НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
__________ О.І. Клесов
« » 2023 р.

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика
зі спеціальності 111 «Математика»
на тему:«Граничні теореми для збіжності майже напевно для субординаторів та обернених субординаторів»

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-11мн
Ковтун Анастасія Сергіївна ______________

Науковий керівник:
Завідувач кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
доктор фізико-математичних наук, професор,
Клесов Олег Іванович ______________

Рецензент:
Завідувач кафедри інформаційних систем і технологій
Національного транспортного університету,
доктор фізико-математичних наук, професор
Валерій Володимирович Гавриленко ______________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка ___________

Київ - 2023 року

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
________ О.І. Клесов
« » 2023 р.

Завдання
на магістерську дисертацію студентці
Ковтун Анастасії Сергіївні

1. Тема дисертації «Граничні теореми для збіжності майже напевно для субординаторів та обернених субординаторів», науковий керівник дисертації Клесов Олег Іванович, доктор фізико-математичних наук, професор, затверджені наказом по університету від «27» березня 2023 р. №1337-с.

2. Термін подання студентом дисертації 19 травня 2023 року.

3. Об'єкт дослідження: субординатор Дікмана та обернений до нього субординатор.

4. Предмет дослідження: граничні теореми з ймовірністю один для субординатора Дікмана та оберненого до нього субодинатора.

5. Перелік завдань, які потрібно виконати:

   (a) Ознайомитися з літературою, в якій були встановлені закони повторного логарифма для сум випадкових величин та випадкових процесів, вивчити підходи до доведення теорем такого типу, ознайомитися з законами логарифма типу Човера; ознайомитися з літературою, в якій наведено означенння та властивості субординатора Дікмана.

(б) Навести приклад симуляції вибіркової траєкторії субординатора Дікмана та оберненого субординатора за допомогою вивчених властивостей процесу, використовуючи мову програмування Python.

(в) Довести теореми про граничну поведінку субординатора Дікмана в околі 0 з ймовірністю 1, довести теореми про граничну поведінку оберненого субодинатора, використовуючи отримані результати для субординатора Дікмана.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 31 слайд.

7. Орієнтовний перелік публікацій: результати дослідження були представлені на XI Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків.

8. Дата видачі завдання 08 лютого 2023 року.

Календарний план

№	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Огляд літератури щодо закону повторного логарифма	08.02.23-01.03.23	Виконано
2.	Ознайомлення з основними методами доведення	01.03.23-10.03.23	Виконано
3.	Вивчення властивостей субординатора Дікмана	10.03.23-24.03.23	Виконано
4.	Симуляція вибіркової траєкторії субординатора Дікмана та оберненого субординатора	24.03.23-01.04.23	Виконано
5.	Формулювання і доведення граничних теорем для локальної збіжності майже напевно субординатора Дікмана.	01.04.23-17.04.23	Виконано
6.	Доведення граничних теорем для локальної збіжності майже напевно оберненого субординатора, використовуючи отримані раніше результати	17.04.23-27.04.23	Виконано
7.	Аналіз отриманих результатів, оформлення висновків	27.04.23-01.05.23	Виконано
8.	Оформлення магістерської дисертації	01.05.23-18.05.23	Виконано

Студентка Анастасія Сергіївна Ковтун

Науковий керівник Олег Іванович Клесов

Реферат

Магістерська дисертація містить 45 сторінок, 31 слайд презентації, 27 першоджерел.

Об'єктом даної дипломної роботи є процеси з незалежними і однорідними приростами, зокрема субординатор Дікмана.

Метою даної дипломної роботи є встановлення теорем про зібжність з ймовірністю один до ненульової константи для субординатора Дікмана та оберненого до нього субординатора.

Актуальність дослідження магістерської дисертації зумовлена тим, що клас процесів з незалежними та однорідними приростами відіграють важливу роль в математичному моделюванні реальних процесів. До цього класу належать такі відомі приклади як процес Пуассона, Вінерівс процес, стійкі процеси тощо. Тому вивчення граничної поведінки таких процесів є важливим питанням в теорії випадкових процесів і статистиці.

Ключові слова: процес Леві, процес з незалежними і однорідними приростами, субординатор, обернений субординатор, субординатор Дікмана, збіжність майже напевно, збіжність з ймовірністю один, закон повторного логарифма.

Abstract

The master's thesis contains 45 pages, 31 presentation slides, 27 bibliography items.

The object of this thesis is processes with independent and homogeneous increments, in particular, the Dickman subordinator.

The aim of this thesis is to establish limit theorem with probability one to a nonzero constant for the Dickman subordinator and the inverse Dickman subordinator.

The relevance of the research is due to the fact that the class of processes with independent and homogeneous increments play an important role in the mathematical modeling of real processes. This class includes such well-known examples as the Poisson process, Wiener process, stable processes, etc. Henceforth the study of the limiting behavior of such processes is an important problem in the theory of random processes and statistics.

Key words: Lévy process, process with independent and uniform increments, subordinator, inverse subordinator, Dickman subordinator, convergence almost certainly, convergence with probability one, law of repeated logarithm.

Зміст

Вступ

Стохастичні процеси мають широке застосування в багатьох галузях таких як фінансова математика, страхування, статистичні дослідження, теорія керування тощо. Тому вивчення їхніх властивостей є важливим питанням в сучасній науці. Окремим широким класом випадкових процесів є процеси з незалежними і однорідними приростами, який влючає такі відомі приклади як Вінерів процес, процес Пуассона, стійкі процеси та інші. Всі ці процеси мають широку сферу застосувань і є важливим інструментом для математичного моделювання реальних фізичних, економічних і природніх процесів.

Вивчення граничної поведінки спочатку випадкових сум, а згодом і випадкових процесів, розпочалось з формулювання теореми, відомої зараз як закон великих чисел, яка стала одним з найважливіших результатів в теорії ймовірностей і досі відіграє одну з центральних ролей в статистиці. Подальше покращення цього результату, відоме як закон повторного логарифма, стало важливим етапом в дослідженні асимптотичної поведінки випадкових сум і стохастичних процесів. Хоча закон повторного логарифма був темою робіт багатьох відомих вчених, досі існують класи процесів, для яких такий результат не був отриманий.

Метою даної роботи є огляд існуючих досі результатів щодо збіжності з ймовірністю один процесів Леві, знаходження верхніх і нижніх функцій субодинатора Дікмана, а також встановлення граничних теорем зі збіжністю майже напевно до ненульової константи для субординатора Дікмана і оберненого до нього субординатора.

Основні позначення

«$\overset{d}{=}$» — рівність за розподілом ;

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in A \\ 0, \text{ якщо } x \notin A \end{cases} ;$$

$a \wedge b = \min\{a, b\}$;

«$X \sim N(a, b)$» — X має нормальний розподіл, з середнім a і дисперсією b;

$\mathbb{E}X, \mathrm{Var}(X)$ — математичне сподівання і дивперсія відповідно випадкової величини X;

A м.н. — $\mathbb{P}(A) = 1$

$\log x = \log_e x$ — натуральний логарифм від x

C^1 - клас неперервно диференційовних функцій

Розділ 1

Теоретичні відомості

У цьому розділі наведемо основні відомості з теорії стохастичних процесів і теорії правильно змінних функцій, а також деякі відомі результати, які будуть використовуватись в основній частині роботи.

1.1 Процеси Леві

Нехай $X = (X_t, t \geq 0)$ — стохастичний процес, визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Означення 1 ([1]) *Будемо казати, що випадковий процес $X = (X_t, t \geq 0)$ є процесом з незалежними приростами, якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ і всіх $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_{n+1} < \infty$ випадкові величини $X_{t_{j+1}} - X_{t_j}, 1 \leq j \leq n$ незалежні.*

Означення 2 ([1]) *Будемо казати, що випадковий процес $X = (X_t, t \geq 0)$ є процесом з однорідними приростами, якщо $X_{t_{j+1}} - X_{t_j} \stackrel{d}{=} X_{t_{j+1}-t_j} - X_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і всіх $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_{n+1} < \infty$.*

Означення 3 ([1]) *Процес X будемо називати процесом Леві, якщо*

1. $X_0 = 0 \quad$ *(м.н.)*

2. X *має однорідні і стаціонарні прирости*

3. X *є стохастично неперервним, тобто для всіх* $a > 0$ *і для всіх* $s \geq 0$

$$\lim_{t \to s} P(|X_t - X_s| > a) = 0.$$

Означення 4 ([1]) *Розподіл випадкової величини* Y *називається нескінченно подільним, якщо для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *існує послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин* $Y_{k,n}$, $k = \overline{1,n}$ *така, що*

$$Y \overset{d}{=} Y_{1,n} + \ldots + Y_{n,n}. \tag{1.1}$$

Умова (1.1) може бути також записана за допомогою характеристичних функцій. Якщо $\psi(z) = \mathbb{E}e^{izY}$ — характеристична функція випадкової величини Y, тоді розподіл Y є нескінченно подільним, якщо для довільного $n \in \mathbb{N}$ існує характеристична функція $\psi_n(z)$ така, що

$$\psi(z) = \psi_n^n(z). \tag{1.2}$$

Або ж для характеристичної експоненти $\Psi(z) = \log \psi(z)$ з (1.2) випливає, що

$$\Psi(z) = n\Psi_n(z). \tag{1.3}$$

Відомий наступний результат ([1]).

Теорема 1 *(Формула Леві-Хінчина для нескінченно подільних розподілів)*
Розподіл з характеристичною експонентою $\Psi(z)$ *є нескінченно подільним тоді і лише тоді, коли існує трійка* (a, σ, ν), *де* $a \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}$ *і* ν *— міра зосереджена на* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, *що задовольняє*

$\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\nu(dx) < \infty$ *така, що*

$$\Psi(z) = iaz - \frac{\sigma^2 z^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1 - izx\mathbb{1}_{|x|<1})\nu(dx) \tag{1.4}$$

для довільного $z \in \mathbb{R}$. *Більш того, трійка* (a, σ, ν) *єдиним чином визначає розподіл.*

Зазначимо, що з означення процесу Леві випливає, що, якщо X — процес Леві, тоді для довільного $t \geq 0$ випадкова величина X_t має нескінченно подільний розподіл. Дійсно, для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$X_t = (X_{t/n} - 0) + (X_{2t/n} - X_{t/n}) + (X_{3t/n} - X_{2t/n}) + \cdots + (X_{nt/n} - X_{(n-1)t/n})$$

і з умови 2 Означення 3 випливає, що всі доданки в дужках є незалежними і однаково розподіленими.
Для випадкової величини ξ позначатимемо

$$\phi_\xi(u) = \mathbb{E}e^{-u\xi}, \ u > 0.$$

Для процесів Леві відомі наступні результати ([1]).

Теорема 2 *Якщо* X *є процесом Леві, то для всіх* $u > 0, \ t \geq 0$

$$\phi_{X_t}(u) = e^{-t\eta(u)},$$

де $\eta(u) = \log(\mathbb{E}e^{-uX_1})$ *— символ Леві випадкової величини* X_1.

Теорема 3 *(Формула Леві-Хінчина для процесів Леві)*
Якщо X *є процесом Леві, то існують сталі* $a, \sigma \in \mathbb{R}$ *і міра* ν *зосереджена на* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, *така, що* $\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(1 \wedge x^2)\nu(dx) < \infty$ *і*

$$\eta(u) = au - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-ux} - ux\mathbb{1}_{|x|<1})\nu(dx), \quad u \geq 0. \tag{1.5}$$

І навпаки, для будь-якого відображення вигляду (1.3) *існує єдиний процес Леві* $X = (X_t, t \geq 0)$ *такий, що* $\log(\mathbb{E}e^{-uX_1}) = \eta(u)$.

1.2 Субординатори, обернені субординатори

Означення 5 ([1]) *Субординатором називатимемо одновимірний процес Леві, що є неспадним майже напевно.*

Теорема 4 ([1]) *(Формула Леві-Хінчина для субординатора) Символ Леві довільного субординатора $T = (T(t), t \geq 0)$ можна представити у вигляді*

$$\eta(u) = bu + \int_0^\infty (1 - e^{-ux})\nu(dx), \tag{1.6}$$

де $b \geq 0$ і міра ν задовольняє умови

$$\nu(-\infty, 0) = 0 \quad i \quad \int_0^\infty (1 \wedge x)\nu(dx) < \infty.$$

Означення 6 ([1]) *($\alpha-$стійкі розподіли) Розподіл випадкової величини X_1 будемо називати $\alpha-$стійким, якщо*

1. *при $\alpha = 2$, $\nu = 0$ і в такому випадку $X \sim N(a, \sigma)$*
2. *при $\alpha \in (0, 2)$, $\sigma = 0$ і*

$$\nu(dx) = \frac{c_1}{x^{1+\alpha}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)dx + \frac{c_2}{|x|^{1+\alpha}} \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x)dx,$$

   де $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$ і $c_1 + c_2 > 0$.

Відповідний такому X_1 процес Леві будемо називати $\alpha-$стійким процесом Леві.
Якщо до цього ж, розподіл є симетричним ($X \stackrel{d}{=} -X$), то його символ Леві матиме вигляд

$$\eta(u) = \rho|u|^\alpha,$$

де ρ — деяка невід'ємна стала. У такому випадку процес матиме наступну властивість:

$$X_t \stackrel{d}{=} t^{1/\alpha} X_1,$$

для довільного $t > 0$.
Помітимо також, що при $\alpha \in (0,1)$, $c_2 = 0$ і $a \geq 0$ $\alpha-$стійкий процес Леві буде субординатором.

Означення 7 ([1]) *Для довільного субодинатора X можемо визначити випадковий процес $Y = (Y_s, s \geq 0)$*

$$Y_s = \inf\{t \geq 0 : X_t > s\}.$$

Процес Y будемо називати оберненим до X субординатором. Зазначимо, що обернений субординатор може не бути процесом Леві.

1.3 Субординатор Дікмана

Означення 8 ([4]) *Субординатором Дікмана будемо називати субодинатор $D_\theta(t), t \geq 0$ з символом Леві вигляду (1.6) при $b = 0$, $\nu(dx) = \frac{\theta}{x}\mathbb{1}_{(0,1]}(x)dx$, де $\theta > 0$ — параметр.*

Введемо наступні позначення для функції розподілу та щільності субординатора Дікмана

$$F_\theta(t; x) = \mathbb{P}(D_\theta(t) < x),$$

$$f_\theta(t; x) = \frac{\partial}{\partial x} F_\theta(t; x).$$

Відомі наступні результати ([4, 22]).

Теорема 5 *Розподіл Дікмана $D_\theta(1)$ є нескінченно подільним і щільність $D_\theta(t)$ можна записати у вигляді*

$$f_\theta(t;x) = \begin{cases} \frac{t\theta \cdot e^{-\gamma \cdot \theta t}}{\Gamma(t\theta+1)} x^{t\theta-1}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{t\theta \cdot e^{-\gamma \cdot \theta t}}{\Gamma(t\theta+1)} x^{t\theta-1} - t\theta x^{t\theta-1} \int_0^{x-1} \frac{f_\theta(t;a)}{(1+a)^{t\theta}} da, & x > 1, \end{cases} \tag{1.7}$$

де $\gamma = -\int_0^\infty \log u \cdot e^{-u} du \approx 0.577$ *— стала Ейлера-Маскероні.*

Зауваження 1 *Один з можливих варіантів доведення формули (1.7) наведено в розділі Доповнення наприкінці дисертації, адже воно вимагає деяку кількість додаткових фактів, що не знадобляться в основній частині роботи.*

Зауваження 2 *Для* $\theta = 1$, *фунція* $\rho(x) = e^\gamma f_1(1,x)$ *відома як функція Дікмана ([7],[8]) і* ρ *задовольняє наступну систему*

$$\begin{cases} \rho(x) = 1, & x \in (0;1] \\ x\rho'(x) + \rho(x-1) = 0, & x \in (1,\infty). \end{cases}$$

Функція $\rho(x)$ *була вперше представлена в роботі Карла Дікмана [7], в якій він вивчав границю ймовірності того, що випадкове ціле число між* 1 *і* u *буде мати найбільший простий дільник, що не перевищує* $u^{1/x}$ *при* $u \to \infty$ *(див. також [17]).*

Подальші застосування розподілу Дікмана в теорії випадкових графів і апроксимації малих стрибків процесів Леві були встановлені в роботах [22] і [6] відповідно. Зв'язок між розподілом Дікмана і розподілом Діріхле було встановлено в статті [11]. Відомо також, що $f_\theta(t;x)$ задовольняє наступне диференціально-різницеве рівняння

$$x\frac{\partial}{\partial x} f_\theta(t;x) = (t\theta - 1) f_\theta(t;x) - t\theta f_\theta(t;x-1).$$

і

$$F_\theta(t;x) = \begin{cases} \frac{e^{-\gamma\cdot\theta t}}{\Gamma(t\theta+1)} x^{t\theta}, & 0 < x \le 1 \\ F_\theta(t;x-1) + \frac{x}{t\theta} f_\theta(t;x), & x > 1. \end{cases} \tag{1.8}$$

Наведемо властивості субординатора Дікмана ([6, 21, 22]).

Теорема 6 *1. Випадкова величина $D_\theta(1)$ може бути зображена у вигляді*

$$D_\theta(1) \stackrel{\mathrm{d}}{=} U_1^{1/\theta} + (U_1 \cdot U_2)^{1/\theta} + (U_1 \cdot U_2 \cdot U_3)^{1/\theta} + \ldots,$$

де $U_1, U_2, \ldots$ — незалежні, рівномірно на $[0,1]$ розподілені випадкові величини. Зауважимо, що ряд справа збігається м.н., оскільки його члени невід'ємні м.н. і ряд має скінченне математичне сподівання.

$D_\theta(t)$ також задовольняє наступне представлення на проміжку $[0,T]$:

$$D_\theta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} (U_1 \ldots U_j)^{1/\theta T}\, \mathbb{1}_{\tilde{U}_j \le t},$$

де $\{U_j\}$ і $\{\tilde{U}_j\}$ — незалежні послідовності однаково рівномірно розподілених на $(0,1)$ і однаково рівномірно розподілених на $(0,T)$ відповідно випадкових величин.

2. Для довільного $\theta > 0$ випадкова величина $D_\theta(1)$ задовольняє рівняння

$$D_\theta(1) \stackrel{\mathrm{d}}{=} U^{1/\theta}(1 + D_\theta(1)),$$

де U — рівномірно на [0,1] розподілена випадкова величина, незалежна з $D_\theta(1)$ справа.

3. *Якщо* $m_k(t) = \mathbb{E}[D_\theta^k(t)],\ k \in \mathbb{N}$, *тоді*

$$m_k(t) = \frac{t\theta}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} m_j, \tag{1.9}$$

де $m_0 = 1$.*Зокрема,*

$$\mathbb{E}[D_\theta(t)] = t\theta, \quad \mathrm{Var}[D_\theta(t)] = \frac{1}{2}t\theta.$$

4. *Випадкову величину* $D_\theta(1)$ *можна також представити у вигляді наступної суми*

$$D_\theta(1) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-T_n),$$

де $T_1, T_2, \ldots$ *— послідовні моменти стрибків однорідного процесу Пуассона з інтенсивністю* $\theta > 0$;

або

$$D_\theta(1) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n,$$

де $Y_1, Y_2, \ldots$ *— точки неоднорідного процесу Пуассона на* $(0, 1)$ *з функцією інтенсивності* $\frac{\theta}{x}dx$, *взяті у порядку спадання.*

1.4 Леми Бореля-Кантеллі

Означення 9 ([12]) *Для послідовності подій* $\{A_n, n \geq 1\}$ *позначимо*

$$A^* = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Нехай $\omega \in \Omega$ така, що $\omega \in A^*$, тоді для будь-якого $n \geq 1$ існує $m \geq n$ таке, що $\omega \in A_m$, тобто ω належить до нескінченної кількості подій A_m, тоді ми будемо казати, що події A_n відбуваються нескінченну кількість разів або нескінченно часто.

Теорема 7 ([12]) *(Перша лема Бореля-Кантеллі) Нехай $\{A_n, n \geq 1\}$ – довільна послідовність подій, тоді*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Longrightarrow \mathbb{P}(A_n \text{ нескінченно часто}) = 0.$$

Теорема 8 ([12]) *(Друга лема Бореля-Кантеллі) Нехай $\{A_n, n \geq 1\}$ – послідовність незалежних подій, тоді*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \Longrightarrow \mathbb{P}(A_n \text{ нескінченно часто}) = 1.$$

1.5 Функції з регулярною зміною

Означення 10 ([25, 3]) *Невипадкову дійснозначну функцію R будемо називати функцією з регулярною зміною на ∞, якщо вона додатна і вимірна на проміжку $[A, \infty)$ для деякого $A > 0$ і для довільного $c > 0$*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{R(xc)}{R(x)} = c^{\rho}$$

для деякої сталої ρ, $-\infty < \rho < \infty$, яку називають індексом регулярно змінної функції.
Функцію $R(\cdot)$ будемо називати функцією з регулярною зміною в 0, якщо функція $R(1/x)$ є функцією з регулярною зміною на ∞.

Означення 11 ([25, 3]) *Функції з регулярною зміною з індексом $\rho = 0$ будемо називати функцією з повільною зміною.*

1.6 Верхні і нижні функції. Закони повторного логарифма

Історія встановлення граничних теорем для послідовностей випадкових величин почалась з роботи 1713 року Ars Conjectandi швейцарського математика Якоба Бернуллі. У своїй книзі Бернуллі вперше доводить теорему про збіжність частки успішних екпериментів серед проведених до ймовірності успіху в одному експерименті. Пізніше узагальнення цієї теореми було опубліковано у роботі 1837 року французького математика Сімеона Дені Пуассона ([23]), де вперше і виникла назва теореми відомої зараз як закон великих чисел ([25]). Протягом багатьох років багато інших математиків зробили внесок в розвиток закону великих чисел, удосконалюючи його, щоб зробити його таким, яким він є сьогодні. Наведемо, наприклад, формулювання підсиленого закону великих чисел А. Колмогорова.

Теорема 9 ([19]) *Нехай ξ та ξ_n, $n \geq 1$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини і $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Якщо $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ і $\xi = \mu$, тоді*

$$\frac{S_n}{n} \to \mu \quad \textit{м.н. при } n \to \infty.$$

Проте, після встановлення закону великих чисел, постало питання про граничну поведінку випадкових величин $S_n - \mu n$.

Припустимо, що ξ — випадкова величина з розподілом Бернуллі, тобто

$$\mathbb{P}(\xi_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(\xi_n = 0) = 1 - p, \quad 0 \leq p \leq 1,$$

тоді $\mu = p$ в цьому випадку.

Позначимо тоді $\nu_n = S_n - np$. У 1909 році Е. Борель показав, що

$$\frac{\nu_n}{n} \to 0 \quad \text{м.н. при } n \to \infty.$$

Через 4 роки після цього Ф.Хаусдорф довів, що для довільного

$\varepsilon > 0$

$$\frac{\nu_n}{\sqrt{n^{1+\varepsilon}}} \to 0 \quad \text{м.н. при } n \to \infty.$$

Ще через рік Г. Харді і Дж. Літлвуд довели, що

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\nu_n|}{\sqrt{n \log n}} < \infty \quad \text{м.н. .}$$

Вже у 1924 році А. Хінчин встановив наступний результат

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\nu_n|}{\sqrt{2np(1-p)\log\log n}} = 1 \quad \text{м.н.}$$

Таким чином, у цій теоремі А. Хінчин встановив точну верхню границю росту величини $S_n - np$ ([14], [10]).
В подальшому А.Н. Колмогоров у 1929 р. ([18]) отримав наступний результат.

Теорема 10 *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні випадкові величини, абсолютне значення яких обмежене спільною сталою і дисперсія B_n суми $s_n = \sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k)$ прямує до нескінченності при $n \to \infty$. Тоді*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|s_n|}{\sqrt{2B_n \log\log n}} = 1 \quad \textit{м.н.} \tag{1.10}$$

У 1941 році П. Хартман і А. Вінтнер довели, що умова існування скінченної дисперсії є достатньою для виконання закону повторного логарифма (1.10) для сум незалежних, однаково розподілених випадкових величин ([13]). У 1966 році В. Штрассен довів також і необхідність цієї умови ([26]).
У 1932 р. А. Хінчин ([15]) встановив, що для процесів Леві, розподілених за законом Гаусса, м.н. виконується

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|X_t|}{\sqrt{2t\mathrm{Var}(X_1)\log\log t}} = 1.$$

У цій роботі було також встановлено локальний закон повторного логарифма:

$$\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{\sqrt{2t\mathrm{Var}(X_1)\log\log\frac{1}{t}}} = 1. \quad \text{м.н.}$$

за тих самих умов на процес X_t і припущення, що $a = 0$ в (1.4). Ці результати в подальшому були узагальнені і на інші об'єкти: наприклад, на залежні випадкові величини, незалежні функції, стаціонарні процеси тощо.
Розглянемо тепер означення, запропоноване у 1939 році А. Хінчином ([15]).

Означення 12 ([15]) *Верхньою межею або верхньою функцією випадкового процесу X_t будемо називати будь-яку додатну невипадкову функцію $u(t)$, для якої співвідношення*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{|X_t|}{u(t)} = 0$$

виконується з ймовірністю 1.

У своїй роботі 1939 року ([15]) А. Хінчин також встановив наступну теорему для стійких процесів Леві.

Теорема 11 *Припустимо, що S_t — $\alpha-$стійкий процес Леві $(0 < \alpha < 2)$ і нехай невипадкова функція $u(t)$ є додатною і*

$$u(t) \to 0 \quad i \quad \frac{u(t)}{t^{1/\alpha}} \to \infty$$

монотонно при $t \to 0+$. Тоді для того, щоб співвідношення

$$\lim_{t\to 0+} \frac{|X_t|}{u(t)} = 0$$

виконувалось з ймовірністю 1 необхідно і достатньо, щоб

$$\int_0^1 \frac{dt}{(u(t))^\alpha} < \infty.$$

У статті було такод наведено наступні результати.

Лема 1 ([15]) *Нехай X_t — довільний процес з незалежними і однорідними приростами, $X_0 = 0$, $u(t)$ — визначена для $0 < t < \sigma$ додатна неспадна функція, $\lim\limits_{t\to 0+} u(t) = 0$. Нехай також $c > 0$ — деяка стала і позначимо*

$$P_c(t) = \mathbb{P}(|X_t| > cu(t)).$$

Тоді для того, щоб функція $u(t)$ була верхньою функцією процесу X_t, необхідно і достатньо, щоб для довільного $c > 0$

$$\int_0^\sigma P_c(t)\frac{dt}{t} < \infty.$$

Теорема 12 ([15]) *Функція*

$$u(t) = \sqrt{t \log\log\frac{1}{t}}$$

є верхньою функцією для будь-якого процесу з незалежними і однорідними приростами, що не містить гауссової компоненти, тобто для якого $\sigma = 0$ в (1.5).

Теорема 13 ([15]) *Для того, щоб для процесу з незалежними і однорідними приростами X, $X_0 = 0$, виконувався локальний закон повторного логарифма:*

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{|X_t|}{\sqrt{t\log\log\frac{1}{t}}} = C, \quad C = const > 0 \quad \text{м.н.}$$

необхідно і достатньо, щоб він містив гауссівську компоненту, тобто, щоб $\sigma^2 > 0$ в (1.5).

У 1943 році Б.В. Гнєденко встановив наступні результати ([9]).

Теорема 14 ([9]) *Для процесу з незалежними і однорідними приростами X, такого, що $\mathbb{E}X_t = 0,\ t \geq 0$, виконується закон повторного логарифма*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|X_t|}{\sqrt{t \log\log t}} = C, \quad C = const > 0 \quad \textit{м.н.}$$

тоді і тільки тоді, коли він має скінченну дисперсію.

Теорема 15 ([9]) *Якщо дисперсія процесу з незалежними і однорідними приростами X є нескінченною, то існує функція $\omega(t)$ така, що $\omega(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, що*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|X_t|}{\omega(t)\sqrt{t \log\log t}} \neq 0, \textit{м.н.}$$

Розглянемо тепер результати, представлені у роботі 1971 року ([8]). Розглядатимемо субординатор X з символом Леві вигляду (1.6) і $b = 0$. Позначимо для $\gamma > 0$

$$h_\gamma(t) = \frac{\log|\log t|}{\psi(\gamma t^{-1} \log|\log t|)}, \tag{1.11}$$

де $\psi(\cdot)$ — обернена функція до $\eta(\cdot)$ символа Леві субординатора X. Функція $h_\gamma(\cdot)$ визначена в околі 0 і ∞.

Лема 2 ([8]) *Якщо $\gamma > 1$, тоді*

$$\liminf \frac{X_t}{h_\gamma(t)} \geq \gamma - 1 \quad \textit{м.н.}$$

в обох випадках: при $t \to 0+$ і $t \to \infty$.

Лема 3 ([8]) *Якщо $\gamma < 1$, тоді*

$$\liminf \frac{X_t}{h_\gamma(t)} \leq \gamma \quad \textit{м.н.}$$

в обох випадках: при $t \to 0+$ і $t \to \infty$.

Теорема 16 ([8]) *Якщо $\gamma > 1$ і для деякого $\varepsilon > 0$ $\eta(u) \geq u^{\varepsilon}$ для достатньо великих значень u, тоді існує стала $c > 0$ така, що*

$$\liminf_{t \to 0+} \frac{X_t}{h_\gamma(t)} = c \quad \textit{м.н.}$$

Якщо $\gamma > 1$ і для деякого $\varepsilon > 0$ $\eta(u) \leq u^{\varepsilon}$ для достатньо малих значень u, тоді існує стала $c > 0$ така, що

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{X_t}{h_\gamma(t)} = c \quad \textit{м.н.}$$

Позначимо тепер Y_s — обернений до X субординатор.

Теорема 17 ([8]) *Нехай $f(\cdot)$ — обернена функція до функції $h_1(\cdot)$ визначеної в (1.11). Тоді існує стала $c > 0$ така, що*

$$\limsup_{s \to \infty} \frac{Y_s}{f(s)} = c \quad \textit{м.н.}$$

Якщо $\nu((0, \infty)) = \infty$, то існує стала $c > 0$ така, що

$$\limsup_{s \to 0+} \frac{Y_s}{f(s)} = c \quad \textit{м.н.}$$

Згодом, у 1996, J. Bertoin ([2]) представив наступні результати.
Для міри μ позначатимемо $\bar{\mu}(x) = \mu((x; \infty))$.

Теорема 18 ([2], Theorem 9) *Нехай X — субординатор з $b = 0$ і мірою Леві ν. Припустимо, що $u : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — зростаюча функція така, що функція $\frac{u(t)}{t}$ також зростає. Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

(i) $\limsup_{t \to 0+} \frac{X_t}{u(t)} = \infty$ *м.н.;*

(ii) $\int_0^1 \bar{\nu}(u(t)) dt = \infty$*;*

(iii) $\int_0^1 \left(\eta(1/u(t)) - (1/u(t))\eta'(1/u(t))\right) dt = \infty$.

Врешті, якщо ці твердження не справджуються, тоді

$$\lim_{t\to 0+} \frac{X_t}{u(t)} = 0 \quad \textit{м.н.}$$

Зазначимо, що дана теорема є узагальненням результата А. Хінчина, Теореми 11, і встановлює необхідні і достатні умови на функцію u, для того, щоб вона була верхньою функцією для субординатора X при $b = 0$.

Теорема 19 ([2], Theorem 11) *Нехай X — субординатор з символом Леві $\eta(\cdot)$, що визначається формулою (1.2). Припустимо, що функція η є правильно змінною на ∞ з індексом $\alpha \in (0, 1)$. Тоді*

$$\liminf_{t\to 0+} \frac{X_t}{h(t)} = \alpha(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha},$$

де $h(\cdot)$ визначається формулою (1.11) при $\gamma = 1$.

Таким чином, в даній теоремі, було встановлено закон повторного логарифма для субординаторів, які мають символ Леві, що задовольняє умову регуляної зміни. Зокрема ця умова виконується для $\alpha-$стійкого субординатора при $b = 0$.
В ([2]) наведено також аналогічні до Теореми 18 і Теореми 19 результати при $t \to \infty$.
У 1966 році Дж. Човер навів наступну теорему для сум симетричних випадкових величин зі стійким розподілом.

Теорема 20 ([5]) *Нехай $(X_n, n \geq 1)$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з симетричним $\alpha-$стійким розподілом $(0 < \alpha < 2)$ і характеристичною функцією $\mathbb{E}e^{itX_n} = \exp(-|u|^\alpha)$. Позначимо $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Тоді*

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}\right|^{(\log\log n)^{-1}} = e^{1/\alpha}\right) = 1$$

Граничні теореми такого типу здобули назву закони повторного логарифму типу Човера.

У роботі 2005 року ([27]) було представлено наступні результати для багатовимірних процесів Леві, які ми наведемо тут в одновимірному випадку.

Теорема 21 ([27]) *Якщо B_t — вінерів процес, то*

$$\limsup_{t\to\infty}\left(\frac{|B_t|}{\sqrt{t}}\right)^{1/\log\log\log t} = e^{1/2} \quad \textit{м.н.}.$$

Теорема 22 ([27]) *Нехай X — процес Леві з символом Леві* (1.1). *Припустимо, що $u(t)$ — зростаюча на $[c,\infty)$ для деякого $c>0$. Якщо існує стала $0<\alpha\le 1$ така, що*

$$0<\liminf_{u\to\infty} u^{\alpha}\bar{\nu}(u)\le \limsup_{u\to\infty} u^{\alpha}\bar{\nu}(u)<\infty,$$

або, якщо $\mathbb{E}X_1=0$ і існує $1<\alpha<2$ така, що

$$0<\liminf_{u\to\infty} u^{\alpha}\bar{\nu}(u)\le \limsup_{u\to\infty} u^{\alpha}\bar{\nu}(u)<\infty,$$

тоді

$$\limsup_{t\to\infty}\left(\frac{|X_t|}{t^{1/\alpha}}\right)^{1/\log\log t} = e^{1/\alpha} \quad \textit{м.н.}$$

Граничні теореми такого типу вивчались також у роботах [16, 20] та інших.

Розділ 2

Основна частина

2.1 Симуляції

Розглядатимемо далі $D = D_\theta(t)$ — субодинатор Дікмана, тобто

$$\mathbb{E}e^{-uD_\theta(t)} = \exp\left(-t\int_0^1 (1-e^{-ux})\theta\frac{dx}{x}\right).$$

Згадаємо результат наведений в Теоремі 6.
Випадкова величина $D_\theta(1)$ може бути зображена у вигляді

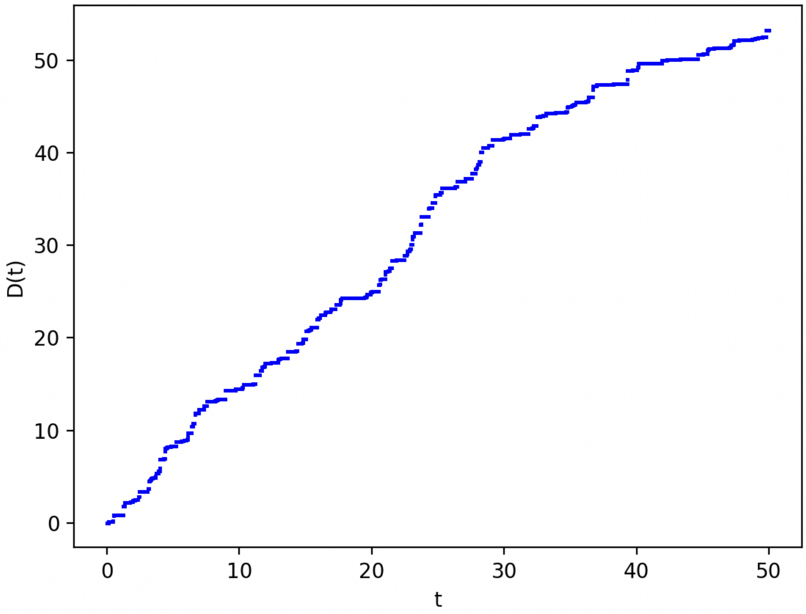
$$D_\theta(1) \stackrel{d}{=} U_1^{1/\theta} + (U_1 \cdot U_2)^{1/\theta} + (U_1 \cdot U_2 \cdot U_3)^{1/\theta} + \dots, \tag{2.1}$$

де $U_1, U_2, \dots$ — незалежні, рівномірно на $[0,1]$ розподілені випадкові величини.
Зазначимо, що $D_\theta(t) \stackrel{d}{=} D_{\theta t}(1)$. Таким чином, використовуючи представлення

$$D_\theta(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(X_\theta\left(t\frac{k}{n}\right) - X_\theta\left(t\frac{k-1}{n}\right)\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

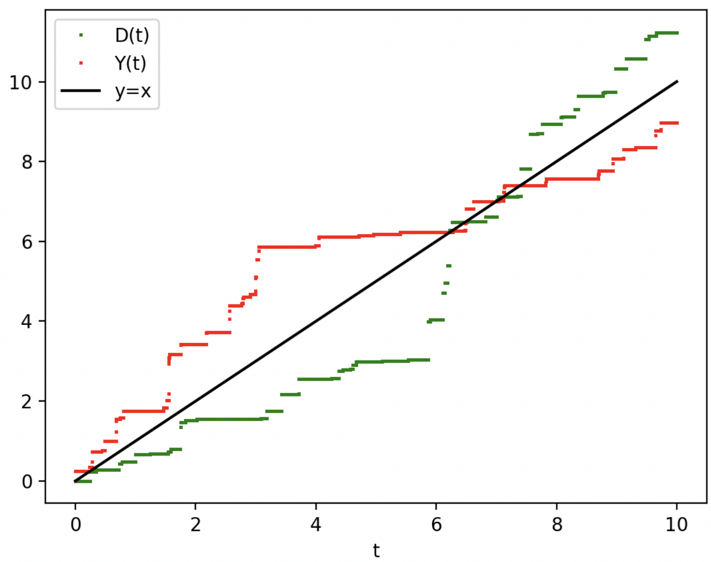
де $D_\theta(0) = 0$ і $D_\theta\left(t\frac{k}{n}\right) - D_\theta\left(t\frac{k-1}{n}\right) \stackrel{d}{=} D_\theta(\frac{t}{n})$, можемо змоделювати вибіркову траєкторію процесу, використовуючи наближення ряду (2.1) скінченною сумою.

```python
import numpy as np
from numpy import random
import matplotlib.pyplot as plt
from math import prod

theta=1
dt = 0.01 # Time step.
M=300 #number of terms in seria
T = 50# Total time.
n = int(T / dt)  # Number of time steps.
t = np.linspace(0., T, n)  # Vector of times.
D = [] # Vector of generated values.
y=[]

for j in range(n):
    u = np.random.uniform(size=M)
    x_pow = [pow(y,1/(theta*dt)) for y in u]
    D+=[sum([prod(x_pow[:k]) for k in range(1,M)])]
print(np.mean(D)/dt)

D_s=[sum(D[:i]) for i in range (n)]

plt.plot(t, D_s,'bs',markersize=1)
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('D(t)')
plt.show()
```



Вибіркова траєкторія субординатора Дікмана з параметром $\theta = 1$ на проміжку $[0, 50]$.

Змоделюємо також траєкторії оберненого субординатора Дікмана Y_t, використовуючи Означення 7.



Вибіркова траєкторія субординатора Дікмана X_t з параметром $\theta = 1$ і оберненого до нього субординатора Y_t на проміжку $[0, 10]$.

2.2 Основні результати

Не обмежуючи загальності покладемо далі $\theta = 1$ і позначимо $X = (X_t, t \geq 0)$ — процес Дікмана з параметром $\theta = 1$.
Процес X має скінченне математичне сподівання і дисперсію (1.9) і за Теоремою 6

$$\mathbb{E}X_1 = 1, \quad \mathrm{Var}X_1 = \frac{1}{2}.$$

Тому з Теореми 14 випливає, що для процесу X виконується закон повторного логарифма при $t \to \infty$:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|X_t - t|}{\sqrt{t \log\log t}} = 1 \quad \text{м.н.} \tag{2.2}$$

Вивчатимемо тепер поведінку процесу при $t \to 0+$.

Теорема 23 *Для субординатора Дікмана виконуються наступні співвідношення*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{X_t}{\exp\left(-\frac{1}{t^{1-\varepsilon}}\right)} = 0,\ \varepsilon > 0 \quad \textit{м.н.}, \tag{2.3}$$

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{X_t}{\exp\left(-\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right)} = \infty\ \varepsilon \geq 0 \quad \textit{м.н.} \tag{2.4}$$

Доведення. Оскільки $\nu(dx) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{(0,1]}(dx)$, то для довільного $x < 1$

$$\bar{\nu}(x) = \int_x^1 \frac{1}{y}dy = -\log x.$$

Розглянемо тоді для $\delta \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 \bar{\nu}\left(\exp\left(-\frac{1}{t^{1+\delta}}\right)\right)dt = \int_0^1 -\log\exp\left(-\frac{1}{t^{1+\delta}}\right) = \int_0^1 \frac{1}{t^{1+\delta}} \begin{cases} < \infty, & \delta < 0 \\ = \infty, & \delta \geq 0 \end{cases}.$$

Таким чином, з Теореми 18 випливає (2.3) і (2.4). $\square$

Теорема 24 *Для субординатора Дікмана справджуються наступні рівності*

$$\liminf_{t\to 0+} \frac{\log|\log X_t|}{\log\frac{1}{t}} = 1 \quad \text{м.н.} \tag{2.5}$$

або

$$\liminf_{t\to 0+} |\log X_t|^{\frac{1}{|\log t|}} = e \quad \text{м.н.} \tag{2.6}$$

Доведення. Зазначимо, що (2.6) випливає з (2.5). Доведемо тоді (2.5).

З $(2.3), (2.4)$ тоді випливає, що при $t \to 0+$ м.н.

$$\begin{cases} X_t > \exp\left(-\frac{1}{t^{1-\varepsilon}}\right) \text{ скінченну кількість разів} \\ X_t > \exp\left(-\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right) \text{ нескінченну кількість разів.} \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{cases} -\log X_t < \frac{1}{t^{1-\varepsilon}} & \text{скінченну кількість разів} \\ -\log X_t < \frac{1}{t^{1+\varepsilon}} & \text{нескінченну кількість разів} \end{cases}$$

Оскільки $X_t \to 0+$ при $t \to 0+$, то

$$\begin{cases} |\log X_t| < \frac{1}{t^{1-\varepsilon}} & \text{скінченну кількість разів} \\ |\log X_t| < \frac{1}{t^{1+\varepsilon}} & \text{нескінченну кількість разів.} \end{cases}$$

Таким чином, з цих нерівностей випливає, що

$$\begin{cases} \log|\log X_t| < (1-\varepsilon)\log\frac{1}{t} & \text{скінченну кількість разів} \\ \log|\log X_t| < (1+\varepsilon)\log\frac{1}{t} & \text{нескінченну кількість разів.} \end{cases}$$

Звідки і випливає (2.5). □

Для двох дійснозначних функцій $f(t)$ і $g(t)$ надалі будемо використовувати позначення

$$f(t) \sim g(t) \text{ при } t \to 0+,$$

якщо

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(t)}{g(t)} = 1 \text{ при } t \to 0+ .$$

Теорема 25 *Для субординатора Дікмана виконується*

$$\liminf_{t\to 0+} \frac{X_t}{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)} = 0 \quad \textit{м.н.} \tag{2.7}$$

$$\liminf_{t\to 0+} \frac{X_t}{\exp(-\frac{1}{t^{1+\varepsilon}})} = \infty \quad \textit{м.н.} \tag{2.8}$$

Доведення. Доведемо спочатку (2.7). Розглядатимемо тоді далі $f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right)$. З (2.4) відомо, що

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{X_t}{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)} = \infty \quad \text{м.н.}$$

З (1.8) відомо, що

$$F_t(x) = \mathbb{P}\left(X_t < x\right) = \frac{e^{-\gamma t}}{\Gamma(t+1)} x^t, \quad 0 \le x < 1. \tag{2.9}$$

Тоді для довільних $c > 0$ і $s > 0$ виконується співвідношення

$$\mathbb{P}\left(X_t < ce^{-\frac{1}{s}}\right) \sim e^{-\frac{t}{s}}, \quad \text{при } \ t \to 0+ . \tag{2.10}$$

Розглянемо тепер довільну спадну послідовність $(t_n, n \ge 1)$, $t_n \to 0+$ при $n \to \infty$. Тоді для $c > 0$

$$\sum_n \mathbb{P}\left(X_{t_n} - X_{t_{n+1}} < ce^{-1/t_n}\right) \ge \sum_n \mathbb{P}\left(X_{t_n} < ce^{-1/t_n}\right) \sim \sum_n e^{-1} = \infty.$$

Оскільки прирости $(X_{t_n} - X_{t_{n+1}}, n \ge 1)$ незалежні, то за лемою

Бореля-Кантеллі

$$\frac{X_{t_n} - X_{t_{n+1}}}{e^{-1/t_n}} < c \quad \text{нескінченно часто м.н.}$$

Звідси випливає,що

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{X_{t_n} - X_{t_{n+1}}}{e^{-1/t_n}} < c \quad \text{м.н.} \tag{2.11}$$

Оскільки $c > 0$ довільне, то

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{X_{t_n} - X_{t_{n+1}}}{e^{-1/t_n}} = 0 \quad \text{м.н.}$$

Розглядатимемо тепер для довільного $0 < \alpha < 1$ і для $t_n = \frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$

$$\sum_n \mathbb{P}\left(X_{t_{n+1}} > \alpha e^{-1/t_n}\right).$$

З (2.9) випливає, що

$$\mathbb{P}\left(X_{t_{n+1}} > \alpha e^{-1/t_n}\right) = 1 - \frac{\exp\left(-\gamma/(n+1)!^{1+\varepsilon}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}} + 1\right)} \alpha^{\frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}}} e^{-\frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}}} =$$
$$1 - (1-\lambda_n) e^{-\frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}}} = 1 - e^{-\frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}}} + \lambda_n e^{-\frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}}}.$$

де

$$\lambda_n = 1 - \frac{\exp\left(-\gamma/(n+1)!^{1+\varepsilon}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}} + 1\right)} \alpha^{\frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}}} > 0.$$

Причому для λ_n справелдиво

$$\lambda_n = 1 - \frac{\exp\left(-\gamma/(n+1)!^{1+\varepsilon}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}} + 1\right)} \alpha^{\frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}}} =$$
$$1 - \exp\left(-\frac{\gamma + \log\frac{1}{\alpha}}{(n+1)!^{1+\varepsilon}} - \log\Gamma\left(\frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}} + 1\right)\right) \sim$$
$$\sim \frac{\gamma + \log\frac{1}{\alpha}}{(n+1)!^{1+\varepsilon}} + \log\Gamma\left(\frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}} + 1\right).$$

Оскільки існує $K > 0$ таке, що для достатньо великих n

$$\log\Gamma\left(\frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}}+1\right) = \log\frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}}\Gamma\left(\frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}}\right) <$$

$$\log\frac{1}{(n+1)!^{1+\varepsilon}}\left((n+1)!^{1+\varepsilon}+K\right) = \log\left(1+\frac{K}{(n+1)!^{1+\varepsilon}}\right) \sim \frac{K}{(n+1)!^{1+\varepsilon}},$$

то звідси випливає, що

$$\sum_n \left(1 - e^{-\frac{1}{(n+1)^{1+\varepsilon}}}\right) \sim \sum_n \frac{1}{(n+1)^{1+\varepsilon}} < \infty \tag{2.12}$$

і

$$\sum_n \lambda_n e^{-\frac{1}{(n+1)^{1+\varepsilon}}} \sim \sum_n \lambda_n < \infty. \tag{2.13}$$

Отже, з (2.12) і (2.13) випливає, що

$$\sum_n \mathbb{P}\left(X_{t_{n+1}} > \alpha e^{-1/t_n}\right) < \infty.$$

Тоді за лемою Бореля-Кантеллі для довільного $0 < \alpha < 1$ справедливо

$$X_{t_{n+1}} > \alpha e^{-1/t_n} \quad \text{скінченну кількість разів м.н.}$$

Звідси можна зробити висновок, що

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{X_{t_{n+1}}}{e^{-1/t_n}} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{2.14}$$

Таким чином з $(2.11), (2.14)$ випливає, що

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{X_{t_n}}{e^{-1/t_n}} = 0.$$

Отже,

$$\liminf_{t\to 0+} \frac{X_t}{e^{-1/t}} = 0 \quad \text{м.н.},$$

що завершує доведення (2.7).
Розглядатимемо тепер $f(t) = \exp(-\frac{1}{t^{1+\varepsilon}})$, $\varepsilon > 0$.
Згідно з (2.10) для довільного $c > 0$ і $s > 0$

$$\mathbb{P}\left(X_t < c \cdot \exp\left(-\frac{1}{s^{1+\varepsilon}}\right)\right) \sim \exp\left(-\frac{t}{s^{1+\varepsilon}}\right) \quad \text{при } t \to 0+.$$

Тоді для довільної спадної послідовності $\{t_n, n \geq 1\}, t_n \to 0+$ при $n \to \infty$ виконується

$$\mathbb{P}\left(X_{t_n} < c \cdot \exp\left(-\frac{1}{t_{n-1}^{1+\varepsilon}}\right)\right) \sim \exp\left(-\frac{t_n}{t_{n-1}^{1+\varepsilon}}\right) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Розглянемо тепер $t_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$, тоді для достатньо великих n

$$\frac{t_n}{t_{n-1}^{1+\varepsilon}} = \frac{(n-1)^{1+\varepsilon}}{n} = \frac{n-1}{n} \cdot (n-1)^{\varepsilon} \geq \frac{1}{2}(n-1)^{\varepsilon}.$$

Тоді справедлива оцінка

$$\exp\left(-\frac{t_n}{t_{n-1}^{1+\varepsilon}}\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}(n-1)^{\varepsilon}\right).$$

Звідси випливає, що

$$\sum_n \mathbb{P}\left(X_{t_n} < c \cdot \exp\left(-\frac{1}{t_{n-1}^{1+\varepsilon}}\right)\right) < \infty.$$

Отже, за лемою Бореля-Кантеллі

$$\frac{X_{t_n}}{\exp\left(-\frac{1}{t_{n-1}^{1+\varepsilon}}\right)} < c \quad \text{скінченну кількість разів м.н.}$$

або

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{X_{t_n}}{\exp\left(-\frac{1}{t_{n-1}^{1+\varepsilon}}\right)} > c \qquad \text{м.н.}$$

Оскільки відображення $t \to X_t, t \geq 0$ є неспадним м.н. і відображення $t \to f(t) = \exp(-\frac{1}{t^{1+\varepsilon}})$ є зростаючим то для довільного t такого, що $t_n < t < t_{n-1}$ виконується

$$X_t \geq X(t_n) \geq cf(t_{n-1}) > cf(t) \quad \text{м.н.}$$

Оскільки $c > 0$ — довільне, то

$$\liminf_{t \to 0+} \frac{X_t}{\exp(-\frac{1}{t^{1+\varepsilon}})} = \infty \quad \text{м.н.},$$

що і завершує доведення. □

Зауваження 3 *Зазначимо, що з Теорем 29,25 випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{t \to 0+} \frac{X_t}{\exp -\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}} = \infty \quad \textit{м.н.}$$

Зауваження 4 *З Теорем 29,25 випливає, що*

$$\limsup_{t \to 0+} \frac{X_t}{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)} = \infty \quad \textit{м.н.},$$

$$\liminf_{t \to 0+} \frac{X_t}{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)} = 0 \quad \textit{м.н.}$$

Теорема 26 *Для субординатора Дікмана справджуються наступні рівності*

$$\limsup_{t \to 0+} \frac{\log|\log X_t|}{\log \frac{1}{t}} = 1 \quad \textit{м.н.} \tag{2.15}$$

або

$$\limsup_{t \to 0+} |\log X_t|^{\frac{1}{|\log t|}} = e \quad \textit{м.н.} \tag{2.16}$$

Доведення. З теорем 25, 29 випливає, що при $t \to 0+$ м.н.

$$\begin{cases} X_t < \exp\left(-\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right) \text{ скінченну кількість разів} \\ X_t < \exp\left(-\frac{1}{t^{1-\varepsilon}}\right) \text{ нескінченну кількість разів} \end{cases}$$

Звідси, аналогічно до теореми 24, випливає бажаний результат. $\square$

Зауваження 5 *З теорем 24,26 випливає тоді*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\log|\log X_t|}{\log\frac{1}{t}} = 1 \quad \text{м.н.}$$

або

$$\lim_{t\to 0+} |\log X_t|^{\frac{1}{|\log t|}} = e \quad \text{м.н.}$$

Теорема 27 *Позначимо тепер $D(s)$ — обернений субординатор Дікмана. Для нього виконується*

$$\limsup_{s\to 0+} \frac{|\log D(s)|}{\log\log\frac{1}{s}} = 1 \quad \text{м.н.} \tag{2.17}$$

або

$$\limsup_{s\to 0+} |D(s)|^{(\log\log\frac{1}{s})^{-1}} = e \quad \text{м.н.}. \tag{2.18}$$

Доведення. Оскільки твердження (2.18) є наслідком (2.17), будемо доводити лише (2.17).

Згадаємо (див. Теорему 24), що при $t\to 0+$ м.н.

$$\begin{cases} X_t > \exp\left(-\frac{1}{t^{1-\varepsilon}}\right) \text{ скінченну кількість разів} \\ X_t > \exp\left(-\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right) \text{ нескінченну кількість разів.} \end{cases}$$

З означення оберненого субординатора випливає, що $\{X_t > s\} = \{D(s)\le t\}$, тому при $t\to 0+$ м.н. виконується також

$$\begin{cases} D(\exp\left(-\frac{1}{t^{1-\varepsilon}}\right)) \le t \text{ скінченну кількість разів} \\ D(\exp\left(-\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right)) \le t \text{ нескінченну кількість разів} \end{cases}.$$

Виконавши заміну змінних отримаємо, що

$$\begin{cases} D(s) \le \left(\log\frac{1}{s}\right)^{-\frac{1}{1-\varepsilon}} \text{ скінченну кількість разів} \\ D(s) \le \left(\log\frac{1}{s}\right)^{-\frac{1}{1+\varepsilon}} \text{ нескінченну кількість разів} \end{cases}.$$

Це еквівалентно тому, що

$$\begin{cases} |\log D(s)| \geq \frac{1}{1-\varepsilon} \log\log \frac{1}{s} \text{ скінченну кількість разів} \\ |\log D(s)| \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \log\log \frac{1}{s} \text{ нескінченну кількість разів.} \end{cases}$$

Звідси і випливає (2.17). □

Теорема 28 *Для оберненого субординатора Дікмана $D(s)$ виконується*

$$\liminf_{s \to 0+} \frac{|\log D(s)|}{\log\log \frac{1}{s}} = 1 \quad \text{м.н.} \tag{2.19}$$

або

$$\liminf_{s \to 0+} |D(s)|^{(\log\log \frac{1}{s})^{-1}} = e \quad \text{м.н..} \tag{2.20}$$

Доведення. Доведення аналогічне попередньому, використовуючи Теорему 26. □

Зауваження 6 *З двох попередніх теорем випливає, що для оберненого субординатора Дікмана $D(s)$ виконується*

$$\lim_{s \to 0+} \frac{|\log D(s)|}{\log\log \frac{1}{s}} = 1 \quad \text{м.н.}$$

або

$$\lim_{s \to 0+} |D(s)|^{(\log\log \frac{1}{s})^{-1}} = e \quad \text{м.н..}$$

Розділ 3

Додаток

Наведемо одне з можливих доведень формул (1.7) для щільності розподілу Дікмана у випадку $t = 1$. Ідея даного доведення була наведена у [4].

Пригадаємо, що для розподілу Дікмана міра Леві процесу має вигляд

$$\nu(dx) = \frac{\theta}{x}\mathbb{1}_{(0,1]}(x)dx.$$

Пригадаємо тепер деякі відомі результати з теорії випадкових процесів.

Означення 13 ([24]) *Одновимірна ймовірнісна міра μ називаєтьcя саморозкладною, якщо для довільного $\lambda > 0$ існує ймовірнісна міра ν_λ така, що*

$$\psi(\zeta) = \psi(e^{-\lambda}\zeta)\phi_\lambda(\zeta),$$

де ϕ і ϕ_λ — характеристичні функції мір μ і ν_λ відповідно.

Пригадаємо наступний результат ([24], Corollary 15.11).

Теорема 29 *Ймовірнісна міра μ на $\mathbb{R}$ є саморозкладною тоді і лише тоді, коли її міра Леві має вигляд*

$$\frac{k(x)}{|x|}dx, \tag{3.1}$$

де $k(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty}(1 \wedge x^2)\frac{k(x)}{|x|}dx < \infty$ *і* $k(x)$ *є неспадною на* $(-\infty, 0)$ *і незростаючою на* $(0, \infty)$.

Лема 4 ([24],Lemma 53.2) *Нехай* μ *— саморозкладний розподіл на* $\mathbb{R}_+$ *з* $a = 0$. *Припустимо також, що функція* $k(x)$ *з Теореми 29 — кусково стала і, що для деякого* $0 < a_1 < \ldots < a_n < \infty$ *і додатних сталих* $c_1, \ldots, c_n$ *з* $c = \sum_{j=1}^{n} c_j$,

$$k(x) = \begin{cases} c & \text{для } 0 < x \leq a_1 \\ c - \sum_{l=1}^{j} c_l & \text{для } a_j < x \leq a_{j+1} \\ 0 & \text{для } x > a_{j+1} \end{cases}.$$

Тоді наступні твердження є правильними

1. *Розподіл* μ *є абсолютно неперервним і має щільність* $f(x)$. *Більш того,* $f(x)$ *є додатною і неперервною на* $(0; \infty)$ *функцією, рівною* Kx^{c-1} *на* $(0; a_1]$ *з* $K = const > 0$ *і належить класу* C^1 *на* $(0; \infty)\backslash\{a_1; \ldots; a_n\}$;

2. *Якщо* $c \leq 1$, *тоді* $f'(x) < 0$ *на* $(a_1; \infty)\backslash\{a_1; \ldots; a_n\}$;

3. *Якщо* $c > 1$, *тоді* $f(x)$ *належить класу* C^1 *на* $(0, \infty)$ *і існує точка* $a > b$, $b = sup\{x : k(x) > 1\}$, *така, що* $f'(x)$ *додатна на* $(0, a)$, *дорівнює* 0 *в точці* a, *і від'ємна на* (a, ∞).

Оскільки для субординатора Дікмана $k(x) = \theta \mathbb{1}_{(0,1]}(x)$, то ця функція задовольняє умови попередньої леми з $n = 1, c = c_1 = \theta, a_1 = 1$. Отже,

$$f(x) = Kx^{\theta-1}, \text{ при } x \in (0; 1]. \tag{3.2}$$

Теорема 30 ([24]) *Припустимо, що* μ *є саморозкладним розподілом на* $\mathbb{R}_+$ *з функцією* $k(x)$, *що задовольняє*

$c = k(0+) < \infty$, *і нехай*

$$\phi_\mu(u) = \exp\left(\int_0^\infty (e^{-ux} - 1)\frac{k(x)}{x}dx\right),\ u \geq 0,$$

де $L_\mu(\cdot)$ *— перетворення Лапласа міри* μ. *Позначимо*

$$K(x) = \exp\left(\int_x^1 (c - k(y))\frac{dy}{y}\right),\ x > 0.$$

Тоді щільність $f(x)$ *міри* μ *задовольняє співвідношення*

$$f(x) \sim \frac{\kappa}{\Gamma(c)}x^{c-1}K(x)\ as\ x \downarrow 0,$$

де κ *— стала, така, що*

$$\kappa = \exp\left(c\int_0^1 (e^{-x} - 1)\frac{dx}{x} + c\int_1^\infty e^{-x}\frac{dx}{x} - \int_1^\infty k(x)\frac{dx}{x}\right).$$

Тоді для субординатора Дікмана $c = \theta$ і

$$K(x) = \exp\left(\int_x^1 (\theta - \theta)\frac{dy}{y}\right) = 1$$

і

$$\kappa = \exp\left(\theta\int_0^1 (e^{-x} - 1)\frac{dx}{x} + \theta\int_1^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}\right) = e^{-\gamma\theta},$$

де γ — стала Ейлера-Маскероні.

Отже,

$$f(x) \sim \frac{e^{-\gamma\theta}}{\Gamma(\theta)}x^{\theta-1} \text{ при } x \to 0+.$$

Використовуючи (3.2) отримаємо

$$f(x) = \frac{e^{-\gamma\theta}}{\Gamma(\theta)}x^{\theta-1} = \frac{\theta e^{-\gamma\theta}}{\Gamma(\theta+1)}x^{\theta-1}\ for\ x \in (0;1].$$

Теорема 31 ([24]) *Припустимо, що* μ *— ймовірнісна міра на* $\mathbb{R}_+$.

Тоді μ є нескінченно подільною тоді і лише тоді, коли існує $\gamma_0 \geq 0$ і міра ν на $(0;\infty)$, що задовольняє

$$\int_{(0;\infty)} (1 \wedge x)\nu(dx) < \infty,$$

така, що

$$\int_{[0;x]} y\mu(dy) = \int_{(0;x]} \mu([0, x-y])y\nu(dy) + \gamma_0\mu([0, x]) \quad \textit{при } x > 0 \quad (3.3)$$

і

$$\phi_\mu(u) = \exp\left(-\gamma_0 u - \int_0^\infty (1 - e^{-ux})\nu(dx)\right), \ u \geq 0.$$

Оскільки субординатор Дікмана $D_{theta}(t)$ є процесом Леві, то розподіл $D_{theta}(1)$ є нескінченно подільним. Для нього $\gamma_0 = 0$ і з того, що ймовірнісна міра μ випадкової вкличини $X(1)$ є абсолютно неперервною (згідно з Лемою 4), випливає, що $\mu(dx) = f(x)dx$ і ми можемо переписати (3.3) наступним чином

$$\int_0^x yf(y)dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x-y} f(z)ydz\right)\frac{\theta}{y}dy \quad \text{при } x > 1$$

(адже $\nu(dx) = \frac{\theta}{x}\mathbb{1}_{(0,1]}(x)dx$).
Продиференціювавши цей вираз по змінній x отримаємо

$$xf(x) = \theta\int_0^1 f(x-y)dy.$$

При подальшому диференціюванні можемо отримати

$$xf'(x)+f(x) = \theta\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}f(x-y)dy = -\theta\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}f(x-y)dy = \theta(f(x)-f(x-1)).$$

Це еквівалентно тому, що

$$xf'(x) + f(x) = \theta(f(x) - f(x-1)),$$

Для $x > 1$ цю рівність можна переписати у вигляді

$$(x^{1-\theta} f(x))' = -\theta x^{-\theta} f(x-1).$$

Проінтегрувавши отриману рівність на $(0, x)$, отримаємо

$$x^{1-\theta} f(x) - \lim_{x \to 0} x^{1-\theta} f(x) = \theta \int_0^x \frac{f(z-1)}{z^\theta} dz.$$

Оскільки $\lim_{x\to 0} x^{1-\theta} f(x) = \lim_{x\to 0} x^{1-\theta} \cdot \frac{e^{-\gamma\theta}}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} = \frac{e^{-\gamma\theta}}{\Gamma(\theta)}$, можемо отримати

$$x^{1-\theta} f(x) - \frac{e^{-\gamma\theta}}{\Gamma(\theta)} = \theta \int_0^{x-1} \frac{f(z)}{(z+1)^\theta} dz.$$

Заміна θ на $t\theta$ і доводить (1.7).

Висновки

В магістерській дисертації для субординатора Дікмана було

1. Виконано симулювання траєкторій субординатора та оберненого до нього субординатора;
2. Встановлені верхні та нижні функції в околі нуля;
3. Отримані граничні теореми про збіжність майже напевно до ненульової константи;
4. Отримано результати для збіжності майже напевно до ненульової константи для оберненого субординатора.

Бібліоґрафія

[1] D. Applebaum. *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press, 2009.

[2] J. Bertoin. *Lévy processes*, volume 121. Cambridge University Press, 1996.

[3] V. V. Buldygin, K.-H. Indlekofer, O. I. Klesov, and J. G. Steinebach. *Pseudo Regularly Varying Functions and Generalized Renewal Processes*, volume 71. Springer, 2012.

[4] F. Caravenna, R. Sun, and N. Zygouras. The Dickman subordinator, renewal theorems, and disordered systems. *Electronic Journal of Probability*, 2019.

[5] J. Chover. A law of the iterated logarithm for stable summands. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17(2):441–443, 1966.

[6] S. Covo. On approximations of small jumps of subordinators with particular emphasis on a Dickman-type limit. *Journal of applied probability*, 46(3):732–755, 2009.

[7] K. Dickman. On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude. *Arkiv for matematik, astronomi och fysik*, 22(10):A–10, 1930.

[8] B. E. Fristedt and W. E. Pruitt. Lower functions for increasing random walks and subordinators. *Zeitschrift für*

Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, 18(3):167–182, 1971.

[9] B. Gnedenko. On the growth of homogeneous random processes with independent single-type increments. 40, 1943.

[10] B. V. Gnedenko. *Theory of Probability.* Routledge, 1988.

[11] R. C. Griffiths. On the distribution of points in a poisson dirichlet process. *Journal of applied probability*, 25(2):336–345, 1988.

[12] A. Gut. *Probability: A graduate course*, volume 200. Springer, 2005.

[13] P. Hartman and A. Wintner. On the law of the iterated logarithm. *American Journal of Mathematics*, 63(1):169–176, 1941.

[14] A. Khintchine. Über einen satz der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Fundamenta Mathematicae*, 6(1):9–20, 1924.

[15] A. Khintchine. Sur la croissance locale des processus stochastiques homogènes à accroissements indépendants. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 3(5):487–508, 1939.

[16] O. Klesov. A law of the iterated logarithm for stable summands. *Teor. Verojatnost. i Mat. Statist.*, 24:60–63, 1981.

[17] D. E. Knuth. *Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 4, The: Generating All Trees–History of Combinatorial Generation.* Addison-Wesley Professional, 2013.

[18] A. Kolmogorov. *Über das Gesetz des iterierten Logarithmus.* Mathematische Annalen volume, 1929.

[19] A. Kolmogorov. *Kolmogorov, A.N. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. English transl: Foundations of the Theory of Probability. (1956).* Chelsea, New York, 1933.

[20] D. Li and P. Chen. A characterization of Chover-type law of iterated logarithm. *SpringerPlus*, 3:1–7, 2014.

[21] S. A. Molchanov and V. A. Panov. The Dickman-Goncharov distribution. *Russian Mathematical Surveys*, 75(6):1089, 2020.

[22] M. D. Penrose and A. R. Wade. Random minimal directed spanning trees and Dickman-type distributions. *Advances in Applied Probability*, 36(3):691–714, 2004.

[23] S.-D. Poisson. *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile / par S.-D. Poisson.* Bachelier (Paris), 1837.

[24] K. Sato. Lévy processes and infinitely divisible distributions. *Cambridge University Press*, 1999.

[25] E. Seneta. Regularly varying functions. *Lecture Notes in Mathematics*, 508, 1976.

[26] V. Strassen. A converse to the law of the iterated logarithm. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 4:265–268, 1966.

[27] K. Yamamuro. A law of the iterated logarithm of Chover type for multidimensional Lévy processes. *Osaka Journal of Mathematics*, 42:367–383, 2005.