

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
Олег КЛЕСОВ
« » 2023 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

**на тему: «Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів
чирпованого сигналу»**

Виконав:

студент II курсу, групи ОМ-11мн
Гладун Віктор Вадимович

Керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
Іванов Олександр Володимирович

Рецензент:

професор кафедри дослідження операцій
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка,
д.ф.-м.н., с.н.с.
Мацак Іван Каленикович

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних посилань.
Студент

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«__» _____ 2023 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію

Гладуну Віктору Вадимовичу

1. Тема дисертації «Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів чирпованого сигналу», науковий керівник дисертації Іванов Олександр Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор, затвержені наказом по університету №1337-с від 27.03.23.
2. Термін подання студентом дисертації 19 травня 2023 року.
3. Об'єкт дослідження модель регресії чирпованого сигналу.
4. Предмет дослідження Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів чирпованого сигналу в присутності сильно або слабо залежного випадкового шуму.
5. Перелік завдань, які потрібно зробити:
 - 1) Поставити задачу оцінювання параметрів чирпованого сигналу у присутності сильно або слабо залежного випадкового шуму.

- 2) Довести рівномірний закон великих чисел для вказаного випадкового шуму.
 - 3) Довести теорему про сильну консистентність оцінки найменших квадратів параметрів чирпованого сигналу.
6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу 19 слайдів.
7. Дата видачі завдання 08 лютого 2023 року.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	08.02.2023–19.02.2023	виконано
2.	Доведення рівномірного закону великих чисел для заданого випадкового процесу, зваженого тригонометричними функціями від квадратичного аргументу.	20.02.2023–02.04.2023	виконано
3.	Доведення теореми про сильну консистентність оцінки найменших квадратів параметрів чирпованого сигналу.	03.04.2023–16.04.2023	виконано
4.	Оформлення магістерської дисертації.	17.04.2023–30.04.2023	виконано

Студент
Науковий керівник дисертації

Віктор ГЛАДУН
Олександр ІВАНОВ

Реферат

Магістерська дисертація: 46 сторінок, 19 слайдів для проектора, 34 першоджерела.

В роботі досліджується неперервна в часі статистична модель чирпованого сигналу, що спостерігається на фоні сильно або слабо залежного вибірково неперервного стаціонарного гауссівського шуму.

Мета роботи полягає в отриманні вимог до параметричної множини, де шукається оцінка найменших квадратів, а також випадкового шуму, за яких оцінка найменших квадратів параметрів чирпованого сигналу буде сильно консистентною.

Завданням роботи є отримання результату про сильну консистентність оцінки найменших квадратів невідомих амплітуд та кутових частот чирпованого сигналу. Об'єктом дослідження є тригонометрична модель регресії вигляду «чирпований сигнал+шум». Предметом дослідження є властивість сильної консистентності оцінки найменших квадратів параметрів чирпованого сигналу.

Для оцінювання амплітуд та кутових частот чирпованого сигналу використано оцінку найменших квадратів, визначену на спеціальній сім'ї параметричних множин, які розрізняють належним чином параметри в сумі чирпованих гармонік.

В роботі доведено теорему про сильну консистентність оцінки найменших квадратів параметрів множинного чирпованого сигналу при виконанні певних вимог до випадкового шуму та параметричних множин, що містять істинні значення параметрів. Для отримання цього результату було доведено рівномірний посилений закон великих чисел для заданого випадкового шуму, зваженого тригонометричними функціями від квадратичного аргументу.

Ключові слова: множинний чирпований сигнал, сильно (слабо) залежний стаціонарний гауссівський процес, оцінка найменших квадратів, рівномірний закон великих чисел, теорема Іссерліса, інтеграл Френеля, сильна консистентність.

Abstract

Master degree thesis contains 46 pages, 19 slides for projector, 34 primary sources.

A time continuous statistical model of multiple chirp signal observed against the background of strongly or weakly dependent sample-continuous stationary Gaussian noise is considered in the paper.

The goal of the work is obtaining the requirements to parametric set, where the least squares estimate is sought, and to the random noise for which the least squares estimates for chirp signal parameters will be strong consistent.

The task of the research is receiving result on the least squares estimate strong consistency of the unknowns amplitudes and angular frequencies of the chirp signal. A trigonometric regression model is the research object, that is the model «chirp signal + noise». Strong consistency of the least squares estimate of a chirp signal parameters is the subject of the research.

To estimate the amplitudes and angular frequencies of the chirp signal we use the least squares estimate, defined on special family of parametric sets, which distinguish properly parameters in the sum of chirp harmonic oscillations.

Theorem on the strong consistency of the least squares estimate of the multiple chirp signal parameters under indicated assumptions on the random noise and parametric sets containing the true values of the parameters is proved. To obtain this result, an uniform strong law of large numbers was proved for the stochastic process weighted by the trigonometric functions of the quadratic variable.

Keywords: multiple chirp signal, strongly (weakly) dependent stationary Gaussian process, least squares estimate, uniform law of large numbers, Isserlis' theorem, Fresnel integrals, strong consistency.

Зміст

Вступ	7
1 Постановка задачі	9
2 Рівномірний закон великих чисел	13
3 Доведення теореми про консистентність ОНК параметрів чирпованого сигналу	24
Додаток А. Застосування теореми Іссерліса	35
Висновки	42
Список використаних джерел	43

Вступ

Серед різноманітних проблем нелінійного регресійного аналізу та теорії обробки сигналів задача оцінювання амплітуд і кутових частот гармонічних коливань, що спостерігаються на фоні випадкового шуму, є досить важливою через численні застосування. Проблема виявлення прихованих періодичностей має довгу історію та велику бібліографію. Тут ми вкажемо на роботи Artis et al. [1], Ivanov [2], Quinn and Hannan [3], Ivanov et al. [4], де можна знайти багато посилань на публікації, що стосуються цієї теми.

Останні декілька десятиліть тригонометричні моделі на площині, де під аргументами синусів і косинусів є лінійні форми двох змінних з невідомими частотами як коефіцієнтами, мають особливу увагу в літературі з оброблення сигналів та зображень через їх численні застосування в аналізі симетричних текстурованих поверхонь (див. Rao, Zhao, and Zhou [5], Kundu and Mitra [6], Zhang and Mandrekar [7], Kundu and Nandi [8], Nandi, Kundu, and Srivastava [9], Ivanov and Malyar [10], Ivanov and Lyman [11]).

В роботах Brillinger [12], Ivanov and Savych [13], Ivanov and Dykyi [14] деякі скалярні та двовимірні результати поширюються на моделі багатовимірної синусоїдної регресії. Таким чином, дане узагальнення проблеми виявлення прихованих періодичностей в статистиці випадкових процесів перетворює її на відповідну задачу зі статистики випадкових полів на площині та евклідових просторах вищої розмірності.

Іншим важливим узагальненням класичних тригонометричних моделей є моделі частотно модульованих синусоїдних сигналів, які спостерігаються на фоні випадкових шумів, що мають різну природу. Дослідження проблем оцінювання параметрів таких сигналів відбувається протягом тривалого часу (див. Cook and Bernfeld [15], Cramer and Leadbetter [16]). Наразі, потік літератури з оцінювання невідомих параметрів частотно-модульованих сигналів є досить великим. Вкажемо для ілюстрації лише статті Yang et al. [17], Djurovic [18], Jiang and Wu [19], Moradi and Mohseni [20].

Найбільш вивченим серед частотно-модульованих сигналів є сигнал із частотною лінійною модуляцією, який ми будемо називати чирпованим сигналом

(англ. chirp signal). Для однієї гармоніки він може бути записаний, як

$$A \cos(\phi t + \psi t^2) + B \sin(\phi t + \psi t^2), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

де A, B є амплітудами, ϕ – початкова частота, ψ – параметр, який характеризує швидкість зміни частоти модульованого сигналу (англ. chirp rate). Для дискретного часу t і випадкового шуму, який є лінійним часовим рядом, ряд результатів щодо консистентності та асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів (ОНК) та деяких інших оцінок параметрів чирпованого сигналу, що складається з однієї гармоніки чи є сумою декількох гармонік (1), були отримані у великій кількості робіт. Наприклад, див. публікації Nandi and Kundu [21], Kundu and Nandi [22], Nandi and Kundu [23], Kundu and Nandi [24], Lahiri [25], Lahiri, Kundu, and Mitra [26], Grover, Kundu, and Mitra [27].

Варто зазначити, що чирповані сигнали використовуються у радарах – пристроях, що дозволяють визначати відстань до об'єкта, а також напрямок його руху, тому задача оцінювання параметрів чирпованого сигналу має важливий прикладний характер.

За результатами, отриманими у даній магістерській дисертації, було зроблено доповідь на XI Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків [34], а також подано до друку статтю у *Austrian Journal of Statistics* [28].

1 Постановка задачі

У роботі ми розглядаємо неперервний у часі множинний чирпований сигнал, що спостерігається на фоні адитивного випадкового шуму і доводимо сильну консистентність ОНК невідомих параметрів сигналу.

Регресійні моделі з неперервним часом є дуже важливими, оскільки моделі дискретного типу, які зазвичай використовуються в реальних прикладних задачах, можуть бути отримані з неперервних за часом моделей, використовуючи різні методи дискретизації: див., наприклад, Grenander [29], стор. 249-251, або Angulo et al. [30], де було запропоновано декілька методів дискретизації, таких як семплінг локальних середніх значень, семплінг миттєвих значень, рандомізований семплінг. Крім того, використовуючи моделі з неперервним часом, їх можна дискретизувати різними способами відповідно до потреби, що дозволяє досліджувати як асимптотику для фіксованого проміжку спостережень, так і асимптотику для зростаючого інтервалу, яка розглядається в даній роботі.

Припустимо, що ми спостерігаємо випадковий процес

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

де

$$g(t, \theta^0) = \sum_{j=1}^N (A_j^0 \cos(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2) + B_j^0 \sin(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2)), \quad (3)$$

$$\theta^0 = (A_1^0, B_1^0, \phi_1^0, \psi_1^0, \dots, A_N^0, B_N^0, \phi_N^0, \psi_N^0), \quad (4)$$

$(A_j^0)^2 + (B_j^0)^2 > 0, j = \overline{1, N}; \varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$ є випадковим шумом, визначеним на ймовірнісному просторі (Ω, \mathcal{F}, P) , і задовольняє наступній вимозі.

A. ε – вибірково неперервний стаціонарний гауссівський випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією (к.ф.) $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0), t \in \mathbb{R}$, що задовольняє одну з умов:

(i) $B(t) = L(|t|)|t|^{-\alpha}, \alpha \in (0, 1)$, де L – неспадна повільно змінна на нескінченності функція;

(ii) $B(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$.

Варто зазначити, що тригонометрична функція (3) для $N \geq 2$ не задовольняє умовам будь-якої загальної теореми нелінійного регресійного аналізу про консистентність ОНК невідомих параметрів (див., для прикладу, Ivanov and Leonenko [31], Ivanov [32]). Для доведення консистентності ОНК (4) необхідно змінити стандартне означення ОНК, використовуючи параметричні множини, що дозволять добре розрізнити параметри моделі.

Припустимо, що істинні значення амплітуд $A_j^0, B_j^0, j = \overline{1, N}$, є різними числами, а істинні значення параметрів частот $\phi_j^0, j = \overline{1, N}$, та $\psi_j^0, j = \overline{1, N}$, є різними додатними числами. Розмістимо параметри $\psi^0 = (\psi_1^0, \dots, \psi_N^0)$ в порядку зростання і припустимо, що параметрична множина, в якій будемо шукати оцінку невідомих істинних значень параметрів ψ , має вигляд

$$\psi^0 \in \Psi(\underline{\psi}, \bar{\psi}) = \{ \psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \underline{\psi} < \psi_1 < \dots < \psi_N < \bar{\psi} < +\infty \}.$$

В свою чергу, також введемо параметричну множину

$$\Phi(\underline{\phi}, \bar{\phi}) = \{ \phi = (\phi_1, \dots, \phi_N) : 0 \leq \underline{\phi} < \phi_j < \bar{\phi} < +\infty, j = \overline{1, N} \},$$

таку, що $\phi^0 = (\phi_1^0, \dots, \phi_N^0) \in \Phi(\underline{\phi}, \bar{\phi})$.

Розглянемо монотонно неспадну сім'ю відкритих множин $\Psi_T \subset \Psi(\underline{\psi}, \bar{\psi})$, $T > T_0 > 0$, що містить вектор ψ^0 , таку, що $\bigcup_{T > T_0} \Psi_T = \tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}^c = \Psi^c(\underline{\psi}, \bar{\psi})$, і виконується наступна умова.

$$\mathbf{B.} \ 1) \lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\substack{1 \leq j \leq N-1 \\ \psi \in \Psi_T}} T^2 (\psi_{j+1} - \psi_j) = +\infty;$$

$$2) \lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\psi \in \Psi_T} T^2 \psi_1 = +\infty.$$

Умова **B** дозволяє розрізнити близькі значення параметрів ψ_j та враховувати можливу близькість до нуля параметра ψ_1 .

Означення 1. Будь-який випадковий вектор

$$\theta_T = (A_{1T}, B_{1T}, \phi_{1T}, \psi_{1T}, \dots, A_{NT}, B_{NT}, \phi_{NT}, \psi_{NT}), \quad (5)$$

що мінімізує значення функціоналу

$$Q_T(\theta) = T^{-1} \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)]^2 dt \quad (6)$$

на параметричній множині $\Theta_T^c \subset \mathbb{R}^{4N}$, де амплітуди $A_j, B_j, j = \overline{1, N}$, можуть приймати будь-які значення, а параметри (ϕ, ψ) приймають значення у множині $\Phi^c(\underline{\phi}, \overline{\phi}) \times \Psi_T^c, T > T_0 > 0$, називається ОНК параметра θ^0 .

В даній роботі досліджується саме така оцінка θ_T , визначена на параметричній множині Θ_T^c , що залежить від T .

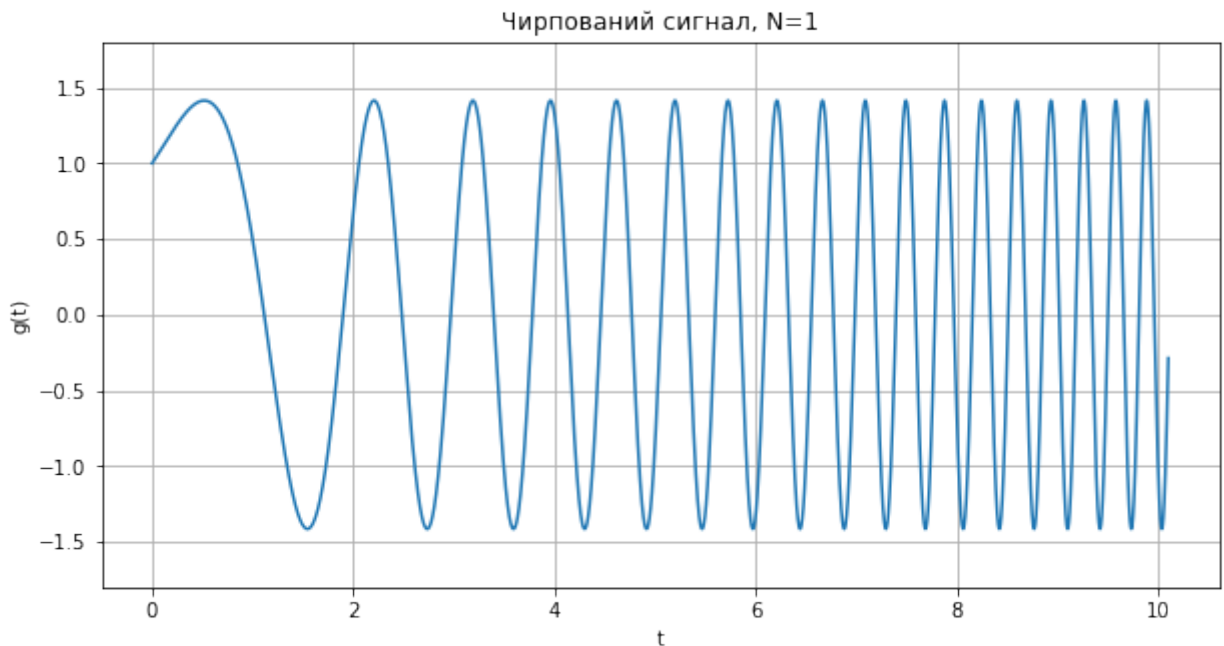
Теорема 1. Нехай виконуються умови **A** та **B**. Тоді ОНК θ_T є сильно консистентною оцінкою параметра θ^0 в тому сенсі, що

$$A_{jT} \rightarrow A_j^0, \quad B_{jT} \rightarrow B_j^0,$$

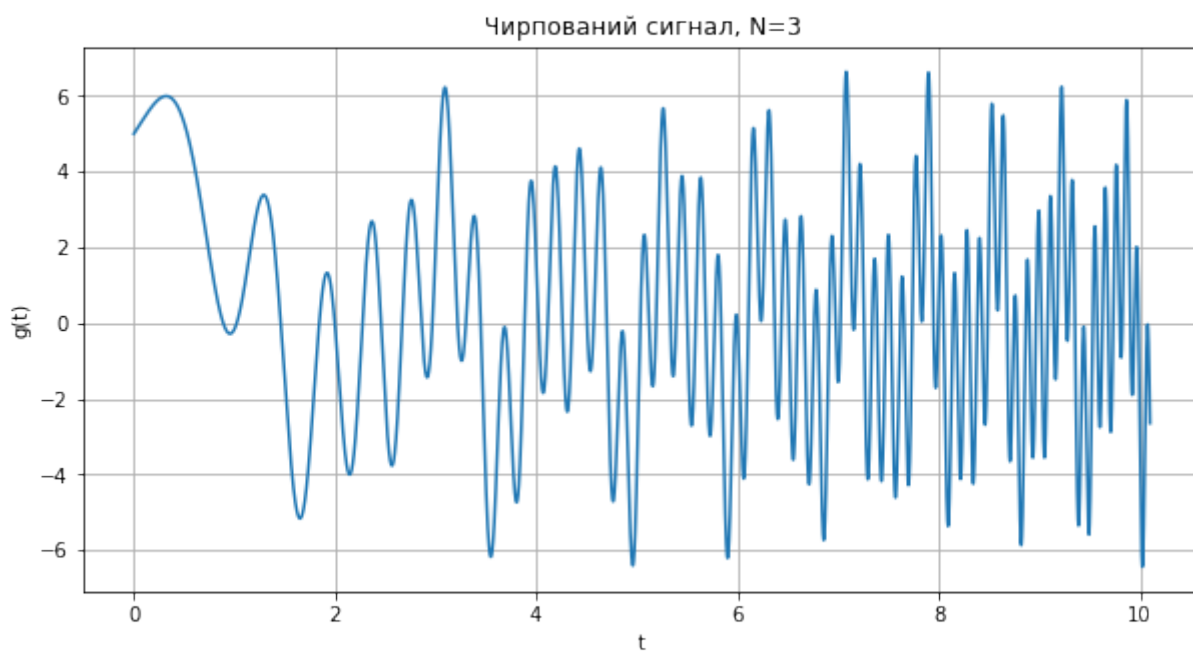
$$T(\phi_{jT} - \phi_j^0) \rightarrow 0, \quad T^2(\psi_{jT} - \psi_j^0) \rightarrow 0 \text{ м.н., при } T \rightarrow \infty, j = \overline{1, N}.$$

Доведення цієї теореми наведено у третьому розділі.

Приклад 1. Чирпований сигнал, що складається з однієї гармоніки з параметрами $\theta^0 = (1, 1, 1, 1)$



Приклад 2. Множинний чирпований сигнал, що складається з трьох гармонік з параметрами $\theta^0 = ((1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 0.5), (3, 1, 1, 3))$



2 Рівномірний закон великих чисел

В даному розділі доведено посилений рівномірний закон великих чисел для випадкового процесу ε , зваженого тригонометричними функціями від квадратичного аргументу.

Теорема 2. Якщо виконано умову **A**, то

$$\xi_T = \sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} \left| T^{-1} \int_0^T e^{-i(\phi t + \psi t^2)} \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н., при } T \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Доведення. Позначимо $\eta_T(\phi, \psi)$ вираз під аргументом супремуму в (7). Тоді

$$\begin{aligned} \eta_T^2(\phi, \psi) &= T^{-2} \int_0^T \int_0^T \exp \{ -i(\phi(t-s) + \psi(t^2 - s^2)) \} \varepsilon(t) \varepsilon(s) dt ds \\ &= T^{-2} \iint_{t>s} + T^{-2} \iint_{t<s} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Зробимо заміну змінних $t - s = u, s = s'$, в інтегралі I_1 , а також після виконання заміни перепозначимо змінну s' на s . Матимемо

$$\begin{aligned} |I_1| &= T^{-2} \left| \int_0^T e^{-i(\phi u + \psi u^2)} \int_0^{T-u} e^{-i(2\psi us)} \varepsilon(s+u) \varepsilon(s) ds du \right| \\ &\leq T^{-2} \int_0^T \left| \int_0^{T-u} e^{-i(2\psi us)} \varepsilon(s+u) \varepsilon(s) ds \right| du. \quad (8) \end{aligned}$$

Замінивши змінні t на s , а s на t , в інтегралі I_2 , отримуємо аналогічно

$$\begin{aligned} |I_2| &= T^{-2} \left| \int_0^T e^{i(\phi u + \psi u^2)} \int_0^{T-u} e^{i(2\psi us)} \varepsilon(s+u) \varepsilon(s) ds du \right| \\ &\leq T^{-2} \int_0^T \left| \int_0^{T-u} e^{i(2\psi us)} \varepsilon(s+u) \varepsilon(s) ds \right| du. \quad (9) \end{aligned}$$

З (8) і (9) випливає, що

$$\begin{aligned}
E\xi_T^2 &\leq 2T^{-2} \int_0^T E \sup_{\psi \in \mathbb{R}} \left| \int_0^{T-u} e^{i(2\psi us)} \varepsilon(s+u) \varepsilon(s) ds \right| du \\
&\leq 2T^{-2} \int_0^T \left(E \sup_{\psi \in \mathbb{R}} \int_0^{T-u} \int_0^{T-u} e^{-i2\psi u(t-s)} \varepsilon(t+u) \varepsilon(t) \right. \\
&\quad \left. \times \varepsilon(s+u) \varepsilon(s) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} du. \quad (10)
\end{aligned}$$

Використовуючи позначення $\tilde{\eta}(t) = \varepsilon(t+u)\varepsilon(t)$, зробимо, як вище, заміну змінних $t - s = v$, $s = s'$, у подвійному інтегралі у виразі (10). Тоді

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T-u} \int_0^{T-u} e^{-i(2\psi u)(t-s)} \tilde{\eta}(t) \tilde{\eta}(s) dt ds \\
&= 2 \int_0^{T-u} \cos(2\psi uv) \int_0^{T-u-v} \tilde{\eta}(v+s) \tilde{\eta}(s) ds dv \\
&\leq 2 \int_0^{T-u} \left| \int_0^{T-u-v} \varepsilon(u+v+s) \varepsilon(u+s) \varepsilon(v+s) \varepsilon(s) ds \right| dv,
\end{aligned}$$

і, таким чином,

$$\begin{aligned}
E\xi_T^2 &\leq 2\sqrt{2}T^{-2} \int_0^T \left(\int_0^{T-u} E \left| \int_0^{T-u-v} \varepsilon(u+v+s) \varepsilon(u+s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \varepsilon(v+s) \varepsilon(s) ds \right| dv \right)^{\frac{1}{2}} du \\
&\leq 2\sqrt{2}T^{-2} \int_0^T \left(\int_0^{T-u} \left(\int_0^{T-u-v} \int_0^{T-u-v} E \varepsilon(u+v+s) \varepsilon(u+s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \varepsilon(v+s) \varepsilon(s) \varepsilon(u+v+t) \varepsilon(u+t) \varepsilon(v+t) \varepsilon(t) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} dv \right)^{\frac{1}{2}} du. \quad (11)
\end{aligned}$$

Для подальшого оцінювання правої частини нерівності (11) ми використовуємо умову **A** і застосовуємо теорему Іссерліса (див. Michałowicz et al. [33]) до добутку 8 значень стаціонарного гауссівського процесу ε . Якщо даний добуток містить $2n$ множників, то кількість доданків у сумі Іссерліса дорівнює $(2n - 1)!!$. В нашому випадку, $n = 4$, а кількість доданків $7!! = 105$. Крім того, кожен доданок є добутком деяких 4 значень коваріаційної функції процесу ε . Це ціна, яку ми повинні заплатити, щоб позбутися змінних ϕ та ψ у нерівності (11), що є

важливим кроком для доведення (7). Застосування теореми Іссерліса до правої частини (11) наведено у додатку А.

Згідно з результатом додатку А

$$E \varepsilon^1(u+v+s)\varepsilon^2(u+s)\varepsilon^3(v+s)\varepsilon^4(s)\varepsilon^5(u+v+t)\varepsilon^6(u+t)\varepsilon^7(v+t)\varepsilon^8(t) = \sum_{r=1}^{105} b_r(u, v, t-s), \quad (12)$$

де вирази $b_r(u, v, t-s)$ задані формулами (А1)-(А9), і, насправді, не усі залежать від всіх змінних $u, v, t-s$. Тому

$$\begin{aligned} E\xi_T^2 &\leq \\ &\leq 2\sqrt{2}T^{-2} \int_0^T \left(\int_0^{T-u} \left(\int_0^{T-u-v} \int_0^{T-u-v} \sum_{r=1}^{105} b_r(u, v, t-s) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} dv \right)^{\frac{1}{2}} du \\ &\leq 2\sqrt{2} \sum_{r=1}^{105} T^{-2} \\ &\quad \times \int_0^T \left(\int_0^{T-u} \left(\int_0^{T-u-v} \int_0^{T-u-v} b_r(u, v, t-s) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} dv \right)^{\frac{1}{2}} du. \quad (13) \end{aligned}$$

Очевидно, що для $r = \overline{1, 105}$, роблячи послідовні заміни змінних $u \rightarrow Tu$, $v \rightarrow Tv$, а тоді $t \rightarrow Tt$, $s \rightarrow Ts$, матимемо

$$\begin{aligned} &T^{-2} \int_0^T \left(\int_0^{T-u} \left(\int_0^{T-u-v} \int_0^{T-u-v} b_r(u, v, t-s) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} dv \right)^{\frac{1}{2}} du \\ &= T^{-1} \int_0^T \left(T^{-1} \int_0^{T-u} \left(T^{-2} \int_0^{T-u-v} \int_0^{T-u-v} b_r(u, v, t-s) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} dv \right)^{\frac{1}{2}} du \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} \left(\int_0^{1-u-v} \int_0^{1-u-v} b_r(Tu, Tv, T(t-s)) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} dv \right)^{\frac{1}{2}} du \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \int_0^1 b_r(Tu, Tv, T(t-s)) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} dv \right)^{\frac{1}{2}} du = J_r. \quad (14) \end{aligned}$$

У (A1)-(A9) маємо значення к.ф. B , які охоплюють усі комбінації змінних під їх аргументами, що дозволяє належним чином оцінити інтеграли (14), враховуючи умову $\mathbf{A}(i)$. У додатку А для зручності в списках (A1)-(A9) добутків значень к.ф. B , що ми позначили b_r , підкреслено ті значення к.ф., інтеграли від яких будемо оцінювати далі. Решту значень ми оцінюємо величиною $B(0)$. Таким чином, отримуємо дещо закруглені оцінки величин J_r , проте це значно спрощує подальше доведення.

Спершу, в інтегралах від b_r ми розглянемо множники

$$\begin{aligned} & B(T(t-s)), \quad B(T(t-s+u))B(T(t-s-u)), \\ & B(T(t-s+v))B(T(t-s-v)), \\ & B(T(t-s+u+v))B(T(t-s-u-v)). \end{aligned} \quad (15)$$

Нехай $a(t) \geq 0$ є парною функцією і $\sup_t a(t) = a_0 < +\infty$. Тоді

$$\int_0^1 \int_0^1 a(t-s) dt ds = \int_{-1}^1 (1-|t|)a(t) dt \leq \int_{-1}^1 a(t) dt. \quad (16)$$

Застосовуючи (16) до парних функцій

$$a(t) = B(Tt), \quad B(T(t+w))B(T(t-w)), \quad w = u, v, u+v > 0, \quad (17)$$

отримуємо

$$\int_0^1 \int_0^1 B(T(t-s)) dt ds \leq 2 \int_0^1 B(Tt) dt; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 B(T(t-s+w))B(T(t-s-w)) dt ds \\ & \leq \int_{-1}^1 B(T(t+w))B(T(t-w)) dt \\ & \leq B(0) \left(\int_0^1 B(T(t+w)) dt + \int_{-1}^0 B(T(t-w)) dt \right) \\ & = 2B(0) \int_0^T B(T(t+w)) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

По-друге, в інтегралах від b_r подивимось на множники

$$\begin{aligned} & B(T(t-s+u))B(T(t-s-u-v)), \quad B(T(t-s+v))B(T(t-s-u-v)), \\ & B(T(t-s+u+v))B(T(t-s-u)), \quad B(T(t-s+u+v))B(T(t-s-v)), \\ & B(T(t-s+v))B(T(t-s-u)), \quad B(T(t-s+u))B(T(t-s-v)). \end{aligned} \quad (20)$$

Усі ці вирази можуть бути записані як узагальнення (17) у формі

$$B(T(t-s+w_1))B(T(t-s-w_2)), \quad w_1, w_2 > 0. \quad (21)$$

Отримуємо послідовно

$$I = \int_0^1 \int_0^1 a(t-s+w_1)a(t-s-w_2)dt ds = \iint_{t>s} + \iint_{t<s},$$

$$\begin{aligned} \iint_{t>s} &= \int_0^1 \int_0^{1-u} a(u+w_1)a(u-w_2)ds du \\ &= \int_0^1 (1-u)a(u+w_1)a(u-w_2)du \leq a_0 \int_0^1 a(u+w_1)du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{t<s} &= \int_0^1 \int_0^{1-u} a(-u+w_1)a(-u-w_2)ds du \\ &= \int_0^1 (1-u)a(-u+w_1)a(-u-w_2)du \leq a_0 \int_0^1 a(u+w_2)du, \end{aligned}$$

тобто,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 B(T(t-s+w_1))B(T(t-s-w_2))ds dt \\ & \leq B(0) \left(\int_0^1 B(T(t+w_1))dt + \int_0^1 B(T(t+w_2))dt \right). \end{aligned} \quad (22)$$

По-третє, залишається розглянути випадки, коли у виразах b_r будемо оціню-

вати інтеграли від значень к.ф. $B(Tu)$, $B(Tv)$, $B(T(u+v))$. Тоді, відповідно,

$$J_r \leq B^{\frac{3}{4}}(0) \int_0^1 B^{\frac{1}{4}}(Tu)du, \quad J_r \leq B^{\frac{3}{4}}(0) \left(\int_0^1 B^{\frac{1}{2}}(Tv)dv \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$J_r \leq B^{\frac{3}{4}}(0) \int_0^1 \left(\int_0^1 B^{\frac{1}{2}}(T(u+v))dv \right)^{\frac{1}{2}} du. \quad (23)$$

Тепер оцінимо зверху значення $B(T(t+w))$, де $t \in [0, 1]$ і w може дорівнювати 0 , u , v , $u+v$, де $u, v \in (0, 1]$. За умовою $\mathbf{A}(i)$ для будь-якого $\delta > 0$ і $T > T_0 = T_0(\delta)$ $L(T(t+w)) \leq L(3T) \leq (1+\delta)L(T)$. Крім того, $(T(t+w))^{-\alpha} \leq T^{-\alpha}t^{-\alpha}$, і для $T > T_0$ маємо

$$\int_0^1 B(T(t+w))dt \leq \frac{1+\delta}{1-\alpha} B(T). \quad (24)$$

Зауважимо, що в списках (A1)-(A9) підкреслені значення к.ф. B , які відповідають формулам (15) та (20), входять у 75 доданків із суми (13). Позначимо ці доданки J_{r_i} , $i = \overline{1, 75}$, і беручи до уваги нерівності (18), (19), (22), (24), отримуємо для $T > T_0$

$$2\sqrt{2} \sum_{i=1}^{75} J_{r_i} \leq 75(2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}})B^{\frac{3}{4}}(0) \left(\frac{1+\delta}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} B^{\frac{1}{4}}(T). \quad (25)$$

Залишається оцінити інтеграли у (23). Другий та третій інтеграли оцінюються однаково. Для другого інтеграла при $T > T_0$ отримуємо оцінку

$$\left(\int_0^1 B^{\frac{1}{2}}(Tv)dv \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{(1+\delta)^{\frac{1}{4}}}{(1-\frac{\alpha}{2})^{\frac{1}{2}}} B^{\frac{1}{4}}(T). \quad (26)$$

У списках (A1)-(A9) 25 підкреслених значень к.ф. B відповідають другому та третьому інтегралам у (23). Позначивши відповідні вирази (14) у сумі (13) J_{r_i} , $i = \overline{76, 100}$, з (26) отримуємо

$$2\sqrt{2} \sum_{i=76}^{100} J_{r_i} \leq 25(2^{1+\frac{1}{2}})B^{\frac{3}{4}}(0) \frac{(1+\delta)^{\frac{1}{4}}}{(1-\frac{\alpha}{2})^{\frac{1}{2}}} B^{\frac{1}{4}}(T). \quad (27)$$

Нарешті, для останніх 5 виразів J_{r_i} , $i = \overline{101, 105}$, що відповідають першому

інтегралу у (23), маємо очевидну нерівність

$$2\sqrt{2} \sum_{i=101}^{105} J_{r_i} \leq 5(2^{1+\frac{1}{2}})B^{\frac{3}{4}}(0) \frac{(1+\delta)^{\frac{1}{4}}}{1-\frac{\alpha}{4}} B^{\frac{1}{4}}(T). \quad (28)$$

Враховуючи оцінки (25), (27), (28) для $\delta > 0$ і $T > T_0(\delta)$, приходимо до нерівності

$$E\xi_T^2 \leq 2\sqrt{2} \left(75\sqrt[4]{2}(1-\alpha)^{-\frac{1}{4}} + 25(1-\alpha/2)^{-\frac{1}{2}} + 5(1-\alpha/4)^{-1} \right) \times (1+\delta)^{\frac{1}{4}} B^{\frac{3}{4}}(0) B^{\frac{1}{4}}(T), \quad (29)$$

тобто,

$$E\xi_T^2 = O\left(B^{\frac{1}{4}}(T)\right), \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Тепер розглянемо випадок, коли виконується умова **A(ii)**. Тоді замість (13) запишемо нерівність

$$E\xi_T^2 \leq 2\sqrt{2} \sum_{r=1}^{105} T^{-2} \times \int_0^T \left(\int_0^{T-u} \left(\int_0^{T-u-v} \int_0^{T-u-v} |b_r(u, v, t-s)| dt ds \right)^{\frac{1}{2}} dv \right)^{\frac{1}{2}} du, \quad (31)$$

в якій сума містить $24 + 72 = 96$ доданків, де в добутках 4 значень к.ф. B різниця $t - s$ присутня в аргументах к.ф. 4 або 2 рази. В цих доданках ми мажоруватимемо подвійний інтеграл величиною

$$B^3(0)\|B\|_1(T-u-v), \quad \|B\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |B(t)| dt,$$

і тоді отримуємо

$$2\sqrt{2}T^{-2} \int_0^T \left(\int_0^{T-u} (B^3(0)\|B\|_1(T-u-v))^{\frac{1}{2}} dv \right)^{\frac{1}{2}} du = \frac{16}{7\sqrt{3}} B^{\frac{3}{4}}(0) \|B\|_1^{1/4} T^{-\frac{1}{4}}. \quad (32)$$

В решті 9 доданків суми (31), що містять добутки значень к.ф. B , записані в (A9), подвійний інтеграл, наприклад, може бути оцінений 5 разів $B^3(0)(T - u - v)^2|B(v)|$, 3 рази як $B^3(0)(T - u - v)^2|B(u + v)|$, і один раз (див. формулу 5 в A(9)) як $(T - u - v)^2B^4(u)$.

Таким чином,

$$2\sqrt{2}B^{\frac{3}{4}}(0)T^{-2} \int_0^T \left(\int_0^{T-u} (T - u - v)|B(v)|^{\frac{1}{2}} dv \right)^{\frac{1}{2}} du \leq \frac{8\sqrt{2}}{7\sqrt{3}}B^{\frac{3}{4}}(0)\|B\|_1^{1/4}T^{-\frac{1}{4}}. \quad (33)$$

Для інтегралів із $|B(u + v)|$ замість $|B(v)|$ отримуємо ту ж саму оцінку. Нарешті,

$$2\sqrt{2}T^{-2} \int_0^T |B(u)| \left(\int_0^{T-u} (T - u - v)dv \right)^{\frac{1}{2}} du \leq 2\|B\|_1T^{-1}. \quad (34)$$

З (31)-(34) випливає, що за умови **A(ii)**

$$E\xi_T^2 \leq \left(\frac{1536 + 64\sqrt{2}}{7\sqrt{3}} \right) B^{\frac{3}{4}}(0)\|B\|_1^{1/4}T^{-\frac{1}{4}} + 2\|B\|_1T^{-1}, \quad (35)$$

тобто,

$$E\xi_T^2 = O\left(T^{-\frac{1}{4}}\right), \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (36)$$

Повертаючись до співвідношення (30), покладемо $T_n = n^\beta$, де $\beta > \frac{4}{\alpha}$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_{T_n}^2 < +\infty$, і $\xi_{T_n} \rightarrow 0$ м.н., при $n \rightarrow \infty$. Розглянемо послідовність випадкових величин

$$\begin{aligned} \zeta_n &= \sup_{T_n \leq T < T_{n+1}} |\xi_T - \xi_{T_n}| \\ &= \sup_{T_n \leq T < T_{n+1}} \left| \sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} \left| T^{-1} \int_0^T e^{-i(\phi t + \psi t^2)} \varepsilon(t) dt \right| - \sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} \left| T_n^{-1} \int_0^{T_n} e^{-i(\phi t + \psi t^2)} \varepsilon(t) dt \right| \right| \\ &\leq \sup_{T_n \leq T < T_{n+1}} \sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} \left| T^{-1} \int_0^T e^{-i(\phi t + \psi t^2)} \varepsilon(t) dt - T_n^{-1} \int_0^{T_n} e^{-i(\phi t + \psi t^2)} \varepsilon(t) dt \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{T_n \leq T < T_{n+1}} \left[\sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} \left| (T^{-1} - T_n^{-1}) \int_0^{T_n} e^{-i(\phi t + \psi t^2)} \varepsilon(t) dt \right| \right. \\
&\quad \left. + \sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} \left| T^{-1} \int_{T_n}^T e^{-i(\phi t + \psi t^2)} \varepsilon(t) dt \right| \right] \leq \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} \xi_{T_n} + T_n^{-1} \int_{T_n}^{T_{n+1}} |\varepsilon(t)| dt \\
&\hspace{25em} = \zeta_{n1} + \zeta_{n2}.
\end{aligned}$$

Очевидно, $\zeta_{n1} \rightarrow 0$ м.н., при $n \rightarrow \infty$. З іншого боку,

$$E\zeta_{n2}^2 = T_n^{-2} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_{T_n}^{T_{n+1}} E|\varepsilon(t)\varepsilon(s)| dt ds \leq B(0) \left(\frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} \right)^2 = O(n^{-2}),$$

$\sum_{n=1}^{\infty} E\zeta_{n2}^2 < +\infty$. Таким чином, $\zeta_{n2} \rightarrow 0$ м.н., при $n \rightarrow \infty$, і за умови **A(i)** співвідношення (7) виконується. За умови **A(ii)** отримуємо аналогічні збіжності, що впливає з (36).

■

Наведемо деякі наслідки із доведеної теореми.

Оскільки, $e^{-i(\phi t + \psi t^2)} = \cos(\phi t + \psi t^2) - i \sin(\phi t + \psi t^2)$, тоді

$$\begin{aligned}
\xi_T &= \\
&= \sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} \sqrt{\left(T^{-1} \int_0^T \cos(\phi t + \psi t^2) \varepsilon(t) dt \right)^2 + \left(T^{-1} \int_0^T \sin(\phi t + \psi t^2) \varepsilon(t) dt \right)^2},
\end{aligned}$$

а, отже, маємо наступні очевидні наслідки.

Наслідок 1.

$$\sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} \left| T^{-1} \int_0^T \cos(\phi t + \psi t^2) \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н., при } T \rightarrow \infty.$$

Наслідок 2.

$$\sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} \left| T^{-1} \int_0^T \sin(\phi t + \psi t^2) \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н., при } T \rightarrow \infty.$$

Розглянемо тепер величини

$$A(T) = \sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} \left| T^{-1} \int_0^T \left[e^{i(\phi t + \psi t^2)} \pm e^{i(\phi t - \psi t^2)} \right] \varepsilon(t) dt \right|.$$

З теореми 2 очевидно, що $A(T) \rightarrow 0$ м.н. при $T \rightarrow \infty$.

Оскільки,

$$\begin{aligned} e^{i(\phi t + \psi t^2)} \pm e^{i(\phi t - \psi t^2)} &= [\cos(\phi t + \psi t^2) \pm \cos(\phi t - \psi t^2)] \\ &\quad + i[\sin(\phi t + \psi t^2) \pm \sin(\phi t - \psi t^2)], \end{aligned}$$

тоді

$$\begin{aligned} A(T) = \sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} &\left(\left(T^{-1} \int_0^T [\sin(\phi t + \psi t^2) \pm \sin(\phi t - \psi t^2)] \varepsilon(t) dt \right)^2 \right. \\ &\left. + \left(T^{-1} \int_0^T [\cos(\phi t + \psi t^2) \pm \cos(\phi t - \psi t^2)] \varepsilon(t) dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

В останній формулі розпишемо суми косинусів та синусів, а також різниці косинусів та синусів. Матимемо

$$\begin{aligned} A_+(T) = 2 \sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} &\left(\left(T^{-1} \int_0^T \cos(\phi t) \cos(\psi t^2) \varepsilon(t) dt \right)^2 \right. \\ &\left. + \left(T^{-1} \int_0^T \sin(\phi t) \cos(\psi t^2) \varepsilon(t) dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_-(T) = 2 \sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} &\left(\left(T^{-1} \int_0^T \sin(\phi t) \sin(\psi t^2) \varepsilon(t) dt \right)^2 \right. \\ &\left. + \left(T^{-1} \int_0^T \cos(\phi t) \sin(\psi t^2) \varepsilon(t) dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Оскільки, $A_+(T), A_-(T) \rightarrow 0$ м.н. при $T \rightarrow \infty$, то з двох попередніх формул випливають наступні 4 наслідки з теореми 2.

Наслідок 3.

$$\sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} \left| T^{-1} \int_0^T \cos(\phi t) \cos(\psi t^2) \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н., при } T \rightarrow \infty.$$

Наслідок 4.

$$\sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} \left| T^{-1} \int_0^T \cos(\phi t) \sin(\psi t^2) \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н., при } T \rightarrow \infty.$$

Наслідок 5.

$$\sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} \left| T^{-1} \int_0^T \sin(\phi t) \sin(\psi t^2) \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н., при } T \rightarrow \infty.$$

Наслідок 6.

$$\sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} \left| T^{-1} \int_0^T \sin(\phi t) \cos(\psi t^2) \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н., при } T \rightarrow \infty.$$

Далі, під час доведення теореми 1, будемо використовувати наслідки 1 та 2.

3 Доведення теореми про консистентність ОНК параметрів чирпованого сигналу

Розглянемо систему лінійних рівнянь для параметрів $A_{kT}, B_{kT}, k = \overline{1, N}$, що є підсистемою системи нормальних рівнянь для ОНК θ_T :

$$\frac{\partial Q_T(\theta_T)}{\partial A_p} = \frac{\partial Q_T(\theta_T)}{\partial B_p} = 0, \quad p = \overline{1, N},$$

і перепишемо її більш детально у формі

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N a_{jp}^{(1)}(T) A_{jT} + \sum_{j=1}^N b_{jp}^{(1)}(T) B_{jT} = c_p^{(1)}, & p = \overline{1, N}; \\ \sum_{j=1}^N a_{jp}^{(2)}(T) A_{jT} + \sum_{j=1}^N b_{jp}^{(2)}(T) B_{jT} = c_p^{(2)}, & p = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (37)$$

В (37) ми використовуємо наступне позначення. Нехай

$$\cos(\phi_{jT}t + \psi_{jT}t^2) = \cos_j(t), \quad \sin(\phi_{jT}t + \psi_{jT}t^2) = \sin_j(t),$$

$$\cos(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2) = \cos_j^0(t), \quad \sin(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2) = \sin_j^0(t).$$

Тоді коефіцієнти системи (37) можуть бути записані у вигляді

$$a_{jp}^{(1)}(T) = T^{-1} \int_0^T \cos_j(t) \cos_p(t) dt, \quad a_{jp}^{(2)}(T) = T^{-1} \int_0^T \cos_j(t) \sin_p(t) dt,$$

$$b_{jp}^{(1)}(T) = T^{-1} \int_0^T \sin_j(t) \cos_p(t) dt, \quad b_{jp}^{(2)}(T) = T^{-1} \int_0^T \sin_j(t) \sin_p(t) dt,$$

$$c_p^{(1)}(T) = T^{-1} \int_0^T X(t) \cos_p(t) dt, \quad c_p^{(2)}(T) = T^{-1} \int_0^T X(t) \sin_p(t) dt.$$

Позначимо також через $o_T(1), T > 0$, можливо, різні випадкові процеси такі, що $o_T(1) \rightarrow 0$ м.н., при $T \rightarrow \infty$. Використовуючи умову **B**, покажемо, що

$$a_{jp}^{(1)}(T) = o_T(1), \quad j \neq p, \quad a_{pp}^{(1)}(T) = \frac{1}{2} + o_T(1);$$

$$\begin{aligned} \alpha_{jp}^{(2)}(T) &= o_T(1), \quad j, p = \overline{1, N}; \quad b_{jp}^{(1)}(T) = o_T(1); \\ b_{jp}^{(2)}(T) &= o_T(1), \quad j \neq p, \quad b_{pp}^{(2)}(T) = \frac{1}{2} + o_T(1), \quad j, p = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (38)$$

Для отримання (38) доведемо спочатку одну лему.

Лема 1. Нехай $\alpha_T, \beta_T, T > 0$ – деякі функції, і $\beta_T \rightarrow +\infty$, при $T \rightarrow \infty$. Тоді

$$\int_0^1 \cos(\alpha_T t + \beta_T t^2) dt \rightarrow 0, \quad \int_0^1 \sin(\alpha_T t + \beta_T t^2) dt \rightarrow 0, \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Доведення. Очевидно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\cos}{\sin}(\alpha_T t + \beta_T t^2) dt &= \int_0^1 \frac{\cos}{\sin} \left(\beta_T \left(t + \frac{\alpha_T}{2\beta_T} \right)^2 - \frac{\alpha_T^2}{4\beta_T} \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta_T}} \left(\int_{\alpha_T/2\sqrt{\beta_T}}^{\sqrt{\beta_T} + \alpha_T/2\sqrt{\beta_T}} \frac{\cos}{\sin} \left(t^2 - \frac{\alpha_T^2}{4\beta_T} \right) dt \right) \\ &= \cos \left(\frac{\alpha_T^2}{4\beta_T} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_T}} \int_{\alpha_T/2\sqrt{\beta_T}}^{\sqrt{\beta_T} + \alpha_T/2\sqrt{\beta_T}} \frac{\cos}{\sin}(t^2) dt \right) \\ &\quad \pm \sin \left(\frac{\alpha_T^2}{4\beta_T} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_T}} \int_{\alpha_T/2\sqrt{\beta_T}}^{\sqrt{\beta_T} + \alpha_T/2\sqrt{\beta_T}} \frac{\sin}{\cos}(t^2) dt \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Оскільки інтеграли Френеля

$$C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt, \quad x > 0,$$

приймаючи додатні значення, мають властивість $\max_x C(x), \max_x S(x) < 1$, то з (40) випливає, що

$$\left| \int_0^1 \cos(\alpha_T t + \beta_T t^2) dt \right|, \left| \int_0^1 \sin(\alpha_T t + \beta_T t^2) dt \right| < 4\beta_T^{-\frac{1}{2}}. \quad (41)$$

■

Припустимо, що $j > p$. Тоді за умовою **B** та лемою 1

$$\begin{aligned} a_{jp}^{(1)}(T) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(T(\phi_{jT} + \phi_{pT})t + T^2(\psi_{jT} + \psi_{pT})t^2) dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(T(\phi_{jT} - \phi_{pT})t + T^2(\psi_{jT} - \psi_{pT})t^2) dt = c_{jp}^+ + c_{jp}^- = o_T(1). \end{aligned}$$

Випадок $j < p$ розглядається аналогічно. Крім того, $b_{jp}^{(2)}(T) = c_{jp}^- - c_{jp}^+ = o_T(1)$, $j \neq p$. З іншого боку,

$$\begin{aligned} a_{pp}^{(1)}(T) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \cos((2\phi_{pT}T)t + (2\psi_{pT}T^2)t^2) dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}c_{pp}^+ = \frac{1}{2} + o_T(1), \quad b_{pp}^{(2)}(T) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c_{pp}^+ = \frac{1}{2} + o_T(1). \end{aligned}$$

Далі для випадку $j > p$ отримуємо

$$\begin{aligned} b_{jp}^{(1)}(T) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(T(\phi_{jT} + \phi_{pT})t + T^2(\psi_{jT} + \psi_{pT})t^2) dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(T(\phi_{jT} - \phi_{pT})t + T^2(\psi_{jT} - \psi_{pT})t^2) dt = s_{jp}^+ + s_{jp}^- = o_T(1), \end{aligned}$$

$a_{jp}^{(2)}(T) = s_{jp}^+ - s_{jp}^- = o_T(1)$. Випадок $j < p$ розглядається аналогічно.

Також зазначимо, що

$$a_{pp}^{(2)}(T) = b_{pp}^{(1)} = \frac{1}{2}s_{pp}^+ = o_T(1),$$

і співвідношення (38) виконуються.

Крім того,

$$c_p^{(1)}(T) = T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t) \cos_p(t) dt + T^{-1} \int_0^T g(t, \theta^0) \cos_p(t) dt, \quad (42)$$

і перший вираз у сумі (42) дорівнює $o_T(1)$, $p = \overline{1, N}$, за теоремою 2. З іншого

боку, для будь-якого p

$$\begin{aligned}
T^{-1} \int_0^T g(t, \theta^0) \cos_p(t) dt &= \sum_{j=1}^N A_j^0 T^{-1} \int_0^T \cos_j^0(t) \cos_p(t) dt \\
&\quad + \sum_{j=1}^N B_j^0 T^{-1} \int_0^T \sin_j^0(t) \cos_p(t) dt \\
&= A_p^0 (2T)^{-1} \int_0^T \cos((\phi_{pT} - \phi_p^0)t + (\psi_{pT} - \psi_p^0)t^2) dt \\
&\quad - B_p^0 (2T)^{-1} \int_0^T \sin((\phi_{pT} - \phi_p^0)t + (\psi_{pT} - \psi_p^0)t^2) dt + o_T(1), \quad (43)
\end{aligned}$$

за умовою **B** і лемою 1. Використовуючи позначення

$$x_{pT} = T^{-1} \int_0^T \cos((\phi_{pT} - \phi_p^0)t + (\psi_{pT} - \psi_p^0)t^2) dt, \quad (44)$$

$$y_{pT} = T^{-1} \int_0^T \sin((\phi_{pT} - \phi_p^0)t + (\psi_{pT} - \psi_p^0)t^2) dt, \quad (45)$$

з (42) і (43) отримуємо

$$c_p^{(1)}(T) = \frac{1}{2} [A_p^0 x_{pT} - B_p^0 y_{pT}] + o_T(1), \quad p = \overline{1, N}. \quad (46)$$

Аналогічно

$$c_p^{(2)}(T) = \frac{1}{2} [A_p^0 y_{pT} + B_p^0 x_{pT}] + o_T(1), \quad p = \overline{1, N}. \quad (47)$$

Застосовуючи співвідношення (38), (46), (47) до системи рівнянь (37), отримуємо такі вирази для ОНК параметрів A_{jT} , B_{jT} :

$$A_{jT} = A_j^0 x_{jT} - B_j^0 y_{jT} + o_T(1), \quad B_{jT} = A_j^0 y_{jT} + B_j^0 x_{jT} + o_T(1), \quad j = \overline{1, N}. \quad (48)$$

Очевидно, $|x_{jT}|, |y_{jT}| \leq 1$, тоді з (48) випливає, що

$$|A_{jT}| \leq |A_j^0| + |B_j^0| + o_T(1), \quad |B_{jT}| \leq |A_j^0| + |B_j^0| + o_T(1), \quad j = \overline{1, N}. \quad (49)$$

Нехай,

$$G_T(\theta_1, \theta_2) = T^{-1} \int_0^T (g(t, \theta_1) - g(t, \theta_2))^2 dt, \quad \theta_1, \theta_2 \in \Theta_T^c.$$

З означення ОНК θ_T випливає

$$\begin{aligned} 0 &\geq Q_T(\theta_T) - Q_T(\theta^0) \\ &= T^{-1} \int_0^T [X(t) - g(t, \theta_T)]^2 dt - T^{-1} \int_0^T [X(t) - g(t, \theta^0)]^2 dt \\ &= T^{-1} \int_0^T [g(t, \theta^0) + \varepsilon(t) - g(t, \theta_T)]^2 dt - T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \\ &= G_T(\theta_T, \theta^0) + 2T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t)(g(t, \theta^0) - g(t, \theta_T)) dt. \quad (50) \end{aligned}$$

За теоремою 2 та нерівностями (49)

$$\begin{aligned} T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t)(g(t, \theta^0) - g(t, \theta_T)) dt &= \sum_{j=1}^N A_j^0 T^{-1} \int_0^T \cos(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2) \varepsilon(t) dt \\ + \sum_{j=1}^N B_j^0 T^{-1} \int_0^T \sin(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2) \varepsilon(t) dt &- \sum_{j=1}^N A_{jT} T^{-1} \int_0^T \cos(\phi_{jT} t + \psi_{jT} t^2) \varepsilon(t) dt \\ - \sum_{j=1}^N B_{jT} T^{-1} \int_0^T \sin(\phi_{jT} t + \psi_{jT} t^2) \varepsilon(t) dt &\rightarrow 0 \text{ м.н., при } T \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

і тоді маємо

$$G_T(\theta_T, \theta^0) \rightarrow 0 \text{ м.н., при } T \rightarrow \infty. \quad (51)$$

Використовуючи позначення

$$g_{jT}(t) = A_{jT} \cos_j(t) + B_{jT} \sin_j(t) - A_j^0 \cos_j^0(t) - B_j^0 \sin_j^0(t),$$

отримуємо

$$G_T(\theta_T, \theta^0) = \sum_{j=1}^N T^{-1} \int_0^T g_{jT}^2(t) dt + 2 \sum_{j < p} T^{-1} \int_0^T g_{jT}(t) g_{pT}(t) dt. \quad (52)$$

З леми 1, умови **B**, нерівностей (49) і попередніх міркувань, знаходимо, що

для $j < p$

$$\begin{aligned}
& T^{-1} \int_0^T g_{jT}(t) g_{pT}(t) dt \\
&= A_{jT} A_{pT} T^{-1} \int_0^T \cos_j(t) \cos_p(t) dt + A_{jT} B_{pT} T^{-1} \int_0^T \cos_j(t) \sin_p(t) dt \\
&\quad - A_{jT} A_p^0 T^{-1} \int_0^T \cos_j(t) \cos_p^0(t) dt - A_{jT} B_p^0 T^{-1} \int_0^T \cos_j(t) \sin_p^0(t) dt \\
&+ B_{jT} A_{pT} T^{-1} \int_0^T \sin_j(t) \cos_p(t) dt + B_{jT} B_{pT} T^{-1} \int_0^T \sin_j(t) \sin_p(t) dt \\
&\quad - B_{jT} A_p^0 T^{-1} \int_0^T \sin_j(t) \cos_p^0(t) dt - B_{jT} B_p^0 T^{-1} \int_0^T \sin_j(t) \sin_p^0(t) dt \\
&\quad - A_j^0 A_{pT} T^{-1} \int_0^T \cos_j^0(t) \cos_p(t) dt - A_j^0 B_{pT} T^{-1} \int_0^T \cos_j^0(t) \sin_p(t) dt \\
&\quad + A_j^0 A_p^0 T^{-1} \int_0^T \cos_j^0(t) \cos_p^0(t) dt + A_j^0 B_p^0 T^{-1} \int_0^T \cos_j^0(t) \sin_p^0(t) dt \\
&\quad - B_j^0 A_{pT} T^{-1} \int_0^T \sin_j^0(t) \cos_p(t) dt - B_j^0 B_{pT} T^{-1} \int_0^T \sin_j^0(t) \sin_p(t) dt \\
&\quad + B_j^0 A_p^0 T^{-1} \int_0^T \sin_j^0(t) \cos_p^0(t) dt + B_j^0 B_p^0 T^{-1} \int_0^T \sin_j^0(t) \sin_p^0(t) dt = o_T(1).
\end{aligned}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}
T^{-1} \int_0^T g_{jT}^2(t) dt &= A_{jT}^2 T^{-1} \int_0^T \cos_j^2(t) dt + B_{jT}^2 T^{-1} \int_0^T \sin_j^2(t) dt \\
&\quad + (A_j^0)^2 T^{-1} \int_0^T (\cos_j^0(t))^2 dt + (B_j^0)^2 T^{-1} \int_0^T (\sin_j^0(t))^2 dt \\
&\quad + 2A_{jT} B_{jT} T^{-1} \int_0^T \cos_j(t) \sin_j(t) dt + 2A_j^0 B_j^0 T^{-1} \int_0^T \cos_j^0(t) \sin_j^0(t) dt \\
&\quad - 2A_{jT} A_j^0 T^{-1} \int_0^T \cos_j(t) \cos_j^0(t) dt - 2B_{jT} B_j^0 T^{-1} \int_0^T \sin_j(t) \sin_j^0(t) dt \\
&\quad - 2A_{jT} B_j^0 T^{-1} \int_0^T \cos_j(t) \sin_j^0(t) dt - 2B_{jT} A_j^0 T^{-1} \int_0^T \sin_j(t) \cos_j^0(t) dt \\
&= \frac{1}{2} [A_{jT}^2 + B_{jT}^2 + (A_j^0)^2 + (B_j^0)^2] - (A_{jT} A_j^0 + B_{jT} B_j^0) x_{jT} \\
&\quad + (A_{jT} B_j^0 - A_j^0 B_{jT}) y_{jT} + o_T(1), \quad j = \overline{1, N}. \quad (53)
\end{aligned}$$

Підставляючи рівності (48) у вираз (53), отримуємо

$$\begin{aligned}
& T^{-1} \int_0^T g_{jT}^2(t) dt \\
&= \frac{1}{2} [(A_j^0 x_{jT} - B_j^0 y_{jT})^2 + (A_j^0 y_{jT} + B_j^0 x_{jT})^2 + (A_j^0)^2 + (B_j^0)^2] \\
&\quad - [(A_j^0 x_{jT} - B_j^0 y_{jT})A_j^0 + (A_j^0 y_{jT} + B_j^0 x_{jT})B_j^0] x_{jT} \\
&\quad + [(A_j^0 x_{jT} - B_j^0 y_{jT})B_j^0 - (A_j^0 y_{jT} + B_j^0 x_{jT})A_j^0] y_{jT} + o_T(1) \\
&= \frac{1}{2} ((A_j^0)^2 + (B_j^0)^2) (1 - x_{jT}^2 - y_{jT}^2) + o_T(1), \quad j = \overline{1, N}. \quad (54)
\end{aligned}$$

Беручи до уваги (51), (52), і (54), приходимо до співвідношення

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{2} ((A_j^0)^2 + (B_j^0)^2) (1 - x_{jT}^2 - y_{jT}^2) \rightarrow 0 \text{ м.н., при } T \rightarrow \infty. \quad (55)$$

З (55) випливає, що

$$x_{jT}^2 + y_{jT}^2 \rightarrow 1 \text{ м.н., при } T \rightarrow \infty, \quad j = \overline{1, N}. \quad (56)$$

Використовуючи позначення $\lambda_{jT} = T(\phi_{jT} - \phi_j^0)$, $\mu_{jT} = T^2(\psi_{jT} - \psi_j^0)$, можемо записати

$$x_{jT} = \int_0^1 \cos(\lambda_{jT}t + \mu_{jT}t^2) dt, \quad y_{jT} = \int_0^1 \sin(\lambda_{jT}t + \mu_{jT}t^2) dt, \quad j = \overline{1, N}. \quad (57)$$

Нехай $\Omega_0 \subset \Omega$, $P(\Omega_0) = 1$, є деякою випадковою подією, для якої справедливий результат (56). Якщо для будь-якої елементарної події $\omega \in \Omega_0$

$$\lambda_{jT}, \mu_{jT} \rightarrow 0, \text{ при } T \rightarrow \infty, \quad j = \overline{1, N}, \quad (58)$$

тоді (56) виконується за теоремою Лебега про мажоровану збіжність.

Припустимо, що (58) не виконується для деякого $\omega_0 \in \Omega_0$ і розглянемо усі можливі варіанти поведінки випадкових величин λ_{jT} , μ_{jT} .

Нехай, для деякого $j \in \{1, \dots, N\}$ і $\omega_0 \in \Omega_0$ $\mu_{jT} \not\rightarrow 0$, при $T \rightarrow \infty$. Тоді існують $\varepsilon_0 > 0$ і послідовність $\{T_n, n \geq 1\}$, $T_n \rightarrow \infty$, при $n \rightarrow \infty$, така, що $|\mu_{jT_n}| \geq \varepsilon_0$, $n \geq 1$. Нехай множина значень $\{\mu_{jT_n}, n \geq 1\}$ є обмеженою, тоді

існує підпослідовність $\{T_{n_k}, k \geq 1\}$, така, що $\mu_{jT_{n_k}} \rightarrow \mu_j \neq 0$, при $k \rightarrow \infty$. Тоді для деякої підпослідовності $\{T_{n_{km}}, m \geq 1\}$ $\lambda_{jT_{n_{km}}} \rightarrow \lambda_j \neq \pm\infty$, або $\lambda_{jT_{n_{km}}} \rightarrow +\infty$, або $-\infty$, при $m \rightarrow \infty$. Якщо множина значень $\{\mu_{jT_n}, n \geq 1\}$ є необмеженою, тоді для деякої підпослідовності $\{T_{n_k}, k \geq 1\}$ $\mu_{jT_{n_k}} \rightarrow +\infty$ або $-\infty$, при $k \rightarrow \infty$. В той же час, підпослідовності $\lambda_{jT_{n_{km}}}$ мають властивості, описані вище. Міняючи місцями значення λ_{jT} , μ_{jT} ми приходимо до симетричних властивостей їх підпослідовностей.

Позначимо $\lambda_{jT_{n_{km}}} = \lambda_{jm}$, $\mu_{jT_{n_{km}}} = \mu_{jm}$ і, використовуючи попередні викладки, визначимо усі можливі варіанти збіжностей λ_{jm} , μ_{jm} , при $m \rightarrow \infty$.

- (i) $\lambda_{jm} \rightarrow +\infty$ або $-\infty$, $\mu_{jm} \rightarrow \mu_j \neq 0$;
- (ii) $\lambda_{jm} \rightarrow +\infty$ або $-\infty$, $\mu_{jm} \rightarrow 0$;
- (iii) $\lambda_{jm} \rightarrow \lambda_j$, $\mu_{jm} \rightarrow \mu_j$, $\lambda_j^2 + \mu_j^2 > 0$;
- (iv) $\lambda_{jm} \rightarrow +\infty$ або $-\infty$, $\mu_{jm} \rightarrow +\infty$ або $-\infty$;
- (v) $\lambda_{jm} \rightarrow \lambda_j$, $\mu_{jm} \rightarrow +\infty$ або $-\infty$.

Позначимо також $x_{jT_{n_{km}}} = x_{jm}$, $y_{jT_{n_{km}}} = y_{jm}$ і покажемо, що для варіантів (i)-(v)

$$x_{jm}^2 + y_{jm}^2 \not\rightarrow 1, \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (59)$$

Нехай $\mu_{jm} \not\rightarrow 0$, при $m \rightarrow \infty$, і $\mu_{jm} > 0$ для достатньо великих m . Використовуючи рівність (40), виразимо $x_{jm}^2 + y_{jm}^2$ у термінах інтегралів Френеля. Покладемо $\gamma_{jm} = \lambda_{jm}/2\sqrt{\mu_{jm}}$, тоді

$$\begin{aligned} x_{jm}^2 + y_{jm}^2 &= \frac{\cos^2(\gamma_{jm}^2)}{\mu_{jm}} \left(\int_{\gamma_{jm}}^{\sqrt{\mu_{jm}} + \gamma_{jm}} \cos(t^2) dt \right)^2 + \frac{\sin^2(\gamma_{jm}^2)}{\mu_{jm}} \left(\int_{\gamma_{jm}}^{\sqrt{\mu_{jm}} + \gamma_{jm}} \sin(t^2) dt \right)^2 \\ &\quad + \frac{\sin(2\gamma_{jm}^2)}{\mu_{jm}} \left(\int_{\gamma_{jm}}^{\sqrt{\mu_{jm}} + \gamma_{jm}} \cos(t^2) dt \right) \left(\int_{\gamma_{jm}}^{\sqrt{\mu_{jm}} + \gamma_{jm}} \sin(t^2) dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cos^2(\gamma_{jm}^2)}{\mu_{jm}} \left(\int_{\gamma_{jm}}^{\sqrt{\mu_{jm} + \gamma_{jm}}} \sin(t^2) dt \right)^2 + \frac{\sin^2(\gamma_{jm}^2)}{\mu_{jm}} \left(\int_{\gamma_{jm}}^{\sqrt{\mu_{jm} + \gamma_{jm}}} \cos(t^2) dt \right)^2 \\
& - \frac{\sin(2\gamma_{jm}^2)}{\mu_{jm}} \left(\int_{\gamma_{jm}}^{\sqrt{\mu_{jm} + \gamma_{jm}}} \cos(t^2) dt \right) \left(\int_{\gamma_{jm}}^{\sqrt{\mu_{jm} + \gamma_{jm}}} \sin(t^2) dt \right) \\
& = \frac{1}{\mu_{jm}} \left(\int_{\gamma_{jm}}^{\sqrt{\mu_{jm} + \gamma_{jm}}} \cos(t^2) dt \right)^2 + \frac{1}{\mu_{jm}} \left(\int_{\gamma_{jm}}^{\sqrt{\mu_{jm} + \gamma_{jm}}} \sin(t^2) dt \right)^2. \quad (60)
\end{aligned}$$

У випадку, коли $\mu_{jm} < 0$ для достатньо великих m і $\gamma'_{jm} = \lambda_{jm}/2\sqrt{|\mu_{jm}|}$, отримуємо аналогічно

$$\begin{aligned}
& x_{im}^2 + y_{im}^2 \\
& = \frac{1}{|\mu_{jm}|} \left(\int_{-\gamma'_{jm}}^{\sqrt{|\mu_{jm}|} - \gamma'_{jm}} \cos(t^2) dt \right)^2 + \frac{1}{|\mu_{jm}|} \left(\int_{-\gamma'_{jm}}^{\sqrt{|\mu_{jm}|} - \gamma'_{jm}} \sin(t^2) dt \right)^2. \quad (61)
\end{aligned}$$

Користуючись формулами (60), (61) і властивостями інтегралів Френеля, для випадків (i), (iv) і (v) отримуємо

$$x_{im}^2 + y_{im}^2 \rightarrow 0, \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (62)$$

Переходячи до випадку (ii), знаходимо

$$\begin{aligned}
x_{im}^2 + y_{im}^2 & = \int_0^1 \int_0^1 \cos(\lambda_{jm}t + \mu_{jm}t^2) \cos(\lambda_{jm}s + \mu_{jm}s^2) dt ds \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \sin(\lambda_{jm}t + \mu_{jm}t^2) \sin(\lambda_{jm}s + \mu_{jm}s^2) dt ds \\
& = \int_0^1 \int_0^1 \cos(\lambda_{jm}(t-s) + \mu_{jm}(t^2 - s^2)) dt ds \\
& \leq \left| \int_0^1 \int_0^1 \cos(\lambda_{jm}(t-s)) \cos(\mu_{jm}(t^2 - s^2)) dt ds \right| \\
& \quad + \left| \int_0^1 \int_0^1 \sin(\lambda_{jm}(t-s)) \sin(\mu_{jm}(t^2 - s^2)) dt ds \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 \cos^2(\lambda_{jm}(t-s)) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \int_0^1 \cos^2(\mu_{jm}(t^2-s^2)) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \int_0^1 \sin^2(\lambda_{jm}(t-s)) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \int_0^1 \sin^2(\mu_{jm}(t^2-s^2)) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 \cos^2(\lambda_{jm}(t-s)) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 \int_0^1 \sin^2(\mu_{jm}(t^2-s^2)) dt ds \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (63)
\end{aligned}$$

Застосовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність до 2-го доданку у (63), отримуємо

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 \sin^2(\mu_{jm}(t^2-s^2)) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Для 1-го доданку матимемо

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \int_0^1 \cos^2(\lambda_{jm}(t-s)) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \cos(2\lambda_{jm}(t-s)) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sin(2\lambda_{jm}t) - \sin(2\lambda_{jm}(t-1))}{2\lambda_{jm}} dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \cos(2\lambda_{jm})}{4\lambda_{jm}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \lambda_{jm}}{\lambda_{jm}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

тобто, для варіанту (ii)

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} (x_{jm}^2 + y_{jm}^2) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (64)$$

У випадку (iii) за вище згадану теоремою Лебега, а також застосовуючи нерівність Буняковського, матимемо

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} (x_{jm}^2 + y_{jm}^2) &= \left(\int_0^1 \cos(\lambda_j t + \mu_j t^2) dt \right)^2 + \left(\int_0^1 \sin(\lambda_j t + \mu_j t^2) dt \right)^2 \\
&\leq \int_0^1 \cos^2(\lambda_j t + \mu_j t^2) dt + \int_0^1 \sin^2(\lambda_j t + \mu_j t^2) dt = 1, \quad (65)
\end{aligned}$$

і рівність буде досягатися тоді і тільки тоді, коли для деяких сталих k_1, k_2

$$\cos(\lambda_j t + \mu_j t^2) = k_1, \quad \sin(\lambda_j t + \mu_j t^2) = k_2, \quad t \in [0, 1].$$

Однак, це неможливо, і тому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (x_{jm}^2 + y_{jm}^2) < 1. \quad (66)$$

Разом із (55), це означає, що для $j = \overline{1, N}$

$$\lambda_{jT} = T(\phi_{jT} - \phi_j^0), \quad \mu_{jT} = T^2(\psi_{jT} - \psi_j^0) \rightarrow 0 \text{ м.н., при } T \rightarrow \infty. \quad (67)$$

З співвідношень (57) та (67), очевидно, випливає, що

$$x_{jT} \rightarrow 1, \quad y_{jT} \rightarrow 0 \quad \text{м.н., при } T \rightarrow \infty, \quad j = \overline{1, N}.$$

Тоді з (48) також випливає, що

$$A_{jT} \rightarrow A_j^0, \quad B_{jT} \rightarrow B_j^0 \text{ м.н., при } T \rightarrow \infty, \quad j = \overline{1, N}. \quad (68)$$

■

Додаток А. Застосування теореми Іссерліса

Пронумеруємо множники під позначкою математичного сподівання в (12) зліва направо числами 1, 2, ..., 8 і розділимо всі 105 доданків з теореми Іссерліса на 3 категорії.

Перший набір складається з виразів, у яких усі чотири значення к.ф. містять $t - s$ під аргументом. Маємо 24 таких вирази. Їх можна знайти, наприклад, наступним чином. Позначимо через (ab) математичне сподівання добутку значень випадкового процесу ε , позначених номерами a та b у (12). Тоді матимемо

1. (15)(26)(37)(48) = $\underline{B(t-s)}B(t-s)B(t-s)B(t-s)$; (A1)
2. (15)(26)(38)(47) = $\underline{B(t-s)}B(t-s)B(t-s-v)B(t-s+v)$;
3. (15)(27)(36)(48) = $\underline{B(t-s)}B(t-s+v-u)B(t-s+u-v)B(t-s)$;
4. (15)(27)(38)(46) = $\underline{B(t-s)}B(t-s+v-u)B(t-s-v)B(t-s+u)$;
5. (15)(28)(36)(47) = $\underline{B(t-s)}B(t-s-u)B(t-s+u-v)B(t-s+v)$;
6. (15)(28)(37)(46) = $\underline{B(t-s)}B(t-s-u)B(t-s)B(t-s+u)$;
7. (16)(25)(37)(48) = $B(t-s-v)B(t-s+v)B(t-s)\underline{B(t-s)}$;
8. (16)(25)(38)(47) = $\underline{B(t-s-v)B(t-s+v)B(t-s-v)B(t-s+v)}$;
9. (16)(27)(35)(48) = $B(t-s-v)B(t-s+v-u)B(t-s+u)\underline{B(t-s)}$;
10. (16)(27)(38)(45) = $B(t-s-v)B(t-s+v-u)\underline{B(t-s-v)B(t-s+u+v)}$;
11. (16)(28)(35)(47) = $\underline{B(t-s-v)B(t-s-u)B(t-s+u)B(t-s+v)}$;
12. (16)(28)(37)(45) = $B(t-s-v)B(t-s-u)\underline{B(t-s)B(t-s+u+v)}$;
13. (17)(25)(36)(48) = $B(t-s-u)B(t-s+v)B(t-s+u-v)\underline{B(t-s)}$; (A2)
14. (17)(25)(38)(46) = $B(t-s-u)\underline{B(t-s+v)B(t-s-v)B(t-s+u)}$;

15. $(17)(26)(35)(48) = B(t-s-u)\underline{B(t-s)}B(t-s+u)B(t-s)$;
16. $(17)(26)(38)(45) = B(t-s-u)\underline{B(t-s)}B(t-s-v)B(t-s+u+v)$;
17. $(17)(28)(35)(46) = \underline{B(t-s-u)}B(t-s-u)\underline{B(t-s+u)}B(t-s+u)$;
18. $(17)(28)(36)(45) = \underline{B(t-s-u)}B(t-s-u)B(t-s+u-v)\underline{B(t-s+u+v)}$;
19. $(18)(25)(36)(47) = \underline{B(t-s-u-v)}\underline{B(t-s+v)}B(t-s+u-v)B(t-s+v)$;
20. $(18)(25)(37)(46) = B(t-s-u-v)B(t-s+v)\underline{B(t-s)}B(t-s+u)$;
21. $(18)(26)(35)(47) = B(t-s-u-v)\underline{B(t-s)}B(t-s+u)B(t-s+v)$;
22. $(18)(26)(37)(45) = B(t-s-u-v)\underline{B(t-s)}B(t-s)B(t-s+u+v)$;
23. $(18)(27)(35)(46) = \underline{B(t-s-u-v)}B(t-s+v-u)B(t-s+u)\underline{B(t-s+u)}$;
24. $(18)(27)(36)(45) = \underline{B(t-s-u-v)}B(t-s+v-u)B(t-s+u-v)$
 $\times \underline{B(t-s+u+v)}$.

Другий набір складається з добутоків, у яких 2 значення к.ф. містять $t-s$ під аргументом. Маємо 72 таких вирази, і вони можуть бути визначені, наприклад, використовуючи такі міркування. Загалом існує 6 математичних сподівань, утворених першими 4 множниками у (12)

(i) (12), (13), (14), (23), (24), (34),

і, відповідно, 6 математичних сподівань, що складаються з других 4 множників у (12)

(ii) (56), (57), (58), (67), (68), (78).

Кожен елемент у другому наборі є добутком одного значення к.ф. з (i) і одного з (ii), а також двох інших значень к.ф., отриманих шляхом взяття математичного сподівання від добутку процесів ε з номерами, що залишилися від першої четвірки, на значення ε з номерами, що залишилися від другої четвірки.

1-ша дюжина: (12)×... .

1. (12)(56)(37)(48) = $B(v)B(v)B(t-s)\underline{B(t-s)}$; (A3)
2. (12)(56)(38)(47) = $B(v)B(v)\underline{B(t-s-v)B(t-s+v)}$;
3. (12)(57)(36)(48) = $B(v)B(u)B(t-s+u-v)\underline{B(t-s)}$;
4. (12)(57)(38)(46) = $B(v)B(u)\underline{B(t-s-v)B(t-s+u)}$;
5. (12)(58)(36)(47) = $\underline{B(v)}B(u+v)B(t-s+u-v)B(t-s+v)$;
6. (12)(58)(37)(46) = $B(v)B(u+v)\underline{B(t-s)}B(t-s+u)$;
7. (12)(67)(35)(48) = $B(v)B(u-v)B(t-s+u)\underline{B(t-s)}$;
8. (12)(67)(38)(45) = $B(v)B(u-v)\underline{B(t-s-v)B(t-s+u+v)}$;
9. (12)(68)(35)(47) = $\underline{B(v)}B(u)B(t-s+u)B(t-s+v)$;
10. (12)(68)(37)(45) = $B(v)B(u)\underline{B(t-s)}B(t-s+u+v)$;
11. (12)(78)(35)(46) = $\underline{B(v)}B(v)B(t-s+u)B(t-s+u)$;
12. (12)(78)(36)(45) = $\underline{B(v)}B(v)B(t-s+u-v)B(t-s+u+v)$;

2-га дюжина: (13)×... .

13. (13)(56)(27)(48) = $B(u)B(v)B(t-s+v-u)\underline{B(t-s)}$; (A4)
14. (13)(56)(28)(47) = $B(u)B(v)\underline{B(t-s-u)B(t-s+v)}$;
15. (13)(57)(26)(48) = $B(u)B(u)B(t-s)\underline{B(t-s)}$;
16. (13)(57)(28)(46) = $B(u)B(u)\underline{B(t-s-u)B(t-s+u)}$;
17. (13)(58)(26)(47) = $B(u)B(u+v)\underline{B(t-s)}B(t-s+v)$;
18. (13)(58)(27)(46) = $B(u)\underline{B(u+v)}B(t-s+v-u)B(t-s+u)$;
19. (13)(67)(25)(48) = $B(u)B(u-v)B(t-s+v)\underline{B(t-s)}$;
20. (13)(67)(28)(45) = $B(u)B(u-v)\underline{B(t-s-u)B(t-s+u+v)}$;

$$21. (13)(68)(25)(47) = \underline{B(u)}B(u)B(t-s+v)B(t-s+v);$$

$$22. (13)(68)(27)(45) = \underline{B(u)}B(u)B(t-s+v-u)B(t-s+u+v);$$

$$23. (13)(78)(25)(46) = B(u)\underline{B(v)}B(t-s+v)B(t-s+u);$$

$$24. (13)(78)(26)(45) = B(u)B(v)\underline{B(t-s)}B(t-s+u+v);$$

3-тя дюжина: (14)×... .

$$25. (14)(56)(27)(38) = B(u+v)\underline{B(v)}B(t-s+v-u)B(t-s-v); \quad (A5)$$

$$26. (14)(56)(28)(37) = B(u+v)B(v)B(t-s-u)\underline{B(t-s)};$$

$$27. (14)(57)(26)(38) = B(u+v)B(u)\underline{B(t-s)}B(t-s-v);$$

$$28. (14)(57)(28)(36) = \underline{B(u+v)}B(u)B(t-s-u)B(t-s+u-v);$$

$$29. (14)(58)(26)(37) = B(u+v)B(u+v)B(t-s)\underline{B(t-s)};$$

$$30. (14)(58)(27)(36) = \underline{B(u+v)}B(u+v)B(t-s+v-u)B(t-s+u-v);$$

$$31. (14)(67)(25)(38) = B(u+v)B(u-v)\underline{B(t-s+v)}\underline{B(t-s-v)};$$

$$32. (14)(67)(28)(35) = B(u+v)B(u-v)\underline{B(t-s-u)}\underline{B(t-s+u)};$$

$$33. (14)(68)(25)(37) = B(u+v)B(u)B(t-s+v)\underline{B(t-s)};$$

$$34. (14)(68)(27)(35) = \underline{B(u+v)}B(u)B(t-s+v-u)B(t-s+u);$$

$$35. (14)(78)(25)(36) = B(u+v)\underline{B(v)}B(t-s+v)B(t-s+u-v);$$

$$36. (14)(78)(26)(35) = B(u+v)B(v)\underline{B(t-s)}B(t-s+u);$$

4-та дюжина: (23)×... .

$$37. (23)(56)(17)(48) = B(u-v)B(v)B(t-s-u)\underline{B(t-s)}; \quad (A6)$$

$$38. (23)(56)(18)(47) = B(u-v)B(v)\underline{B(t-s-u-v)}\underline{B(t-s+v)};$$

$$39. (23)(57)(16)(48) = B(u-v)B(u)B(t-s-v)\underline{B(t-s)};$$

$$40. (23)(57)(18)(46) = B(u-v)B(u)\underline{B(t-s-u-v)}\underline{B(t-s+u)};$$

$$41. (23)(58)(16)(47) = B(u-v)B(u+v)\underline{B(t-s-v)B(t-s+v)};$$

$$42. (23)(58)(17)(46) = B(u-v)B(u+v)\underline{B(t-s-u)B(t-s+u)};$$

$$43. (23)(67)(15)(48) = B(u-v)B(u-v)B(t-s)\underline{B(t-s)};$$

$$44. (23)(67)(18)(45) = B(u-v)B(u-v)\underline{B(t-s-u-v)B(t-s+u+v)};$$

$$45. (23)(68)(15)(47) = B(u-v)B(u)\underline{B(t-s)}B(t-s+v);$$

$$46. (23)(68)(17)(45) = B(u-v)B(u)\underline{B(t-s-u)B(t-s+u+v)};$$

$$47. (23)(78)(15)(46) = B(u-v)B(v)\underline{B(t-s)}B(t-s+u);$$

$$48. (23)(78)(16)(45) = B(u-v)B(v)\underline{B(t-s-v)B(t-s+u+v)};$$

5-та дюжина: (24)×... .

$$49. (24)(56)(17)(38) = B(u)\underline{B(v)}B(t-s-u)B(t-s-v); \quad (A7)$$

$$50. (24)(56)(18)(37) = B(u)B(v)B(t-s-u-v)\underline{B(t-s)};$$

$$51. (24)(57)(16)(38) = \underline{B(u)}B(u)B(t-s-v)B(t-s-v);$$

$$52. (24)(57)(18)(36) = \underline{B(u)}B(u)B(t-s-u-v)B(t-s+u-v);$$

$$53. (24)(58)(16)(37) = B(u)B(u+v)B(t-s-v)\underline{B(t-s)};$$

$$54. (24)(58)(17)(36) = B(u)\underline{B(u+v)}B(t-s-u)B(t-s+u-v);$$

$$55. (24)(67)(15)(38) = B(u)B(u-v)\underline{B(t-s)}B(t-s-v);$$

$$56. (24)(67)(18)(35) = B(u)B(u-v)\underline{B(t-s-u-v)B(t-s+u)};$$

$$57. (24)(68)(15)(37) = B(u)B(u)B(t-s)\underline{B(t-s)};$$

$$58. (24)(68)(17)(35) = B(u)B(u)\underline{B(t-s-u)B(t-s+u)};$$

$$59. (24)(78)(15)(36) = B(u)B(v)\underline{B(t-s)}B(t-s+u-v);$$

$$60. (24)(78)(16)(35) = B(u)B(v)\underline{B(t-s-v)B(t-s+u)};$$

6-та дюжина: (34)×... .

$$61. (34)(56)(17)(28) = \underline{B(v)}B(v)B(t-s-u)B(t-s-u); \quad (\text{A8})$$

$$62. (34)(56)(18)(27) = \underline{B(v)}B(v)B(t-s-u-v)B(t-s+v-u);$$

$$63. (34)(57)(16)(28) = \underline{B(v)}B(u)B(t-s-v)B(t-s-u);$$

$$64. (34)(57)(18)(26) = B(v)B(u)\underline{B(t-s-u-v)B(t-s+u)};$$

$$65. (34)(58)(16)(27) = \underline{B(v)}B(u+v)B(t-s-v)B(t-s+v-u);$$

$$66. (34)(58)(17)(26) = B(v)B(u+v)\underline{B(t-s-u)B(t-s+u)};$$

$$67. (34)(67)(15)(28) = B(v)B(u-v)\underline{B(t-s)}B(t-s-u);$$

$$68. (34)(67)(18)(25) = B(v)B(u-v)\underline{B(t-s-u-v)B(t-s+v)};$$

$$69. (34)(68)(15)(27) = B(v)B(u)\underline{B(t-s)}B(t-s+v-u);$$

$$70. (34)(68)(17)(25) = B(v)B(u)\underline{B(t-s-u)B(t-s+v)};$$

$$71. (34)(78)(15)(26) = B(v)B(v)B(t-s)\underline{B(t-s)};$$

$$72. (34)(78)(16)(25) = B(v)B(v)\underline{B(t-s-v)B(t-s+v)}.$$

Третій набір складається з добутоків, які не містять $t - s$ під аргументом к.ф. Маємо 9 таких добутоків, і вони можуть бути визначені як доданки після формального множення двох сум

$$((12)(34) + (13)(24) + (14)(23))((56)(78) + (57)(68) + (58)(67)),$$

тобто,

$$1. (12)(34)(56)(78) = \underline{B(v)}B(v)B(v)B(v); \quad (\text{A9})$$

$$2. (12)(34)(57)(68) = \underline{B(v)}B(v)B(u)B(u);$$

$$3. (12)(34)(58)(67) = \underline{B(v)}B(v)B(u+v)B(u-v);$$

$$4. (13)(24)(56)(78) = B(u)B(u)\underline{B(v)}B(v);$$

5. $(13)(24)(57)(68) = \underline{B(u)}B(u)B(u)B(u);$
6. $(13)(24)(58)(67) = B(u)B(u)\underline{B(u+v)}B(u-v);$
7. $(14)(23)(56)(78) = B(u+v)B(u-v)\underline{B(v)}B(v);$
8. $(14)(23)(57)(68) = \underline{B(u+v)}B(u-v)B(u)B(u);$
9. $(14)(23)(58)(67) = \underline{B(u+v)}B(u-v)B(u+v)B(u-v).$

Висновки

У магістерській дисертації доведено сильну консистентність ОНК параметрів чирпованого сигналу у моделі з неперервним часом. Для цього було встановлено вимоги до параметричних множин, в яких шукається оцінка, що дозволяють належним чином розрізняти параметри ψ . Припускається також, що випадковий шум є вибірково неперервним гауссівським стаціонарним випадковим процесом, к.ф. якого задовольняє умовам, які відповідають сильній або слабкій залежності випадкового шуму.

Доведенню сильної консистентності передують доведення рівномірного посиленого закону великих чисел для заданого випадкового шуму, зваженого тригонометричними функціями від квадратичного аргументу, що є важливим кроком для отримання результату про консистентність ОНК параметрів досліджуваної моделі.

Природним напрямком продовження дослідження є доведення асимптотичної нормальності ОНК, а також ускладнення моделі на випадок, коли під аргументами синуса та косинуса будуть стояти поліноми довільного порядку, де коефіцієнти поліномів будуть параметрами моделі.

Список використаних джерел

- [1] M. Artis, M. Hoffmann, D. Nachane, and J. Toro, “The Detection of Hidden Periodicities: A Comparison of Alternative Methods,” *Economics Working Papers* No ECO2004/10, European University Institute, San Domenico, Italy, 2004.
- [2] A. V. Ivanov, “Consistency of the Least Squares Estimator of the Amplitudes and Angular Frequencies of a Sum of Harmonic Oscillations in Model with Long-Range Dependence,” *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, vol. 80, pp. 61–69, 2010.
- [3] B. G. Quinn and E. J. Hannan, *The Estimation and Tracking of Frequency*. Cambridge University Press, 2012.
- [4] A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina, and B. M. Zhurakovsky, “Estimation of Harmonic Component in Regression with Cyclically Dependent Errors,” *Statistics: A journal of Theoretical and Applied Statistics*, vol. 49, no. 1, pp. 156–186, 2015.
- [5] C. R. Rao, L. C. Zhao, and B. Zhou, “Maximum Likelihood Estimation of 2-D Superimposed Exponential,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, pp. 795–802, 1994.
- [6] D. Kundu and A. Mitra, “Asymptotic Properties of the Least Squares Estimates of 2-D Exponential Signals,” *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. 7, no. 2, pp. 135–150, 1996.
- [7] H. Zhang and V. Mandrekar, “Estimation of Hidden Frequencies for 2D Stationary Processes,” *Journal of Time Series Analysis*, vol. 22, no. 5, pp. 613–629, 2001.
- [8] D. Kundu and S. Nandi, “Determination of Discrete Spectrum in a Random Field,” *Statistica Neerlandica*, vol. 57, no. 2, pp. 258–283, 2003.
- [9] S. Nandi, D. Kundu, and R. K. Srivastava, “Noise Space Decomposition Method for Two-Dimensional Sinusoidal Model,” *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. 58, pp. 147–161, 2013.

- [10] A. V. Ivanov and O. V. Malyar, “Consistency of the Least Squares Estimators of Parameters of the Texture Surface Sinusoidal Model,” *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, vol. 97, pp. 73–84, 2018.
- [11] A. V. Ivanov and O. V. Lyman, “The Asymptotic Normality for the Least Squares Estimator of Parameters in a Two Dimensional Sinusoidal Model of Observations,” *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, vol. 100, pp. 107–131, 2020.
- [12] D. R. Brillinger, “Regression for Randomly Sampled Spatial Series: the Trigonometric Case,” *Journal of Applied Probability*, vol. Special Vol., 23A, pp. 275–289, 1986.
- [13] A. V. Ivanov and I. M. Savych, “On the Least Squares Estimators Asymptotic Normality of the Multivariate Symmetric Textured Surface Parameters,” *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, vol. 105, pp. 151–169, 2021.
- [14] A. V. Ivanov and O. V. Dykyi, “Consistency of LSE for the Many-Dimensional Symmetric Textured Surface Parameters,” *Modern Stochastics: Theory and Application*, 2023, (До друку).
- [15] C. E. Cook and M. Bernfeld, *Radar Signals: an Introduction to Theory and Applications*. Academic Press, 1967.
- [16] H. Cramer and M. R. Leadbetter, *Stationary and Related Stochastic Processes*. Wiley, 1967.
- [17] Y. Yang, Z. K. Peng, X. J. Dong, W. Zhang, and G. Meng, “Application of Parametrized Time-frequency Analysis on Multicomponent Frequency Modulated Signals,” *IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement*, vol. 63, no. 12, pp. 3169–3180, 2014.
- [18] I. Djurovic, “Estimation of Sinusoidal Frequency Modulated Signal Parameters in High-Noise Environment,” *Signal Image and Video Processing*, vol. 11, pp. 1537–1541, 2017.

- [19] X. Jiang and S. Wu, “A Novel Parameter Estimation for Hyperbolic Frequency Modulated Signals Using Group Delay,” *Digital Signal Processing*, vol. 116, no. 4, pp. 103–114, 2021.
- [20] E. Moradi and R. Mohseni, “Parameters Estimation of Linear Frequency Modulated Signal Using Kalman Filter and its Extendent Versions,” *Signal Image and Video Processing*, vol. 17, pp. 553–561, 2023.
- [21] S. Nandi and D. Kundu, “Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of the Parameters of the Chirp Signals,” *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, vol. 56, pp. 529–544, 2004.
- [22] D. Kundu and S. Nandi, “Parameter Estimation of Chirp Signals in Presence of Stationary Noise,” *Statist Sinica*, vol. 18, pp. 187–202, 2008.
- [23] A. Lahiri, *Estimators of Parameters of Chirp Signals and their Properties*. Ph. D thesis, Indian Institute of Technology, Kanpur, India, 2011.
- [24] A. Lahiri, D. Kundu, and A. Mitra, “Estimating the Parameters of Multiple Chirp Signals,” *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 139, pp. 189–206, 2015.
- [25] S. Nandi and D. Kundu, *Statistical Signal Processing: Frequency Estimation*. No. 2nd edition, Springer, 2020.
- [26] D. Kundu and S. Nandi, “On Chirp and some Related Signal Analysis: a Brief Review and some New Results,” *Sankhya A*, vol. 83, no. 2, pp. 844–890, 2021.
- [27] R. Grover, D. Kundu, and A. Mitra, “Asymptotic Properties of Least Squares Estimators and Sequential Least Squares Estimators of a Chirp-Like Signal Model Parameters,” *Circuits Systems and Signal Processing*, vol. 40, no. 11, pp. 5421–5465, 2021.
- [28] A. V. Ivanov and V. V. Hladun, “Consistency of the LSE for Chirp Signal Parameters in the Models with Strongly and Weakly Dependent Noise,” *Austrian Journal of Statistics*, 2023, (У друці).
- [29] U. Grenander, *Abstract Inference*. Wiley, New York, 1981.

- [30] J. M. Angulo, M. Y. Kelbert, N. N. Leonenko, and M. D. Ruiz-Medina, “Spatiotemporal Random Fields Associated with Stochastic Fractional Helmholtz and Heat Equations,” *Stoch. Environ. Res. Risk. Assess.*, vol. 22, no. suppl. 1, pp. 3–13, 2008.
- [31] A. V. Ivanov and N. N. Leonenko, *Statistical Analysis of Random Fields*. Kluwer AP, 1989.
- [32] A. V. Ivanov, *Asymptotic Theory of Nonlinear Regression*. Kluwer AP, 1997.
- [33] J. V. Michalovicz, J. M. Nichols, F. Bucholtz, and C. C. Olson, “An Isserlis’ Theorem for Mixed Gaussian Variables: Application to the Auto-Bispectral Density,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 136, no. 1, pp. 89–102, 2009.
- [34] В. В. Гладун, О. В. Іванов, “Консистентність ОНК амплітуд та кутових частот чирпованого сигналу”, XI Всеукраїнська конференція молодих математиків, 11-13 травня 2023, Київ.