40НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21, 368.91

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
________ Олег КЛЕСОВ
«__» травня 2023 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Моделі страхування, які включають витрати»

Виконала:
студентка ІІ курсу магістратури, групи ОМ-11мн
Тодосьєва Анастасія Валеріївна ___________

Керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Василик Ольга Іванівна ___________

Рецензент:
доцент кафедри теорії ймовірностей, статистики
та актуарної математики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
Яневич Тетяна Олександрівна ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка ______________

Київ – 2023

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

________ Олег КЛЕСОВ

«__» _лютого_ 2023 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Тодосьєвій Анастасії Валеріївні

1. Тема дисертації: «Моделі страхування, які включають витрати», науковий керівник дисертації Василик Ольга Іванівна, доктор фізико-математичних наук, професор, затверджені наказом по університету від «27» березня 2023 р. № 1337-с.

2. Термін подання студенткою дисертації: 19 травня 2023 року.

3. Об’єкт дослідження: моделі страхування, які включають витрати.

4. Предмет дослідження: побудова моделей, визначення страхових тарифів, розрахунок страхових премій та резервів.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) Ознайомлення з літературою про моделі страхування, які включають витрати;

2) Ознайомлення з моделями з одним та двома декрементами;

3) Вивчення необхідного теоретичного матеріалу щодо ланцюгів Маркова та їх застосування в страховій математиці;

4) Побудова моделі страхування, яка включає витрати, з одним та двома декрементами; розробка алгоритмів для визначення страхових тарифів, нетто- та брутто-премій, страхових резервів, та їх реалізація.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу 36 слайдів.

7. Дата видачі завдання 08 лютого 2023 року.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	08.02.2023 – 19.02.2023	виконано
2.	Ознайомлення з моделями страхування, які включають витрати	20.02.2023 – 05.03.2023	виконано
3.	Вивчення та оформлення матеріалу про бухгалтерський облік для моделей, що включають витрати	06.03.2023 – 19.03.2023	виконано
4.	Ознайомлення з моделями з одним та двома декрементами	20.03.2023 – 02.04.2023	виконано
5.	Вивчення необхідного теоретичного матеріалу щодо ланцюгів Маркова та їх застосування в страховій математиці	03.04.2023 – 16.04.2023	виконано
6.	Побудова моделі, розробка алгоритмів для визначення страхових тарифів, премій, резервів, та їх реалізація	24.04.2023 – 07.05.2023	виконано
7.	Аналіз результатів та висновки	07.05.2023 – 10.05.2023	виконано
8.	Оформлення дипломної роботи	11.05.2023 – 18.05.2023	виконано

Студентка Анастасія ТОДОСЬЄВА

Науковий керівник дисертації Ольга ВАСИЛИК

Реферат

Магістерська дисертація: 69 сторінок, 36 слайдів для проектора, 23 першоджерел.

Страхування життя – це вид особистого страхування, який передбачає обов'язок страховика здійснити страхову виплату згідно з договором страхування у разі смерті застрахованої особи та/або у разі її дожиття до закінчення строку дії договору чи досягнення визначеного договором віку. Зазвичай, це довгострокове страхування зі значними страховими сумами, тому для забезпечення платоспроможності страхової компанії є важливим визначення адекватних страхових тарифів та розрахунок необхідних резервів з урахуванням витрат.

Мета та завдання роботи: застосування знань з теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, актуарної та фінансової математики для дослідження моделей страхування, які включають витрати. Вивчення нового матеріалу про бухгалтерський облік для моделі, що включає витрати та викупні суми. Самостійною частиною роботи є побудова моделі страхування, яка включає витрати, з одним та двома декрементами, розробка алгоритмів для визначення страхових тарифів, нетто- та брутто-премій, страхових резервів для цієї моделі, реалізація цих алгоритмів.

Об'єкт дослідження: моделі страхування, які включають витрати.

Предмет дослідження: побудова моделей, визначення страхових тарифів, розрахунок страхових премій та резервів.

Ключові слова: страхування життя, нетто–премія, брутто–премія, модель страхування, актуарний резерв, поліси страхування, витрати, страхові ризики, інвестиційний дохід, актив, пасив, сальдо, ланцюги Маркова, випадковий процес, декремент, андеррайтинг.

Abstract

Master degree thesis contains 69 pages, 36 slides for projector, 23 primary sources.

Life insurance is a type of personal insurance that provides for the obligation of the insurer to make an insurance payment in accordance with the insurance contract in the event of the death of the insured person and/or in the event of his or her survival before the expiration of the contract or reaching the age specified in the contract. Usually, this is long-term insurance with significant sums insured, therefore, in order to ensure the solvency of the insurance company, it is important to determine adequate insurance tariffs and calculate the necessary reserves taking into account expenses.

The purpose and objectives of the work: application of knowledge of probability theory, theory of random processes, actuarial and financial mathematics to study insurance models that include expenses. Learning new material about accounting for a model that includes expenses and withdrawal amounts. An independent part of the work is the construction of an insurance model, which includes expenses, with one and two decrements, the development of algorithms for determining insurance tariffs, net and gross premiums, insurance reserves for this model, and the implementation of these algorithms.

Research object: insurance models that include expenses.

The subject of research: constructing the models, determining insurance tariffs, calculating insurance premiums and reserves.

Key words: life insurance, net premium, gross premium, insurance model, actuarial reserve, insurance policies, expenses, insurance risks, investment income, asset, liability, balance, Markov chains, random process, decrement, underwriting.

Зміст

Перелік умовних позначень та термінів 7

Вступ 11

1 Моделі, що включають витрати 14

1.1 Премії та резерви 15

1.2 Бухгалтерський облік для моделі, що включає витрати 19

2 Модель з урахуванням викупних сум 25

2.1 Премії та резерви 25

2.2 Бухгалтерський облік для моделі, що включає витрати та викупні суми . 27

3 Види витрат 34

4 Ланцюги Маркова в моделях страхування життя, які включають витрати 40

4.1 Ланцюги Маркова у страхуванні життя 40

4.2 Визначення прибутку у моделях страхування життя з однією та двома причинами декремента 42

4.3 Тарифікація у моделі з двома причинами декремента 47

5 Побудова моделі. Алгоритми для визначення страхових тарифів, премій, резервів, та їх реалізація 50

Модель 1 50

Модель 2 61

Висновки 66

Список використаних джерел 67

Публікації автора 69

Перелік умовних позначень та термінів

Поліс – контракт страхування, який укладається між страховою компанією та одною або більше особами, яких називають власниками полісу.

Премія – власник полісу зобов'язується виплатити певну суму, або декілька сум, які називають преміями, страховій компанії.

Премія називається *нетто-премією (чистою премією)* тоді, коли вона відповідає принципу еквівалентності $E(L) = 0$ тобто, коли математичне сподівання загального збитку рівне нулю.

Виплати – страхова компанія, з свого боку, зобов'язуються виплачувати суму, що називається виплатами, власнику полісу, якщо відбудеться визначена страхова подія.

Страхові резерви – утворюються страховиками з метою забезпечення майбутніх виплат страхових сум і страхового відшкодування залежно від видів страхування (перестрахування).

Ануїтет – контракт ануїтету передбачає виплату сум, які можуть бути фіксованими, або змінюватися, у встановлені моменти часу, за умови, що власник контракту є живим.

Безпосередній (довічний) ануїтети – це ануїтети, за якими виплати відбуваються наприкінці року (тобто із затримкою, постнумерандо).

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x \cdot v^k$$

Прямий (довічний) ануїтет – це контракт, за яким виплати відбуваються авансом (на початку року, пренумерандо).

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_x \cdot v^k$$

Тимчасові ануїтети – це ануїтети, у яких сталі виплати відбуваються протягом фіксованого терміну.

$$a_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k+1}p_x \cdot v^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} {}_{k}p_x \cdot v^k$$

<u>*Тимчасовий прямий ануїтет*</u> – це ануїтет, при якому виплати здійснюються авансом і обмежені певним строком.

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k}p_x \cdot v^k$$

<u>*Відкладені ануїтети*</u> – це ануїтети, у яких початок виплат відкладено на певний термін.

$${}_{n|}a_x = a_x - a_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_{k}p_x \cdot v^k - \sum_{k=1}^{n} {}_{k}p_x \cdot v^k = v^k {}_{k}p_x a_{x+k}$$

<u>*Відкладений прямий ануїтет*</u> – визначається аналогічно до тимчасового прямого ануїтету.

$${}_{n|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = v^n {}_{n}p_x \ddot{a}_{x+n}$$

<u>*Довічне страхування*</u> – це страхування життя, у якому виплата здійснюється у випадку смерті застрахованого. Якщо виплата в розмірі 1 здійснюється наприкінці року смерті застрахованого, то щорічна нетто-премія для такого довічного страхування обчислюється за формулою

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

де A_x – разова нетто премія довічного страхування:

$$A_x = E[v^{K_x+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_{k}p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_{k|}q_x$$

$\ddot{a}_x$ – разова нетто-премія прямого довічного ануїтету:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_{k}p_x$$

<u>*Тимчасове страхування*</u> – це контракт, за яким страхова сума сплачується у випадку смерті застрахованого, за умови, що смерть відбулась протягом певного періоду, який називається терміном дії контракту

(полісу). Щорічна нетто-премія для такого страхування обчислюється за формулою

$$P^1_{x:\bar{n}|} = \frac{A^1_{x:\bar{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

де разова нетто-премія тимчасового страхування обчислюється так:

$$A^1_{x:\bar{n}|} = EF = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_k p_x\, q_{x+k} + 0 \cdot {}_n p_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_{k|}q_x$$

<u>Чисте дожиття</u> – контракт чистого дожиття передбачає виплату страхової суми наприкінці фіксованого терміну, за умови, що на цей час власник контракту є живим. Щорічна нетто-премія для такого страхування обчислюється за формулою

$$P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

де разова нетто-премія чистого дожиття має вигляд

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \mathrm{E}G = \nu^n\, {}_n p_x + 0 \times {}_n q_x .$$

<u>Страхування на доживання (страхування на дожиття, змішане страхування)</u> – страхова сума виплачується, якщо застрахований дожив до узгодженого терміну або помер протягом узгодженого терміну. Премія сплачується на початку кожного року до закінчення терміну дії полісу. У разі передчасної смерті застрахованої особи внесення премій припиняється. Щорічна нетто-премія для такого страхування обчислюється за формулою:

$$P_{x:\bar{n}|} = \frac{A_{x:\bar{n}|}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}|}}$$

де разова нетто-премія страхування на доживання обчислюється як

$$A_{x:\overline{n}|} = \mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(Z_1) + \mathrm{E}(Z_2) = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1},$$

$Z = Z_1 + Z_2$.

$$P_{x:\overline{n}|} = P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$$

Разова нетто-премія довічного страхування з виплатами в кінці періоду позначається a_x і задається рівністю $a_x = \ddot{a}_x - 1$.

Резерв нетто-премій в момент t позначається символом ${}_tV$ і визначається як умовне математичне сподівання величини ${}_tL$ при $T > t$.

Вихідний грошовий потік – це будь-які гроші, які компанія або фізична особа повинна виплатити, здійснюючи операцію з іншою стороною. Вихідні грошові потоки можуть включати готівку, виплачену постачальникам, компенсацію працівникам та податки, сплачені з доходу.

Викупна сума – це сума, яка виплачується страховиком у разі дострокового припинення дії договору страхування життя та розраховується математично на день припинення договору страхування життя залежно від періоду, протягом якого діяв договір страхування життя згідно з методикою, яка проходить експертизу в Уповноваженому органі, здійснена актуарієм і є невід'ємною частиною правил страхування життя.

Брутто-премія – це розмір страхових платежів за договором страхування, який сплачується страхувальником страховику (страховій організації). Розмір брутто-премії залежить від величини страхової суми, рівня ризику і періоду дії договору, а також складається з нетто-премій та інших витрат (комісійних страховому агенту, адміністративних витрат тощо).

Страховий тариф – ставка страхового внеску з одиниці страхової суми за визначений період страхування.

Нетто-ставка – має забезпечити виплати страхових сум, тобто має виконати фінансові зобов'язання страховика по договору страхування.

Брутто-ставка – це повна тарифна ставка. Вона складається з нетто-ставки й навантаження. Навантаження призначене компенсувати витрати на проведення страхових операцій тощо.

Вступ

Страхування життя являє собою типовий приклад довгострокової фінансової операції, де фактор часу відіграє вирішальну роль. Відмінність фінансових операції по страхуванню життя від звичайних фінансових операцій у тім, що виплати здійснюються тільки при настанні страхової події, що носить випадковий характер. Страхування життя – це вид особистого страхування, який передбачає обов’язок страховика здійснити страхову виплату згідно з договором страхування у разі смерті застрахованої особи, а також, якщо це передбачено договором страхування, у разі дожиття застрахованої особи до закінчення строку дії договору страхування та (або) досягнення застрахованою особою визначеного договором віку. Умови договору страхування життя можуть також передбачати обов’язок страховика здійснити страхову виплату у разі нещасного випадку, що стався із застрахованою особою, та (або) хвороби застрахованої особи (Закон України про страхування https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/85/96-%D0%B2%D1%80#Text). Договір страхування життя укладається між страховою компанією та страхувальником, який зобов’язаний внести певну суму, або декілька сум, які називають преміями, страховій компанії, а страхова компанія, в свою чергу, має виплатити страхове відшкодування власнику полісу, якщо відбудеться визначена страхова подія.

В першому розділі дисертаційної роботи розглянуто моделі, що включають витрати, та моделі з урахуванням викупних сум, бухгалтерський облік для цих моделей, а також види витрат.

Принцип еквівалентності виражено в тому, що сучасні актуарні вартості страхових виплат і нетто-премій рівні в момент укладання договору. Розглянуто побудову моделі страхових операцій, яка заснована на принципі еквівалентності, що включає чимало аспектів практики страхування та економічної реальності.

У страховика є вихідні грошові потоки, окрім страхових виплат. Витрати цього загального типу включають витрати на податки, на отримання ліцензії, а також на продаж і обслуговування страхових договорів. Отже ці витрати повинні бути сплачені за рахунок премій та інвестиційного доходу. При дослідженні було враховано такі витрати в моделі при визначенні резервів і премій.

У другому розділі розглядається модель з урахуванням викупних сум. У страхуванні життя дуже поширені викупні суми, і в законодавстві ряду країн їх наявність і розмір регулюються. Принцип еквівалентності змінюється шляхом включення зазначених витрат, разом зі страховими виплатами, до загальних витрат страховика, а компенсація цих витрат передбачається в преміях і резервах. В роботі показано, що таке розширення моделі є розумною основою фінансової звітності страхових компаній. Розрахунок премій і резервів - це дві найважливіші частини страхування.

У третьому розділі дисертації більш детально розглядаються види витрат і пов’язаний з ними бухгалтерський облік.

У четвертому розділі роботи досліджується актуарне ціноутворення за договорами страхування життя, враховуючи причину припинення дії договору. На основі застосування ланцюга Маркова з дискретним часом до моделі страхування життя з урахуванням витрат розкладаємо стохастичний прибуток від андеррайтингу на компоненти інвестиційного, страхового ризику та ризику витрат. Ця декомпозиція є основним інструментом, необхідним для визначення ціни договорів страхування на випадок смерті з урахуванням додаткової причини вибуття – другим декрементом.

Актуарні справедливі умови ціноутворення можуть бути досягнуті двома різними способами. Можна розрахувати традиційні премії за допомогою єдиної таблиці смертності від декременту та відкоригувати викупну суму для причини зменшення декременту. Крім того, можна відкоригувати актуарні премії та резерви для причини декременту, використовуючи залежні ймовірності смерті та встановити викупну вартість рівною скоригованому резерву Цільмера.

П’ятий розділ дисертаційної роботи присвячений побудові моделі страхування, яка включає витрати, з одним та двома декрементами. Розроблено алгоритми для визначення страхових тарифів, нетто- та брутто-премій, страхових резервів для вказаної моделі. Ці алгоритми реалізовано у програмному забезпеченні Excel. Проведено аналіз отриманих результатів.

1 Моделі, що включають витрати

Основні ідеї, необхідні для включення витрат в модель, спочатку детально розглянемо на деяких прикладах [1].

У таблицях 1.1 та 1.2 вказані характерні риси, обрані скоріше через їх зручність і легкість розрахунків, ніж через їх реалістичність.

Для того щоб розуміти викладений результат в таблиці згадаємо, що таке страхування на чисте дожиття на термін n років та страхування на дожиття (змішане страхування) на термін n років.

Страхування на чисте дожиття на термін n років передбачає виплату після закінчення n років в тому і тільки в тому випадку, коли застрахований буде живий після n років з моменту укладання страхового договору. Якщо виплачувана сума становить одиницю, то

$$b_t = \begin{cases} 0, & t \le n, \\ 1, & t > n, \end{cases} \qquad v_t = v^n, \ \ t \ge 0, \qquad Z = \begin{cases} 0, & T \le n, \\ v^n, & T > n. \end{cases}$$

Для позначення актуарної сучасної вартості страхування на чисте дожиття на строк n років (разова нетто-премія) будемо записувати:

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} := v^n {}_n p_x$$

Змішане страхування на термін n років передбачає виплату або у випадку смерті застрахованого, або у випадку дожиття ним до закінчення n-річного терміну, в залежності від того, що трапиться раніше. Якщо розмір виплати – одиниця, і якщо виплата у випадку смерті відбувається в момент смерті, то

$$b_t = 1, \ \ t \ge 0 \qquad v_t = \begin{cases} v^t, & t \le n, \\ v^n, & t > n, \end{cases} \qquad Z = \begin{cases} v^T, & T \le n, \\ v^n, & T > n. \end{cases}$$

Актуарна сучасна вартість (разова нетто-премія) для такого страхування позначається через $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$. Оскільки для змішаного страхування $b_t = 1$, то

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = A_{x:\overline{n}|} + \left(\frac{i}{\delta} - 1\right) A^1_{x:\overline{n}|}$$

Таблиця 1.1 Опис моделі.

1.	Вид страхування	змішане страхування на строк три роки з премією, що виплачується щорічно протягом строку страхування; договір укладено з особою (x), виплати та премії постійні
2.	Характер виплат	дискретна модель
3.	Смертність	$q_x = 0{,}1, q_{x+1} = 0{,}1111, q_{x+2} = 0{,}5$
4.	Відсоток	ефективна річна відсоткова ставка $i = 0{,}15$
5.	Страхова сума	1000
6.	Витрати	
	а) час	виплачується на початку кожного року дії договору
	б) величина	див. таблицю 1.2

Таблиця 1.2 Типи та величини витрат.

Тип витрат	Перший рік		Другий і наступні роки	
	відсоток від премії	постійна компонента	відсоток від премії	постійна компонента
Комісійні за продаж договору	10%	–	2%	–
Адміністративні витрати	4%	3	–	1
Податки, ліцензії та збори	2%	–	2%	–
Витрати на ведення договору	2%	1	2%	1
Укладання договору та андеррайтинг	2%	4	–	–
Всього	20%	8	6%	2

1.1 Премії та резерви

Означення: Принцип еквівалентності: $E(L) = 0$, де L – загальні збитки страховика на момент укладання страхової угоди. Тобто, математичне сподівання поточної вартості страхових премій = математичному сподіванню поточної вартості страхових виплат.

Означення: Премія називається *нетто-премією (чистою премією)* тоді, коли вона відповідає принципу еквівалентності $E(L) = 0$ тобто, коли математичне сподівання загального збитку рівне нулю.

Пункти з 1 по 5 табл. 1.1 з урахуванням принципу еквівалентності можна використовувати для визначення щорічної постійної нетто-премії за цим договором страхування: $1000P_{x:3\rceil} = 288{,}41$. Далі в табл. 1.3 подано подробиці розрахунку відповідних нетто-резервів.

Типи витрат, записані в табл. 1.2, будуть введені в модель шляхом зміни випадкової величини збитків. Сучасна вартість виплати буде збільшена на суму, що дорівнює сучасній вартості витрат. Ця нова сума буде потім компенсована сучасною вартістю постійної премії з надбавкою на витрати, що позначається через G. При складанні табл. 1.4 використовується інформація з табл. 1.2.

В описі випадкової величини ${}_0L_e$ збитків з урахуванням витрат, наведеної в табл. 1.4, неявно міститься припущення, що виплати та витрати покриваються щорічною премією G постійного розміру. Можлива й інша структура премій.

Таблиця 1.3 Розрахунок резервів виплат.

1	2	3	4
Тривалість цілих років майбутнього життя	Поточна вартість виплат – поточна вартість премій	Ймовірність	2×3
В момент заключення договору (${}_0L$)			
$K(x) = 0$	$581{,}16$	$0{,}1$	$58{,}12$
$K(x) = 1$	$216{,}94$	$0{,}1$	$21{,}69$
$K(x) \geq 2$	$-99{,}76$	$0{,}8$	$-79{,}81$
$1000\,{}_0V_{x:3\rceil} = E[{}_0L] = 0{,}00$ $\sigma({}_0L) = 215{,}51$			
1 рік після укладання договору (${}_1L$)			
$K(x) = 1$	$581{,}16$	$0{,}1111$	$64{,}57$
$K(x) \geq 2$	$216{,}94$	$0{,}8889$	$192{,}84$
$1000\,{}_1V_{x:3\rceil} = E[{}_1L] = 257{,}41$ $\sigma({}_1L) = 114{,}46$			

2 роки після укладання договору ($_2L$)			
$K(x) \geq 2$	581,16	1,0	518,16
$1000\ {}_2V_{x:\overline{3}\rceil} = E[\ {}_2L] = 518{,}16$ $\sigma(\ {}_2L) = 0$			
Як остаточне підтвердження ми можемо перевірити, що $_3\mathrm{V}_{x:\overline{3}\rceil} = 1{,}0$:			
$1000(\ {}_2V_{x:\overline{3}\rceil} + P_{x:\overline{3}\rceil})(1+i) = 1000$ $(518{,}16 + 288{,}41)(1{,}15) = 1000$			

Таблиця 1.4 Випадкова величина збитків з урахуванням витрат $_0L_e$.

Тривалість цілих років майбутнього життя	Поточна вартість		Ймовірність
	Страхові виплати + витрати	премія	
$K(x) = 0$	$1000v + (0{,}20G + 8)$	$-G\ddot{a}_{\overline{1}\rceil}$	0,1
$K(x) = 1$	$1000v^2 + (0{,}20G + 8) + (0{,}06G + 2)a_{\overline{1}\rceil}$	$-G\ddot{a}_{\overline{2}\rceil}$	0,1
$K(x) \geq 2$	$1000v^3 + (0{,}20G + 8) + (0{,}06G + 2)a_{\overline{2}\rceil}$	$-G\ddot{a}_{\overline{3}\rceil}$	0,8
Математичне сподівання	$688{,}58387 + (0{,}20G + 8) + (0{,}06G + 2)(1{,}3875236)$	$-G(2{,}38752$	0

У цьому випадку премія з надбавкою на витрати визначається згідно з принципом еквівалентності, отже математичне сподівання випадкової величини збитків, з урахуванням витрат дорівнює нулю. З табл. 1.4 випливає, що

$$688{,}58387 + (0{,}20G + 8) + (0{,}06G + 2)(1{,}3875236) - G(2{,}3875236) = 0,$$

звідки $G = 332{,}35$. Це можна записати у вигляді $G = 1000P_{x:\overline{3}\rceil}$ + постійна надбавка на витрати $(e) = 288{,}41\ +\ 43{,}94\ =\ 332{,}35$.

В табл. 1.5 наведені підрахунки математичних сподівань і стандартних відхилень випадкової величини збитків з урахуванням витрат на момент укладення договору, а також через 1 рік та 2 роки після цього моменту. Загальний резерв розбивається на компоненту, пов’язану з виплатами (нетто-компоненту), і компоненту, пов’язану з надбавкою на витрати. Кожного року математичне сподівання надходжень постійних нетто-премій відрізняється від математичного сподівання страхових виплат. Ця різниця утворює невід’ємний нетто-резерв. Аналогічно, щороку математичне сподівання надходжень постійної надбавки на витрати не покриває математичного сподівання величини витрат. Це створює недодатний резерв витрат.

Таблиця1.5 Математичне сподівання випадковоївеличини збитків з урахуванням витрат.

Тривалість цілих років майбутнього життя	(Сучасна вартість виплат) $-1000P_{x:3\rceil}\ddot{a}_{\overline{k+1}\rceil}$	+(сучасна вартість витрат) $-e\ddot{a}_{\overline{k+1}\rceil}$	Ймовір ність
В момент заключення договору (${}_0L_e$)			
$K(x)=0$	$(869{,}57-288{,}41)$	$+(74{,}47-43{,}94)$	0,1
$K(x)=1$	$(756{,}14-539{,}20)$	$+(93{,}55-82{,}15)$	0,1
$K(x)\geq 2$	$(657{,}52-757{,}28)$	$+(110{,}14-115{,}37)$	0,8
Математичне сподівання: нетто-резерв + резерв витрат = спільний резерв			
$0+0=0$ $\sigma({}_0L_e)=226{,}82$			
1 рік після укладання договору (${}_1L_e$)			
$K(x)=1$	$(869{,}57-288{,}41)$	$+(21{,}94-43{,}94)$	0,1111
$K(x)\geq 2$	$(756{,}14-539{,}20)$	$+(41{,}02-82{,}15)$	0,8889
Математичне сподівання: нетто-резерв + резерв витрат = спільний резерв			
$257{,}41-39{,}00=218{,}41$ $\sigma({}_1L_e)=120{,}47$			
2 роки після укладання договору (${}_2L_e$)			
$K(x)\geq 2$	$(869{,}57-288{,}41)$	$+(21{,}94-43{,}94)$	1,0
Математичне сподівання: нетто-резерв + резерв витрат = спільний резерв			
$581{,}16-22{,}00=559{,}16$ $\sigma({}_2L_e)=0$			
В якості підтвердження: кінцевий загальний резерв (на кінець 3-го року) має вигляд (загальний резерв на кінець 2-го року + премія з надбавкою на витрати – витрати)$(1+i)=(559{,}16+332{,}35-21{,}94)(1{,}15)=1000$			

У наступних зауваженнях сформульовано деякі ключові моменти, що містяться в цьому прикладі.

Зауваження 1. Випадкові величини збитків у тому вигляді, як вони були визначені з самого початку, вимірюють різницю між сучасною вартістю виплат та сучасною вартістю нетто-премій в різні моменти часу, в які можуть бути здійснені виплати. Ці випадкові величини можна змінити, додавши витрати і розглядаючи премії з надбавкою на витрати.

Зауваження 2. Принцип еквівалентності можна застосовувати для визначення премій з надбавкою на витрати і відповідних загальних резервів (нетто-резерви + резерви витрат).

Зауваження 3. Резерв витрат у початкові роки дії договору часто буває від'ємним.

Зауваження 4. Стандартне відхилення випадкової величини збитків з урахуванням витрат може бути використане для визначення стабілізаційного фонду. Цей фонд захищає від дисбалансу між преміями та інвестиційним доходом, з одного боку, і страховими виплатами і витратами, з іншого боку, який може виникнути через випадкову природу моментів часу, в які здійснюються страхові виплати.

1.2 Бухгалтерський облік для моделі, що включає витрати

На промислових підприємствах продукт зазвичай проводиться до його продажу. У багатьох видів підприємництва, пов'язаного з наданням послуг, останні дані надаються до того, як буде проведена оплата. Страхові операції незвичайні тим, що страхові премії надходять до того, як надається послуга, що полягає в прийнятті ризику на страхування. Саме тому органи страхового регулювання та споживачі турбуються про фінансову стійкість страховика, який зобов'язаний надавати їм дані про своє фінансове становище.

Страхування ризику передбачає зменшення збитків від діяльності за рахунок фінансової компенсації зі спеціальних страхових фондів.

Бухгалтерський облік певною мірою спрямований на те, щоб привести у відповідність витрати, які пов'язані з наданням послуги або продукту, а також виручки від їх продажу. Його метою є вимірювання прибутку або втрат, пов'язаних із здійсненням цієї діяльності. Такий облік у сфері страхування життя та операцій з ануїтетами відрізняється від бухгалтерського обліку на багатьох підприємствах, тому що надходження відбуваються перед тим, як стають відомими витрати. Для досягнення кращого балансу між надходженнями премій і відповідними витратами можна використовувати системи резервів, постійні нетто - премії та премії з надбавкою на витрати.

Наш приклад продовжимо в табл. 1.6 і 1.7, в яких зробимо наступні припущення:

- Щорічна брутто-премія для кожного договору, рівна 342,35, складається з премії з надбавкою на витрати і довільно призначеної суми розміру 10. Залишок після вирахування витрат за цими 10 одиницями забезпечує прибуток і не заплановані виплати.
- Бухгалтерський баланс складається для сукупності детермінованого дожиття, що складається в початковий момент з 10 застрахованих. Кожна величина, що входить в баланс, може бути розбита на 10 доданків, і кожний з цих доданків можна інтерпретувати, як очікувану величину для кожної особи, застрахованої в початковий момент часу.
- Витрати виплачуються і інвестиційний дохід заробляється відповідно до табл. 1.1 і 1.2.
- Величина початкового фонду дорівнює 1000.
- У першому бухгалтерському балансі (стовпець (a)) в пасиві відображені тільки нетто-резерви. У другому (стовпець (b)) зобов’язаннями є нетто-резерви + резерви витрат.

Таблиця 1.6 Звіт про прибутки та збитки (10 застрахованих в початковий момент).

Прибутки та збитки	(a) Нетто-резерв в якості пасиву	(b) Нетто-резерв + резерв витрат в якості пасиву
Протягом 1-го року		
Дохід		
Премія (10)	3423,50	3423,50
Інвестиційний дохід (15%)	548,32	548,32
	3972,32	3972,32
Відрахування з доходу		
Витрати: • нараховані у відсотках до премії (20%)	684,70	684,70
• постійні (8)	80,00	80,00
Страхові виплати на випадок смерті (1)	1000,00	1000,00
Збільшення резервів	2316,69	1965,69
	4081,39	3730,39
Чистий дохід	−109,07	241,93
Протягом 2-го року		
Дохід		
Премія (9)	3081,15	3081,15
Інвестиційний дохід (15%)	912,88	912,88
	3994,03	3994,03
Відрахування з доходу		
Витрати: • нараховані у відсотках до премії (6%)	184,87	184,87
• постійні (2)	18,00	18,00
Страхові виплати на випадок смерті (1)	1000,00	1000,00
Збільшення резервів	2332,59	2507,59
	3535,46	3710,46
Чистий дохід	458,57	283,57

Протягом 3-го року		
Дохід		
Премія (8)	2738,80	2738,80
Інвестиційний дохід (15%)	1283,59	1283,59
	4022,39	4022,39
Відрахування з доходу		
Витрати: • нараховані у відсотках до премії (6%)	164,33	164,33
• постійні (2)	16,00	16,00
Виплати на випадок смерті та дожиття (8)	8000,00	8000,00
Збільшення резервів	−4649,28	−4473,28
	3531,05	3707,05
Чистий дохід	491,34	315,34

Коментарі до таблиці:

1. Інвестиційний дохід = (активи в кінці попереднього року + надходження премій – витрати)$(0{,}15)$.
2. Загальний чистий дохід $= -109{,}07 + 458{,}57 + 491{,}34$ (стовпець а)
$$= 241{,}03 + 283{,}57 + 315{,}34 \text{ (стовпець } b\text{)}$$
$$= 840{,}84.$$
3. Інший спосіб розрахунку

Загальний чистий дохід = (дохід від інвестування першочергового фонду) + (накопичена вартість надбавки на забезпечення чистого прибутку)

$$= 1000[(1{,}15)^3 - 1] +$$
$$+10[(10)(0{,}8)(1{,}15)^3 + 9(0{,}94)(1{,}15)^2 + (8)(0.94)(1{,}15)] =$$
$$= 840{,}91.$$

Означення: *Баланс* – це звіт про фінансовий стан підприємства, який дає можливість оцінити розмір його активів по відношенню до власних коштів і зобов’язань.

<u>Означення:</u> *Активи* – це всі ресурси, якими підприємство чи людина користуються для виробництва продукції або певної діяльності з метою отримання доходу.

<u>Означення:</u> *Пасиви* – це всі фінансові ресурси, які є у розпорядженні підприємства. Ці ресурси можуть складатись з власного капіталу і позичених (залучених) коштів.

<u>Означення:</u> *Сальдо* – залишок по бухгалтерському рахунку, різниця між надходженнями та витратами.

Таблиця 1.7 Балансовий звіт (10 застрахованих в початковий момент часу).

Балансовий звіт	(a) Нетто-резерв в якості пасиву	(b) Нетто-резерв + резерв витрат в якості пасиву
В кінці 1-го року		
Активи	3207,62	3207,62
Пасиви (резерви)	2316,69	1965,69
Сальдо	890,93	1241,93
	3207,62	3207,62
В кінці 2-го року		
Активи	5998,78	5998,78
Пасиви (резерви)	4649,28	4473,28
Сальдо	1349,50	1525,50
	5998,78	5998,78
В кінці 3-го року		
Активи	1840,84	1840,84
Пасиви (резерви)	0	0
Сальдо	1840,84	1840,84
	1840,84	1840,84

Коментарі до таблиці:

1. Приріст сальдо = загальний чистий дохід (див. коментар 2 до табл.1.6).
   $1840{,}84 - 1000 = 840{,}84$
2. Сальдо = (сальдо на кінець попереднього року + чистий дохід).

3. Активи = [активи на кінець попереднього року + (чистий дохід + приріст резервів)] = [активи на кінець попереднього року + (премії + інвестиційний дохід – страхові виплати – витрати)].

Баланс, який використовує в якості пасивів нетто-резерви, є в деякому сенсі внутрішньо суперечливим, тому що майбутні витрати і кошти на їх погашення, закладені в майбутніх преміях, не включені в пасиви.

Наступні зауваження вказують деякі додаткові ключові моменти в прикладі бухгалтерського обліку.

Зауваження 6. Величини, відображені в балансах як чистий дохід, піддаються меншим коливанням, коли пасивом вважаються нетто-резерви і резерви витрат, а не тільки нетто-резерви. Чистий дохід також може бути пов'язаний з відсотками, що нараховуються на сальдо, і надбавкою на чистий прибуток, накопичений з урахуванням відсотка.

Зауваження 7. Загальні доходи протягом трирічного періоду не залежать від обраного методу розрахунку пасивів.

Зауваження 8. Отримання очікуваного прибутку в реальній практиці відбувається не з тим ступенем визначеності, яка передбачалася в розглянутому прикладі.

Практика (а отже, і термінологія) бухгалтерського обліку в компаніях, які займаються страхуванням життя, ускладнюються тим, що ними користуються різні групи осіб з різними інтересами та сферою відповідальності.

2 Модель з урахуванням викупних сум

Означення: Викупна сума – це сума, яка виплачується страховиком у разі дострокового припинення дії договору страхування життя та розраховується математично на день припинення договору страхування життя залежно від періоду, протягом якого діяв договір страхування життя згідно з методикою, яка проходить експертизу в Уповноваженому органі, здійснена актуарієм і є невід'ємною частиною правил страхування життя.

Уповноважений орган може встановити вимоги до методики розрахунку викупної суми.

Означення: Декрементом – називають причину «припинення» дії страхового полісу, що призводить до здійснення виплат. Цих причин може бути багато. У страхуванні життя їх зазвичай дві: смерть застрахованого або дострокове припинення дії страхової угоди. У випадку «скасування» застрахований розриває договір і отримує його грошову вартість (викупну суму).

2.1 Премії та резерви

У цьому розділі матеріал, викладений в розд. 1, поширюється на **модель з двома причинами декремента**, що включає викупні суми. Позначимо *розмір викупних сум через* $b_{x+t}^{(2)}$. Вони визначаються в прикладі 2.1. Цей приклад базується на принципі, який регулює величину мінімальної викупної суми, і згідно з яким застосовується модель зі смертю, як єдиною причиною декремента, і з необмеженою сумою на забезпечення витрат. Цей принцип базується на тому, що якщо викупні суми в моделі з двома причинами декремента приблизно дорівнюють резервам, в які включені витрати, тобто нетто-резервам + резерви витрат, визначеним з використанням відповідної моделі зі смертю в якості єдиної причини декремента, то додавання викупної суми буде мало впливати на премії і резерви.

<u>Приклад 2.1.</u> Нетто-премія, визначена на основі принципу еквівалентності і припущень з табл. 1.1, дорівнює $1000P_{x:3\rceil} = 288{,}41$. До нетто-премії додається довільна надбавка на витрати розміру $40/\ddot{a}_{x:3\rceil} = = 40/2{,}3875 = 16{,}75$. Отримана нетто-премія з надбавкою на витрати дорівнює $305{,}16$.

У термінології страхового регулювання така премія називається *скоригованою премією*, і в даному прикладі позначається через $1000P^{A}_{x:3\rceil}$. Визначимо викупну суму на основі припущень з табл. 1.1, 1.2, використовуючи наступну формулу, яка має вигляд перспективної формули розрахунку резервів. Отримаємо:

$$b^{(2)}_{x+t} = 1000\left(A_{x+t:\overline{3-t}\rceil} - P^{A}_{x:3\rceil} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{3-t}\rceil}\right).$$

$$b^{(2)}_{x+1} = 1000A_{x+1:2\rceil} - 305{,}16\ddot{a}_{x+1:2\rceil} = 768{,}75 - 305{,}16(1{,}7729) = 227{,}73,$$

$$b^{(2)}_{x+2} = 1000A_{x+2:1\rceil} - 305{,}16\ddot{a}_{x+2:1\rceil} = 869{,}57 - 305{,}16 = 564{,}41.$$

Припущення, використані в цьому прикладі, представлені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1 Приклад, що включає витрати та викупні суми.

Викупні суми	
$b^{(2)}_{x+1} = 227{,}73$	$b^{(2)}_{x+2} = 564{,}41$
Ймовірність вибуття з кількох причин	
$q^{(1)}_{x} = 0{,}1$	$q^{(1)}_{x+1} = 0{,}1111$
$q^{(2)}_{x} = 0{,}1$	$q^{(2)}_{x+1} = 0{,}1111$

Таблиці 2.2 і 2.3 тісно пов’язані одна з одною. У таблиці 2.2 на основі принципу еквівалентності визначено щорічну премію з надбавкою на витрати. Таблиця 2.3 відповідає табл. 1.5 і містить розрахунки нетто-резервів та резервів витрат у моделі страхування з двома причинами декремента.

Випадки смерті і дострокового припинення договорів передбачаються незалежними. Передбачається, що дострокове припинення договорів відбувається тільки в кінці річних часових інтервалів, тобто ${}_{t}p'^{(2)}_{x}$ є ступінчастою функцією, як функція ${}_tp_x'^{(3)}$. В цьому прикладі $q_x^{(1)} = q_x$ та $q_{x+1}^{(1)} = q_{x+1}$.

Таблиця 2.2 містить дані, необхідні для визначення щорічної нетто-премії $P_{x:3\rceil}^2$, щорічної надбавки на витрати e та щорічної премії з надбавкою на витрати G у моделі з двома причинами декремента згідно з принципом еквівалентності. Маємо

$$621{,}0011 - P_{x:3\rceil}^2(2{,}1661) = 0, \quad P_{x:3\rceil}^2 = 286{,}69,$$

$$612{,}0011 + (0{,}2G + 8) + (0{,}06G + 2)(1{,}1661) - G(2{,}1661) = 0,$$

$$G = 332{,}96$$

$$(0{,}2G + 8) + (0{,}06G + 2)(1{,}1661) - e(2{,}1661) = 0, \; e = 46{,}27.$$

В якості перевірки помітимо, що

$$G = P_{x:3\rceil}^2 + e, \; 332{,}96 = 286{,}69 + 46{,}27.$$

2.2 Бухгалтерський облік для моделі, що включає витрати та викупні суми

Як показано в розділі 1, принцип еквівалентності забезпечує концептуальні засади фінансової звітності страхових компаній. У цьому розділі приклад фінансової звітності з розділу 1.2 буде поширений на модель з двома причинами декремента.

- В якості щорічної брутто-премії буде взята щорічна постійна премія з надбавкою на витрати + довільна сума розміру 10 для забезпечення прибутку і «на випадковість» (− витрати по цих 10 одиницях).
- Бухгалтерська звітність ґрунтується на математичних сподіваннях виплат на випадок смерті, викупних сум і числа тих, хто дожив. Є 10 застрахованих в початковий момент часу.
- Витрати виплачуються та інвестиційний дохід заробляється відповідно до табл. 1.1 і 1.2.
- Величина початкового фонду дорівнює 1000.

- У звіті зі стовпця (a) в якості пасиву розглядаються лише нетто-резерви (в моделі з єдиною причиною вибуття - смертю), а в стовпці (b) в якості пасиву розглядаються нетто-резерви і резерви витрат.

Порівняння табл. 1.6 і 1.7 з табл. 2.4 і 2.5 підтверджує, що фінансова звітність ближче до реальності, коли використовується модель з двома причинами декремента, в яких враховуються витрати

Таблиця 2.2 Випадкові величини збитків з урахуванням витрат,модель з двома причинами декремента; поточна вартість на момент укладання договору

Результат:		Поточна вартість виплат	+	Поточна вартість витрат	−	Поточна вартість премій	Ймовірність
Покрокова тривалість майбутнього життя $K(x)$	Причина декремента $J(x)$						
0	1	$1000,00v$	+	$(0,2G+8,0)$	−	G	0,1
	2	$227,73v$	+	$(0,2G+8,0)$	−	G	0,1
1	1	$1000,00v$	+	$(0,2G+8,0)+(0,06G+2,0)a_{1\rceil}$	−	$G\ddot{a}_{2\rceil}$	0,0889
	2	$564,41v^2$	+	$(0,2G+8,0)+(0,06G+2,0)a_{1\rceil}$	−	$G\ddot{a}_{2\rceil}$	0,0889
≥ 2	1 або 2	$1000,00v$	+	$(0,2G+8,0)+(0,06G+2,0)a_{2\rceil}$	−	$G\ddot{a}_{3\rceil}$	0,6222
		$621,011$	+	$(0,2G+8,0)+(0,06G+2,0)(1,1661)$	−	$\left(1000P^{2}_{\bar{x}:3\rceil}+e\right)(2,1661)$	
$\sigma\left({}_0L^2_{\bar{e}}\right)=224,25$							

Таблиця 2.3 Випадкові величини збитків з урахуванням витрат; модель з двома причинами декремента

Витрати:		Поточна вартість виплат	$-$	Поточна вартість нетто-премій	$+$	Поточна вартість витрат	$-$	Поточна вартість надбавки на витрати	Ймовірність
Покрокова тривалість майбутнього життя $K(x)$	Причини декременту $J(x)$								
На момент часу 1									
1	1	$1000{,}00v$	$-$	$1000P^{2}_{\bar{x}:\overline{3}\rceil}$	$+$	$(0{,}06G+2{,}0)$	$-$	e	0,1111
	2	$564{,}41v$	$-$	$1000P^{2}_{\bar{x}:\overline{3}\rceil}$	$+$	$(0{,}06G+2{,}0)$	$-$	e	0,1111
≥ 2	1 або 2	$1000{,}00v^2$	$-$	$1000P^{2}_{\bar{x}:\overline{3}\rceil}\ddot{a}_{\overline{2}\rceil}$	$+$	$(0{,}06G+2{,}0)\ddot{a}_{\overline{2}\rceil}$	$-$	$e\ddot{a}_{\overline{2}\rceil}$	0,7778
Математичне сподівання		нетто-резерв			$+$	резерв витрат		= спільний резерв	
$\sigma({}_2L^2_{\bar{e}}) = 120{,}44$		$258{,}67$			$+$	$(-40{,}73)$		$= 217{,}94$	
На момент часу 2									
≥ 2	1 або 2	$1000{,}00v$	$-$	$1000P^{2}_{\bar{x}:\overline{3}\rceil}$	$+$	$(0{,}06G+2{,}0)$	$-$	e	$1{,}0000$
Математичне сподівання		нетто-резерв			$+$	резерв витрат		= спільний резерв	
		$582{,}88$			$+$	$(-24{,}29)$		$= 558{,}59$	
В якості перевірки спільного кінцевого резерва на кінець 3-го року: (спільний резерв + премії з надбавкою на витрати – витрати, все на момент часу 2)$(1+i) = (558{,}59 + +332{,}96 - 21{,}98)(1{,}15) = 1000.$									

Таблиця 2.4 Звіт про прибутки та збитки (першочергово 10страхувальників).

Прибутки та збитки	(a) Нетто-резерв в якості пасиву в моделі з однією причиною декремента	(b) Нетто-резерв і резерви витрат в якості пасиву в моделі з двома причинами декремента
Протягом 1-го року		
Дохід	3429,60	3429,60
Премія (10)	549,55	549,55
Інвестиційний дохід (15%)	3979,15	3979,15
Відрахування з доходу		
Витрати: • нараховані у відсотках до премії (20%)	685,92	685,92
• постійні (8)	80,00	80,00
Страхові виплати на випадок смерті (1)	1000,00	1000,00
Викупна сума (1)	227,73	227,73
Збільшення резервів	2059,28	1743,52
	4052,93	3737,17
Чистий дохід	−73,78	241,98
Протягом 2-го року		
Дохід		
Премія (10)	2743,68	2743,68
Інвестиційний дохід (15%)	832,28	832,28
	3575,96	3575,96
Відрахування з доходу		
Витрати: • нараховані у відсотках до премії (6%)	164,62	164,62
• постійні (2)	16,00	16,00
Страхові виплати на випадок смерті (0,8889)	888,90	888,90
Викупна сума (0,8889)	501,70	501,70
Збільшення резервів	1556,83	1732,15
	3128,05	3303,37

Чистий дохід	447,91	272,59
Протягом 3-го року		
Дохід		
Премія (6,2222)	2133,97	2133,97
Інвестиційний дохід (15%)	1047,56	1047,56
	3181,53	3181,53
Відрахування з доходу		
Витрати: • нараховані у відсотках до премії (6%)	128,04	128,04
• постійні (2)	12,44	12,44
Страхові виплати на випадок смерті (6,2222)	6222,22	6222,22
Збільшення резервів	−3616,11	−3475,67
	2746,59	2887,03
Чистий дохід	434,94	297,50

Якщо вибирати викупні суми з інших міркувань, ніж зменшення змін премій і резервів при переході від моделі з однією причиною декремента до моделі з двома причинами декремента, то відмінності в прибутку для цих двох моделей будуть більш істотними.

Таблиця 2.5 Балансовий звіт (10 застрахованих в початковий момент часу).

Прибутки та збитки	(a) Нетто-резерв в якості пасиву в моделі з одною причиною декремента	(b) Нетто-резерв і резерви витрат в якості пасиву в моделі з двома причинами декремента
В кінці 1-го року		
Активи	2985,50	2985,50
Пасиви (резерви)	2059,60	1743,52
Сальдо	926,22	1241,68
	2985,50	2985,20
В кінці 2-го року		
Активи	4990,24	4990,24
Пасиви (резерви)	3616,11	3475,67

Сальдо	1374,13	1514,57
	4990,24	4990,24
В кінці 3-го року		
Активи	1809,07	1809,07
Пасиви (резерви)	0	0
Сальдо	0	0
	1809,07	1809,07

Коментарі до таблиці 2.4, 2.5:

1. Спільний чистий дохід =

$$= -73{,}78 + 447{,}91 + 434{,}94 == 809{,}07 \text{ [стовпець (а)]}$$

$$= 241{,}98 + 272{,}59 + 294{,}50 = 809{,}07 \text{ [стовпець (б)]}$$

2. Другий спосіб розрахунку сукупного доходу:

   (Відсотковий дохід від інвестування початкового фонду) + (Накопичена вартість надбавок на прибуток)

$$= 1000[(1{,}15)^3 - 1] +$$

$$+10[10(0{,}8)(1{,}15)^3 + 8(0{,}94)(1{,}15)^2 + (6{,}2222)(0{,}94)(1{,}15)] =$$

$$= 809{,}26.$$

Різниця між результатами цих двох розрахунків пов’язана з накопиченням помилок округлення, які виникли через округлення брутто-премій до двох знаків після коми.

3 Види витрат

Система бухгалтерського обліку страхових компаній призначається для запису, класифікації та узагальнення фінансових операцій. Але вона ж буде надавати дані і за сферами діяльності: кількість та сума продажів, кількість здійснених страхових виплат, кількість виплачених премій і т.д. Після збору цієї інформації можна провести аналіз, мета якого – співвіднести основні статті витрат з напрямками діяльності, які вони забезпечують. На основі такого аналізу визначається надбавка до премії для страхових договорів, які будуть продані в майбутньому. Якщо використовується принцип еквівалентності, актуарна сучасна вартість надбавки на витрати дорівнює актуарній сучасній вартості витрат вироблених за цим договором.

Класифікація та розподіл витрат страхової організації - важкі завдання. Приклад такої класифікації наведено табл. 3.1. Тут запропонована приблизна система класифікації і показані її результати.

При визначенні премій з надбавкою на витрати основна увага приділяється витратам на страхування. Проте витрати, пов’язані з інвестуванням, зазвичай розглядаються, як необхідна складова інвестиційного процесу і відображаються на величині премій через скорочення прогнозованої процентної ставки.

У деяких випадках практика вказує природні зв’язки між статтями витрат і видами діяльності. Наприклад, зазвичай комісійна винагорода страховому агенту становить деякий відсоток від премії першого року і наступних років. В розділі 1 виплачувані комісійні становили 10% від премії першого року і 2% від премії другого і третього року. Податки на страхові компанії зазвичай є часткою від премії. В розд. 1 вважалося, що на податки, ліцензії та збори припадало 2% від премій.

Таблиця 3.1 Схема класифікації витрат страхової компанії.

Класифікація витрат	Компоненти
Витрати на інвестування	(a) витрати на аналіз
	(b) витрати на покупку, продаж та технічне обслуговування
Витрати на страхування	
1. Витрати на залучення нових страхувальників	(a) витрати на продаж, включаючи комісійні агентам і витрати на рекламу
	(b) витрати на андерайтинг, включаючи медичний огляд
	(c) витрати на підготовку нових договорів та їх реєстрацію
2. Витрати на ведення договорів	(a) витрати на збір премій та облік
	(b) витрати, пов’язані зі зміною вигодо набувача та реалізації права змін умов договору (страхових опціонів)
	(c) витрати на листування з власником договору
3. Адміністративні витрати	(a) витрати на дослідження
	(b) витрати на актуарні та загальні юридичні послуги
	(c) витрати на бухгалтерський облік та управління
	(d) податки, ліцензії та збори
4. Витрати на врегулювання страхових випадків	(a) витрати на розслідування вимог на виплати та юридичний захист
	(b) витрати, пов’язані із здійсненням страхових виплат

Розподіл інших статей витрат менш очевидний, і часто використовується комбінація статистичного аналізу та здорового глузду. Зазвичай витрати на залучення клієнтів включаються в надбавку на витрати для премій першого року дії договору, тому що для підготовки і продажу нових страхових договорів здійснюються маркетингові та андерайтингові витрати. Деякі види витрат на залучення клієнтів залежать від розміру премії, як, наприклад, комісійні. Деякі змінюються залежно від розміру страхової суми, як наприклад, витрати на андерайтинг. Деякі витрати мають місце для кожного укладеного договору, незалежно від розміру страхової суми або премії, наприклад, витрати на ведення внутрішньої документації.

Класифікація та розподіл витрат є важливими інструментами контролю за страховими операціями. Однак при визначенні премій точка зору на витрати є скоріше перспективною, ніж ретроспективною. Мета такого контролю - збалансувати майбутні витрати і майбутні надбавки до премії. Отже динаміка витрат при очікуваній інфляції або дефляції та економія коштів від введення автоматизації враховуються в надбавці на витрати.

Спірним є включення до надбавки до премії коштів на покриття витрат, які наведені в табл. 3.1 у статтях «Витрати на страхування, адміністративні витрати: (a), (b) і (c)», та витрат, що виникають при створенні системи розповсюдження страхових продуктів. Ці витрати безпосередньо не пов’язані з одним окремо взятим договором.

Таблиця 3.2 ілюструє систему класифікації з таблиці 3.1 для витрат на страхування та відповідних надбавок.

Таблиця 3.2 Приклад розподілу майбутніх страхових витрат.

Класифікація	1-ий рік			2-ий і наступні роки				
	на 1 договір	на 1000 одиниць страхової суми	% від премії	на 1 договір	на 1000 одиниць страхової суми	% від премії для року дії договору		
						2-9	10-15	16 і більше
1. Витрати на залучення страхувальників								
(a) витрати на продаж								
комісійні	–	–	60%	–	–	7%	5%	3%

утримання бюро продажів	–	–	25%	–	–	2,5%	1,5%	1%
Інші види витрат, пов'язані з продажами	12,5%	4%	–	–	–	–	–	–
(b) андерайтинг	18,0%	0,50%	–	–	–	–	–	–
(c) висновок і реєстрація договорів	4%	–	–	–	–	–	–	–
2. Витрати на ведення договору	2%	0,25%	–	2%	0,25%	–	–	–
3. Адміністративні витрати (a), (b), (c),	4%	0,25%	–	4%	0,25%	–	–	–
(d) податки	–	–	2%	–	–	2%	2%	2%
Разом (1,2,3)	40,5%	5%	87%	6%	0,5%	11,5%	8,5%	6%
4. Витрати на урегулювання страхових випадків 18,00 одиниць на один договір + 0,10 на 1000 одиниць страхової суми								

Андерайтинг (страхування) – процес аналізу запропонованих до страхування ризиків.

Приклад 3.1. Використовуючи принцип еквівалентності, виведемо формулу *щорічної премії з надбавкою на витрати для договору безстрокового страхування на випадок смерті*, укладеного особою (x), зі страховою сумою $1000b$ у **напівнеперервній моделі**. Статті витрат перераховані в табл. 3.2; використовуємо модель з ***однією причиною декремента*** або припустимо, що викупні суми визначені так, що вони ніяк не впливають на премії, розраховані в моделі зі смертю як єдиною причиною декремента. Припускаючи, що андеррайтинг призведе до селекції, використовуємо таблицю смертності з 15-річним періодом селекції.

Позначимо через $G(b)$ – *премію з надбавкою на витрати* для договору, за яким виплати на випадок смерті проводяться в розмірі b тисяч. Тоді, використовуючи принцип еквівалентності, отримаємо

(актуарна сучасна вартість премії з надбавкою на витрати) = (актуарна сучасна вартість страхових виплат, витрат на врегулювання страхових випадків та інших видів витрат),

$$G(b)\ddot{a}_{[x]} = 1000b\bar{A}_{[x]} + [40{,}50 + 5{,}00b + 0{,}87G(b)] +$$
$$+\left(6{,}00a_{[x]} + 0{,}50ba_{[x]}\right) + \left[\left(0{,}115a_{[x]:\overline{8}|} + 0{,}085\,{}_{9|6}\ddot{a}_{[x]} + 0{,}06\,{}_{15|}\ddot{a}_{[x]}\right)G(b)\right]$$
$$+(18{,}00 + 0{,}10b)\bar{A}_{[x]},$$

$$G(b)\left(\ddot{a}_{[x]} - 0{,}87 - 0{,}115a_{[x]:\overline{8}|} - 0{,}085\,{}_{9|6}\ddot{a}_{[x]} - 0{,}06\,{}_{15|}\ddot{a}_{[x]}\right) =$$
$$= \left(1000{,}1\bar{A}_{[x]} + 5{,}00 + 0{,}05a_{[x]}\right)b + 40{,}50 + 6{,}00a_{[x]} + 18{,}00\bar{A}_{[x]}.$$

Величина постійної щорічної премії з надбавкою на витрати для виплат на випадок смерті розміру $1000b$ становить

$$G(b) = \frac{\left(1000{,}1\bar{A}_{[x]} + 5{,}00 + 0{,}50a_{[x]}\right)b + 40{,}50 + 6{,}00a_{[x]} + 18{,}00\bar{A}_{[x]}}{0{,}94\ddot{a}_{[x]} - 0{,}755 - 0{,}03\ddot{a}_{[x]:\overline{9}|} - 0{,}025\ddot{a}_{[x]:\overline{15}|}}.$$

Постійна щорічна премія з надбавкою на витрати, розрахована на тисячу одиниць страхової суми, рівна

$$\frac{G(b)}{b} = \frac{1000{,}1\bar{A}_{[x]} + 5{,}00 + 0{,}50a_{[x]} + \left(40{,}50 + 6{,}00a_{[x]} + 18{,}00\bar{A}_{[x]}\right)/b}{0{,}94\ddot{a}_{[x]} - 0{,}755 - 0{,}03\ddot{a}_{[x]:\overline{9}|} - 0{,}025\ddot{a}_{[x]:\overline{15}|}}.$$

На практиці премії зазвичай визначаються як частка від одиниці страхової суми. Для страхування життя ці частки, як правило, встановлюються на 1000 одиниць страхової суми. Для ануїтетів вони зазвичай встановлюється по відношенню до щомісячної виплати.

У прикладі 3.1 величина премії з надбавкою на витрати $G(b)$ не пропорційна b, тому що величина деяких видів витрат не залежить від b. (Якби таких витрат не було, відношення $G(b)/b$ було б сталим.) Засоби, передбачені на покриття цих незалежних від b витрат, можна визначити за допомогою спеціальних методів. Один з таких методів - замінити на усереднену по портфелю страхову суму. Інший метод - відокремити витрати, що не залежать від страхової суми, від тих статей витрат, які змінюються пропорційно страховій сумі договору, і компенсувати такі витрати спеціальною надбавкою, що не залежить від страхової суми. У прикладі 3.1 величина такої щорічної надбавки дорівнюватиме

$$\frac{40{,}50 + 6{,}00 a_{[x]} + 18{,}00 \bar{A}_{[x]}}{0{,}94 \ddot{a}_{[x]} - 0{,}755 - 0{,}03 \ddot{a}_{[x]:\overline{9}|} - 0{,}025 \ddot{a}_{[x]:\overline{15}|}}.$$

Часто ці спеціальні надбавки усереднюються за договорами, укладеними особами одного віку, так що вони постійні для даного віку укладення договору.

4 Ланцюги Маркова в моделях страхування життя, які включають витрати

Модель, яка ґрунтується на застосуванні ланцюга Маркова, передбачає, що ймовірність переходу з одного стану в інший залежить лише від поточного стану і не залежить від минулих станів.

Нехай $\{X(t), t \geq 0\}$ – випадковий процес з скінченним фазовим простором E.

Випадковий процес $\{X(t), t \geq 0\}$ називається процесом Маркова, якщо

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall t_1, \dots, t_{n+1} \geq 0: \ \ t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} \ \ \forall i_1, \dots, i_{n+1} \in E$$

$$P\big(X(t_{n+1} = i_{n+1} |\, X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n)\big) =$$

$$= P\big(X(t_{n+1} = i_{n+1} | X(t_n) = i_n)\big)$$

4.1 Ланцюги Маркова у страхуванні життя

Нехай x представляє вік клієнта у накопичувальному страхуванні життя, а T-випадкова величина, що представляє тривалість майбутнього життя застрахованого. Відповідно, ймовірність виживання застрахованого може бути виражена наступним чином:

$${}_kp_x = P(T > x + k | T > x) = P(T(x) > k) = 1 - P(T(x) \leq k) = 1 - {}_kq_x$$

Значення ${}_kp_x$ представляє ймовірність того, що людина у віці x доживе до віку $x + k$. Тим часом ${}_kq_x$ представляє ймовірність того, що людина у віці x помре до досягнення віку $x + k$.

Виплати за полісом страхування життя здійснюються, якщо застрахований помирає, отримує інвалідність або використовує так званий неявний або вбудований опціон (наприклад, варіант відмови від поліса, варіант безкоштовного поліса, варіант дострокового виходу на пенсію, варіант з одноразовою виплатою і т.д.). Це відбувається, якщо він змінює свій стан з «живого» на «мертвий», або з «живого» на «скасований» і т.д. Принципово важливо змоделювати процес, який описує стан застрахованого і його випадкову еволюцію з плином часу. Розглянемо випадок дискретного часу зі скінченним набором моментів часу $T = \{0,1,\dots,n\}$. Простір станів S - це скінченний набір станів, в яких застрахований може перебувати протягом терміну дії контракту.

Припустимо, що стохастичний процес з дискретним часом $(X_t)_{t\in T}$ зі значеннями в S, який описує стан окремого застрахованого впродовж часу, є ланцюгом Маркова. Подія $\{X_t = s\}$ означає, що контракт у момент часу t перебуває в стані s. У ланцюзі Маркова стан на наступному кроці залежить лише від попереднього, а не від попередніх станів (властивість відсутності пам'яті (післядії)). Основні характеристики ланцюга Маркова підсумовуються наступним чином.

Теорема 4.1. [21] Нехай $(X_t)_{t\in T}$ - є випадковим процесом зі значеннями в S таким, що $P(X_0 = s) = 0$ або 1 для всіх $s \in S$. Тоді $(X_t)_{t\in T}$ є ланцюгом Маркова тоді і тільки тоді, коли для всіх $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T$ і всіх $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$

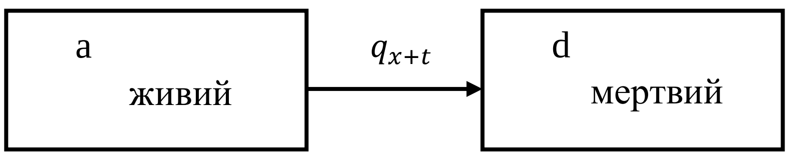
$$P\left(X_{t_j} = s_j, j = 1,\dots,n\right) = P\left(X_{t_1} = s_1\right) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} p_{s_j s_{j+1}}\left(t_j, t_{j+1}\right) \qquad (4.1)$$

Сумісні розподіли для ланцюга Маркова можна представити на основі матриці ймовірностей переходу за один крок $p(t) = \left(p_{ij}(t)\right)_{i,j\, \in S}$ $t \in T$, яка визначається так

$$p_{ij}(t) := p_{ij}(t, t+1) = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i).$$

Модель ланцюга Маркова широко застосовується в математиці страхування життя (див. наприклад [6], [7], [8], [9], [10], і [11]).

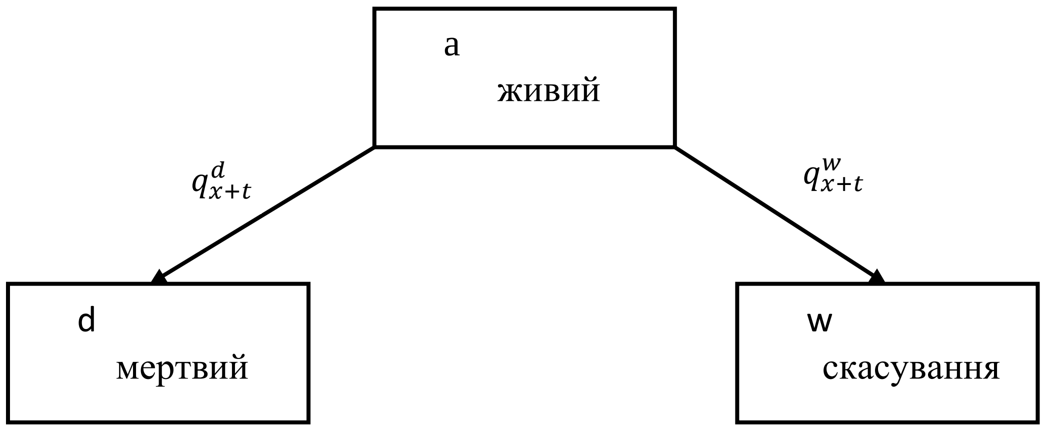
Приклад 4.1. У моделі з одним декрементом страхувальнику у віці x в момент часу $t = 0$ дозволяється змінювати стан відповідно до наступної діаграми простору станів



Можлива зміна стану відбувається з ймовірністю смерті протягом року q_{x+t}. Матриця ймовірностей переходу у цьому випадку має вигляд:

$$p(t)=\begin{pmatrix} p_{aa}(t) & p_{ad}(t) \\ p_{da}(t) & p_{dd}(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{x+t}=1-q_{x+t} & q_{x+t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

Приклад 4.2. У моделі з двома причинами декремента застрахований у віці x в момент часу $t\ =\ 0$ змінює стан відповідно до діаграми



Можливі зміни стану відбуваються з наступними ймовірностями

q_{x+t}^{d}: ймовірність смерті протягом року

q_{x+t}^{w}: ймовірність скасування страхового полісу протягом одного року

Ймовірності однокрокового переходу цього ланцюга Маркова задаються матрицею перехідних ймовірностей

$$p(t)=\begin{pmatrix} p_{aa}(t) & p_{aw}(t) & p_{ad}(t) \\ p_{wa}(t) & p_{ww}(t) & p_{wd}(t) \\ p_{da}(t) & p_{dw}(t) & p_{dd}(t) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} p_{x+t}^{(\tau)}=1-q_{x+t}^{d}-q_{x+t}^{w} & q_{x+t}^{w} & q_{x+t}^{d} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

Використовується верхній індекс (τ) для позначення того, що функція відноситься до всіх причин або загальної інтенсивності декременту.

4.2 Визначення прибутку у моделях страхування життя з однією та двома причинами декремента

Розглянемо договір страхування життя з виплатами страхових внесків на рівні, що залежить від смертності та причин припинення страхування на відрізку часу $[0, n]$. У певні моменти часу $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ договір надає застрахованому наступні переваги:

D_t: виплата у зв'язку зі смертю, що виплачується в кінці періоду, в разі смерті застрахованого в зазначений період $(t-1, t]$.

E_n: виплата у зв'язку з втратою годувальника, що виплачується в разі, якщо застраховний проживе весь період до моменту n.

SV_t: викупна сума або виплата при розірванні договору, в кінці періоду, в разі закінчення терміну дії поліса протягом періоду часу $(t-1, t]$.

Означення: Андеррайтинг – послуги, що надаються фінансовими установами, такими як банки, страхові компанії, які гарантують отримання виплат у разі фінансових збитків. Залежно від галузі (банківська справа, страхування) розрізняють кілька видів андеррайтингу. Компанії, що надають подібні послуги, називаються андеррайтерами (англ. underwriter «гарант; страховик»).

Щоб мати можливість описати випадковий прибуток від андеррайтингу в рамках класичної моделі страхування життя ([12], [13], [14], [15], [16], [17]), розглянемо наступні детерміновані базові актуарні величини:

- π_t^R: премія ризику за період часу $(t-1, t]$, що підлягає виплаті в момент $t-1$.
- π_t^S: премія заощаджень за період часу $(t-1, t]$, що підлягає виплаті в момент $t-1$.
- $\pi^N = \pi_t^R + \pi_t^S$: чиста премія (нетто-премія) за період часу $(t-1, t]$ в момент часу $t-1$.
- $\pi_t^{E,R}$: премія ризику для покриття витрат за період часу $(t-1, t]$, що підлягає виплаті в момент $t-1$.
- $\pi_t^{E,S}$: премія заощаджень для покриття витрат за період часу $(t-1, t]$, що підлягає сплаті в момент $t-1$.
- $\pi^E = \pi_t^{E,R} + \pi_t^{E,S}$: премія для покриття витрат за період часу $(t-1, t]$ в момент часу $t-1$.

- $\pi = \pi^N + \pi^E$: брутто-премія (премія, навантажена на витрати) за період часу $(t-1, t]$ в момент часу $t-1$.
- ${}_tV^N$: чистий актуарний резерв, необхідний в момент часу t, такий що ${}_nV^N = E_n$.
- ${}_tV^E$: резерв витрат, необхідний в момент часу t, такий що ${}_nV^E = 0$.
- ${}_tV = {}_tV^N + {}_tV^E$: актуарний брутто резерв, необхідний на момент t.
- C_t: нарахування експлуатаційних витрат за вказаний період часу $(t-1, t]$ у момент часу t.

Точний опис моделі та математичні визначення цих величин можна знайти в наведених посиланнях. Наприклад, чистий актуарний резерв – це актуарна теперішня (поточна) вартість майбутніх чистих грошових потоків (різниця між страховими виплатами та чистими преміями). Ідея включення резерву витрат у валовий актуарний резерв належить Цільмеру (1831-1893) (наприклад, [14], с.103). Традиційне ціноутворення за таким контрактом не враховує ризик скасування і заснований виключно на моделі з одним декрементом, єдиною причиною якого є смерть. У цьому випадку актуарне ціноутворення ґрунтується на одному декременті та таблицях. Нехай

q_x: ймовірність того, що людина у віці x помре протягом одного року,

$p_x = 1 - q_x$: ймовірність того, що людина у віці x доживе до віку $x + 1$,

і задана деяка фіксована технічна процентна ставка i. Технічний коефіцієнт дисконтування позначається як $v = (1+i)^{-1}$. Наведені вище актуарні величини задовольняють наступним співвідношенням:

$$\pi_t^R = v \cdot q_{x+t-1} \cdot (D_t - {}_tV^N), \qquad t = 1, \dots, n-1, \quad \pi_n^R = 0 \tag{4.4}$$

$${}_tV^N = ({}_{t-1}V^N + \pi_t^S) \cdot (1+i) \tag{4.5}$$

$$\pi_t^{E,R} = -v \cdot q_{x+t-1} \cdot {}_tV^E, \qquad t = 1, \dots, n-1, \quad \pi_n^{E,R} = 0 \tag{4.6}$$

$$C_t = \left({}_{t-1}V^E + \pi_t^{E,S}\right) \cdot (1+i) - {}_tV^E, \qquad t = 1, \dots, n \tag{4.7}$$

Приклад 4.3. Операційні витрати за класичним договором змішаного страхування такі, що $D_1 = D_2 = \dots = D_n = E_n = 1$, і з коефіцієнтом витрат придбання α, задаються формулою

$$C_t = (\pi^E - \alpha \cdot \pi^N) \cdot (1+i) - \alpha \cdot i, \qquad t = 1, \dots, n \tag{4.8}$$

Дійсно, вставляючи вираз ${}_tV^E = -\alpha \cdot (1 - {}_tV^N)$ (наприклад, [14], с. 102) для резерву витрат у формулу (4.7) для нарахування операційних витрат, отримаємо такі вирази (4.4) і (4.5) для премій:

$$C_t = \left(-\alpha + \alpha \cdot {}_{t-1}V^N + \pi^E - \pi_t^{E,R}\right)(1+i) + \alpha - \alpha \cdot {}_tV^N =$$

$$= -\alpha \cdot i + \alpha \cdot ({}_{t-1}V^N \cdot (1+i) - {}_tV^N) + \pi^E \cdot (1+i) - \alpha \cdot q_{x+t-1} \cdot (1 - {}_tV^N) =$$

$$= \pi^E \cdot (1+i) - \alpha \cdot i + \alpha \cdot \left({}_{t-1}V^N \cdot (1+i) - {}_tV^N - \pi_k^R \cdot (1+i)\right) =$$

$$= \pi^E \cdot (1+i) - \alpha \cdot i - \alpha \cdot \left(\pi_t^S \cdot (1+i) + \pi_t^R \cdot (1+i)\right) =$$

$$= (\pi^E - \alpha \cdot \pi^N) \cdot (1+i) - \alpha \cdot i$$

Випадковий прибуток від андеррайтингу $G(t)$ окремого контракту в дискретний момент часу $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ можна розкласти на три компоненти відповідно до основних джерел прибутку та збитків, а саме компонент інвестиційного ризику $G^{inv}(t)$, компонент страхового ризику $G^{ins}(t)$ і компонент ризику витрат $G^{exp}(t)$ такі, що

$$G(t) = G^{inv}(t) + G^{ins}(t) + G^{exp}(t) \tag{4.9}$$

Щоб представити формули для цих компонентів, нижче розглянемо кілька випадкових величин, що залежать від часу та стану, які є частиною балансу контракту в будь-який момент часу t. Випадкові компоненти премій та резерву дуже просто отримуються з відповідних детермінованих актуарних величин. При цьому слід враховувати, що компоненти премій приносять дохід, відповідно компоненти резерву є зобов'язаннями тільки в тому випадку, якщо застрахований спочатку знаходиться в статусі «живий», на початок або кінець періоду $(t-1, t]$. Аналогічним чином, витрати розподіляються тільки між застрахованими, що мають статус «живий», на початку періоду часу. З іншого боку, у разі смерті, виживання або скасування полісу виплачуються страхові виплати. Використовуючи індикаторну функцію $I(\circ)$, відповідні величини задаються за допомогою

- $P^R(t) = I(X_{t-1} = a) \cdot \pi_t^R$: випадкова премія ризику на $(t-1, t]$

- $P^S(t) = I(X_{t-1} = a) \cdot \pi_t^S$: випадкова премія заощаджень на $(t-1, t]$.
- $P^N(t) = P^R(t) + P^S(t)$: випадкове перевищення чистої премії на $(t - 1, t]$.
- $P^{E,R}(t) = I(X_{t-1} = a) \cdot \pi_t^{E,R}$: випадкова премія ризику для покриття витрат.
- $P^{E,S}(t) = I(X_{t-1} = a) \cdot \pi_t^{E,S}$: випадкова премія заощаджень для покриття витрат.
- $P^E(t) = P^{E,R}(t) + P^{E,S}(t)$: випадкова премія для покриття витрат.
- $P(t) = P^N(t) + P^E(t)$: випадкова брутто-премія.
- $R^N(t) = [I(X_t = a) - I(X_n = a)] \cdot {}_tV^N$: випадковий актуарний чистий резерв в момент часу t.
- $R^E(t) = I(X_t = a) \cdot {}_tV^E$: випадковий резерв витрат в момент часу t.
- $R(t) = R^N(t) + R^E(t)$: випадковий актуарний брутто резерв у момент часу t.
- $S(t) = I(X_{t-1} = a) \cdot [I(X_t = d) \cdot D_t + I(X_t = w) \cdot SV_t + I(X_n = a) \cdot {}_nV^N]$: випадкові виплати у випадку смерті, скасування полісу або виживання в момент часу t.
- $C(t) = I(X_{t-1} = a) \cdot C_t^e$: випадкові витрати або ефективні випадкові витрати протягом $(t-1, T]$ в момент часу t, де C_t^e представляють ефективні операційні витрати, що виділяються застрахованому в період $(t-1, t]$ за умови, що він живий в момент часу t.
- i: технічна процентна ставка.
- I_t: випадкова норма прибутковості за період часу $(t-1, t]$, що спостерігається в момент часу t.
- $A(t)$: інвестовані випадкові активи контракту в момент часу t.

Покажемо наступний основний результат, який представляє незалежний інтерес.

Теорема 4.2. [21] *(Декомпозиція прибутку від андеррайтингу)* Випадковий прибуток від андеррайтингу за договором страхування життя, що залежить від смертності та причин припинення дії договору, може бути розкладений на три компоненти ризику наступним чином:

$$G^{inv}(t) = [A(t-1) + P(t)] \cdot I_t - [R(t-1) + P(t)] \cdot i \tag{4.10}$$

$$G^{ins}(t) = I(X_{t-1} = a) \cdot \begin{Bmatrix} \pi_t^R \cdot (1+i) - I(X_t = d) \cdot \left(D_t - {}_tV^N\right) \\ -I(X_t = w) \cdot \left(SV_t - {}_tV^N\right) \end{Bmatrix} \tag{4.11}$$

$$G^{exp}(t) = I(X_{t-1} = a) \cdot \begin{Bmatrix} \pi_t^{E,R} \cdot (1+i) + C_t - C_t^e \\ +[I(X_t = d)] + I(X_t = w) \cdot {}_tV^E \end{Bmatrix} \tag{4.12}$$

4.3 Тарифікація у моделі з двома причинами декремента

Для розрахунку актуарного ціноутворення з урахуванням витрат, враховуємо компонент брутто страхового ризику, який визначається як $G^{ins,g}(t) = G^{ins}(t) + G^{exp}(t)$. Згідно з теоремою 4.2, це може бути переписано як

$$G^{ins,g}(t) = I(X_{t-1} = a) \cdot \begin{bmatrix} \pi_t^R \cdot (1+i) - I(X_t = d) \cdot (D_t - {}_tV^N) \\ +\pi_t^{E,R} \cdot (1+i) + I(X_t = d) \cdot {}_tV^E \\ -I(X_t = w) \cdot (SV_t - {}_tV^N - {}_tV^E) + C_t - C_t^e \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

В якості першого важливого зауваження зазначимо, що компонент страхового брутто-ризику не залежить від причини декременту, тоді і тільки тоді, коли викупна сума встановлена рівною актуарному брутто-резерву, тобто

$$SV_t = {}_tV = {}_tV^N + {}_tV^E, \qquad t \in \{1, \dots, n\} \tag{4.14}$$

За вирахуванням компоненти ризику витрат, цей результат забезпечує обгрунтування традиційної актуарної практики в дискретному часовому режимі, яка полягає в тому, щоб відкладати чистий актуарний резерв, в якості допомоги при знятті коштів, нехтуючи впливом зняття коштів на актуарні премії, в умовах обмеженого часу. Цей ефект можна легко описати, використовуючи очікуване значення компонента страхового брутто-ризику

$$E\left[G^{ins,g}(t)\right] = {}_{t-1}p_x^{(\tau)} \cdot$$

$$\begin{Bmatrix} \pi_t^R \cdot (1+i) - q_{x+t-1}^d \cdot (D_t - {}_tV^N) \\ +\pi_t^{E,R} \cdot (1+i) + q_{x+t-1}^d \cdot {}_tV^E - q_{x+t-1}^w \cdot (SV_t - {}_tV) + C_t - C_t^e \end{Bmatrix} \tag{4.15}$$

Припустимо, що актуарно справедливим є тариф премії для полісу страхування життя на випадок смерті за умови, що очікувана вартість (4.15) дорівнює нулю в кожен дискретний момент часу $t \in \{1, \dots, n\}$. У нашій динамічній моделі справедливі актуарні умови ціноутворення можуть бути досягнуті двома різними способами. Можна використовувати традиційні страхові внески, використовуючи таблицю смертності з одним декрементом, і відкоригувати викупну суму для причини декременту. Крім того, можна скорегувати актуарні премії та резерви з урахуванням причини декременту, використовуючи залежні ймовірності смерті $q^d_{x+t-1}, t \in \{1, \dots, n\}$ і встановити викупну суму рівну скоригованому резерву Цільмера, аналогічно (4.14). В обох випадках отримані результати значною мірою залежать від різниці ймовірностей смерті для моделей з одним і двома декрементами, тобто від величин

$$\Delta q_{x+t} = q_{x+t} - q^d_{x+t} = \int_0^1 \left({}_s p_{x+t} - {}_s p^{(\tau)}_{x+t} \right) \mu^d_{x+t+s} ds > 0 \qquad (4.16)$$

Щоб відрізнити актуарне ціноутворення в моделі з подвійним декрементом від ціни в моделі з одним декрементом, ми додаємо верхній індекс w, коли зняття коштів (скасування поліса) вказується яка причина декременту.

Теорема 4.3. [21] (*Справедливе актуарне ціноутворення, включаючи декремент на зняття*) Продукт страхування життя від смертності в моделі з подвійним декрементом, в якій причиною декременту є смерть і зняття коштів (скасування), є актуарно справедливим, тобто $E\left[G^{ins,g}(t)\right] = 0$ для всіх $t \in \{1, \dots, n\}$, за умови виконання одного з наступних випадків:

Випадок 1: таблиця смертності з одним декрементом

$$SV_t = {}_tV + \frac{\Delta q_{x+t-1}}{q^w_{x+t-1}} \cdot (D_t - {}_tV), \qquad C^e_t = C_t, \qquad t \in \{1, \dots, n\} \qquad (4.17)$$

Випадок 2: таблиця смертності з двома декрементами

$$SV^w_t = {}_tV^w = {}_tV^{w,N} + {}_tV^{w,E}, \qquad C^{w,e}_t = C^w_t, \qquad t \in \{1, \dots, n\}, \qquad (4.18)$$

де всі актуарні величини розраховуються за допомогою таблиці подвійного декременту життя.

Зауваження 4.1. У страховій галузі часто використовуються різні схеми повернення викупної суми. Наприклад, Швейцарська страхова компанія Patria пропонує розрахунок викупної суми з третього року за формулою $SV_t^w = max\left(\frac{2}{3}\cdot {}_tV^{w,N}, {}_tV^w\right)$ (наприклад, [20], с. 16), і в більшості випадків це фактично становить $SV_t^w = {}_tV^w$.

Теорема 4.4. Нехай у моделі страхування на доживання виплата у випадку смерті по причині $i, i = 1{,}2$ становить $D_t^{(i)}$ у випадку смерті застрахованого протягом інтервалу часу $(t-1; t]$, E_n – виплата у випадку доживання індивіда до моменту n. Тоді випадковий прибуток від андерайтингу розкладається на такі компоненти:

$$G^{inv}(t) = [A(t-1) + P(t)]I_t - [R(t-1) + P(t)]i \tag{4.19}$$

$$G^{ins}(t) = I(X_{t-1} = a)\cdot\begin{bmatrix}\pi_t^R\cdot(1+i) - I(X_t = d_1)\cdot\left(D_t^{(1)} - {}_tV^N\right) - \\ -I(X_t = d_2)\left(D_t^{(2)} - {}_tV^N\right)\end{bmatrix} \tag{4.20}$$

$$G^{exp}(t) = I(X_{t-1} = a)\cdot\begin{bmatrix}\pi_t^{E,R}\cdot(1+i) + C_t - C_t^e + \\ +[I(X_t = d_1) + I(X_t = d_2)]_tV^E\end{bmatrix} \tag{4.21}$$

$$E\left[G^{ins,g}(t)\right] = {}_{t-1}p^{(\tau)}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix}\pi_t^R\cdot(1+i) - q_{x+t-1}^{d_1}\cdot\left(D_t^{(1)} - {}_tV^N\right) \\ +\pi_t^{E,R}\cdot(1+i) + q_{x+t-1}^{d_1}\cdot {}_tV^E - q_{x+t-1}^{d_2}\cdot\left(D_t^{(2)} - {}_tV\right) + C_t - C_t^e\end{bmatrix} \tag{4.22}$$

5 Побудова моделі. Алгоритми для визначення страхових тарифів, премій, резервів, та їх реалізація

Модель 1

Застосовуючи теорему 4.3, а саме умову, що для обох тарифів має бути $E\left[G^{ins,g}(t)\right] = 0$ для всіх $t \in \{1, \dots, n\}$, розробимо алгоритм виконання актуарних підрахунків на прикладі 10-річного договору змішаного страхування (тобто, страхування на доживання) для індивіда, застрахованого у віці x=50 років, зі страховими виплатами $D_1 = D_2 = \cdots = D_{10} = 100$, що виплачуються в кінці року смерті застрахованого, якщо смерть настала протягом строку страхування (10 років), або у випадку досягнення цим індивідом віку 60 років: $E_{10} = 100$. Технічна відсоткова ставка $i = 5\%$, ставка витрат на придбання (сплачується тільки 1 раз в момент часу $t=0$) - $\alpha = 6\%$, а ставка витрат зборів, яка сплачується у відсотках від брутто-премії кожного разу, коли сплачуються (вносяться) премії, становить $\beta = 5\%$. Таблиці ймовірностей настання страхового випадку для однієї та двох причин декременту візьмемо з книги [22] (***«Multiple Decrement Models in Insurance» ст.25***).

Побудуємо алгоритм для визначення страхових тарифів у моделі змішаного страхування, яка включає витрати, з одним та двома декрементами, розрахунку нетто- та брутто-премій, страхових резервів, та реалізуємо його у програмному забезпеченні Excel.

У програмне забезпечення Excel вводимо початкові дані моделі (Рис. 1) та ймовірностей декрементів з книги [22] (Рис. 2).

вік людини	x	50
договір на термін	t	10
страхові виплати	$D_1 = \cdots = D_{10} = E_{10}$	100
витрати придбання	α	0.06
витрати зборів	β	0.05
відсоткова ставка	i	0.05
коефіцієнт дисконтування	v	0.9524

Рис. 1

Технічний коефіцієнт дисконтування визначається як $v = (1+i)^{-1}$.

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$
50	0.00490	0.01
51	0.00537	0.02
52	0.00590	0.03
53	0.00647	0.04
54	0.00708	0.05
55	0.00773	0.06
56	0.00844	0.06
57	0.00926	0.07
58	0.01019	0.08
59	0.01120	0.09

(Рис. 2)

У моделі з одним декрементом застрахований у віці $x + t$ протягом року може змінити стан з живого на мертвий з ймовірністю q_{x+t}.

Крок 1: Відповідно в нашому випадку, знаючи ймовірність смерті у випадку одного декремента, знайдемо ймовірності виживання за наступними формулами (Рис. 3):

$$\boldsymbol{t = 1}:\ {}_0p_x = 1$$

$$\boldsymbol{t = 2}:\ {}_1p_x = 1 - q_x$$

$$\boldsymbol{t = 3}:\ {}_2p_x = (1 - q_x)(1 - q_{x+1})$$

$$\boldsymbol{t = 4}:\ {}_3p_x = (1 - q_x)(1 - q_{x+1})(1 - q_{x+2})$$

...

$$\boldsymbol{t = 10}:\ {}_9p_x = (1 - q_x)(1 - q_{x+1}) \dots (1 - q_{x+8})$$

Таблиця (5.1) таблиця життя з одним декрементом

Роки, t	Ймовірність смерті q_{x+t-1}	Ймовірність виживання ${}_{t-1}p_x$
1	0,00490	1,00000
2	0,00537	0,99510
3	0,00590	0,98976
4	0,00647	0,98392
5	0,00708	0,97755
6	0,00773	0,97063
7	0,00844	0,96313
8	0,00926	0,95500
9	0,01019	0,94615
10	0,01120	0,93651
11		0,92602

(Рис. 3)

<u>Крок 2:</u> Для моделі з двома декрементами створимо Таблицю (5.2) (Рис. 4) з ймовірностями смерті та скасування договору, скориставшись формулами для обчислення відповідних величин з [13].

Використаємо верхній індекс (τ) для позначення того, що функція відноситься до всіх причин або загальної інтенсивності декременту.

$$q_{x+t-1}^{(\tau)} = 1 - \left(1 - q_{x+t-1}^{\prime(d)}\right)\left(1 - q_{x+t-1}^{\prime(w)}\right)$$

$$q_{x+t-1}^{d} = q_{x+t-1}^{\prime(d)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot q_{x+t-1}^{\prime(w)}\right)$$

$$q_{x+t-1}^{w} = q_{x+t-1}^{(\tau)} - q_{x+t-1}^{d}$$

$$\Delta q_{x+t-1} = q_{x+t-1} - q_{x+t-1}^{d}$$

Таблиця (5.2) Таблиця ймовірностей декрементів

Роки, t	$q_{x+t-1}^{\prime(d)}$	$q_{x+t-1}^{\prime(w)}$	$q_{x+t-1}^{(\tau)}$	q_{x+t-1}^{d}	q_{x+t-1}^{w}	${}_{t-1}p_x^{d}$	${}_{t-1}p_x^{(\tau)}$	Δq_{x+t-1}
1	0,0049000	0,01	0,014851	0,0048755	0,00998	1,00000	1,00000	0,0000245
2	0,0053700	0,02	0,025263	0,0053163	0,01995	0,99512	0,98515	0,0000537
3	0,0059000	0,03	0,035723	0,0058115	0,02991	0,98983	0,96026	0,0000885
4	0,0064700	0,04	0,046211	0,0063406	0,03987	0,98408	0,92596	0,0001294
5	0,0070800	0,05	0,056726	0,0069030	0,04982	0,97784	0,88317	0,0001770
6	0,0077300	0,06	0,067266	0,0074981	0,05977	0,97109	0,83307	0,0002319
7	0,0084400	0,06	0,067934	0,0081868	0,05975	0,96381	0,77703	0,0002532
8	0,0092600	0,07	0,078612	0,0089359	0,06968	0,95592	0,72425	0,0003241
9	0,0101900	0,08	0,089375	0,0097824	0,07959	0,94738	0,66731	0,0004076
10	0,0112000	0,09	0,100192	0,0106960	0,08950	0,93811	0,60767	0,0005040
11						0,92808		

(Рис. 4)

Для підрахунку ймовірностей виживання, що відповідають декрементам d та (τ), застосуємо формули:

$$\boldsymbol{t = 1}:\ {}_{t-1}p_x^{d} = 1$$

$$\boldsymbol{t = 2}:\ {}_{1}p_x^{d} = 1 - q_x^{d}$$

$$\boldsymbol{t = 3}:\ {}_{2}p_x^{d} = (1 - q_x^{d})(1 - q_{x+1}^{d})$$

....

$$\boldsymbol{t = 1}:\ {}_{t-1}p_x^{(\tau)} = 1$$

$$\boldsymbol{t = 2}:\ {}_{1}p_x^{(\tau)} = 1 - q_x^{(\tau)}$$

$$\boldsymbol{t = 3}:\ {}_{2}p_x^{(\tau)} = (1 - q_x^{(\tau)})(1 - q_{x+1}^{(\tau)})$$

...

Для подальших підрахунків викупної суми для одного декремента обчислимо Δq_{x+t} за формулою (4.16):

$$\Delta q_{x+t} = q_{x+t} - q_{x+t}^{d} = \int_{0}^{1} \left({}_{s}p_{x+t} - {}_{s}p_{x+t}^{(\tau)} \right) \mu_{x+t+s}^{d} ds > 0 \qquad (4.16)$$

Отримавши всі результати таблиць ймовірностей для одного та двох декрементів, визначимо страхові тарифи для відповідних випадків цієї моделі, після чого зможемо їх порівняти та проаналізувати.

Щоб відрізнити актуарне ціноутворення в моделі з двома декрементами від ціни в моделі з одним декрементом, ми додаємо верхній індекс w, коли зняття коштів (скасування поліса) вказується, яка причина декременту.

<u>Крок 3:</u> Для початку підрахуємо чисту премію π^{N} для одного декременту та відповідно $\pi^{w,N}$ для двох декрементів.

Чиста премія π^{N}, $\pi^{w,N}$ – це щорічна нетто-премія страхування на доживання (змішаного страхування), яка визначається за формулою:

$$P_{x:\overline{n|}} = \frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \qquad (5.1)$$

де разова нетто-премія страхування на доживання обчислюється, як сума нетто-премії тимчасового страхування та нетто-премії чистого дожиття

$$A_{x:\overline{n|}} = \mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(Z_1) + \mathrm{E}(Z_2) = A^{1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1},$$

разова нетто-премія тимчасового страхування обчислюється як:

$$A^{1}_{x:\overline{n|}} = \mathrm{E}F = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{k+1}\, {}_{k}p_x\, q_{x+k} + 0 \cdot {}_{n}p_x = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{k+1}\, {}_{k|}q_x.$$

разова нетто-премія чистого дожиття:

$$A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1} = v^{k} \cdot {}_{n}p_x.$$

тимчасовий прямий ануїтет:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k} \cdot {}_{k}p_x.$$

Виконано всі підрахунки в Excel (Рис. 5).

для одного декременту	$A^1_{50:\overline{10}\|}$	0,055233563
чиста премія π^N	$A_{50:\frac{1}{\overline{10}\|}}$	0,568498679
	$A_{50:\overline{10}\|}$	0,623732242
	$\ddot{a}_{50:\overline{10}\|}$	7,901622909
	$P_{50:\overline{10}\|}$	0,078937232
	$100 * P_{50:\overline{10}\|}$	7,894

Щорічна нетто-премія на доживання (змішаного страхування)

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\frac{1}{\overline{n}|}}$$

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}$$

$$A_{x:\frac{1}{\overline{n}|}} = v^k \cdot {}_np_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_kp_x$$

k	$\ddot{a}_{50+k:\overline{10-k}\|}$	$A_{50+k:\overline{10-k}\|} \cdot 100$	${}_kV_{50:\overline{10}\|} \cdot 100$	${}_kV_{x:\overline{n}\|} = A_{x+k:\overline{n-k}\|} - P_{x:\overline{n}\|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\|}$
0	7,901622909	62,37322424	0	

для двох декрементів	$A^1_{50:\overline{10}\|}$	0,053789937
чиста премія $\pi^{w,N}$	$A_{50:\frac{1}{\overline{10}\|}}$	0,569758432
	$A_{50:\overline{10}\|}$	0,623548369
	$\ddot{a}_{50:\overline{10}\|}$	7,905484251
	$P_{50:\overline{10}\|}$	0,078875417
	$100 * P_{50:\overline{10}\|}$	7,888

Щорічна нетто-премія на доживання (змішаного страхування)

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\frac{1}{\overline{n}|}}$$

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}$$

$$A_{x:\frac{1}{\overline{n}|}} = v^k \cdot {}_np_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_kp_x$$

k	$\ddot{a}_{50+k:\overline{10-k}\|}$	$A_{50+k:\overline{10-k}\|} \cdot 100$	${}_kV_{50:\overline{10}\|} \cdot 100$	${}_kV_{x:\overline{n}\|} = A_{x+k:\overline{n-k}\|} - P_{x:\overline{n}\|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\|}$
0	7,905484251	62,35483690	0	

(Рис. 5)

Крок 4: Підрахувавши чисту премію для тарифу з 1 та 2 декрементами, можемо знайти брутто-премію для обох випадків.

Брутто-премія π – це премія з навантаженням на витрати. Нехай $P = \pi$ – брутто-премія для страхування на доживання (змішаного страхування) зі страховою сумою 100 на термін n=t=10 років. (Навантажена на витрати щорічна премія повинна задовольняти умові). З принципу еквівалентності фінансових зобов'язань страховика і страхувальника маємо:

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha \cdot 100 + \beta \cdot P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \qquad (5.2)$$

$$P = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \frac{\alpha \cdot 100}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \beta \cdot P$$

$$P(1-\beta) = P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha \cdot 100}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$P = \frac{1}{1-\beta}\left(P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha \cdot 100}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right) \qquad (5.3)$$

Отже, підрахувавши брутто-премію для двох випадків в Excel та з формули брутто-премії (премія, навантажена на витрати):

$$\pi = \pi^N + \pi^E$$
$$\pi^w = \pi^{w,N} + \pi^{w,E} \qquad (5.4)$$

Крок 5: знайдемо премію для покриття витрат

$$\pi^E = \pi - \pi^N$$
$$\pi^{w,E} = \pi^w - \pi^{w,N} \qquad (5.5)$$

Результати обчислень чистої премії, брутто-премії та премії для покриття витрат виведено в наступній таблиці (5.3) «Порівняння премій» (Рис. 6)

для одного декременту	$P = \pi$	9,108
для подвійного декременту	$P = \pi^w$	9,102

Таблиця (5.3) Порівняння премій

Один декремент			Два декременти		
чиста премія π^N	премія для покриття витрат π^E	брутто премія π	чиста премія $\pi^{w,N}$	премія для покриття витрат $\pi^{w,E}$	брутто премія π^w
7,894	1,215	9,108	7,888	1,214	9,102

(Рис.6)

На наступному кроці обчислюємо компоненти премій, резерви та викупні суми (таблиці 5.4, 5.5).

Крок 6: Для початку знайдемо чисті актуарні резерви ${}_tV^N$ та ${}_tV^{w,N}$ на момент часу t, тобто, резерви відповідних нетто-премій. Чистий актуарний резерв – це актуарна сучасна (поточна) вартість майбутніх чистих грошових потоків (різниця між страховими виплатами та чистими преміями). Для виведення формули чистого актуарного резерву, в обох випадках, скористаємося відомим рекурентним співвідношенням:

$${}_kV + \Pi_k = v \cdot (c_{k+1}q_{x+k} + {}_{k+1}Vp_{x+k}) \qquad (5.6)$$

де, $c_{k+1} = D_1 = \cdots = D_{10} = E_{10} = 100$ відомо з умови нашої моделі,

$$\Pi_k = P_{50:\overline{10}|}$$

Тоді

$${}_{k+1}V = \Big(\big((\Pi_k + {}_kV) \div v\big) - (c_{k+1}q_{x+k})\Big) \div p_{x+k}$$

$${}_{k+1}V = \Big(\big((\Pi_k + {}_kV) \div v\big) - (c_{k+1}q_{x+k})\Big) \div (1 - q_{x+k}) \qquad (5.7)$$

Скориставшись формулою (5.7), обчислимо значення чистого актуарного резерву для 2-х випадків в таблиці (Рис. 7).

Роки	чистий резерв $_tV^N$
1	7,837
2	16,066
3	24,714
4	33,810
5	43,388
6	53,486
7	64,146
8	75,414
9	87,344
10	100

Роки	чистий резерв $_tV^{w,N}$
1	7,833
2	16,06
3	24,71
4	33,80
5	43,39
6	53,49
7	64,15
8	75,42
9	87,35
10	100

(Рис. 7)

<u>Крок 7:</u> Рекурентне співвідношення (5.6) показує, що чиста премія розкладається на дві компоненти:

$$\pi^N = \pi_t^R + \pi_t^S$$
$$\pi^{w,N} = \pi_t^{w,R} + \pi_t^{w,S} \tag{5.8}$$

де $\pi_t^S, \pi_t^{w,S}$ – премія заощаджень (збережень), що використовується для збільшення резерву нетто-премій:

$$\pi_t^S = {}_{t+1}V^N \cdot v - {}_tV^N$$
$$\pi_t^{w,S} = {}_{t+1}V^{w,N} \cdot v - {}_tV^{w,N} \tag{5.9}$$

$\pi_t^R, \pi_t^{w,R}$ – премія тимчасового страхування на один рік для покриття нетто-суми на ризик, або премія ризику:

$$\pi_t^R = v \cdot q_{x+t-1} \cdot (D_t - {}_tV^N)$$
$$\pi_t^{w,R} = v \cdot q_{x+t+1}^w \cdot (D_t - {}_tV^{w,N}) \tag{5.10}$$

Використовуючи формули (5.9) та (5.10) виведемо відповідні результати премії заощаджень, премії ризику для нашої моделі в таблицях (Рис. 8).

Роки	Тариф з одним декрементом		
	чистий резерв $_tV^N$	премія заощаджень π_t^S	премія ризику π_t^R
1	7,837	7,464	0,430
2	16,066	7,464	0,429
3	24,714	7,471	0,423
4	33,810	7,486	0,408
5	43,388	7,512	0,382
6	53,486	7,551	0,342
7	64,146	7,606	0,288
8	75,414	7,677	0,217
9	87,344	7,771	0,123
10	100	7,894	0

Роки	Тариф з подвійним декрементом		
	чистий резерв $_tV^{w,N}$	премія заощаджень $\pi_t^{w,S}$	премія ризику $\pi_t^{w,R}$
1	7,833	7,460	0,428
2	16,06	7,463	0,425
3	24,71	7,471	0,417
4	33,80	7,488	0,400
5	43,39	7,515	0,372
6	53,49	7,555	0,332
7	64,15	7,608	0,280
8	75,42	7,678	0,209
9	87,35	7,770	0,118
10	100	7,888	0,000

(Рис. 8)

Крок 8: Оскільки нам відомі для кожного року, після 50, результати чистого резерву, скориставшись формулою для визначення резерву витрат з [14],

$$
\begin{aligned}
{}_tV^E &= -\alpha \cdot (D_t - {}_tV^N) \\
{}_tV^{w,E} &= -\alpha \cdot (D_t - {}_tV^{w,N})
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

знайдемо його для випадку з одним декрементом та випадку з двома декрементами (Рис. 9).

Роки	Тариф з одним декрементом			
	чистий резерв $_tV^N$	премія заощаджень π_t^S	премія ризику π_t^R	резерв витрат $_tV^E$
1	7,837	7,464	0,430	-5,530
2	16,066	7,464	0,429	-5,036
3	24,714	7,471	0,423	-4,517
4	33,810	7,486	0,408	-3,971
5	43,388	7,512	0,382	-3,397
6	53,486	7,551	0,342	-2,791
7	64,146	7,606	0,288	-2,151
8	75,414	7,677	0,217	-1,475
9	87,344	7,771	0,123	-0,759
10	100	7,894	0	0

Роки	Тариф з подвійним декрементом			
	чистий резерв $_tV^{w,N}$	премія заощаджень $\pi_t^{w,S}$	премія ризику $\pi_t^{w,R}$	резерв витрат $_tV^{w,E}$
1	7,833	7,460	0,428	-5,530
2	16,06	7,463	0,425	-5,036
3	24,71	7,471	0,417	-4,518
4	33,80	7,488	0,400	-3,972
5	43,39	7,515	0,372	-3,397
6	53,49	7,555	0,332	-2,791
7	64,15	7,608	0,280	-2,151
8	75,42	7,678	0,209	-1,475
9	87,35	7,770	0,118	-0,759
10	100	7,888	0,000	0

(Рис. 9)

Після результатів знайденого резерву витрат для кожного випадку знайдемо премію ризику для покриття витрат та резерв Цільмера (Рис. 10).

<u>Крок 9:</u> Для знаходження премій ризику для покриття витрат скористаємося формулами:

$$\pi_t^{E,R} = -v \cdot q_{x+t-1} \cdot {}_tV^E \tag{4.6}$$

$$\pi_t^{w,E,R} = -v \cdot q_{x+t-1}^d \cdot {}_tV^{w,E} \tag{5.12}$$

<u>Крок 10:</u> Для обчислення резерву Цільмера (актуарний брутто резерв, необхідний на момент t), який дорівнює сумі чистого резерву та резерву витрат) скористаємося формулами:

$$\begin{gathered} {}_tV = {}_tV^N + {}_tV^E \\ {}_tV^w = {}_tV^{w,N} + {}_tV^{w,E} \end{gathered} \tag{5.13}$$

Роки	Тариф з одним декрементом					
	чистий резерв $_tV^N$	премія заощаджень π_t^S	премія ризику π_t^R	резерв витрат $_tV^E$	премія ризику для покриття витрат $\pi_t^{E,R}$	резерв Цільмера $_tV$
1	7,837	7,464	0,430	-5,530	0,026	2,31
2	16,066	7,464	0,429	-5,036	0,026	11,03
3	24,714	7,471	0,423	-4,517	0,025	20,20
4	33,810	7,486	0,408	-3,971	0,024	29,84
5	43,388	7,512	0,382	-3,397	0,023	39,99
6	53,486	7,551	0,342	-2,791	0,021	50,70
7	64,146	7,606	0,288	-2,151	0,017	61,99
8	75,414	7,677	0,217	-1,475	0,013	73,94
9	87,344	7,771	0,123	-0,759	0,007	86,59
10	100	7,894	0	0	0	100

Роки	Тариф з подвійним декрементом					
	чистий резерв ${}_tV^{w,N}$	премія заощаджень $\pi_t^{w,S}$	премія ризику $\pi_t^{w,R}$	резерв витрат ${}_tV^{w,E}$	премія ризику для покриття витрат $\pi_t^{w,E,R}$	резерв Цільмера ${}_tV^{w}$
1	7,833	7,460	0,428	-5,530	0,026	2,30
2	16,06	7,463	0,425	-5,036	0,026	11,02
3	24,71	7,471	0,417	-4,518	0,025	20,19
4	33,80	7,488	0,400	-3,972	0,024	29,83
5	43,39	7,515	0,372	-3,397	0,022	39,99
6	53,49	7,555	0,332	-2,791	0,020	50,70
7	64,15	7,608	0,280	-2,151	0,017	62,00
8	75,42	7,678	0,209	-1,475	0,013	73,95
9	87,35	7,770	0,118	-0,759	0,007	86,59
10	100	7,888	0,000	0	0	100

(Рис. 10)

<u>Крок 11:</u> Знаючи премію для покриття витрат π^E та $\pi^{w,E}$, можемо порахувати «премії заощаджень для покриття витрат» за формулами:

$$\pi_t^{E,S} = \pi^E - \pi_t^{E,R} \tag{5.14}$$

$$\pi_t^{w,E,S} = \pi^{w,E} - \pi_t^{w,E,R} \tag{5.15}$$

<u>Крок 12:</u> Операційні витрати за класичним договором змішаного страхування такі, що $D_1 = D_2 = \cdots = D_n = E_n = 1000$, і з коефіцієнтом витрат придбання $\alpha = 0.06$, задаються формулами:

$$C_t = (\pi^E - \alpha \cdot \pi^N) \cdot (1+i) - \alpha \cdot i \tag{4.8}$$

$$C_t^w = (\pi^{w,E} - \alpha \cdot \pi^{w,N})(1+i) - \alpha \cdot i \tag{5.16}$$

<u>Крок 13:</u> Для тарифікації у моделі <u>з однією причиною декремента</u> для знаходження викупної суми скористаємося формулою (4.17) з теореми 4.3, випадку 1:

$$SV_t = {}_tV + \frac{\Delta q_{x+t-1}}{q_{x+t-1}^w} \cdot (D_t - {}_tV), \qquad C_t^e = C_t, \qquad t \in \{1, \dots, n\} \tag{4.17}$$

Δq_{x+t-1} було підраховано на початку в таблиці (4.2).

Для тарифікації у моделі <u>з двома причинами декремента</u> для знаходження викупної суми скористаємося формулою (4.14) заданою в розділі 4.3:

$$SV_t = {}_tV = {}_tV^N + {}_tV^E, \qquad t \in \{1, \dots, n\} \tag{4.14}$$

Всі підрахунки зображені на (Рис. 11).

Роки	Тариф з одним декрементом								
	чистий резерв ${}_tV^N$	премія заощаджень π_t^S	премія ризику π_t^R	резерв витрат ${}_tV^E$	премія ризику для покриття витрат $\pi_t^{E,R}$	резерв Цільмера ${}_tV$	премія заощаджень для покриття витрат $\pi_t^{E,S}$	нарахування експлуатацій них витрат C_t	викупна сума SV_t
1	7,837	7,464	0,430	-5,530	0,026	2,31	1,189	0,775	2,547
2	16,066	7,464	0,429	-5,036	0,026	11,03	1,189	0,775	11,270
3	24,714	7,471	0,423	-4,517	0,025	20,20	1,189	0,775	20,433
4	33,810	7,486	0,408	-3,971	0,024	29,84	1,190	0,775	30,066
5	43,388	7,512	0,382	-3,397	0,023	39,99	1,192	0,775	40,204
6	53,486	7,551	0,342	-2,791	0,021	50,70	1,194	0,775	50,887
7	64,146	7,606	0,288	-2,151	0,017	61,99	1,197	0,775	62,156
8	75,414	7,677	0,217	-1,475	0,013	73,94	1,202	0,775	74,060
9	87,344	7,771	0,123	-0,759	0,007	86,59	1,207	0,775	86,654
10	100	7,894	0	0	0	100	1,215	0,775	100

Роки	Тариф з подвійним декрементом								
	чистий резерв ${}_tV^{w,N}$	премія заощаджень $\pi_t^{w,S}$	премія ризику $\pi_t^{w,R}$	резерв витрат ${}_tV^{w,E}$	премія ризику для покриття витрат $\pi_t^{w,E,R}$	резерв Цільмера ${}_tV^w$	премія заощаджень для покриття витрат $\pi_t^{w,E,S}$	нарахування експлуатацій них витрат C_t^w	викупна сума SV_t^w
1	7,833	7,460	0,428	-5,530	0,026	2,30	1,188	0,775	2,303
2	16,06	7,463	0,425	-5,036	0,026	11,02	1,189	0,775	11,023
3	24,71	7,471	0,417	-4,518	0,025	20,19	1,189	0,775	20,190
4	33,80	7,488	0,400	-3,972	0,024	29,83	1,190	0,775	29,833
5	43,39	7,515	0,372	-3,397	0,022	39,99	1,192	0,775	39,989
6	53,49	7,555	0,332	-2,791	0,020	50,70	1,194	0,775	50,698
7	64,15	7,608	0,280	-2,151	0,017	62,00	1,197	0,775	62,001
8	75,42	7,678	0,209	-1,475	0,013	73,95	1,201	0,775	73,947
9	87,35	7,770	0,118	-0,759	0,007	86,59	1,207	0,775	86,592
10	100	7,888	0,000	0	0	100	1,214	0,775	100

(Рис. 11)

<u>Крок 14:</u> Застосовуючи для нашої моделі теорему 4.3 (*Справедливе актуарне ціноутворення, включаючи декремент на зняття*) доведемо, що по результатам всіх підрахунків теорема виконується, тобто $E\left[G^{ins,g}(t)\right] = 0$ для всіх $t \in \{1, \dots, n\}$ (Рис. 12).

Для цього використаємо формулу (4.15)

$$E\left[G^{ins,g}(t)\right] = {}_{t-1}p_x^{(\tau)} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \begin{matrix} \pi_t^R \cdot (1+i) - q_{x+t-1}^d \cdot (D_t - {}_tV^N) \\ +\pi_t^{E,R} \cdot (1+i) + q_{x+t-1}^d \cdot {}_tV^E - q_{x+t-1}^w \cdot (SV_t - {}_tV) + C_t - C_t^e \end{matrix} \right\} \quad (4.15)$$

Роки	Таблиця (5.4) Тариф з одним декрементом									
	чистий резерв ${}_tV^N$	премія заощаджень π_t^S	премія ризику π_t^R	резерв витрат ${}_tV^E$	премія ризику для покриття витрат $\pi_t^{E,R}$	резерв Цільмера ${}_tV$	премія заощаджень для покриття витрат $\pi_t^{E,S}$	нарахування експлуатацій них витрат C_t	викупна сума SV_t	$E[G^{ins,g}(t)]$
1	7,837	7,464	0,430	-5,530	0,026	2,31	1,189	0,775	2,547	0
2	16,066	7,464	0,429	-5,036	0,026	11,03	1,189	0,775	11,270	0
3	24,714	7,471	0,423	-4,517	0,025	20,20	1,189	0,775	20,433	0
4	33,810	7,486	0,408	-3,971	0,024	29,84	1,190	0,775	30,066	0
5	43,388	7,512	0,382	-3,397	0,023	39,99	1,192	0,775	40,204	0
6	53,486	7,551	0,342	-2,791	0,021	50,70	1,194	0,775	50,887	0
7	64,146	7,606	0,288	-2,151	0,017	61,99	1,197	0,775	62,156	0
8	75,414	7,677	0,217	-1,475	0,013	73,94	1,202	0,775	74,060	0
9	87,344	7,771	0,123	-0,759	0,007	86,59	1,207	0,775	86,654	0
10	100	7,894	0	0	0	100	1,215	0,775	100	0

Роки	Таблиця (5.5) Тариф з подвійним декрементом									
	чистий резерв ${}_tV^{w,N}$	премія заощаджень $\pi_t^{w,S}$	премія ризику $\pi_t^{w,R}$	резерв витрат ${}_tV^{w,E}$	премія ризику для покриття витрат $\pi_t^{w,E,R}$	резерв Цільмера ${}_tV^w$	премія заощаджень для покриття витрат $\pi_t^{w,E,S}$	нарахування експлуатацій них витрат C_t^w	викупна сума SV_t^w	$E[G^{ins,g}(t)]$
1	7,833	7,460	0,428	-5,530	0,026	2,30	1,188	0,775	2,303	0
2	16,06	7,463	0,425	-5,036	0,026	11,02	1,189	0,775	11,023	0
3	24,71	7,471	0,417	-4,518	0,025	20,19	1,189	0,775	20,190	0
4	33,80	7,488	0,400	-3,972	0,024	29,83	1,190	0,775	29,833	0
5	43,39	7,515	0,372	-3,397	0,022	39,99	1,192	0,775	39,989	0
6	53,49	7,555	0,332	-2,791	0,020	50,70	1,194	0,775	50,698	0
7	64,15	7,608	0,280	-2,151	0,017	62,00	1,197	0,775	62,001	0
8	75,42	7,678	0,209	-1,475	0,013	73,95	1,201	0,775	73,947	0
9	87,35	7,770	0,118	-0,759	0,007	86,59	1,207	0,775	86,592	0
10	100	7,888	0,000	0	0	100	1,214	0,775	100	0

(Рис. 12)

Слід зазначити, що премії та резерви у моделях з одним і двома декрементами відрізняються лише незначно. Мінімальне зниження премії у моделі з двома декрементами призводить до дещо більш значного зниження викупної суми.

Перша модель – це випадок, коли другим декрементом є скасування договору та викупна сума дорівнює резерву Цільмера (сумарному резерву). У конкретно такому випадку додавання другого декремента майже не впливає на премії та резерви (зовсім трохи зменшує премію), що ми і бачимо у вашій Моделі 1. У цьому випадку застосування моделі Маркова та Теореми 4.3 є додатковим обґрунтуванням традиційного підходу, який полягає у виборі викупної суми рівної сумарному резерву.

Якщо ж декремент інший - не скасування договору, а інша причина смерті і, відповідно, інша страхова сума, то премії та резерви будуть обчислюватися трохи інакше. Як саме, покажемо у моделі 2.

Модель 2

Застосовуючи теорему 4.4, розробимо алгоритм виконання актуарних підрахунків страхування життя немовлят, використовуючи таблицю ймовірностей декременту протягом року у немовлят у період з 2002 року по 2011 рік. Обравши дані причини смертності немовлят чоловічої статі через інфекцію та дієту (харчування) з підручника [23] (***«Mbirah, Anthoney_Analysis of infant and child mortality rates in Keny multiple decrement» ст.55)***

$t = 10$, вік застрахованого x =0 років (станом на 2002 рік), страхові виплати $D_1 = 100$ здійснюються в кінці року смерті застрахованого через інфекцію та $D_2 = 150$ здійснюються в кінці року смерті застрахованого через дієту, якщо смерть настала протягом строку страхування, та у випадку виживання по закінченні договору страхування здійснюється виплата $E_{10} = 100$. Технічна відсоткова ставка рівна $i = 5\%$, ставка витрат на придбання (сплачується тільки 1 раз в момент часу $t = 0$) - $\alpha = 6\%$, а ставка витрат зборів (сплачується у відсотках від брутто-премії кожного разу, коли сплачуються (вносяться) премії) - $\beta = 5\%$.

Для такої моделі змішаного страхування, яка включає витрати, побудуємо алгоритм для визначення нетто- та брутто-премій і страхових резервів у випадку двох декрементів, та виконаємо обчислення.

В Excel були введені початкові данні моделі (Рис. 13) та ймовірностей смерті дітей з одним та двома декрементами з підручника [22] (Рис. 14).

вік дитини (станом на 2002	x	0
договір дарування	t	10
витрати придбання	α	0,06
витрати зборів	β	0,05
відсоткова ставка	i	0,05
коефіцієнт дисконтування	v	0,9524
страхові виплати	D_1	100
	D_2	150
	E_{10}	100

(Рис.13)

Year	Total Prob	Causes of Male Infant deaths Probability			
		Infectious	Dietary	Trauma	Others
x	aq_x	aq_{1x}	aq_{2x}	aq_{3x}	aq_{4x}
2000	0.067938	0.043665	0.005402	0.007287	0.011583
2001	[redacted]				
2002	0.065549	0.043768	0.004808	0.005655	0.011317
2003	0.073682	0.050675	0.005695	0.006331	0.01098
2004	0.038127	0.024257	0.002785	0.003533	0.007552
2005	0.060222	0.042216	0.004842	0.005302	0.007862
2006	0.05905	0.038621	0.004465	0.005603	0.010361
2007	0.035777	0.021761	0.002582	0.00392	0.007515
2008	0.036861	0.022715	0.002647	0.002795	0.008703
2009	0.038737	0.019359	0.00087	0.001686	0.016823
2010	0.031603	0.01852	0.00226	0.003094	0.007729
2011	0.032209	0.018494	0.002574	0.003162	0.007979

(Рис. 14)

<u>Крок 1:</u> Знаючи ймовірність смерті у випадку одного декремента, знайдемо ймовірності виживання Таблиця (5.6), (Рис.15):

Таблиця (5.6) Таблиця життя з одним		
Роки, t	Ймовірність смерті q_{x+t-1}	Ймовірність виживання ${}_{t-1}p_x$
1	0,043768	1,00000
2	0,050675	0,95623
3	0,024257	0,90777
4	0,042216	0,88576
5	0,038621	0,84836
6	0,021761	0,81560
7	0,022715	0,79785
8	0,019359	0,77973
9	0,01852	0,76463
10	0,018494	0,75047
11		0,73659

(Рис. 15)

Крок 2: Для моделі з двома декрементами створимо Таблицю (5.7), (Рис. 16) з ймовірностями смерті та скасування договору, скориставшись формулами для обчислення відповідних величин з [13].

Таблиця (5.7) Таблиця ймовірностей декрементів									
Роки, t	$q'^{(d_1)}_{x+t-1}$	$q'^{(d_2)}_{x+t-1}$	$q^{(\tau)}_{x+t-1}$	$q^{d_1}_{x+t-1}$	$q^{d_2}_{x+t-1}$	${}_{t-1}p_x^{d_1}$	${}_{t-1}p_x^{d_2}$	${}_{t-1}p_x^{(\tau)}$	Δq_{x+t-1}
1	0,043768	0,004808	0,048366	0,0436628	0,0047028	1,00000	1,00000	1,00000	0,0001052
2	0,050675	0,005695	0,056081	0,0505307	0,0055507	0,95634	0,99530	0,95163	0,0001443
3	0,024257	0,002785	0,026974	0,0242232	0,0027512	0,90801	0,98977	0,89827	0,0000338
4	0,042216	0,004842	0,046854	0,0421138	0,0047398	0,88602	0,98705	0,87404	0,0001022
5	0,038621	0,004465	0,042914	0,0385348	0,0043788	0,84870	0,98237	0,83308	0,0000862
6	0,021761	0,002582	0,024287	0,0217329	0,0025539	0,81600	0,97807	0,79733	0,0000281
7	0,022715	0,002647	0,025302	0,0226849	0,0026169	0,79827	0,97557	0,77797	0,0000301
8	0,019359	0,00087	0,020212	0,0193506	0,0008616	0,78016	0,97302	0,75828	0,0000084
9	0,018520	0,00226	0,020738	0,0184991	0,0022391	0,76506	0,97218	0,74296	0,0000209
10	0,018494	0,002574	0,021020	0,0184702	0,0025502	0,75091	0,97000	0,72755	0,0000238
11						0,73704	0,96753	0,71226	

(Рис. 16)

Крок 3: Для початку підрахуємо чисту премію π^N для одного декременту та відповідно $\pi^{w,N}$ для двох декрементів (Рис. 17).

Чиста премія для одного декремента π^N, визначається за формулою:

$$\pi^N = 100 \cdot \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Чиста премія для двох декрементів $\pi^{w,N}$, визначається за формулою:

$$\pi^{w,N} = (D_1 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q^{d_1}_{x+k} + D_2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q^{d_2}_{x+k} +$$

$$+E_n \cdot v^n \cdot {}_n p_x) \div \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{5.16}$$

для одного декременту

чиста премія π^N

$A^1_{0:\overline{10}|}$	0,215082043
$A_{0:\frac{1}{\overline{10}|}}$	0,452203084
$A_{0:\overline{10}|}$	0,667285127
$\ddot{a}_{0:\overline{10}|}$	6,987012339
$P_{0:\overline{10}|}$	0,095503642
$P_{0:\overline{10}|}$	9,550

Щорічна нетто-премія на доживання (змішаного страхування)

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\frac{1}{\overline{n}|}}$$

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

$$A_{x:\frac{1}{\overline{n}|}} = v^n \cdot {}_n p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_k p_x$$

Для одного декременту нетто-премія

$$\pi^N = D_1 \left(\frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \right)$$

$$\pi^N = D_1 \left(\frac{A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\frac{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \right)$$

k	$\ddot{a}_{0+k:\overline{10-k}|}$	$A_{0+k:\overline{10-k}|} \cdot 100$	${}_k V_{0:\overline{10}|} \cdot 100$
0	6,987012339	67	0

$${}_k V_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$$

резерв нетто-премій наприкінці k-того року з моменту видачі поліса страхування на дожиття

для двох декрементів

чиста премія $\pi^{w,N}$

для d_1		для d_2	
$A^1_{0:\overline{10}|}$	0,214696726	$A^1_{0:\overline{10}|}$	0,02622904

$A_{0:\frac{1}{\overline{10}|}}$	0,43726384
$\ddot{a}_{0:\overline{10}|}$	6,877486
$A_{0:\overline{10}|}$	69,1304118

$$\pi^N = \left(100 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q^{d_1}_{x+k} + 150 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q^{d_2}_{x+k} + 100 \cdot v^n \cdot {}_n p_x \right) \div \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$P_{0:\overline{10}|}$	10,052

k	$\ddot{a}_{0+k:\overline{10-k}|}$	$A_{0+k:\overline{10-k}|}$	${}_k V_{0:\overline{10}|}$
0	6,877486005	69,13041	0

$${}_k V_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$$

(Рис. 17)

<u>Крок 4:</u> Підрахувавши чисту премію для тарифу з 1 та 2 декрементами, можемо знайти брутто-премію для обох випадків (Рис. 18).

Формула брутто-премії для одного декременту:

$$\pi = \frac{1}{1-\beta} \cdot \left(\pi^N + \frac{D_1 \cdot \alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \right) \tag{5.17}$$

Формула брутто-премії для двох декрементів:

$$\pi = \frac{1}{1-\beta} \cdot \left(\pi^N + \frac{(D_1 + D_2) \cdot \alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \right) \tag{5.18}$$

<u>Крок 5:</u> Отже, підрахувавши брутто-премію для обох випадків в Excel та з формули брутто премії (5.4) знайдемо премію для покриття витрат (5.5), отримавши наступні результати (Рис. 18).

Тариф з одним декрементом	$P = \pi$	10,957
Тариф з подвійним декрементом	$P = \pi^w$	12,877

Таблиця (5.8) Порівняння премій					
Один декремент			Два декременти		
чиста премія π^N	премія для покриття витрат π^E	брутто премія π	чиста премія $\pi^{w,N}$	премія для покриття витрат $\pi^{w,E}$	брутто премія π^w
9,550	1,407	10,957	10,052	2,825	12,877

(Рис. 18)

Наступні **<u>Кроки 6-12</u>** виконують за тими ж формулами, що і в Моделі 1, для підрахунку чистого резерву ${}_tV^N$, премії заощаджень π_t^S, премії ризику π_t^R, резерву витрат ${}_tV^E$, премії ризику для покриття витрат $\pi_t^{E,R}$, резерву Цільмера ${}_tV$, премії заощаджень для покриття витрат $\pi_t^{E,S}$, нарахуванні експлуатаційних витрат C_t (Рис. 19).

Роки	**Таблиця (5.9)** Тариф з одним декрементом							
	чистий резерв ${}_tV^N$	премія заощаджень π_t^S	премія ризику π_t^R	резерв витрат ${}_tV^E$	премія ризику для покриття витрат $\pi_t^{E,R}$	резерв Цільмера ${}_tV$	премія заощаджень для покриття витрат $\pi_t^{E,S}$	нарахування експлуатаційних витрат C_t
1	5,910	5,628	3,922	-5,645	0,235	0,26	1,171	0,872
2	11,762	5,292	4,259	-5,294	0,256	6,47	1,151	0,872
3	20,448	7,713	1,838	-4,773	0,110	15,67	1,296	0,872
4	28,479	6,675	2,876	-4,291	0,173	24,19	1,234	0,872
5	37,518	7,252	2,298	-3,749	0,138	33,77	1,269	0,872
6	48,296	8,479	1,072	-3,102	0,064	45,19	1,342	0,872
7	59,826	8,681	0,869	-2,410	0,052	57,42	1,354	0,872
8	72,309	9,040	0,511	-1,661	0,031	70,65	1,376	0,872
9	85,688	9,298	0,252	-0,859	0,015	84,83	1,391	0,872
10	100	9,550	0	0	0	100	1,407	0,872

Роки	**Таблиця (5.10)** Тариф з подвійним декрементом							
	чистий резерв ${}_tV^{w,N}$	премія заощаджень $\pi_t^{w,S}$	премія ризику $\pi_t^{w,R}$	резерв витрат ${}_tV^{w,E}$	премія ризику для покриття витрат $\pi_t^{w,E,R}$	резерв Цільмера ${}_tV^w$	премія заощаджень для покриття витрат $\pi_t^{w,E,S}$	нарахування експлуатаційних витрат C_t^w
1	5,718	5,445	4,343	-5,657	0,261	0,06	2,564	2,330
2	11,60	5,330	4,722	-5,304	0,283	6,30	2,542	2,330
3	20,59	8,012	2,040	-4,764	0,122	15,83	2,702	2,330
4	28,84	6,876	3,175	-4,269	0,191	24,57	2,634	2,330
5	38,19	7,525	2,526	-3,709	0,152	34,48	2,673	2,330
6	49,42	8,882	1,170	-3,035	0,070	46,39	2,755	2,330
7	61,47	9,123	0,928	-2,312	0,056	59,16	2,769	2,330
8	74,59	9,562	0,489	-1,525	0,029	73,06	2,796	2,330
9	88,63	9,827	0,224	-0,682	0,013	87,95	2,811	2,330
10	103,70	10,126	0	0	0	104	2,829	2,330

(Рис. 19)

Висновки

У магістерській дисертації розглянуто моделі, що включають витрати, моделі з урахуванням викупних сум, бухгалтерський облік для цих моделей, види витрат. Застосовано принцип еквівалентності фінансових зобов'язань, який полягає в тому, що математичні сподівання сучасної вартості премій та сучасної вартості майбутніх страхових виплат в момент укладання договору рівні.

Досліджено моделі, які включають витрати, з кратними декрементами. При цьому застосовано властивості ланцюгів Маркова до моделі змішаного страхуванні життя.

Основною самостійною частиною магістерської дисертації була побудова моделей страхування, які включають витрати, з одним та двома декрементами, розробка алгоритмів для визначення страхових тарифів, нетто- та брутто-премій, страхових резервів для вказаних моделей, реалізація цих алгоритмів.

Зазначимо, що у моделі 1 різниця між преміями змішаного страхування з одним та двома декрементами дуже маленька, саме через те, що другим декрементом є скасування договору, в якому викупна сума дорівнює загальному резерву на відповідний момент часу. У моделі 2 розглядався випадок з двома різними причинами смерті (декременту). Для цієї моделі теж запрограмовано та виконано розрахунки премій та резервів з урахуванням витрат. Результати магістерської дисертації можуть бути використанні для автоматизації актуарних розрахунків у сфері страхування життя.

Список використаних джерел

[1] Actuarial Mathematics// Newton L. Bowers// Jr. Hans U. Gerber// James C. Hickman// Donald A. Jones// Cecil J. Nesbitt.

[2] АКТУАРНІ РОЗРАХУНКИ// Цуркан Ірина Миколаївна// Федорова Оксана Геннадіївна.

[3] СТРАХУВАННЯ// проф. О.М. Петрук// М.М. Александрова, К.К. Уллубієва.

[4] Математика страхування життя// Навчальний центр для актуаріїв і фінансових аналітиків при Київському національному університеті імені Тараса Шевченка// 2012 рік.

[5] Методичні вказівки// І. М. Пістунов, канд. техн. наук, доц// Дніпопетровськ 2002.

[6] E. Sverdrup// Basic concepts in life assurance mathematics// Skand. Akt. tidskr., 35, (1952), 115-131.

[7] J. van Klinken// The theory of random processes and actuarial statistics, dependent and independent probabilities, Bulletin Swiss Association Actuaries// (1959), 139-162.

[8] J.C. Hickman// A statistical approach to premiums and reserves in multiple decrement theory (with discussion)// Trans. Soc. Actuaries// 16, (1964), 1-16, 149-154.

[9] G. Reichel// Die Erwartungswerte allgemeiner Versicherungsleistungen in der Mathematik der Lebensversicherung// Blätte Deutsche Gesellschaft Versich. und Finanzmath// VIII, (1967), 407-430.

[10] M.-H. Amsler// Les chaînes de Markov des assurances vie, invalidité et maladie// Trans. 18th Int. Congress Actuaries, (1968), 731-746.

[11] J.M. Hoem// Markov chain models in life insurance// Blätter Deutsche Gesellschaft Vers. und Finanzmath., IX, (1969), 91-107.

[12] K.H. Wolff// Versicherungsmathematik// Springer, Berlin, 1970.

[13] N.L. Bowers, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones and C.J. Nesbitt// Actuarial Mathematics, Society of Actuaries// Itasca, 1986.

[14] H.U. Gerber// Lebensversicherungsmathematik// Springer, Berlin,1986.

[15] H.U. Gerber// Life Insurance Mathematics (3rd ed.)// Springer, 1997.

[16] K. Wolfsdorf// Versicherungsmathematik, Teil 1: Personenversicherung, Teubner Studienbücher Mathematik// Leipzig, Berlin,1997.

[17] W. Hürlimann// Allgemeine Lebensversicherungen: Überschuss und Rentabilität// Bulletin Swiss Association Actuaries// (1988), 179-209.

[18] D.R. Schuette and C.J. Nesbitt// Withdrawal benefit equal to reserve: nonneutrality in the discrete case// Act. Res. Clear. House, 2, (1988), 179-190.

[19] N.D. Shyamalkumar// On the Schuette-Nesbitt paradox// Belgian Actuarial Bulletin, 6(1), (2006), 49-53.

[20] S. Jost// Modellierung eines Lebensversicherungsunternehmens in Riskpro™, Risikobetrachtung auf der Gesamtunternehmensebene, Diplomarbeit in Wirtschaftsmath.// Fachhochschule Koblenz, RheinAhrCampus, 2006. [17] J. van Klinken, The theory of random processes and actuarial statistics, dependent and independent probabilities, Bulletin Swiss Association Actuaries, (1959), 139-162.

[21] Werner Hürlimann // International Mathematical Forum, Vol. 6, 2011, no. 48, 2387 – 2401// Surrender_in_Single_and_Double_Decrement.

[22] Shailaja Deshmukh// Multiple Decrement Models in Insurance// An Introduction Using R.

[23] University of Nairobi// College of biological and physical science school of mathematics// Analisis of infant and child mortality rated in Kenya multiplr decrement theory model// Mbirah Anthoney// August 2012.

Публікації автора

1. Збірник доповідей VIII-ї всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Прикладна геометрія, дизайн, об'єкти інтелектуальної власності та інноваційна діяльність студентів та молодих вчених». Присвяченої 100-річчю з дня народження професора Павлова А.В. // 25-26 квітня 2019рік м. Київ// Застосування пакету MATHCAD для дослідження задачі про вільне падіння тіла//Луданов Д.К., ст. викладач, Тодосьєва А.В., студентка.