

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 517.9 : 534.1

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
_____ О.І.Клесов
« » 2023 р.

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова
математика»
зі спеціальності 111 «Математика»
на тему: «Регулярні та хаотичні атрактори системи
Краснопольської-Майлса при наявності запізнювання»

Виконав:
студент VI курсу, групи ОМ-11мн
Сеїт-Джеліль Ільмі Абібуллаєвич _____

Науковий керівник:
професор кафедри математичної фізики
та диференціальних рівнянь, доктор фізико-математичних наук,
професор, Швець Олександр Юрійович _____

Рецензент:
професор кафедри математичних методів системного аналізу
«КПІ ім. Ігоря Сікорського», доктор фізико-математичних наук,
професор, Данилов Валерій Якович _____

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.
Студент _____

Київ - 2023 року

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ
ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ О.І. Клесов

« » 2023 р.

Завдання

на магістерську дисертацію студенту

Сеїт-Джеліль Ільмі Абібуллаєвичу

1. Тема дисертації «Регулярні та хаотичні аттрактори в системі Краснопольської-Майлса при наявності запізнювання», науковий керівник дисертації Швець Олександр Юрійович, доктор фізико-математичних наук, професор, затверджені наказом по університету від «27» березня 2023 р. №1337-с.
2. Термін подання студентом дисертації 19 травня 2023 року.
3. Об'єкт дослідження: система диференціальних рівнянь Краснопольської-Майлса.
4. Предмет дослідження: дослідження впливу запізнювання на існування регулярних та хаотичних аттракторів системи Краснопольської-Майлса.
5. Перелік завдань, які потрібно виконати:
 - 5.1. Розглянути систему при малих значеннях запізнювання.
 - 5.2. Побудувати графіки залежностей ляпуновських показників від запізнювання.

- 5.3. Побудувати біфуркаційні дерева системи при зміні значень запізнювання.
- 5.4. Знайти області в просторі параметрів системи, в яких запізнювання може змінювати тип атракторів з регулярного на хаотичний і навпаки.
6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: дослідження проведені за пп. 5.3. – 5.5. будуть висвітлені на різноманітних графіках.
7. Орієнтовний перелік публікацій: Матеріали проведених досліджень стануть основою для підготовки подання публікації до закордонного видання, реферованого у науко-метричній базі Scopus.
8. Дата видачі завдання 08 лютого 2023 року.

Календарний план

№	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Розробка алгоритмів та комп'ютерних програм для дослідження динаміки системи у випадку малого запізнювання	08.02.23-01.03.23	Виконано
2.	Дослідження впливу запізнювання на ляпуновські показники і біфуркаційні дерева	01.03.23-15.03.23	Виконано
3.	Дослідження фазових портретів та перерізів Пуанкаре	15.03.23-01.04.23	Виконано
4.	Запізнювання як керуючий вплив при виникненні атракторів системи	01.04.23-21.04.23	Виконано
5.	Оформлення магістерської дисертації	21.04.23-18.05.23	Виконано

Студент

Сеїт-Джеліль Ільмі Абібуллайович

Науковий керівник

Швець Олександр Юрійович

Реферат

Магістерська дисертація містить 45 сторінок, 30 рисунків, 31 першоджерела.

Об'єктом даної дипломної роботи є система диференціальних рівнянь Краснопольської-Майлса.

Метою даної дипломної роботи є дослідження регулярних та хаотичних атракторів, які виникають в системі Краснопольської-Майлса при наявності запізнювання.

Актуальність дослідження магістерської дисертації зумовлена тим, що запізнювання завжди присутнє в реальних фізичних системах, внаслідок обмеженості швидкості проходження сигналів, а отже для більш точного аналізу поведінки системи, необхідно при побудові моделі враховувати фактор запізнювання.

Ключові слова: система Краснопольської-Майлса, динамічна система, атрактор, хаотичний атрактор, переріз Пуанкаре, ляпуновський характеристичний показник, фазовий портрет, рівняння з аргументом, що запізнюється.

Abstract

The master's thesis contains 45 pages, 30 figures, 31 bibliography items.

The object of this thesis is Krasnopol'skaya-Miles's system.

The aim of this thesis is to study regular and chaotic attractors, which appears in Krasnopol'skaya-Miles's system in presence of delay..

The relevance of the research is due to the fact that time-delay factor is always present in real-world systems due to limitation of speed of signals, so that for accurate analysis of system's dynamic regimes delay factor should be considered.

Key words: Krasnopol'skaya-Miles's system, dynamic system, attractor, chaotic attractor, Poincaré intersection, Lyapunov's characteristic exponents, phase portrait, equations with delayed argument.

Зміст

1	Теоретичні відомості	7
1.1	Диференціальні рівняння з аргументом, що відхиляється	7
1.2	Динамічні системи	9
1.2.1	Типи руху динамічної системи. Класифікація атракторів	11
1.3	Типи стійкості траєкторій	13
1.3.1	Спектр ляпуновських характеристичних показників	14
1.4	Деякі методи досліджень динамічних систем	17
2	Основна частина	22
2.1	Математична модель системи	22
2.2	Перша модель урахування фактору запізнювання	23
2.3	Друга модель урахування фактору запізнювання	34

Вступ

У математичній літературі рівняння з аргументом, що відхиляються вперше з'явилися ще у 18 сторіччі, проте тільки в останній час вивчення цієї теорії стимулювалось через велику кількість застосувань у теорії коливальних систем, теорії автоматичного керування, при вивченні проблем горіння палива в ракетних двигунах, проблем довгострокового планування в різних сферах економіки, в біології, соціології та багатьох інших галузях науки та техніки.

Рівняння з аргументом, що відхиляється описують багато процесів з післядією. Такі рівняння з'являються кожного разу, коли розглядається фізична або технічна задача в якій сила, що діє на матеріальну точку залежить від швидкості й положення цієї точки не тільки в даний момент часу, але й у деякий момент часу, що попередує даному.

Отже, виникає природна зацікавленість в дослідженні впливу наявності запізнення на неідеальну динамічну систему, таку як система Краснопольскої-Майлса [12]. В реальних системах завжди присутнє запізнювання, а отже у випадку, коли воно впливає на аттрактори, які в ній виникають, дослідження моделі без урахування запізнювання може призвести до катастрофічно хибних висновків. Тому для практичного застосування суттєвим є розгляд саме моделей з урахуванням запізнювання.

Оскільки математична модель досліджуваної системи є нелінійною системою диференціальних рівнянь п'ятого порядку, всі дослідження проводились за допомогою чисельних методів, а саме: для побудови фазових портретів використовувався метод Рунге-Кутти [30], [31], [5] четвертого порядку, для побудови спектра ЛХП використовувався алгоритм Бенеттина-Гальяні та інших [2], [5], для побудови перерізів Пуанкаре використовувався метод Ено [1], [5].

Розділ 1

Теоретичні відомості

У цьому розділі наводяться основні відомості з теорії диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється, теорії динамічних систем, а також теорії хаосу, які сформульовані за допомогою [5], [6].

1.1 Диференціальні рівняння з аргументом, що відхиляється

Означення 1 Диференціальним рівнянням з аргументом, що відхиляється називають диференціальне рівняння, в яке невідома функція та її похідні входять, взагалі кажучи, при різних значеннях аргумента. Наприклад,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad \tau > 0, \quad (1.1)$$

де $x(t)$ — невідома функція, t — час, $\dot{x}(t) = \frac{\partial x}{\partial t}(t)$.

Означення 2 Нехай розглядається рівняння (1.1), в якому запізнювання τ будемо вважати додатною константою. **Задача Коші** для цього рівняння полягає у визначенні неперервного

розв'язку $x(t)$ при $t > t_0$ за наступної умови:

$$x(t) = \varphi(t), \text{ при } t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \quad (1.2)$$

де $\varphi(t)$ — задана неперервна функція, що називається початковою. Проміжок $\tau \leq t \leq t_0$, на якому задана початкова функція називається початковою множиною і позначається E_{t_0} . Точка t_0 називається початковою. Зазвичай припускається, що $x(t_0 + 0) = \varphi(t_0)$

Зауваження 1 Якщо в рівнянні ну (1.1) та початкових умовах (1.2) вважати f і $\varphi(t)$ вектор-функціями, то ми маємо постановку задачі Коші для системи диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється.

Розглянемо диференціальне рівняння n -того порядку з l відхиленнями аргумента

$$\begin{aligned} x^{(m_0)} &= f(t, x(t), \dots, x^{(m_0-1)}(t), x(t - \tau_1), \dots, \\ &x^{(m_1)}(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_l), \dots, x^{(m_l)}(t - \tau_l)), \end{aligned} \quad (1.3)$$

де відхилення $\tau_i(t) \geq 0$, $\max_{0 \leq i \leq l} m_i = n$. Тут під $x^{(k)}(t - \tau_i)$ розуміють k -ту похідну від функції $x(z)$, взяту в точці $z = t - \tau_i$. Позначатимемо $\mu = \max_{1 \leq i \leq l} m_i$ та $\lambda = m_0 - \mu$. Існує наступна класифікація рівнянь з аргументом, що відхиляється.

- 1) Рівняння, для яких $\lambda > 0$ називаються рівняннями з аргументом, що запізнюється.
- 2) Рівняння, для яких $\lambda = 0$ називаються рівняннями нейтрального типу.
- 3) Рівняння, для яких $\lambda < 0$ називаються рівняннями випереджуючого типу.

1.2 Динамічні системи

Означення 3 *Означення динамічної системи складається з трьох компонентів:*

1. метричного простору D , кожна точка якого відповідає єдиному стану динамічної системи. Такий простір називається **фазовим**. Точки фазового простору називаються **зображальними**;
2. часу t , який може бути неперервним ($t \in \mathbb{R}$), або дискретним ($t \in \mathbb{Z}$);
3. закону (оператора) еволюції, тобто відображення будь-якої заданої точки x у фазовому просторі D і будь-якого значення t в однозначно визначений стан $\varphi(t, x) \in D$, який задовольняє такі теоретико-групові властивості:
 - (a) $\varphi(0, x) = x$;
 - (б) $\varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x)$;
 - (в) $\varphi(t, x)$ неперервне по (t, x) .

Фазовою траєкторією зображальної точки $x \in D$ називається сукупність точок фазового простору

$\varphi(x) := \{\varphi(t, x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ у випадку неперервного часу;

$\varphi(x) := \{\varphi(t, x) \mid t \in \mathbb{Z}\}$ у випадку дискретного часу.

Означення 4 *Зображення траєкторій динамічної системи у фазовому просторі називають **фазовим портретом**.*

Проте, оскільки зобразити портрет динамічної системи розмірність якої більше трьох неможливо, в дослідженнях зазвичай користуються проєкціями фазових портретів на обрану площину.

Нехай множина $V \subset D$, а $\mu(V)$ - міра множини V . Позначимо $\varphi(t, V) := \{\varphi(t, x) | x \in V\}$ — сукупність фазових точок в момент часу t , траєкторії яких починаються з точок множини V .

Означення 5 Введемо наступну класифікацію динамічних систем.

*Динамічна система називається **консервативною**, якщо*

$$\forall V \subset D \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(\varphi(t, V)) = \mu(V)$$

*Динамічна система називається **дисипативною**, якщо*

$$\forall V \subset D \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(\varphi(t, V)) = 0$$

Означення 6 Множина $\mathbb{K} \subset D$ називається **інваріантною**, якщо

$$\varphi(\mathbb{K}) = \mathbb{K},$$

де $\varphi(\mathbb{K}) := \{\varphi(x) | x \in \mathbb{K}\}$.

Означення 7 Інваріантна множина $\mathbb{A} \subset D$ називається **атрактором**, якщо

(i) \exists відкрита множина

$$B \supset \mathbb{A} : \forall x \in B \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\mathbb{A}, \varphi(t, x)) = 0,$$

(ii) $\nexists C \subset \mathbb{A} : C$ є інваріантною множиною,

де $\rho(\cdot, \cdot)$ - метрика на D ; $\rho(\mathbb{A}, x) := \inf_{y \in \mathbb{A}} \rho(y, x)$ — відстань від точки x до множини \mathbb{A} .

Зауваження 2 Умова (i) означає, що $\exists \mathbb{A}_\varepsilon$ — окіл множини \mathbb{A} такий, що кожна фазова траєкторія зображальної точки з цього околу \mathbb{A}_ε з плином часу прямує до \mathbb{A} , тобто множина \mathbb{A} є притягувальною.

Зауваження 3 Умова (ii) означає, що аттрактор \mathbb{A} є найменшою можливою множиною і не є об'єднанням інших аттракторів.

Зауваження 4 Відповідно до загальної теорії динамічних систем аттрактори існують тільки у дисипативних системах.

Означення 8 Множина $\mathbb{B}_\mathbb{A}$ називається **басейном притягання** аттрактора \mathbb{A} , якщо

$$\forall x \in \mathbb{B}_\mathbb{A} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\mathbb{A}, \varphi(t, x)) = 0.$$

1.2.1 Типи руху динамічної системи.

Класифікація аттракторів

В загальній теорії динамічних систем рух дисипативних систем у фазовому просторі розділяють на два типи:

- а) перехідний, нестационарний рух, який відповідає переходу системи від початкового стану до граничної множини (аттрактора) у фазовому просторі;
- б) усталений, стаціонарний рух, фазові траєкторії якого вже належать граничній множині (аттрактору).

З теорії динамічних систем відомо, що в дисипативній динамічній системі існує три типи траєкторій:

1. положення рівноваги (точки у фазовому просторі);
2. цикли (замкнені лінії у фазовому просторі);

3. траєкторії без самоперетинів (незамкнені траєкторії).

Зауваження 5 *Якщо замкнена фазова траєкторія (цикл) є ізольованою, тобто в її малому околі не існує інших замкнених траєкторій, то така траєкторія називається **граничним циклом**.*

Проте, частіше атрактори класифікують за дещо іншим принципом, а саме розподіляють на **регулярні** та **хаотичні**. Виявляється, якщо довільно обрати на траєкторії початковий стан, зображальна точка динамічної системи повертатиметься в його окіл за період T у випадку регулярних атракторів та в непередбачувані моменти часу t у випадку хаотичних, причому в обох випадках поведінка системи обумовлена її властивостями, а не впливом зовнішніх чинників. До регулярних атракторів відносять:

- 1) положення рівноваги (точки у фазовому просторі);
- 2) граничні цикли (замкнені лінії у фазовому просторі);
- 3) квазіперіодичні траєкторії (тороїдальні поверхні у фазовому просторі).

Решта атракторів, для яких не виконується умова повернення зображальної точки в окіл заздалегідь обраного початкового стану на атракторі за однаковий період T , називають дивними (хаотичними). Тож, з одного боку маємо детерміновану динамічну систему, а з іншого хаотичну поведінку. Тому для позначення такого типу динаміки став уживатися термін «**детермінований хаос**». Математичним образом детермінованого хаосу у фазовому просторі є складним чином улаштовані притягувальні множини, фазові траєкторії яких не належать до жодного типу регулярних атракторів. Фазові траєкторії мають вигляд нескінченної лінії, яка не має самоперетинів, не залишає при $t \rightarrow +\infty$ замкненої області й не притягується до регулярних атракторів.

1.3 Типи стійкості траєкторій

Означення 9 Розв'язок $x(t, x_0)$ системи диференціальних рівнянь називається стійким за Лагранжем, якщо

$$\exists M > 0 : \forall t \geq 0 \|x(t, x_0)\| < M.$$

Тобто траєкторія $x(t, x_0)$ увесь час знаходиться в обмеженій області фазового простору.

Достатньою умовою існування атрактора дисипативної динамічної системи є існування множини B такої, що кожна траєкторія, яка починається з цієї множини, стійка за Лагранжем.

Означення 10 Траєкторія $x(t, x_0)$ називається стійкою за Ляпуновим, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$$\forall x'_0 \|x_0 - x'_0\| < \delta \Rightarrow \forall t > 0 \|x(t, x_0) - x(t, x'_0)\| < \varepsilon.$$

Геометрично це означає, що дві близькі у початковий момент часу траєкторії розв'язків назавжди залишаються близькими.

Зауваження 6 Відомо, що кожна траєкторія, яка належить одному з регулярних атракторів, є стійкою за Ляпуновим.

Натомість всі траєкторії хаотичних атракторів динамічних систем є нестійкими за Ляпуновим.

Означення 11 Траєкторія $x(t, x_0)$ називається асимптотично стійкою, якщо вона стійка за Ляпуновим та

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x_0) - x(t, x'_0)\| = 0.$$

1.3.1 Спектр ляпуновських характеристичних показників

Нехай розглядається автономна система звичайних диференціальних рівнянь n -го порядку в нормальному вигляді:

$$\dot{x} = f(x), \quad f : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вектор невідомих функцій,

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots,$$

$f_n(x))$ — неперервно диференційовна вектор-функція n -змінних.

Припустимо, що $\forall x(t, x_0)$ — розв'язку рівняння (1.4), виконується:

$x(0, x_0) = x_0 \in V$, існує при всіх $t \in [0, +\infty]$, він єдиний і не

залишає множини V . В такому випадку відображення

$$\varphi : [0, +\infty) \times V \rightarrow V:$$

$$\varphi(t, x_0) = x(t, x_0)$$

визначає динамічну систему з метрикою

$$\rho(x, y) = \|x - y\|,$$

де $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ - евклідова норма.

Нехай $x(t)$ — деяка фазова траєкторія системи (1.4), яку ми будемо

називати *незбуреною*. Покладемо $y(t) = x(t) + \tilde{x}(t)$ — близька до

незбуреної траєкторія, яка реалізується при незначно змінній

початковій умові. Назвемо траєкторію $y(t)$ *збуреною*. Тоді еволюція

малого збурення $\tilde{x}(t)$ у лінійному наближенні описується

рівнянням першого наближення:

$$\dot{\tilde{x}} = A(t), \quad (1.5)$$

де матриця $A(t)$ має вигляд:

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \frac{\partial X_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Для системи (1.5) має місце теорема.

Теорема 1 Ляпунова(узагальнена). *Нехай існує така константа M , що для всіх елементів A_{ij} матриці A і для довільного T :*

$$\frac{1}{T} \int_0^T |A_{ij}(t)| dt \leq M,$$

тоді

1. $\forall \tilde{x}(t)$ — розв'язку рівняння (1.5) існує ляпуновський характеристичний показник — дійсне число, відмінне від $\pm\infty$, яке визначається за формулою

$$\lambda_{\tilde{x}(t)} = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|\tilde{x}(T)\|; \quad (1.6)$$

2. При множенні розв'язку на константу C ляпуновський характеристичний показник не змінюється

$$\lambda_{C\tilde{x}(t)} = \lambda_{\tilde{x}(t)}; \quad (1.7)$$

3. Ляпуновський характеристичний показник лінійної комбінації двох розв'язків не перевищує більшого з показників цих двох розв'язків

$$\lambda_{C_1\tilde{x}_1(t)+C_2\tilde{x}_2(t)} \leq \max(\lambda_{\tilde{x}_1(t)}, \lambda_{\tilde{x}_2(t)}); \quad (1.8)$$

4. Існує n лінійно незалежних розв'язків $\tilde{x}_i(t)$ (фундаментальна система розв'язків) рівняння (1.5), яким відповідає n ляпуновських характеристичних показників, які нумеруються в порядку спадання $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Набір чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ називається спектром ляпуновських характеристичних показників (ЛХП). Найбільше із цих чисел λ_1 називається старшим ляпуновським показником. Спектр ЛХП слід розглядати як характеристику лінійної системи рівнянь (1.5) у цілому, а не якого-небудь одного розв'язку $\tilde{x}(t)$, оскільки розв'язок не залежить від вибору фундаментальної системи $\{\tilde{x}_i(t)\}$. На підставі (1.7)-(1.8) для будь-якого розв'язку $\tilde{x}(t)$ ляпуновським характеристичним показником обов'язково буде одне з чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

Отже, для кожної траєкторії $x(t)$ вихідної системи рівнянь, система першого наближення (1.5) дає цілком певний спектр ЛХП. Присутність в цьому спектрі показника λ означає, на підставі (1.6), що існує таке збурення вихідної траєкторії, яке еволюціонує в часі, у лінійному наближенні, як $e^{\lambda t}$. Отже, присутність у спектрі хоча б одного додатного показника означає нестійкість за Ляпуновим розглянутої траєкторії. Якщо всі показники від'ємні, то це свідчить про асимптотичну стійкість траєкторії.

Оскільки кожний розв'язок системи має визначений спектр ЛХП природньо приписувати його і атракторам, що складаються з однієї фазової траєкторії (положення рівноваги, граничний цикл). Постає питання, чи можна приписувати спектр ЛХП деякої однієї фазової траєкторії атрактору, що складається з множини траєкторій (тороїдальна поверхня, хаотичний атрактор). Відповідь на нього дає мультиплікативна ергодична теорема В. Оселедця, яка стверджує, що взята навмання траєкторія на атракторі майже напевно буде мати цілком визначений спектр ЛХП, який можна приписати атрактору в цілому.

Спектр ЛХП атрактора дисипативної динамічної системи повинен задовольняти наступні умови.

- 1) Сума всіх n показників повинна бути від'ємною

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0.$$

Це умова дисипативності, завдяки якій атрактор є притягувальною граничною множиною нульової міри у фазовому просторі.

- 2) В атрактора, відмінного від положення рівноваги, обов'язково повинен бути хоча б один нульовий показник.

Припустимо, що ляпуновські характеристичні показники впорядковані за спаданням. Будемо позначати додатний показник знаком «+», від'ємний — знаком «-», а нульовий — знаком «0». Тоді атрактору динамічної системи у фазовому просторі розмірності n буде відповідати набір з n знаків, який ми будемо називати сигнатурою спектра ЛХП. Наприклад, деяким атракторам п'ятивимірної динамічної системи відповідають наступні сигнатури спектру ЛХП:

$\langle -, -, -, -, - \rangle$ — стійке положення рівноваги,

$\langle 0, -, -, -, - \rangle$ — граничний цикл,

$\langle +, 0, -, -, - \rangle$ — хаотичний атрактор.

1.4 Деякі методи досліджень динамічних систем

При математичному моделюванні більшості практичних задач у нелінійній динаміці на частіше використовуються диференціальні

рівняння та дискретні відображення, які залежать від ряду параметрів. Зміна параметрів системи може призвести до якісного перетворення її фазового портрета.

Означення 12 *Значення параметра, при якому відбувається якісне перетворення фазового портрету динамічної системи називається біфуркаційним значенням, або точкою біфуркації.*

Біфуркації атракторів поділяють на внутрішні (м'які) біфуркації та кризи (жорсткі) біфуркації. Внутрішні біфуркації пов'язані зі змінами самих атракторів, але не зачіпають їх басейнів притягання. Кризи атракторів супроводжуються руйнуванням атрактора та якісною перебудовою басейна притягання.

Наочна ілюстрація поведінки динамічної системи може бути подана на **фазопараметричній характеристиці**, яку також називають біфуркаційним деревом.

Для його побудови послідовно задаються значення параметра з деяким малим кроком і для кожного значення параметра a обчислюється деяке, достатньо велике, число ітерацій алгоритму чисельного розв'язку задачі Коші, у випадку, коли в якості динамічної системи розглядається система диференціальних рівнянь. З отриманого масива значень фазових змінних виключається значення, відповідні перехідному процесу. Далі, на координатну площину (a, x) наносяться точки, абсциса яких дорівнює заданому значенню параметра, а ордината відповідає проєкціям точок атрактора на обрану вісь. У випадку граничного циклу кількість точок є скінченною і кожна точка повторюється строго через період. На рис. (1.1) добре видно точки біфуркацій подвоєння періода, де кожна гілка дерева розщеплюється на дві. В свою чергу, кількість точок хаотичного атрактора збільшується зі збільшенням кількості ітерацій і передбачити появу тієї чи іншої точки на такому атракторі неможливо. На малюнку відповідні області виглядають як густо заповнені точками ділянки — «крони»

біфуркаційного дерева.

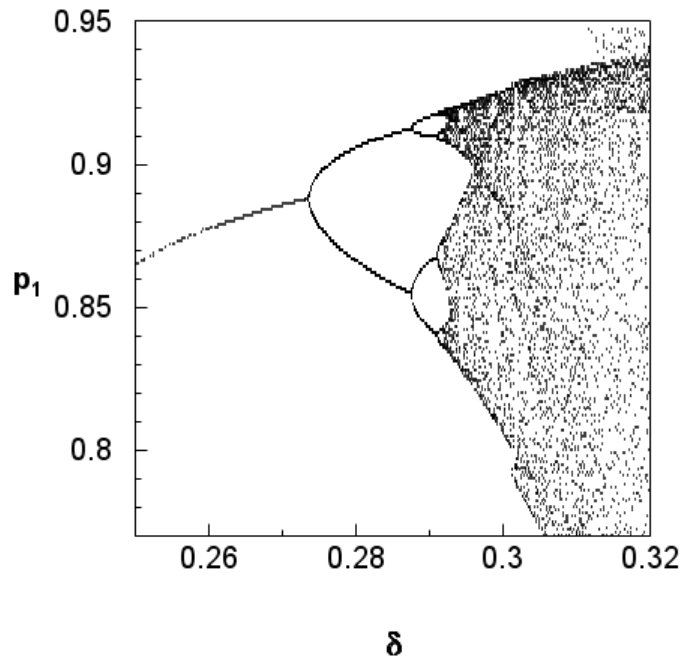


Рис. 1.1: Фазопараметрична характеристика

Розглянемо динамічну систему з неперервним часом, динаміка якої описується деякими диференціальними рівняннями. Нехай, для визначеності, це система із тривимірним фазовим простором виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, z) \\ \dot{y} &= f_2(x, y, z) \\ \dot{z} &= f_3(x, y, z). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Далі розглянемо деякий розв'язок системи (1.9), якому відповідає у фазовому просторі траєкторія Γ . Помістимо у фазовому просторі деяку площину S , рівняння якої має вигляд:

$$S(x, y, z) = 0. \tag{1.10}$$

Площина S повинна розміщуватись так, щоб траєкторія Γ багаторазово її перетинала і дотик траєкторії до площини був

неможливий. Така площина S називається **січною Пуанкаре** фазової траєкторії Γ .

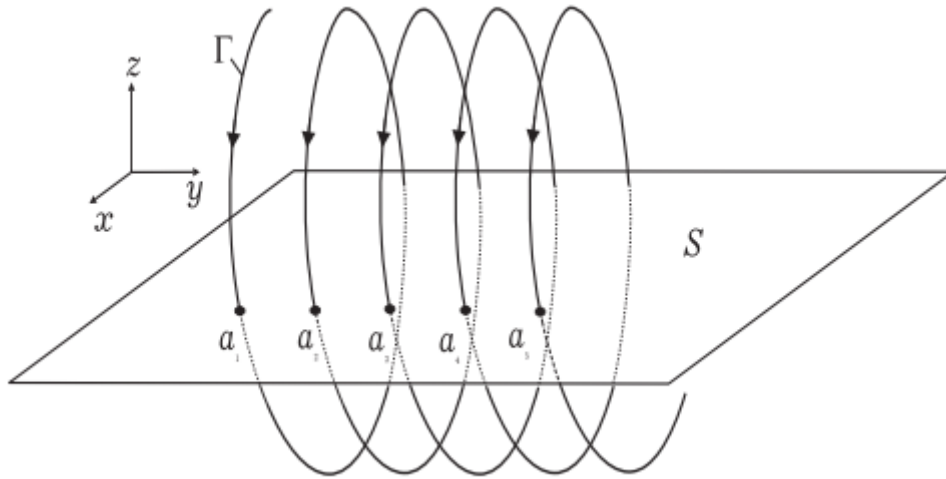


Рис. 1.2: Переріз Пуанкаре

Позначимо точки перетину траєкторії Γ із січною S через a_1, a_2, \dots, a_n . Відзначимо, що послідовність точок $\{a_n\}$ задається перетинами Γ з S в одному напрямку. Отримана дискретна множина точок $\{a_n\}, n = 1, 2, 3, \dots$ на січній Пуанкаре називається перерізом Пуанкаре для траєкторії Γ .

Переріз Пуанкаре також породжує деяке дискретне відображення, яке ставить у відповідність будь-якій точці $\{a_n\}$ наступну за $\{a_n\}$ точку $\{a_{n+1}\}$. Закон відповідності між попередньою й наступною точками перерізу Пуанкаре називається відображенням Пуанкаре. Для розглянутого тривимірного випадку це відображення буде вже двовимірним

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= P_2(x_n, y_n). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Таким чином, задача вивчення динамічної системи (1.9) може бути зведена до задачі вивчення відповідного відображення Пуанкаре, яке має розмірність на одиницю меншу, ніж розмірність вихідної

динамічної системи. При цьому структура динамічної системи однозначно (але не взаємно однозначно) визначає структуру породжуваного нею дискретного відображення (1.11). Ця підміна об'єкта дослідження не супроводжується будь-якими апроксимаціями, аналіз залишається точним. Отже, фазовпараметричною характеристикою деякого розв'язку ми будемо називати фазопараметричну характеристику будь-якого відображення Пуанкаре цього розв'язку.

Розділ 2

Основна частина

2.1 Математична модель системи

В роботі [12] показано, що процес взаємодії між коливаннями вільної поверхні рідини по домінантним резонансним модам і обертанням вала електродвигуна з обмеженою потужністю описується наступною системою п'яти звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)\right]q_1 + B(p_1q_2 - p_2q_1)p_2; \\ \frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)\right]p_1 + B(p_1q_2 - p_2q_1)q_2 + 1; \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 - \mu_1 q_1 + N_1 \beta; \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)\right]q_2 - B(p_1q_2 - p_2q_1)p_1; \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)\right]p_2 - B(p_1q_2 - p_2q_1)q_1.\end{aligned}\tag{2.1}$$

У системі (2.1) p_1, q_1 та p_2, q_2 — коефіцієнти розкладу амплітуд коливань вільної поверхні рідини, відповідно за першою та другою основними домінантними модами, фазова змінна β описує функціонування джерела збудження коливань; α — коефіцієнт сил в'язкого демпфування; μ_1 — коефіцієнт пропорційності

вібраційного моменту; N_1 — кут нахилу статичної характеристики електродвигуна. Параметри A, B є константами, які залежать від радіуса бака й висоти налитої в нього рідини. Величина N_3 залежить від радіуса оболонки, довжини крипошипу та постійної складової статичної характеристики електродвигуна.

2.2 Перша модель урахування фактору запізнювання

Розглянемо систему (2.1), в якій замінимо третє рівняння на рівняння із запізнюванням, відхиляючи аргумент функції q_1 на деяку додатну константу δ . Така модель враховуватиме запізнювання зворотного впливу коливної системи (бака з рідиною) на джерело збудження коливань (електродвигун).

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_2; \\
 \frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_2 + 1; \\
 \frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 - \mu_1 q_1 (\tau - \delta) + N_1 \beta; \\
 \frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_1; \\
 \frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_1.
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Припустимо, що запізнювання δ мале. Тоді можемо використати наступне наближення

$$q_1(\tau - \delta) \approx q_1(\tau) - \delta \cdot \frac{dq_1}{d\tau}.
 \tag{2.3}$$

Підставимо (2.3) у третє рівняння системи (2.2)

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_1 + B(p_1q_2 - p_2q_1)p_2; \\
\frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_1 + B(p_1q_2 - p_2q_1)q_2 + 1; \\
\frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 - \mu_1q_1 + \mu_1\delta\frac{dq_1}{d\tau} + N_1\beta; \\
\frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_2 - B(p_1q_2 - p_2q_1)p_1; \\
\frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_2 - B(p_1q_2 - p_2q_1)q_1.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Перепишемо (2.4) в нормальному вигляді

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_1 + B(p_1q_2 - p_2q_1)p_2; \\
\frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_1 + B(p_1q_2 - p_2q_1)q_2 + 1; \\
\frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 - \mu_1q_1 + N_1\beta + \mu_1\delta\{\alpha q_1 + [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_1 + \\
&\quad + B(p_1q_2 - p_2q_1)q_2 + 1\}; \\
\frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_2 - B(p_1q_2 - p_2q_1)p_1; \\
\frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_2 - B(p_1q_2 - p_2q_1)q_1.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

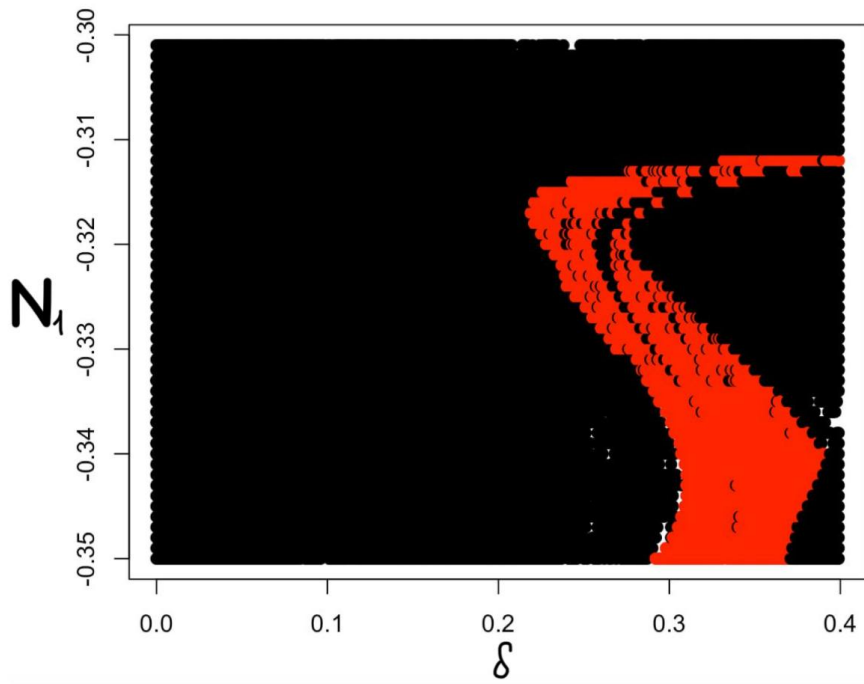
Система (2.5) є системою звичайних диференціальних рівнянь, в якій запізнювання δ виступає у ролі параметра цієї системи.

Найбільш наочним способом візуалізації типової поведінки системи є побудова **карти динамічних режимів** — діаграми на площині, на осях якої відкладено значення параметрів, а у відповідних точках різними кольорами зображено типовий усталений режим динамічної системи. Для побудови такої карти діапазон значень одного з обраних параметрів розбивається із деяким достатньо малим кроком h і кожному значенню такого розбиття ставиться у

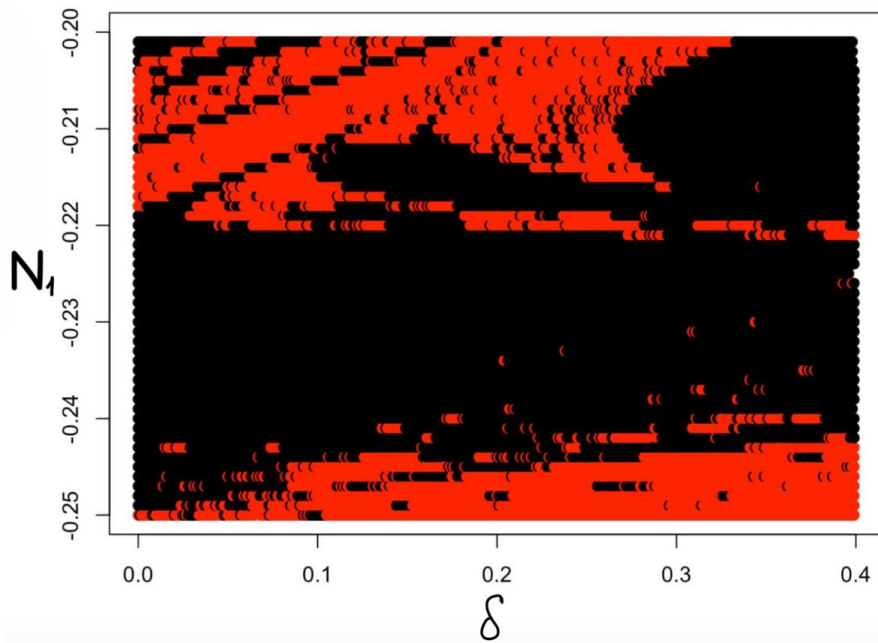
відповідність кожне значення аналогічного розбиття діапазона іншого параметра. Для кожної з утворених пар обчислюється спектр Ляпуновських характеристичних показників, сигнатура якого визначає тип динамічного режиму. Після ідентифікації усталеного режиму для всіх пар, кожній точці, координати якої є значеннями параметрів, на площині присвоюється відповідний колір. Врешті-решт, отримуємо багатокольорову діаграму на площині. Оберемо наступні значення для параметрів системи:

$$A = 1.12, B = -1.531, \alpha = -0.3, \mu_1 = 0.5, N_3 = -0.1,$$

а параметри N_1 та δ виберемо в якості біфуркаційних. Оскільки обчислення карти динамічних режимів для великих діапазонів значень параметрів займає надзвичайно велику кількість часу, а ціллю роботи є вивчення впливу запізнювання на усталені режими системи, оберемо невеликий діапазон значень параметра N_1 та значно більший параметра δ . Розглянемо рис.2.1, на якому зображені дві карти динамічних режимів системи (2.5).



(а)



(б)

Рис. 2.1: Карти динамічних режимів системи (2.5)

На рис.2.1 **чорний** колір відповідає граничним циклам, а

червоний — хаотичним атракторам. Отже, з карт динамічних режимів на рис.2.1 можемо зробити висновок, що параметр δ в системі (2.5) є керуючим, тобто в залежності від його значення в системі можуть виникати як регулярні, так і хаотичні атрактори. Покладемо $N_1 = -0.343$ та проводитимемо подальші дослідження з параметром δ в якості біфуркаційного. Розглянемо графік залежності старшого ненульового ляпуновського характеристичного показника λ' від параметра N_1 , який представлено на рис.2.2. Нехай ляпуновські характеристичні показники впорядковані за спаданням, тобто $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq \lambda_5$.

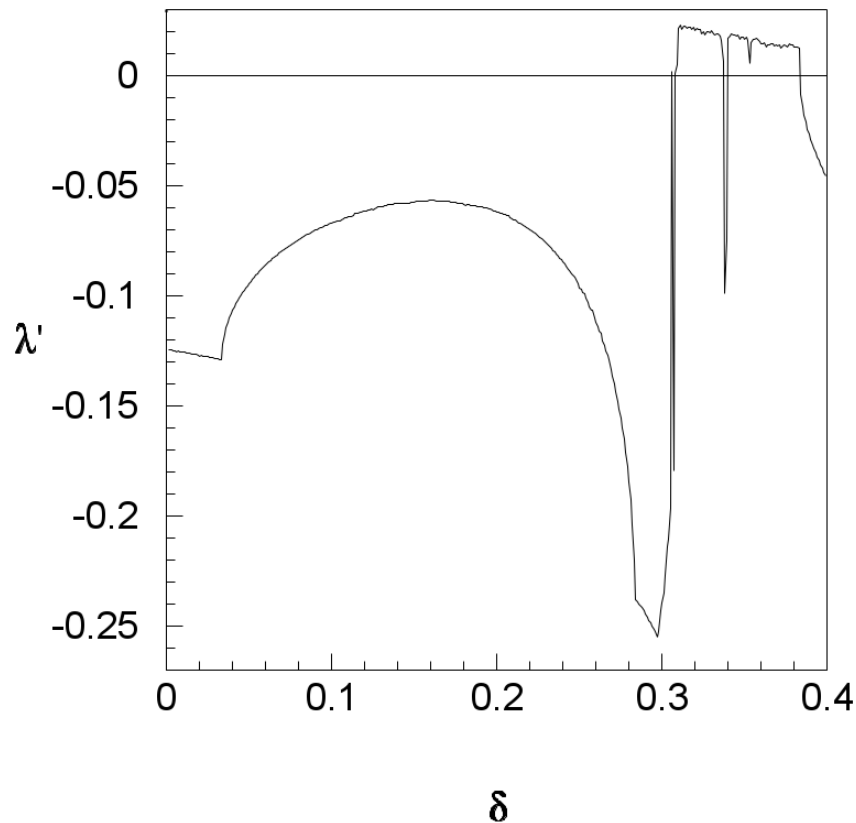
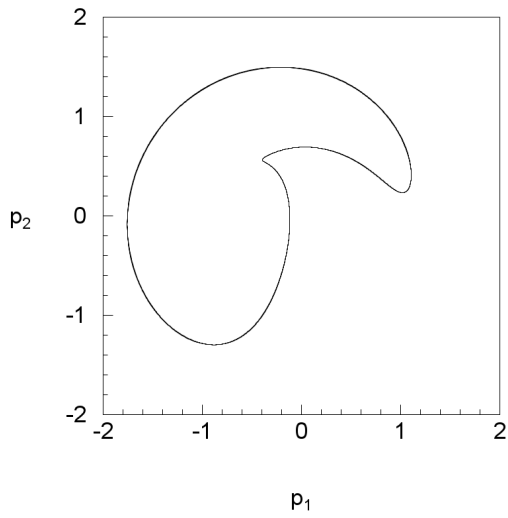


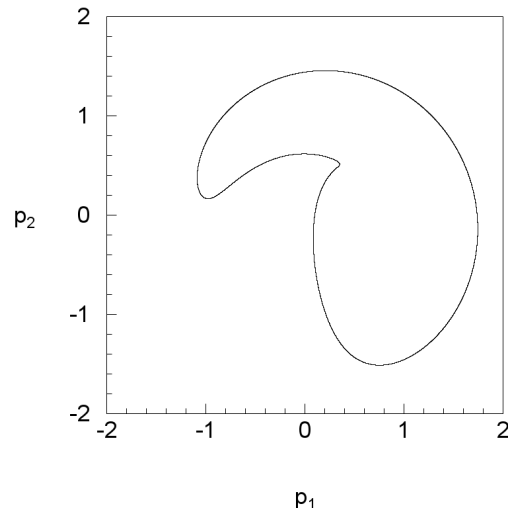
Рис. 2.2: Графік залежності старшого ненульового ляпуновського характеристичного показника λ' від параметра N_1

На рис.2.2 можемо побачити, що графік перетинає пряму $\lambda' = 0$, проте, насправді $\forall \delta \in [0; 0.4] \lambda' \neq 0$, а такий вигляд пов'язаний лише зі способом візуалізації набору значень λ' , отриманого за

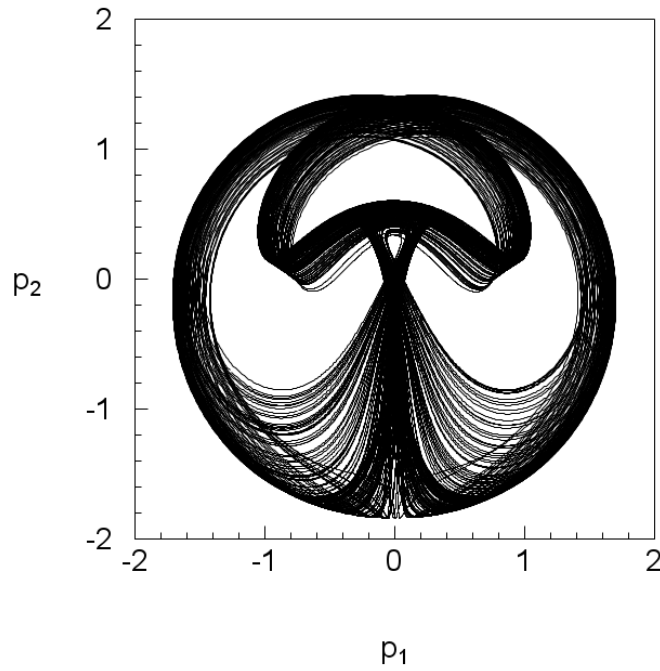
допомогою узагальненого алгоритму Беннетіна-Гальяні та інших. Отже значення $\lambda' < 0$ відповідають граничним циклам, а $\lambda' > 0$ - хаотичним атракторам. Отже, графік старшого ненульового ЛХП свідчить про перехід системи (2.5) від регулярного характеру поведінки до хаотичного. Розглянемо фазові портрети системи, представлені на рис. 2.3



(a) $\delta = 0, x_0 = (0, 0, 0, 0, 1)$



(б) $\delta = 0, x_0 = (0, 0, 0, 1, 0)$



(в) $\delta = 0.31$

Рис. 2.3: Проекції фазових портретів системи (2.5) із параметрами $\{\alpha, A, B, N_1, N_3, \mu_1\} = \{-0.3, 1.12, -1.531, -0.1, -0.343, 0.5\}$ та початковим вектором чисельного алгоритму x_0

З фазових портретів системи (2.5) на рис.2.3 можемо зробити висновок про перехід до хаосу за сценарієм переміжності, який підтверджує фазопараметрична характеристика на рис. (2.4).

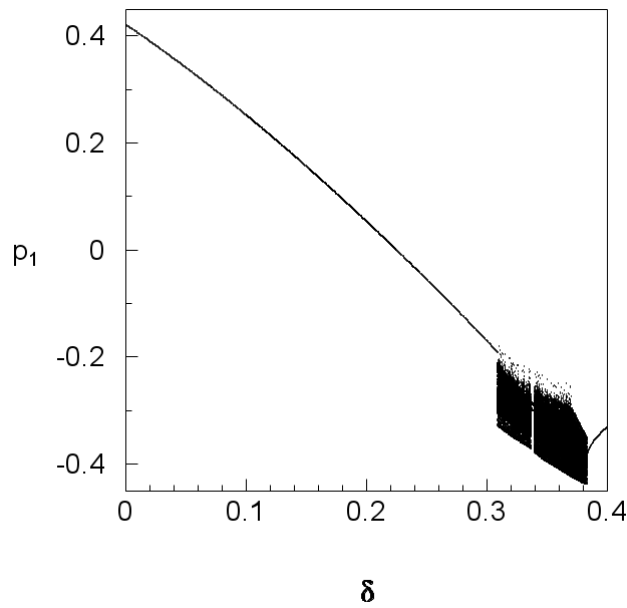


Рис. 2.4: Фазопараметрична характеристика системи (2.5), $S: \beta = -1.5$

Отже, з приведених вище досліджень випливає, що при відсутності запізнювання в системі існують два симетричних граничних цикли, тобто характер динаміки **регулярний**, тоді як при наявності запізнювання характер динаміки змінюється на **хаотичний**.

Розглянемо мапу динамічних режимів на рис.2.1(б). Проведемо дослідження, аналогічні до попередніх. Для цього зафіксуємо $N_1 = -0.209$, параметр δ оберемо біфуркаційним, а всі інші параметри покладемо як при попередніх дослідженнях. Побудуємо графік старшого ненульового ЛХП λ' .

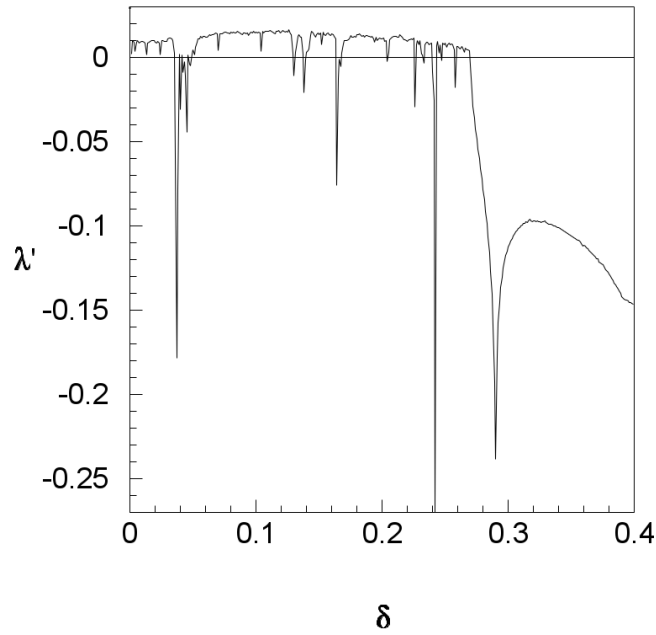


Рис. 2.5: Графік залежності старшого ненульового ляпуновського характеристичного показника λ' від параметра δ

З графіка на рис. 2.5 видно, що при $\delta = 0$ в системі присутній хаотичний атрактор. Зі зростанням параметра δ система потрапляє у так зване вікно періодичності, з якого переходить до хаосу, за припущенням, через сценарій Фейгенбаума. Таке припущення є цілком природнім через вигляд графіку старшого ненульового ЛХП, адже наближення графіку до прямої $\lambda' = 0$ є типовою поведінкою при біфуркаціях подвоєння, які свідчать про сценарій Фейгенбаума, або ж перехід до хаосу через каскад біфуркацій подвоєння періоду граничного циклу. Для більш детального вивчення атракторів, розглянемо фазові портрети системи, що виникають в ній. На фазових портретах рис. 2.6 можна побачити, що при відсутності запізнювання в системі існує хаотичний атрактор, який зникає в деякому околі точки $\delta = 0.04$ і виникає граничний цикл. Зі збільшенням запізнювання δ можна спостерігати біфуркацію подвоєння періоду та з подальшим зростанням параметра δ виникнення хаотичного атрактора в системі. Далі розглянемо фазові портрети при більших значеннях

δ .

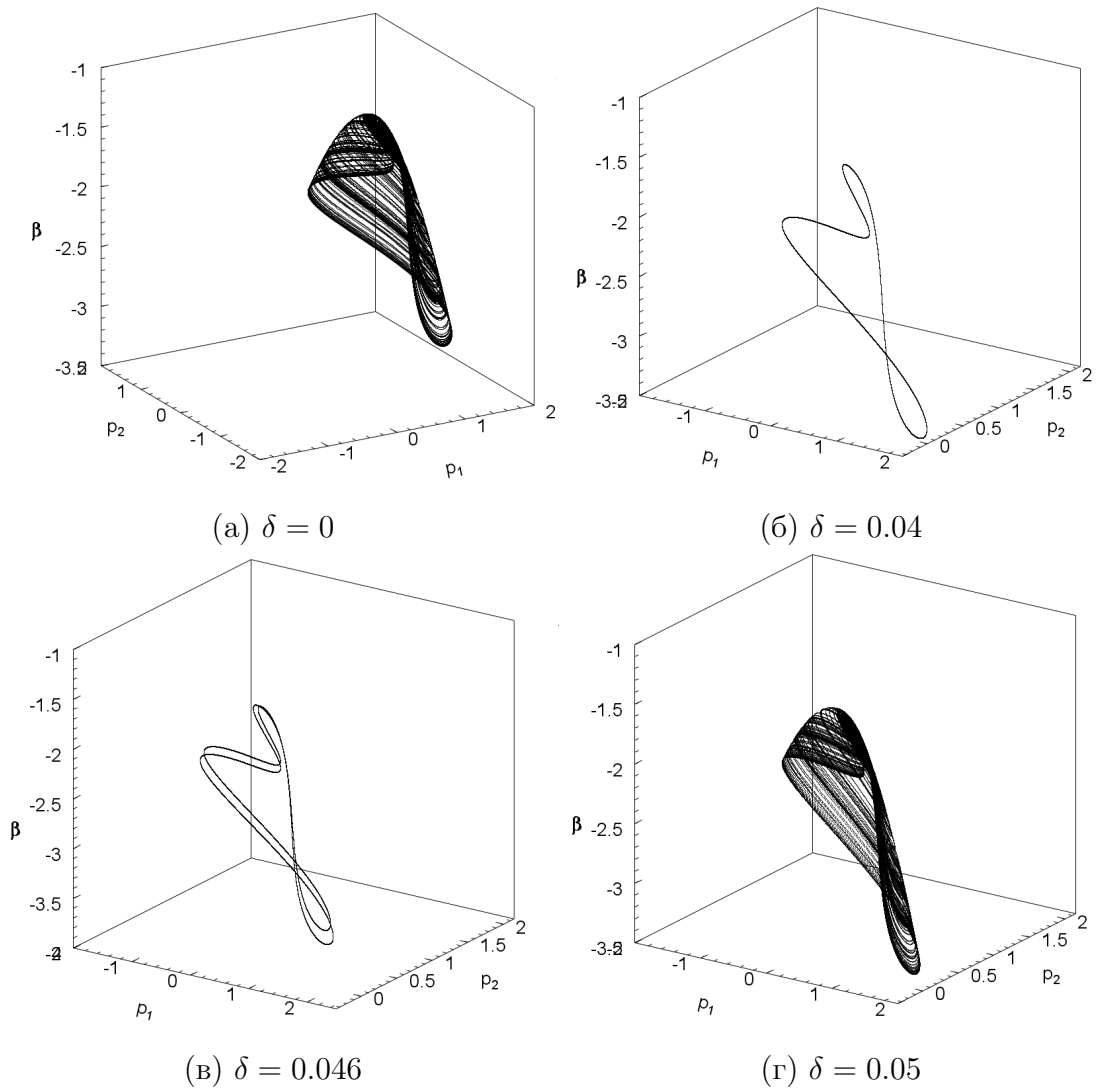


Рис. 2.6: Проекції фазових портретів системи (2.5) із параметрами $\{\alpha, A, B, N_1, N_3, \mu_1\} = \{-0.3, 1.12, -1.531, -0.1, -0.209, 0.5\}$

Як видно з рис. 2.7 при $\delta = 0.2$ та $\delta = 0.3$ в системі пристуній хаотичний аттрактор, проте вже при $\delta = 0.35$ він зникає, та виникає граничний цикл.

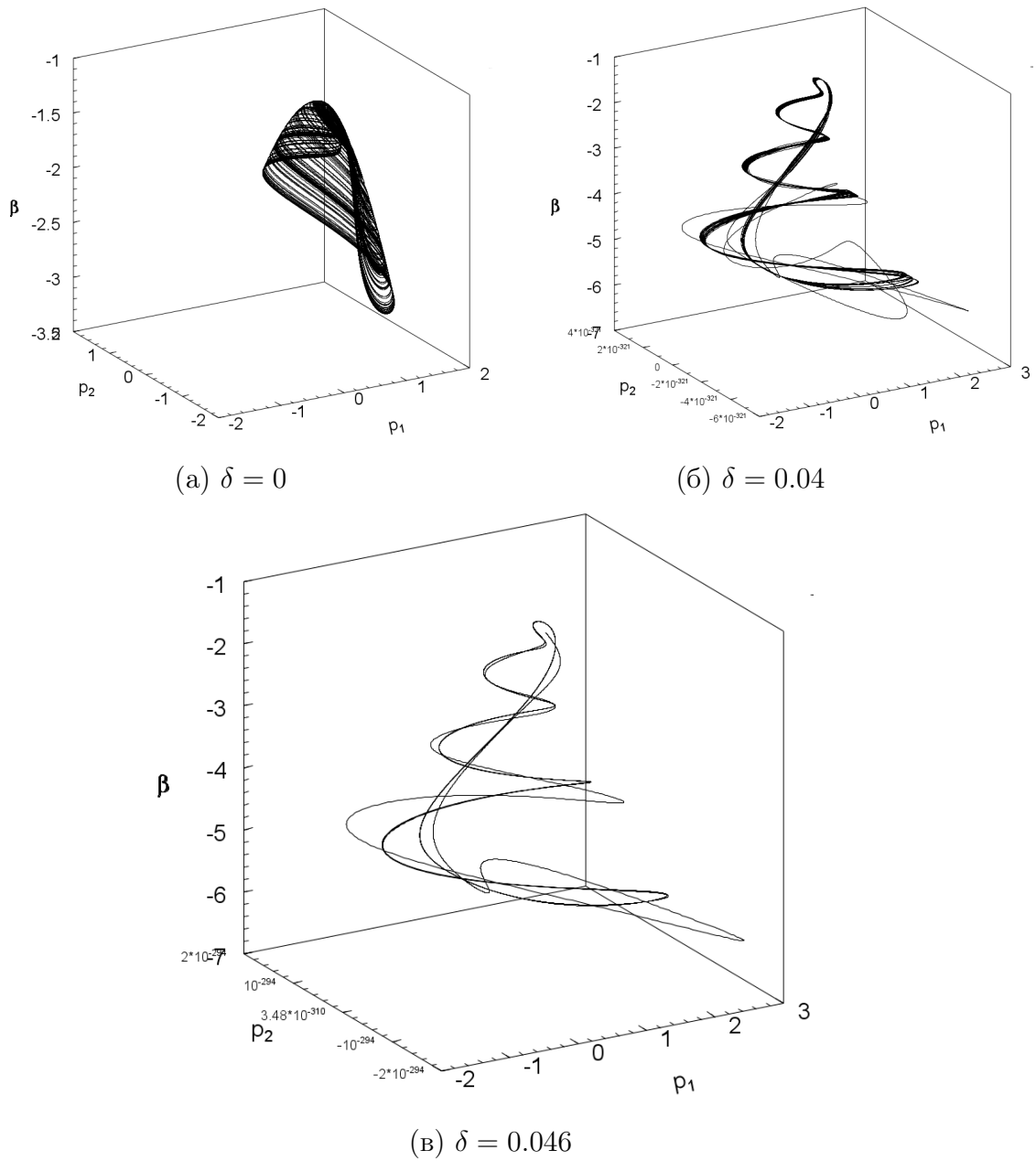


Рис. 2.7: Проекції фазових портретів системи (2.5) із параметрами $\{\alpha, A, B, N_1, N_3, \mu_1\} = \{-0.3, 1.12, -1.531, -0.1, -0.209, 0.5\}$

Отже, в цьому розділі було показано, що наявність запізнювання в системі 2.1 може змінити як регулярний характер динаміки на хаотичний, так і навпаки, а тому можна зробити висновок про принциповість розгляду моделей із урахуванням запізнювання, замість моделей без нього.

2.3 Друга модель урахування фактору запізнювання

Розглянемо систему (2.1), замінивши перше, друге, четверте та п'яте рівняння на рівняння із запізнюванням, відхиляючи аргумент функції β . Така модель враховує запізнювання впливу джерела збуджень (електродвигуна) на коливну систему (бак з рідиною).

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - [\beta(\tau - \delta) + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_1 + B(p_1q_2 - p_2q_1)p_2; \\
 \frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + [\beta(\tau - \delta) + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_1 + B(p_1q_2 - p_2q_1)q_2 + 1; \\
 \frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 - \mu_1q_1 + N_1\beta; \\
 \frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - [\beta(\tau - \delta) + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_2 - B(p_1q_2 - p_2q_1)p_1; \\
 \frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + [\beta(\tau - \delta) + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_2 - B(p_1q_2 - p_2q_1)q_1.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Припустимо, що запізнювання δ , тоді можемо використати наближення

$$\beta(\tau - \delta) \approx \beta(\tau) - \delta \cdot \frac{d\beta}{d\tau}.
 \tag{2.7}$$

Підставимо (2.7) у перше, друге, третє та четверте рівняння системи (2.6)

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - [\beta - \delta \frac{d\beta}{d\tau} + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_1 + B(p_1q_2 - p_2q_1)p_2; \\
\frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + [\beta - \delta \frac{d\beta}{d\tau} + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_1 + B(p_1q_2 - p_2q_1)q_2 + 1; \\
\frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 - \mu_1q_1 + N_1\beta; \\
\frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - [\beta - \delta \frac{d\beta}{d\tau} + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_2 - B(p_1q_2 - p_2q_1)p_1; \\
\frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + [\beta - \delta \frac{d\beta}{d\tau} + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_2 - B(p_1q_2 - p_2q_1)q_1.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Перепишемо (2.8) в нормальному вигляді

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - [\beta - \delta(N_3 - \mu_1q_1 + N_1\beta) + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_1 + \\
&\quad + B(p_1q_2 - p_2q_1)p_2; \\
\frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + [\beta - \delta(N_3 - \mu_1q_1 + N_1\beta) + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_1 + \\
&\quad + B(p_1q_2 - p_2q_1)q_2 + 1; \\
\frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 - \mu_1q_1 + N_1\beta; \\
\frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - [\beta - \delta(N_3 - \mu_1q_1 + N_1\beta) + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_2 - \\
&\quad - B(p_1q_2 - p_2q_1)p_1; \\
\frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + [\beta - \delta(N_3 - \mu_1q_1 + N_1\beta) + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_2 - \\
&\quad - B(p_1q_2 - p_2q_1)q_1.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Система (2.9) є системою звичайних диференціальних рівнянь, в якій запізнювання δ виступає у ролі параметра цієї системи.

Покладемо параметри системи

$$A = 1.12, B = -1.531, \alpha = -0.3, \mu_1 = 0.5, N_1 = -1, N_3 = -1.2$$

та оберемо параметр δ як біфуркаційний. Аналогічно до попереднього розділу, побудуємо графік старшого ненульового ЛХП λ .

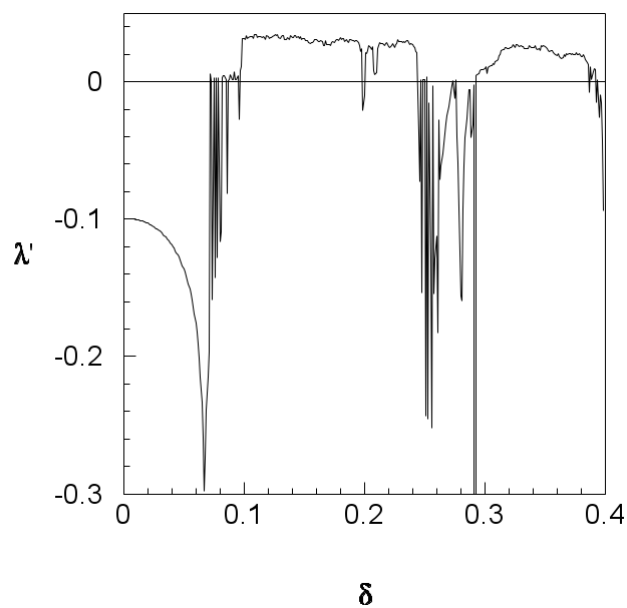


Рис. 2.8: Графік залежності старшого ненульового ляпуновського характеристичного показника λ від параметра δ

Побудуємо фазові портрети системи (2.9) для більш детального дослідження атракторів, що в ній виникають.

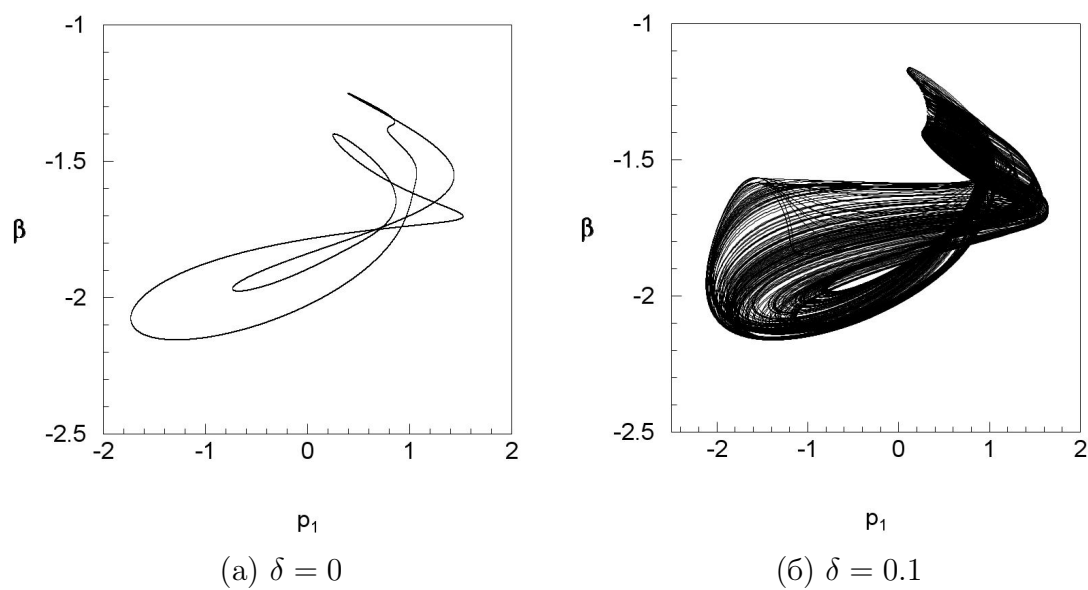


Рис. 2.9: Проекції фазових портрети системи (2.9) із параметрами $\{\alpha, A, B, N_1, N_3, \mu_1\} = \{-0.3, 1.12, -1.531, -1.2, -1, 0.5\}$

На рис. 2.9 бачимо, що зі збільшенням значення запізнювання δ рух зображальної точки системи (2.9) значно ускладнюється. Зазвичай, така зміна фазового портрету свідчить про перехід до хаосу. Переконатись у цьому можна за допомогою побудови фазопараметричної характеристики.

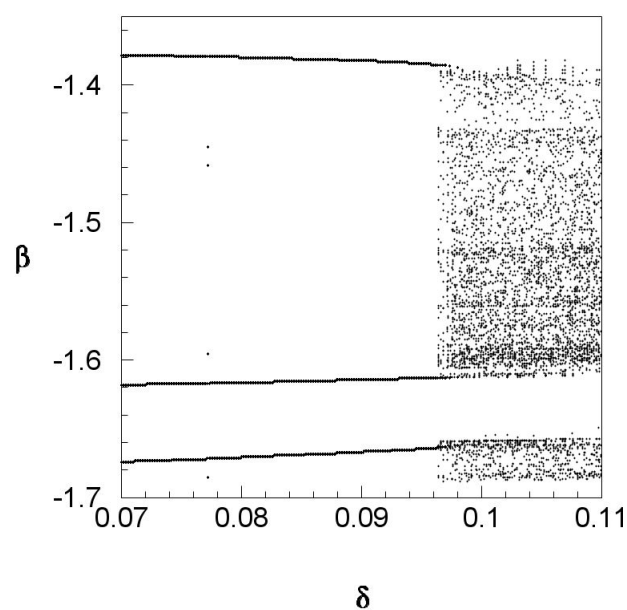


Рис. 2.10: Фазопараметрична характеристика системи (2.9) при значеннях параметрів $N_3 = -1, N_1 = -1.2$ і січною $S: p_1 = 1$.

На рис 2.10 бачимо, що зі збільшенням параметру δ фазопараметрична характеристик переходить змінює вигляд з трьох окремих ліній на густо-чорну область. Такий вигляд свідчить про перехід до хаосу.

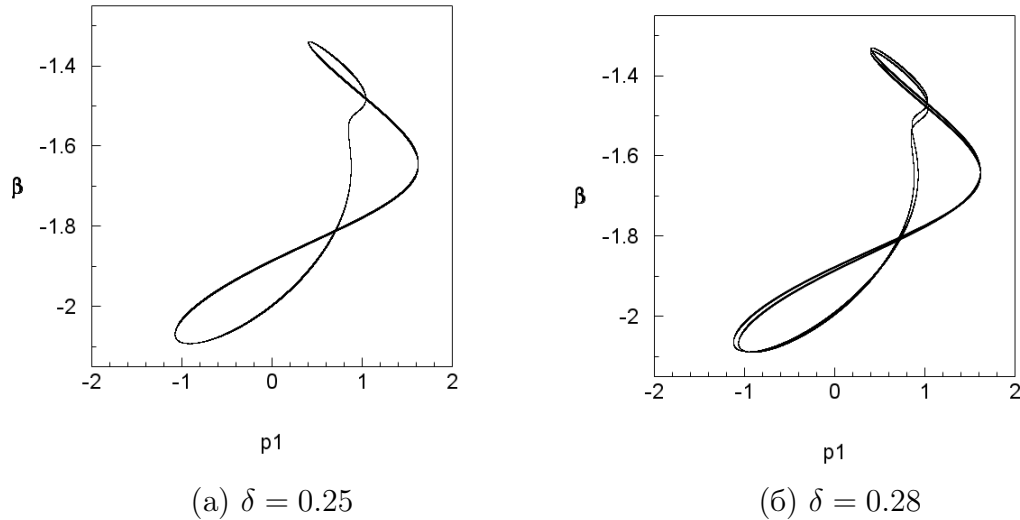


Рис. 2.11: Проекції фазових портретів системи (2.5) із параметрами $\{\alpha, A, B, N_1, N_3, \mu_1\} = \{-0.3, 1.12, -1.531, -1.2, -1, 0.5\}$

Отже, на рис.2.11 можемо бачити перші декілька біфуркацій подвоєння періоду, що свідчить про перехід до хаосу за сценарієм Фейгенбаума. Підтвердити такий висновок може характерний вигляд фазопараметричної характеристики на рис. 2.12.

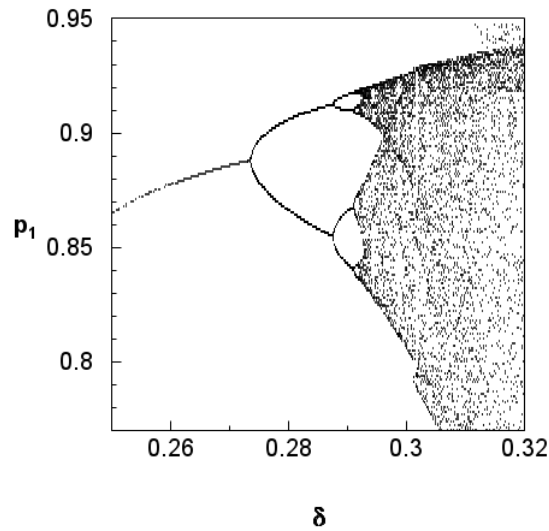
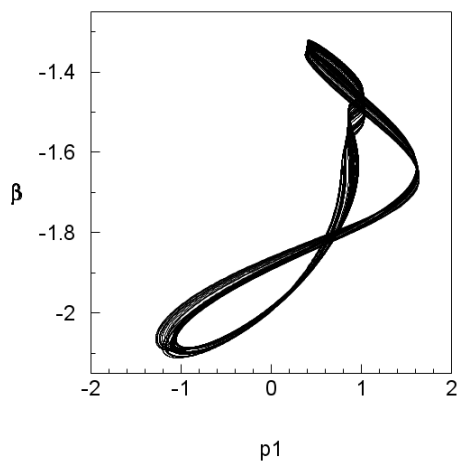
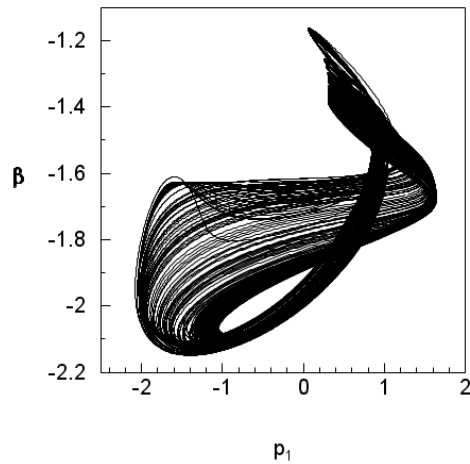


Рис. 2.12: Фазопараметрична характеристика системи (2.9), $S : \beta = -1.7$

На рис. 2.12 біфуркаційне дерево має характерний вигляд для переходу до хаосу за сценарієм Фейгенбаума. Спостерігається послідовність розгалужень «гілок» біфуркаційного дерева (у точках, де лінія фазопараметричної характеристики поділяється на дві при зростанні параметру δ ; точки розгалуження є точками біфуркацій подвоєння), яка приводить до густо-чорної області (яка свідчить про хаотичну динаміку системи). Розглянемо фазові портрети атракторів, які виникають у системі (2.9) внаслідок переходу до хаосу за сценарієм Фейгенбаума.



(а) $\delta = 0.31$



(б) $\delta = 0.32$

Рис. 2.13: Проекції фазових портретів системи (2.9) із параметрами $\{\alpha, A, B, N_1, N_3, \mu_1\} = \{-0.3, 1.12, -1.531, -1.2, -1, 0.5\}$

За сценарієм Фейгенбаума у системі (2.9) виникає хаотичний атрактор, проекція якого представлена на рис. 2.13(а). При подальшому збільшенні значення запізнювання δ цей атрактор зникає внаслідок однієї жорсткої біфуркації і виникає новий, проекція якого наведена на рис. 2.13(б).

Отже, при дослідженнях другої системи, яка враховує запізнювання впливу функціонування джерела збуджень (електродвигуна) на коливну систему (бак з рідиною) було встановлено, що при збільшенні значення запізнювання δ система може змінювати характер динаміки з регулярного на хаотичний. Також показано, що при параметрі запізнювання δ , обраному в якості біфуркаційного, в системі реалізуються деякі з класичних сценаріїв переходу до хаосу.

Висновки

Для неідеальної динамічної системи «бак з рідиною — джерело збуджень» (модель Краснопольської - Майлса) отримані наступні результати:

1. Проведено дослідження впливу факторів запізнювання на динамічну систему «бак з рідиною – джерело збудження» (модель Краснопольської – Майлса). Встановлено, що наявність запізнювання може суттєво змінювати динамічну поведінку такої системи. На підставі проведеного комплексу чисельних розрахунків за основними алгоритмами сучасної хаотичної динаміки виявлено, що нехтування факторами запізнювання може призвести до помилок у визначенні типів атракторів системи. Так, граничні цикли можуть виявитися хаотичними атракторами і навпаки, хаотичні атрактори – граничними циклами. Також, розглянуті деякі біфуркації в системі Краснопольської – Майлса, коли в якості біфуркаційного параметру виступає запізнювання;
2. Побудовані карти динамічних режимів для моделі урахування запізнювання оберненого впливу баку з рідиною на джерело збуджень.

Бібліографія

- [1] Henon M. On the numerical computation of Poincare maps // Physica D. – 1982. – Vol. 5, № 2. – Pp. 412-415.
- [2] Kolmogorov entropy and numerical experiments / G. Benettin, L. Galgani, J. M. Streclyn // Phys. Rev. A. – 1976. – Vol. 14, № 6. – Pp. 2338–2342.
- [3] J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, Regular and Chaotic Dynamics, AMS, volume 38, Springer Sciences Media 1992, 693 p.
- [4] V. Afraimovich, S.B. Hsu. Lectures on chaotic dynamical systems, Sommerville, International Press, 2003.
- [5] S.P. Kuznetsov, Dynamic Chaos. M.: Fizmatlit, 2006, 292 p.
- [6] T.S. Krasnopolskaya and A.Yu. Shvets, Regular and chaotic dynamics of systems with limited excitation. M.: Research Center Regular and Chaotic Dynamics, 2008, 280 p.
- [7] V.S. Anishchenko and T.E. Vadivasova, Lectures on Nonlinear Dynamics. Research Center Regular and Chaotic Dynamics, 2011, 516 p.
- [8] Handbook of Applications of Chaos Theory; Edited By C.H. Skiadas and Char. Skiadas. Chapman and Hall/CRC, 2016, 952 p.
- [9] Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. Chaos in dynamics of machines with a limited power-supply, 8-th World Congr. on the Theory of

Machines and Mechanisms. Eds. M. Okrolnick, L. Pust. Prague: Czechoslovak Acad. Sci., Vol. 1- pp. 181-184, 1991.

- [10] T. S. Krasnopol'skaya and A. Yu. Shvets, Properties of chaotic fluid oscillations in cylindrical basins, *Internat. Appl. Mech.*, 28, No. 6, 386–394, 1992.
- [11] T.S. Krasnopol'skaya and A.Y. Shvets, Parametric resonance in the system: Liquid in tanks +electric motor, *Int. Appl. Mech.*, 29(9), pp. 722–730, 1993.
- [12] T.S. Krasnopol'skaya and A.Yu. Shvets, Chaotic surface waves in limited power—supply cylindrical tank vibrations, *J. Fluids Struct.*, 8(1), pp. 1–18, 1994.
- [13] Aleksandr Yu. Shvets, Vasiliy Sirenko, Complicated Scenarios of Transitions to Deterministic Chaos in Non-Ideal Dynamic Systems, *Nonlinear Dynamics–2016 (ND-KhPI2016): proceedings of 5th International Conference, Kharkov: NTU "KPI";*, 2016, P. 222-229.
- [14] Shvets and S. Donetskyi, Transition to deterministic chaos in some electroelastic systems, *Springer Proceedings in Complexity*, pp. 257–264, 2019.
- [15] Shvets A., Sirenko V. Hyperchaos in Oscillating Systems with Limited Excitation, In: Skiadas C., Lubashevsky I. (eds) 11th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, *Springer Proceedings in Complexity*. Springer, Cham, pp. 265 – 273, 2019.
- [16] A.Yu. Shvets and V.A. Sirenko, Scenarios of transitions to hyperchaos in nonideal oscillating systems, *J. Math. Sci.*, 243(2), pp. 338–346, 2019.
- [17] Shvets A., Donetskyi S., Identification of Hidden and Rare Attractors in Some Electroelastic Systems with Limited Excitation,

Springer Proceedings in Complexity, Springer, Cham., pp. 865-878, 2021.

[18] Shvets and S. Donetskyi, “New Types of Limit Sets in the Dynamic System “Spherical Pendulum—Electric Motor,” *Advanced Structured Materials*, 157, pp. 443–455, 2021.

[20] О.Ю. Швець, Типові та узагальнені переходи до детермінованого хаосу нетипових атракторів неідеальних динамічних систем. Системні дослідження та інформаційні технології, 2022, № 4, с. 141-150.

[21] Shvets A.Yu., Makaseyev A.M. Delay Factors and Chaotization of Non-ideal Pendulum Systems, *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*, 2012, № 4, pp. 633-642.

[22] Макасеєв О.М., Швець О.Ю. Моделювання впливу запізнювання на коливання маятників при обмеженому збудженні *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, 2013, № 5, с. 40-45.

[23] Shvets A.Yu., Makasyeyev A.M. Chaos in Pendulum Systems with Limited Excitation in the Presence of Delay, *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*, 2014, № 3, p. 233 – 241.

[24] Shvets A.Yu., Makaseyev A.M., Mathematical Simulation of the Influence of Delay Factors on the Oscillations of Non-ideal Pendulum Systems, *Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 2014, Т. 11, №5, с. 269-279.

[25] A.Yu. Shvets, A.M. Makaseyev Influence Of The Delay On The Occurrence Of Deterministic Chaos In Some Non-Ideal Pendulum Systems, *Research Bulletin of National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”*, 2015, № 4(102), p. 110 – 116.

- [26] A. M. Makaseyev, A. Yu. Shvets, Modeling Of The Influence Of Delay Factors On The Dynamics of Non-Ideal Pendulum Systems, *Journal of Computational & Applied Mathematics*, 2015, № 1(118), p. 71 – 77.
- [27] Aleksandr Yu. Shvets, Alexander Makaseyev, The influence of delay factors on the genesis of deterministic chaos in non-ideal pendulum systems, *chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*, 2017, № 1, p. 49 – 56.
- [28] Shvets, A. Makaseyev, Deterministic chaos in some pendulum systems with delay, *Mathematical and Numerical Analysis of Dynamical System Analysis* (eds. J.Awrejcewicz, M.Kazmierczak, J.Mrozowski, P.Olejniak), DSTA 2017, pp. 501-510.
- [29] Shvets A., Donetskyi S., Identification of Hidden and Rare Attractors in Some Electroelastic Systems with Limited Excitation, *Springer Proceedings in Complexity*, Springer, Cham., pp. 865-878, 2021.
- [30] Runge, Carl David Tolmé (1895), "Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen *Mathematische Annalen*, Springer, 46 (2): 167–178
- [31] Kutta, Wilhelm (1901), "Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 46: 435–453