно відображає банахів простір $\mathfrak{B}_1$ на банахів простір $\mathfrak{B}_2$. Тоді обернений оператор A^{-1} обмежений, $A^{-1} \in [\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1]$, і, отже, простори $\mathfrak{B}_1$ і $\mathfrak{B}_2$ ізоморфні.*

Нехай задано комплексний банахів простір $\mathfrak{B}$, в якому визначено оператор $A \in [\mathfrak{B}]$.

Означення 1.11. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ будемо називати регулярною точкою оператора A в тому випадку, коли існує оператор обернений оператор $(A - \lambda I)^{-1}$. Цей оператор, в свою чергу, будемо називати резольвентою оператора A.

Означення 1.12. Множину $\rho(A)$ регулярних точок оператора A будемо називати резольвентною множиною для оператора A, а доповнення до резольвентної множини – спектром оператора A та позначати $\sigma(A)$.

Множина $\rho(A)$ всіх регулярних точок оператора А є відкритою. Спектр $\sigma(A)$ завжди непорожній, замкнений і лежить в колі $|\lambda|<\|A\|$. Більш точно, спектр $\sigma(A)$ лежить в колі, радіус r_A якого рівний

$$r_A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Границя $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ називається спектральним радіусом оператора А.

Резольвента $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ є аналітичною функцією змінної λ в околі кожної регулярної точки μ, і для $|\lambda - \mu| < 1/\|R_\mu\|$ є справедливим абсолютно збіжний розклад резольвенти

$$R_\lambda = R_\mu + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \mu)^k R_\mu^{\ k+1}.$$

Нехай тепер K_A – множина усіх таких функцій $\varphi(\lambda)$, які визначені на множині комплексних чисел і є кусково-аналітичними на спектрі $\sigma(A)$. В такому випадку елементи K_A будуть мати такі властивості:

1). Область визначення кожної функції $\varphi(\lambda)$ можна розкласти на скінченну кількість компонент зв'язності, кожна з яких буде відкритою множиною, а об'єднання цих компонент міститиме весь спектр $\sigma(A)$, і до того жу кожній компоненті знаходитиметься хоча б одна точка зі спектру.

2) Функція $\varphi(\lambda)$ кусково-голоморфна.

Ми не будемо відрізняти функції $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda) \in K_A$, якщо вони співпадають на відкритому околі спектра $\sigma(A)$, оскільки це означає, що одна з них буде аналітичним продовженням іншої.

На множині K_A можемо визначити операції додавання, множення і множення на скаляр, внаслідок чого K_A буде алгеброю із одиницею.

Відповідно до теореми Ф. Рісса можна сказати, що існує ізоморфізм між алгеброю K_A та такою комутативною алгеброю із операторів, що функція $\varphi(\lambda) \equiv \lambda$ ізоморфна до оператора А, що в свою чергу означає, що функції $\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda - z}\ \big(z \notin \sigma(A)\big)$ ізоморфні до резольвенти $R_z = (A - zI)^{-1}$.

Ізоморфізм, існування якого випливає із вище написаного, можемо побудувати у такий спосіб: для кожної фукнції $\varphi(\lambda) \epsilon K_A$ можна побудувати гладкий контур Γ_A, всередині якого міститиметься спектр $\sigma(A)$. А отже, Γ_A можна розкласти на скінченну кількість границь відкритих множин, об'єднуючи які ми отримаємо область, що міститься в D, а також цілком покриває спектр $\sigma(A)$.

В такому випадку ми можемо завершити побудову ізоморфізма, поставивши у відповідність до $\varphi(\lambda) \epsilon K_A$ операторну функцію

$$\varphi(A) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_A} \varphi(\lambda) R_\lambda d\lambda. \tag{1.7}$$

Внаслідок аналітичності підінтегральної функції можемо стверджувати, що інтеграл у (1.7) не залежить від того, який саме контур обрано (за умови, що він задовольняє вищезазначеним умовам).

Побудований ізоморфізм $\varphi(\lambda) \leftrightarrow \varphi(A)$ лінійний. Покажемо, що він є мультиплікативним.

Лема 1.1. *Припустимо, що* $F_1(\lambda)$, $F_2(\lambda)$ *– дві кусково-аналітичні, визначені на спектрі* $\sigma(A)$ *оператор-функції, тобто функції, значеннями яких є деякі оператори з* $[\mathfrak{B}]$. *Тоді*

$$\left\{-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_A} F_1(\lambda)R_\lambda d\lambda\right\}\cdot\left\{-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_A} R_\lambda F_2(\lambda)d\lambda\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_A} F_1(\lambda)R_\lambda F_2(\lambda)d\lambda. \tag{1.8}$$

Доведення. Нехай Γ_1 і Γ_2 - контури такого типу, як зазначено при побудові ізоморфізму, причому контур Γ_1 охоплює контур Γ_2. Враховуючи тотожність Гільберта

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu \; \big(\lambda,\mu \in \rho(A)\big)$$

маємо

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} F_1(\lambda)R_\lambda d\lambda \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2} R_\mu F_2(\mu)d\mu =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\oint_{\Gamma_1}\oint_{\Gamma_2} F_1(\lambda)R_\lambda R_\mu F_2(\mu)d\lambda d\mu =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\oint_{\Gamma_1}\oint_{\Gamma_2} F_1(\lambda)\frac{R_\lambda}{\lambda-\mu}F_2(\mu)d\lambda d\mu +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\oint_{\Gamma_1}\oint_{\Gamma_2} F_1(\lambda)\frac{R_\mu}{\lambda-\mu}F_2(\mu)d\lambda d\mu =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\oint_{\Gamma_1} F_1(\lambda)R_\lambda \oint_{\Gamma_2}\frac{F_2(\mu)}{\lambda-\mu}d\mu d\lambda +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\oint_{\Gamma_2}\left\{\oint_{\Gamma_1}\frac{F_1(\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda\ \right\}R_\mu F_2(\mu)d\mu.$$

Оскільки ж $\oint_{\Gamma_2}\frac{F_2(\mu)}{\lambda-\mu}d\mu=0$ якщо $\lambda\in\Gamma_1$, а також $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{F_1(\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda\ =F_1(\mu)$ якщо $\mu\in\Gamma_2$, то маємо формулу (1.8).

Ми довели тим самим лему 1.1.

Поклавши тепер $F_1(\lambda)=\varphi_1(\lambda)I$ і $F_2(\lambda)=\varphi_2(\lambda)I$, отримаємо, що з $\varphi(\lambda)=\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)$ слідує, що $\varphi(A)=\varphi_1(A)\varphi_2(A)$.

Таким чином, лінійність та мільтиплікативність побудованого ізоморфізму $\varphi(\lambda)\leftrightarrow\varphi(A)$ призводить до того, що для функції

$$\varphi(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}c_k\,\lambda^k$$

Отримуємо операторну функцію

$$\varphi(A)=\sum_{k=0}^{n}c_k\,A^k.$$

1.4. Лінійні операторні рівняння та їхні розв'язки.

У деяких задачах, пов'язаних з диференціальними рівняннями, необхідно досліджувати лінійні операторні рівняння виду AX + XB = Y та подібні до нього.

Розглянемо більш загальне рівняння

$$\sum_{j,k=0}^{n} c_{jk}\, A^{j} X B^{k} = \mathrm{Y}, \tag{1.9}$$

де c_{jk} - комплексні числа, X - невідомий оператор, а A, B, Y - задані оператори.

При розгляді рівняння (1.9) в найбільш загальному вигляді, ми припускаємо, що B ∈ $[\mathfrak{B}_1]$, A ∈ $[\mathfrak{B}_2]$, Y ∈ $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$, а шуканий оператор X ∈ $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$.

Введемо в просторі $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$ лінійні оператори A_l і B_r, породжені відповідно множенням оператора X на оператор A зліва і оператор B справа:

$\mathrm{A}_l \mathrm{X} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{AX}$, $\mathrm{B}_r \mathrm{X} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{XB}$ $(\mathrm{X} \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2])$.

Неважко помітити, що для будь-яких A ∈ $[\mathfrak{B}_2]$ і B ∈ $[\mathfrak{B}_1]$ оператори A_l і B_r комутативні.

За допомогою многочлена

$$\mathrm{P}(\lambda,\mu) = \sum_{j,k=0}^{n} c_{jk}\, \lambda^{j} \mu^{k}$$

утворимо оператор

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A.B}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{P}(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r) = \sum_{j,k=0}^{n} c_{jk}\, \mathrm{A}_l^{j} \mathrm{B}_r^{k} \quad (\in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]) . \tag{1.10}$$

Після цього рівняння (1.9) набуває вигляду $\mathrm{P}_{\mathrm{A,B}}\, \mathrm{X} = \mathrm{Y}$.

Перш за все, встановимо умову існування оберненого оператора до $\mathrm{P}_{\mathrm{A,B}}$.

Нехай λ ∉ σ(A). Очевидно, існує оператор

$$(\mathrm{A}_l - \lambda I)^{-1} = (\mathrm{A} - \lambda I)_l^{-1}.$$

Зокрема, це означає, що $\sigma(\mathrm{A}_l) \subset \sigma(\mathrm{A})$. Аналогічно, $\sigma(\mathrm{B}_r) \subset \sigma(\mathrm{B})$.

Тепер ми можемо явно виразити оператор $\mathrm{P}(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r)$ через поліном $\mathrm{P}(\lambda, \mu)$. Підставляючи вирази для степенів операторів A_l и B_r у (1.10), отримуємо

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r) = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_\mathrm{A}} \oint_{\Gamma_\mathrm{B}} \mathrm{P}(\lambda, \mu)(\mathrm{A}_l - \lambda I)^{-1}(\mathrm{B}_r - \mu I)^{-1}\, d\lambda d\mu. \tag{1.11}$$

Формула (1.11) призводить до наступної узагальненої постановки задачі, яку ми вивчаємо. Нехай $\mathrm{K}_{\mathrm{A,B}}$ – сукупність однозначних функцій $\varphi(\lambda, \mu) \in \mathrm{K}_\mathrm{A}$, що задані в деякому околі $\sigma(A) \times \sigma(B)$, аналітичні по λ в околі кожної точки спектра $\sigma(A)$ при фіксованих значеннях $\mu \in \sigma(B)$ і навпаки – аналітичні по μ в околі кожної точки спектра $\sigma(B)$ при фіксованих значеннях $\lambda \in \sigma(A)$.

Тоді побудуємо оператор в просторі $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$:

$$\varphi_{\mathrm{A,B}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_\mathrm{A}} \oint_{\Gamma_\mathrm{B}} \varphi(\lambda, \mu)(\mathrm{A}_l - \lambda I)^{-1}(\mathrm{B}_r - \mu I)^{-1}\, d\lambda d\mu. \tag{1.12}$$

Формула (1.12) встановлює відповідність між функціями з $\mathrm{K}_{\mathrm{A,B}}$ і комутуючою сукупністю операторів у просторі $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$, яка має наступні властивості:

а) для $\varphi(\lambda, \mu) = 1$ виконується $\varphi(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r) = I$;

б) для $\varphi(\lambda, \mu) = \alpha_1\varphi_1(\lambda, \mu) + \alpha_2\varphi_2(\lambda, \mu)$, зі сталими α_1 і α_2 виконується $\varphi(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r) = \alpha_1\varphi_1(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r) + \alpha_2\varphi_2(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r)$;

в) для $\varphi(\lambda, \mu) = \varphi_1(\lambda, \mu)\varphi_2(\lambda, \mu)$, виконується $\varphi(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r) = \varphi_1(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r)\, \varphi_2(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r)$;

г) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(\lambda, \mu) = \varphi(\lambda, \mu)$ рівномірно збігається в деякому околі добутку множин $\sigma(\mathrm{A}) \times \sigma(\mathrm{B})$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r) = \varphi(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r)$.

Відмітимо, що якщо $\mathrm{X} \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$, то

$$\varphi(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r)\mathrm{X} = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_\mathrm{A}} \oint_{\Gamma_\mathrm{B}} \varphi(\lambda, \mu)(\mathrm{A}_l - \lambda I)^{-1}\mathrm{X}(\mathrm{B}_r - \mu I)^{-1}\, d\lambda d\mu.$$

З вищесказаного випливає наступне твердження.

Теорема 1.4. *Нехай функція $\varphi(\lambda,\mu)$ із $\mathrm{K}_{\mathrm{A,B}}$ не дорівнює нулю при* $(\lambda, \mu) \in \sigma(A) \times \sigma(B)$. *Тоді оператор* $\varphi(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r)$ *має обернений* $\psi(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r)$, *де* $\psi(\lambda, \mu)=1/\varphi(\lambda, \mu)$.

Іншими словами, рівняння

$$\varphi\,(\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_r)\mathrm{X} = \mathrm{Y} \tag{1.13}$$

має єдине розв'язок $\mathrm{X} \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$ для кожного $\mathrm{Y} \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$.

Цей розв'язок можна представити у вигляді

$$\mathrm{X} = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_\mathrm{A}} \oint_{\Gamma_\mathrm{B}} \frac{(\mathrm{A}-\lambda \mathrm{I})^{-1}\, Y\, (\mathrm{B}-\mu\, \mathrm{I})^{-1}}{\varphi(\lambda,\mu)}\, d\lambda d\mu. \tag{1.14}$$

Для рівняння (1.9) отриманий результат можемо сформулювати в такому вигляді.

Теорема 1.5. *Якщо виконується умова*

$$P(\lambda, \mu) = \sum_{j,k=0}^{n} c_{jk}\, \lambda^j \mu^k \neq 0 \quad \big((\lambda, \mu) \in \sigma(\mathrm{A}) \times \sigma(\mathrm{B})\big),$$

то рівняння (1.9) має єдиний розв'язок $Y \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$, *який можна представити у вигляді*

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_\mathrm{A}} \oint_{\Gamma_\mathrm{B}} \frac{(\mathrm{A}-\lambda I)^{-1}\, Y\, (B-\mu\, I)^{-1}}{P(\lambda,\mu)}\, d\lambda d\mu. \tag{1.15}$$

Розглянемо частковий випадок рівняння (1.9), а саме рівняння

$$AX - XB = Y. \tag{1.16}$$

Тут

$$\mathrm{P}(\lambda,\mu) = \lambda - \mu.$$

Отже, за умови

$$\lambda - \mu \neq 0 \qquad \big((\lambda, \mu) \in \sigma(\mathrm{A}) \times \sigma(\mathrm{B})\big),$$

тобто за умови

$$\sigma(\mathrm{A}) \cap \sigma(\mathrm{B}) = \emptyset, \tag{1.17}$$

це рівняння має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулою

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_\mathrm{A}} \oint_{\Gamma_\mathrm{в}} \frac{(\mathrm{A}- \lambda\mathrm{I})^{-1}\, Y\, (\mathrm{B}- \mu\, \mathrm{I})^{-1}}{\lambda-\mu}\, d\lambda \mathrm{d}\mu. \tag{1.18}$$

Розділ 2. Існування розв'язків лінійного операторного рівняння.

2.1. Постановка задачі.

Будемо вивчати операторне рівняння

$$AX - XB = Y, \tag{2.1}$$

де оператори A, B, Y – задані, а оператор X необхідно знайти.

Спробуємо дослідити це рівняння для найпростіших просторів. Якщо, приміром, в якості просторів $\mathfrak{B}_1$ та $\mathfrak{B}_2$ обрати простір $\mathbb{R}$, для будь-яких чисел $A \neq B$ рівняння (2.1) буде мати єдиний, який можна подати у елементарному вигляді

$$X = \frac{Y}{A - B}.$$

Тому вивчення цього випадку не представляє цікавості.

Якщо в якості просторів $\mathfrak{B}_1$ та $\mathfrak{B}_2$ обрати простір $\mathbb{R}^2$, задача стає більш цікавою, оскільки для випадку не комутуючих операторів розв'язок рівняння (2.1) не буде тривіальним. Однак цей випадок вже був досліджений та результати для нього отримані (див. [21]).

Тому ми будемо досліджувати випадок, коли $\mathfrak{B}_1$ та $\mathfrak{B}_2$ дорівнюють простору $\mathbb{R}^3$.

Як ми знаємо, для скінченновимірного простору лінійний оператор представляється у вигляді матриці, тому в просторі $\mathbb{R}^3$ рівняння (2.1) стає матричним рівнянням. Знаходження загального розв'язку такого матричного рівняння у випадку, коли такий розв'язок єдиний, а також визначення умов, за яких відповідне матричне рівняння має єдиний розв'язок, і є основною задачею цією магістерської дисертації.

Враховуючи теорему 1.5, можемо стверджувати, що рівняння (2.1) має єдиний розв'язок у випадку, коли

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset, \tag{2.2}$$

тобто множини власних чисел матриць A та B не перетинаються.

Якщо ця умова (2.2) справджується, то для структури множин власних чисел матриць A та B можливі такі випадки:

1) матриці A та B мають по три різних власних числа;

2) матриці A та B мають по два власних числа;

3) матриці A та B мають по одному власному числу;

4) – 5) одна з матриць A та B має три власних числа, інша – два;

6) – 7) одна з матриць A та B має три власних числа, інша – одне;

8) – 9) одна з матриць A та B має два власних числа, інша – одне.

В межах цієї дисертації детально вивчаються випадки 1)-3), як такі, в яких знаходження формули єдиного розв'язку вимагає принципово різних підходів. В подальшому отримані результати можна узагальнити, отримавши явні формули для випадків 4)-9), однак методи, що використовуються для таких побудов, вичерпно описані у дослідженні випадків 1)-3).

2.2. Існування розв'язку рівняння у випадку, коли матриці мають по три різних власних числа.

Розглянемо рівняння (2.1) для випадку $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 = \mathbb{R}^3$.

Таким чином, можемо покласти

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}; \ Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}.$$

Спочатку розглянемо випадок, коли власні числа матриць A та B усі різні.

Нехай власні числа матриці A: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$, а власні числа матриці B: $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_1$, причому жодне з власних чисел матриці A не дорівнює власному числу матриці B.

Враховуючи теорему 1.5, розв'язок рівняння (2.1) може бути знайдений (за умови, що він існує) у вигляді

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} \frac{(A - \lambda I)^{-1}\, Y\, (B - \mu I)^{-1}}{\lambda - \mu}\, d\lambda d\mu. \tag{2.3}$$

Знайдемо обернені матриці до матриць $A - \lambda I$ та $B - \mu I$.

$$(A - \lambda I)^{-1} = \frac{-1}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - \lambda a_{22} - \lambda a_{33} + \lambda^2 - a_{32}a_{23} & -a_{21}a_{33} + \lambda a_{12} + a_{32}a_{13} & a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} + \lambda a_{13} \\ -a_{21}a_{33} + \lambda a_{21} + a_{31}a_{23} & a_{11}a_{33} - \lambda a_{11} - \lambda a_{33} + \lambda^2 - a_{31}a_{13} & -a_{11}a_{23} + \lambda a_{23} + a_{21}a_{13} \\ a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} + \lambda a_{31} & -a_{11}a_{32} + \lambda a_{32} + a_{31}a_{12} & a_{11}a_{22} - \lambda a_{11} - \lambda a_{22} + \lambda^2 - a_{21}a_{12} \end{pmatrix}.$$

Аналогічно

$$(B - \mu I)^{-1} = \frac{-1}{(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3)} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} b_{22}b_{33} - \mu b_{22} - \mu b_{33} + \mu^2 - b_{32}b_{23} & -b_{21}b_{33} + \mu b_{12} + b_{32}b_{13} & b_{12}b_{23} - b_{22}b_{13} + \mu b_{13} \\ -b_{21}b_{33} + \mu b_{21} + b_{31}b_{23} & b_{11}b_{33} - \mu b_{11} - \mu b_{33} + \mu^2 - b_{31}b_{13} & -b_{11}b_{23} + \mu b_{23} + b_{21}b_{13} \\ b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22} + \mu b_{31} & -b_{11}b_{32} + \mu b_{32} + b_{31}b_{12} & b_{11}b_{22} - \mu b_{11} - \mu b_{22} + \mu^2 - b_{21}b_{12} \end{pmatrix}.$$

За допомогою формули (2.3) знайдемо розв'язки рівняння (2.1)

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} \frac{(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})^{-1}\, Y\, (\mathrm{B} - \mu\, \mathrm{I})^{-1}}{\lambda - \mu} d\mu d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} (\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})^{-1}\, Y d\lambda \left(\oint_{\Gamma_B} \frac{(\mathrm{B} - \mu\, \mathrm{I})^{-1}}{\lambda - \mu} d\mu \right). \qquad (2.4)$$

Введемо наступні позначення:

$$\mathrm{B}(\mu) =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{22}b_{33} - \mu b_{22} - \mu b_{33} + \mu^2 - b_{32}b_{23} & -b_{21}b_{33} + \mu b_{12} + b_{32}b_{13} & b_{12}b_{23} - b_{22}b_{13} + \mu b_{13} \\ -b_{21}b_{33} + \mu b_{21} + b_{31}b_{23} & b_{11}b_{33} - \mu b_{11} - \mu b_{33} + \mu^2 - b_{31}b_{13} & -b_{11}b_{23} + \mu b_{23} + b_{21}b_{13} \\ b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22} + \mu b_{31} & -b_{11}b_{32} + \mu b_{32} + b_{31}b_{12} & b_{11}b_{22} - \mu b_{11} - \mu b_{22} + \mu^2 - b_{21}b_{12} \end{pmatrix}$$

і

$$f(\mu) = \frac{(\mathrm{B} - \mu\, \mathrm{I})^{-1}}{\lambda - \mu}.$$

За допомогою теореми 1.2 знайдемо внутрішній інтеграл у формулі (2.2). В процесі обчислення, оскільки точки μ_1, μ_2 та μ_3 є полюсами першого порядку підінтегральної функції, будемо використовувати формулу (1.5).

$$\oint_{\Gamma_B} \frac{1}{\lambda - \mu} (\mathrm{B} - \mu\, \mathrm{I})^{-1} d\mu = 2\pi i \big(res\, f(\mu_1) + res\, f(\mu_2) + res\, f(\mu_3) \big) =$$

$$= 2\pi i \left(\lim_{\mu \to \mu_1} f(\mu)(\mu - \mu_1) + \lim_{\mu \to \mu_2} f(\mu)(\mu - \mu_2) + \lim_{\mu \to \mu_3} f(\mu)(\mu - \mu_3) \right) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{\mathrm{B}(\mu_1)}{(\lambda - \mu_1)(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)} + \frac{\mathrm{B}(\mu_2)}{(\lambda - \mu_2)(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)} + \frac{\mathrm{B}(\mu_3)}{(\lambda - \mu_3)(\mu_3 - \mu_1)\mu_3 - \mu_2)} \right).$$

Підставимо отриманий вираз у формулу (2.4) і знайдемо шуканий розв'язок рівняння (2.1):

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} (\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})^{-1}\, Y \frac{2\pi i\, \mathrm{B}(\mu_1)}{(\lambda - \mu_1)(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)} d\lambda +$$

$$+ \left(-\frac{1}{4\pi^2} \right) \oint_{\Gamma_A} (\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})^{-1} \mathrm{Y} \frac{2\pi i\, \mathrm{B}(\mu_2)}{(\lambda - \mu_2)(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)} \mathrm{d}\lambda +$$

$$+\left(-\frac{1}{4\pi^2}\right)\oint_{\Gamma_A}(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})^{-1}Y\frac{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{B}(\mu_3)}{(\lambda-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)}d\lambda.$$

Введемо наступні позначення:

$$A(\lambda)=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{22}a_{33}-\lambda a_{22}-\lambda a_{33}+\lambda^2-a_{32}a_{23} & -a_{21}a_{33}+\lambda a_{12}+a_{32}a_{13} & a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}+\lambda a_{13} \\ -a_{21}a_{33}+\lambda a_{21}+a_{31}a_{23} & a_{11}a_{33}-\lambda a_{11}-\lambda a_{33}+\lambda^2-a_{31}a_{13} & -a_{11}a_{23}+\lambda a_{23}+a_{21}a_{13} \\ a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}+\lambda a_{31} & -a_{11}a_{32}+\lambda a_{32}+a_{31}a_{12} & a_{11}a_{22}-\lambda a_{11}-\lambda a_{22}+\lambda^2-a_{21}a_{12} \end{pmatrix},$$

$$g_1(\lambda)=\frac{(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})^{-1}}{(\lambda-\mu_1)(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)},$$

$$g_2(\lambda)=\frac{(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})^{-1}}{(\lambda-\mu_2)(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)},$$

$$g_3(\lambda)=\frac{(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})^{-1}}{(\lambda-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)}.$$

Розіб'ємо знаходження розв'язку на 3 доданки $J_1,\ J_2$ та J_3 :

$$J_1=\oint_{\Gamma_A}(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})^{-1}\frac{2\pi\mathrm{i}}{(\lambda-\mu_1)(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)}d\lambda YB(\mu_1)=$$

$$=2\pi i\cdot 2\pi i\big(res\ g_1(\lambda_1)+res\ g_1(\lambda_2)+res\ g_1(\lambda_3)\big)YB(\mu_1)=$$

$$=-4\pi^2\left(\frac{\mathrm{A}(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1)}+\frac{\mathrm{A}(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\mu_1)}+\frac{\mathrm{A}(\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\mu_1)}\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{Y\mathrm{B}(\mu_1)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)}.$$

Аналогічно

$$J_2=-4\pi^2\left(\frac{\mathrm{A}(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_2)}+\frac{\mathrm{A}(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\mu_2)}+\frac{\mathrm{A}(\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\mu_2)}\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{Y\mathrm{B}(\mu_2)}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)},$$

$$J_3=-4\pi^2\left(\frac{\mathrm{A}(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_3)}+\frac{\mathrm{A}(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\mu_3)}+\frac{\mathrm{A}(\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\mu_3)}\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{Y\ \mathrm{B}(\mu3)}{(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)}.$$

Підставивши отримані формули в формулу розв'язку (2.4), отримаємо шукану матрицю:

$$X = \left(\frac{A(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1)} + \frac{A(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\mu_1)} + \frac{A(\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\mu_1)} \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{Y}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)} + \left(\frac{A(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_2)} + \frac{A(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\mu_2)} + \frac{A(\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\mu_2)} \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{Y}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)} B(\mu_2) + \left(\frac{A(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_3)} + \frac{A(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\mu_3)} + \right.$$

$$\left. + \frac{A(\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\mu_3)} \right) \frac{Y}{(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)} B(\mu_3). \qquad (2.5)$$

Таким чином, ми довели таку теорему:

Теорема 2.1. *Нехай матриці A, B та Y задовольняють таким умовам:*

1. *Матриця A має 3 попарно різних власних числа λ_1, λ_2, λ_3.*
2. *Матриця B має 3 попарно різних власних числа μ_1, μ_2, μ_3.*
3. *Жодне з власних чисел матриці A не дорівнює власному числу матриці B.*

Тоді єдиний розв'язок рівняння (1) буде мати вигляд:

$$X = \left(\frac{A(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1)} + \frac{A(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\mu_1)} + \frac{A(\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\mu_1)} \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{YB(\mu_1)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)} + \left(\frac{A(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_2)} + \frac{A(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\mu_2)} + \frac{A(\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\mu_2)} \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{Y}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)} B(\mu_2) + \left(\frac{A(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_3)} + \frac{A(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\mu_3)} \right.$$

$$\left. + \frac{A(\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\mu_3)} \right) \cdot \frac{Y}{(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)} B(\mu_3), \text{ де}$$

$$A(\lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - \lambda a_{22} - \lambda a_{33} + \lambda^2 - a_{32}a_{23} & -a_{21}a_{33} + \lambda a_{12} + a_{32}a_{13} & a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} + \lambda a_{13} \\ -a_{21}a_{33} + \lambda a_{21} + a_{31}a_{23} & a_{11}a_{33} - \lambda a_{11} - \lambda a_{33} + \lambda^2 - a_{31}a_{13} & -a_{11}a_{23} + \lambda a_{23} + a_{21}a_{13} \\ a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} + \lambda a_{31} & -a_{11}a_{32} + \lambda a_{32} + a_{31}a_{12} & a_{11}a_{22} - \lambda a_{11} - \lambda a_{22} + \lambda^2 - a_{21}a_{12} \end{pmatrix},$$

$$B(\mu) =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{22}b_{33} - \mu b_{22} - \mu b_{33} + \mu^2 - b_{32}b_{23} & -b_{21}b_{33} + \mu b_{12} + b_{32}b_{13} & b_{12}b_{23} - b_{22}b_{13} + \mu b_{13} \\ -b_{21}b_{33} + \mu b_{21} + b_{31}b_{23} & b_{11}b_{33} - \mu b_{11} - \mu b_{33} + \mu^2 - b_{31}b_{13} & -b_{11}b_{23} + \mu b_{23} + b_{21}b_{13} \\ b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22} + \mu b_{31} & -b_{11}b_{32} + \mu b_{32} + b_{31}b_{12} & b_{11}b_{22} - \mu b_{11} - \mu b_{22} + \mu^2 - b_{21}b_{12} \end{pmatrix}.$$

Зауваження 2.1. У випадку, коли умова 3 теореми 2.1 порушується, для рівняння (2.1) можливі два випадки: або воно має безліч розв’язків, або жодного. Загальний вигляд розв’язків рівняння (2.1) у випадку нескінченної кількості розв’язків не є предметом дослідження цієї роботи.

2.3. Приклад.

Нехай маємо задані матриці

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 10 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & 1 & -7\\ -2 & -4 & 10\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}3 & 4 & -9\\ 11 & 0 & -9\\ -19 & 5 & 25\end{pmatrix}. \qquad (2.6)$$

Власними числами матриці A будуть числа λ_1=-3; λ_2=-1; λ_3=4.

Власними числами матриці B відповідно μ_1=-6; μ_2=0; μ_3=6.

Підставимо відповідні власні числа λ_1, λ_2 та λ_3 у матрицю $A(\lambda)$:

$$A(\lambda_1)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 10 & -2\\ 0 & -20 & 4\end{pmatrix}, A(\lambda_2)=\begin{pmatrix}-10 & 8 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, A(\lambda_3)=\begin{pmatrix}0 & 28 & 14\\ 0 & 10 & 5\\ 0 & 50 & 25\end{pmatrix}.$$

Підставимо відповідні власні числа μ_1, μ_2 та μ_3 у матрицю $B(\mu)$:

$$B(\mu_1)=\begin{pmatrix}0 & -12 & 24\\ 0 & 48 & -96\\ 0 & -12 & 24\end{pmatrix}, B(\mu_2)=\begin{pmatrix}-6 & -6 & -18\\ -12 & -12 & -36\\ -6 & -6 & -18\end{pmatrix}, B(\mu_3)=\begin{pmatrix}60 & 0 & -60\\ -24 & 0 & 24\\ -12 & 0 & 12\end{pmatrix}.$$

Обчислимо кожен доданок із формули (2.5) для знаходження X:

$$A(\lambda_1)YB(\mu_1)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -576 & 1152\\ 0 & 1152 & -2304\end{pmatrix}, A(\lambda_1)YB(\mu_2)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 72 & 72 & 216\\ -144 & -144 & -432\end{pmatrix},$$

$$A(\lambda_1)YB(\mu_3)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 10800 & 0 & -10800\\ -21600 & 0 & 21600\end{pmatrix}, A(\lambda_2)YB(\mu_1)=\begin{pmatrix}0 & -2160 & 4320\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$A(\lambda_2)YB(\mu_2)=\begin{pmatrix}-360 & -360 & -1080\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, A(\lambda_2)YB(\mu_3)=\begin{pmatrix}-2160 & 0 & 2160\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$A(\lambda_3)YB(\mu_1)=\begin{pmatrix}0 & 1680 & -3360\\ 0 & 600 & -1200\\ 0 & 3000 & -6000\end{pmatrix}, A(\lambda_3)YB(\mu_2)=\begin{pmatrix}-1680 & -1680 & -5040\\ -600 & -600 & -1800\\ -3000 & -3000 & -9000\end{pmatrix},$$

$$A(\lambda_3)YB(\mu_3)=\begin{pmatrix}-336 & 0 & 336\\ -120 & 0 & 120\\ -600 & 0 & 600\end{pmatrix}.$$

Підставимо отримані матриці у формулу (2.5) і знайдемо шукану матрицю X.

$$X=\frac{1}{3024}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -576 & 1152\\ 0 & 1152 & -2304\end{pmatrix}+\left(-\frac{1}{3600}\right)\begin{pmatrix}0 & -2160 & 4320\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{25200}\begin{pmatrix}0 & 1680 & -3360\\ 0 & 600 & -1200\\ 0 & 3000 & -6000\end{pmatrix}+\frac{1}{1512}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 72 & 72 & 216\\ -144 & -144 & -432\end{pmatrix}+$$

$$+\left(-\frac{1}{360}\right)\begin{pmatrix}-360 & -360 & -1080\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\left(-\frac{1}{5040}\right)\begin{pmatrix}-1680 & -1680 & -5040\\ -600 & -600 & -1800\\ -3000 & -3000 & -9000\end{pmatrix}+$$

$$+\left(-\frac{1}{9072}\right)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 10800 & 0 & -10800\\ -21600 & 0 & 21600\end{pmatrix}+\frac{1}{5040}\begin{pmatrix}-2016 & 0 & 2016\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+$$

$$+\left(-\frac{1}{5040}\right)\begin{pmatrix}-336 & 0 & 336\\ -120 & 0 & 120\\ -600 & 0 & 600\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Перевірка показує, що отримана матриця дійсно є розв’язком рівняння (2.1) для вхідних матриць (2.6).

2.4. Існування розв'язку рівняння у випадку, коли матриці мають по два різних власних числа.

Далі розглянемо випадок, коли власні числа матриці A: $\lambda_1 = \lambda_2$, λ_3 і аналогічно власні числа матриці B: $\mu_1 = \mu_2$, μ_3 та власні числа матриць A і B відрізняються між собою.

Знайдемо обернені матриці до матриць (A - λI) та (B - μI):

$$(A-\lambda I)^{-1} = \frac{-1}{(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_3)} \cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} a_{22}a_{33}-\lambda a_{22}-\lambda a_{33}+\lambda^2-a_{32}a_{23} & -a_{21}a_{33}+\lambda a_{12}+a_{32}a_{13} & a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}+\lambda a_{13} \\ -a_{21}a_{33}+\lambda a_{21}+a_{31}a_{23} & a_{11}a_{33}-\lambda a_{11}-\lambda a_{33}+\lambda^2-a_{31}a_{13} & -a_{11}a_{23}+\lambda a_{23}+a_{21}a_{13} \\ a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}+\lambda a_{31} & -a_{11}a_{32}+\lambda a_{32}+a_{31}a_{12} & a_{11}a_{22}-\lambda a_{11}-\lambda a_{22}+\lambda^2-a_{21}a_{12} \end{pmatrix},$$

$$(B-\mu I)^{-1} = \frac{-1}{(\mu-\mu_1)^2(\mu-\mu_3)} \cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} b_{22}b_{33}-\mu b_{22}-\mu b_{33}+\mu^2-b_{32}b_{23} & -b_{21}b_{33}+\mu b_{12}+b_{32}b_{13} & b_{12}b_{23}-b_{22}b_{13}+\mu b_{13} \\ -b_{21}b_{33}+\mu b_{21}+b_{31}b_{23} & b_{11}b_{33}-\mu b_{11}-\mu b_{33}+\mu^2-b_{31}b_{13} & -b_{11}b_{23}+\mu b_{23}+b_{21}b_{13} \\ b_{21}b_{32}-b_{31}b_{22}+\mu b_{31} & -b_{11}b_{32}+\mu b_{32}+b_{31}b_{12} & b_{11}b_{22}-\mu b_{11}-\mu b_{22}+\mu^2-b_{21}b_{12} \end{pmatrix}.$$

За допомогою формули (2.3) знайдемо розв’язки рівняння (2.1).

Для цього спочатку за допомогою теореми 1.2 знайдемо внутрішній інтеграл у формулі (2.3). В процесі обчислення, оскільки точка μ_1 є полюсом другого порядку, а точка μ_3 є полюсом першого порядку підінтегральної функції, будемо використовувати формули (1.6) та (1.5) відповідно.

$$\oint_{\Gamma_B} \frac{1}{\lambda-\mu}(B-\mu I)^{-1}\, d\mu = 2\pi i\big(res\, f(\mu_1) + res\, f(\mu_1)\big) =$$

$$= 2\pi i\left(\lim_{\mu\to\mu_1}\left(f(\mu)(\mu-\mu_1)^2\right)' + \lim_{\mu\to\mu_3}\left(f(\mu)(\mu-\mu_3)\right)\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\left(-\frac{B'(\mu)}{(\mu-\mu_3)(\lambda-\mu)} + \frac{B(\mu)((\mu-\mu_3)(\lambda-\mu))'}{((\mu-\mu_3)(\lambda-\mu))^2}\right)\Big|_{\mu=\mu_1} + \left(-\frac{B(\mu_3)}{((\lambda-\mu_3)(\mu_3-\mu_1))^2}\right)\right) =$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{B'(\mu_1)}{(\mu_1-\mu_3)(\lambda-\mu_1)} + \frac{B(\mu_1)((\mu_1-\mu_3)(\lambda-\mu_1))'}{\left((\mu_1-\mu_3)(\lambda-\mu_1)\right)^2} + \left(-\frac{B(\mu_3)}{((\lambda-\mu_3)(\mu_3-\mu_1))^2}\right)\right) =$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{B'(\mu_1)}{(\mu_1-\mu_3)(\lambda-\mu_1)} + \frac{B(\mu_1)(-2\mu_1+\lambda+\mu_3)}{\left((\mu_1-\mu_3)(\lambda-\mu_1)\right)^2} + + \left(-\frac{B(\mu_3)}{((\lambda-\mu_3)(\mu_3-\mu_1))^2}\right)\right).$$

Розіб'ємо знаходження розв'язку на 3 доданки $J_1,\ J_2$ та J_3 :

$$J_1 = \oint_{\Gamma_A}(A - \lambda I)^{-1}Y\left(-\frac{(\mu_1-\mu_3)(\lambda-\mu_1)B'(\mu_1)}{\left((\mu_1-\mu_3)(\lambda-\mu_1)\right)^2}\right)d\lambda,$$

$$J_2 = \oint_{\Gamma_A}(A - \lambda I)^{-1}Y\frac{-2\mu_1 + \lambda + \mu_3}{\left((\mu_1-\mu_3)(\lambda-\mu_1)\right)^2}B(\mu_1)d\lambda,$$

$$J_3 = \oint_{\Gamma_A}(A - \lambda I)^{-1}Y\left(-\frac{B(\mu_3)}{((\lambda-\mu_3)(\mu_3-\mu_1))^2}\right)d\lambda.$$

Введемо наступні позначення

Для полегшення запису позначимо підінтегральні функції для $J_1,\ J_2$ та J_3 відповідно $f_1,\ f_2$ та f_3:

$$f_1(\lambda) = -\frac{1}{(\mu_1-\mu_3)(\lambda-\mu_1)}\left(\frac{-A(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_3)}\right), f_2(\lambda) = \frac{-2\mu_1+\lambda+\mu_3}{\left((\mu_1-\mu_3)(\lambda-\mu_1)\right)^2}\left(\frac{-A(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_3)}\right),$$

$$f_3(\lambda) = -\frac{1}{(\lambda-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)^2}\left(\frac{-A(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_3)}\right).$$

Для підінтегральних функцій $f_1,\ f_2$ та f_3 знайдемо особливі точки: λ_1 – полюс 2-го порядку, λ_3 – полюс 1-го порядку.

Далі розпишемо інтеграли, використовуючи теорему 1.2 і порахуємо лишки в усіх особливих точках для введених функцій: $res\, f_1(\lambda_1), res\, f_1(\lambda_3)$, $res\, f_2(\lambda_1),\ res\, f_2(\lambda_3),\ res\, f_3(\lambda_1),\ res\, f_3(\lambda_3)$.

$$J_1 = 2\pi i\ (res\, f_1(\lambda_1) + res\, f_1(\lambda_3))YB'(\mu_1),$$

$$J_2 = 2\pi i\left(res\, f_2(\lambda_1) + res\, f_2(\lambda_3)\right)YB(\mu_1),$$

$$J_3 = 2\pi i\left(res\, f_3(\lambda_1) + res\, f_3(\lambda_3)\right)YB(\mu_3).$$

Обчислимо окремо всі лишки для підстановки у отримані формули:

$$\mathrm{resf}_1(\lambda_3) = \frac{A(\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_3-\mu_1)(\mu_1-\mu_3)}, \quad \mathrm{resf}_2(\lambda_3) = \frac{A(\lambda_3)(2\mu_1-\lambda-\mu_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_3-\mu_1)^2(\mu_1-\mu_3)^2},$$

$$\mathrm{resf}_3(\lambda_3) = \frac{A(\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_3-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)^2}, \quad \mathrm{resf}_1(\lambda_1) = \left(\frac{A(\lambda)}{(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\mu_1)(\mu_1-\mu_3)}\right)' \Big|_{\lambda=\lambda_1} = =$$

$$\frac{A'(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1)(\mu_1-\mu_3)} - \frac{A(\lambda_1)(2\lambda_1-\mu_1-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_1-\mu_1)^2(\mu_1-\mu_3)},$$

$$\mathrm{resf}_2(\lambda_1) = \left(\frac{A(\lambda)(2\mu_1-\lambda-\mu_3)}{(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\mu_1)^2(\mu_1-\mu_3)^2}\right)' \Big|_{\lambda=\lambda_1} = \frac{(A'(\lambda_1)(2\mu_1-\lambda_1-\mu_3)-A(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1)^2(\mu_1-\mu_3)^2} -$$

$$- \frac{A(\lambda_1)(2\mu_1-\lambda_1-\mu_3)((\lambda_1-\mu_1)^2+2(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1))}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_1-\mu_1)^4(\mu_1-\mu_3)^2},$$

$$\mathrm{resf}_3(\lambda_1) = \left(\frac{A(\lambda)}{(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)^2}\right)' \Big|_{\lambda=\lambda_1} = \frac{A'(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)^2} -$$

$$- \frac{A(\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_3-\mu_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_1-\mu_3)^2(\mu_3-\mu_1)^2}.$$

Для формули J_1 підставимо значення $\mathrm{resf}_1(\lambda_1)$ та $\mathrm{resf}_1(\lambda_3)$, аналогічно для J_2 – $\mathrm{resf}_2(\lambda_1)$ та $\mathrm{resf}_2(\lambda_3)$, для J_3 – $\mathrm{resf}_3(\lambda_1)$ та $\mathrm{resf}_3(\lambda_3)$:

$$J_1 = 2\pi i\Bigg(\frac{A'(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1)(\mu_1-\mu_3)} - \frac{A(\lambda_1)(2\lambda_1-\mu_1-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_1-\mu_1)^2(\mu_1-\mu_3)} +$$

$$\frac{A(\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_3-\mu_1)(\mu_1-\mu_3)}\Bigg) Y B'(\mu_1),$$

$$J_2 = 2\pi i\Bigg(\frac{(A'(\lambda_1)(2\mu_1-\lambda_1-\mu_3)-A(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1)^2(\mu_1-\mu_3)^2} - \frac{A(\lambda_1)(2\mu_1-\lambda_1-\mu_3)((\lambda_1-\mu_1)^2+2(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1))}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_1-\mu_1)^4(\mu_1-\mu_3)^2} +$$

$$+ \frac{A(\lambda_3)(2\mu_1-\lambda-\mu_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_3-\mu_1)^2(\mu_1-\mu_3)^2}\Bigg) Y B(\mu_1),$$

$$J_3 = 2\pi i\Bigg(\frac{A'(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)^2} - \frac{A(\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_3-\mu_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_1-\mu_3)^2(\mu_3-\mu_1)^2} +$$

$$\frac{A(\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_3-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)^2}\Bigg) Y B(\mu_3).$$

Розв’язком рівняння (2.1) є матриця X, яка має наступний вигляд:

$$X = \frac{A'(\lambda_1)YB'(\mu_1)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1)(\mu_1-\mu_3)} - \frac{A(\lambda_1)YB'(\mu_1)(2\lambda_1-\mu_1-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_1-\mu_1)^2(\mu_1-\mu_3)} + \frac{A(\lambda_3)YB'(\mu_1)}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_3-\mu_1)(\mu_1-\mu_3)} +$$

$$+ \frac{A'(\lambda_1)YB(\mu_1)(2\mu_1-\lambda_1-\mu_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1)^2(\mu_1-\mu_3)^2} - \frac{A(\lambda_1)YB(\mu_1)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1)^2(\mu_1-\mu_3)^2} -$$

$$- \frac{A(\lambda_1)YB(\mu_1)(2\mu_1-\lambda_1-\mu_3)((\lambda_1-\mu_1)^2-2(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1))}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_1-\mu_1)^4(\mu_1-\mu_3)^2} + \frac{A(\lambda_3)YB(\mu_1)(2\mu_1-\lambda_3-\mu_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_3-\mu_1)^2(\mu_1-\mu_3)^2} +$$

$$+ \frac{A'(\lambda_1)YB(\mu_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)^2} - \frac{A(\lambda_1)YB(\mu_3)(2\lambda_1-\lambda_3-\mu_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_1-\mu_3)^2(\mu_3-\mu_1)^2} + \frac{A(\lambda_3)YB(\mu_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_3-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)^2}. \qquad (2.7)$$

Таким чином, ми довели таку теорему:

Теорема 2.2. *Нехай матриці A, B та Y задовольняють таким умовам:*

1. *Матриця A має два однакових власних числа $\lambda_1=\lambda_2$ та третє власне число $\lambda_3\neq \lambda_1$.*
2. *Матриця B має два однакових власних числа $\mu_1=\mu_2$ та третє власне число $\mu_3\neq \mu_1$.*
3. *Жодне з власних чисел матриці A не дорівнює власному числу матриці B.*

Тоді розв'язок рівняння (2.1) буде мати вигляд:

$$X = \frac{A'(\lambda_1)YB'(\mu_1)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1)(\mu_1-\mu_3)} - \frac{A(\lambda_1)YB'(\mu_1)(2\lambda_1-\mu_1-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_1-\mu_1)^2(\mu_1-\mu_3)} + \frac{A(\lambda_3)YB'(\mu_1)}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_3-\mu_1)(\mu_1-\mu_3)} +$$

$$+ \frac{A'(\lambda_1)YB(\mu_1)(2\mu_1-\lambda_1-\mu_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1)^2(\mu_1-\mu_3)^2} - \frac{A(\lambda_1)YB(\mu_1)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1)^2(\mu_1-\mu_3)^2} -$$

$$- \frac{A(\lambda_1)YB(\mu_1)(2\mu_1-\lambda_1-\mu_3)((\lambda_1-\mu_1)^2-2(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1))}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_1-\mu_1)^4(\mu_1-\mu_3)^2} + \frac{A(\lambda_3)YB(\mu_1)(2\mu_1-\lambda_3-\mu_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_3-\mu_1)^2(\mu_1-\mu_3)^2} +$$

$$+ \frac{A'(\lambda_1)YB(\mu_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)^2} - \frac{A(\lambda_1)YB(\mu_3)(2\lambda_1-\lambda_3-\mu_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_1-\mu_3)^2(\mu_3-\mu_1)^2} + \frac{A(\lambda_3)YB(\mu_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_3-\mu_3)(\mu_3-\mu_1)^2}, \text{ де}$$

$$A(\lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - \lambda a_{22} - \lambda a_{33} + \lambda^2 - a_{32}a_{23} & -a_{21}a_{33} + \lambda a_{12} + a_{32}a_{13} & a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} + \lambda a_{13} \\ -a_{21}a_{33} + \lambda a_{21} + a_{31}a_{23} & a_{11}a_{33} - \lambda a_{11} - \lambda a_{33} + \lambda^2 - a_{31}a_{13} & -a_{11}a_{23} + \lambda a_{23} + a_{21}a_{13} \\ a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} + \lambda a_{31} & -a_{11}a_{32} + \lambda a_{32} + a_{31}a_{12} & a_{11}a_{22} - \lambda a_{11} - \lambda a_{22} + \lambda^2 - a_{21}a_{12} \end{pmatrix},$$

$$B(\mu) =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{22}b_{33} - \mu b_{22} - \mu b_{33} + \mu^2 - b_{32}b_{23} & -b_{21}b_{33} + \mu b_{12} + b_{32}b_{13} & b_{12}b_{23} - b_{22}b_{13} + \mu b_{13} \\ -b_{21}b_{33} + \mu b_{21} + b_{31}b_{23} & b_{11}b_{33} - \mu b_{11} - \mu b_{33} + \mu^2 - b_{31}b_{13} & -b_{11}b_{23} + \mu b_{23} + b_{21}b_{13} \\ b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22} + \mu b_{31} & -b_{11}b_{32} + \mu b_{32} + b_{31}b_{12} & b_{11}b_{22} - \mu b_{11} - \mu b_{22} + \mu^2 - b_{21}b_{12} \end{pmatrix}.$$

Зауваження 2.2. У випадку, коли умова 3 теореми 2.2 порушується, аналогічно до зауваження 2.1, рівняння (2.1) або має безліч розв’язків, або жодного.

2.5. Приклад.

Нехай маємо задані матриці A, B та Y:

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{7}{2} \\ 1 & -3 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 7 & -14 & 10 \\ -15 & 36 & -25 \\ -24 & 56 & -39 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 15 & -133 & 80 \\ -13 & 19 & -11 \\ -14 & 0 & -5 \end{pmatrix}. \qquad (2.8)$$

Власними числами матриці A будуть числа $\lambda_1=\lambda_2=-2$; $\lambda_3=-1$.

Власними числами матриці B відповідно $\mu_1=\mu_2=1$; $\mu_3=2$.

Підставимо відповідні власні числа λ_1 та λ_3 у матрицю $A(\lambda)$:

$$A(\lambda_1)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix},\ A(\lambda_3)=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо похідну від матриці $A(\lambda)$ та підставимо відповідне значення λ_1:

$$A'(\lambda_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{7}{2} \\ 1 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Підставимо відповідні власні числа μ_1 та μ_3 у матрицю B:

$$B(\mu_1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B(\mu_3)=\begin{pmatrix} 6 & -14 & 10 \\ -15 & 35 & -25 \\ -24 & 56 & -40 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо похідну від матриці $B(\mu)$та підставимо відповідне значення μ_1:

$$B'(\mu_1)=\begin{pmatrix} 5 & -14 & 10 \\ -15 & 34 & -25 \\ -24 & 56 & -41 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо кожен доданок із формули (2.7) для знаходження X:

$$A'(\lambda_1)YB'(\mu_1)=\begin{pmatrix} -80.5 & 3 & -22 \\ 277 & -606 & 448 \\ -138.5 & 303 & -224 \end{pmatrix},\ A'(\lambda_1)Y\,B(\mu_1)=0,$$

$$A'(\lambda_1)Y\,B(\mu_3)=\begin{pmatrix} -13.5 & 31.5 & -22.5 \\ 333 & -777 & 555 \\ -166.5 & 288.5 & -277.5 \end{pmatrix},$$

$$A(\lambda_1)YB'(\mu_1)=\begin{pmatrix} -109.5 & 153 & -123 \\ -219 & 306 & -246 \\ 109.5 & -153 & 123 \end{pmatrix}, A(\lambda_1)Y\,B(\mu_1)=0,$$

$$A(\lambda_1)Y\,B(\mu_3)=\begin{pmatrix} -35 & -110 & 60 \\ -28 & -88 & 48 \\ 21 & 66 & -36 \end{pmatrix}, A(\lambda_3)Y\,B(\mu_1)=0,$$

$$A(\lambda_3)Y\,B(\mu_3)=\begin{pmatrix} 67.5 & -157.5 & 112.5 \\ 54 & -126 & 90 \\ -40.5 & 94.5 & -67.5 \end{pmatrix}, A(\lambda_3)YB'(\mu_1) =$$

$$\begin{pmatrix} -90 & -210 & -150 \\ -180 & 420 & -300 \\ 90 & -210 & 150 \end{pmatrix}.$$

Підставимо отримані матриці у формулу (2.7) і знайдемо шукану матрицю X.

$$X=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -80.5 & 3 & -22 \\ 277 & -606 & 448 \\ -138.5 & 303 & -224 \end{pmatrix}+\left(-\frac{1}{9}\right)\begin{pmatrix} -109.5 & 153 & -123 \\ -219 & 306 & -246 \\ 109.5 & -153 & 123 \end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -35 & -110 & 60 \\ -28 & -88 & 48 \\ 21 & 66 & -36 \end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -13.5 & 31.5 & -22.5 \\ 333 & -777 & 555 \\ -166.5 & 388.5 & -277.5 \end{pmatrix}+$$

$$+\left(-\frac{1}{16}\right)\begin{pmatrix} -90 & -210 & -150 \\ -180 & 420 & -300 \\ 90 & -210 & 150 \end{pmatrix}+\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 67.5 & -157.5 & 112.5 \\ 54 & -126 & 90 \\ -40.5 & 94.5 & -67.5 \end{pmatrix}.$$

$$X=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перевірка показує, що отримана матриця дійсно є розв’язком рівняння (2.1) для вхідних матриць (2.8).

2.6. Існування розв'язку рівняння у випадку, коли матриці мають по одному власному числу.

Далі розглянемо випадок, коли власні числа матриці A: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ і аналогічно власні числа матриці B: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, а також власні числа матриць A і B відрізняються між собою.

Знайдемо обернені матриці до матриць (A - λI) та (B - μI):

$$(A-\lambda I)^{-1} = \frac{-1}{(\lambda-\lambda_1)^3}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} a_{22}a_{33}-\lambda a_{22}-\lambda a_{33}+\lambda^2-a_{32}a_{23} & -a_{21}a_{33}+\lambda a_{12}+a_{32}a_{13} & a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}+\lambda a_{13} \\ -a_{21}a_{33}+\lambda a_{21}+a_{31}a_{23} & a_{11}a_{33}-\lambda a_{11}-\lambda a_{33}+\lambda^2-a_{31}a_{13} & -a_{11}a_{23}+\lambda a_{23}+a_{21}a_{13} \\ a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}+\lambda a_{31} & -a_{11}a_{32}+\lambda a_{32}+a_{31}a_{12} & a_{11}a_{22}-\lambda a_{11}-\lambda a_{22}+\lambda^2-a_{21}a_{12} \end{pmatrix}$$

$$(B-\mu I)^{-1} = \frac{-1}{(\mu-\mu_1)^3}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} b_{22}b_{33}-\mu b_{22}-\mu b_{33}+\mu^2-b_{32}b_{23} & -b_{21}b_{33}+\mu b_{12}+b_{32}b_{13} & b_{12}b_{23}-b_{22}b_{13}+\mu b_{13} \\ -b_{21}b_{33}+\mu b_{21}+b_{31}b_{23} & b_{11}b_{33}-\mu b_{11}-\mu b_{33}+\mu^2-b_{31}b_{13} & -b_{11}b_{23}+\mu b_{23}+b_{21}b_{13} \\ b_{21}b_{32}-b_{31}b_{22}+\mu b_{31} & -b_{11}b_{32}+\mu b_{32}+b_{31}b_{12} & b_{11}b_{22}-\mu b_{11}-\mu b_{22}+\mu^2-b_{21}b_{12} \end{pmatrix}$$

За допомогою формули (2.3) знайдемо розв'язки рівняння (2.1)

Для цього спочатку за допомогою теореми 1.2 знайдемо внутрішній інтеграл у формулі (2.3). В процесі обчислення, оскільки точка μ_1 є полюсом третього порядку підінтегральної функції, будемо використовувати формулу (1.6).

$$\oint_{\Gamma_B}\frac{1}{\lambda-\mu}(B-\mu I)^{-1}d\mu = 2\pi i\, res\, f(\mu_1) = \frac{2\pi i}{2}\left(\frac{1}{\lambda-\mu}B(\mu)\right)''\Big|_{\mu=\mu_1} =$$

$$= \pi i\left(\frac{2}{(\lambda-\mu_1)^3}B(\mu_1) + 2\frac{1}{(\lambda-\mu_1)^2}B'(\mu_1) + \frac{1}{\lambda-\mu_1}B''(\mu_1)\right).$$

Введемо наступні позначення:

$$J_1 = \oint_{\Gamma_A}(A-\lambda I)^{-1}Y\frac{2}{(\lambda-\mu_1)^3}\,B(\mu_1)d\lambda, J_2 = \oint_{\Gamma_A}(A-\lambda I)^{-1}\,Y\,\frac{2}{(\lambda-\mu_1)^2}B'(\mu_1)d\lambda,$$

$$J_1 = \oint_{\Gamma_A}(A-\lambda I)^{-1}\,Y\frac{1}{\lambda-\mu_1}B''(\mu_1)d\lambda.$$

Обчислимо інтеграли, використовуючи теорему 1.2:

$$J_1 = 2\pi i\, res|_{\lambda=\lambda_1}\left((\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})^{-1}\frac{2}{(\lambda-\mu_1)^3}\mathrm{Y}\,\mathrm{B}(\mu_1)\right) = \pi i\left(\frac{2A(\lambda)}{(\lambda-\mu_1)^3}\right)'' |_{\lambda=\lambda_1} YB(\mu_1),$$

$$J_2 = 2\pi i\, res|_{\lambda=\lambda_1}\left((\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})^{-1}\frac{2}{(\lambda-\mu_1)^2}\mathrm{Y}\,\mathrm{B}'(\mu_1)\right) = \pi i\left(\frac{2A(\lambda)}{(\lambda-\mu_1)^2}\right)'' |_{\lambda=\lambda_1} Y\mathrm{B}'(\mu_1),$$

$$J_3 = 2\pi i\, res|_{\lambda=\lambda_1}\left((\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})^{-1}\frac{1}{\lambda-\mu_1}\mathrm{Y}\,\mathrm{B}'(\mu_1)\right) = \pi i\left(\frac{A(\lambda)}{\lambda-\mu_1}\right)'' |_{\lambda=\lambda_1} Y\mathrm{B}''(\mu_1).$$

Знайдемо записані похідні та підставимо отримані формули у формулу (2.3):

$$J_1 = \pi i\left(\mathrm{A}''(\lambda_1)\frac{2}{(\lambda_1-\mu_1)^3} + 2\mathrm{A}'(\lambda_1)\frac{-6}{(\lambda_1-\mu_1)^4} + \mathrm{A}(\lambda_1)\frac{24}{(\lambda_1-\mu_1)^5}\right)\mathrm{Y}\,\mathrm{B}(\mu_1),$$

$$J_2 = \pi i\left(\mathrm{A}''(\lambda_1)\frac{2}{(\lambda_1-\mu_1)^2} + 2\mathrm{A}'(\lambda_1)\frac{-4}{(\lambda_1-\mu_1)^3} + \mathrm{A}(\lambda_1)\frac{12}{(\lambda_1-\mu_1)^4}\right)\mathrm{Y}\,\mathrm{B}'(\mu_1),$$

$$J_3 = \pi i\left(\mathrm{A}''(\lambda_1)\frac{1}{\lambda_1-\mu_1} + 2\mathrm{A}'(\lambda_1)\frac{-1}{(\lambda_1-\mu_1)^2} + \mathrm{A}(\lambda_1)\frac{2}{(\lambda_1-\mu_1)^3}\right)\mathrm{Y}\,\mathrm{B}''(\mu_1).$$

Розв’язком рівняння (2.1) є матриця X, яка має такий вигляд:

$$\mathrm{X}= \frac{1}{2}\left(\mathrm{A}''(\lambda_1)\frac{2}{(\lambda_1-\mu_1)^3} + 2\mathrm{A}'(\lambda_1)\frac{-6}{(\lambda_1-\mu_1)^4} + \mathrm{A}(\lambda_1)\frac{24}{(\lambda_1-\mu_1)^5}\right)\mathrm{Y}\,\mathrm{B}(\mu_1) +$$

$$+\left(\mathrm{A}''(\lambda_1)\frac{1}{(\lambda_1-\mu_1)^2} + 2\mathrm{A}'(\lambda_1)\frac{-2}{(\lambda_1-\mu_1)^3} + \mathrm{A}(\lambda_1)\frac{6}{(\lambda_1-\mu_1)^4}\right)\mathrm{Y}\,\mathrm{B}'(\mu_1) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\mathrm{A}''(\lambda_1)\frac{1}{\lambda_1-\mu_1} + 2\mathrm{A}'(\lambda_1)\frac{-1}{(\lambda_1-\mu_1)^2} + \mathrm{A}(\lambda_1)\frac{2}{(\lambda_1-\mu_1)^3}\right)\mathrm{Y}\,\mathrm{B}''(\mu_1). \qquad (2.9)$$

Таким чином, ми довели таку теорему:

Теорема 2.3. *Нехай матриці A, B та Y задовольняють таким умовам:*

1. *Матриця A має три однакових власних числа* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.
2. *Матриця B має три однакових власних числа* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.
3. *Жодне з власних чисел матриці A не дорівнює власному числу матриці B.*

Тоді розв'язок рівняння (2.1) буде мати вигляд:

$$X=\frac{1}{2}\left(A''(\lambda_1)\frac{2}{(\lambda_1-\mu_1)^3}+2A'(\lambda_1)\frac{-6}{(\lambda_1-\mu_1)^4}+A(\lambda_1)\frac{24}{(\lambda_1-\mu_1)^5}\right)Y\,B(\mu_1)+$$

$$+\left(A''(\lambda_1)\frac{1}{(\lambda_1-\mu_1)^2}+2A'(\lambda_1)\frac{-2}{(\lambda_1-\mu_1)^3}+A(\lambda_1)\frac{6}{(\lambda_1-\mu_1)^4}\right)Y\,B'(\mu_1)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(A''(\lambda_1)\frac{1}{\lambda_1-\mu_1}+2A'(\lambda_1)\frac{-1}{(\lambda_1-\mu_1)^2}+A(\lambda_1)\frac{2}{(\lambda_1-\mu_1)^3}\right)Y\,B''(\mu_1),\ \text{де}$$

$$A(\lambda)=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{22}a_{33}-\lambda a_{22}-\lambda a_{33}+\lambda^2-a_{32}a_{23} & -a_{21}a_{33}+\lambda a_{12}+a_{32}a_{13} & a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}+\lambda a_{13} \\ -a_{21}a_{33}+\lambda a_{21}+a_{31}a_{23} & a_{11}a_{33}-\lambda a_{11}-\lambda a_{33}+\lambda^2-a_{31}a_{13} & -a_{11}a_{23}+\lambda a_{23}+a_{21}a_{13} \\ a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}+\lambda a_{31} & -a_{11}a_{32}+\lambda a_{32}+a_{31}a_{12} & a_{11}a_{22}-\lambda a_{11}-\lambda a_{22}+\lambda^2-a_{21}a_{12} \end{pmatrix},$$

$$B(\mu)=$$

$$=\begin{pmatrix} b_{22}b_{33}-\mu b_{22}-\mu b_{33}+\mu^2-b_{32}b_{23} & -b_{21}b_{33}+\mu b_{12}+b_{32}b_{13} & b_{12}b_{23}-b_{22}b_{13}+\mu b_{13} \\ -b_{21}b_{33}+\mu b_{21}+b_{31}b_{23} & b_{11}b_{33}-\mu b_{11}-\mu b_{33}+\mu^2-b_{31}b_{13} & -b_{11}b_{23}+\mu b_{23}+b_{21}b_{13} \\ b_{21}b_{32}-b_{31}b_{22}+\mu b_{31} & -b_{11}b_{32}+\mu b_{32}+b_{31}b_{12} & b_{11}b_{22}-\mu b_{11}-\mu b_{22}+\mu^2-b_{21}b_{12} \end{pmatrix}.$$

Зауваження 2.3. У випадку, коли умова 3 теореми 2.3 порушується, аналогічно до зауважень 2.1 та 2.2, рівняння (2.1) або має безліч розв'язків, або жодного. Дослідження відповідного загального вигляду розв'язків у разі, якщо їх нескінченна кількість, не є метою цієї роботи.

2.7. Приклад.

Нехай маємо задані матриці A, B та Y:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -7 & -2\\ 2 & -5 & -1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ -4 & 0 & 3\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}10 & -1 & -11\\ 5 & 2 & -4\\ -4 & -10 & -4\end{pmatrix}. \qquad (2.10)$$

Власними числами матриці A будуть числа $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

Власними числами матриці B відповідно $\mu_1=\mu_2=\mu_3=1$.

Обчислимо $A(\lambda)$ та $B(\mu)$:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix}\lambda^2+6\lambda+7 & -7\lambda-11 & -2\lambda-3\\ 2\lambda+2 & \lambda^2-2\lambda-3 & -\lambda-1\\ 4 & 2\lambda-6 & \lambda^2 \mp 2\lambda-1\end{pmatrix},$$

$$B(\mu) = \begin{pmatrix}\mu^2-4\mu+3 & 0 & \mu-1\\ 3\mu-13 & \mu^2-2\mu+1 & \mu+4\\ 4-4\mu & 0 & \mu^2-1\end{pmatrix}.$$

Підставимо відповідне власне число μ_1 у матрицю $B(\mu)$:

$$B(\mu_1) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -10 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Обчислимо похідну від матриці $B(\mu)$ в точці μ_1:

$$B'(\mu_1) = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1\\ -4 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Обчислимо похідну 2-го порядку від матриці $B(\mu)$ в точці μ_1:

$$B''(\mu_1) = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Підставимо відповідне власне число λ_1 у матрицю $A(\lambda)$:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}2 & -4 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{pmatrix}.$$

Обчислимо похідну від матриці $A(\lambda)$ та підставимо відповідне значення λ_1:

$$A'(\lambda_1)=\begin{pmatrix}4 & -7 & -2\\ 2 & -4 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Обчислимо похідну 2-го порядку від матриці $A(\lambda)$ та підставимо відповідне значення λ_1:

$$A''(\lambda_1)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Обчислимо кожен доданок із формули (2.9) для знаходження X:

$$I_1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\lambda-1)^3}A\right)''=\frac{12}{2}\frac{1}{(-1-1)^5}A(\lambda_1)+2\frac{1}{2}(-3)\frac{1}{(-1-1)^4}A'(\lambda_1)+\frac{1}{2}\frac{1}{(-1-1)^3}A''(\lambda_1)=\frac{12}{2(-32)}\cdot$$

$$A(\lambda_1)-\frac{3}{16}A'(\lambda_1)-\frac{1}{16}A''(\lambda_1)=-\frac{3}{16}A(\lambda_1)-\frac{3}{16}A'(\lambda_1)-\frac{1}{16}A''(\lambda_1)=-\frac{1}{16}\big(3A(\lambda_1)+$$

$$+3A'(\lambda_1)+3A''(\lambda_1)\big)\text{Y } B(\mu_1)=\begin{pmatrix}-\frac{5}{4} & \frac{33}{16} & \frac{9}{16}\\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{16}\\ -\frac{3}{4} & \frac{9}{8} & \frac{1}{4}\end{pmatrix},$$

$$I_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\lambda-1)^2}A\right)''=\frac{1}{2}6\frac{1}{16}A(\lambda_1)+\frac{1}{2}2(-2)\left(-\frac{1}{8}\right)A'(\lambda_1)+\frac{1}{2}\frac{1}{4}A''(\lambda_1)=$$

$$=\frac{3}{16}A(\lambda_1)+\frac{1}{4}A'(\lambda_1)+\frac{1}{8}A''(\lambda_1)=\frac{1}{16}\big(3A(\lambda_1)+4A'(\lambda_1)++2A''(\lambda_1)\big)\text{Y } B'(\mu_1)=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{13}{8} & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{16}\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{8}\end{pmatrix},$$

$$I_3=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda-1}A\right)''=\frac{1}{4}2\left(-\frac{1}{8}\right)A(\lambda_1)+\frac{1}{4}(-1)2\frac{1}{4}A'(\lambda_1)+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)A''(\lambda_1)=$$

$$=-\frac{1}{16}A(\lambda_1)-\frac{1}{8}A'(\lambda_1)-\frac{1}{8}A''(\lambda_1)=-\frac{1}{16}\big(A(\lambda_1)+2A'(\lambda_1)++2A''(\lambda_1)\big)\text{Y}B''(\mu_1)=$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{7}{8} & \frac{9}{8} & \frac{5}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Обчислимо кожен доданок із формули (2.9) для знаходження X:

$$I_1 Y\, B(\mu_1)=\frac{5}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ I_2 YB'(\mu_1)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 33 & 0 & -14 \\ 12 & 0 & -1 \\ 18 & 0 & -24 \end{pmatrix},$$

$$I_3 YB''(\mu_1)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -35 & 0 & 31 \\ -14 & -4 & 10 \\ -6 & 16 & 18 \end{pmatrix}.$$

Підставимо отримані значення у формулу (2.9) і знайдемо шукану матрицю X.

$$X=\frac{5}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 33 & 0 & -14 \\ 12 & 0 & -1 \\ 18 & 0 & -24 \end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -35 & 0 & 31 \\ -14 & -4 & 10 \\ -6 & 16 & 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірка показує, що отримана матриця дійсно є розв’язком рівняння (2.1) для вхідних матриць (2.10).

Висновки

Завданням дисертаційного дослідження було дослідити лінійне матричне рівняння та знайти формули для його розв'язку в різних випадках. Поставлене завдання було успішно розв'язане, в результаті чого розв'язки досліджуваного рівняння були побудовані в явному вигляді у випадках, коли матриці, що входять в рівняння, мають по три, по два або по одному власному числу.

Для скінченновимірних банахових просторів оператори можуть бути зображені у вигляді матриць, як наслідок – операторні рівняння стають матричними. І у випадку, коли ми маємо справу з матрицями, що не комутують, подібні рівняння також потребують ґрунтовного вивчення. Таким чином, важливість проведеного дослідження не тільки в тому, що операторні рівняння часто виникають в результаті досліджень в інших математичних розділах, але й в тому, що самі по собі отримані результати також дозволяють спростити знаходження розв'язків матричних рівнянь.

Отже, можна стверджувати, що мета дисертаційного дослідження була успішно досягнута – формули, що явно виражають розв'язки матричних рівнянь, отримано для кількох випадків, що залежать від кількості власних чисел вхідних матриць.

В процесі роботи над магістерською дисертацією були сформульовані та доведені теореми про існування єдиного розв'язку матричного рівняння $AX - XB = Y$. Приклади, що супроводжують кожну таку теорему, демонструють коректність отриманих результатів.

Список використаних джерел

1. *Newton, I. & Colson, J.* The Method of Fluxions and Infinite Series; With Its Application to the Geometry of Curve-Lines. – London: Printed by Henry Woodfall, 1736. -

2. *Poincare H.* Sur les equations linéaires aux différentielles ordinaire et aux différences finies. // Amer. J. Math. – 1885. – 7. – P. 203-258.

3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений диференциальных уравнений в банаховом пространстве. - Москва: Наука, 1970. - 536 с.

4. *Крейн М. Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1964. – 186 с.

5. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

6. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей действительной оси решения систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений и их свойства // Укр. матем. журн. – 1994. – 46, № 6. – С. 737 – 747.

7. *Дороговцев А.Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – К.: Вища шк., 1992 – 319с.

8. *Dorogovtsev A. Ya.* Bounded solutions of abstract equations // Novi Sad J. Math. – 2000. – 30, № 1. – P. 59 – 67.

9. *Слюсарчук В.Е.* Ограниченные и почти периодические решения разностных уравнений в банаховом пространстве // Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 147 – 156.

10. *Слюсарчук В.Е.* Оценки спектров и обратимость функциональных операторов // Матем. сборник. – 1978. – 105 (147), № 2. – С. 268 – 285.

11. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Матем. сб. – 2012. – 203, №5. – С. 135-160.

12. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.

13. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. (пер. с англ.) - Москва: Издательство иностранной литературы, 1962. - 896 с.

14. *Городний М.Ф.* Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве. / М.Ф.Городний // Укр.мат.журн. – 1991. – Т.41, №1 – С.41-46.

15. *Городній М.Ф.* l_p-розв'язки одного різницевого рівняння в банаховому просторі. // УМЖ. – 2003. – Т.55, №3. – С.425-430.

16. *Мельник Т.А.* Комплексний аналіз: підручник / К.: ВПЦ «Київський університет», 2015. – 192 с.

17. *Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.* Функциональный анализ. Курс лекций: Учебное пособие. – К.: Выща школа, 1990. – 600с.

18. *Popescu N.* Equations differentielles de deuxieme ordre et operateurs hermitien-equivalents dans les espaces de Banach // " Proc. 4-th Conf. Oper. Theory, Timişoara, 1979". - Timişoara, 1980. – P. 270 – 275.

19. Збірник задач з функціонального аналізу (розділи: «Банахові простори», «Гільбертові простори», «Спряжені простори», «Теорія операторів») / Упорядники: *О.Ю.Контантінов, Ю.С.Мішура, О.Н.Нестеренко, А.В.Чайковський.* – К: ВПЦ «Київський університет», 2004. – 124 с.

20. *Horodnii M.F., Syrotenko A.V.,* PTH Power Integrable Solutions of an Operator-Differential Equation. // Journal of Mathematical Sciences . Jan2016, Vol. 212 Issue 4, p371-379.

21. *Матлаш В.Ю., Сиротенко А.В.* Розв'язки лінійного операторного рівняння в просторі $\mathbb{R}^2$. // Збірник тез X Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків. – 2021. – С. 31-32.

22. *Антонюк Н.О., Сиротенко А.В.* Розв'язки лінійного операторного рівняння в просторі $\mathbb{R}^3$// Збірник тез XI Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків. – 2023.