

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Фізико-математичний факультет**

**Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей**

«На правах рукопису»  
УДК 517.9 : 534

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ Олег КЛЕСОВ

«14» травня 2021 р.

**Магістерська дисертація**

**на здобуття ступеня магістра**

**за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова  
математика»**

**зі спеціальності 111 «Математика»**

**на тему: «Узагальнена переміжність в системі Лоренца»**

Виконав:

студент VI курсу, групи ОМ-11мн  
Горчаков Олексій Олександрович \_\_\_\_\_

Науковий керівник:

Доктор фізико-математичних наук, професор  
Швець Олександр Юрійович \_\_\_\_\_

Рецензент:

Доктор фізико-математичних наук, професор  
Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного  
аналізу»  
Данилов Валерій Якович \_\_\_\_\_

Засвідчую, що у цій магістерській  
дисертації немає запозичень з праць  
інших авторів без відповідних  
посилань.

Студент \_\_\_\_\_

Київ – 2023 року

Національний технічний університет України  
"Київський політехнічний університет імені Ігоря  
Сікорського"

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти - другий (магістерський)

Спеціальність - 111 "Математика"

Освітньо-наукова програма "Страхова та фінансова математика"

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ Олег Клесов

"\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_р.

**ЗАВДАННЯ**

на магістерську дисертацію

**Горчакову Олексію**

1. Тема дисертації "Узагальнена переміжність в системі Лоренца науковий керівник дисертації Швець Олександр Юрійович, доктор фізико-математичних наук, професор, затверджені наказом по університету від "\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_р. №\_\_\_\_\_.
2. Термін подання студентом дисертації \_\_\_\_\_
3. Об'єкт дослідження - Система диференціальних рівнянь Лоренца
4. Предмет дослідження - Побудова та дослідження регулярних та хаотичні атракторів системи Лоренца
5. Перелік завдань, які потрібно виконати:
  - 5.1 Дослідити біфуркації в системі Лоренца
  - 5.2 Побудувати графіки залежності ляпуновських показників від біфуркаційного параметру

5.3 Побудувати та проаналізувати фазопараметричні характеристики системи

5.4 Виявити симетрії граничних циклів та хаотичних атракторів

5.5 Дослідити сценарії переходу до хаосу

5.6 Знайти переходи "хаос-хаос" за сценарієм узагальненої перемінливості

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу - Дослідження проведені за пп. 5.1 - 5.6 будуть висвітлені на різноманітних графіках.

7. Орієнтовний перелік публікацій - Матеріали проведених досліджень стануть основою для підготовки подання публікації до закордонного видання, реферованого у наукометричній базі Scopus.

8. Дата видачі завдання - 01.01.2023р.

### Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Розробка програмного забезпечення для адаптації основних методів сучасної хаотичної динаміки до дослідження системи Лоренца	01.01.2023 – 05.02.2023	Виконано
2.	Дослідження біфуркацій в системі при великих значеннях параметра $g$	05.02.2023 – 03.03.2023	Виконано
3.	Побудова графіків ЛХП і фазо-параметричних характеристик	03.03.2023 – 18.03.2023	Виконано
4.	Дослідження фазових портретів та перерізів Пуанкаре	18.03.2023 – 05.04.2023	Виконано
5.	Опис основних сценаріїв переходу до хаосу	05.04.2023 – 21.04.2023	Виконано
6.	Оформлення магістерської дисертації	21.04.2023 – 02.05.2023	Виконано

Студент  
Науковий керівник

Олексій Горчаков  
Олександр Швець

# Реферат

Магістерська дисертація містить 54 сторінки, 58 рисунків та 30 посилань.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню системи Лоренца, руглярних, хаотичних режимів та біфуркацій у ній.

Актуальність роботи полягає в тому, що об'єкт дослідження - система Лоренца, класична система диференціальних рівнянь, яка є одною з найпопулярніших динамічних систем для теоретичного дослідження фахівцями різних профілів.

Метою дисертації є виявлення та опис сценарію узагальненої переміжності та симетричних атракторів і їх біфуркацій в системі Лоренца. При виконанні роботи використовувались різноманітні чисельні методи хаотичної динаміки і комп'ютерної візуалізації отриманих результатів.

Новизна отриманих результатів полягає в виявленні нетипового сценарію переходу до хаосу в системі Лоренца і побудова та опис симетричних атракторів і їх біфуркацій.

Ключові слова: детермінований хаос, симетричний хаотичний атрактор, сценарії переходу до хаосу, узагальнена переміжність.

# Abstract

The master's thesis contains 52 pages, 58 figures and references.

The dissertation work is devoted to the study of the Lorenz system: regular, chaotic regimes and bifurcations.

The relevance of the work lies in the fact that the object of research is the Lorenz system, a classic system of differential equations, which is one of the most popular dynamic systems for theoretical research by specialists of various profiles.

The aim of the dissertation is to identify and describe the scenario of generalized intermittency and symmetric attractors and their bifurcations in the Lorenz system

Various numerical methods of chaotic dynamics and computer visualization of the obtained results were used in the performance of the work.

The novelty of the obtained results is the discovery of an atypical scenario of the transition to chaos in the Lorenz system and the construction and description of symmetric attractors and their bifurcations.

Key words: deterministic chaos, symmetric chaotic attractor, scenarios of transition to chaos, generalized intermittency.

# Зміст

Вступ	8
<b>1 Загальні відомості з теорії динамічних систем</b>	<b>9</b>
1.1 Динамічна система	9
1.2 Граничні множини динамічних систем	10
1.3 Стійкість траєкторій	11
1.4 Ляпуновські характеристичні показники	13
1.5 Інваріантна міра	15
1.6 Переріз Пуанкаре	16
1.7 Фазопараметрична характеристика	17
<b>2 Переміжність у системі Лоренца</b>	<b>21</b>
2.1 Переміжність	21
2.2 Переміжність в системі Лоренца	24
<b>3 Система Лоренца</b>	<b>28</b>
<b>4 Біфуркації системи Лоренца та сценарії переходу до хаосу</b>	<b>31</b>
4.1 Перше вікно періодичності	32
4.2 Друге вікно періодичності	40
4.3 Інший параметр	44

# Вступ

В цій роботі вивчається нелінійна система диференціальних рівнянь, відома як система Лоренца

Ця система вперше була розглянена в 1963 році америанським дослідником Едвардом Нортонем Лоренцом[1], який займався питаннями метеорології, зокрема прогнозуванням погоди. В журналі "Journal of Atmospheric Sciences" він опублікував статтю "Deterministic Nonperiodic Flow". Вона була присвячена дослідженню нелінійної системи диференціальних рівнянь, яка була отримана при аналізі задачі про конвекцію в шарі рідини, що підігрівається знизу. При чисельному аналізі цієї задачі на комп'ютері була встановлена наявність в цій детермінованій системі усталеного хаотичного режиму. Цю роботу можна вважати відкриттям детермінованого хаосу в фізичній динамічній системі. Згодом з'ясувалося, що ця система може бути застосована не тільки для задачі про конвекцію рідини, а й для опису динаміки багатьох інших фізичних систем. Отже модель Лоренца має дуже широкую область застосування

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(r - z) - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

тут  $x, y, z$  - деякі динамічні змінні, зміст яких змінюється від задачі до задачі. Наприклад, для задачі про конвекцію в шарі рідини:  $x$  - характеризує швидкість обертання конвекційних валів, а  $y, z$  - відповідають за розподіл температур по горизонталі і вертикалі відповідно.  $b, \sigma, r$  - деякі параметри. В задачі про конвекцію параметр  $b$  визначається геометрією конвекційної комірки,  $\sigma$  - число Прандтля, що є відношенням кінематичної в'язкості до коефіцієнта температу-



ропровідності,  $r$  - число Релея, безрозмірна величини, що визначає поведнку рідини під впливом температури[5].

Сценарії переходу до хаосу досліджувались різними науковцями. Початком досліджень з цієї теми можна вважати роботи М. Фейгенбаума[12,13] , в яких було описано та детально досліджено послідовність біфуркацій подвоєння періоду, внаслідок якої утворюється хаотичний атрактор. У 1980 році французькими дослідниками П. Манневілем і І. Помо[14,15] було описано сценарій переходу до хаосу через переміжність в системі Лоренца. Далі в роботах О.Ю. Швеця та його учнів[16-18,20-25]: С.В. Донецького, В.О. Сіренка та інших в різних неідеальних динамічних системах було виявлено та описано перехід "хаотичний атрактор-хаотичний атрактор"через сценарій, що отримав назву узагальненої переміжності.

В цій роботі за допомогою різноманітних, переважно чисельних методів досліджувалися граничні множини цієї динамічної системи, їх біфуркації, сценарії переходу до детермінованого хаосу. Було встановлено, що в цій системі реалізується перехід до хаосу через сценарій узагальненої переміжності

# Розділ 1

## Загальні відомості з теорії динамічних систем

### 1.1 Динамічна система

[5,6,7] **Означення 1.** Динамічною системою називається об'єкт, що складається з 3 компонентів: 1. Метричного простору  $D$ , який називається фазовим простором

2. Часу  $t$ , який може бути неперервним, тобто належати множині дійсних чисел або дискретним, тобто належати множині цілих або натуральних чисел

3. Оператора еволюції, тобто відображення будь-якої точки в метричному просторі  $D$  і будь-якого значення часу  $t$  в однозначно визначений стан  $\phi(t, x) \in D$

Спосіб задання оператора еволюції може відрізнитися. Він може мати вигляд диференціального або інтегрального перетворення, дискретного відображення, марковського ланцюга й т.і.

**Означення 2.** Граничною множиною динамічної системи на-

зивається така множина  $K \in D$ , що  $\forall k, t$

$$\phi(t, k) \in K \quad (1.1)$$

де  $k$  - довільна точка множини  $K$

**Означення 3.** Динамічна система називається дисипативною, якщо  $\forall V \in D$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(\phi(t, V)) = 0 \quad (1.2)$$

де  $\mu$  - міра в просторі  $D$ ,  $\phi(t, V)$  - сукупність всіх траєкторій, що починаються з множини  $V$

**Означення 4.** Гранична множина  $K$  називається аттрактором (притягувальною множиною), якщо

$$\exists \text{ відкрита множина } B \supset K: \forall x \in B \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(K, \phi(t, x)) = 0$$

де  $\rho$  - метрика в просторі  $D$  Множина  $B$  тоді називається басейном притягання аттрактора  $K$ .

## 1.2 Граничні множини динамічних систем

Для дисипативних динамічних систем існують різні типи притягувальних граничних множин. Зокрема:

1. Нерухома точка. Точка  $x$  називається нерухомою точкою динамічної системи з оператором еволюції  $\phi$ , якщо  $\forall t : \phi(x, t) = x$ .

2. Граничний цикл. Це періодична, замкнена траєкторія в фазовому просторі.

3. Квазіперіодичні аттрактори. Тороїдальні поверхні в фазовому просторі

Ці три типи аттракторів називаються регулярними. Їм відповідає повністю передбачуваний рух зображальної точки у фазовому просторі.

Але виявляється, що бувають і інші аттрактори в динамічних системах. Рух зображальної точки до таких аттракторів відбувається по складній траєкторії, вигляд якої сильно залежить від початкових умов і через це є принципово непередбачуваним. Однак на відміну від класичних випадкових процесів рух по цим траєкторіям є повністю детермінованим і йому притаманні деякі чіткі якісні і кількісні характеристики, тому такий тип динаміки здобув назву "детермінований хаос".

### 1.3 Стійкість траєкторій

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_n = X_n(t, x) \quad (1.3)$$

Припустимо, що праві частини рівнянь є аналітичними функціями. Тоді ця система задовільняє умовам теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Розглянемо, тоді, деякий цілком визначений розв'язок цієї системи.

$$x_n = f_n(t) \quad (1.4)$$

що задовільняє початковим умовам

$$x_{n0} = f_{n0}(t_0) \quad (1.5)$$

Цьому розв'язку відповідає деякий рух системи, який ми будемо називати незбуреним рухом. Тепер трохи змінимо початкові умови (5), надав їм малі збурення

$$x_{n0} = f_{n0}(t_0) + \varepsilon_n \quad (1.6)$$

Рух системи, який відповідає цьому розв'язку будемо називати збу-  
 реним рухом, а величини  $\varepsilon_n$  - збуерннями. Позначимо значення змін-  
 них у незбуреному русі через  $y_i(t)$ , а у збуреному русі  $f_n(t)$  і скла-  
 демо різницю між ними:

$$x_i = y_i(t) - f_n(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.7)$$

Ці змінні будемо називати відхиленнями або варіаціями. Якщо всі  
 варіації дорівнюють нулю, то незбурений руз співпадає із збуреним.  
 У фазовому просторі незбуреному руху буже відповідати нерухома  
 точка в початку координат. Якщо для як завгодно малого числа  
 $\varepsilon > 0$  можна знайти число  $\delta > 0$ , що при всіх збуреннях  $x_0$ , які  
 задовольняють умові:

$$\|x_0\| < \delta \quad (1.8)$$

і при всіх  $t > t_0$  буде виконуватися умова

$$\|x\| < \varepsilon \quad (1.9)$$

Тоді такий незбурений рух називається стійким за Ляпуновим. Якщо  
 існує таке збурення, що умова (8) не виконується, то такий рух на-  
 зивається не стійким за Ляпуновим. Геометрично стійкість руху за  
 Ляпуновим означає, що близькі траєкторії залишаються близькими  
 на довільних проміжках часу.

**Означення 5.** *Розв'язок  $(x_0, t)$  називається стійким за Лагран-  
 жем, якщо*

$$\exists M : \forall t > 0 \|(x_0, t)\| < M \quad (1.10)$$

Тобто траєкторія завжди залишається всередині деякої сфери раді-  
 уса  $M$

## 1.4 Ляпуновські характеристичні показники

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (3). Нехай  $x(t)$  незбурена траєкторія цієї системи. Далі розглянемо траєкторію  $y(t) = x(t) + \tilde{x}(t)$ . Цю траєкторію назвемо збуреною. Тоді еволюція малого збурення буде описуватися рівнянням першого наближення

$$\dot{\tilde{x}} = A(t)\tilde{x} \quad (1.11)$$

де  $A$  матриця, що має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial X_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Тоді для системи (11) має місце теорема

### Теорема Ляпунова.

Нехай існує така константа  $M$ , що для всіх елементів  $A_{ij}$  матриці  $A$  і для довільного  $T$ ,

$$\frac{1}{T} \int_0^T |A_{ij}| dt < M \quad (1.13)$$

Тоді

1. Для будь-якого розв'язку  $\tilde{x}(t)$  рівняння (11) існує ляпуновський характеристичний показник - дійсне число, яке визначається формулою

$$\lambda_{\tilde{x}(t)} = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|\tilde{x}(T)\| \quad (1.14)$$

2. При множенні на константу ляпуновський показник не змінюється

$$\lambda_{C\tilde{x}(t)} = \lambda_{\tilde{x}(t)}$$

3. Ляпуновський показник лінійної комбінації розв'язків не перевищує найбільшого з показників цих двох розв'язків

$$\lambda_{C_1\tilde{x}_1(t)+C_2\tilde{x}_2(t)} \leq \max(\lambda_{\tilde{x}_1(t)}, \lambda_{\tilde{x}_2(t)})$$

4. Існує  $n$  лінійно незалежних розв'язків  $\tilde{x}_i(t)$  (фундаментальна система розв'язків) рівняння (11), яким відповідає  $n$  ляпуновських характеристичних показників, які нумеруються в порядку спадання  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Набір цих чисел називається спектром ляпуновських характеристичних показників (ЛХП). Найбільше з цих чисел  $\lambda_1$  називається старшим ЛХП. Тепер повернемося до розгляду вихідної нелінійної системи (3). Для кожної траєкторії  $x(t)$  система першого наближення (11) дає цілком визначений спектр ЛХП. Присутність в цьому спектрі показника  $\lambda$  означає, що існує таке збурення вихідної траєкторії, яке еволюціонує в часі у лінійному наближенні, як  $e^{\lambda t}$ . Таким чином присутність в спектрі хоча б одного додатного ЛХП означає нестійкість цієї траєкторії. Якщо ж всі показники від'ємні, то це свідчить про асимптотичну стійкість розглядової траєкторії.

Спектр ЛХП атрактора має задовольняти наступним умовам:

1. Сума ЛХП має бути від'ємна

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$$

Це умова дисипативності, завдяки якій атрактор є притягувальною граничною множиною нульової міри у фазовому просторі.

2. В атрактора, відмінного від положення рівноваги, обов'язково по-

винен бути хоча б один нульовий показник.

## 1.5 Інваріантна міра

Розглянемо в фазовому просторі ансамбль дисипативних динамічних систем. Ці системи задаватимуться системою диференціальних рівнянь у векторному вигляді

$$\dot{x} = X(x)$$

Представники ансамблю відрізняються лише початковими умовами. Нехай початкова точка знаходиться в басейні притягання певного атрактора. Для області  $D$  фазового простору визначимо міру  $\mu(D)$  наступним чином:

$$\mu(D) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau(D, x_0, T)}{T}$$

де  $x_0$  початкова точка траєкторії,  $\tau(D, x_0, T)$  - час знаходження зображальної точки в області  $D$  за проміжок часу  $T$ .

Якщо означена в такий спосіб міра виявляється однаковою при майже всіх значеннях початкових значеннях така міра називається інваріантною мірою.

Розглянемо тепер питання чисельної побудови розподілу такої міри. Спочатку чисельно будується необхідна траєкторія і записуємо в пам'ять комп'ютера масив значень фазових координат. Послідовно виводимо на екран отримані точки, при чому при попаданні в певну область монітору їх колір змінюється пропорційно їх кількості. При достатньо великій кількості підрахованих координат ми отримаємо деяку проекцію фазового портрету, одні області якої зафарбовані більш яскраво, інші - менш яскраво. Яскрава частина відповідає областям, де зображальна точка проводить багато часу,



менш яскраві - де менше часу.

## 1.6 Переріз Пуанкаре

Розглянемо динамічну систему з неперервним часом, динаміка якої описується деякими диференціальними рівняннями. Обмежимося розгляданням лише випадку системи із тривимірним фазовим простором, оскільки саме така розмірність системи Лоренца, що розглядається в даній роботі. Маємо систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, y, z) \\ \dot{y} &= f_2(x, y, z) \\ \dot{z} &= f_3(x, y, z)\end{aligned}$$

Розглянемо деякий роза'язок цієї системи, йому відповідає деяка траекторія  $\Gamma$  у фазовому просторі. Помітимо тепер деяку площину  $S$ , рівняння якої має вигляд

$$S(x, y, z) = 0$$

Вибір такої площини досить довільний, однак вона має бути розташована так, що траекторія багаторазово перетинала її і дотик до площини був неможливий (трансверсальний перетин). Така площина називається січної Пуанкаре відповідної траекторії.

Позначимо точки перетину траекторії  $\Gamma$  через  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Отримана множина точок  $\{\alpha_n\}$  називається перерізом Пуанкаре для траекторії  $\Gamma$ .

Переріз Пуанкаре також породжує дискретне відображення, яке ставить у відповідність будь-якій точці  $\alpha_n$  перерізу Пуанкаре наступну точку  $\alpha_{n+1}$ . Такий закон відповідності між попередньої та наступною точками перерізу називається відображенням Пуанкаре. Для

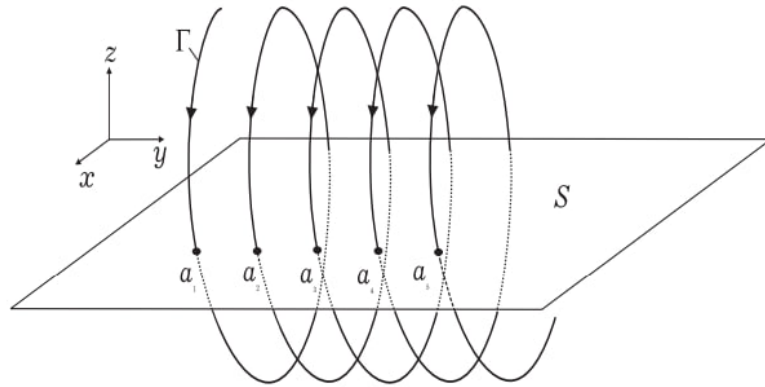


Рис. 1.1: Переріз Пуанкаре

розглянутого тривимірного випадку це відображення має розмірність 2 та вигляд

$$x_{n+1} = F_1(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = F_2(x_n, y_n)$$

Таким чином задача вивчення вихідної динамічної системи може бути зведена до задачі вивчення відображення Пуанкаре, що має розмірність на одиницю менше, ніж розмірність вихідної системи.

## 1.7 Фазопараметрична характеристика

При чисельному дослідженні біфуркацій нелінійних динамічних систем часто виявляється дуже зручно використовувати фазопараметричні характеристики. Така діаграма будується на основі перерізу Пуанкаре, по осі абсцис ми будемо відкладати значення біфуркаційного параметру. А по осі ординат відкладатимемо одну з координат точок перерізу Пуанкаре. На такій діаграмі так само, як і на перерізі або відображенні Пуанкаре граничні цикли будуть виглядати як окремі точки, а хаотичні атрактори - як суцільні лінії. Але тут ми маємо змогу спостерігати біфуркації атракторів, сценарії переходу

до хаосу і т.і.

Розглянемо використання фазопараметричної характеристики для дослідження динаміки на прикладі системи Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(r - z) - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

Розглянемо інтервал зміни параметру  $146 < r < 149$ . На рисунку зображена фазопараметрична характеристика. По осі абсцис відкладено значення біфуркаційного параметру, а по осі ординат - значення координати  $y$  точок перерізу Пуанкаре площиною  $z = 170$ . На цій

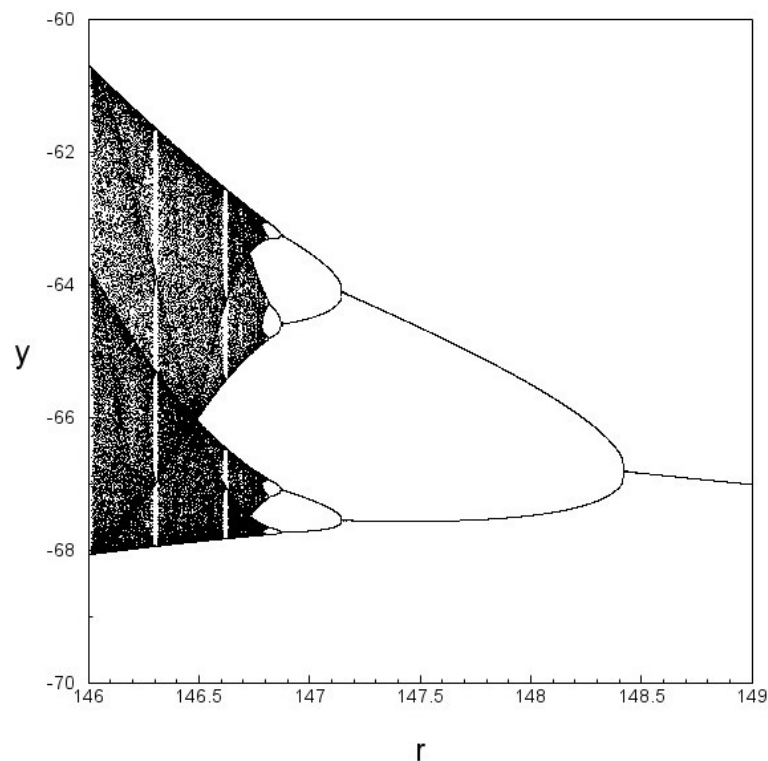


Рис. 1.2: Фрагмент фазопараметричної характеристики

діаграмі видно, що при  $r = 149$  траєкторія перетинає січну площину лише лише в одній точці, тобто маємо граничний цикл (насправді

точок перетину більше, на рисунку вирізано фрагмент характеристики, але якісно картина від цього не змінюється). При зменшенні параметру можна бачити як лінія "розщеплюється" на дві і при  $r = 148$  в системі все ще спостерігається граничний цикл, але вже вдвічі більшого періоду. Далі можна бачити, як лінія розщеплюється ще багато раз, після чого стає суцільною лінією на рисунку наведено фазові портрети, які ілюструють наведені вище міркування.

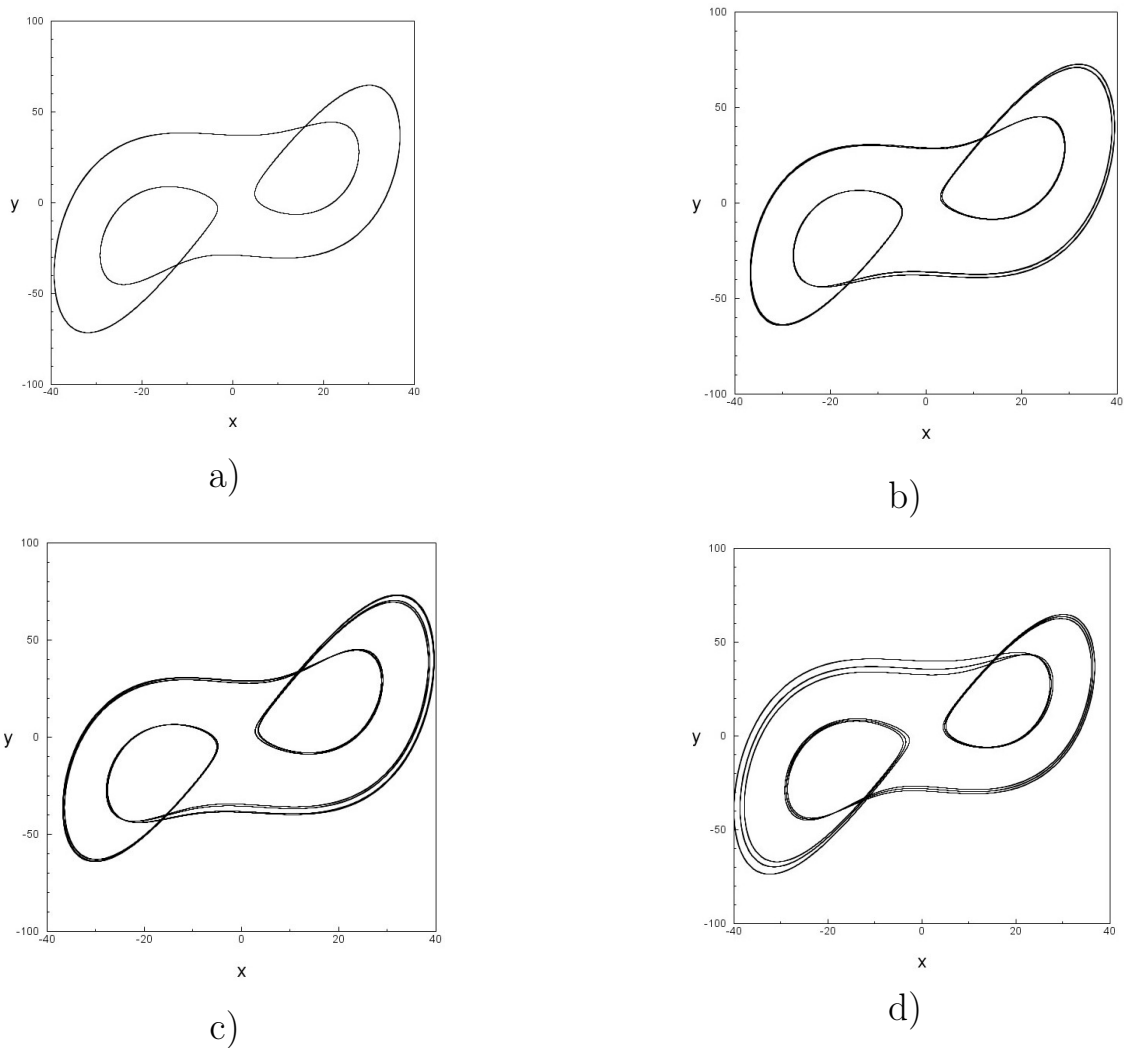


Рис. 1.3: Проекції фазових портретів: а)  $r = 149$ , б)  $r = 148$ , в)  $r = 147$ , д)  $r = 146$ .

Такий каскад біфуркацій подвоєння періоду, який завершується появою хаотичного атрактора називається сценарієм Фейгенбаума.

Він є типовим для багатьох нелінійних динамічних систем, зокрема, як ще буде показано, для системи Лоренца.

## Розділ 2

# Переміжність у системі Лоренца

### 2.1 Переміжність

Розглянемо дискретне відображення[5]:

$$x' = \epsilon + x + x^2 \quad (2.1)$$

де  $\epsilon$  параметр. При від'ємних значеннях параметру у цього відображення є дві нерухомі точки. Коли  $\epsilon = 0$  вони зливаються в одну, а при подальшому збільшенні параметру зникають і на їх місці утворюється коридор. При малих додатніх значеннях параметру проходження через коридор займає велику кількість кроків, а саме значення  $x$  змінюється дуже слабо. І це дозволяє перейти від дискретного рівняння до диференціального.

$$\frac{x' - x}{\Delta t} \simeq \frac{dx}{dt} \quad (2.2)$$

$\Delta t = 1$  Тоді рівняння переписеться

$$\dot{x} = \epsilon + x^2 \quad (2.3)$$

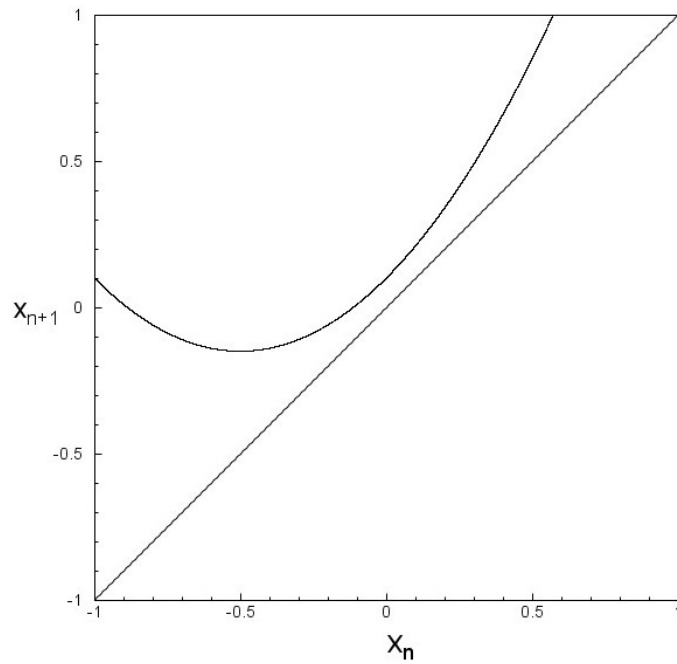


Рис. 2.1:

При  $\epsilon = 0$  це рівняння легко інтегрується

$$\frac{dx}{x^2} = dt$$

$$-\frac{1}{x} = C + t$$

$$x = -\frac{1}{C + t}$$

З урахуванням початкових умов маємо  $C = -\frac{1}{x_0}$

$$x = -\frac{x_0}{1 - tx_0} = F_t(x_0) \quad (2.4)$$

Ця функція визначає оператор еволюції за час  $t$ . Нехай тепер  $\epsilon > 0$ , тоді маємо

$$\int \frac{dx}{\epsilon + x^2} = \int dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \arctan\left(x \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right) = t + C$$

Врахувавши, початкові умови маємо

$$x(t) = \frac{x_0 + \sqrt{\epsilon} \tan(t\sqrt{\epsilon})}{1 - x_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \tan(t\sqrt{\epsilon})} = F_t(x_0, \epsilon)$$

Оскільки нас цікавить вивчення цього відображення для малих значень параметру, то ми можемо розкласти цю функцію в ряд Тейлора по степенях  $\epsilon$

$$F_t(x, \epsilon) = \frac{x}{1 - x\tau} + \epsilon\tau \frac{1 - x\tau + x^2\tau^2/3}{(1 - x\tau)^2} + O(\epsilon^2) = x'$$

Тепер відкинемо доданки вищих порядків малості і введемо заміну  $x = \frac{X}{\tau}$ . Маємо

$$X' = \frac{X}{1 - X} + \epsilon\tau^2 \frac{1 - X + X^2/3}{(1 - X)^2}$$

Тут ми бачимо як залежить значення змінної від проміжку часу  $\tau$  та величини коридору  $\epsilon$ . Видно, що це значення залежить лише від параметру  $\epsilon\tau^2$ . З чого робиться висновок про характер залежності тривалості проходження через коридор від його величини. Тобто із збільшенням параметра  $\epsilon$  тривалість проходження коридору зменшується.



## 2.2 Переміжність в системі Лоренца

Розглянемо тепер класичний приклад реалізації сценарія переміжності в системі диференціальних рівнянь[14,15]. Розглянемо систему Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(r - z) - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

Розглянемо проміжок значення параметру  $166 < r < 166.2$

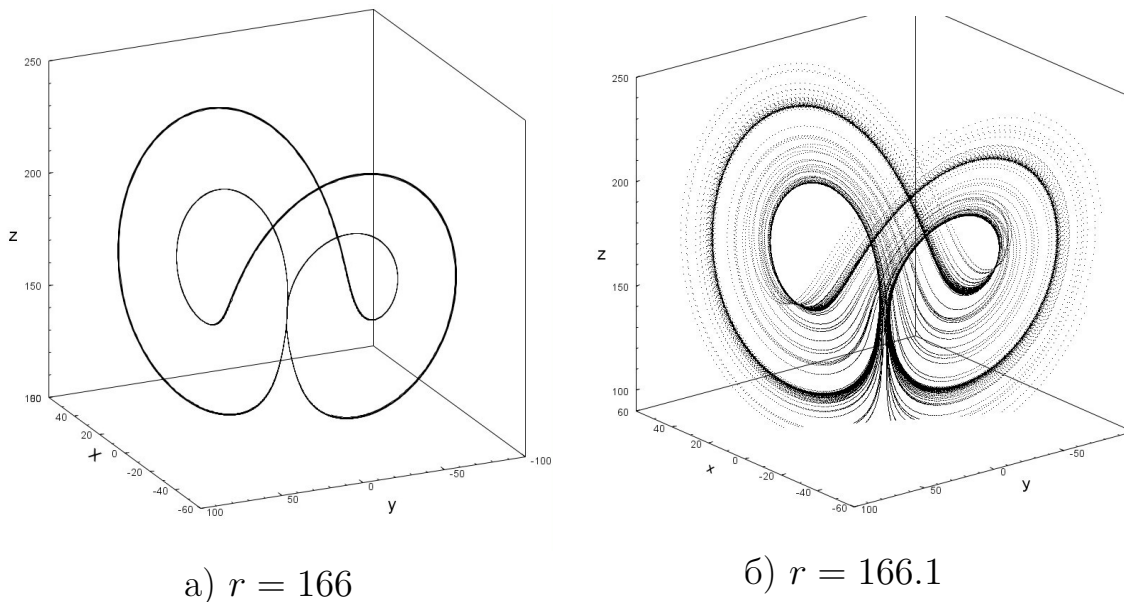


Рис. 2.2: Розподіл природної інваріантної міри по аттрактору

При значенні параметру  $r = 166$  в системі існує граничний цикл, але вже при  $r = 166.1$  він перетворюється на хаотичний аттрактор. Розглянемо це явище більш детально. На рисунку (рис. 4) наведено графік залежності старшого ненульового ЛХП від параметру  $r$ .

Додатність старшого ЛХП підтверджують хаотичність аттрактору при  $r = 166.1$ . Також варто зазначити стрімке зростання значення старшого ЛХП в точці біфуркації, це є однією з ознак переходу

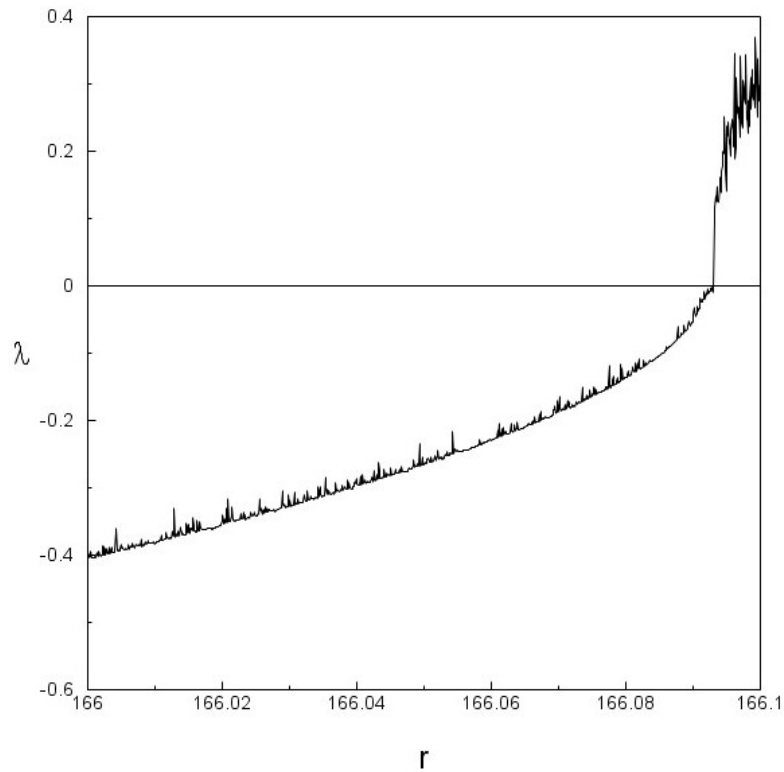
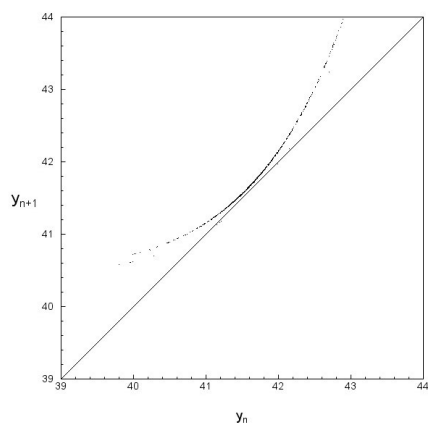


Рис. 2.3: Графік ЛХП

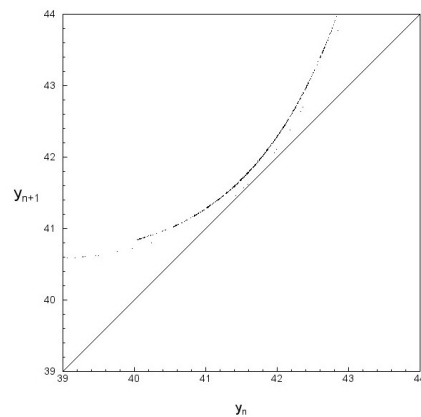
до хаосу через переміжність.

На розподілах інваріантної міри можна бачити, що в хаотичному аттракторі зображальна точка значну частину часу проводить рухаючись по траєкторії, що нагадує зниклий граничний цикл, але іноді зривається і відходить у віддалені області фазового простору, це нагадує нам поведінку дискретної системи, яка розглядалась в попередньому пункті. Продовжимо цю аналогію і розглянемо відображення Пуанкаре для різних значень параметру.

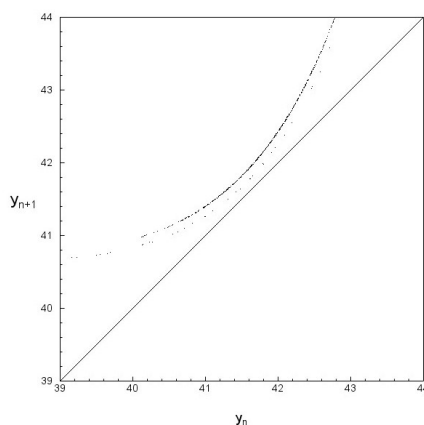
Аналогічно до дискретного випадку, після проходження точки біфуркації виникає коридор, який збільшується при подальшому збільшенні біфуркаційного параметру. Подивимось тепер на тривалість проходження цього коридору, тобто на тривалість ламінарних фаз. Для цього розглянемо часові реалізації при різних значень біфуркаційного параметру (Рис. 6). При детальному розгляданні цих



a)  $r = 166.1$



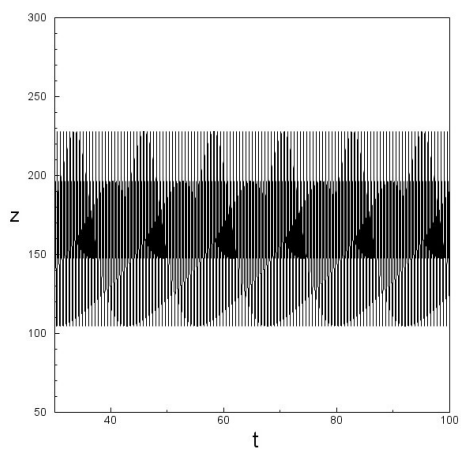
b)  $r = 166.2$



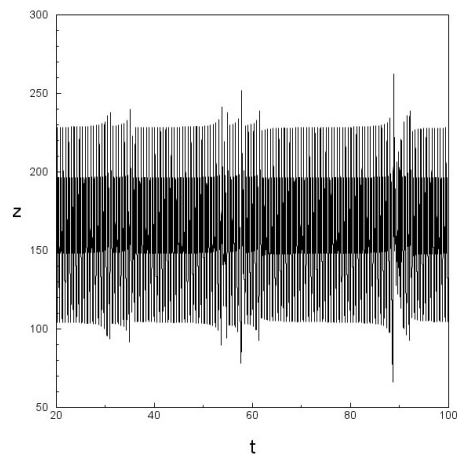
c)  $r = 166.3$

Рис. 2.4: Відображення Пуанкаре. Січна площина  $x = 0$

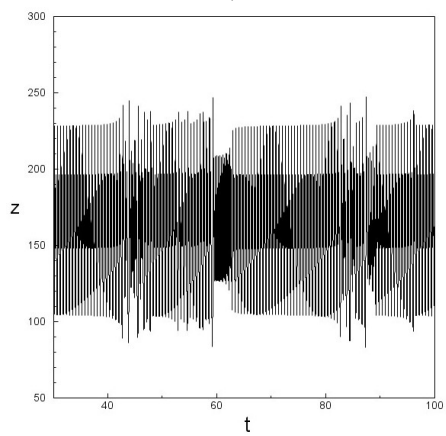
часових реалізацій ми можемо бачити, що при  $r = 166$  ми маємо періодичну функцію, яка відповідає граничному циклу. Після проходження точки біфуркації при  $r = 166.095$  функція залишається майже періодичною, але в деякі моменти часу ми спостерігаємо сплески значення функції, вони відповідають виходу зображальної точки з коридору. Ці сплески називають турбулентною фазою переміжності. При подальшому віддаленні від точки біфуркації (збільшенні коридора) ми бачимо зменшення тривалості ламінарних фаз (зменшення часу проходження коридору). Перехід до хаосу через таку біфуркацію називають переходом до хаосу через сценарій переміжності



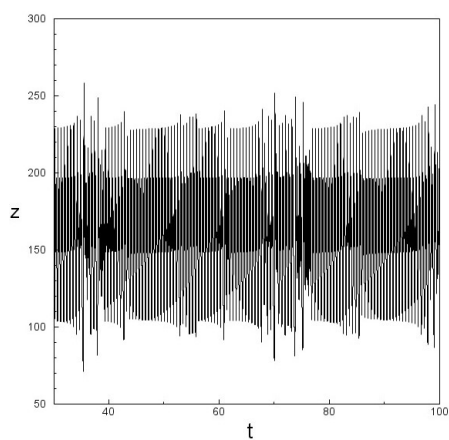
a)



b)



c)



d)

Рис. 2.5: Часові реалізації: a)  $r = 166$ , b)  $r = 166.095$ , c)  $r = 1666.12$ , d)  $r = 166.24$ .

## Розділ 3

# Система Лоренца

Системою Лоренца називається наступна система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(r - z) - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

Перш за все, варто відзначити симетрію рівнянь Лоренца. Їх вигляд не змінюється, якщо одночасно змінити знак перед змінними  $x$  та  $y$ . Це означає, що будь-яке утворення в фазовому просторі або симетричне відносно осі  $z$ , або має симетричного партнера.

Доведемо тепер дисипативність системи Лоренца. Для цього розглянемо векторне поле

$$L(x, y, z) = \{\sigma(y - x), rx - y - xz, -bz + xy\}$$

Компоненти цього поля є правими частинами рівнянь системи Лоренца. На підставі рівнянь Лоренца це поле має сенс поля швидкостей у фазовому просторі. Обчислимо дивергенцію цього поля:

$$\operatorname{div}L = \frac{\partial L_x}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_z}{\partial z} = -\sigma - 1 - b$$

Якщо параметри  $\sigma$  і  $b$  додатні, як це завжди буває в фізичних системах, то дивергенція постійна і від'ємна. Сенс цього результату в наступному. Розглянемо ансамбль однакових систем, кожна з яких описується рівняннями Лоренца і відрізняються лише початковими умовами. Нехай хмара, що зображує початкові координати зображальних точок займає деякий фазовий об'єм  $\Delta V_0$ . Тоді в процесі еволюції систем ансамбля фазовий об'єм хмари буде змінюватись за законом

$$\Delta V = \Delta V_0 e^{(\operatorname{div}L)t} = \Delta V_0 e^{(-\sigma-1-b)t}$$

Отже об'єм хмари буде зменшуватись, а отже система Лоренца є дисипативною.

Знайдемо положення рівноваги цієї системи. Для цього прирівняємо до нуля праві частини рівнянь і отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}\sigma(y - x) &= 0 \\ x(r - z) - y &= 0 \\ xy - bz &= 0\end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему маємо, що при  $r < 1$  в цій системі існує лише одне нульове положення рівноваги

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

при  $r = 1$  та  $r > 1$  маємо три положення рівноваги

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

$$x = \sqrt{b(r-1)}, y = \sqrt{b(r-1)}, z = r-1$$

$$x = -\sqrt{b(r-1)}, y = -\sqrt{b(r-1)}, z = r-1$$

## Розділ 4

# Біфуркації системи Лоренца та сценарії переходу до хаосу

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = x(r - z) - y$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

Будемо досліджувати хаотичні та регулярні режими цієї динамічної системи, використовуючи цілий ряд кількісних та якісних характеристик атракторів. Детально проаналізуємо фазові портрети, перерізи Пуанкаре, фазопараметричні характеристики, розподіли природної інваріантної міри, графіки ляпуновських показників.

Оскільки дана система є нелінійною системою диференціальних рівнянь, то для її дослідження буде доречно використовувати чисельні методи. Так для побудови розв'язків системи використовувався метод Рунге-Кутти четвертого порядку з постійним кроком чисельного інтегрування. Для обчислення ляпуновських показників використовувався узагальнений алгоритм Бенеттіна. При побудові перерізів



Пуанкаре використовувався метод Ено[2].

При проведенні чисельних розрахунків покладалися  $\sigma = 10, b = 8/3$ , а параметр  $r$  розглядався як біфуркаційний і змінювався при розрахунках. Змінювати параметр будемо в межах  $209 < r < 217$ .

Розглянемо фазопараметричну характеристику для цього проміжку (Рис. 9). На рисунку поруч вирізано її фрагмент з центру. На цьому проміжку в системі існує пара симетричних атракторів (відповідно на рисунку чорним кольором зображено фазопараметричну характеристику одного атрактора, а червоним - іншого). З цих діаграм видно, що на цьому проміжку зміни біфуркаційного параметру варто очікувати наявність як регулярних, так і хаотичних динамічних режимів.

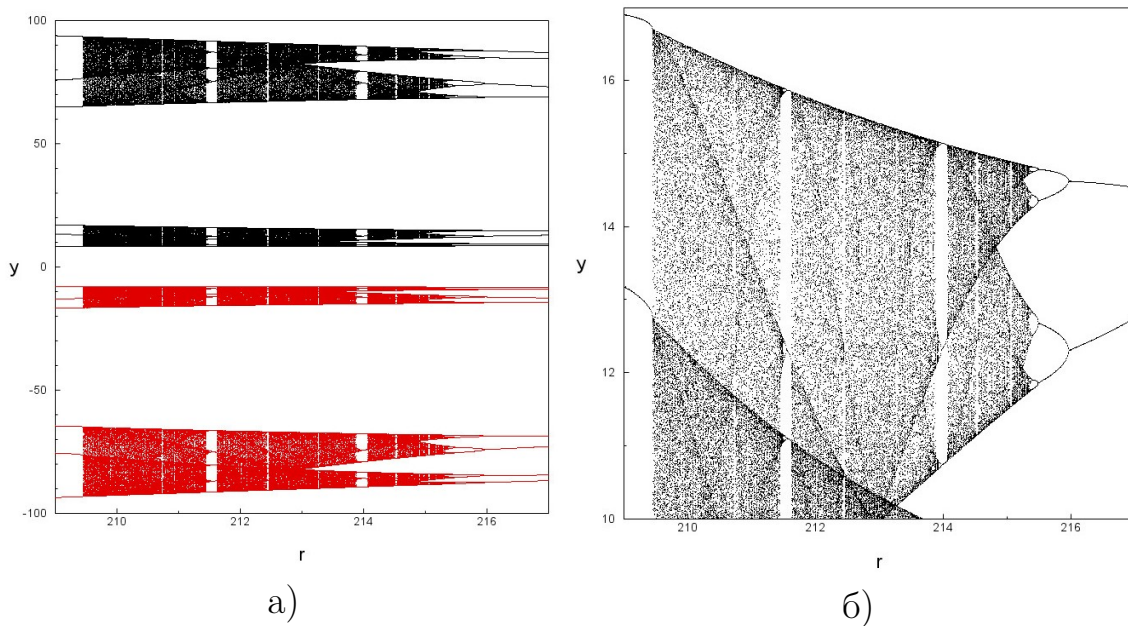


Рис. 4.1: Фазопараметрична характеристика.

## 4.1 Перше вікно періодичності

Біфуркаційний параметр будемо змінювати в межах  $213.8 < r < 214.2$ .

На Рис.2 наведено графік залежності старшого ляпуновського характеристичного показника (далі ЛХП). Як відомо, додатність старшого ЛХП є важливою ознакою наявності в системі хаотичних режимів.

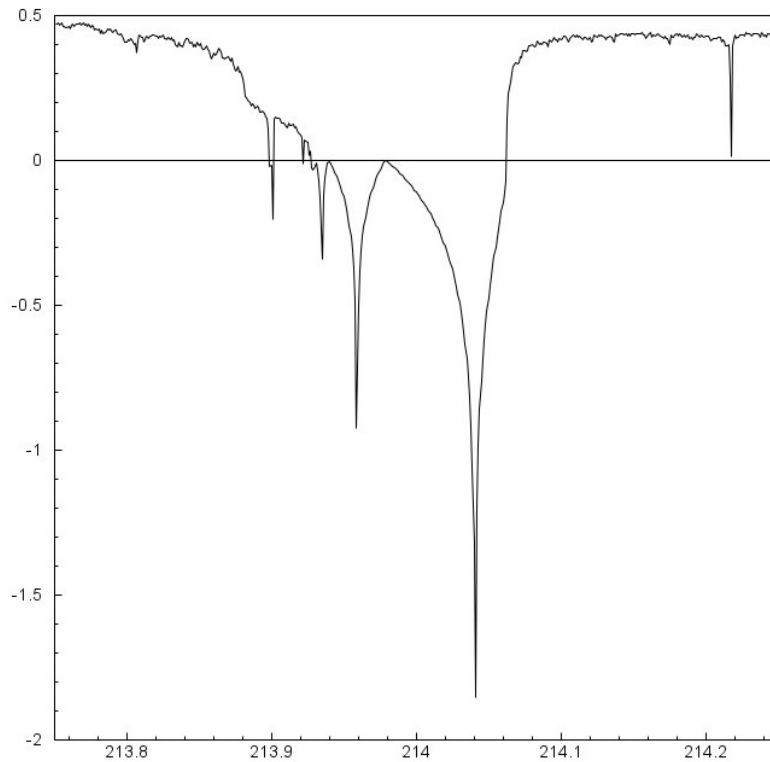


Рис. 4.2: Графік залежності старшого ненульового ЛХП від параметра

На цьому проміжку існує вікно періодичності, де в системі спостерігаються граничні цикли різних періодів. Розглянемо їх більш детально. при  $r = 214$  в системі існує пара симетричних граничних циклів (Рис.11), але вже при  $r = 213.95$  кожен з граничних циклів втрачають стійкість і утворюються два інших стійких граничних цикла, але вже вдвічі більшого періоду (Рис.12). Далі при  $r = 213.93$  відбувається третя біфуркація подвоєння періоду. Безпосередньо на фазових портретах подвоєння періоду побачити складно через те, що другий виток цикла проходить дуже близько до першого, тому поруч з фазовими портретами зображено їх вирізані фрагменти. На

них чітко видно "розщеп"траєкторії. З цих біфуркацій розпочинається перебіг сценарію Фейгенбаума - нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду, який завершується появою симетричної пари хаотичних атракторів. Більш детально перебіг цього сценарію видно на фазопараметричній характеристиці (Рис.13)

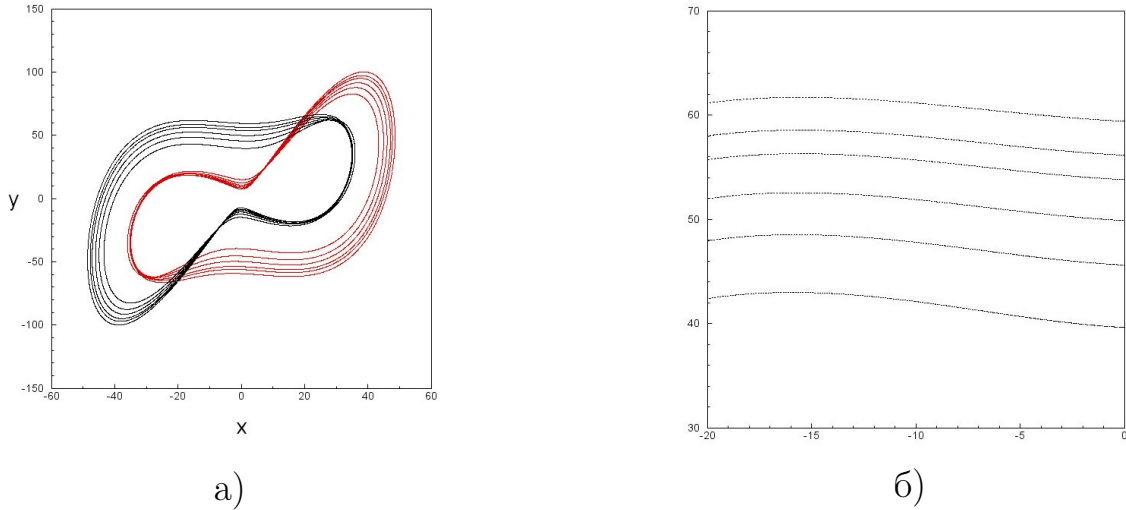


Рис. 4.3: Фазовий портрет при  $r = 214$

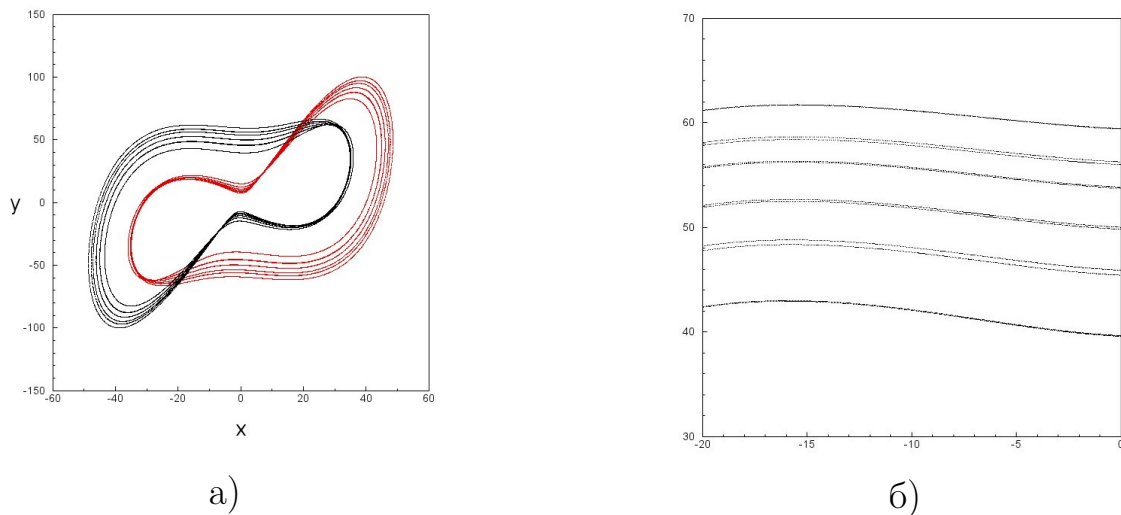


Рис. 4.4: Фазовий портрет при  $r = 213.95$

Зупинимось трохи детальніше на побудові фазопараметричної характеристики. Для її побудови спочатку розраховуються точки перерізу Пуанкаре, але виводяться значення лише однієї координати перерізу. Точкам, в яких "розщеплюються" лінії відповідають

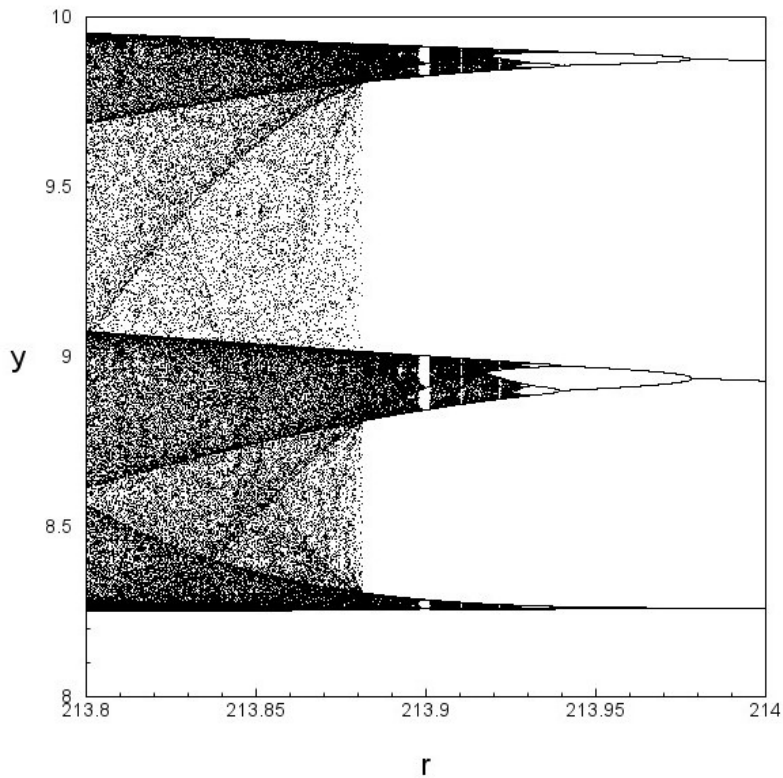


Рис. 4.5: Фазопараметрична характеристика

точки біфуркацій подвоєння періоду. Каскад біфуркацій завершується появою хаотичного атрактора, якому відповідає суцільна "чорна" область на рисунку. Далі при  $r = 213.87$  бачимо стрімке розширення "чорної" області. Розглянемо ці біфуркації детальніше.

Для цього застосуємо перерізи Пуанкаре площиною  $z = 170$ . На Рис.14 зображено перерізи Пуанкаре, які було побудовано за допомогою методу Ено. На зображеннях наведено перші три біфуркації подвоєння періоду і на останньому вже хаотичний атрактор. Кожна точка на перерізі Пуанкаре відповідає перетину фазової траєкторії січної площини. Як ми бачимо на рисунках(а-в), граничному циклу відповідає деяка скінченна кількість точок, що визначається тактністю даного циклу. Ці точки повторюються через час строго рівний періоду відповідного циклу. Переріз Пуанкаре хаотичного атрактора( $r$ ) має більш складну структуру. Він представляє собою деяку

хаотичну точкову множину, число точок якої увесь час зростає із зростанням часу чисельного інтегрування.

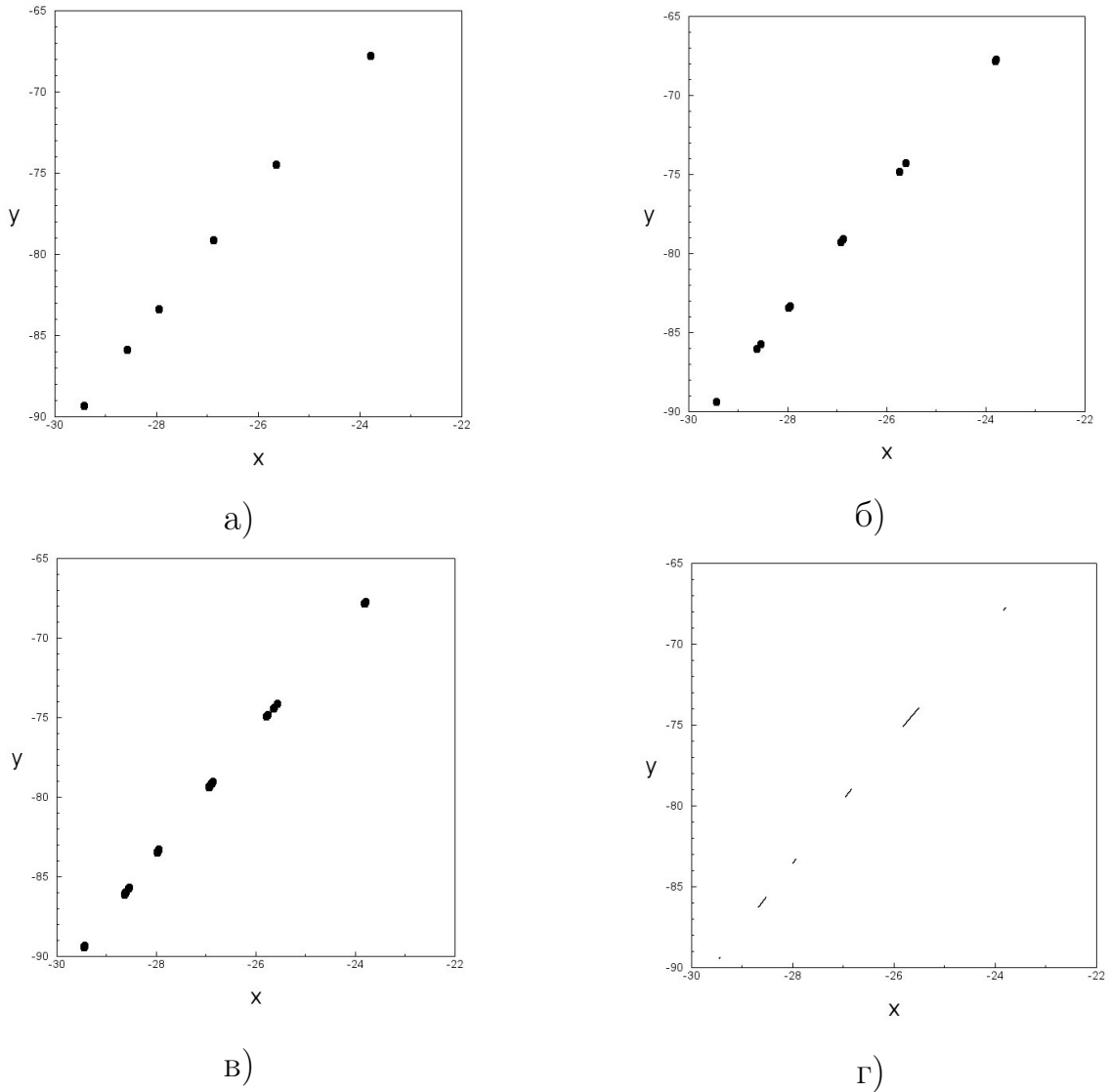


Рис. 4.6: Перерізи пуанкаре: а)  $r = 214$ , б)  $r = 213.95$ , в)  $r = 213.93$ , г)  $r = 213.91$ .

На Рис.15 зображено зображено дві різні пари хаотичних атракторів. На рисунку а) аттрактори при  $r = 213.91$ , а на рисунку б) - при  $r = 213.87$ . Бачимо, що аттрактори на другому рисунку, хоча і є якісно схожими на перші, але істотно відрізняються. Вони займають суттєво більший об'єм у фазовому просторі. Рух по цим аттракторам складається з двох фаз. За аналогією до класичного

сценарію переміжності, вони називаються груболамінарною і турбулентною[26,27,30]. Зображальна точка спочатку рухається по квазіперіодичній траєкторії, що нагадує зниклий хаотичний аттрактор з рисунку а) (груболамінарна фаза), але у непередбачувані моменти часу зривається і відходить у віддалені області фазового простору (турбулентна фаза).

На перерізах Пуанкаре (Рис.16) можна ще більш ясно бачити цей ефект. Видно, що ми дійсно маємо справу із біфуркацією типу "хаос-хаос". І множина точок, що відповідає "великому" хаотичному аттрактору містить переріз Пуанкаре "маленького" в якості підмножини. Що також говорить нам про певні паралелі із класичним сценарієм переміжності. Також цей ефект можна побачити на графіку ЛХП (Рис.10). Тут видно, що в околі значення  $r = 213.88$  відбувається стрімке зростання старшого ЛХП, що також відсилає нас до класичного сценарія переміжності.

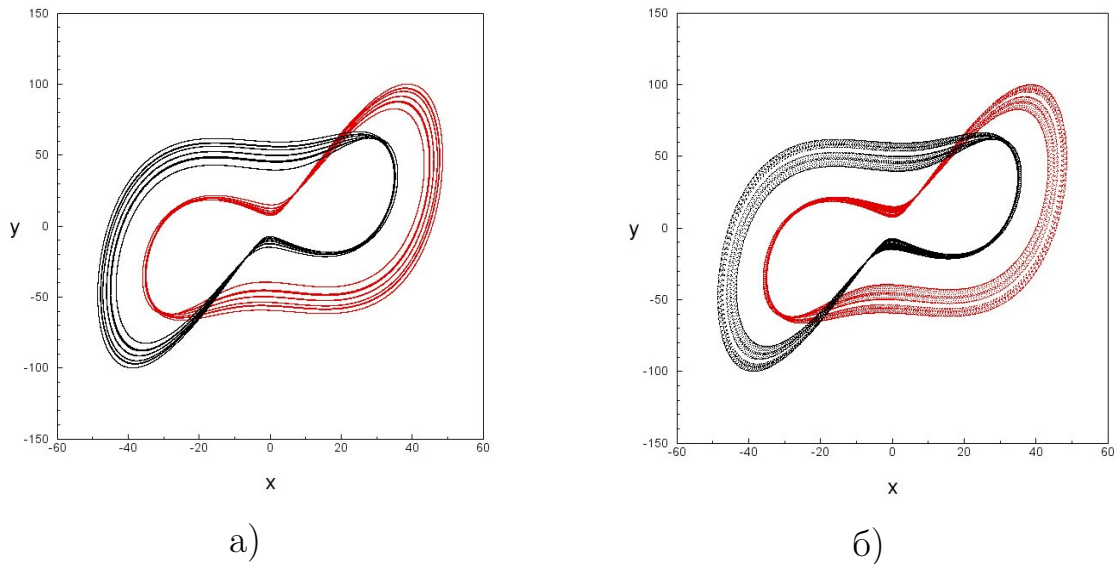


Рис. 4.7: а)  $r = 213.91$ , б)  $r = 213.87$

Цікаво, що класичний сценарій переміжності також реалізується в даній системі. Розглянемо проходження цього ж вікна періодичності, але цього разу зі збільшенням біфуркаційного параметра.

На Рис.16 зображена фазопараметрична характеристика. Бачимо, що при  $r = 214.05$  в системі існує граничний цикл, але вже при  $r = 214.1$  виникає хаос. На Рис.17 зображені розподіли природньої інваріантної міри, де яскраво видно ламінарну і турбулентну фази.

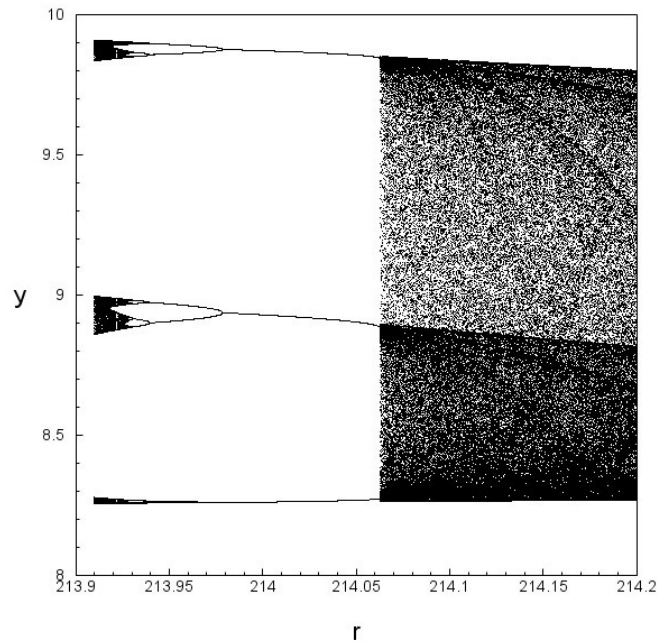
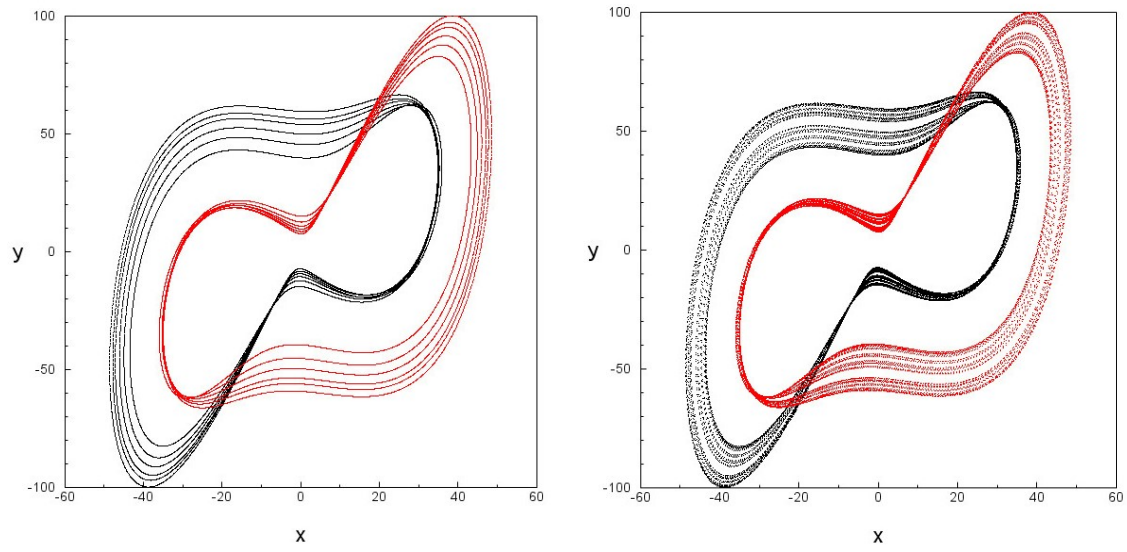


Рис. 4.8: Фазопараметрична характеристика

Після біфуркації зображальна точка продовжує рух по траєкторії, що схожа на зниклий граничний цикл, але у непередбачувані моменти часу вона відходить у віддалені регіони фазового простору, цим відходам відповідають окремі точки на розподілі. Також цю біфуркацію видно на графіку старшого ненульового ЛХП (Рис.10). В околі точки  $r = 214.06$  відбувається стрімке збільшення ЛХП з нульового на додатній, що також свідчить про перехід до хаосу за сценарієм переміжності

Отже, в цьому вікні періодичності при зменшенні біфуркаційного параметру протікає сценарій Фейгенбаума, а за ним сценарій узагальненої переміжності. А при проходженні цього вікна в інший бік реалізується класичний сценарій переміжності за Помо-Манневіллем. Для системи Лоренца така картина повторюється ще на багатьох

інтервалах зміни біфуркаційного параметра.



а)

б)

Рис. 4.9: а)  $r = 214.05$ , б)  $r = 214.1$

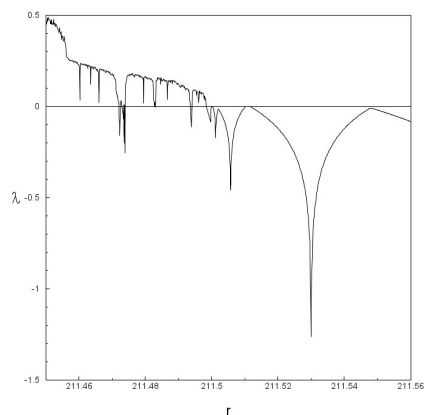


## 4.2 Друге вікно періодичності

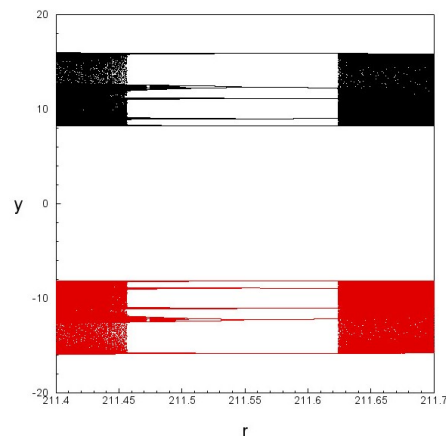
Розглянемо тепер наступне вікно періодичності для значень параметра

$211.45 < r < 211.65$ . На Рис.18(а) наведено графік старшого ненульового ЛХП. Аналогічно до попереднього вікна періодичності ми бачимо, що на цьому проміжку спочатку реалізуються регулярні динамічні режими, яким відповідає область від'ємних значень на графіку. І при зменшенні біфуркаційного параметру, при  $r = 211.5$  графік переходить у верхню півплощину, що говорить нам про хаотичність режимів в цій області. Розглянемо детальніше проходження цього вікна періодичності. На Рис.18(б) зображено фазопараметричну характеристику для змінної  $x$  і січною площиною  $z = 170$ .

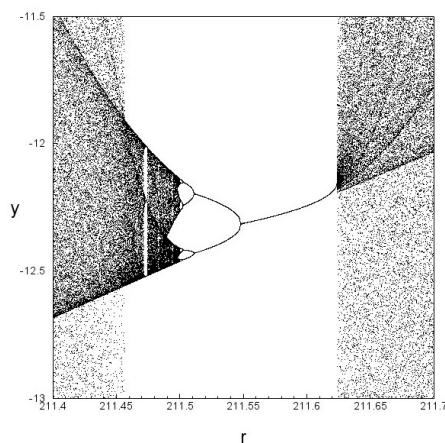
На Рис.18(б) зображено дві фазопараметричні характеристики. Вони відповідають двом симетричним атрaktorам, що одночасно існують в даній системі при відповідних значеннях параметру. На Рис.18 (в) можна бачити вирізаний фрагмент фазопараметричної характеристики, на ній більш ясно видно біфуркації, які відбуваються в цьому вікні періодичності. Окремим лініям фазопараметричної характеристики відповідають граничні симетричні граничні цикли, які одночасно проходять точки біфуркацій подвоєння періоду. Більш яскраво це можна бачити на перерізах Пуанкаре (рис.19). Так при  $r = 211.56$  (Рис.19 а) ми на перерізі Пуанкаре бачимо набір окремих точок (на рисунку зображено фрагмент), що означає, що траєкторія перетинає січну площину в скінченній кількості точок, що говорить нам про періодичність цієї траєкторії, а значить перед нами граничний цикл. При зменшенні параметру до  $r = 211.54$  на відповідному перерізі (Рис.19 б) бачимо, що на місці кожної точки з попереднього перерізу з'являється дві точки. Тобто траєкторія тепер перетинає цю площину вдвічі більше разів, що вказує нам на



а) Графік ЛХП



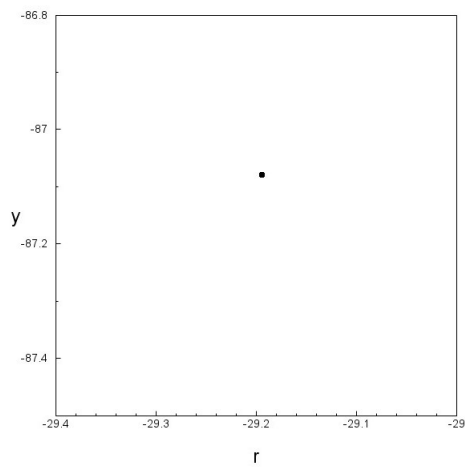
б) Фазопараметрична характеристика



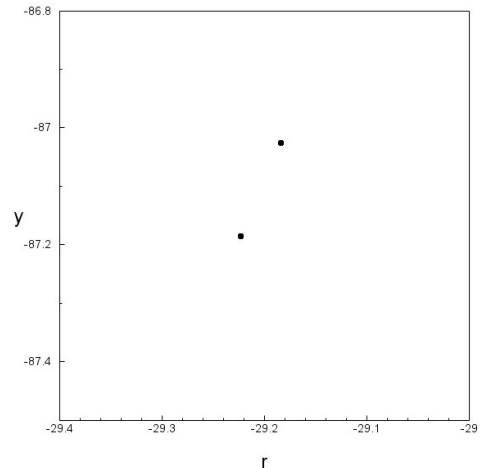
в) Збільшений фрагмент ФПХ

Рис. 4.10:

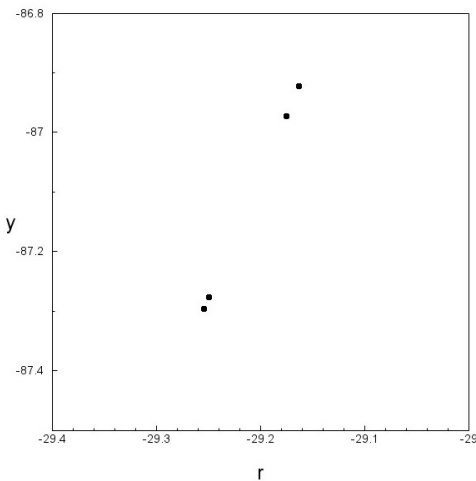
біфуркацію подвоєння періоду. На Рис.19 (в) бачимо результат ще одної біфуркації подвоєння періоду. З цих трьох біфуркацій починається перебіг сценарію Фейгенбаума - нескінченного каскаду біфуркацій подвоєння періоду, який завершується появою в системі хаотичного атрактора (в нашому випадку двох симетричних хаотичних атракторів). На Рис.19 (г) бачимо, що переріз Пуанкаре суттєво змінився, тепер він має вигляд суцільної лінії, тобто траєкторія перетинає січну площину нескінченне число разів, більш того заповнення цієї лінії точками відбувається непередбачуваним чином - це говорить нам про хаотичність атракторів, що утворилися в системі



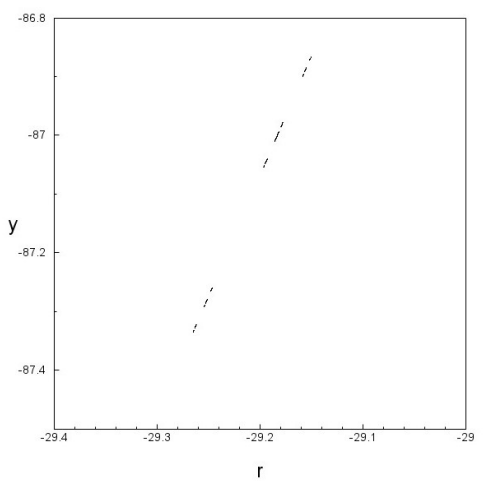
а)



б)



в)



г)

Рис. 4.11: Фазові портрети: а)  $r = 211.56$  б)  $r = 211.54$ , в)  $r = 211.51$ , г)  $r = 211.5$ .

при значенні параметру  $r = 211.5$ .

Далі треба звернути увагу на ще одну біфуркацію, яка відбувається між  $r = 211.46$  і  $r = 211.45$ . На фазопараметричній характеристиці (Рис.18(в)) бачимо стрімке розширення "чорної" області, що є типовою ознакою перебігу сценарію узагальненої переміжності. На Рис.19(а) бачимо, що при цих значеннях параметру відбувається стрімке зростання значення старшого ЛХП, тобто "збільшення хаотичності" руху, що знову-таки говорить про біфуркацію типу "хаос-хаос". Таку біфуркацію називають сценарієм узагальненої пе-

реміжності.

На Рис.20 зображені перерізи Пуанкаре при значеннях параметру

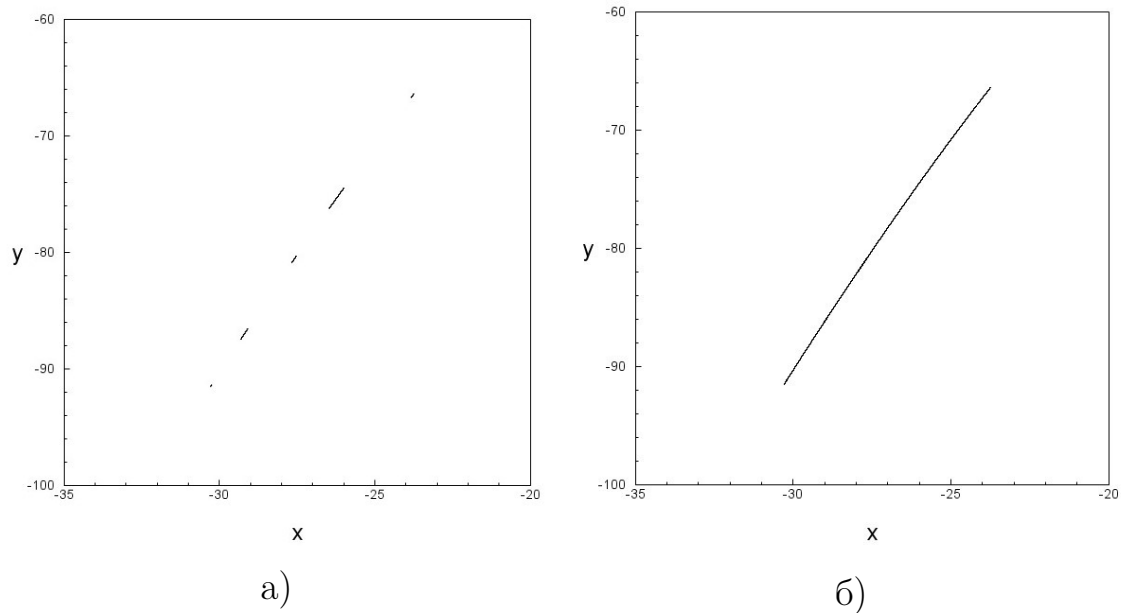


Рис. 4.12: Перерізи Пуанкаре а)  $r = 211.46$ , б)  $r = 211.45$

$r = 211.46$  і  $r = 211.45$ . На них бачимо, що якщо до біфуркації переріз має вигляд окремих рисочок, то після біфуркації пробіли між рисками заповнюються і вони зливаються в одну лінію, тобто кількість точок перетину траєкторією січної площини сильно зростає. На Рис.21 зображено розподіли природньої інваріантної міри по аттракторам до і після біфуркації узагальненої переміжності. На цих розподілах яскраво видно, як змінюється динаміка системи в наслідок цієї біфуркації. Після біфуркації видно, що точка більшу частину часу рухається по траєкторії, що нагадує хаотичний аттрактор, який існував до біфуркації, але іноді, у непередбачувані моменти часу вона зривається і відходить у віддалені області фазового простору. Ці два режими це груболамінарна і турбулентна фази відповідно.

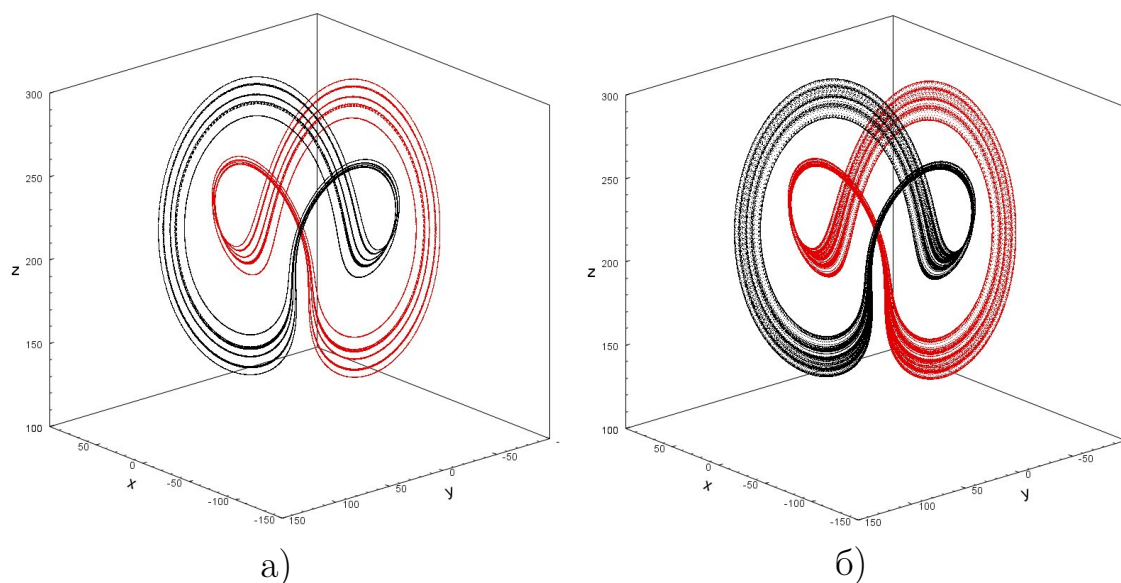


Рис. 4.13: а)  $r = 211.457$ , б)  $r = 211.44$

### 4.3 Інший параметр

Розглянемо тепер цю ж систему, але оберемо в якості біфуркаційного параметра  $\sigma$ . Інші параметри покладемо:  $r = 203.1$ ,  $b = 8/3$ . Параметр  $\sigma$  будемо змінювати в межах  $5 < \sigma < 15$ . На Рис.22 наведено

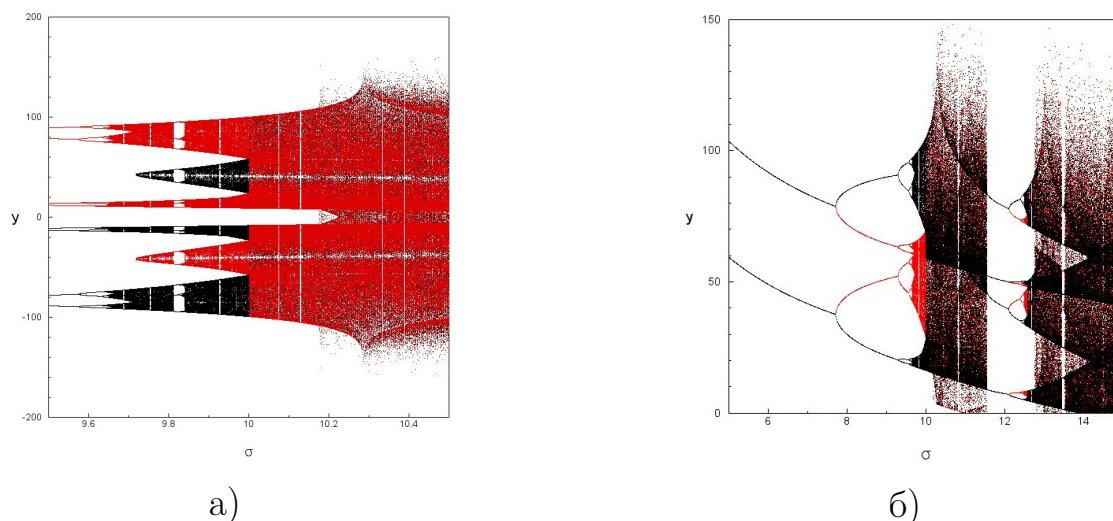
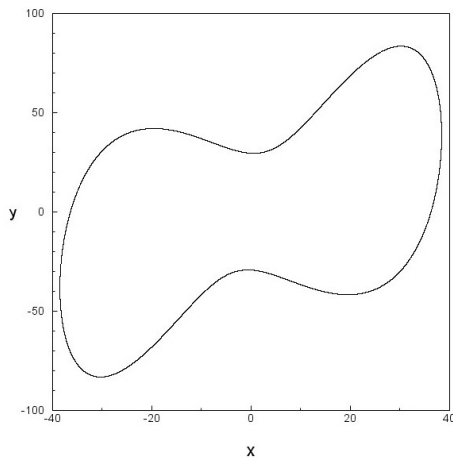


Рис. 4.14: Фазовий портрет при а)  $\sigma = 7$  б)  $\sigma = 9$

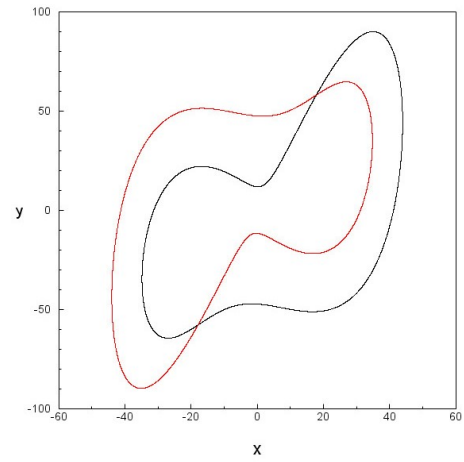
фазопараметричну характеристику для цього проміжку і вирізаний фрагмент цієї характеристики. На ній ми бачимо, що в системі спочатку існує один граничний цикл, але при значенні  $\sigma = 7.6$  на

його місці з'являється вже два симетричних граничних цикла (фазові портрети наведено на Рис.23). Далі ми бачимо, що обидва цикла проходять через нескіченний каскад біфуркацій і при  $\sigma = 9.7$  в системі утворюється два симетричні хаотичні атрактори. При  $\sigma = 10$  ми все ще спостерігаємо розвинений симетричний хаос Рис.24 (а). Але при  $\sigma = 10.5$  в системі існує вже тільки один хаотичний атрактор. Розглянемо тепер цей перехід до хаосу більш детально. На перерізах Пуанкаре (Рис.25) детально видно перехід до хаосу через сценарій Фейгенбаума. Червоним кольором позначені точки перетину січної площини траєкторією, що належить одному атрактору, а чорним - його симетричному партнеру. Так при  $\sigma = 9$  в системі існує пара симетричних циклів, про що нам і говорять окремі точки на перерізі Пуанкаре. При збільшенні параметра  $\sigma = 9.5$  ми бачимо теж два симетричних атрактора, але на перерізі Пуанкаре кількість точок подвоїлась, що говорить на про біфуркацію подвоєння періоду.

Далі відбувається нескінченна кількість таких біфуркацій доки при  $\sigma = 10$  не виникає два симетричних хаотичних атрактора, яким на перерізі Пуанкаре відповідають суцільні лінії, чорні та червоні відповідно, точки на яких з'являються в непередбачуваному порядку.

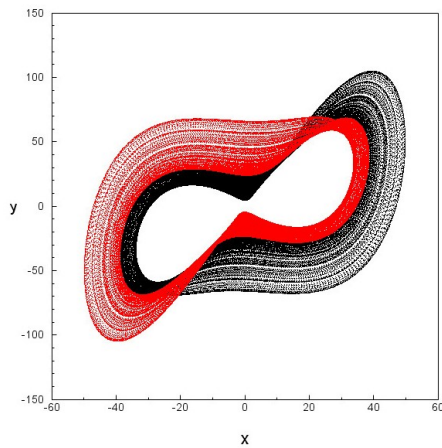


а)

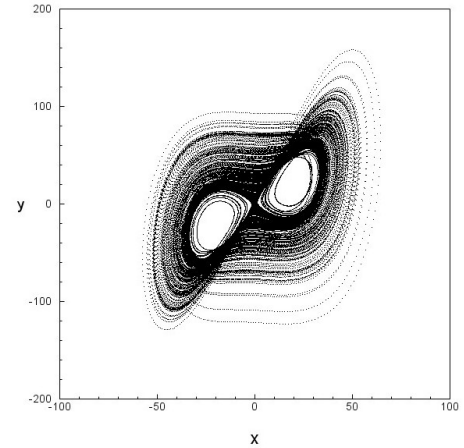


б)

Рис. 4.15: Фазовий портрет при а)  $\sigma = 7$  б)  $\sigma = 9$



а)



б)

Рис. 4.16: Фазовий портрет при а)  $\sigma = 10$  б)  $\sigma = 10.5$

А при значенні параметра  $\sigma = 10.05$  аттрактори зливаються в один, і в системі вже існує тільки один хаотичний аттрактор.

При подальшому збільшенні параметера відбувається ще одна біфуркація. Це біфуркація типу "хаос-хаос". На перерізі Пуанкаре видно, що при

$\sigma = 10.2$  відбувається стрімке розширення області локалізації аттрактора. Це так званий перехід до хаосу за сценарієм узагальненої переміжності. На розподілі природної інваріантної міри (Рис.27) ба-

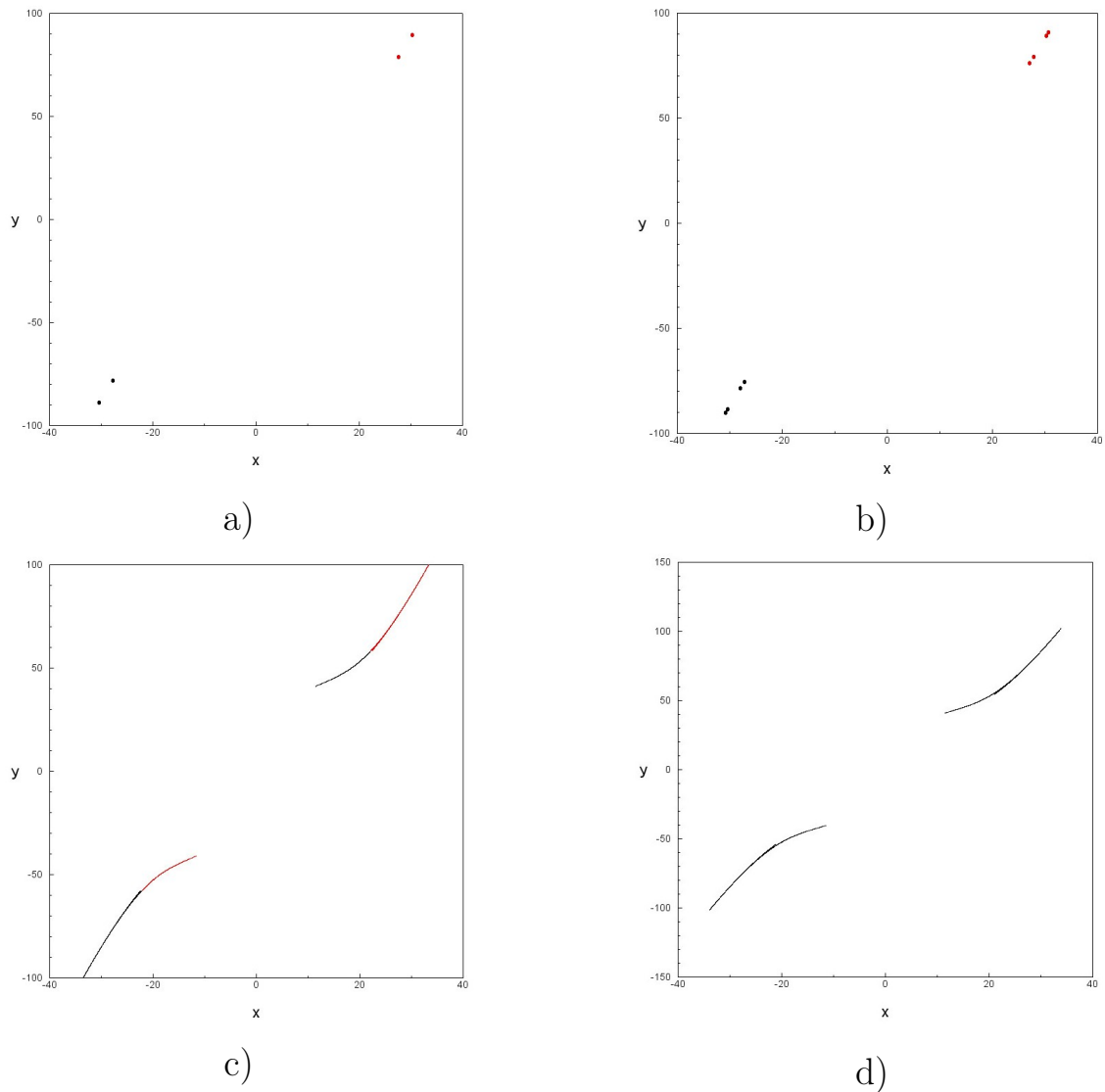


Рис. 4.17: Перерізи пуанкаре: а)  $\sigma = 9.5$ , б)  $\sigma = 9.6$ , в)  $\sigma = 10$ , д)  $\sigma = 10.05$ .

чимо типову картину для цього сценарію. Чорна область, що якісно схожа на зниклий хаотиний атрактор відповідає груболамінарній фазі і окремі точки, які відповідають непередбачуваним відходам траєкторії у віддалені області фазового простору, так звана турбулентна фаза. На Рис.26 зображено переріз Пуанкаре при  $\sigma = 10.2$  зеленим кольором і при  $\sigma = 10.05$  чорним кольором. Видно, що зелені і чорні лінії є якісно схожими, але зелені простягаються далі на цій площині, займаючи більшу площу, що відповідає збільшенню



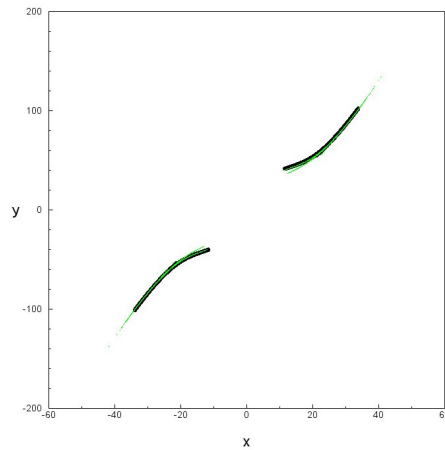
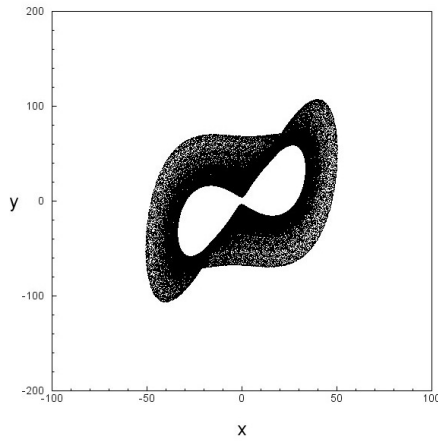
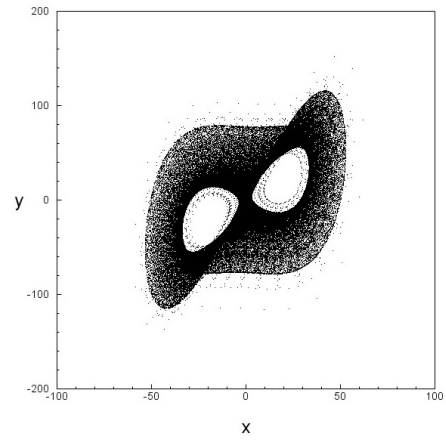


Рис. 4.18: Переріз Пуанкаре,  $\sigma = 10.05$  - чорним кольором  $\sigma = 10.2$  - зеленим



а)



б)

Рис. 4.19: Фазовий портрет при а)  $\sigma = 10$  б)  $\sigma = 10.5$

області локалізацію нового хаотичного атрактора, утвореного після біфуркації узагальненої переміжності.

Також свідчення про реалізацію цього сценарію можна побачити на фазопараметричній характеристиці на Рис.22(б). На ній видно, що в околі точки біфуркації  $r = 10.2$  на характеристиці з'являються окремі "викиди"точок за межі суцільної області точок, що також говорить нам про збільшення області локалізації атрактора, значить про перебіг сценарію. узагальненої переміжності.

# Висновки

1. В даній роботі було виявлено існування переходу від хаотичного атрактора одного типу до хаотичного атрактора іншого типу за сценарієм узагальненої переміжності в класичній системі Лоренца. Причому такі сценарії мають місце, як при біфуркаціях за параметром  $r$ , при біфуркаціях за параметром  $\mu$ .
2. Встановлена якісна та кількісна подібність реалізації сценаріїв переходу до хаосу для симетричних атракторів.

# Бібліографія

- [1] Lorenz E. N. Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of the Atmospheric Sciences-1963-Vol.20 №1,-Pp.130-141
- [2] Henon M. On the numerical computation of Poincare maps // Physica D. – 1982. – Vol. 5, № 2. – Pp. 412-415.
- [3] Manneville P. Pomeau Y. Intermittency and the Lorenz model // Physics Letters -1979.-Vol.75 №1-2.-Pp.1-2
- [4] Hairer, E.; Norsett, S. P.; Wanner, G., Solving Ordinary Differential Equations. I: Nonstiff Problems. Berlin etc., Springer-Verlag 1987. XIV, 480 pp.,
- [5] S.P. Kuznetsov, Dynamic Chaos. M.: Fizmatlit, 2006, 292 p.
- [6] Швець О.Ю. Детермінований хаос // Київ: НТУУ "КПІ".-2010.- 93 с.
- [7] J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, Regular and Chaotic Dynamics, AMS, volume 38, Springer Sciences Media 1992, 693 p.
- [8] V. Afraimovich, S.B. Hsu. Lectures on chaotic dynamical systems, Sommerville, International Press, 2003.
- [9] T.S. Krasnopolskaya and A.Yu. Shvets, Regular and chaotic dynamics of systems with limited excitation. M.: Research Center Regular and Chaotic Dynamics, 2008, 280 p.

- [10] V.S. Anishchenko and T.E. Vadivasova, Lectures on Nonlinear Dynamics. Research Center Regular and Chaotic Dynamics, 2011, 516 p.
- [11] Handbook of Applications of Chaos Theory; Edited By C.H. Skiadas and Char. Skiadas. Chapman and Hall/CRC, 2016, 952 p.
- [12] M.J. Feigenbaum, Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.*, 19(1), pp. 25–52, 1978.
- [13] M.J. Feigenbaum, The universal metric properties of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.*, 21(6), pp. 669–706, 1979.
- [14] P. Manneville and Y. Pomeau, Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems, *Physica D. Nonlinear Phenom.*, 1(2), pp. 219–226, 1980.
- [15] Y. Pomeau and P. Manneville, Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems, *Comm. Math. Phys.*, 74(2), pp. 189–197, 1980.
- [16] Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. Chaos in dynamics of machines with a limited power-supply, 8-th World Congr. on the Theory of Machines and Mechanisms. Eds. M. Okrolnick, L. Pust. Prague: Czechoslovak Acad. Sci., Vol. 1- pp. 181-184, 1991.
- [17] T. S. Krasnopol'skaya and A. Yu. Shvets, Properties of chaotic fluid oscillations in cylindrical basins, *Internat. Appl. Mech.*, 28, No. 6, 386–394, 1992.
- [18] T.S. Krasnopol'skaya and A.Y. Shvets, Parametric resonance in the system: Liquid in tanks +electric motor, *Int. Appl. Mech.*, 29(9), pp. 722–730, 1993.

- [19] T.S. Krasnopolskaya and A.Yu. Shvets, Chaotic surface waves in limited power—supply cylindrical tank vibrations, *J. Fluids Struct.*, 8(1), pp. 1–18, 1994.
- [20] A.Yu. Shvets and T.S. Krasnopolskaya, Hyperchaos in piezoceramic systems with limited power supply, *Solid Mechanics and its Applications*, 6, pp. 313–322, 2008.
- [21] T. S. Krasnopol'skaya and A. Yu. Shvets, Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks, *J.Sound Vibrat.*, 322, No. 3, 532–553 (2009).
- [22] Aleksandr Yu. Shvets, Vasiliy Sirenko, Complicated Scenarios of Transitions to Deterministic Chaos in Non-Ideal Dynamic Systems, *Nonlinear Dynamics–2016 (ND-KhPI2016): proceedings of 5th International Conference, Kharkov: NTU "KhPI 2016*, P. 222-229.
- [23] Shvets and S. Donetskyi, Transition to deterministic chaos in some electroelastic systems, *Springer Proceedings in Complexity*, pp. 257–264, 2019.
- [24] Shvets A., Sirenko V. Hyperchaos in Oscillating Systems with Limited Excitation, In: Skiadas C., Lubashevsky I. (eds) 11th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, *Springer Proceedings in Complexity*. Springer, Cham, pp. 265 – 273, 2019.
- [25] A.Yu. Shvets and V.A. Sirenko, Scenarios of transitions to hyperchaos in nonideal oscillating systems, *J. Math. Sci.*, 243(2), pp. 338–346, 2019.
- [26] A. Shvets and S. Donetskyi, “New Types of Limit Sets in the Dynamic System “Spherical Pendulum—Electric Motor,” *Advanced Structured Materials*, 157, pp. 443–455, 2021.

- [27] A. Shvets, Overview of Scenarios of Transition to Chaos in Nonideal Dynamic Systems, Springer Proceedings in Complexity, pp. 853–864, 2021.
- [28] Shvets, A., Donetskyi, S. (2022). Maximal Attractors in Nonideal Hydrodynamic Systems. In: Skiadas, C.H., Dimotikalis, Y. (eds) 14th Chaotic Modeling and Simulation International Conference. CHAOS 2021. Springer Proceedings in Complexity. Springer, Cham.
- [29] С.В. Донецький, О.Ю. Швець, Біфуркації максимальних атракторів неідеальних маятникових систем. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2022. № 3. С. 13–19.
- [30] О.Ю. Швець, Типові та узагальнені переходи до детермінованого хаосу нетипових атракторів неідеальних динамічних систем. Системні дослідження та інформаційні технології, 2022, № 4, с. 141-150.