

Міністерство освіти і науки України
Український державний університет імені Михайла Драгоманова
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Національний університет «Кієво-Могилянська академія»

ХІ ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ МОЛОДИХ МАТЕМАТИКІВ



ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

КИЇВ, 11-13 ТРАВНЯ 2023 р.

XI Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків: Матеріали всеукраїнської наукової конференції, 11–13 травня, 2023 р. — Київ: УДУ імені Михайла Драгоманова, 2023. — 143 с.

Програмний комітет

Василик Ольга Іванівна (НТТУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»)
Божонок Катерина Валеріївна (УДУ імені Михайла Драгоманова)
Глибовець Микола Миколайович (НАУКМА)
Гончаренко Яніна Володимирівна (УДУ імені Михайла Драгоманова)
Задерей Петро Васильович (НТТУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»)
Іванов Олександр Володимирович (НТТУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»)
Клесов Олег Іванович (НТТУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»)
Козеренко Сергій Олександрович (НАУКМА)
Лисенко Ірина Миколаївна (УДУ імені Михайла Драгоманова)
Олійник Богдана Віталіївна (НАУКМА)
Петравчук Анатолій Петрович (КНУ імені Тараса Шевченка)
Пилипенко Андрій Юрійович (НТТУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»)
Працьовитий Микола Вікторович (УДУ імені Михайла Драгоманова)
Розора Ірина Василівна (НТТУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»)
Торбін Григорій Мирославович (УДУ імені Михайла Драгоманова)
Чорней Руслан Костянтинівич (НАУКМА)
Швець Василь Олександрович (УДУ імені Михайла Драгоманова)
Щестюк Наталія Юріївна (НАУКМА)

Організаційний комітет

Працьовитий Микола Вікторович, **голова** (УДУ імені Михайла Драгоманова, Інститут математики НАН України)
Барановський Олександр Миколайович (Інститут математики НАН України)
Бондаренко Ольга Ігорівна (УДУ імені Михайла Драгоманова)
Клесов Олег Іванович (НТТУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»)
Лук'янова Світлана Михайлівна (УДУ імені Михайла Драгоманова)
Маслова Юлія Петрівна (УДУ імені Михайла Драгоманова)
Нікіфоров Роман Олексійович (УДУ імені Михайла Драгоманова)
Ратушняк Софія Петрівна (Інститут математики НАН України)
Торбін Григорій Мирославович (УДУ імені Михайла Драгоманова)
Школьний Олександр Володимирович (УДУ імені Михайла Драгоманова)
Чорней Руслан Костянтинівич (НАУКМА)

Контакти

Електронна адреса: young.math.2023@gmail.com

Телефони: (044) 239-30-31

Адреса для листування: Український державний університет імені Михайла Драгоманова, кафедра вищої математики, вулиця Пирогова, 9, 02000, Київ, Україна

ЗМІСТ

СЕКЦІЯ 1. МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	7
Н.О. Антонюк, А.В. Сиротенко. Розв'язки лінійного операторного рівняння у скінченновимірному банаховому просторі.	8
В.Ю. Богданський. Про рівномірний закон великих чисел.	10
О.А. Галганов. Граничні теореми для циклів випадкових перестановок Юенса.	12
В.В. Гладун, О.В. Іванов Консистентність оцінки найменших квадратів амплітуд та кутових частот чирпованого сигналу.	13
С.В. Грищенко. Алгоритм наближення многочленами розв'язків систем диференціальних рівнянь.	15
О.В. Дикий, О.В. Іванов. Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів багатовимірної тригонометричної моделі регресії.	17
М.В. Дубницька Дослідження якості моделі з ринковим часом.	19
Д.В. Засуха. Обчислення ризику в моделі з активним ринковим часом.	21
Д.Є. Зубрицька. Дробове числення та його застосування у фінансовій математиці.	22
А.Ю. Коваленко. Оптимальні стратегії в багатокрокових іграх зі скінченим горизонтом.	24
Є.М. Окунев, П.В. Задерей. Про збіжність в середньому рядів Тейлора, коефіцієнти яких задовольняють умови Сідона-Теляковського.	25
А.С. Ковтун, О.І. Клесов. Локальна поведінка субординатора Дікмана та оберненого субординатора Дікмана.	27
О.В. Колеснік. Граничні теореми для послідовностей рекордів.	29
А.Ю. Кравець. Три різні доведення нерівності Коші-Шварца.	30
О. Lobantsov, А. Chuikov Software implementation of the Runge-Kutta method for solving a linear differential equations of the third order.	32
А.Ю. Ляпіна Розробка математичної моделі поширення епідемії Covid-19 в Україні в умовах воєнного стану.	34
О.О. Мінаєв, А.В. Сиротенко. Взаємозв'язок поліномів Чебишева та Лежандра.	36
Я.Г. Мокану. Ергодичність процесів типу Леві на прямій.	38
А.С. Пархоменко, Л.А. Репета. Геометричний підхід до знаходження суми степеневого ряду.	39
О.О. Плугатор, П.В. Задерей. Асимптотична формула для інтеграла від модуля функції, заданої рядом Тейлора.	41

А.Ю. Поліщук, М.К. Ільєнко. Збіжність рядів Баума-Каца для сум елементів лінійних авторегресійних послідовностей другого порядку.	43
Д.Ю. Случинський. Оптимальні стратегії в задачах керування випадковими потоками в мережі.	44
В.В. Стаматієва. Граничні теореми для точкових процесів, пов'язаних із узагальненою задачею про дні народження.	45
Г.В. Тарасенко, Ю.П. Буценко. Аналіз зв'язку між шкільною успішністю та результатами ЗНО учнів (на прикладі шкіл м.Буча.)	47
Д.В. Тихоненко, Р.Є. Ямненко. Властивості зважених сум випадкових процесів із класів $V(\varphi, \psi)$.	48
A. Tsukanova. The Kortweg-De Vries Equation and Compatibility of System of Two Auxiliary Linear Equations.	49
Д.А. Чаус, П.В. Задерей. Розв'язання інтегрального рівняння Вольтерра першого роду.	51
А.О. Шевченко, В.В. Бовсуновська, П.В. Задерей. Умови на Тейлорівські коефіцієнти функцій з класу H_1 .	53
В.К. Юськович. Асимптотична поведінка розв'язків багатовимірних стохастичних диференціальних рівнянь.	55
СЕКЦІЯ 2. МЕТРИЧНОЇ ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ, ГЕОМЕТРІЇ, ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛІЗУ	56
Н.А. Біловицька. Нескінченносимвольні системи зображення дійсних чисел і їх застосування.	57
О.І. Бондаренко, Н.М. Василенко. Нескінченно-символьне Φ -зображення і його геометрія.	59
Р.В. Кривошия. Про тип розподілу послідовності, продукованої оператором зсуву для Q_s^* -розкладів дійсних чисел.	61
О.П. Макачук, Б.В. Халецький. Про одну множину чисел заданих в термінах неповних сум числового ряду.	62
М.П. Мороз. Проектор одного зображення чисел рядами Перрона (\bar{P} -зображення) в інше.	63
О.О. Нікорак, С.П. Ратушняк. Проектори цифр ланцюгових зображень чисел.	65
І.І. Продан, С.П. Ратушняк. Поліосновні системи зображення чисел і фрактальні функції.	66
Ю.О. Симоненко. s -кова система числення з надлишковим алфавітом.	68
Д.Ю. Скакун. Про одну сингулярну функцію, що не задовольняє умову Гельдера задану в термінах Q_s^* -представлення дійсних чисел.	69
С.О. Стась. Плоскі вкладення кореневих дерев.	70
С.П. Ратушняк, М.В. Працьовитий. Фрактальні функції, означенні в термінах Q_2 -зображення дійсних чисел.	71
Д.С. Шпитюк. Арифметичні суми множин канторівського типу.	73

СЕКЦІЯ 3. АЛГЕБРИ, ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ, ТЕОРІЇ АВТОМАТІВ, ІНФОРМАТИКИ	74
В.О. Гапоненко, С.О. Козеренко. Критерії all-path опуклих множин у зв'язних графах.	75
Ю.-Л.В. Дехтяр, С.О. Козеренко. Анігіляторно-неперервні відображення між графами.	77
Р.О. Зимовець, С.О. Козеренко. Безпікові функції на графах блоків.	79
М.Ю. Лихопуд. Аналіз ефективності методу динамічної альтернативної маршрутизації в мережах з неповнозв'язною топологією.	81
Б.Ю. Романчук, С.О. Козеренко. Орієнтації графів і проблема обходу сторожа.	82
А. Сачева. Прикладне застосування теорії графів.	84
А.Д. Сердюк, С.О. Козеренко. Про деякі класи імбалансно-графічних графів.	86
Д.Т. Соколова. Властивості діаграм Вороного на уніциклічних графах.	88
Є.О. Утенко. Властивості графу ідеалів Z_n .	89
К.О. Черевко. Оптимізація булевих схем.	91
СЕКЦІЯ 4. ТЕОРІЇ АЛГОРИТМІВ, ІНФОРМАТИКИ	92
М.В. Гостренко. Створення навчально-ігрового програмного засобу для навчання основ алгоритмізації та програмування.	93
О.М. Kravchuk. On regularisation by means of convex operator in RKHS.	96
М.І. Кривошея. Моделювання процесів розв'язку геометричних задач за допомогою клітинних автоматів.	98
Ю.А. Кузьменко, О.Р. Смиш. Балансування категорій у цільовому класі в тренувальних даних для задач класифікації тексту.	100
І.В. Мощенко. Моделювання стохастичних ігор зі скінченним горизонтом на прикладі гри Го.	102
А.С. Нитник. Алгоритм прогнозування часових рядів з нерегулярним трендом.	104
Д.В. Новиков. Атаки Карліні-Вагнера на нейронні мережі.	107
А.В. Сивохіп. Методи побудови оптимальної стратегії участі в аукціоні.	109
СЕКЦІЯ 5. ІСТОРІЇ МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ	111
Т.Ю. Года. Розвиток креативного мислення під час вивчення тригонометричних функцій.	112
С. Дорофєєва, Г.О. Маслюк. Про давньоєгипетський математичний термін "SEKED".	114
В.О. Журбін. Про деякі прийоми роботи вчителя математики з учнями, що мають особливі освітні потреби під час вивчення функцій в курсі алгебри 7 класу.	116
О.В. Курінна, О.О. Дем'яненко. Від губернського регістратора до видатного математика. Життєвий шлях Михайла Остроградського.	118
Т.О. Насадюк. Мейкерство на уроках математики в 5-6 класах.	123

В.О. Павліченко. Особливості використання технології змішаного навчання під час вивчення математики.	125
М.О. Попрожук, Н.В. Круглова, О.О. Диховичний. Вибір розмірності моделі MIRT для аналізу тестів з вищої математики.	127
М.О. Попрожук, Н.В. Круглова, О.О. Диховичний. Застосування Wolfram Mathematica 13.2.1 для створення тестових питань з вищої математики.	129
А.В. Савицька, К.М. Гринтус, К.В. Плясуля. Теорія ігор: від минулого до сьогодення.	131
А. Сачева. Використання ІКТ при вивченні теми «Квадратичні функції» з шкільного курсу математики.	133
К.Ю. Сизьон, Т.Г. Пригалінська. Математика в медицині.	135
Ю.В. Тихоненко. Пропозиції щодо структури уроку засвоєння нових знань з математики з метою сприяння кращому запам'ятовуванню учнями навчального матеріалу.	137
О.В. Ткач. Формування компетентності підприємливості та фінансова грамотність під час вивчення математики в середній школі.	139
В.П. Яцуненко, Т.В. Маловічко. Леопольд Кронекер.	141

Секція 1.

Математичного аналізу,
теорії ймовірностей,
диференціальних рівнянь

РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ В ПРОСТОРІ \mathbb{R}^3

Н.О. Антонюк, А.В. Сиротенко

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Визначимо \mathbb{B}_1 та \mathbb{B}_2 як банахові простори. Покладемо $B \in L(\mathbb{B}_1)$, $A \in L(\mathbb{B}_2)$ та $Y \in L(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ — задані лінійні оператори, а також $X \in L(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ — шуканий лінійний оператор.

Відомий наступний результат [1]:

Рівняння

$$\sum_{i,j=0}^n c_{ij} A^i X B^j = Y, \quad (1)$$

де $c_{ij} \in \mathbb{C}$ — деякі комплексні числа, має для довільного $Y \in L(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ єдиний розв'язок $X \in L(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ тоді, коли

$$P(\lambda, \mu) = \sum_{i,j=0}^n c_{ij} \lambda^i \mu^j \neq 0$$

для всіх можливих пар чисел λ, μ таких, що $\lambda \in \sigma(A)$ і $\mu \in \sigma(B)$, тобто належать спектрам операторів A та B відповідно.

Розв'язок рівняння (1) представляється у виді

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} \frac{(A - \lambda I)^{-1} X (B - \mu I)^{-1}}{P(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu, \quad (2)$$

де оператори I — тотожні на \mathbb{B}_1 та \mathbb{B}_2 , а Γ_A та Γ_B — гладкі контури, що повністю містять спектри операторів A та B відповідно.

Розглянемо частковий випадок рівняння (1)

$$AX - XB = Y \quad (3)$$

при умові $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2 = \mathbb{R}^3$.

Для випадку, коли оператори A та B , що у обраних просторах можуть бути представлені матрицями, мають по три попарно різних власних числа, було отримано наступну формулу для знаходження розв'язку (2) рівняння (3):

$$X = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{A^*(\lambda_i) \cdot Y \cdot B^*(\mu_j)}{(\lambda_i - \mu_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 (\lambda_i - \lambda_k) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^3 (\mu_j - \mu_l)},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix},$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$ — власні числа матриці A , $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_1$ — власні числа матриці B ,

$$A^*(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - (a_{22} + a_{33})\lambda + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & 0 & 0 \\ a_{21}\lambda + a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & 0 & 0 \\ a_{31}\lambda + a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & a_{12}\lambda + a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & 0 \\ 0 & \lambda^2 - (a_{11} + a_{33})\lambda + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & 0 \\ 0 & a_{32}\lambda + a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13}\lambda + a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ 0 & 0 & a_{23}\lambda + a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23} \\ 0 & 0 & \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix},$$

$$B^*(\mu) = \begin{pmatrix} \mu^2 - (b_{22} + b_{33})\mu + b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} & 0 & 0 \\ b_{21}\mu + b_{23}b_{31} - b_{21}b_{33} & 0 & 0 \\ b_{31}\mu + b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & b_{12}\mu + b_{13}b_{32} - b_{12}b_{33} & 0 \\ 0 & \mu^2 - (b_{11} + b_{33})\mu + b_{11}b_{33} - b_{13}b_{31} & 0 \\ 0 & b_{32}\mu + b_{12}b_{31} - b_{11}b_{32} & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13}\mu + b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22} \\ 0 & 0 & b_{23}\mu + b_{21}b_{13} - b_{11}b_{23} \\ 0 & 0 & \mu^2 - (b_{11} + b_{22})\mu + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \end{pmatrix}.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*. — Москва: Наука, 1970. — 536 с.

ПРО РІВНОМІРНИЙ ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

В.Ю. Богданський

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

У роботі [1] доводиться наступний рівномірний ЗВЧ для процесів, індексованих множинами:

Твердження 1. *Нехай $J = \{1, 2, \dots\}^d$, $\{X_j\}$ – незалежні та однаково розподілені випадкові величини з $E|X_j| < \infty$ та $E[X_j] = 0$; \mathcal{A} – сукупність підмножин $[0, 1]^d$, на яку накладено певні умови. Позначимо $S(B) = \sum_{j \in B} X_j$. Тоді виконується наступний рівномірний ЗВЧ:*

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{S(nA)}{n^d} \right| \rightarrow 0, \text{ м.н. при } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Зафіксуємо $1 < p < 2$, перевизначимо $S(B) = \sum_{j \in J} |B \cap C_j| \cdot X_j$, де $C_j = (j-1, j]$, $|\cdot|$ – міра Лебега (як у роботі [2]) та розглянемо питання: як треба змінити умови, накладені на $\{X_j\}$ та \mathcal{A} , щоб виконувалось сильніше за 1 твердження:

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{S(nA)}{n^{d/p}} \right| \rightarrow 0, \text{ м.н. при } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Необхідною додатковою умовою на $\{X_j\}$ буде $E|X_j|^p < \infty$. Обмежимося випадком $d = 1$. Умови на \mathcal{A} з теореми 1 достатньо, щоб $U = \mathbb{C}(\bar{\mathcal{A}}, R)$ був сепарабельним банаховим простором, де $\bar{\mathcal{A}}$ – замикання \mathcal{A} у просторі підмножин $[0, 1]$ з метрикою симетричної різниці. Твердження 2 стає рівносильним збіжності м.н. випадкових елементів зі значеннями в U :

$$\frac{S_n}{n^{1/p}} \rightarrow 0, \text{ м.н. при } n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

де $S_n(A) = S(nA)$.

Існує багато результатів щодо закону великих чисел Марцинкевича-Зігмунда для випадкових елементів зі значеннями у сепарабельному банаховому просторі виду $S_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} X_k$, де $\{X_k\}$ – випадкові елементи, а $\{a_{nk}\}$ – дійсні константи. У нас же випадок типу $S_n = \sum_{k=1}^n X_k \cdot a_{nk}$, де $\{X_k\}$ – випадкові величини, а $\{a_{nk}\}$ – не випадкові елементи U . Існують результати для $S_n = \sum_{k=1}^n X_{nk}$, де $\{X_{nk}\}$ – построково (для кожного n) незалежні випадкові елементи (що виконується), але вони вимагають занадто сильні додаткові умови. Оскільки U , як сепарабельний банаховий простір, є ізоморфним замкнутому підпростору $\mathbb{C}([0, 1])$, то твердження 3 буде еквівалентним

твердженню про збіжність м.н. випадкових поліномів; але відомі результати теж потребують занадто сильні умови на $\{X_j\}$.

Подяка. Автор висловлює подяку за підтримку Національному фонду досліджень України (проект 2020.02/0014 "Асимптотичні режими збурених випадкових блукань: на межі сучасної та класичної теорії ймовірностей").

ЛІТЕРАТУРА

- [1] R. F. Bass and R. Pyke *A strong law of large numbers for partial-sum processes indexed by sets* // Ann. Probab., 12, (1984), 268-271.
- [2] R. F. Bass and R. Pyke *Functional Law of the Iterated Logarithm and Uniform Central Limit Theorem for partial-sum processes indexed by sets* // Ann. Probab., 12, (1984), 13-34.

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ЦИКЛІВ ВИПАДКОВИХ ПЕРЕСТАНОВОК ЮЕНСА

О.А. Галганов

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Вступ. Нехай σ_n — випадкова перестановка, що обрана з симетричної групи S_n відповідно до розподілу Юенса:

$$\mathbb{P}(\sigma_n = \pi) = \frac{\theta^{(\pi)}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)}, \quad \pi \in \mathcal{S}_n,$$

де $\theta > 0$ є заданим параметром, а (π) позначає кількість циклів в π . У випадку $\theta = 1$ розподіл є рівномірним.

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ розглянемо послідовність точкових процесів

$$P_n^{(k)} = \sum_{i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}} \delta_{\left(\frac{i_1}{n}, \dots, \frac{i_k}{n}\right)} 1\{\sigma_n(i_1) = i_2, \dots, \sigma_n(i_{k-1}) = i_k, \sigma_n(i_k) = i_1\},$$

визначених на множині

$$\mathcal{S}_k = \{(x_1, \dots, x_k) \in [0, 1]^k : x_i \neq x_j \forall i \neq j, x_1 < \min\{x_2, \dots, x_k\}\}.$$

Тут δ_x позначає міру Дірака в x .

Зокрема, $P_n^{(k)}(\mathcal{S}_k)$ є кількістю циклів довжини k в σ_n . Відомо [1], що граничним розподілом $P_n^{(k)}(\mathcal{S}_k)$ при $n \rightarrow \infty$ є $\text{Pois}(\theta/k)$.

Результати. Основним результатом є теорема про грубу збіжність за розподілом послідовності $(P_n^{(k)}, n \geq 1)$ до однорідного точкового процесу Пуассона $N^{(k)}$ з інтенсивністю θ на \mathcal{S}_k . За допомогою теореми про неперервне відображення для функціоналів на просторі точкових мір отримано граничні розподіли найменшої на найбільшої нерухомих точок, суми нерухомих точок, найменшого та найбільшого спейсингів між нерухомими точками, а також граничну теорему для точкового процесу різниць між найбільшим та найменшим елементами в циклах довжини k .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Richard Arratia, A. D. Barbour, and Simon Tavaré. *Logarithmic combinatorial structures: A probabilistic approach*. EMS Monogr. Math. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2003.

КОНСИСТЕНТНІСТЬ ОНК АМПЛІТУД ТА КУТОВИХ ЧАСТОТ ЧИРПОВАНОГО СИГНАЛУ

В.В. Гладун, О.В. Іванов

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

У доповіді ми розглядаємо неперервний у часі множинний чирпований сигнал (англ. *chirp signal*), що спостерігається на фоні адитивного випадкового шуму і доводимо сильну консистентність оцінки найменших квадратів (ОНК) невідомих параметрів сигналу. Для моделей з дискретним часом ряд результатів щодо консистентності та асимптотичної нормальності ОНК, та деяких інших оцінок параметрів чирпованого сигналу були отримані у великій кількості робіт (див., наприклад, [1, 2]).

Припустимо, що ми спостерігаємо випадковий процес

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad \text{де}$$

$$g(t, \theta^0) = \sum_{j=1}^N (A_j^0 \cos(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2) + B_j^0 \sin(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2)), \quad (1)$$

$$\theta^0 = (A_1^0, B_1^0, \phi_1^0, \psi_1^0, \dots, A_N^0, B_N^0, \phi_N^0, \psi_N^0), \quad (2)$$

$(A_j^0)^2 + (B_j^0)^2 > 0$, $j = \overline{1, N}$; $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$ є випадковим шумом і задовольняє наступній вимозі.

A. ε — вибірково неперервний стаціонарний гауссівський випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією (к.ф.) $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)$, $t \in \mathbb{R}$, що задовольняє одну з умов:

(i) $B(t) = L(|t|)|t|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, де L — неспадна повільно змінна на нескінченності функція;

(ii) $B(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$.

Для доведення консистентності оцінки найменших квадратів (2) необхідно змінити стандартне означення ОНК, використовуючи параметричні множини, що дозволять добре розрізнити параметри моделі (див. [3]).

Розмістимо параметри $\psi^0 = (\psi_1^0, \dots, \psi_N^0)$ в порядку зростання і припустимо, що параметрична множина, в якій будемо шукати оцінку невідомих істинних значень параметра ψ , має вигляд

$$\psi^0 \in \Psi(\underline{\psi}, \bar{\psi}) = \{\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) : 0 \leq \underline{\psi} < \psi_1 < \dots < \psi_N < \bar{\psi} < +\infty\}.$$

В свою чергу, також введемо параметричну множину

$$\phi^0 \in \Phi(\underline{\phi}, \bar{\phi}) = \{\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N) : 0 \leq \underline{\phi} < \phi_j < \bar{\phi} < +\infty, j = \overline{1, N}\}.$$

Розглянемо монотонно неспадну сім'ю відкритих множин $\Psi_T \subset \Psi(\underline{\psi}, \bar{\psi})$, $T > T_0 > 0$, що містить вектор ψ^0 , таку, що $\bigcup_{T > T_0} \Psi_T = \tilde{\Psi}$, $\tilde{\Psi}^c = \Psi^c(\underline{\psi}, \bar{\psi})$, і виконується наступна вимога.

$$\mathbf{B.} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\substack{1 \leq j \leq N-1 \\ \psi \in \Psi_T}} T^2 (\psi_{j+1} - \psi_j) = +\infty; \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\psi \in \Psi_T} T^2 \psi_1 = +\infty.$$

Означення 1. Будь-який випадковий вектор

$$\theta_T = (A_{1T}, B_{1T}, \phi_{1T}, \psi_{1T}, \dots, A_{NT}, B_{NT}, \phi_{NT}, \psi_{NT}),$$

що мінімізує значення функціоналу $Q_T(\theta) = T^{-M} \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)]^2 dt$ на параметричній множині $\Theta_T^c \subset \mathbb{R}^{4N}$, де амплітуди $A_j, B_j, j = \overline{1, N}$, приймають будь-які значення, а параметри (ϕ, ψ) приймають значення у множині $\Phi^c(\underline{\phi}, \bar{\phi}) \times \Psi_T^c, T > T_0 > 0$, називається ОНК параметра θ^0 .

У даній доповіді досліджується саме така оцінка θ_T , визначена на параметричній множині Θ_T^c , що залежить від T .

Важливим кроком доведення консистентності ОНК є наступна теорема, що являє собою рівномірний закон великих чисел для заданого випадкового процесу, зваженого тригонометричними функціями (1).

Теорема 1. *Якщо виконано умову \mathbf{A} , то*

$$\xi_T = \sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} \left| T^{-1} \int_0^T e^{-i(\phi t + \psi t^2)} \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н., при } T \rightarrow \infty.$$

Спираючись на результат теореми 1, ми доводимо наступну теорему, що є основним результатом даної доповіді.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови \mathbf{A} та \mathbf{B} . Тоді ОНК θ_T є сильно консистентною оцінкою параметра θ^0 в сенсі, що $A_{jT} \rightarrow A_j^0, B_{jT} \rightarrow B_j^0, T(\phi_{jT} - \phi_j^0) \rightarrow 0, T^2(\psi_{jT} - \psi_j^0) \rightarrow 0$ м.н., при $T \rightarrow \infty, j = \overline{1, N}$.*

АЛГОРИТМ НАБЛИЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНАМИ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

С.В. Грищенко

(УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна)

Робота присвячена побудові алгоритму для наближення многочленами розв'язків систем диференціальних рівнянь на основі відомого а-методу В. К. Дзядика.

Розглянемо задачу Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь:

$$x' = A(t)x(t) + f(t), \quad (1)$$

де

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$a_{ij}(t), f_i(t)$ — задані поліноміальні функції для $t \in [0; H]$,

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0. \quad (3)$$

Відповідно до схеми а-методу (див. [1], [2]) перейдемо від задачі (1)–(3) до еквівалентної системи рівнянь типу Вольтери:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t (a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + f(t)) dt; \\ x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t (a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + f(t)) dt. \end{cases} \quad (4)$$

Далі системі (4) ставимо у відповідність систему наближених («збурених») інтегро-функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1^n(t) = x_1(0) + \int_0^t (a_{11}(t)x_1^n(t) + a_{12}(t)x_2^n(t) + f(t)) dt - \varepsilon_1^{N_1}(t); \\ x_2^n(t) = x_2(0) + \int_0^t (a_{21}(t)x_1^n(t) + a_{22}(t)x_2^n(t) + f(t)) dt - \varepsilon_2^{N_2}(t), \end{cases} \quad (5)$$

де $x_1^n(t), x_2^n(t)$ — наближений розв'язок, що шукається у вигляді поліномів

$$x_1^n(t) = \sum_{k=0}^n c_k \cdot t^k; \quad x_2^n(t) = \sum_{k=0}^n l_k \cdot t^k \quad (6)$$

з невідомими коефіцієнтами $c_k, l_k, k = \overline{0, n}$.

Многочлени $\varepsilon_1^{N_1}$, $\varepsilon_2^{N_2}$ записуються через многочлени Чебишова I роду $T_k(t) = \cos(k \arccos t)$,

$$\varepsilon_1^{N_1}(t) = \sum_{i=1}^{N_1} \tau_{n+i} T_{n+i} \left(\frac{t}{h} \right); \quad \varepsilon_2^{N_2}(t) = \sum_{j=1}^{N_2} \varphi_{n+j} T_{n+j} \left(\frac{t}{h} \right), \quad (7)$$

де

$$N_1 = \max(n_{a_{11}} + 1, n_{a_{12}} + 1, n_f + 1 - n),$$

$$N_2 = \max(n_{a_{21}} + 1, n_{a_{22}} + 1, n_f + 1 - n),$$

τ_{n+i} , φ_{n+j} — невідомі додаткові параметри.

Тепер, підставимо (6)–(7) в (5), отримаємо систему для знаходження невідомих c_k , l_k ($k = \overline{0, n}$) та допоміжних параметрів τ_{n+i} , φ_{n+j} ($i = \overline{0, N_1}$; $j = \overline{0, N_2}$).

Приклад 1. Для реалізації запропонованого алгоритму була обрана задача Коші:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2t \cdot x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2t \cdot x_2(t) \end{cases}, \quad t \in [0; 1], \quad (8)$$

$$x_1(0) = 1; \quad x_2(0) = 0. \quad (9)$$

Точним розв'язком системи буде:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{\exp 2 + 1} (\exp(t + t^2) + \exp 2 \cdot \exp(-t + t^2)) \\ x_2(t) = \frac{1}{\exp 2 + 1} (\exp(t + t^2) - \exp 2 \cdot \exp(-t + t^2)) \end{cases}.$$

Наближений розв'язок задачі (8)–(9), побудований на основі а-методу В. К. Дзядика:

$$\begin{cases} x_1(t) = 1, 13 - 1, 94t + 4, 74t^2 \\ x_2(t) = 0, 13 - 1, 05t + 3, 86t^2 \end{cases}.$$

Отримане наближення добре ілюструє ефективність та доцільність розв'язування задачі (8)–(9) наведеним алгоритмом.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Дзядык В. К. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений*. — Киев: Наукова думка, 1988. — 387 с.
- [2] Bilenko V. I., Bozhonok K. V., Dzyadyk S. Yu. *Piecewise-Polynomial Approximations for the Solutions of Impulsive Differential Equations*. // *Ukrainian Mathematical Journal*. — 2019. — 71, No. 2. — P. 190–201. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01638-3>.

**КОНСИСТЕНТНІСТЬ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ
ПАРАМЕТРІВ БАГАТОВИМІРНОЇ
ТРИГОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ**

О.В. Дикий, О.В. Іванов

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Нехай $\langle \varphi, t \rangle = \sum_{l=1}^M \varphi_l t_l$, $\|t\| = \sqrt{\langle t, t \rangle}$, $M \geq 3$.

Припустимо, що спостерігаємо випадкове поле

$$X(t) = \sum_{k=1}^N (A_k^0 \cos \langle \varphi_k^0, t \rangle + B_k^0 \sin \langle \varphi_k^0, t \rangle) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, T]^M, \quad (1)$$

$$\theta^0 = (A_1^0, B_1^0, \varphi_{11}^0, \dots, \varphi_{M1}^0, \dots, A_N^0, B_N^0, \varphi_{1N}^0, \dots, \varphi_{MN}^0),$$

$(A_k^0)^2 + (B_k^0)^2 > 0$, $k = \overline{1, N}$, — вектор істинних значень невідомих параметрів. Число $N \geq 1$ відоме, $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}^M\}$ — випадковий шум, стосовно якого ми робимо наступне припущення.

A. ε — вибірково неперервне однорідне гауссівське поле з нульовим середнім і коваріаційною функцією $B(t) = \mathbb{E} \varepsilon(t) \varepsilon(0)$, $t \in \mathbb{R}^M$, що задовольняє одну з умов:

- (i) ε — ізотропне поле і $B(t) = \tilde{B}(\|t\|) = L(\|t\|) / \|t\|^\alpha$, $\alpha \in (0, M - [\frac{M}{2}])$, з неспадною повільно змінною на нескінченності функцією L ;
- (ii) $B(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^M)$.

Для деяких чисел $0 \leq \underline{\varphi}_l < \overline{\varphi}_l < \infty$, $l = \overline{1, M}$ розглянемо множини $\Lambda_l = \{\varphi_l = (\varphi_{l1}, \dots, \varphi_{lN}) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \underline{\varphi}_l < \varphi_{lk} < \overline{\varphi}_l, k = \overline{1, N}\}$, $l = \overline{1, M}$, що містять всі істинні значення частот φ_{lk} . Розглянемо монотонно неспадну сім'ю відкритих множин $\Lambda_{lT} \subset \Lambda_l$, $l = \overline{1, M}$, $T > T_0$, таких що $\left(\bigcup_{T>T_0} \Lambda_{lT}\right)^c = \Lambda_l^c$ та задовольняють наступні умови.

B. Для $l = \overline{1, M}$ та $k, k' = \overline{1, N}$

- (1) $\varphi_l^0 = (\varphi_{l1}^0, \dots, \varphi_{lN}^0) \in \Lambda_{lT}$, $T > T_0$;
- (2) $\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\varphi_l \in \Lambda_{lT}} T |\varphi_{lk} - \varphi_{lk'}| = \infty$, $k \neq k'$;
- (3) $\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\varphi_l \in \Lambda_{lT}} T \varphi_{lk} = \infty$.

Означення 1. Будь-який випадковий вектор

$$\theta_T = (A_{1T}, B_{1T}, \varphi_{11,T}, \dots, \varphi_{M1,T}, \dots, A_{NT}, B_{NT}, \varphi_{1N,T}, \dots, \varphi_{MN,T})$$

такий, що він є точкою абсолютного мінімуму функціоналу

$$Q_T(\theta) = T^{-M} \int_{[0,T]^M} [X(t) - g(t, \theta)]^2 dt,$$

в параметричній множині $\Theta_T^c \subset \mathbb{R}^{(M+2)N}$, де амплітуди $A_k, B_k, k = \overline{1, N}$, можуть набувати будь-яких значень, а кутові частоти набувають значень у множині

$$\Lambda_T^c = \prod_{l=1}^M \Lambda_{lT}^c, \quad T > T_0 > 0,$$

називається оцінкою найменших квадратів векторного параметра θ^0 , отриманою за спостереженнями $\{X(t), t \in [0, T]^M\}$.

Доведено рівномірний посилений закон великих чисел для фінітного перетворення Фур'є випадкового поля ε .

Теорема 1. *Якщо виконано умову \mathbf{A} , то при $T \rightarrow \infty$*

$$\xi_T = \sup_{\varphi \in \mathbb{R}^M} \left| T^{-M} \int_{[0,T]^M} e^{-i\langle \varphi, t \rangle} \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н.}$$

Доведено теорему про сильну консистентність ОНК θ_T векторного параметра θ^0 тригонометричної моделі, що розглядається.

Теорема 2. *Нехай виконано умови \mathbf{A} та \mathbf{B} . Тоді ОНК θ_T є сильно консистентною оцінкою параметра θ^0 в тому розумінні, що $A_{kT} \rightarrow A_k^0, B_{kT} \rightarrow B_k^0, T(\varphi_{lk,T} - \varphi_{lk}^0) \rightarrow 0$, м.н. при $T \rightarrow \infty, l = \overline{1, M}, k = \overline{1, N}$.*

У доведенні Теорема 2 істотно використовується Теорема 1. Зауважимо також, що Теорема 2 узагальнює відповідний результат роботи [1], отриманий для $M = 2$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ivanov, A.V., Malyar, O.V. *Consistency of the least squares estimators of parameters in the texture surface sinusoidal model* // Theory Probab. Math. Stat. — 2018. — 97. — С. 73–84.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЯКОСТІ МОДЕЛІ З РИНКОВИМ ЧАСОМ

М.В. Дубницька

(Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ, Україна)

Відтоді, як в 1900-х роках французький математик Луї Башельє розробив першу математичну модель фінансових ринків – модель броунівського руху для опису цінової динаміки акцій – вдосконалення та створення нових математичних моделей фінансових ринків не зупиняється і сьогодні, адже різні моделі можуть краще або гірше описувати різні аспекти досліджуваних процесів. Виникає проблема оцінки якості обраної моделі. Дана робота присвячена дослідженню якості моделі з ринковим часом за допомогою оцінювання статистичних похибок RPE та $ARPE$ [1].

Для оцінки моделі застосовуються два показники статистичної похибки для кількісного визначення відхилення теоретичних цін опціонів від цін, що спостерігаються на ринку. RPE та $ARPE$ визначаються як:

$$RPE = \frac{\hat{p}_i - p_i}{p_i} \quad (1)$$

$$ARPE = \left| \frac{\hat{p}_i - p_i}{p_i} \right| \quad (2)$$

де:

- \hat{p}_i – теоретична ціна опціону, обрахована за моделлю,
- p_i – фактична ринкова ціна;

для моделі з ринковим часом [2]

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \theta dT_t + \sigma dW_{T_t}$$

де:

- P_t – ціна акції, в момент часу, t
- W_{T_t} – геометричний броунівський рух,
- μ, σ, θ – параметри моделі,
- T_t – ринковий час.

Ринковий час T_t – це додатний, неспадний стохастичний процес:

$$T_0 = 0, T_t = \sum_{i=1}^{[t]} \tau_i + \tau_{[t]+1}(t - [t])$$

де:

- τ_t – послідовність стаціонарних приростів часу, необов'язково незалежних, таких, що підкорюються оберненому гамма розподілу.

Отримані результати порівнюються із статистичними похибками (1) і (2), обраними для моделі Блека-Шоулза. Статистичні похибки (1) і (2) досліджені за допомогою регресійного аналізу. Регресуються похибки $APRE$ на час до застосування (в роках) $Time\ to\ maturity$, грошовість опціону $Moneyness$ та двійкову змінну $Call$, яка приймає значення 1, якщо маємо колл-опціон.

$$APRE = a_0 + a_1 Time\ to\ maturity + a_2 Moneyness + a_3 Call + \epsilon, \epsilon \sim N(0; \sigma^2),$$

де:

- a_0, a_1, a_2, a_3 – параметри регресії,
- ϵ – білий шум.

У результаті дослідження зроблені висновки щодо упередженості та ефективності моделі.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Christian Schittenkopf, Alfred Lehar, Martin Scheicher (2002) *GARCH vs Stochastic Volatility: Option Pricing and Risk Management*. — Journal of Banking & Finance, Volume 26, Issues 2–3, 323–345 p.
- [2] F. Castella, N. N. Leonenkob, and N. Shchestyukc (2017) *Student-like models for risky asset with dependence*. — Stochastic Analysis and Applications, Volume 35, Issue 3, 452–464 p.

ОБЧИСЛЕННЯ РИЗИКУ В МОДЕЛІ З АКТИВНИМ РИНКОВИМ ЧАСОМ

Д.В. Засуха

(Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна)

Порівняння якості моделей в сенсі обчислення ризику є важливою частиною сьогоднішніх фінансових ринків. Математичні моделі дозволяють рахувати справедливі ціни, спрогнозувати рух цінних паперів та знизити можливі фінансові збитки. Але користування моделями несе в собі ризики, які варто оцінити. За основу дослідження було взято реальні дані для call опціонів компанії Tesla Inc.

У даній роботі розглядається модель з активним ринковим часом T_t , де час представлений у вигляді додатнього, неспадаючого стохастичного процесу, зі стаціонарними приростами τ_t , які підкорюються оберненому гамма-розподілу $R\Gamma(\frac{\nu}{2}, \frac{\delta^2}{2})$ [1]. Ціна опціону call за даною моделлю рахується за формулою:

$$C(Y, K) = \int_0^{\infty} (P_0 \Phi(d_1) - K e^{-rY} \Phi(d_2)) f_{T_Y}(t) dt$$

- $d_1 = \frac{\log \frac{P_0}{K} + rY + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}$, $d_2 = \frac{\log \frac{P_0}{K} + rY - \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}$,
- $\Phi(*)$ – стандартна кумулятивна функція нормального розподілу,
- $f_{T_Y}(t)$ – апроксимується як щільність в.в. $\frac{1}{\sqrt{Y}} f_{R\Gamma}(\frac{u-E(\sqrt{Y}-Y)}{\sqrt{Y}}, \frac{\nu}{2}, \frac{\delta^2}{2})$;

Для дослідження ризику за цією моделлю було використано величину $VaR(Value-at-Risk)$.

$$P(\Delta\nu \leq -VaR) = \alpha,$$

де α – рівень довіри, $\Delta\nu$ – зміна вартості портфеля до наступного торгового дня.

В результаті проведеного дослідження було обчислено значення VaR для різних Strike цін K і часу до здійснення call опціонів T компанії Tesla Inc. за період 10.02.2023–17.02.2023. Далі при порівнянні знайдених значень VaR і реальних цін call опціонів було отримано вибірку випадкової величини, яка є бінарною і описує чи перевищили втрати значення VaR . Далі ця величина порівнюється з тест-статистикою [2], з якої можна зробити висновок про ризики в моделі з активним ринковим часом.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] F. Castelli, N.N. Leonenko, N. Shchestyuk (2017) *Student-like models for risky asset with dependence* // Stochastic Analysis and Applications, 35:3, 452–464 p.
- [2] Christian Schittenkopf, Alfred Lehar, Martin Scheicher (2002) *GARCH vs Stochastic Volatility: Option Pricing and Risk Management*. — Journal of Banking & Finance, Volume 26, Issues 2–3, 323–345 p.

ДРОБОВЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ У ФІНАНСОВІЙ МАТЕМАТИЦІ

Д.Є. Зубріцька

(Національний університет «Киево-Могилянська академія», Київ, Україна)

Дана робота присвячена дослідженню аналітичних та наближених підходів до дробового числення та їх використання у фінансовій математиці. Ця тема стає все більш актуальною, оскільки зі збільшенням розрахункових можливостей комп'ютерів більшу точність моделювання фінансового ринку стає можливо досягти, що означає більш надійний та прозорий процес купівлі та продажу цінних паперів.

У роботі розглядаються аналітичні та наближені підходи до знаходження дробових диференціалів. На основі підходів Ейлера, Капуто та Рімана-Ліувілля розглядаються складнощі у розрахунках пов'язаних з даною сферою математики, а також наводяться приклади дробового диференціювання та відповідні графіки, виведені за допомогою Python та WolframAlpha для наступних простих функцій: x^n , e^x , $\sin(x)$.

Далі застосовується підхід Рімана-Ліувілля до дробового диференціювання (1) у сфері фінансової математики.

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}}. \quad (1)$$

Річ у тому, що поведінка фінансових ринків в деяких ситуаціях подібна у своїй природі до процесу знерухомлення субдифузійної частки й це дає можливість врахування так званих періодів “постійності” ціни на фінансових ринках.

Якщо для опису дифузійного процесу $Z(t)$ рівняння Фоккера-Планка має наступний вигляд:

$$\frac{df(x, \tau)}{d\tau} = - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} x f(x, \tau) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 f(x, \tau),$$

де $\frac{\partial}{\partial x} f(x, \tau)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, \tau)$ — часткові похідні від даної функції.

Тоді для опису процесу субдифузійної моделі $Z(S_\alpha(t))$, де $S_\alpha(t)$ називається hitting time (обернений субординатор), маємо фрактальне стохастичне дифрівняння:

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = {}_0 D_t^{1-\alpha} \left[- \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} x w(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 w(x, t) \right],$$

де ${}_0 D_t^{1-\alpha} (f)$ визначається формулою (1).

Hitting time (обернений субординатор) визначається як:

$$S_\alpha(t) = \inf \{ \tau > 0 : U_\alpha(\tau) > t \},$$

де $U_\alpha(t)$ — α -стабільний субординатор.

Тоді для обчислення справедливої ціни опціону колл у випадку $\alpha = 1/2$ у субдифузійній моделі Блека-Шоулза маємо [2]:

$$C_{BS}^{Sub}(S_0, K, x, \sigma) = \int_0^\infty C(S_0, K, x, \sigma) T^{-0.5} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} dx. \quad (2)$$

Для розрахунків формула (2) була імплементована у Python, за допомогою якого і були отримані результати для порівняння з класичною дифузійною моделлю Блека-Шоулза.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Mehdi D., Majid B. *Applications of fractional calculus* // Applied mathematical sciences — 2010. — Т. 145, № 1. — С. 1021–1032.
- [2] Magdziarz M. *Black-Scholes formula in subdiffusive regime* // Journal of statistical physics — 2009. — Т. 136, № 1. — С. 553–564.

ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ В БАГАТОКРОКОВИХ ІГРАХ ЗІ СКІНЧЕННИМ ГОРИЗОНТОМ

А.Ю. Коваленко

(*Національний університет «Киево-Могилянська академія», Київ, Україна*)

В межах даної роботи будуть розглянуті алгоритми, які використовуються для знаходження оптимальних стратегій для багатокрокових ігор зі скінченим горизонтом на прикладі конкретної гри. Для дослідження взяті алгоритм ітераційного методу для кількох ергодичних станів Рональда Говарда [1] та мінімакс алгоритм [2]. Також в роботі досліджуються можливі модифікації алгоритму ітераційного методу, які можуть збільшити ймовірність перемоги, при їх використанні.

Для тестування алгоритмів використаємо гру про переміщення жаб між лататтями, при стрибки на які вони будуть отримувати бали. Ці бали будуть з'являтися по ходу гри випадковим чином, а пересуватися жаби зможуть лише на 4 сусідніх латаття. Жаба перемагає тоді, коли збирає певну, однакову для всіх кількість балів.

В ході виконання роботи були отримані такі результати:

- (1) Ітераційний метод для конкретної гри має безліч недоліків, які вкрай складно виправити, але має доволі високу швидкість виконання.
- (2) Мінімакс алгоритм вимагає значно більше часу на виконання, але прораховує всі варіанти як для своїх ходів так і для ходів супротивника, тому завжди знаходить найоптимальніший варіант
- (3) Модифікації алгоритмів можуть позитивно впливати на результат його дії, якщо мінімізувати слабкі сторони алгоритму.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] R. A. Howard *Dynamic Programming and Markov Processes*.— 1960. — 160с.
- [2] P. Vadapalli *Min Max Algorithm in AI: Components, Properties, Advantages and Limitations*. "[Електронний ресурс]. — 2020. — Режим доступу до ресурсу: <https://www.upgrad.com/blog/min-max-algorithm-in-ai/>.

**ПРО ЗБІЖНІСТЬ В СЕРЕДНЬОМУ РЯДІВ ТЕЙЛОРА,
КОЕФІЦІЄНТИ ЯКИХ ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ
УМОВИ СІДОНА-ТЕЛЯКОВСЬКОГО**

Є.М. Окунєв, П.В. Задерей

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Функція $f(z), z \in D = \{|z| \leq 1\}$ належить класу $H_p, p \geq 1$, якщо [1]

$$\sup_{r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt < \infty.$$

Нехай послідовність $\{C_k\}, k = 0, 1, \dots$ задовольняє наступні умови:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = 0, \tag{1}$$

існують числа $\{A_k\}$, такі що

$$A_k \downarrow 0, \sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty. \tag{2}$$

Це означає, що послідовність $\{A_k\}$ прямує до нуля монотонно, і справджується, що

$$|\Delta C_k| < A_k, \forall k = 0, 1, \dots \tag{3}$$

Нехай числа послідовності $\{C_k\}$ задовольняють умову

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|C_k|}{k} < \infty. \tag{4}$$

Якщо виконані умови (1),(2),(3),(4) то кажуть, що послідовність $\{C_k\}$ задовольняє умови Сідона-Теляковського [2].

Зауваження 1. В [3] міститься інше формулювання умов Сідона-Теляковського:

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = 0$,
- 2) $|\Delta C_k| < A_k, \forall k = 0, 1, \dots$,
- 3) $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| < \infty$,
- 4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|C_k|}{k} < \infty$.

Ці набори умов на вигляд різні, але описують однакову множину рядів [3].

Ряд Тейлора функції $f(z) \in H_1$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k, z \in D, \quad (5)$$

збігається в середньому, тобто в метриці L , якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k e^{ikt} \right| dt = 0. \quad (6)$$

Зауваження 2. Нагадаємо, що нормований простір L , складається з таких $f(x)$, які є 2π -періодичними та інтегровними на \mathbb{R} .

В роботі встановлені умови на коефіцієнти ряду (1), при виконанні яких, має місце рівність (6).

Теорема 1. Якщо коефіцієнти ряду (1) задовольняють умови (1), (2), (3) і (4), то ряд (1) збігається в метриці L , тобто виконується рівність (6), тоді і тільки тоді, коли

$$|C_n| \ln n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Zygmund, A. (2002). Trigonometric series (Vol. 1). Cambridge university press.
- [2] Теляковский, С. А. (1973). Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов. Математические заметки, 14(3), 317-328.
- [3] Leindler, L. (2000). On the equivalence of classes of numerical sequences. Analysis Mathematica, 26(3), 227-234.

ЛОКАЛЬНА ПОВЕДІНКА СУБОРДИНАТОРА ДІКМАНА ТА ОБЕРНЕНОГО СУБОРДИНАТОРА ДІКМАНА

А.С. Ковтун, О.І. Клесов

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Означення 1. ([5]) Субординатором Дікмана будемо називати субординатор $X_\theta(t)$, $t \geq 0$, з характеристичною функцією вигляду

$$\mathbb{E}e^{iuX_t} = \exp\left(t \int_0^1 (e^{iux} - 1) \frac{dx}{x}\right), \quad (1)$$

де $\theta > 0$ — параметр.

Ми будемо розглядати асимптотичну поведінку субординатора Дікмана в околі 0. Розглядатимемо далі $X = -$ субординатор Дікмана з $\theta = 1$.

Згідно з Теоремою 9 ([2]) ми можемо стверджувати, що

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{X_t}{\exp\left(-\frac{1}{t^{1-\varepsilon}}\right)} = 0 \quad \text{м.н., } \varepsilon > 0, \quad (2)$$

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{X_t}{\exp\left(-\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right)} = \infty \quad \text{м.н., } \varepsilon \geq 0. \quad (3)$$

Теорема 1.

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log X_t|}{\log \frac{1}{t}} = 1 \quad \text{м.н.}$$

або

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} |\log X_t|^{\frac{1}{|\log t|}} = e \quad \text{м.н.}$$

Теорема 2. В доповненні до (2) можна довести, що

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{X_t}{\exp(-1/t)} = 0$$

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{X_t}{\exp\left(-\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right)} = \infty \quad \text{м.н..}$$

Означення 2. Для довільного субординатора X можемо визначити випадковий процес $Y = (Y_s, s \geq 0)$

$$Y_s = \inf\{t \geq 0 : X_t > s\}.$$

Процес Y будемо називати оберненим до X субординатором.

Теорема 3. *Позначимо тепер $D(s)$ — обернений субординатор Дікмана. Використовуючи той факт, що $\{X_t > s\} = \{D(s) \leq t\}$ можна довести, що*

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{|\log D(s)|}{\log \log \frac{1}{s}} = 1$$

або

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} |D(s)|^{(\log \log \frac{1}{s})^{-1}} = e$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Penrose, M. D, and A. R. Wade. Random minimal directed spanning trees and Dickman-type distributions, *Advances in Applied Probability*. 36.3 (2004): 691-714.
- [2] Bertoin, J. (1996) *Levy Processes*. Volume 121 of Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Applebaum, D. (2009). *Levy Processes and Stochastic Calculus* (2nd ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511809781
- [4] Caravenna, F., R. Sun, and N. Zygouras. Dickman subordinator, renewal theorems, and disordered systems, *Electronic Journal of Probability*. 24.none (2019): 101-140.
- [5] Covo, S. On Approximations of small jumps of subordinators with particular emphasis on a Dickman-type limit, *Journal of Applied Probability*. 46.3 (2009)

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ РЕКОРДІВ

О.В. Колеснік

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Нехай $\{X_k, k \geq 1\}$ — послідовність незалежних випадкових величин,
 $\alpha = \{\alpha_k, k \geq 1\}$ — додатні дійсні числа, F — неперервна функція розподілу. Розподіли випадкових величин X_k такі, що $P(X_k < x) = (F(x))^{\alpha_k}$. Така послідовність випадкових величин називається F^α -схемою.

Визначимо поняття моменту n -го рекорду $L(n)$ та кількості рекордів $\mu(n)$ до моменту n включно. Покладемо $L(1) = 1$ та

$$L(n) := \inf\{k > L(n-1) : X_k > X_{L(n-1)}\}, \mu(n) := \#\{k : L(k) \leq n\}.$$

Позначимо $A_n := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Накладаючи різні умови на зростання A_n можна отримати асимптотичні результати для $\mu(n)$. У роботі [1] розглянуто три випадки $p = 0, 0 < p < 1, p = 1$, коли $\frac{\alpha_n}{A_n} \rightarrow p$ і отримано виконання підсиленого закону великих чисел.

Було отримано узагальнення, коли відношення $\frac{\alpha_n}{A_n}$ має лише часткові границі за деяких умов на поведінку A_n на нескінченності.

Нехай $\lambda_n := -\ln(1 - \frac{\alpha_n}{A_n})$. $0 < l_1 < l_2 < \dots < l_m < \infty$ — всі часткові границі λ_n .
 $T_i(n) = \{k : k < n, |\lambda_k - l_i| < \varepsilon\}$, $\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{s < t} |l_s - l_t|$.

Нехай існують границі $\tau_i := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|T_i(n)|}{n}$. Тоді, майже напевно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n)}{\ln(A_n)} = \frac{\sum_{i=1}^m \tau_i (1 - \exp(-l_i))}{\sum_{i=1}^m \tau_i l_i}$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *P. Doukhan, O. I. Klesov, and J. G. Steinebach*, Strong Laws of Large Numbers in an F^α -Scheme, In: *Mathematical Statistics and Limit Theorems, Festschrift in Honour of Paul Deheuvels* (Eds.: M. Hallin, D.M. Mason, D. Pfeifer, J.G. Steinebach), pp. 287–303, Springer International Publishing, Switzerland, 2015.

ТРИ РІЗНІ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТІ КОШІ-ШВАРЦА

А.Ю. Кравець

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Теорема 1. *Нехай два набори чисел (a_1, a_2, \dots, a_n) , (b_1, b_2, \dots, b_n) такі, що $a_i \in \mathbb{R}$, $b_j \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, тоді виконується нерівність КБШ:*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Нерівність КБШ перетворюється в рівність у випадку колінеарності векторів $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ та $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ або якщо хоча б один з векторів є нульовим.

ДОВЕДЕННЯ 1. ВИКОРИСТОВУЮЧИ ДИСКРИМІНАНТ. Розглянемо вираз $(a_1 x - b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + \dots + (a_n x - b_n)^2 \geq 0$, розкривши дужки та зібравши подібні доданки, маємо квадратний тричлен

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq 0.$$

З невід'ємності якого випливає, що $D \leq 0$:

$$4(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0;$$

Зробивши елементарні перетворення, отримуємо нерівність КБШ:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Рівність досягається у випадку $D = 0$, тобто

$$(a_1 x - b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + \dots + (a_n x - b_n)^2 = 0;$$

$$a_i x - b_i = 0 \text{ для } i = \overline{1, n};$$

$\exists x_0 : b_i = x_0 \cdot a_i \forall i \in \overline{1, n}$, тобто a і b є колінеарними векторами.

ДОВЕДЕННЯ 2. ВИКОРИСТОВУЮЧИ СКАЛЯРНЕ МНОЖЕННЯ. Розглянемо вектори $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ та $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Маємо відому формулу для скалярного множення:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b);$$

$$(a \cdot b)^2 = |a|^2 \cdot |b|^2 \cdot \cos^2(a, b);$$

$$(a \cdot b)^2 \leq |a|^2 \cdot |b|^2.$$

Так як $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ та $|a|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, $|b|^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$, отримуємо нерівність КБШ:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Доведення 3. Використовуючи математичну індукцію. Доведемо нерівність КБШ методом математичної індукції. Випадок $n = 1$ тривіальний. Нерівність КБШ виконується при $n = 2$, оскільки

$$\begin{aligned} (a_1b_1 + a_2b_2)^2 &= a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 \leq \\ &\leq a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2), \end{aligned}$$

тобто маємо базу індукції при $n = 2$. При $n = k$ маємо припущення індукції:

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^k b_i^2 \right).$$

Використовуючи припущення індукції та базу індукції, маємо:

$$\begin{aligned} &\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2 + a_{k+1}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2 + b_{k+1}^2} \geq \\ &\geq \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2 + |a_{k+1}b_{k+1}|} \geq \sum_{i=1}^k |a_i b_i| + |a_{k+1}b_{k+1}| = \sum_{i=1}^{k+1} |a_i b_i|. \end{aligned}$$

Тобто нерівність КБШ доведено за допомогою методу математичної індукції.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Hui-Hua Wu, Shanhe Wu. *Various Proofs of the Cauchy-Schwarz inequality* // Octagon mathematical magazine. — 2009. — V. 17, No 1. — P. 221–229.

**SOFTWARE IMPLEMENTATION OF THE RUNGE-KUTTA METHOD
FOR SOLVING A LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS
OF THE THIRD ORDER**

O. Lobantsov, A. Chuikov

*(Separate structural subdivision «Kyiv Professional College
of Computer Technologies and Economics
of the National Aviation University», Kyiv, Ukraine)*

It is known that the Cauchy problem for a differential equation of the third order

$$y''' + py'' + qy' + ry = f(x), y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2,$$

where $p, q, r \in R$ can be reduced to the Cauchy problem for a system of differential equations, namely

$$\begin{cases} y' = u, \\ u' = v, \\ v' = f(x) - pv - qu - ty, \end{cases} \quad \begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ u(x_0) = y_1, \\ v(x_0) = y_2. \end{cases}$$

Then the formulas of the Runge-Kutta method have the form

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ u_{i+1} &= u_i + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4), \\ v_{i+1} &= v_i + \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4), \end{aligned}$$

where

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h, \\ k_1 = hu_i, \quad m_1 = hv_i, \\ s_1 = h(f(x_i) - pv_i - qu_i - ty_i), \\ k_2 = h(u_i + m_1/2), \quad m_2 = h(v_i + s_1/2), \\ s_2 = h(f(x_i + h/2) - p(v_i + m_1/2) - q(u_i + s_1/2) - r(y_i + k_1/2)), \\ k_3 = h(u_i + m_2/2), \quad m_3 = h(v_i + s_2/2), \\ s_3 = h(f(x_i + h/2) - p(v_i + m_2/2) - q(u_i + s_2/2) - r(y_i + k_2/2)), \\ k_4 = h(u_i + m_3), \quad m_4 = h(v_i + s_3), \\ s_4 = h(f(x_i + h) - p(v_i + m_3) - q(u_i + s_3) - r(y_i + k_3)). \end{cases}$$

Example 1. The numerical solution of the equation

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = x^2 \sin x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

on the interval $[0; 1]$ with step $h = 0,1$ is presented in the table 1.

Table 1. Comparison of numerical and analytical solutions

x_i	Numerical solution	Exact solution
0	1	1
0,1	1,2153	1,215296
0,2	1,462001	1,461989
0,3	1,740157	1,740131
0,4	2,047593	2,047546
0,5	2,378777	2,378697
0,6	2,723278	2,723148
0,7	3,063674	3,063471
0,8	3,37274	3,37243
0,9	3,609678	3,609216
1	3,715112	3,714433

The report will present a software implementation of the solution of a third-order inhomogeneous differential equations, written in the $C\#$ programming language. The interface of this program is presented in fig. 1.

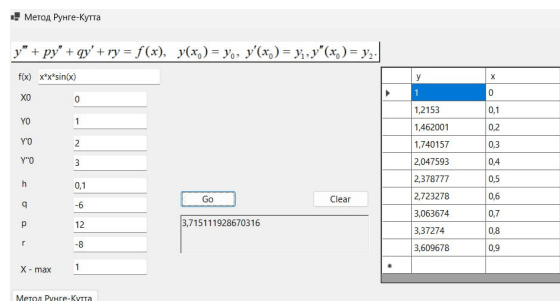


Рис. 1. Program interface

Examples of program implementation will be demonstrated.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] James F. Epperson *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*. — Hoboken, 2013. — 591 p.

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПОШИРЕННЯ ЕПІДЕМІЇ COVID-19 В УКРАЇНІ В УМОВАХ ВОЄННОГО СТАНУ

А.Ю. Ляпіна

(Національний університет «Киево-Могилянська академія», Київ, Україна)

У грудні 2019-го року була вперше виявлена коронавірусна хвороба. Хвороба розпочалася як спалах, що перетворився у пандемію. Пандемія мала і має значний вплив на життя людей за 2019 – 2023-і роки, як на світовому, так і на національному рівнях. Саме тому дослідники зі всього світу: Aniruddha Adiga [1], Gerardo Chowell [2], Muhammad Altaf Khan та Abdon Atangana [3] та багато інших, прагнуть якнайшвидше зрозуміти логіку вірусу: як він поширюється, побачити закономірність, аби будували математичні моделі, виявити завчасно піки захворюваності, та у свій час запровадити заходи безпеки, такі як: карантинні обмеження, вакцинація, належного дотримання гігієни та маскового режиму тощо.

Для побудови моделі за основу було взято модель **SIR** і розглянуто її варіацію **SEIRD**. Вона була уточнена і доповнена відповідно до умов воєнного стану в Україні.

Опишемо ці уточнення.

Позначення:

- $S(t)$ – кількість осіб, які ще не захворіли в момент часу t ,
- $E(t)$ – кількість осіб, які вже заразились, але ще не можуть заражати інших в момент часу t ,
- $I(t)$ – кількість інфікованих осіб в момент часу t ,
- $R(t)$ – кількість одужалих осіб від COVID-19 в момент часу t ,
- $D(t)$ – кількість померлих осіб від COVID-19 в момент часу t ,
- N – кількість населення України, що наразі перебуває на території України.

Зауваження 1. Група I розділяється на дві частини:

- i_1 – кількість людей, які не ігнорують свої симптоми та звертаються до лікаря або самі лікуються,
- i_2 – кількість людей, які ігнорують свої симптоми з тих або інших причин, продовжуючи інфікувати інших.

Зауваження 2. Група N також розділяється на дві частини:

- n_1 – кількість людей, які перебувають вдома,
- n_2 – кількість людей, які переїхали закордон у якості біженців.

Тоді математична модель буде задаватись системою з наступних диференціальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\alpha S(t)(i_1+i_2)}{N} \\ \frac{dE(t)}{dt} = \frac{\alpha S(t)(i_1+i_2)}{N} - \gamma E(t) \\ \frac{dI_1(t)}{dt} = \rho\gamma E(t) - \sigma_1 i_1 - \xi_1 i_1 \\ \frac{dI_2(t)}{dt} = (1-\rho)\gamma E(t) - \sigma_2 i_2 - \xi_2 i_2 \\ \frac{dR(t)}{dt} = \sigma_1 i_1 + \sigma_2 i_2 \\ \frac{dD(t)}{dt} = \xi_1 i_1 + \xi_2 i_2 \\ n_1 = S(t) + E(t) + (1-\sigma_1) i_1 \\ n_2 = (1-\alpha)(1-\sigma_2) i_2 \\ S(t) + E(t) + I_1(t) + I_2(t) + R(t) + D(t) = n_1 + n_2 \end{array} \right.$$

Де:

- α – швидкість, з якою передається інфекційне захворювання,
- γ – інкубаційний період,
- ξ_1 та ξ_2 – середня швидкість одужання людей, що не ігнорують та ігнорують симптоми відповідно,
- ρ – частка людей, що ізолюються після прояву симптомів,
- σ_1 та σ_2 – швидкість, з якою поновлюється хворий, що не ігнорує та ігнорує симптоми відповідно.

Таким чином, дана математична модель описує поширення COVID-19 в Україні, враховуючи людей, що ігнорують симптоми та тих, хто виїхав.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Adiga, Aniruddha "Mathematical models for covid-19 pandemic: a comparative analysis." // Journal of the Indian Institute of Science—2020.— P. 793–807.
- [2] Chowell, Gerardo "Mathematical models to characterize early epidemic growth: A review." // Physics of life reviews—2016— P. 66-97.
- [3] Khan, Muhammad Altaf, and Abdon Atangana "Mathematical modeling and analysis of COVID-19: A study of new variant Omicron." // Statistical Mechanics and its Applications—2022.

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК ПОЛІНОМІВ ЧЕБИШЕВА ТА ЛЕЖАНДРА

О.О. Міняєв, А.В. Сиротенко

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Розглянемо поліноми Лежандра і поліноми Чебишева. Поліноми Лежандра – ортогональні поліноми на відрізку $[-1; 1]$. Поліноми Лежандра отримуються з системи поліномів $1, x, x^2, x^3, \dots$ за допомогою процесу ортогоналізації Грама-Шмідта. Також, поліноми Лежандра можна отримати за допомогою явної формули:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n; n \in \mathbb{N}.$$

Перші 4 поліноми Лежандра мають вигляд:

$$P_0(x) = 1; P_1(x) = x; P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

Генератриса для поліномів Лежандра:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}. \quad (1)$$

Поліноми Чебишева – це послідовність поліномів $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ і $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Відповідно поліном $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ називають поліномом Чебишева 1-го а $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – поліномом 2-го роду. Поліноми Чебишева теж є ортогональними поліномами з ваговою функцією $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Поліноми Чебишева першого роду визначаються як:

$$T_0(x) = 0; T_n(x) = \cos(n \arccos(x)); n \in \mathbb{N}.$$

Перші чотири поліноми Чебишева мають наступний вигляд:

$$T_0(x) = 1; T_1(x) = x; T_2(x) = 2x^2 - 1; T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Генератриса для поліномів Чебишева першого роду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = \frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2}. \quad (2)$$

Використовуючи генератриси (1) і (2) знайдемо явну формулу для знаходження поліномів Чебишева через поліноми Лежандра. Зведемо генератрису для поліномів Лежандра до генератриси для поліному Чебишева. Для цього піднесемо праву частину

(1) до квадрату та домножимо на $(1 - tx)$. Використовуючи операцію множення рядів за Коші та деякі перетворення отримаємо наступне:

$$\begin{aligned}
(1 - tx) \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \right)^2 &= (1 - tx) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (P_k(x) t^k \cdot P_{n-k}(x) t^{n-k}) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (P_k(x) P_{n-k}(x) t^n) - \sum_{k=0}^n (x P_k(x) P_{n-k}(x) t^{n+1}) \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (P_k(x) P_{n-k}(x) t^n) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (x P_k(x) P_{n-k}(x) t^{n+1}) = \\
&= P_0^2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n (P_k(x) P_{n-k}(x) t^n) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (x P_k(x) P_{n-k-1}(x) t^n) = \\
&= P_0^2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (P_k(x) P_{n-k}(x)) - \sum_{k=0}^{n-1} (x P_k(x) P_{n-k-1}(x)) \right) t^n.
\end{aligned}$$

Звідси можемо порівняти коефіцієнти при однакових степенях t :

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^n (P_k(x) P_{n-k}(x)) - \sum_{k=0}^{n-1} (x P_k(x) P_{n-k-1}(x)) \\
T_0(x) &= P_0(x)^2.
\end{aligned}$$

Не складно перевірити, що отримана рівність виконується. Перевіримо для $n = 1, 2$:

$$T_1(x) = P_0(x) P_1(x) + P_1(x) P_0(x) - x P_0(x) P_0(x)$$

$$T_1(x) = 1 \cdot x + 1 \cdot x - x \cdot 1 \cdot 1 = x$$

$$T_2(x) = P_0(x) P_2(x) + P_1^2(x) + P_2(x) P_0(x) - x P_0(x) P_1(x) - x P_1(x) P_0(x)$$

$$T_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) + x^2 + \frac{1}{2}(3x^2 - 1) - x^2 - x^2 = 2x^2 - 1.$$

Неважко перевірити, що для інших n отримана рівність теж виконується.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Szegő, Gábor (1975) *Orthogonal polynomials (4th ed.)*. // American Mathematical Society. pp. 194
- [2] Elliott, David (1964). *The evaluation and estimation of the coefficients in the Chebyshev Series expansion of a function*!. Math. Comp. 18 (86): 274-284.

ЕРГОДИЧНІСТЬ ПРОЦЕСІВ ТИПУ ЛЕВІ НА ПРЯМІЙ

Я.Г. Мокану

(КНУ імені Т.Г. Шевченка, Київ, Україна)

Метою даної праці є надання достатніх умов ергодичності процесу типу Леві, чий феллерівський генератор, визначений на тестових функціях з $C_\infty^2(\mathbb{R})$, має вигляд

$$Lf(x) = a(x)f'(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (f(x+u) - f(x) - uf'(x) \mathbf{1}_{|u| \leq 1}) \nu(x, du),$$

де $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — дріфт, $\nu(x, du)$ — ядро типу Леві, тобто

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \min\{1, u^2\} \nu(x, du) < \infty \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}.$$

Розглядаються випадки, коли хвости міри $\nu(x, \cdot)$ спадають поліноміально, експоненційно та суб-експоненційно.

Також, припускається, що міра $\nu(x, \cdot)$ є симетричною при кожному значенні x , тобто $\nu(x, A) = \nu(x, -A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\{0\} \notin A$.

За критерієм Фостера-Ляпунова, якщо виконано наведені вище умови та деякі додаткові припущення на дріфт, то відповідний процес є ергодичним, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|P_t(x, \cdot) - \mu(\cdot)\|_{TV} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

де μ — деяка інваріантна ймовірнісна міра, P_t — ймовірнісна міра процесу, а $\|\cdot\|_{TV}$ — норма в повній варіації.

Доповідь спирається на результати сумісної праці з В.П. Кноповою [1].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] V. Knopova, Y. Mokanu. *On ergodic properties of some Lévy-type processes* // arXiv:2208.12056v1 — 2022.
- [2] A. Kulik. *Ergodic Behaviour of Markov Processes*. — Berlin: de Gruyter, 2017.
- [3] S.P. Meyn, R.L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability* — Springer, 1993.
- [4] N. Sandrić. *Long-time behavior of stable-like processes* // Stoch. Proc. Appl. 123 — 2013.

ГЕОМЕТРИЧНИЙ ПІДХІД ДО ЗНАХОДЖЕННЯ СУМИ СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ

А.С. Пархоменко, Л.А. Репета

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Математика - наука, що дозволяє всі об'єкти, навіть на перший погляд здавалось би не тривіальні, об'єднати в цілісну картину. Кожну теорему, явище, будь-який математичний висновок можна побачити у несподіваних ітераціях та виглядах. Такий випадок представлено у роботі, а саме - геометричний підхід до знаходження суми степеневого ряду.

Вперше ми знайомимося з поняттям *ряд* ще в курсі шкільної програми - це нескінченно спадна *геометрична прогресія*. Далі, строге поняття дається в курсі математичного аналізу, пояснюючи що прогресії, у яких члени містять степені змінної x , є частинним випадком *степеневого ряду*:

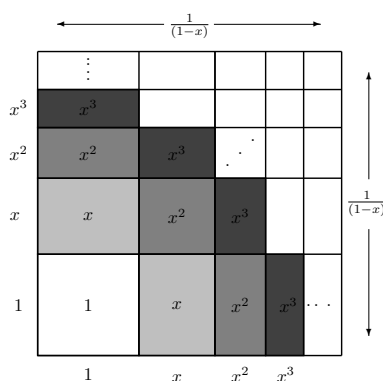
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Якщо всі $a_n = 1$, то даний ряд є геометричною прогресією, де перший член дорівнює 1, а кожен наступний множиться на x . У випадку, коли $|x| < 1$, сумою данного ряду є дріб $\frac{1}{1-x}$. Тобто

$$1 + x + x^2 + x^3 \dots = \frac{1}{(1-x)}, |x| < 1.$$

Побудуємо квадрат зі стороною $a = 1 + x + x^2 + x^3 \dots = \frac{1}{(1-x)}$, як показано на рисунку. Тоді площа квадрата дорівнює

$$S = a^2 = (1 + x + x^2 + \dots) \cdot (1 + x + x^2 + \dots) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$



З іншої сторони, площа квадрата складається з суми площ внутрішніх квадратів і прямокутників:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Цей результат можна отримати диференціюванням лівої і правої частини рівності

$$\frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) \iff 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Строге доведення можливості почленного диференціювання функціонального ряду дає теорема про почленне диференціювання: якщо члени збіжного ряду мають неперервні на $[a; b]$ похідні, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ збігається рівномірно на відрізку $[a; b]$, то вихідний ряд на цьому відрізку можна почленно диференціювати, тобто:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x), x \in [a; b]$$

Геометричний підхід знаходження суми степеневого ряду дозволяє наочно представити і краще зрозуміти, як утворюється сума ряду:

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Mabry, R. *Mathematics without words* — p. 19, College Mathematics Journal, 2001.
 [2] Klein, B., Bivens, I. *Proof without words* — p. 219, Mathematics Magazine, 1988.

АСИМПТОТИЧНА ФОРМУЛА ДЛЯ ІНТЕГРАЛА ВІД МОДУЛЯ ФУНКЦІЇ, ЗАДАНОЇ РЯДОМ ТЕЙЛОРА

О.О. Плугатор, П.В. Задерей

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Встановимо асимптотичну формулу для інтеграла

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it})| dt,$$

де

$$f(re^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

Припускаємо, що коефіцієнти $c_k \in \mathbb{C}$ задовольняють умову Сідона–Теляковського, тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0, \tag{1}$$

існують числа A_k , що

$$A_k \downarrow 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty, \tag{2}$$

$$|\Delta c_k| < A_k, \quad \text{для } \forall k, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} < \infty. \tag{4}$$

Де, як відомо, $f(re^{it}) \in H_1$ (класу Гарді)

Теорема 1. *Якщо коефіцієнти c_k ряду Тейлора функції $f(z) \in H_1 = \{f(z) - \text{аналітична в } D \text{ і } \sup_{r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| dt < \infty\}$ задовольняють умови (1)–(4), то для інтеграла*

$$I = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} \right| dt$$

рівномірно відносно $m = 0, 1, \dots$ справедлива асимптотична рівність

$$I = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} (|c_k| + |c_{m-k} - c_{m+k}|) E_{m,k}(c) + 2 \sum_{k=2m+1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} + O(T_m(A)),$$

де

$$E_{m,k}(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 4 \frac{|c_k| \cdot |c_{m-k} - c_{m+k}|}{(|c_k| + |c_{m-k} - c_{m+k}|)^2} \sin^2 t} dt,$$

$$T_m(A) = \sum_{k=0}^m A_k + 2A_{m+1} + \sum_{k=m+2}^{\infty} A_k.$$

Для доведення теореми використовували твердження, яке має і самостійний інтерес:

Лема 1. *Нехай $a, b \in \mathbb{C}$. Тоді справедлива рівність:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |a + be^{it}| dt = 4(|a| + |b|) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 4 \frac{|a| \cdot |b|}{(|a| + |b|)^2} \sin^2 t} dt.$$

У статті О.В.Єфімова [2] доведено, що

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^n c_k e^{ikt} \right| dt \leq K \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k)}{n+1} |\Delta^2 c_k| + \sum_{k=1}^n \frac{|c_k| + |c_{k-n}|}{k} \right).$$

М.В.Гаєвський і П.В.Задерей [3] установили асимптотичну рівність для інтеграла від модуля тригонометричного полінома

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikt} \right| dt &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} (|c_k| + |c_{n-k}|) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 4 \frac{|c_k| \cdot |c_{n-k}|}{(|c_k| + |c_{n-k}|)^2} \sin^2 t} dt + \\ &+ O \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n} |\Delta^2 c_{k-1}| \right). \end{aligned}$$

Доведена теорема (1) узагальнює приведені вище результати.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Задерей П., Гаєвський М., Веремій М. *Асимптотична формула для інтеграла від модуля функції, заданої рядом Фур'є* // Вісник КНУ ім.Т.Шевченка — 2017., № 1(37). — С. 10–17.
- [2] Ефімов А.В. *Оценка интеграла от модуля многочлена единичной окружности* // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 15, № 4. — С. 215–218.
- [3] Гаєвський М.В. *Оцінки інтеграла від модуля многочлена на одиничному колі* / М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Всеукраїнська літня науково-методична мат. шк. "Математичний аналіз та теорія ймовірностей" — 4–7 липня 2013 р., с. Плюти, Україна: Тези доповідей. — К.:НТУУ "КПР", — 2013

ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ БАУМА-КАЦА ДЛЯ СУМ ЕЛЕМЕНТІВ ЛІНІЙНИХ АВТОРЕГРЕСІЙНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

А.Ю. Поліщук, М.К. Ільєнко

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ задано послідовність випадкових величин $(\xi_k, k \geq 1)$

$$\xi_{-1} = 0, \quad \xi_0 = 0, \quad \xi_k = a\xi_{k-1} + b\xi_{k-2} + \theta_k, \quad k \geq 1, \quad (1)$$

де a, b деякі дійсні числа, (θ_k) – послідовність незалежних копій випадкової величини θ . Для елементів послідовності (1) позначимо

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \geq 1,$$

і для будь-якого $\varepsilon > 0$ розглянемо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2} \mathbb{P} \left\{ \frac{|S_n|}{n^{\frac{1}{p}}} > \varepsilon \right\}, \quad (2)$$

де $0 < p < 2$ і $r \geq p$. У роботі вивчаються умови збіжності ряду (2).

Теорема 1. *Нехай в (1)*

$$-1 < b < 1 - |a|,$$

і $0 < p < 2$, $r \geq p$. Якщо $\mathbb{E}|\theta|^r < \infty$, де $\mathbb{E}\theta = 0$ для $r \geq 1$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2} \mathbb{P} \left\{ \frac{|S_n|}{n^{\frac{1}{p}}} > \varepsilon \right\} < \infty.$$

Доповідь базується на результатах, отриманих у роботі [1].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Пієнко М.К., Поліщук А.Ю. *On the convergence of Baum-Katz series for sums of linear 2-nd order autoregressive sequences* // Наук. вісник Ужгород. ун-ту — 2022. — Т. 41, № 2. — р. 41–47.

ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ В ЗАДАЧАХ КЕРУВАННЯ ВИПАДКОВИМИ ПОТОКАМИ В МЕРЕЖІ

Д.Ю. Случинський

(Національний університет «Киево-Могилянська академія», Київ, Україна)

В роботі запропонована програмна реалізація для моделі циклічних черг, яка представлена в четвертій частині статті про керовані Марковські поля зі скінченним простором станів на графах авторів Р. К. Чорнея, Г. Дадуни та П. С. Кнопова [1]. Моделью є система циклічних пронумерованих вузлів $J \geq 2$. Кожен вузол має необмежену чергу, а вхідні вимоги обслуговуються за методом First-Come-First-Served (Перший прийшов - перший обслуговується). В системі завжди рухатимуться $K \geq 1$ вимог. Після того, як вимога залишила вузол j , вона переходить у вузол $j + 1$, причому через закненість системи, досягнувши кінця системи, вимога повертається в початок. Локальні особи приймають рішення на вузлах залежно від навантаження системи. З цих рішень складається глобальна стратегія. Метою є знаходження оптимальної локальної стратегії в класі стаціонарних Марковських стратегій за допомогою ітеративного алгоритму пошуку оптимальної стратегії.

Програма написана на мові програмування Python з використанням бібліотек:

- NumPy - додає підтримку складних багатопарових масивів і матриць та математичних функцій для операцій з цими масивами.
- Itertools - реалізує складні ітератори.
- Random - реалізує генератори псевдовипадкових чисел для різних розподілів.
- Tkinter - слугує для створення програм з графічним інтерфейсом.

Додатково було додано графічний інтерфейс для легшого вводу та отримання даних користувачем.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ruslan K. Chorney, Hans Daduna V. M., and Pavel S. Knopov. Controlled markov fields with finite state space on graphs. *Stochastic Models*, 21(4):847–874, 2005.

**ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ТОЧКОВИХ ПРОЦЕСІВ
ПОВ'ЯЗАНИХ ІЗ УЗАГАЛЬНЕНОЮ ЗАДАЧЕЮ
ПРО ДНІ НАРОДЖЕННЯ**

В.В. Стаматієва

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Задача про дні народження є однією з класичних задач комбінаторної теорії ймовірностей. Наведемо одне з її численних формулювань у вигляді, зручному для подальших узагальнень.

Розглянемо достатньо велику множину людей, які в послідовні цілі моменти часу один за одним заходять до кімнати. Позначимо через $T_1^{(365)}$ (випадковий) момент часу, коли до кімнати вперше зайшла людина, день народження якої збігається з днем народження когось з вже присутніх. Тут верхній індекс показує загальну кількість різних можливих днів народження (всі роки вважаються невисокосними), а нижній означає, що достатньо збігу з днем народження лише *одного* з присутніх. Задача полягає у визначенні різних характеристик величини $T_1^{(365)}$ та їх узагальнень. Для повноти викладу наведемо початок класичного асимптотичного розкладу Рамануджана-Ватсона-Кнута, який в наших позначеннях матиме вигляд

$$\mathbb{E}T_1^{(n)} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} - \frac{4}{135n} + \dots \quad (1)$$

Узагальнену задачу про дні народження можна сформулювати в такий спосіб. Розглянемо нескінченну послідовність об'єктів (наприклад, людей), кожний з яких незалежно від інших з однаковими ймовірностями $\frac{1}{n}$ належить до одного з n класів (наприклад, народжений в один з $n = 365$ днів року). Об'єкти надходять один за одним у послідовні цілі моменти часу. Для фіксованого r розглянемо випадкову величину $T_r^{(n)}$, яка задає перший момент часу, коли деякий з класів з'явився в $(r+1)$ -й раз. Будемо розглядати ситуацію, коли r — фіксоване, а $n \rightarrow \infty$. Зокрема, $T_0^{(n)} = 1$, а $T_1^{(365)}$ відповідає класичній постановці даної задачі.

Ми цікавимося асимптотичною поведінкою величин $T_r^{(n)}$, або, більш точно, встановленням їх граничних розподілів при $n \rightarrow \infty$ та відповідних нормувань.

Одним з перспективних підходів при доведенні граничних теорем для розподілів $T_r^{(n)}$ є застосування теорії “грубої” (vague) збіжності випадкових точкових мір. У контексті спорідненої задачі збирача купонів цей метод було запропоновано в [1] та розвинуто в [2]. Основою цього підходу є доведення збіжності за розподілом у грубій

топології точкових процесів $\xi_r^{(n)}$, пов'язаних з моментами надходжень $(r+1)$ -их представників усіх типів, до деякого граничного процесу ξ_r . Надалі ми позначатимемо цю збіжність як $\xi_r^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{vd} \xi_r$.

Отримані нами в цьому напрямку результати сформулюємо у вигляді такого твердження.

Теорема 1. *Нехай $Y_{i,r}^{(n)}$, $i = 1, \dots, n$, є моментом надходження $(r+1)$ -го представника i -го типу, а δ_a означає одиничну міру, зосереджену в точці a . Уведемо на \mathbb{R} точковий процес*

$$\xi_r^{(n)} = \sum_{i=1}^n \delta_{n^{-\frac{r}{r+1}} Y_{i,r}^{(n)}},$$

а через ξ_r позначимо точковий процес Пуассона з мірою інтенсивності

$$\lambda_r(dx) = \frac{x^r}{r!} \cdot 1\{x \geq 0\} dx.$$

Тоді $\xi_r^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{vd} \xi_r$.

Зокрема, з цього результату було отримано граничну теорему для величин $T_r^{(n)} = \min_{i=1, \dots, n} Y_{i,r}^{(n)}$ (див. [3]).

Теорема 2. $n^{-\frac{r}{r+1}} T_r^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \rho$, де $f_\rho(x) = \frac{x^r}{r!} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}}$, $x \geq 0$.

У перспективі планується узагальнити наведений вище розклад (1) на випадок довільного r .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Glavaš, Mladenović Pavle. New limit results related to the coupon collector's problem // Stud. Sci. Math. Hung. — 2018. — Vol. 55, no. 1. — P. 115–140.
- [2] Пienko Andrii. Convergence of point processes associated with coupon collector's and Dixie cup problems // Electron. Commun. Probab. — 2019. — Vol. 24. — P. 9–Id/No 51.
- [3] Льенко А.Б., Стататієва В.В. Гранична теорема для точкових процесів, пов'язаних з узагальненою задачею про дні народження // Науковий вісник Ужгородського університету. — Vol. 39, no. 2. — P. 38–46.

АНАЛІЗ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ШКІЛЬНОЮ УСПІШНІСТЮ ТА РЕЗУЛЬТАТАМИ ЗНО УЧНІВ (НА ПРИКЛАДІ ШКІЛ м.БУЧА)

Г.В. Тарасенко, Ю.П. Буценко

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Пропонується аналізувати результат ЗНО в залежності від шкільної оцінки на основі регресійного співвідношення. Якщо перед побудовою регресійної моделі звести до однакових шкал оцінки учнів на цих двох різних випробуваннях, то в ідеальному випадку коефіцієнти a_0 та a_1 набудуть значень 0 та 1, відповідно дослідження рівнянь регресії дозволить аналізувати тенденцію оцінювання учнів у школі.

Для регресійної моделі вигляду $y = a_0 + a_1 \times x$ можемо записати таку рівність $\frac{y}{x} = \frac{a_0}{x} + a_1$. З неї випливає два твердження:

Твердження 1. Коефіцієнт a_0 пов'язаний у регресійному співвідношенні із рівнем вимогливості щодо більш високих балів.

Твердження 2. Коефіцієнт a_1 пов'язаний із загальною вимогливістю до всієї шкали оцінок.

Також для нашої моделі можемо записати таку рівність $y - x = a_0 + (a_1 - 1) \times x$. З неї випливає ще одне твердження:

Твердження 3. Для всіх моделей існують проміжки, на яких оцінки завищуються, та ті, на яких оцінки занижуються, межа між ними — деяке значення $x_{\text{меж}} = \frac{a_0}{1-a_1}$. Це значення може потрапляти до інтервалу можливих оцінок або ж ні.

Базуючись на цих твердженнях, а також на методах кореляційного та регресійного аналізу можна проводити перевірку навчальних закладів або їх груп з достатньо великою кількістю учнів щодо підходів вчителів до оцінювання учнів. Це допоможе покращувати підготовку учнів та ефективно прогнозувати їхні оцінки спираючись на дослідження результатів здобувачів освіти минулих років.

ВЛАСТИВОСТІ ЗВАЖЕНИХ СУМ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ІЗ КЛАСІВ $V(\varphi, \psi)$

Д.В. Тихоненко, Р.Є. Ямненко

(КНУ імені Т.Г. Шевченка, Київ, Україна)

Вивчається оцінка ймовірності виходу суми зважених деякими неперервними функціями $w_i(t)$ незалежних випадкових процесів $\{X_i(t), t \in T\}$ із класів $V(\varphi, \psi)$, означених на компактній множині, за рівень $\epsilon > 0$, заданий деякою непервною кривою $\{f(t), t \in T\}$, що монотонно зростає. Тобто ми досліджуємо таку ймовірність

$$P \left(\sup_{t \in T} \left[\sum_i w_i(t) X_i(t) - f(t) \right] > \epsilon \right).$$

Клас $V(\varphi, \psi)$ містить ψ -субгауссові випадкові процеси, природи яких є φ -субгауссовими, де N -функція Орліча φ підпорядкована N -функції Орліча ψ .

Властивості φ -субгауссових випадкових величин було розглянуто в книзі [1]. Отримана оцінка узагальнює узагальнює результати, отримані в роботах [2, 3].

Як приклад, розглядається зважена лінійними ваговими функціями сума процесів узагальненого субгауссового процесу дробового броунівського руху. Надалі задача оцінки такої ймовірності буде поширена для інших типів процесів та випадкових полів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є. φ -субгауссові випадкові процеси: монографія, – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008. – 231 с.
- [2] Р. Ямненко. Про ймовірність виходу траєкторій φ -субгауссового випадкового процесу за криву // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки, №3, 2004, с. 82 – 86.
- [3] Kozachenko, Yu., Yamnenko, R. Application of φ -sub-Gaussian random processes in Queuing Theory // Modern trends in Stochastics (Springer Optimization and Its Applications), 2014, – pp. 21 – 38.

**THE KORTWEG-DE VRIES EQUATION
AND COMPATIBILITY OF SYSTEM
OF TWO AUXILIARY LINEAR EQUATIONS**

A. Tsukanova

(Igor Sikorsky Kiev Polytechnic Institute, Kiev, Ukraine)

Since new equations of the Kortweg-de Vries type have been discovered, number of searches how to integrate them have been made. According to one of them, the Kortweg-de Vries equation of the form

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} \quad (1)$$

is interpreted as a condition for the compatibility of the system

$$-\Psi_{xx} + u\Psi = \lambda\Psi, \quad (2)$$

$$\Psi_t = -4\Psi_{xxx} + 6u\Psi_x + 3u_x\Psi. \quad (3)$$

(2) is the spectral problem for one-dimensional Schrödinger operator with the potential $u = u(x, t)$, depending on time as a parameter. It is called an auxiliary linear problem for the considered nonlinear equation (1). The potential u in the problem (2) is identified with the solution of the Kortweg-de Vries equation. The second auxiliary linear equation (3) determines the evolution of the eigenfunction in time. The transformation of the Kortweg-de Vries equation to such a system of two equations is called the inverse scattering method, since it uses the solution of the quantum mechanics problem of reconstructing the potential from some scattering data.

The equation (2) is covariant with respect to the action of the Darboux transformation according to the Darboux theorem, a similar statement can be proved for (3). The covariance of the system (2), (3) makes it possible to find new solutions to the Kortweg-de Vries equation, starting from a known solution u , for which this system can be solved explicitly. In fact, it follows from the Darboux covariance that the function

$$\Psi[1] = \Psi_x - (\ln\Psi_1)_x \Psi = \Psi_x - \frac{\Psi_{1x}}{\Psi_1} \Psi = \frac{\Psi_1 \Psi_x - \Psi_{1x} \Psi}{\Psi_1} = \frac{W[\Psi_1, \Psi]}{\Psi_1},$$

where $\Psi_1 = \Psi(\lambda_1, x)$ and Ψ are some known solutions to (2), (3), satisfies the similar system

$$-\Psi_{xx}[1] + u[1]\Psi[1] = \lambda\Psi[1],$$

$$\Psi_t[1] = -4\Psi_{xxx}[1] + 6u[1]\Psi_x[1] + 3u_x[1]\Psi[1].$$

The consistency of this system for shows that $u[1] = u - 2(\ln\Psi_1)_{xx}$ is a new solution of equation (1). Considering the N -fold, $N > 1$, Darboux transformation in a similar way, we obtain an infinite series $u[2] = u - 2(\ln W[\Psi_1, \Psi_2])_{xx}$, $u[3] = u - 2(\ln W[\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3])_{xx}$, ... of solutions to equation (1).

So, using the Darboux transformation, we can obtain all solitary solutions u of the nonlinear equation (1), which are identified with a series of potentials of the one-dimensional Schrödinger operator in the Sturm-Liouville problem for eigenfunctions and eigenvalues. This method makes it possible to construct new solutions of (1) with the help of the known one.

We have considered two cases: $N = 1$ and $N = 2$. Namely, we have put $u = 0$, $\Psi_1 = ch[\kappa_1(x - x_1) - 4\kappa_1^3 t]$, $\lambda = -\kappa_1^2$ for $N = 1$ and have obtained

$$\begin{aligned} u[1] &= -2(\ln\Psi_1)_{xx} = -2\left(\kappa_1 \frac{sh[\kappa_1(x - x_1) - 4\kappa_1^3 t]}{ch[\kappa_1(x - x_1) - 4\kappa_1^3 t]}\right)_x = \\ &= -2(\kappa_1 th[\kappa_1(x - x_1) - 4\kappa_1^3 t])_x = -\frac{2\kappa_1^2}{ch^2[\kappa_1(x - x_1) - 4\kappa_1^3 t]}. \end{aligned}$$

This function describes the propagation of one-solitary wave moving with velocity $4\kappa_1^2$ and having a proportional to this velocity amplitude $2\kappa_1^2$.

We have put $u = 0$, $\Psi_1 = ch[\kappa_1(x - x_1) - 4\kappa_1^3 t]$, $\Psi_2 = sh[\kappa_2(x - x_2) - 4\kappa_2^3 t]$, $\lambda = -\kappa_2^2$, $\kappa_1 \leq \kappa_2$, for $N = 2$ and have obtained two-solitary solution to (1)

$$\begin{aligned} u[2] &= -2(\ln W[\Psi_1, \Psi_2])_{xx} = -2\left(\frac{W_x[\Psi_1, \Psi_2]}{W[\Psi_1, \Psi_2]}\right)_x = \\ &= -2\frac{W_{xx}[\Psi_1, \Psi_2]W[\Psi_1, \Psi_2] - (W_x[\Psi_1, \Psi_2])^2}{W^2[\Psi_1, \Psi_2]} = \\ &= -2(\kappa_2^2 - \kappa_1^2)(\kappa_1^2 sh^2[\kappa_2(x - x_2) - 4\kappa_2^3 t] + \kappa_2^2 ch^2[\kappa_1(x - x_1) - 4\kappa_1^3 t]) \times \\ &\quad \times (\kappa_2 ch[\kappa_1(x - x_1) - 4\kappa_1^3 t] ch[\kappa_2(x - x_2) - 4\kappa_2^3 t] - \\ &\quad - \kappa_1 sh[\kappa_1(x - x_1) - 4\kappa_1^3 t] sh[\kappa_2(x - x_2) - 4\kappa_2^3 t])^{-2}. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ablowitz M., Sigur H. *Solitons and the Inverse Problem Method (in Russian)* — M.: Mir, 1987. — 479 p.
- [2] Matveev V. B., Salle M. A. *Darboux Transformations and Solitons*. — Berlin: Springer, 1991. — 120 p.
- [3] Zakhariev B. N., Chabanov V. M. *Obedient Quantum Mechanics. New Status of Theory in the Inverse Problem Approach (in Russian)* — Moscow: Institute of Computer Research, 2002. — 300 p.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРШОГО РОДУ

Д.А. Чаус, П.В. Задерей

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Лінійним рівнянням Вольтерра першого роду називається рівняння типу

$$\phi(t) = \lambda \int_0^t k(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (1)$$

де $\phi(t)$ — відома функція, λ — числовий параметр, $k(t, \tau)$ — ядро інтегрального рівняння і є заданим, $f(t)$ — невідома функція.

Інтегральні рівняння типу Вольтерра описують математичні моделі фізичних і технічних задач реальних процесів [1],[2].

Якщо ядро $k(t, \tau)$ залежить тільки від різниці $t - \tau$, тобто $k(t, \tau) = k(t - \tau)$, то інтеграл

$$\int_0^t k(t - \tau) f(\tau) d\tau = k(t) * f(t)$$

є згортокою функцій $k(t)$ і $f(t)$.

В цьому випадку рівняння (1) називається інтегральним рівнянням типу згортки.

Йому в просторі зображень відповідає операторне рівняння

$$\Phi(p) = \lambda K(p) F(p),$$

розв'язок якого

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{\lambda K(p)}$$

не завжди можна перевести за допомогою теореми множення в простір оригіналів, бо функція $\frac{1}{K(p)}$ не є зображенням.

Але в деяких випадках інтегральне рівняння Вольтерра першого роду має розв'язок.

Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра першого роду

$$t^4 = \int_0^t (2t^3 - 3t^2\tau + \tau^3) f(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Перепишемо його в наступному вигляді:

$$t^4 = 2 \int_0^t (t - \tau)^3 f(\tau) d\tau + 3 \int_0^t (t - \tau)^2 \tau f(\tau) d\tau.$$

Перейшовши в простір образів, отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{24}{p^5} = \frac{12F(p)}{p^4} - \frac{6F'(p)}{p^3},$$

розв'язком якого є сімейство функцій вигляду

$$F(p) = \frac{4}{3p} + Cp^2.$$

Повернувшись в простір оригіналів, отримаємо, що розв'язок треба шукати серед функцій вигляду

$$f(t) = \frac{4}{3} + C\delta''(t), \quad (3)$$

де $\delta(t)$ — дельта-функція Дірака [2].

Підставивши (3) в (2), отримаємо, що $C = 0$ і остаточний розв'язок

$$f(t) = \frac{4}{3}.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1973.
- [2] Шварц Л. *Математические методы для физических наук*. М.: Наука, 1983.

УМОВИ НА ТЕЙЛОРІВСЬКІ КОЕФІЦІЄНТИ ФУНКЦІЙ З КЛАСУ H_1

А.О. Шевченко, В.В. Бовсуновська, П.В. Задерей

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Регулярна в одиничному крузі $D = \{z : |z| < 1\}$ функція $f(z)$ належить класу $H_p, p \geq 1$, якщо

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt < \infty.$$

Встановлення умов на коефіцієнти c_k степеневого ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad (1)$$

при виконанні яких даний степеневий ряд є рядом Тейлора функції $f(z)$ з класу H_p є важливою задачею теорії аналітичних функцій [1]. Там же було приведено добре відоме твердження: для того, щоб функція $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ належала класу H_2

необхідно і достатньо, щоб збігався ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$. В роботі [2] встановлено, що якщо для послідовності чисел $c_k = a_k - ib_k, k = 1, 2, \dots, c_0 = \frac{a_0}{2}, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ виконуються умови

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k |\Delta^2 c_{k-1}| < \infty, \quad \Delta^2 c_{k-1} = c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1}, \quad (3)$$

то ряд (2) буде рядом Тейлора функції $f \in H_1$ тоді і лише тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} < \infty. \quad (4)$$

В даній роботі будуть встановлені умови на послідовність $\{c_k\}$ більш загальні ніж умови (3).

Покладемо $\Delta c_k = c_k - c_{k+1}$.

Теорема 1. *Якщо для послідовності чисел $c_k = a_k - ib_k, k = 1, 2, \dots, c_0 = \frac{a_0}{2}, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ виконується умова (2) і існує дійсне число $p > 1$ таке, що*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|\Delta c_k|^p + |\Delta c_{k+1}|^p + \dots}{k} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad (5)$$

то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ буде рядом Тейлора функції $f \in H_1$, тоді і тільки тоді, коли виконується умова (4).

Нехай для послідовності $\{c_k\}$ виконується умова (2) та існують такі числа A_k , що

$$A_k \downarrow 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty, \quad (6)$$

$$|\Delta c_k| \leq A_k \quad \text{для } \forall k. \quad (7)$$

Будемо називати умови (2), (6) і (7) умовами Сідона-Теляковського для послідовності $\{c_k\}$.

Теорема 2. *Якщо для послідовності чисел $c_k = a_k - ib_k$, $k = 1, 2, \dots$, $c_0 = \frac{a_0}{2}$ виконуються умови (2), (6) і (7), то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ буде рядом Тейлора функції $f \in H_1$, тоді і тільки тоді, коли виконується умова (4).*

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Привалов И.И. *Граничные свойства аналитических функций*, Гостехиздат, М.-Л., 1950 – 336с.
- [2] Бовсунівська В.В., Задерей П.В. *Про тейлерівські коефіцієнти функцій класів H_1* // Укр. мат. журн. — 2022. — Т. 74, № 5. — С. 725–728.
- [3] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды: В 2-х томах*. М.: Мир, 1965 — Т.1.— 615с.
- [4] Фомин Г.А. *Об одном классе тригонометрических рядов*, Матем. заметки, 1978, том 23, выпуск 2, 213–222

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ БАГАТОВИМІРНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В.К. Юськович

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Нехай X – розв'язок n -вимірного ($n \geq 2$) стохастичного диференціального рівняння

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t).$$

Означимо *радіус* R та *кут* Φ процесу X наступним чином:

$$R(t) := |X(t)|, \quad \Phi(t) := \frac{X(t)}{|X(t)|}.$$

Ми дослідили асимптотичну поведінку радіуса та кута процесу X при $t \rightarrow \infty$, а саме отримали деякі достатні умови того, що майже напевно:

- радіус прямує до нескінченності, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty;$$

- кут *стабілізується*, тобто

$$\exists \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) =: \Phi_\infty;$$

- існує детермінована асимптотика радіуса, тобто

$$\exists r: R(t) \sim r_{\Phi_\infty}(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Гихман И.И., Скороход А.В. *Стохастические дифференциальные уравнения*. — К.: Наукова думка. — 1968. — 356 с.
- [2] Buldygin V.V., Klesov O.I., Stainebach J.G., Tymoshenko O.A. *On the φ -asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations // Theory of stochastic processes*. — 2008. — № 1. — P. 11-30.
- [3] Pilipenko A., Proske F.N. *On perturbations of an ODE with non-Lipschitz coefficients by a small self-similar noise // Statistics & Probability Letters*. — 132:62-73, 2018a.
- [4] Pilipenko A., Pavlyukevich I. *Generalized selection problem with Levy noise // https://arxiv.org/abs/2004.05421*. — 2020. — 17 p.

Секція 2.

Метричної теорії чисел, геометрії,
фрактального аналізу

НЕСКІНЧЕННОСИМВОЛЬНІ СИСТЕМИ ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Н.А. Біловицька

(УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна)

Крім систем числення та систем кодування (зображення) дійсних чисел зі скінченним алфавітом (s -кова система, Q_s -зображення тощо) в математиці з метою вивчення математичних об'єктів з локально складною структурою і фрактальними властивостями використовують нескінченносимвольні зображення. Одні з них мають основу, інші — ні. Такі системи цікаві тим, що вони використовують алфавіт, який є множиною натуральних чисел (або її зліченною підмножиною). Це створює певні виклики перед дослідником, зокрема на шляху поширення отриманих результатів для скінченносимвольного зображення на нескінченносимвольне.

Розглядається нескінченносимвольна система зображення чисел, що є узагальненням нескінченносимвольного перекодування [3] класичного двійкового зображення — поліосновне q_0^∞ -зображення.

Нехай N — алфавіт, $L = N \times N \times \dots$ простір послідовностей елементів алфавіту, $q_0 \in (0; 1)$. Тоді [1] для будь-якого $x \in (0; 1]$ існує єдина послідовність натуральних чисел $(a_n) \in L$ така, що

$$x = q_0^{a_1} + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - q_0)^n q_0^{a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} - n} \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty} \quad (1)$$

Розклад числа x в ряд (1) називається q_0^∞ -представленням, а скорочений запис $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}$ — його q_0^∞ -зображення.

Зв'язок між q_0^∞ -зображенням і Q_2 -зображенням [1, 2] з параметром q_0 встановлюється відповідністю:

$$\Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_{a_1-1} \underbrace{1 \dots 0}_{a_2-1} \underbrace{0 \dots 1}_{a_3-1} \dots \underbrace{0 \dots 0}_{a_n-1} \dots}^{Q_2} = x = \Delta_{a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}$$

Означення 1. N -кратним оператором $\delta_{k_1 \dots k_n}$ правостороннього зсуву цифр з набором параметрів $k_1 \dots k_n$ q_0^∞ -зображення чисел (оператором припису цифр), де $k_i \in N$, називається функція, означена рівністю

$$\delta_{k_1 \dots k_n} (\Delta_{a_1 a_2 \dots}^{q_0^\infty}) = \Delta_{k_1 k_2 \dots k_n a_1 a_2 \dots}^{q_0^\infty}, n \in N.$$

Теорема 1. N -кратний оператор $\delta_{k_1 \dots k_n}$ ($k_i \in N$) правостороннього зсуву цифр q_0^∞ -зображення чисел є лінійною (строго зростаючою) функцією на усій області визначення і аналітично задається рівністю

$$\delta_{k_1 \dots k_n}(x = \Delta_{a_1 a_2 \dots}^{q_0^\infty}) = \sum_{i=1}^n q_0^{k_1 + \dots + k_i + 1} q_1^{i-1} + q_0^{k_1 + \dots + k_n - n} q_1^n x, n \in N, q_1 = 1 - q_0.$$

У доповіді пропонуються результати дослідження фрактальних властивостей оператора правостороннього зсуву цифр зображення, аналогу інверсора цифр та їхніх суперпозицій.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Гончаренко Я.В., Лисенко І.М. *Геометрія нескінченно-символьного q_0^∞ -зображення дійсних чисел та її застосування у метричній теорії чисел* // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат.науки. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013.— № 15.— С. 100–118.
- [2] Працьовитий М.В. *Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій* // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013.— № 14.— С. 189–216.
- [3] Працьовитий М.В., Ісаєва Т.М. *Кодування дійсних чисел з нескінченим алфавітом і основою 2* // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013. — № 15.— С. 5–23.

НЕСКІНЧЕННО-СИМВОЛЬНЕ Φ -ЗОБРАЖЕННЯ І ЙОГО ГЕОМЕТРІЯ

О.І. Бондаренко, Н.М. Василенко

(УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна)

Нехай $A = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ — алфавіт (набір цифр),

$L = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A} \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту;

$$\tau = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.62$$

— ”золоте відношення”, а саме — додатній корінь рівняння $x^2 + x - 1 = 0$.

Теорема 1. Для будь-якого числа $x \in (0; 1)$ існує єдиний скінченний набір цілих чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ або єдина послідовність $(\alpha_n) \in L$ такі, що

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^m (b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{\Phi}, \quad (1)$$

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{\Phi} \quad (2)$$

Наслідок 1. $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{\Phi} \neq \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^{\Phi}$ при $\forall (\alpha_n) \in Z^n, (\beta_n) \in L$,

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{\Phi} \neq \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^{\Phi} \Leftrightarrow k = m \text{ і } \alpha_j = \beta_j \text{ при } j = (0; \bar{n}).$$

Приклад 2. $\Delta_{(0)}^{\Phi} = b_0 + b_0 \cdot \tau^3 + b_0 \cdot \tau^6 + \dots = \frac{b_0}{1-\tau^3} = \frac{\tau^2}{1-\tau^3} = \frac{1-\tau}{2(1-\tau)} = \frac{1}{2}$.

Означення 1. Розклад числа x в суму (1) або ряд (2) називатимемо його Φ -представленням, а символічні записи $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{\Phi}$ та $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{\Phi}$ — його Φ -зображенням (скінченним або нескінченним відповідно). При цьому α_n називатимемо n -ою цифрою цього Φ -зображення.

Означення 2. Числа, що мають скінченне (нескінченне) Φ -зображення називатимемо Φ -скінченними (Φ -нескінченними). Множину всіх Φ -нескінченних чисел позначатимемо Φ_{∞} . Рангом Φ -скінченного числа $x = \Delta_{c_1 \dots c_m}^{\Phi}$ називатимемо число m .

Зауваження 1. Φ -скінченне число і Φ -нескінченне число рівними бути не можуть.

Лема 1. Числа $x_1 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{\Phi}$ і $x_2 = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^{\Phi}$ перебувають у відношенні:

1. $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \alpha_n = \beta_n, \forall n \in Z$.
2. $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \alpha_n < \beta_n$, але $\alpha_i = \beta_i$ при $i < n$.

Означення 3. Множина $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{\Phi}$ всіх чисел $x \in (0; 1)$, що мають скінченне або нескінченне Φ -зображення з першими m -цифрами $c_1, c_2 \dots c_m$ відповідно, тобто

$$\Delta_{c_1 \dots c_m}^{\Phi} = \{x : x = \Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_n}^{\Phi}, x = \Delta_{c_1 \dots c_m \beta_1 \beta_2 \dots}^{\Phi}\}$$

називається циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$.

Безпосередньо з означення випливають властивості циліндрів:

$$\Delta_{c_1 \dots c_m i}^\Phi \subset \Delta_{c_1 \dots c_m}^\Phi; \Delta_{c_1 \dots c_m}^\Phi = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_m i}^\Phi$$

Лема 2. Циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_m}^\Phi$ є піввідрізком $[a; d)$ з кінцями:

$$a = b_{c_1} + \sum_{k=2}^m b_{c_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{c_i}, \quad d = a + \prod_{i=1}^m \Theta_{c_i}$$

Циліндри мають властивості:

1. $\sup \Delta_{c_1 \dots c_m i}^\Phi = \inf \Delta_{c_1 \dots c_m [i+1]}^\Phi, \forall i \in A,$
2. $\forall (\alpha_n) \in L : \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^\Phi = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^\Phi$

Нехай Φ -скінченне число $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(\emptyset)}^\Phi$.

Число m називатимемо рангом Φ -скінченного числа $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m(\emptyset)}^\Phi$. Очевидно, що існує безліч Φ -скінчених чисел рангу m .

Оператором лівостороннього зсуву цифр Φ -зображення чисел називається функція ω , означена рівностями:

$$\omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^\Phi) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^\Phi, \quad \omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(\emptyset)}^\Phi) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n(\emptyset)}^\Phi.$$

Оскільки

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i}) = b_{\alpha_1} + \Theta_{\alpha_1} \cdot (b_{\alpha_2} + \sum_{k=3}^{\infty} b_{\alpha_k} \prod_{i=2}^{k-1} \Theta_{\alpha_i}) = b_{\alpha_1} + \Theta_{\alpha_1} \cdot \omega(x),$$

то

$$\omega(x) = \frac{1}{\Theta_{\alpha_1}} \cdot x + \frac{b_{\alpha_1}}{\Theta_{\alpha_1}}.$$

Звідки бачимо, що оператор лівостороннього зсуву є кусково-лінійною функцією, яка є лінійною на кожному циліндрі 1-го рангу, зокрема на циліндрі Δ_0^Φ вона має вигляд:

$$\omega(x) = \frac{1}{\tau^3} \cdot x + \frac{\tau^2}{\tau^3} = \frac{1}{\tau^3} \cdot x + \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\tau - 1} \cdot x + (\tau + 1).$$

Оператором правостороннього зсуву цифр Φ -зображення з параметром $i \in Z$ називається функція δ_i , означена рівностями: $\delta_i(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}^\Phi) = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots}^\Phi$; $\delta_i(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(\emptyset)}^\Phi) = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(\emptyset)}^\Phi$.

У роботі обґрунтовано існування і єдиність Φ -зображення чисел інтервалу $(0; 1)$, яке в якості основи використовує додатній корінь τ рівняння $x^2 + x - 1 = 0$ і алфавіт $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm, \dots\}$, описано його геометрію (геометричний зміст цифр, властивості циліндричних і хвостових множин, тополого-метричні властивості множин з обмеженнями на вживання цифр). Вивчено оператори лівостороннього і правостороннього зсувів, описано групу неперервних перетворень.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В. *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування* // Київ: Наук. думка, — 2022. — 316 с.
- [2] Працьовитий М.В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

**ПРО ТИП РОЗПОДІЛУ ПОСЛІДОВНОСТІ,
ПРОДУКОВАНОЇ ОПЕРАТОРОМ
ЗСУВУ ДЛЯ Q_s^* -РОЗКЛАДІВ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ**

Р.В. Кривошия

(Кропивницький будівельний фаховий коледж, Кропивницький, Україна)

Послідовність (x_n) називається розподіленою за функцією розподілу $G(x)$, якщо для довільних дійсних $1 \geq b > a \geq 0$: $\frac{N_n([a;b])}{n} \rightarrow G(b) - G(a)$ ($n \rightarrow \infty$), де $N_n([a;b])$ — кількість чисел серед $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}$, які належать проміжку $[a;b]$.

Нехай $s > 2, s \in \mathbb{N}$, $(q_{0n}; q_{1n}; \dots; q_{(s-1)n})$ — послідовність стохастичних векторів з строго додатними координатами, причому

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \max\{q_{0n}; q_{1n} \dots; q_{(s-1)n}\} = 0,$$

тоді відомо [1], що для довільного $x \in [0; 1]$ існує послідовність цифр $\alpha_n \in \{0; \dots; s-1\}$, така, що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \beta_{\alpha_2 2} q_{\alpha_1 1} + \dots + \beta_{\alpha_{n+1} (n+1)} q_{\alpha_1 1} q_{\alpha_2 2} \dots q_{\alpha_n n} + \dots, \quad (1)$$

де $\beta_{0n} = 0, \beta_{1n} = q_{0n}, \dots, \beta_{(s-1)n} = q_{0n} + \dots + q_{(s-2)n}$.

Представлення (1) називається Q_s^* -представленням числа x , відповідне Q_s^* - зображення має вигляд $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*}$.

Розглянемо наступний оператор зсуву:

$$T(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*}) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*}.$$

На основі Q_s^* -представлення можливо побудувати розподіл з незалежними Q_s^* -цифрами, лебегівські та фрактальні властивості якого добре вивчені [2].

Теорема 1. *Нехай для числа t послідовність $((T(t))^n)$ розподілена за неперервною функцією $G(x)$, тоді $G(x)$ є функцією розподілу випадкової величини з незалежними Q_s^* -цифрами.*

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Постников А. Г. *Арифметическое моделирование случайных процессов*, Тр. МИАН СССР, 1960, том 57, 3–84.
- [2] Працьовитий М.В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*. – Київ: Вид-во НПУ імені М.П Драгоманова, 1998. – 296с.
- [3] Турбин А.Ф., Працевитий Н.В. *Фрактальные множества, функции, распределения*.— Киев: Наук.думка, 1992. — 2008с.

ПРО ОДНУ МНОЖИНУ ЧИСЕЛ ЗАДАНИХ В ТЕМІНАХ НЕПОВНИХ СУМ ЧИСЛОВОГО РЯДУ

О.П. Макарчук, Б.В. Халецький

(ЦДУ імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна)

Добре відомо, що для числа x відрізка $[0; 1]$ існує послідовність чисел α_n така, що для кожного натурального n : $\alpha_n \in \{0; 1\}$ та виконується рівність:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{2^n},$$

яка називається двійковим представленням числа x , яке має зображення виду:

$$x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}$$

Нехай $N_k(x; j)$ — кількість цифр j серед цифр $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Якщо існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k(x; j)}{k},$$

то вона називається частотою цифри j числа x та позначається $\nu_j(x)$. В роботі [3] досліджувалась множина чисел x , що задовольняють рівність $x = \nu_0(x)$.

Теорема 1. *Нехай (a_n) — строго спадна послідовність додатних чисел таких, що*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq 1.$$

Для числа

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{2^n},$$

означимо величину

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n a_n.$$

Існує континуальна множина чисел t таких, що

$$\nu_0(t) = F(t).$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В., Макарчук О.П., Карпенко О.В. *Про множину інваріантних точок функцій частоти у двійковій системі зображення дійсних чисел* // Науковий часопис НПУ. імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки.—2010, № 11.—С.182-199.
- [2] Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. *Фрактальные множества, функции, распределения.*— Киев: Наук.думка, 1992. — 2008с.
- [3] Торбін Г.М. *Частотні характеристики нормальних чисел в різних системах числення* // Фрактальний аналіз та суміжні питання.— Київ: ІМ НАН України — НПУ ім. Драгоманова. — 1998, № 1. — С.53–55.

ПРОЄКТОР ОДНОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ РЯДАМИ ПЕРРОНА (\bar{P} -ЗОБРАЖЕННЯ) В ІНШЕ

М.П. Мороз

(Інститут математики, Київ, Україна)

Для задання математичних об'єктів з неоднорідними тополого-метричними та диференціальними локальними властивостями, зокрема функцій, широко використовують різні системи кодування (зображення) дійсних чисел. Серед них такі, які використовують нескінченний алфавіт, зокрема зображення чисел рядами Люрота, Енгеля, Сильвестера, Остроградського–Серпінського–Пірса. Узагальненнями та аналогами останніх є зображення чисел рядами Перрона. Саме їм присвячена доповідь.

Означення 1. Рядом Перрона називають числовий ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \cdot \dots \cdot r_n}{(p_1 - 1) p_1 (p_2 - 1) p_2 \cdot \dots \cdot (p_n - 1) p_n p_{n+1}},$$

де $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ — довільна послідовність натуральних чисел, $\mathbb{N} \ni p_n \geq r_{n-1} + 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Рядом Перрона, записаним у різницевій формі, називають ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \cdot \dots \cdot r_n}{(r_0 + g_1 - 1) (r_0 + g_1) \dots (r_{n-1} + g_n - 1) (r_{n-1} + g_n) (r_n + g_{n+1})}, \quad (1)$$

де $g_n \in \mathbb{N}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Зафіксуємо довільну послідовність \bar{P} функцій $\bar{\varphi}_n: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_0 = \text{const}$. Якщо число $x \in (0; 1]$ є сумою ряду (1), причому $r_0 = \bar{\varphi}_0$ та $r_n = \bar{\varphi}_n(g_1, \dots, g_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то розклад числа x в ряд (1) називають його \bar{P} -представленням, скорочений запис $\Delta_{g_1 g_2 \dots}^{\bar{P}}$ ряду (1) — \bar{P} -зображенням числа x , а число g_n — n -тою цифрою його \bar{P} -зображення.

Теорема 1. Для довільної послідовності функцій $(\bar{\varphi}_n)_{n=0}^{\infty}$ кожне число $x \in (0; 1]$ має єдине \bar{P} -представлення.

Означення 2. Нехай \bar{P}_1 та \bar{P}_2 — дві послідовності функцій $\bar{\varphi}_n^{(1)}$ та $\bar{\varphi}_n^{(2)}$ відповідно, $x = \Delta_{g_1 g_2 \dots}^{\bar{P}_1} \in (0; 1]$. Функцію $f = f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]: (0; 1] \rightarrow (0; 1]$ таку, що

$$f(x) = f\left(\Delta_{g_1 g_2 \dots}^{\bar{P}_1}\right) = \Delta_{g_1 g_2 \dots}^{\bar{P}_2},$$

називатимемо проєктором \bar{P}_1 -зображення у \bar{P}_2 -зображення.

Лема 1. Для довільних послідовностей функцій \bar{P}_1 та \bar{P}_2 проєктор $f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]$ є зростаючою на $(0; 1]$ функцією.

Лема 2. Для довільних послідовностей функцій \overline{P}_1 та \overline{P}_2 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

Теорема 2. Для довільних послідовностей функцій \overline{P}_1 та \overline{P}_2 проєктор $f[\overline{P}_1; \overline{P}_2]$ є неперервною функцією на всій області визначення.

Лема 3. Якщо проєктор $f[\overline{P}_1; \overline{P}_2]$ має в точці $x_0 = \Delta_{g_1 g_2 \dots}^{\overline{P}_1} \in (0; 1)$ похідну $f'(x_0)$, то або $f'(x_0) = 0$, або

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k-1}^{(2)} \left(r_{k-1}^{(1)} + g_k - 1 \right) \left(r_{k-1}^{(1)} + g_k \right)}{r_{k-1}^{(1)} \left(r_{k-1}^{(2)} + g_k - 1 \right) \left(r_{k-1}^{(2)} + g_k \right)} = 1,$$

де $r_0^{(1)} = \overline{\varphi}_0^{(1)}$, $r_0^{(2)} = \overline{\varphi}_0^{(2)}$, $r_k^{(1)} = \overline{\varphi}_k^{(1)}(g_1, \dots, g_k)$, $r_k^{(2)} = \overline{\varphi}_k^{(2)}(g_1, \dots, g_k)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. Достатні умови сингулярності проєктора $f[\overline{P}_1; \overline{P}_2]$. Нехай для послідовностей функцій \overline{P}_1 та \overline{P}_2 існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\overline{\varphi}_k^{(1)} \equiv a = \text{const}$ та $\overline{\varphi}_k^{(2)} \equiv b = \text{const}$ для всіх $k \geq n_0$, $a \neq b$. Тоді проєктор $f[\overline{P}_1; \overline{P}_2]$ є сингулярною функцією, тобто має похідну рівну 0 майже скрізь (у розумінні міри Лебега).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Perron O. Irrationalzahlen. 4te, durchgesehene und ergänzte Aufl. Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Bd. I Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1960.
- [2] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dyvliakh N.V., Ratushniak S.P. *Inversor of digits of Q_2^* -representation of numbers* // Mat. Stud. 55 (2021), pp. 37–43.
- [3] Барановський О.М., Працьовитий М.В. *Про одну сингулярну функцію канторівського типу, пов'язану з рядами Енгеля* // Збірник Праць Інституту математики НАН України. – 2019. – Т.16, №3. – С.131–148.
- [4] Мороз М.П. *Проєктор Δ^O -зображення чисел в Δ^E -зображення* // Збірник Праць Інституту математики НАН України. – 2017. – Т.14, №4. – С.49–64.
- [5] Працьовитий М. В. *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування*. – Київ: Наукова думка, 2022. – 316 с.
- [6] Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженні сингулярних розподілів*. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
- [7] Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. *Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування*. – Київ: Наукова Думка, 2013. – 288 с.

ПРОЄКТОРИ ЦИФР ЛАНЦЮГОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ ЧИСЕЛ

О.О. Нікорак, С.П. Ратушняк

(УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна)

(Інститут математики, Київ, Україна)

Розглядається функція p , означена рівністю

$$p([0; d_1, d_2, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2}) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{d_2}(\frac{1}{2})^{d_3}\dots(\frac{1}{2})^{d_{n+1}}\dots}^{A_2}, \quad (1)$$

де $[0; d_1, d_2, \dots, d_n, \dots]^{D_2}$ — D_2 -зображення числа одиничного відрізка (представлення числа ланцюговим дробом, елементами якого є 0 та 1) [2], $\Delta_{(\frac{1}{2})^{d_2}(\frac{1}{2})^{d_3}\dots(\frac{1}{2})^{d_{n+1}}\dots}^{A_2}$ — ланцюгове A_2 -зображення [3].

Функція не коректно означена в D_2 -бінарних точках, оскільки має місце нерівність $p([0; 1, 0, 1, 0, 1, (1, 0)]^{D_2}) = \Delta_{1\frac{1}{2}1\frac{1}{2}(\frac{1}{2}1)}^{A_2} \neq p([0; 1, 0, 1, 1, (1, 0)]^{D_2}) = \Delta_{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}1)}^{A_2}$. Тому домовимося не використовувати одне із двох бінарних зображень, а саме

$$[0; d_1, d_2, \dots, d_m, 1, 0, 1, (1, 0)]^{D_2}.$$

Лема 1. Множина значень функції є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега

$$C[A_2; \overline{\Pi}] = \{[\frac{1}{2}] \ni x = \Delta_{c_1c_2\dots c_n\dots}^{A_2}, c_n, c_{n+1} \neq 1, 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Теорема 1. Функція p є зростаючою на усій області визначення, причому розривною на множині D_2 -бінарних чисел і неперервною на множині D_2 -унарних чисел.

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, фрактальних властивостей проєктора цифр.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Denjoy A. *Complement a la notice publiee en 1934 sur les travaux scientifiques de M. Arnaud Denjoy.*— Hermann, Paris.— 1942.
- [2] Iosifescu M., Kraaikamp C. *Metric properties of Denjoy's canonical continued fraction expansion* // Tokyo J. Math.— 31 (2008)— no. 2— P. 495–510.
- [3] Працьовитий М.В. *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування*— Київ: Наукова думка, 2022.— 316 с.

ПОЛІОСНОВНІ СИСТЕМИ ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ І ФРАКТАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

І.І. Продан, С.П. Ратушняк

(УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна)

(Інститут математики, Київ, Україна)

Ми цікавимося поліосновними системами числення (двосимвольними і нескінченно-символьними) з додатним параметром $q_0 \in (0; 1)$ і функціями, визначених ланцюгом перетворювачів цифр [5], аргумент і значення яких записанні своїми поліосновними Q_2 - або q_0^∞ -зображеннями[4].

Розглядається клас F функцій f_φ , означений на $(0; 1]$ рівністю

$$f_\varphi(x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}) = \Delta_{\varphi_1(a_1, a_2) \varphi_2(a_2, a_3) \dots \varphi_n(a_n, a_{n+1}) \dots}^{q_0^\infty}, \quad (1)$$

де $N \times N \xrightarrow{\varphi_n} N$, а $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}$ — q_0^∞ -зображення числа x [1], тобто

$$x = q_0^{a_1} + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - q_0)^n q_0^{a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} - n} \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}, \quad a_n \in N.$$

Між Q_2 -зображенням числа x і його q_0^∞ -зображенням взаємозв'язок встановлюється рівністю [1]

$$\underbrace{\Delta_{\dots 0}_{a_1-1}}^{Q_2} \underbrace{1 \dots 0}_{a_2-1} \underbrace{0 \dots 0}_{a_3-1} \dots \underbrace{1 \dots 0}_{a_n-1} 1 \dots = x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}$$

Оскільки кожне число цього інтервалу має єдине q_0^∞ -зображення, то функція, означена рівністю (1), є коректно означеною на $(0; 1]$, оскільки множина функцій φ_n є зліченною, то і множина функцій f_φ , для яких послідовність (φ_n) є сталою. Якщо ж послідовність, що породжує функцію f_φ не є сталою, то клас F є континуальним.

Лема 1. *Якщо $\varphi_n(a_n, a_{n+1}) = a_n$, то $f_\varphi(x) = x$. Якщо $\varphi_n(a_n, a_{n+1}) = a_{n+1}$, то $f_\varphi(x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}) = \omega(\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}) = \Delta_{a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}$. Якщо $\varphi_1(a_1, a_2) = i$, $\varphi_{n+1}(a_{n+1}, a_{n+2}) = a_{n+1}$, $i \in N$, $n \in N$, то $f_\varphi(x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}) = \delta_i(\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}) = \Delta_{i a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}$.*

Нагадаємо [5], що інверсором Q_2 -цифр зображення числа називається функція, означена рівністю

$$I(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) = \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2] \dots [1-\alpha_n] \dots}^{Q_2}, \quad (2)$$

де $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}$ — Q_2 -зображення чисел, тобто

$$x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n q_{1-\alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}.$$

Зазначимо, що в класі F функцій f_φ інверсора цифр немає. Якщо здійснити перекодування [2] аргумента інверсора в Q_2 -зображення ($\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_2} = \Delta_{a_1a_2\dots a_n\dots}^{q_0^\infty}$), то значення функції, означеної рівністю (2) буде мати зображення

$$\Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\dots[1-\alpha_n]\dots}^{Q_2} = \Delta_{\underbrace{1\dots 1}_a} 0 \underbrace{1\dots 1}_a 0 \dots 0 \underbrace{1\dots 1}_a 0 \dots \equiv \Delta_{a_1a_2\dots a_n\dots}^{(1-q_0)^\infty},$$

тобто інверсор цифр у q_0^∞ -зображення задаватиметься рівністю

$$I(x = \Delta_{a_1a_2\dots a_n\dots}^{q_0^\infty}) = \Delta_{a_1a_2\dots a_n\dots}^{(1-q_0)^\infty}.$$

У доповіді пропонуються результати дослідження фрактальних, структурних, диференціальних властивостей функцій класу F та суперпозицій функцій $f \in F$ і інверсора цифр.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Гончаренко Я.В., Лисенко І.М. *Геометрія нескінченно-символьного q_0^∞ -зображення дійсних чисел та її застосування у метричній теорії чисел* // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат.науки. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013.— № 15.— С. 100–118.
- [2] Працьовитий М.В. *Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій* // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013.— № 14.— С. 189–216.
- [3] Працьовитий М.В. *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування*— Київ: Наукова думка, 2022.— 316 с.
- [4] Працьовитий М.В. *Случайные величины с независимыми Q_2 -символами* // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. — С.92–102.
- [5] Працьовитий М.В., Ратушняк С.П. *Властивості та розподіли значень фрактальних функцій, пов'язаних з Q_2 -зображенням дійсних чисел* // Теорія ймовірностей та математична статистика., Вип. 2(99)/2018. — С. 187–202.

S-КОВА СИСТЕМА ЧИСЛЕННЯ З НАДЛИШКОВИМ АЛФАВІТОМ

Ю.О. Симоненко

(УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна)

Ми цікавимося s -ковими системами зображення дійсних чисел з надлишковим (симетричним або несиметричним) алфавітом. Такі системи числення часто виникають при дослідженнях тополого-метричних властивостей згорток розподілів двох випадкових величин з незалежними s -ковими цифрами, арифметичної суми числових множин зі складними локальними структурами. Нехай $1 < s \in N$ — основа зображення, $A_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ — алфавіт, де $s \leq k \in N$, $L_k = A_k \times A_k \times \dots$. Тоді [2] для довільного числа $x \in [0; \frac{k-1}{s-1}]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$ така, що

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s \quad (1)$$

Розклад числа в ряд (1) називається s -ковим представленням числа, а скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s$ — s -ковим зображенням.

Якщо $s = k$, то існують числа, які мають два s -кових зображення: $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} [\alpha_n - 1] (0)}^s = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n (k-1)}^s$. Їх числа називають s -ково бінарними. Множина таких чисел є зліченною. Решта чисел мають єдине зображення і називаються s -ково унарними.

Якщо $s < k < 2s - 1$, то s -ково бінарні числа мають зліченну множину формально різних зображень, що отримуються внаслідок застосування взаємозамінних пар цифр: $\frac{a+1}{s^n} + \frac{b-s}{s^{n+1}} = \frac{a}{s^n} + \frac{s}{s^{n+1}} = \frac{a-1}{s^n} + \frac{b+s}{s^{n+1}}$, $n \in N$, а кожне s -ково унарне число — континуальну множину різних зображень, за виключенням 0 і $\frac{k-1}{s-1}$. Якщо $k > 2s - 1$, то s -ково бінарні і унарні числа мають континуальну множину різних зображень.

У доповіді пропонуються результати дослідження геометрії зображення s -кової системи числення з надлишковим алфавітом на прикладі трійкової системи з надлишковим п'ятисимвольним алфавітом.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Гончаренко Я.В., Торбін Г.М., Працьовитий М.В. *Тополого-метричні та фрактальні властивості згортки двох сингулярних розподілів випадкових величин з незалежними двійковими цифрами* // Теор. ймов. та мат. стат.— 2002.— Вип. 67.— С.9–19.
- [2] Микитюк І.О., Працьовитий М.В. *Двійкова система числення з двома надлишковими цифрами і її відповідна метрична теорія чисел.* — Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки, 2003.— № 4.— С.270–279.
- [3] Працьовитий М.В., Коваленко В.М. *Сніжинка Коха як параметрично задана плоска крива* // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2014. — № 16(2). — С. 61–80.
- [4] Працьовитий М.В. *Згортки сингулярних розподілів* // Доп. НАН України.— 1997.— № 9.— С.36–42.

**ПРО ОДНУ СИНГУЛЯРНУ ФУНКЦІЮ, ЩО НЕ ЗАДОВОЛЬНЯЄ
УМОВУ ГЕЛЬДЕРА ЗАДАНУ В ТЕРМІНАХ
 Q_s^* -ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ**

Д.Ю. Скакун

(УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна)

Нехай натуральне число $s > 1$, $(q_{0n}; q_{1n}; \dots; q_{(s-1)n})$ — послідовність стохастичних векторів з додатними координатами, для яких виконується умова

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \max\{q_{0n}; q_{1n} \dots; q_{(s-1)n}\} = 0.$$

Добре відомо [1], що для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $\alpha_n \in \{0; \dots; s-1\}$, причому виконується рівність

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \beta_{\alpha_2 2} q_{\alpha_1 1} + \dots + \beta_{\alpha_{n+1} (n+1)} q_{\alpha_1 1} q_{\alpha_2 2} \dots q_{\alpha_n n} + \dots, \quad (1)$$

де $\beta_{0n} = 0, \beta_{1n} = q_{0n}, \dots, \beta_{(s-1)n} = q_{0n} + \dots + q_{(s-2)n}$.

Представлення (1) називається Q_s^* -представленням числа x , яке має Q_s^* -зображення виду $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*}$. Нехай ξ_n — послідовність незалежних випадкових величин, що набувають значень $0, 1, \dots, s-1$ з ймовірностями $p_{0n}; p_{1n}; \dots; p_{(s-1)n}$ відповідно. Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^{Q_s^*},$$

яка називається випадковою величиною з незалежними Q_s^* -символами. Відомо [2], що розподіл ξ є чистим тобто, або дискретним, або абсолютно неперервним, або сингулярним.

Теорема 1. *Для довільного Q_s^* -представлення, заданого послідовністю стохастичних векторів $(q_{0n}; q_{1n}; \dots; q_{(s-1)n})$ існує послідовність стохастичних векторів $(p_{0n}; p_{1n}; \dots; p_{(s-1)n})$ така, що $F_\xi(x)$ є сингулярною та не задовольняє умову Гельдера, тобто для довільного $l \in (0; 1)$ та сталої $C > 0$ існують числа a, b такі, що*

$$|F_\xi(a) - F_\xi(b)| > C|a - b|^l.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296с.
- [2] Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. *Фрактальные множества, функции, распределения*. — Киев: Наук.думка, 1992. — 2008с.
- [3] Jessen B., Wintner A. *Distribution function and Riemann Zeta-function* //Trans.Amer.Math.Soc.38,1935. — P.48-88.

ПЛОСКІ ВКЛАДЕННЯ КОРЕНЕВИХ ДЕРЕВ

С.О. Стась

(КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна)

Плоскі вкладення кореневих дерев використовуються для класифікації топологічних потоків на двовимірному диску з однією сингулярною точкою на границі. Кількість вершин дерева відповідає кількості сепаратрис векторного поля. [1].

Нехай задана множина всіх неізоморфних кореневих дерев \mathcal{T} . Нехай задане коренево дерево $T \in \mathcal{T}$. Розглянемо множину $\mathcal{FS}(T)$ — множину піддерев, що є кореневими деревами з коренями, що лежать на першому рівні дерева. Розіб'ємо її на класи еквівалентності за відношенням ізоморфності піддерев як кореневих дерев. Позначимо цей клас $\mathcal{NFS}(T) = \{\alpha_i\}_i^n$, де α_i — відповідні класи еквівалентності.

Розглянемо функцію $\tau(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$. Визначимо її на кореновому дереві, що складається лише з кореня, рівною одиниці. Для будь-якого $T \in \mathcal{T}$ визначимо далі її рекурсивно:

$$\tau(T) = \frac{|\mathcal{FS}(T)|!}{|\alpha_1|! \cdot \dots \cdot |\alpha_n|!} \tau(\alpha_1)^{|\alpha_1|} \cdot \tau(\alpha_n)^{|\alpha_n|} \quad (1)$$

Використовуючи (1) можна розрахувати кількість топологічно нееквівалентних потоків для будь-якої кількості сепаратрис на двовимірному диску з однією сингулярною точкою на границі.

Формула (1) пов'язана з групою автоморфізмів кореневих дерев. Так, потужність групи автоморфізмів кореневого дерева рекурсивно виражається таким чином [2]:

$$|\text{Aut } T| = \prod_{j=1}^k r_j! |\text{Aut } T_j|^{r_j},$$

де r_j — кількість ізоморфних піддерев певного типу на рівень вище, T_j — певний представник.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Alexandr Prishlyak, Serhii Stas. *Structures of the flows with a unique singular point on the 2-dimensional disk*
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.00751>
- [2] Stephan Wagner. *The Number of Automorphisms of Random Trees*

ФРАКТАЛЬНІ ФУНКЦІЇ, ОЗНАЧЕННІ В ТЕРМІНАХ Q_2 -ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

С.П. Ратушняк, М.В. Працьовитий

(Інститут математики, Київ, Україна)

(УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна)

Нехай $A \equiv \{0, 1\}$ — двосимвольний алфавіт, $L \equiv A \times A \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту, $(0; 1) \ni q_0$ — фіксований додатний параметр, $q_1 \equiv 1 - q_0$. Відомо [1], що для довільного $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_n} \prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}, \quad (1)$$

де $\beta_{\alpha_n} = \alpha_n q_{1-\alpha_n}$ ($\beta_0 = 0, \beta_1 = q_0$). Розклад числа x в ряд (1) називається Q_2 -представленням, а скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}$ — його Q_2 -зображенням, $\alpha_n = \alpha_n(x)$ — n -ою Q_2 -цифрою цього зображення. Якщо $q_0 = \frac{1}{2}$, то Q_2 -зображення є класичним двійковим зображенням, а тому є його узагальненням.

Існують числа, які мають два Q_2 -зображення. Це числа виду $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(0)}^{Q_2} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots [\alpha_n-1](1)}^{Q_2}$, де квадратні дужки позначають лише цілісність виразу, а круглі — період. Такі числа називаються Q_2 -бінарними. Множина Q_2 -бінарних чисел є зліченною. Решта чисел мають єдине зображення. Вони називаються Q_2 -унарними.

Q_2 -зображення вдало себе проявило при заданні та дослідженні математичних об'єктів зі складною локальною будовою: функцій зі складними диференціальними властивостями (ніде не диференційовності, сингулярності), ймовірнісних мір тощо. Так, наприклад, функція $I(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) = \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2] \dots [1-\alpha_n] \dots}^{Q_2}$, яка називається інверсором цифр Q_2 -зображення чисел при $q_0 \neq \frac{1}{2}$ є сингулярною функцією (неперервною функцією, відмінною від константи, похідна якої рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега) і лише при $q_0 = \frac{1}{2}$ (тобто, коли Q_2 -зображення співпадає з класичним двійковим) є лінійною функцією $y = 1 - x$. Ми цікавимося класом функцій, аргумент і значення яких записані своїми Q_2 -зображеннями, причому Q_2 -цифри значення функції є значенням фінітних функцій відповідних Q_2 -цифр аргумента.

Розглядається клас S функцій f_{φ} , означених рівністю

$$f_{\varphi}(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) = \Delta_{\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) \varphi_2(\alpha_2, \alpha_3) \dots \varphi_n(\alpha_n, \alpha_{n+1}) \dots}^{Q_2}, \quad (2)$$

де $A \times A \xrightarrow{\varphi_n} A$. Означення функції f_φ взагалі кажучи не є коректним, оскільки значення функції від двох формально різних зображень Q_2 -бінарних чисел не збігаються. Тому домовимося не використовувати зображення чисел, що не містять 1 в періоді.

Функцій φ_n існує всього лише 16 штук, які розбиваються на 8 пар двоїстих $(\varphi_n, \tilde{\varphi}_n)$ ($\tilde{\varphi}_n(a, b) = 1 - \varphi_n(a, b)$, $a, b \in A$). Відповідні пари двоїстих функцій f_φ і $f_{\tilde{\varphi}}$ на перший погляд мають однакові структурні властивості і співпадають з точністю до симетрії, проте їх диференціальні властивості принципові різні. Так, наприклад, для $\varphi_n(a, b) = a$ двоїстою є $\tilde{\varphi}_n(a, b) = 1 - a$, $a, b \in A$ відповідні двоїсті функції це $f_\varphi(x) = x$, $f_{\tilde{\varphi}}(x) = I(x)$. Використовуючи функції φ_n можна будувати функції f_φ з фрактальними графіками, фрактальними множинами значень і множинами рівнів.

Приклад 1. Розглядається функція g , означена рівністю

$$g(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}^{Q_2}) = \begin{cases} \Delta_{c_1 \dots c_{n-1} [1-\alpha_1 \cdot \alpha_2] [1-\alpha_3] [1-\alpha_4] \dots}^{Q_2} & \text{при } x \notin \Delta_{10}^{Q_2}, \forall (c_1, \dots, c_{n-1}) \in A^{n-1}. \\ \Delta_{c_1 \dots c_{n-1} [1-\alpha_1 \cdot \alpha_2] \alpha_3 \alpha_4 \dots}^{Q_2} & \text{при } x \in \Delta_{10}^{Q_2}. \end{cases} \quad (3)$$

Функція g є коректно означеною функцією на множині Q_2 -бінарних чисел, тобто тих, що мають два формально різні зображення, оскільки $g(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} 0(1)}^{Q_2}) = g(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} 1(0)}^{Q_2})$ для довільного $n \in N$.

Теорема 1. *Функція g є неперервною, причому лінійною на циліндрі $\Delta_{c_1 \dots c_{n-1} 10}^{Q_2}$, де $c_i \in A$, і сингулярною на решітці області визначення.*

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, диференціальних, тополого-метричних та інтегральних функцій f_φ класу S і функцій, означених з допомогою функцій φ .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працевитый Н. В. *Случайные величины с независимыми Q_2 -символами* // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей, Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1987. — С.92–102.
- [2] Працьовитий М. В., Ратушняк С. П. *Властивості та розподіли значень фрактальних функцій, пов'язаних з Q_2 -зображенням дійсних чисел* // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2018. Вип. 2(99). — С. 187–202.

АРИФМЕТИЧНІ СУМИ МНОЖИН КАНТОРІВСЬКОГО ТИПУ

Д.С. Шпитюк

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

Арифметичною сумою двох числових множин A і B називають множину $C = A \oplus B$ всіх чисел $c = a + b$, де $a \in A$, $b \in B$ [1].

Відомо, що арифметична сума двох множин Кантора

$$C[3; \{0, 2\}] = \{[0; 1] \ni x : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3 \in \{0, 2\}, n \in N\},$$

де $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3$ — трійкове зображення чисел, є відрізком $[0; 2]$, тобто арифметична сума двох ніде не щільних досконалих множин нульової міри Лебега є всюди щільною множиною [2].

Виникає природній інтерес до арифметичних сум множин канторівського типу (ніде не щільних досконалих множин). Нас цікавлять питання: за яких умов властивості множин доданків зберігаються для множини суми, як корелюють властивості множин доданків і множини суми. Вирішення цих та інших проблем сприятимуть поглибленню результатів дослідження згорток випадкових величин, спектр яких є арифметичною сумою спектрів складових.

Розглядається множина арифметична сума двох множин $C \oplus C'$, де

$$C = C[9; \{0, 2, 6, 8\}] = \{[0; 1] \ni x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^9, \alpha_n \in \{0, 2, 6, 8\}\},$$

$$C' = C[9; \{1, 3, 4, 5, 7\}] = \{[0; 1] \ni x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^9, \alpha_n \in \{1, 3, 4, 5, 7\}\},$$

де $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^9$ — дев'ятіркове зображення чисел.

Теорема 1. *Арифметична сума C і C' є ніде не щільною множиною $C \oplus C' = C[9; \overline{0}, \overline{2}, \overline{8}, \overline{14}, \overline{16}] = \{x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^9, \alpha_n \in A_{17} \setminus \{0, 2, 8, 14, 16\}, n \in N\}$.*

У доповіді пропонуються результати дослідження властивостей арифметичних сум множин канторівського типу, означених в дев'ятірковій системі числення.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Mendes P., Oliveira F. *On the topological structure of the arithmetic sum of two cantor sets // Nonlinearity.* — 7(2):329–343. — 1994. — doi: 10.1088/0951-7715/7/2/002.
- [2] Працьовитий М.В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

Секція 3.

Алгебри, дискретної математики,
теорії автоматів,
інформатики

КРИТЕРІЇ ALL-PATH ОПУКЛИКИХ МНОЖИН У ЗВ'ЯЗНИХ ГРАФАХ

В.О. Гапоненко, С.О. Козеренко

Національний університет “Києво-Могилянська академія”, Київ, Україна

Класичні концепції теорії опуклих структур отримали багато уваги в першій половині 20-го століття. Проте з розвитком теорії, поняття опуклості почали розглядати в більш широкому сенсі, не прив'язуючись до векторних просторів. В нашій роботі ми спираємося саме на розширене поняття опуклості, базуючись на аксіоматичному підході представленому Ван дер Велем у його книзі “Theory of convex structures” [2].

Сім'я підмножин C множини X називається опуклістю на X якщо наступні аксіоми правдиві:

- (1) Порожня множина \emptyset та сам X входять в C .
- (2) C замкнута відносно перетинів.
- (3) C замкнута відносно вкладених об'єднань.

Тоді пару (X, C) називають опуклим простором, а елементи C – опуклими множинами.

Графовим опуклим простором є пара (G, ϑ) , де G є зв'язним графом з множиною вершин V та опуклістю на ϑ , що пара (V, ϑ) є опуклим простором, що задовольняє додаткову теорему:

4. Кожний елемент ϑ породжує зв'язний підграф у G .

Покладемо на множині X функцію $I : X \times X \rightarrow 2^X$, що має наступні властивості:

- (1) Для будь-яких двох елементів $a, b \in X$ справджується $a, b \in I(a, b)$.
- (2) Функція є симетричною $I(a, b) = I(b, a)$.

Тоді I називають інтервальним оператором на X , а $I(a, b)$ є інтервалом між a та b . Пару (X, I) називають інтервальним простором і він природним чином породжує опуклість C на X . Так, підмножину C ми називаємо опуклою тільки тоді, коли $I(x, y) \subseteq C$ для всіх $a, b \in C$.

Наприклад, монофонічна опуклість породжується інтервальною функцією $I(a, b)$, що є всіма безхордовими шляхами між зазначеною парою вершин. Якщо визначити $I(a, b)$ як всі найкоротші шляхи між a та b , тоді породимо геодетичну опуклість.

В цій праці ми розглядаємо all-path опуклість, що вперше ввели в статті “Convex sets in a graph” [3]. Її породжує інтервальна функція, що є всіма простими шляхами

між парами вершин. Проте, в [3] не було надано характеристику AP-опуклої множини, але його було надано в праці “All-path convexity: combinatorial and complexity aspects.” [4].

Теорема 1. [3] *Зафіксуємо $S \subset V$. Тоді S є AP-опуклою тоді і тільки тоді, коли $S = V$, або для кожного зв'язної компоненти G_i , що $V(G_i) \subset V(G - S)$, існує тільки одна сусідня вершина з S .*

Звернемо вашу увагу, що дана характеристика дає критерій для швидкої алгоритмічної перевірки множини на AP-опуклість, проте з її допомогою важко отримувати теоретичні результати. Тому ми представляємо новий критерій AP-опуклих множин який тривіалізує більшість минулих результатів зі згаданих статей.

Теорема 2. *Нехай G є зв'язним графом, $A \subset V(G)$ та $|A| \geq 2$. Тоді множина A є AP-опуклою тоді і тільки тоді, коли породжений підграф $G[A]$ є зв'язним об'єднанням блоків в G .*

Щоби сформулювати другий критерій AP-опуклих множин, введемо посилення одного класичного означення з метричної теорії графів. А саме, нехай $A \subseteq V(G)$ множина вершин у зв'язному графі G та $x \in V(G)$. Воротами для $x \in A$ називається вершина $g \in A$ така, що для кожної вершини $a \in A$, деякий найкоротший шлях від x до a містить g . Якщо в попередньому означенні посилити умову до “будь-який найкоротший шлях x до a містить g ”, отримаємо означення сильних воріт для $x \in A$.

Теорема 3. *Нехай G є зв'язним графом, $A \subseteq V(G)$ та $|A| \geq 2$. Тоді множина A є AP-опуклою тоді і тільки тоді, коли кожна вершина $x \in V(G)$ має сильні ворота в A .*

ЛІТЕРАТУРА

- [1] M. van de Vel, Theory of convex structures. North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [2] E. Sampathkumar, Convex sets in a graph, Indian J. Pure Appl. Math **15(10)** (1984), 1065–1071.
- [3] F. Protti, and J.V.C. Thompson, All-path convexity: combinatorial and complexity aspects, Ars Comb. **148** (2020), 77–87.

АНИГІЛЯТОРНО-НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ МІЖ ГРАФАМИ

Ю.-Л.В. Дехтяр, С.О. Козеренко

(Національний університет “Киево-Могилянська академія”, Київ, Україна)

Метричним відрізком між вершинами $u, v \in V(G)$ у зв’язному графі G називається множина $[u, v]_G = \{x \in V(G) : d_G(u, x) + d_G(x, v) = d_G(u, v)\}$ (тут d_G позначає природню відстань на $V(G)$). Множина $[u, v] = \{x \in V(G) : v \in [u, x]_G\}$ називається анігілятором [2] від u до v . Легко бачити, що $[u, v] \cap [v, u] = \emptyset$ для всіх $u \neq v$ та $[u, u] = V(G)$. Крім цього, рівність $[u, v] \cup [v, u] = V(G)$ означає, що $uv \in E(G)$.

Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ між множинами вершин двох графів G, H називається гомоморфізмом, якщо $f(u)f(v) \in E(H)$ для всіх ребер $uv \in E(G)$.

Нехай тепер G та H зв’язні графи. Відображення f називається неперервним, якщо $[f(u), f(v)]_H \subset f([u, v]_G)$ для всіх $u, v \in V(G)$. Послабленням неперервності є поняття метричності: відображення f метричне, якщо $d_H(f(u), f(v)) \leq d_G(u, v)$ для всіх $u, v \in V(G)$. Неважко довести, що неперервні відображення та гомоморфізми є метричними [1].

Ще одним пов’язаним класом відображень між графами є лінійні відображення: f лінійне, якщо $f([u, v]_G) \subset [f(u), f(v)]_H$ для всіх $u, v \in V(G)$. Виявляється, останнє означення можна переформулювати, замінивши відповідні відрізки на анігілятори.

Твердження 1. *Нехай G та H зв’язні графи. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ є лінійним тоді й тільки тоді, коли $f([u, v]) \subset [f(u), f(v)]$ для всіх $u, v \in V(G)$.*

Назвемо відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ анігіляторно-неперервним, якщо для всіх $u, v \in V(G)$ $[f(u), f(v)] \subset f([u, v])$. Наприклад, ізоморфізми та постійні відображення в K_1 є анігіляторно-неперервними. Більше того, одразу з означення та властивості $[x, x] = V$ випливає, що анігіляторно-неперервні відображення є сюр’екціями. Тому, взагалі кажучи, класи неперервних та анігіляторно-неперервних відображень не збігаються. Проте, має місце наступний результат.

Твердження 2. *Нехай G та H зв’язні графи. Бієкція $f : V(G) \rightarrow V(H)$ є неперервною тоді й тільки тоді, коли вона анігіляторно-неперервна.*

Для анігіляторно-неперервних відображень з дерев у нетривіальні графи можемо сказати навіть більше.

Твердження 3. *Нехай G – дерево, а $H \neq K_1$. Тоді кожне анігіляторно-неперервне відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ є ін’єкцією.*

Твердження 2,3 дозволяють повністю описати анігіляторно-неперервні відображення між нетривіальними деревами.

Наслідок 1. *Нехай $G, H \neq K_1$ – дерева. Тоді єдиними анігіляторно-неперервними відображеннями між G та H є ізоморфізми.*

Наступна конструкція показує, що існують анігіляторно-неперервні відображення, які не є бієкціями.

Приклад 3. Нехай G – зв'язний граф, а H – його зв'язний кістяковий підграф. Зафіксуємо граф H' – ізоморфну копію H із відповідним ізоморфізмом $u \leftrightarrow u'$. Розглянемо граф G' із $V(G') = V(H) \sqcup V(H')$ та $E(G') = E(H) \cup E(H') \cup \{uu' : u \in V(H)\}$. Граф G' можна уявляти як циліндр із основами, що ізоморфні графу H . Нарешті, розглянемо відображення $f : V(G') \rightarrow V(G)$, де $f(x) = u$ для $x \in V(H) = V(G)$ або $x = u' \in V(H')$. За побудовою f є анігіляторно-неперервним, але не ін'єктивним відображенням.

Наявні приклади та результати про анігіляторно-неперервних відображень дозволяють нам висунути наступну гіпотезу.

Гіпотеза: анігіляторно-неперервні відображення є неперервними.

Також зауважимо, що неперервні сюр'єкції не обов'язково є анігіляторно-неперервними: розглянемо стягування висячого ребра в ланцюгу P_3 (як відображення з P_3 на P_2).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] S. Kozzerenko, Linear and metric maps on trees via Markov graphs, Comment. Math. Univ. Carolin. **59** (2018), 173–187.
- [2] J. Nieminen, Annihilators in graphs, Results Math. **13** (1988), 140–146.

БЕЗПІКОВІ ФУНКЦІЇ НА ГРАФАХ БЛОКІВ

Р.О. Зимовець, С.О. Козеренко

(Національний університет “Киево-Могилянська академія”, Київ, Україна)

Нехай $G = (V, E)$ скінченний зв'язний граф. Функція $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ називається безпіковою [1], якщо для всіх $u, v \in V$ та $x \in [u, v]_G$ виконано $f(x) \leq \max\{f(u), f(v)\}$, причому рівність досягається лише у випадку $f(u) = f(v)$ (тут через $[u, v]_G$ позначається метричний відрізок між вершинами u, v).

Шлях $u_1 - \dots - u_m$ у графі G називається локально-найкоротшим, якщо $d_G(u_{i-1}, u_{i+1}) = 2$ для всіх $2 \leq i \leq m - 1$ (тут d_G позначає звичайну відстань на V). Множина вершин $A \subset V(G)$ називається цілком опуклою, якщо для всіх пар вершин $u, v \in A$ вона містить також вершини всіх локально-найкоротших шляхів між u, v у G . Оскільки кожен найкоротший шлях у графі є й локально-найкоротшим, то кожна цілком опукла множина вершин є опуклою.

Зв'язний граф G називається хордальним, якщо кожен його цикл довжини ≥ 4 містить хорду (іншими словами, якщо G не має породжених підграфів C_m , $m \geq 4$).

Теорема 1. [1] *Множини рівня безпікових функцій на хордальних графах є цілком опуклими.*

Одним із відомих підкласів хордальних графів є графи блоків. Останні є графами, в яких кожен блок (максимальний двозв'язний підграф) є повним [2]. Наприклад, кожне дерево є графом блоків.

Твердження 1. *Для зв'язного графа G наступні умови еквівалентні:*

- (1) G граф блоків;
- (2) кожна зв'язна множина вершин у G є опуклою;
- (3) кожна зв'язна множина вершин у G є цілком опуклою.

На класі всіх безпікових функцій на графі G природнім чином вводиться наступний передпорядок [1]: $f \prec g$, якщо кожна множина рівня для функції f є й множиною рівня для g . Наприклад, постійні функції є мінімальними елементами відносно \prec . Оскільки, взагалі кажучи, \prec не є антисиметричним бінарним відношенням, то природнім чином введемо відношення еквівалентності: $f \sim g$, якщо $f \prec g$ та $g \prec f$. Іншими словами, дві безпікові функції еквівалентні, якщо вони мають однакові множини рівнів.

Наступний результат характеризує родини підграфів, породжених множинами рівнів деякої безпікової функції на графі блоків. Кластер-графом називається граф, кожна компонента зв'язності якого є повним графом.

Теорема 2. *Нехай G – зв'язний граф блоків, а \mathcal{L} – родина його непорожніх зв'язних підграфів із $G \in \mathcal{L}$. Тоді існує безпікова функція f на G така, що \mathcal{L} є родиною підграфів, породжених множинами рівнів f тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

- (1) \mathcal{L} лінійно впорядкована за включенням;
- (2) для всіх підграфів $H_1, H_2 \in \mathcal{L}$ таких, що H_2 – наступник H_1 виконано $V(H_2 \setminus H_1) = N_{H_2}(V(H_1))$ та $H_2 \setminus H_1$ – кластер-граф.

Цю теорему можна використовувати для підрахунку кількості безпікових функцій на графах блоків (зокрема, деревах). Наприклад, кількість попарно нееквівалентних безпікових функцій на повному графі K_n рівна n -ому впорядкованому числу Белла (інша назва – числа Фубіні):

$$\sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] V.D. Chepoi, Peakless functions on graphs, *Discrete Appl. Math.* **73** (1997), 175–189.
- [2] F. Harary, A characterization of block graphs, *Canad. Math. Bull.* **6** (1963), 1–6.

АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДУ ДИНАМІЧНОЇ АЛЬТЕРНАТИВНОЇ МАРШРУТИЗАЦІЇ В МЕРЕЖАХ З НЕПОВНОЗВ'ЯЗНОЮ ТОПОЛОГІЄЮ

М.Ю. Лихопуд

(Національний університет «Киево-Могилянська академія», Київ, Україна)

Метод динамічної альтернативної маршрутизації (далі ДАМ) був розроблений Річардом Гіббенсом та Френком Келлі в 1985 році для мереж з комутацією каналів [1]. Для мереж з неповнозв'язною топологією існує модифікація методу ДАМ, яка базується на комбінація “липкої випадковості” з використанням таблиць статичної маршрутизації [2].

В роботі був проведений аналіз ефективності цієї модифікації для багатоканальних мереж. Для оцінки ефективності методу маршрутизації використовуються наступні критерії:

- (1) Максимізація трафіку, що передається в мережі в момент t .
- (2) Мінімізація максимальної граничної ймовірності блокування виклику.

Під час роботи була розглянута аналітична модель телефонної мережі, яка використовує модифікований метод ДАМ. Мережу було представлено у вигляді неорієнтованого графа (V, L) , де V – це множина вузлів (V_1, V_2, \dots, V_n) , а L – множина ліній зв'язку (L_1, L_2, \dots, L_n) . Також ведені наступні параметри: B_k – середня ймовірність блокування виклику на каналі $k = (V_i, V_j)$; C_k – пропускна здатність каналу $k = (V_i, V_j)$; f_k – трафік, що передається по каналу $k = (V_i, V_j)$.

Було встановлено, що між двома вузлами мережі може існувати декілька варіантів з'єднання; вибір найкоротшого шляху з можливих може погіршити продуктивність мережі в цілому.

Було показано, що не існує рішення, яке б повністю задовольняло обидва критерії ефективності, тому завдання маршрутизації має бути зведено до пошуку оптимального рішення за допомогою евристичних методів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Gibbens R. J., Kelly F. P., Key P. B. *Dynamic Alternative Routing – Modelling and Behaviour* // International Teletraffic Congress, — 1988
- [2] Medhi D., Katib I. *Adaptive alternate routing in wdm networks* // Optical and Switching Networks, — 2009.

ОРІЄНТАЦІЇ ГРАФІВ І ПРОБЛЕМА ОБХОДУ СТОРОЖА

Б.Ю. Романчук, С.О. Козеренко

(Національний університет “Киево-Могилянська академія”, Київ, Україна)

Задача пошуку обходу сторожа на графах і орграфах є одною з класичних проблем, пов'язаних із домінуванням. А саме, нехай $G = (V, E)$ – скінченний простий неорієнтований граф. Обходом сторожа [2] на G називається мінімальний домінуючий замкнений шлях у G , тобто найкоротший шлях $W = u_1 - \dots - u_m - u_1$ із такою умовою: для кожної вершини $v \in V$ знайдеться $1 \leq i \leq m$ із $u_i v \in E$. Очевидно, що на G існує обхід сторожа тоді й тільки тоді, коли G зв'язний. Це означення переноситься й на орієнтовані графи. Нехай $D = (V, A)$ – скінченний орієнтований граф без петель. Обходом сторожа на D називається найкоротший замкнений шлях $W = u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_m \rightarrow u_1$ такий, що для кожної $v \in V$ існує $1 \leq i \leq m$ із $u_i \rightarrow v$ у D .

Легко бачити, що не кожен слабо зв'язний орграф має обхід сторожа. Наприклад, ациклічний орграф D має обхід сторожа тоді й тільки тоді, коли він має домінуючу вершину (постійний замкнений шлях у цій вершині й буде обходом сторожа в D). З іншого боку, кожен сильно зв'язний орграф має обхід сторожа.

Для формулювання критерію існування обходу сторожа в орграфі нам знадобиться поняття конденсації орграфа та деякий її кістяковий підграф. Конденсацією D^* орграфа D називається орграф, який отримується з D стягуванням його компонент сильної зв'язності. Тобто, вершинами D^* є сильні компоненти D , причому в D^* існує дуга $A \rightarrow B$, якщо $a \rightarrow b$ у D для деяких $a \in A, b \in B$. Сюр'єктивною конденсацією орграфа D назвемо орграф D_{sur}^* , який має ту саму множину вершин що й D^* , але в D_{sur}^* існує дуга $A \rightarrow B$, якщо для кожного $b \in B$ знайдеться $a \in A$ із $a \rightarrow b$ у D .

Лема 1. *Слабо зв'язний орграф D має обхід сторожа тоді й тільки тоді, коли його сюр'єктивна конденсація D_{sur}^* має домінуючу вершину.*

Відомо [1], що будь-який турнір T має обхід сторожа, причому довжина найкоротшого такого обходу може бути явно порахована в термінах числа домінування T .

Орграф D називається узагальненою орієнтацією графа G , якщо G отримується з D “забуванням” орієнтацій дуг та ігноруванням 2-циклів. Формально, $V(D) = V(G)$ та $uv \in E(G)$ тоді й тільки тоді, коли $u \rightarrow v$ або $v \rightarrow u$ в D . Наприклад, узагальнені орієнтації повних графів називаються напівповними орграфами. Орграф D називається простою орієнтацією G , якщо D отримується з G розставленням орієнтацій

на ребрах. Таким чином, прості орієнтації не мають 2-циклів. Наприклад, турніри є простими орієнтаціями повних графів.

У роботі [1] було доведено, що кожна проста орієнтація повного мультичасткового графа без джерел завжди має обхід сторожа. Ми покажемо, що якщо замінити прості орієнтації на узагальнені, то дана умова насправді характеризує повні мультичасткові графи у класі зв'язних.

Теорема 1. *Для зв'язного графа G наступні умови еквівалентні:*

- (1) G повний мультичастковий;
- (2) кожна узагальнена орієнтація G без джерел має обхід сторожа;
- (3) кожна узагальнена орієнтація G без 1-точкових сильних компонент має обхід сторожа.

Для простих орієнтацій між умовами Теорема 1 також є логічний зв'язок.

Твердження 1. *Нехай G – зв'язний граф. Розглянемо наступні умови:*

- (1) G повний мультичастковий;
- (2) кожна проста орієнтація G без джерел має обхід сторожа;
- (3) кожна проста орієнтація G без 1-точкових сильних компонент має обхід сторожа.

Тоді $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$, причому жодну імплікацію не можна обернути.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] D. Dyer, J. Howell and B. Pittman, The watchman's walk problem on directed graphs, Australas. J. Combin. **80(2)** (2021), 197–216.
- [2] B. L. Hartnell, D. F. Rall and C. A. Whitehead, The watchman's walk problem: An introduction, Congr. Numer. **130** (1998), 149–155.

ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

А. Сачева

(Волинський національний університет імені Лесі Українки, Київ, Україна)

У наш час відбувається бурхливий розвиток усіх областей науки та технологій, що зумовлює постійне дослідження тих чи інших актуальних проблем, які постають перед людством. Досить часто вирішення певного завдання доцільно розв'язати його на мові графів, а потім результат інтерпретувати у необхідних вихідних термінах. Теорія графів стала нині простим, доступним і потужним засобом вирішення широкого кола питань із різних галузей. У вигляді графів можна, наприклад, інтерпретувати схеми доріг, електричні ланцюги, архітектурні задачі, географічні карти, молекули хімічних сполук, зв'язки між людьми і групами людей. Цю теорію застосовують при проектуванні інтегральних схем і схем управління, при дослідженні автоматів, логічних ланцюгів, блок-схем програм, в економіці і статистиці, хімії та біології, в теорії розкладів тощо.

У математиці теорія графів використовується для розв'язання геометричних задач та задач практичного змісту. Графи лежать в основі багатьох комп'ютерних проблем, які роблять можливими сучасну комунікацію та технологічні процеси. Отже, через графи відбувається проникнення математичних методів в сучасну науку та техніку. Розглянемо деякі застосування теорії графів.

Графи в хімії використовуються для розв'язання різноманітних теоретичних та практичних задач. Застосування теорії графів базується на побудові та аналізі різноманітних хімічних та хіміко-технологічних сполук у вигляді моделей, важливими для яких є лише характер зв'язку між вершинами. Ребра та вершини цих графів відображають хімічні поняття, явища, процеси та об'єкти і відповідно якісні і кількісні зв'язки або певні відношення між ними.

Графи відіграють дуже важливу роль в теорії інформатики. Припустимо, що певне число потрібно знати закодувати у вигляді кінцевих послідовностей різної довжини, що складаються з нулів і одиниць. Якщо мовірність кодових слів задані, то найкращим вважається код, в якому середня довжина слів мінімальна в порівнянні з іншими розподілами ймовірності.

Графи також відіграють велику роль у біологічній теорії розгалужених процесів. Для простоти покажемо тільки одну різновидність розгалужених процесів – розмноження бактерій. Припустимо, що через деякий час кожна бактерія або ділиться на дві нових, або помирає. Тоді для потомства однієї бактерії ми отримаємо два дерева.

Нас буде цікавити лише одне питання: в яких випадках $n - \epsilon$ покоління однієї бактерії нараховує рівно k -нащадків? Математично обчислюється на основі значень попередніх членів послідовності співвідношення, що позначає число необхідних випадків, як відомо в біології під назвою процесу Гальтона-Ватсона. Його можна розглядати, як частковий випадок багатьох загальних формул.

Теорію графів широко застосовують у логістиці. Інтелектуальні транспортні системи можуть працювати, збираючи дані про місцезнаходження від навігаторів автомобілів і передавати інформацію водіям, де і як швидко їздити, щоб зменшити загальне перевантаження. Теорія графів вже використовується авіакомпаніями, які хочуть з'єднати велику кількість міст найефективнішим чином, створити систему переміщення великої кількості пасажирів з найменшою кількістю можливих поїздок. Дана проблема схожа за своєю суттю на задачу про комівояжера. У той же час, авіадиспетчери повинні переконатися, що сотні літаків знаходяться в потрібному місці в потрібний час і запобігти можливим аваріям. Вирішення цього завдання не було б можливим без комп'ютерів і теорії графів. В останні роки спостерігається ще одне важливе застосування теорії графів: Інтернет. Графи використовують для ефективної реклами. Аналізуючи контакти людей, їх вподобання, друзів, вподобання друзів, сторінки, які вони «репостять» у комп'ютерних соціальних мережах (Facebook, Twitter тощо), можна орієнтувати свою рекламу досить ефективно. Цікавим є факт, що дві навмання обрані сторінки у соціальній мережі Facebook можна з'єднати ланцюгом довжиною 12 ребер. Сторінки в Інтернеті можна представляти як вершини графа, а наявність зв'язку між сторінками як ребро, інцидентне відповідним вершинам. Перші пошукові машини в Інтернеті виконували пошук за ключовим словом та створювали ієрархію сторінок за кількістю переглядів. Використовуючи таку систему, вони не могли визначити, чи відповідає сторінка запиту або є спамом.

Отже, теорія графів має свої переваги у вирішенні окремих прикладних завдань. А саме: наочність, доступність, конкретність. Багато найрізноманітніших завдань формуються в термінах точок і зв'язків між ними, тобто в термінах графів. Наприклад, можуть бути сформульовані завдання складання розкладу аналізу мереж в електротехніці, в програмуванні, в проектуванні електронних схем, в економіці, в соціології і т.д., тому за допомогою, теорії графів, можна вирішувати математичні, логічні та безліч інші задачі.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Берж К. *Теорія графів і її застосування*. // М. МУЛ, — 1962. — С. 34-66.
- [2] Березіна Л.Ю. *Графи і їх застосування. Посібник для вчителів*. — М. Просвіта, 1979. — 143 с.
- [3] Березіна Л.Ю. *Графи і їх застосування*. — 1965. — 176 с.
- [4] Харари Ф., В.П. Козирева, під ред. Г.П. Гаврилова *Теорія графів*. — Вид. 2-е. М. Едиториал УРСС, — 2003. — 296 с.

ПРО ДЕЯКІ КЛАСИ ІМБАЛАНСНО-ГРАФІЧНИХ ГРАФІВ

А.Д. Сердюк, С.О. Козеренко

(Національний університет “Киево-Могилянська академія”, Київ, Україна)

У цій доповіді розглядатимуться прості скінченні неорієнтовані графи. Імбалансом ребра називається модуль різниці степенів вершин цього ребра, а мультимножина імбалансів усіх ребер деякого графа G — його імбалансною послідовністю, що позначається як M_G .

Іншим відомим поняттям у теорії графів є поняття графічної мультимножини.

Означення 1. Послідовність невід’ємних чисел A є *графічною*, якщо існує такий граф G , послідовність степенів якого збігається з A .

Одним з найбільш відомих способів перевірки того, чи є деяка мультимножина графічною, є критерій, опублікований П. Ердемем та Т. Галаї в 1960 році [1].

Із наданих означень природним чином виникає питання про те, чи є імбалансна послідовність деякого графа G графічною. З огляду на це маємо таке означення:

Означення 2. [2] Граф G називається *імбалансно-графічним*, якщо його імбалансна послідовність M_G є графічною.

Наразі відомо про деякі класи графів є імбалансно-графічними, а саме: дерева, повні k -часткові графи, повні розширення ланцюгів, циклів та повних графів, графи зі сталим імбалансом, графи підрозбиттів [2, 3].

У цій роботі ми зосередимося на інших класах графів, що є імбалансно-графічним, серед яких антирегулярні та уніциклічні графи, а також конструкція подвоєння імбалансно-графічного графа. Окрім цього, ми розглянемо достатні умови для того, щоб сума двох імбалансно-графічних графів була імбалансно-графічною. Ці результати були опубліковані у статті [4].

Твердження 1. *Антирегулярні графи є імбалансно-графічними.*

Твердження 2. *Уніциклічні графи є імбалансно-графічними.*

Твердження 3. *Нехай G — імбалансно-графічний граф. Тоді його подвоєний граф $D[G]$ теж імбалансно-графічний.*

Теорема 1. *Нехай G — граф на n вершинах та $m \geq n - 1$. Тоді $G + \overline{K_m}$ є імбалансно-графічним.*

ЛІТЕРАТУРА

[1] P. Erdős and T. Gallai, Graphs with given degree of vertices, Mat. Lapok **11** (1960), 264–274.

- [2] S. Kozerenko and V. Skochko, On graphs with graphic imbalance sequences, *Algebra Discrete Math.* **18(1)** (2014), 97–108.
- [3] S. Kozerenko, Edge imbalance sequences and their graphicness, *J. Adv. Math. Stud.* **12** (2019), 50–62.
- [4] S. Kozerenko and A Serdiuk, New results on imbalance graphic graphs, *Opuscula Math.* **43(1)** (2023), 81–100.

ВЛАСТИВОСТІ ДІАГРАМ ВОРОНОГО НА УНІЦИКЛІЧНИХ ГРАФАХ

Д.Т. Соколова

(Національний університет «Киево-Могилянська академія», Київ, Україна)

Нехай (X, d) метричний простір, де $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Нехай P підмножина X . Будемо називати елементи множини P сайтами (sites), щоб відрізнити їх від довільних точок X .

Клітини (cell) Вороного [1] для кожного $s \in P$ визначаються так:

$$cell_{(X,d)}(s, P) = \{x \in X \mid \forall s' \in P : d(s, x) \leq d(s', x)\}$$

Діаграмою Вороного [1] множини P в просторі (X, d) називається:

$$\mathbb{V}_{(X,d)}(P) = \{cell_{(X,d)}(s, P) \mid s \in P\}$$

У даній роботі, розглянемо метричний простір заданий на множині вершин графа $G = (V, E)$ з метрикою d_G , що визначається для довільних двох вершин u та w як довжина найкоротшого шляху, що їх з'єднує.

Нехай $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ є підграфом уніциклічного графу $G = (V, E)$, який є простим циклом.

Вершина $u \in V \setminus \hat{V}$ графу G проектується в вершину $w \in \hat{V}$ [2], якщо для будь-якої іншої вершини $q \in \hat{V}$, виконується нерівність:

$$d_G(u, w) < d_G(u, q)$$

Теорема 1. *Якщо $P \subseteq C$, або всі точки множини P проектуються в різні точки циклу графа, то граф діаграми Вороного є графом-зіркою з нескінченними променями.*

Теорема 2. *Якщо дві вершини p_1 та p_2 множини P проектуються в одну вершину s циклу \hat{V} і $d_G(p_1, s) = d_G(p_2, s)$, і є рівновіддаленою, то s належить ребру діаграми Вороного.*

Теорема 3. *Якщо виконуються умови Теорема 2 і вершина u суміжна з s в циклі, рівновіддалена від p_1 та p_2 і найближчої вершини p_j множини P , то ребро us належить графу діаграми Вороного.*

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Bonnet, É., Cabello, S., Mohar, B., Pérez-Rosés, H. (2020). *The inverse Voronoi problem in graphs I: hardness.* — *Algorithmica*, 82(10), 3018-3040.
- [2] Dudenko, M., Oliynyk, B. (2017). *On unicyclic graphs of metric dimension 2.* — *Algebra and Discrete Mathematics*, 23(2).

ВЛАСТИВОСТІ ГРАФУ ІДЕАЛІВ Z_n

Є.О. Утенко

(Національний університет «Киево-Могилянська академія», Київ, Україна)

Нехай G – простий граф.

Спочатку нагадаємо означення триаметру графа, його ексцентриситету та центру і хроматичного числа.

Означення 1. [1] Триаметром графа G є параметр

$$tr(G) = \max\{d_G(a, b) + d_G(a, c) + d_G(b, c) : a, b, c \in V(G)\},$$

де d_G – відстань задана на графі G , що визначається для довільних двох точок як довжина найкоротшого шляху між ними.

Означення 2. Ексцентриситет вершини v у неорієнтованому графі G визначається як максимальна відстань між v та будь-якою іншою вершиною в G . Тобто, це найбільша кількість ребер, які необхідно пройти, щоб дістатися від v до будь-якої іншої вершини в графі.

Ексцентриситет вершин v можна позначити, як:

$$ecc(v) = \max\{d(v, u) : u \in G\}$$

Означення 3. [3] Центр графа – множина центральних вершин, тобто вершин з мінімальним ексцентриситетом.

Означення 4. [2] Мінімальна кількість фарб, які потрібні для розфарбування графа G називається його хроматичним числом і позначається $\chi(G)$.

Означення 5. [4] Для будь-якого ідеалу $I = \langle p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r} \rangle$ кільця Z_n з $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$, визначаємо набір $L(I) = \{p_i : \beta_i = \alpha_i\}$, який називається набір рівнів для I . Ідеал I називається і-рівневим ідеалом, якщо потужність $L(I)$ є i .

Означення 6. [4] Для комутативного кільця R граф ідеального перетину є простим графом, вершини якого є ненульовими власними ідеалами, а дві вершини з'єднані ребром, якщо їх перетин також є ненульовим ідеалом.

Нехай, $G(R)$ є графом ідеального перетину.

Теорема 1. Для будь-якого додатнього цілого числа $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, при $k \geq 3$, триаметр графу перетину ідеалів кільця Z_n дорівнює 6.

Теорема 2. Центрами графу перетину ідеалів кільця Z_n є ідеали нульового класу.

Теорема 3. *Хроматичне число графу перетину ідеалів кільця Z_n дорівнює сумі кількості елементів нульового класу еквівалентності та класу з найбільшою кількістю елементів.*

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Artem Hak, Sergiy Kozerenko, Bogdana Oliynyk: Discrete Applied Mathematics // A note on the triameter of graphs, p.278-279.
- [2] Bondarchuk Y., Oliynyk B. Graph Theory // Basics of Discrete Mathematics (2007): 125.
- [3] Kuzmenko I. Graph theory (2020): 12.
- [4] Laxman Saha, Mithun Basak Kalishankar Tiwary (2021) Metric dimension of ideal-intersection graph of the ring Z_n , AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 18:2, 101-105

ОПТИМІЗАЦІЯ БУЛЕВИХ СХЕМ

К.О. Черевко

(Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ, Україна)

Цифрові інтегральні мікросхеми є ключовими компонентами усіх сучасних електронних пристроїв. Висока конкуренція в галузі електроніки змушує компанії постійно вдосконалювати технології виробництва та створює великий попит на все більш компактні, потужні, однак, енергоефективні мікросхеми. Розвиток технологій в області виробництва напівпровідників дозволив розміщувати велику кількість мініатюрних транзисторів на компактних кремнієвих пластинах. Однак, подолання фізичних обмежень стає дедалі складнішим, а подальше зменшення розмірів компонентів призводить до значного збільшення вартості виробництва кремнієвих пластин [1]. Це перетворює задачу проектування ефективних цифрових схем на ключове завдання у розробці сучасних електронних систем.

Процес проектування мікрочіпів складається з багатьох етапів, проте найбільша кількість оптимізацій відбувається на етапі логічного синтезу — процесу перетворення абстрактного опису бажаної поведінки цифрової схеми у схему з логічних вентилів, яка задовольняє певним обмеженням щодо продуктивності, ціни, площі схеми та споживання електроенергії. Схему логічних вентилів легко перетворити у сукупність булевих функцій, які задають відповідні булеві схеми. І тому центральною задачею логічного синтезу є оптимізація булевих схем, а саме мінімізація їх площі або затримки. Площа схеми — кількість її вершин. Затримка схеми — кількість вершин найдовшого шляху в схемі.

Метою роботи була побудова нового алгоритму мінімізації площі. У новоствореному алгоритмі втілено сумісне використання розкладів Шеннона і Давіо, а також повного перебору порядків синтезу змінних. Результати роботи нового алгоритму було порівняно із результатами роботи трьох інших алгоритмів, а також найкращими результатами, представленими на всесвітньовідомій конференції *International Workshop on Logic and Synthesis 2022* [2] (в якості вхідних даних для досліджуваних алгоритмів використовувались тестові приклади з вищезгаданої конференції).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Dr. Ian Cutress *TSMC Financial Year 2022*, <https://morethanmoore.substack.com/p/tsmc-financial-year-2022>.
- [2] *IWLS 2022 Programming Contest*, <https://github.com/alanminko/iwls2022-ls-contest>.

Секція 4.

Теорії алгоритмів, інформатики

СТВОРЕННЯ НАВЧАЛЬНО-ІГРОВОГО ПРОГРАМНОГО ЗАСОБУ ДЛЯ НАВЧАННЯ ОСНОВ АЛГОРИТМІЗАЦІЇ ТА ПРОГРАМУВАННЯ

М.В. Гостренко

(УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна)

Анотація. У роботі розглянуто використання ігрових програмних засобів у навчанні, а саме для вивчення основ алгоритмізації та програмування. Досліджено такі поняття, як ігровий дизайн, гейміфікація та навчання на основі гри. Результатом дослідження є база знань про ігрові програмні засоби, гейміфікацію, поєднання гри з елементами навчання, а також розроблений на її основі навчально-ігровий програмний засіб для навчання основ алгоритмізації та програмування. Програмний засіб створюється з метою стимулювання навчання та початкового вивчення таких понять, як програмування та алгоритми.

Ключові слова: навчально-ігровий програмний засіб, гейміфікація, ігровий дизайн, ігровий рушій, алгоритми, програмування.

Вступ. Велика кількість людей в сучасному світі зустрічається з труднощами у вивченні навчального матеріалу та можуть залишити спроби навчання через високий поріг входження. Особливо це стосується вивченню таких понять, як програмування та алгоритми. В такому випадку варто зацікавити здобувачів освіти для належного навчання та використати інший підхід, а саме вивчення матеріалу або надання базових знань через навчально-ігрові програмні засоби. Навчання у такий спосіб стимулює вивчення матеріалу здобувачами освіти.

Постановка задачі. Щоб створити навчально-ігровий програмний засіб, потрібно використовувати принципи ігрового дизайну, гейміфікації та навчання на основі гри.

Ігровий дизайн – це процес створення ігрових правил та поставлених навколо них задач. До його завдань відносяться:

- збереження фокусу користувача на поставлених цілях,
- оповіщення та підказки щодо їх виконання,
- продумування логічних подій та реакції на них,
- створення кількох варіантів поведінки,
- прогресія та балансування темпу під час просування у грі,
- розробка відповідного оточення та його фізичних властивостей,
- постійне зацікавлення користувача [1].

Гейміфікація – це використання ігрових підходів для неігрових процесів. В навчанні цей принцип завжди використовувався, адже система оцінювання, за якою складають рейтинг успішності здобувачів освіти також є гейміфікацією. Співробітники школи Gios School вважають, що гейміфікація може задовольнити потреби здобувачів освіти [4], такі як:

- Потреба в автономії – здобувач освіти повинен вибрати як виконати задачу.
- Потреба у компетентностях – він повинен зрозуміти суть задачі і впоратись з нею.
- Потреба у визнанні – здобувач освіти може поділитись своїми досягненнями з іншими.

Таким чином, процес навчання буде для здобувачів освіти цікавим, а щоб досягти цього, потрібно:

- Запропонувати винагороду за виконані завдання – бали або інші матеріальні та нематеріальні цінності.
- Дати можливість ділитись результатами – брати участь в рейтингу або ж дозволити виставляти свої досягнення в соціальних мережах.
- Обережно стимулювати конкуренцію, так як деяких це мотивує, а інші можуть навпаки втратити бажання навчатись.
- Надавати швидкий зворотній зв'язок на ті чи інші дії [4].

Для використання відеоігор у навчальному процесі використовують поняття Game Based Learning, тобто навчання на основі гри. За концепцією поняття, навчальні відеоігри мають такі переваги:

- зацікавлення навчальним процесом,
- постановка цілей,
- ігрове освоєння матеріалу,
- вибір рівня складності,
- інтерактивність і симуляційний ефект,
- розвиток дрібної моторики,
- тренування комплексу життєво-важливих навичок [3].

Основна частина. Будь-які відеоігри різних жанрів можуть розвинути в людині ті чи інші навички. Деякі розвивають реакцію та критичне мислення, інші – покращують логічні навички та здатність планування. Але існує окремий вид комп'ютерних ігор, які надають знання про певну галузь.

Під час створення навчальної гри для вивчення основ алгоритмізації та програмування було обрано жанр головоломки, за допомогою якого можна найкраще виразити навчальний елемент.

Для розробки відеоігор використовують ігрові рушії – програмне середовище комп'ютерної гри, використання якого відповідає за її технічну сторону, полегшує розробку та допомагає налаштувати логіку та ігровий процес [2].

Для власного навчально-ігрового програмного засобу було обрано рушії під назвою Construct 3. Він базується на HTML5 та написаний на мові програмування JavaScript. За допомогою цього рушія реалізуються елементи візуального програмування, що дозволяє задавати логіку гри блоками. Додатково можна вбудовувати власний код на мові JavaScript [5]. Створення гри відбувається за допомогою макетів, на яких розташовані об'єкти та прив'язаних до них листів подій, де програмується логіка гри [1].

Власна навчальна відеогра буде мати назву «Code Lands». Суть гри полягає у знаходженні та переміщенні головним героєм, керованим користувачем, певні блоки з командами, щоб вони утворювали послідовність виконання цих команд. Наприклад, на рівні існує кнопка та блоки з командами: «if (якщо)», «button_on (кнопку натиснуто)», «then (тоді)» та «win (перемога)». Якщо головний герой, керований гравцем, розташує блоки з командами у такому порядку, то під час натискання кнопки рівень буде виконано. Алгоритм потрібних дій задається для кожного рівня різними поведінками блоків, а саме:

- Тверде тіло – дозволяє об'єкту бути непрохідним для інших об'єктів.
- Рух по клітинам – дозволяє об'єктам пересуватись на певну відстань за раз.
- Поле зору – дозволяє знаходити одні об'єкти іншими.

Завдяки цим поведінкам забезпечується рух головного герою, переміщення ним блоків та логіка команд для виконання.

Висновки. Навчально-ігровий програмний засіб для вивчення основ алгоритмізації та програмування створюється з метою зацікавити користувачів та надати базові знання для вивчення основ алгоритмізації та програмування. Така гра повинна реалізувати принципи гейміфікації, навчання на основі гри та ігрового дизайну, а також створити належне уявлення про основи алгоритмізації та програмування для тих, хто вирішив їх вивчати.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Construct 3. The best 2D game engine.* URL: <https://www.construct.net/en/make-games/games-editor>.
- [2] *Gaming Engines.* URL: <https://www.arm.com/glossary/gaming-engines>.
- [3] Воевода А.Л., Михайленко Л.Ф., Пудова С.С. *Застосування концепції «Game based learning» в освітньому процесі* // Наук. часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 3. Вип. 20, 2018. 38-44 с.
- [4] *Гейміфікація в освіті. Як ігрові механіки допомагають в навчанні.* URL: <https://blog.gioschool.com/gamification>.
- [5] Франчук В.М. *Методика навчання інформатичних дисциплін в педагогічних університетах з використанням веборієнтованих систем: монографія.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2020. 434 с.
- [6] *Що таке дизайн відеоігор: основні принципи геймдизайну.* URL: <https://vokigames.com/ua/scho-take-dizajn-videoigor-osnovni-printsipi-gejmdizajnu/>.

ON REGULARISATION BY MEANS OF CONVEX OPERATOR IN RKHS

O.M. Kravchuk

(National University of Kyiv-Mohyla Academy)

Let $Z = X \times Y$ be a sample space with a compact metric space X and $Y \subset \mathbb{R}$, and dataset $\mathbf{z} = \{(x_i, y_i) \in X \times Y, i = 1, \dots, m\}$ are i.i.d. samples drawn according to an unknown probability measure ρ on the sample space $Z = X \times Y$. The learning goal is to estimate a function f (based on the dataset $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$) such that $f(x)$ predicts the output y for any given input x .

One of the possible approaches for the construction of function f is to employ some loss function and find f that minimises the generalization error

$$\int_Z l(x, y, f) d\rho(x, y).$$

For the square loss function $l(x, y, f) = (f(x) - y)^2$, taking into account $\rho(x, y) = \rho(y|x)\rho_X(x)$, we have a definition of the regression function of ρ

$$f_\rho = \arg \min_f \int_Z (f(x) - y)^2 d\rho(x, y) = \int_Y y d\rho(y|x).$$

Learning algorithms aim to construct a good estimator of the regression function over some appropriate space $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}_{\rho_X}^2$ called hypothesis space, as

$$f_{\mathcal{H}} = \arg \min_{f \in \mathcal{H}} \int_Z (f(x) - y)^2 d\rho(x, y) = \arg \min_{f \in \mathcal{H}} \int_Z (f(x) - f_\rho(x))^2 d\rho(x, y).$$

One of the possible options for the hypothesis space is a reproducing kernel Hilbert space, such that there exists a Mercer kernel $K : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e. continuous symmetric and positive semidefinite function) such that for $K_x : X \rightarrow \mathbb{R}$, $K_x(t) = K(x, t)$ the span of the set $\{K_x : x \in X\}$ is dense in \mathcal{H} .

Означення 1. Let $K : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ be continuous, symmetric and positive semidefinite (i.e. for any finite set $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$, the matrix $\{K(x_i, x_j)\}_{i,j=1}^n$ is positive semidefinite). Then K is called a *Mercer kernel*.

Означення 2. Let X be a non-empty set and \mathcal{H} be a Hilbert space of real-valued functions on X . If the pointwise evaluation map $F_x : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, defined by

$$F_x(f) = f(x), \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

is continuous for every $x \in X$, then \mathcal{H} is called *reproducing kernel Hilbert space*.

For $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^m$ let's define the sampling operator $S_{\mathbf{x}} : \mathcal{H}_K \rightarrow \mathcal{R}^m$ by

$$S_{\mathbf{x}}(f) = (f(x))_{x \in \mathbf{x}}.$$

In practice, neither f_{ρ} , nor ρ is known. The only available information is a dataset $\mathbf{z} = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$.

We consider a framework for multi-penalty regularization, which allows controlling the complexity of the function in ambient space and geometry of the probability space:

$$\tilde{f} = \arg \min_{f \in \mathcal{H}} \left\{ \frac{1}{n} \|S_{\mathbf{x}}(f) - \mathbf{y}\|^2 + \lambda_1 \|f\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda_2 \|Bf\|_{\mathcal{H}}^2 \right\},$$

where λ_1, λ_2 are non-negative real numbers called regularization parameters, and B is a bounded operator on \mathcal{H} , it's easy to see, that regularization terms $\|f\|_{\mathcal{H}}^2$ and $\|Bf\|_{\mathcal{H}}^2$ are convex.

By taking the functional derivative, it's easy to see that the optimization functional has a unique minimizer

$$f_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda_1, \lambda_2} = (S_{\mathbf{x}}^* S_{\mathbf{x}} + \lambda_1 I + \lambda_2 B^* B)^{-1} S_{\mathbf{x}}^* \mathbf{y}.$$

The Representer Theorem states, that minimizer $f_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda_1, \lambda_2}$ admits an expansion

$$f_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda_1, \lambda_2}^* = \sum_{i=1}^{n+u} \alpha_i K(x_i, x)$$

in terms of the n labelled and u unlabeled examples, and therefore, allows reducing the optimization problem to the following convex differentiable objective function of the $(n+u)$ -dimensional variable $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_{n+u}]^T$:

$$\frac{1}{n} (Y - JK\alpha)^T (Y - JK\alpha) + \lambda_1 \alpha^T K \alpha + \frac{\lambda_2}{(n+u)^2} \alpha^T K L K \alpha,$$

where K is the $(n+u) \times (n+u)$ Gram matrix, $Y = [y_1, \dots, y_n, 0, \dots, 0]$ (with u zeros in the end), and $J = \mathbf{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ with n ones and u zeros. Calculating the derivative, the following is obtained:

$$\alpha^* = \left(JK + \lambda_1 n I + \frac{\lambda_2 n}{(n+u)^2} LK \right)^{-1} Y.$$

Note that for $\lambda_2 = 0$ we have the well-known solution for the regularized least squares algorithm.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ РОЗВ'ЯЗКУ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ КЛІТИННИХ АВТОМАТІВ

М.І. Кривошея

(Національний університет «Киево-Могилянська академія», Київ, Україна)

В Україні гостро стоїть питання щодо якісних показників навченості випускників закладів загальної середньої освіти з математики в цілому та з геометрії зокрема, тому проблема якісної підготовки до ЗНО, задача розробки відповідних моделей, які б слугували вирішенню цих проблем, продовжують залишатися актуальними.

Проектування моделі здійснено з огляду на вимоги Державних навчальних програм [1]. Масив задач сформовано на основі аналізу підручників з геометрії, рекомендованих МОН України. В значній мірі це задачі для 7 класу [2], частково для 8 класу [3]. Всі задачі, у відповідності до навчальних тем, структуровано за десятьма типами.

Робота розробленого програмного продукту, яка є частиною рекомендаційної системи, за суттю, є реалізацією двох послідовних етапів: перший – допомога в побудові рисунку до задачі, наступний – супровід у процесі власне розв'язку задачі – знаходженні числових значень шуканих геометричних величин. Впродовж всього процесу розв'язку, починаючи з побудови рисунку, має місце діалог «користувач-програма».

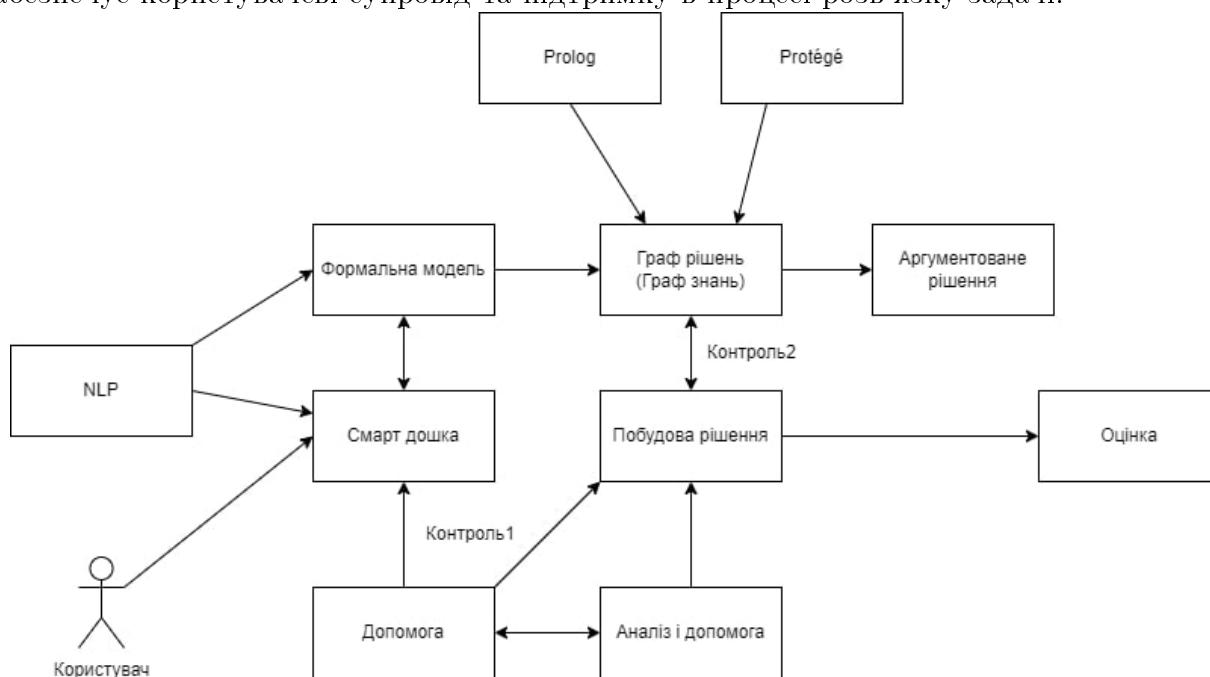
Розробка моделі, в частині побудови рисунку, базується на клітино-автоматних підходах. Використано класичний клітинний автомат та сусідство Мура. Реалізація саме таких підходів сприяє спрощенню аналізу правильності рисунку. Організація виконання побудови на «смарт дошці» допомагає користувачеві зобразити обраний елемент рисунку. В процесі контролю за побудовою рисунку програма контролює знання користувача та, за необхідності, корегує його дії, а також надає йому в допомогу необхідний теоретичний матеріал.

Процес знаходження шуканих величин (власне розв'язок) є покроковим. На кожному кроці програмою забезпечується супровід (допомога) користувачеві. Реалізація супроводу в процесі розв'язання задачі базується на аналізі умови. В ході аналізу з'ясовується, що відомо та що необхідно знайти. Як наслідок, встановлюється (добирається) необхідний тип задачі та будується відповідний вузол у графі рішень – граф знань. Кожна вершина графа пов'язана з іншими вершинами певними правилами переходу, які аргументують зроблений крок. Наступна вершина графа, в порівнянні з попередньою, має більше відомих параметрів. На кожному етапі покрокового розв'язання задачі в ході постійного діалогу «користувач-програма» відбувається

перевірка знань користувача. Якщо виявлено помилку, то для її усунення програмою аналізується відповідна тема та надається користувачеві підказка. Всі додакові побудови, які необхідно зробити на рисунку, контролюються і супроводжуються програмою. По завершенню процесу розв'язку задачі користувач отримує індивідуальні статистичні дані щодо відповідної теми з інформацією про допущені помилки, якщо такі мали місце.

Суть роботи розробленого ПП відображає блок-схема (див. Рис.1). Формальна модель записується як екземпляр класу (наприклад трикутник). Вносяться відповідні дані згідно умови задачі. В процесі проходження від вузла до вузла по графу рішень, коли потрапляємо до вузла, де є рішення, то генерується аргументоване рішення, яке, за потреби, може бути показане користувачеві. У випадку появи задачі, які належать до типів задач, які не передбачені системою, використовується спеціальні модулі системи, які базуються на мові програмування Prolog або на фреймворку Protégé.

Результатом роботи є кінцевий програмний продукт, написаний мовою C#, який забезпечує користувачеві супровід та підтримку в процесі розв'язку задачі.



ЛІТЕРАТУРА

- [1] Програма з математики для 6-9 класів ЗЗСО
<https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/onovlennya-12-2017/5-programa-z-matematiki.docx>.
- [2] Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. *Геометрія: підручник для 7-го класу*. —Харків 2008. — 200 с.
- [3] Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. *Геометрія: підручник для 8-го класу закладів загальної середньої освіти. 2-ге видання, перероблене*. —Харків 2021. — 208 с.

БАЛАНСУВАННЯ КАТЕГОРІЙ У ЦІЛЬОВОМУ КЛАСІ В ТРЕНУВАЛЬНИХ ДАНИХ ДЛЯ ЗАДАЧ КЛАСИФІКАЦІЇ ТЕКСТУ

Ю.А. Кузьменко, О.Р. Смиш

(Національний університет «Киево-Могилянська академія», Київ, Україна)

Класифікація тексту — це процес розподілу фрагмента тексту на заздалегідь визначені класи на основі його змісту. У багатьох випадках розподіл класів у навчальних даних може бути незбалансованим. У таких випадках модель може стати упередженою до більшості класів, що призводить до неточної класифікації класів меншин. Для вирішення цієї проблеми запропоновано методи балансування класів, які уможливають покращення продуктивності моделей класифікації текстів [1].

Теорема 1. *Балансування розподілу класів у навчальних даних призведе до покращення продуктивності моделі класифікації тексту. Зокрема, оцінка F1 класів меншості покращиться після балансування*

Приклад 4. Експеримент проведено за допомогою мови програмування Python. Завдання класифікації текстів виконувалося на наборі даних, що містив есе з оцінками від 1 до 10. Набір даних був незбалансованим, деякі категорії мали значно більшу кількість зразків, ніж інші

Для балансування набору даних використано клас `RandomOverSampler` з пакету `imblearn`. Цей клас реалізує алгоритм SMOTE, який передискретизує клас меншості, генеруючи синтетичні вибірки. У цьому дослідженні використано стратегію вибірки "не більшість яка передбачає перевибірку всіх класів, окрім класу більшості. Ця стратегія гарантує, що мажоритарний клас не буде переоброблений, що може призвести до надмірного перенавчання моделі [2].

Після балансування набору даних проведено навчання нейронної мережі глибокого навчання. Ефективність мережі оцінено за допомогою показника F1, який є середнім гармонійним значенням точності та запам'ятовування. Показник F1 обраховано для кожного класу, а потім усереднено для отримання загального показника F1.

Результати. До балансування набору даних, показник F1 моделі становив 0,61. Після балансування набору даних, показник F1 покращено до 0,9. Показник F1 для класів меншин також покращено після балансування. Наприклад, показник F1 класу "5" змінився з 0,34 до 0,94 після балансування, а показник F1 класу "6" перетворився з 0,45 до 0,97.

Висновок. У дослідженні продемонстровано, що балансування розподілу класів у навчальних даних є ефективним підходом для покращення продуктивності моделі класифікації тексту. Клас `RandomOverSampler` зі стратегією вибірки "не більшості" може бути використано для балансування набору даних.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] H. He, Y. Ma. *He H. Imbalanced Learning: Foundations, Algorithms, and Applications.*— 2013. — 216 с.
- [2] Guillaume Lemaitre [Електронний ресурс] <http://surl.li/hogmx>

МОДЕЛЮВАННЯ СТОХАСТИЧНИХ ІГОР ЗІ СКІНЧЕННИМ ГОРИЗОНТОМ НА ПРИКЛАДІ ГРИ ГО

І.В. Мощенко

(Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна)

Стохастичні ігри [1] є добре відомою моделлю для формального проектування й аналізу ймовірнісних багатоагентних систем [2]. У цих іграх гравці приймають рішення, не знаючи заздалегідь, які події стануться в майбутньому. У стохастичних іграх випадковість може бути пов'язана зі зміною вартості різних виходів гри, ймовірністю появи певних подій або з вибором опонентами різних стратегій. Тому для розробки стратегій у стохастичних іграх, на кшталт Го, треба враховувати те, як може поводити себе супротивник.

Аналіз праць науковців допоміг підготувати перший розділ роботи. У ньому подано основи дослідження та проведено аналіз наукових праць по проблемі дослідження. Також здійснено опис гри та моделі, що лежить в її основі.

Другий розділ присвячено моделюванню стохастичних ігор на прикладі гри Го. Змінено умови гри, виконано математичні розрахунки, що лежать в основі моделі, а також створено програмний продукт, який призначено для швидкого і зрозумілого пояснення стохастичних ігор у вигляді гри.

Метою цієї роботи є дослідити стохастичні ігри та їхні різновиди, змінити правила та механіки гри Го, розробити свою гру яка зможе бути корисною для того, щоб на її прикладі пояснювати що таке стохастичні ігри.

Предметом дослідження є стохастичні ігри зі скінченим горизонтом.

Об'єктом даного дослідження є гра Го, що є прикладом стохастичної гри з кінцевим горизонтом та її математична модель.

Відповідно до мети ставляться задачі: дослідити стохастичні ігри зі скінченим горизонтом, проаналізувати гру Го та її математичну модель, а також змоделювати та запрограмувати засобами Java Swing власну гру основна стратегія якої будуватиметься за допомогою функції втрат [3].

Аналіз праць учених, а також вивчення теми стохастичних ігор і гри Го, допомогли придумати та реалізувати гру, що є прикладом стохастичних ігор із кінцевим горизонтом. Ця гра доволі проста в освоєнні. Так само, як і будь-якому проекту, цій грі ще є куди рости і не варто зупинятися на досягнутому результаті, адже якщо докласти зусиль, то цю гру можна довести до більш приємного вигляду і можливо

навіть відкрити її для загального доступу. Цій грі буде приділено ще часу, а також випущено код у загальний доступ.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] [Електронний ресурс] // URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Stochastic_game.
- [2] Michael Bowling, Manuela Veloso *An Analysis of Stochastic Game Theory for Multi-agent Reinforcement Learning* // "School of Computer Science Carnegie Mellon University Pittsburgh, PA 15213 [Електронний ресурс]". – 2000. – Режим доступу до ресурсу: <https://courses.cs.duke.edu/fall09/cps296.1/stochasticgamesandlearning.pdf>
- [3] [Електронний ресурс] // URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Функція_витрат.

АЛГОРИТМ ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ З НЕРЕГУЛЯРНИМ ТРЕНДОМ

А.С. Нитник

(УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна)

Прогнозування, на сьогодні, це одна з найскладніших, а також найбільш затребуваних і актуальних задач аналізу даних. Основна складність прогнозування, як процесу, пов'язана з тим, що необхідно аналізувати та проводити оцінку великих обсягів даних, а також з ускладненням методів та появою нових підходів до прогнозування різних процесів. Дана робота є продовженням робіт [4-6], в яких було запропоновано аналітичне задання функції, що моделює деякий часовий ряд, досліджено властивості такої функції та подано алгоритм обробки статистичних даних та моделювання заданої функції. В даній роботі розглянуто задачу прогнозування часового ряду з заданими властивостями.

Нехай дано деякий часовий ряд, поданий таблично, де x_i — час, а y_i — деякі числові дані на момент x_i , $i = \overline{0, 10}$. Також відомо, що часовий ряд має графік з самоподібними (самоафінними) властивостями та дана функція є неперервною і не є строго монотонною. Найбільшого значення даний графік набуває у точці $(x_5; y_5)$.

Знормуємо значення аргументу та значення функції на $[0; 1]$. Довжину проекції графіка на вісь Ox , що дорівнює $x_{10} - x_0$, необхідно знормувати до 1: введемо коефіцієнт подібності $k = \frac{1}{(x_{10} - x_0)}$. Паралельно перенесемо графік вздовж осі Ox на величину x_0 вліво. Отже, функція перетворення для значення x_i , $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$, буде: $f(x) = k(x_i - x_0)$, де $k = \frac{1}{(x_{10} - x_0)}$, x_0 — абсциса першої точки графіка.

Аналогічне перетворення зробимо для ординат точок. Довжину проекції графіка на вісь Oy , що дорівнює $y_5 - y_0$, необхідно знормувати до 1, тобто введемо коефіцієнт подібності $h = \frac{1}{(y_5 - y_0)}$. Виконаємо паралельне перенесення графіка вздовж осі Oy вниз на величину y_0 . Отже, функція перетворення для ординат y_i , $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$, буде: $g(y) = h(y_i - y_0)$, де $h = \frac{1}{(y_5 - y_0)}$, y_0 — ордината першої точки.

Нові координати точок позначимо через $(x_i^*; y_i^*)$, $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$. При другому і всіх наступних кроках побудови кожен відрізок ламаної буде замінюватися на ламану, яка складається з 5 ланок. При цьому вершини нових ламаних ділять початковий відрізок в співвідношенні однаково для зростаючих і спадаючих ланок [4].

В роботі [4] було доведено коректність задання функції:

$$f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q^x}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q^y}, \quad (1)$$

$$\alpha_1 \in \{0, \dots, 9\}, \quad \alpha_j \in \{0, \dots, 4\}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad j \geq 2,$$

де $0 < q_i < 1, \sum_{i=0}^9 q_i = 1,$

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} q_{0(2k)} & q_{1(2k)} & q_{2(2k)} & q_{3(2k)} & q_{4(2k)} \\ q_{0(2k-1)} & q_{1(2k-1)} & q_{2(2k-1)} & q_{3(2k-1)} & q_{4(2k-1)} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{0, \infty},$$

$$0 < q_{ij} < 1, \sum_{i=0}^4 q_{ij} = 1, \quad j \in \{0, 1, \dots, 4\},$$

$$b_{\alpha_1} = \begin{cases} 0, & \alpha_1 = 0, \\ \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} q_i, & \alpha_1 \in \{1, 2, \dots, 9\}, \end{cases} \quad b_{\alpha_j j} = \begin{cases} 0, & \alpha_j = 0, \\ \sum_{i=0}^{\alpha_j-1} q_{ij}, & \alpha_j \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{cases}$$

$$x^* = b_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} b_{\alpha_n \alpha_{n-1}} q_{\alpha_1} \prod_{j=2}^{n-1} q_{\alpha_j \alpha_{j-1}} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q^x}. \quad (2)$$

Покладемо

$$0 < q_i \leq u_i < 1, \quad u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = 1, \quad 1 - u_5 + u_6 - u_7 = u_8 - u_9 = 1,$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{0(2k)} & u_{1(2k)} & u_{2(2k)} & u_{3(2k)} & u_{4(2k)} \\ u_{0(2k-1)} & u_{1(2k-1)} & u_{2(2k-1)} & u_{3(2k-1)} & u_{4(2k-1)} \end{pmatrix}, \quad = \overline{0, \infty},$$

$$0 < q_{ij} \leq u_{ij} < 1, \sum_{i=0}^4 (-1)^i u_{ij} = 1,$$

$$d_{\alpha_1} = \begin{cases} 0, & \alpha_1 = 0, \\ \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} (-1)^i u_i, & \alpha_1 \in \{1, 2, \dots, 9\}, \end{cases}$$

$$d_{\alpha_j j} = \begin{cases} 0, & \alpha_j = 0, \\ (-1)^{\alpha_j-1} u_{0\alpha_{j-1}}, & \alpha_j = 1, \\ (-1)^{\alpha_j-1} (u_{0\alpha_{j-1}} - u_{1\alpha_{j-1}}), & \alpha_j = 2, \\ (-1)^{\alpha_j-1} (u_{0\alpha_{j-1}} - u_{1\alpha_{j-1}} + u_{2\alpha_{j-1}}), & \alpha_j = 3, \\ (-1)^{\alpha_j-1} (u_{0\alpha_{j-1}} - u_{1\alpha_{j-1}} + u_{2\alpha_{j-1}} - u_{3\alpha_{j-1}}), & \alpha_j = 4, \end{cases}$$

$$y^* = d_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} d_{\alpha_n \alpha_{n-1}} u_{\alpha_1} \prod_{j=2}^{n-1} u_{\alpha_j \alpha_{j-1}} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q^y}. \quad (3)$$

Дана функція має такі властивості [5].

Властивість 1. $D(f) = [0; 1], E(f) = [0; 1]$.

Властивість 2. Функція, задана рівністю (1), неперервна на $[0; 1]$, при цьому в точці 0 функція неперервна зліва, а в точці 1 — справа.

Властивість 3. Функція, задана рівністю (1), має нескінченну кількість проміжків зростання та спадання.

Властивість 4. Функція, задана рівністю (1), є ніде не диференційовною.

Розглянемо тепер прогнозування часового ряду. Нехай потрібно обчислити значення $y(t)$ для деякого заданого значення $t \in [x_0; x_{10}]$. Переведемо t в Q^x -представлення дійсного числа. Для цього спочатку обчислимо $t' = \frac{t}{x_{10}-x_0}$. Поставимо перед собою задачу знайти перших k цифр Q^x -представлення t' . За допомогою наведеного алгоритму знайдемо відповідні $\alpha_i(t')$, $i = \overline{1, k}$.

На першому кроці обчислимо $\alpha_1(t')$:

$$\alpha_1(t') = \begin{cases} 0, & 0 \leq t' < q_0, \\ 1, & q_0 \leq t' < q_0 + q_1, \\ \dots & \\ 10, & 1 - q_0 \leq t' \leq 1. \end{cases}$$

На другому кроці обчислимо $\alpha_2(t')$. Для цього знайдемо $t'' = t' - \alpha_1(t')$. Тоді $\alpha_2(t')$:

$$\alpha_2(t') = \begin{cases} 0, & 0 \leq t'' < q_0 q_{\alpha_1(t')}, \\ 1, & q_0 q_{\alpha_1(t')} \leq t'' < (q_0 + q_1) q_{\alpha_1(t')}, \\ \dots & \\ 5, & (q_0 + q_1 + \dots + q_3) q_{\alpha_1(t')} \leq t'' \leq (q_0 + q_1 + \dots + q_4) q_{\alpha_1(t')}. \end{cases}$$

Третій та всі наступні кроки до $i = k$ є аналогічними до другого кроку. В результаті ми отримаємо перші k цифр Q^x -представлення $t' = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{Q^x}$. Зрозуміло, що це є наближенням розкладом, оскільки він скінченний. При цьому похибка наближення не перевищує $q_{\alpha_1} \cdot q_{\alpha_2 \alpha_1} \cdot \dots \cdot q_{\alpha_k \alpha_{k-1}}$. Оскільки за заданням $0 < q_i < 1$, $0 < q_{ij} < 1$, то при $k \rightarrow \infty$, добуток прямує до 0. Застосувавши формулу (3) для скінченної кількості доданків можна отримати прогнозоване значення $y(t)$.

$$y(t) = d_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^k d_{\alpha_n \alpha_{n-1}} u_{\alpha_1} \prod_{j=2}^{n-1} u_{\alpha_j \alpha_{j-1}}.$$

Зауважимо, що похибка отриманого значення $y(t)$ не перевищує $u_{\alpha_1} \cdot u_{\alpha_2 \alpha_1} \cdot \dots \cdot u_{\alpha_k \alpha_{k-1}}$. Отже, на основі математичної моделі побудованої раніше, створено алгоритм обробки статистичних даних та моделювання функції, за допомогою якого було розглянуто задачу прогнозування деякого значення часового ряду з малою похибкою та подальшим використанням у прогнозуванні всього часового ряду.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працевитый Н.В., Турбин А.Ф. *Фрактальные множества, функции, распределения*. — Київ: Наук. думка, 1992. — 310 с.
- [2] Вильямс Б. *Торговый хаос*. — Альпина Паблишер, 2018. — 310 с.
- [3] Peters E. E. *Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics*. — John Wiley Sons, Inc, 1994. — 316 p.
- [4] Нитник А.С. *Моделювання часових рядів за допомогою модифікацій Q-зображення дійсних чисел* // Студентські фізико-математичні етюди. — 2021. — № 21. — 123с.
- [5] Нитник А.С. *Дослідження властивостей функцій, заданої за допомогою модифікації Q-зображень дійсних чисел* // Студентські фізико-математичні етюди. — 2022. — № 22. — С. 33-42.
- [6] Нитник А.С. *Алгоритм обробки статистичних даних та моделювання функцій, аргумент і значення яких задані за допомогою Q-зображення дійсних чисел* // Математика, інформатика, фізика: вчора, сьогодні, завтра. Наукова студентська конференція, Київ, 8-10 грудня 2022 р. — 2022. — С. 112.

АТАКИ КАРЛІНІ-ВАГНЕРА НА НЕЙРОННІ МЕРЕЖІ

Д.В. Новиков

(Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна)

Змагальні атаки на нейронні мережі — це генерація деякого "шуму" (змагального прикладу), який після його накладання на початкове зображення (вхідні дані) змушує її помилитися в своєму пропущенні стосовно класифікації цього зображення. Вони бувають цільовими та нецільовими, з різницею у тому, чи має той, хто атакує, намір звести результат роботи нейронної мережі на певних вхідних даних до конкретного визначеного значення чи ні. Атака Карліні-Вагнера - один з типів атак, який наразі вважається найбільш небезпечним і складним для захисту від нього.

1. ЗАДАЧА АТАКИ КАРЛІНІ-ВАГНЕРА

1.1. Модель нейронної мережі. Нейронну мережу можна представити у вигляді функції $F(x) = y$. Модель F також залежить від параметру θ , який буде прийнятий за константу протягом цієї роботи для зручності. Нехай модель застосовує функцію *softmax*. У такому випадку кінцева формули моделі має вигляд

$$F(x) = \text{softmax}(Z(x)) = y.$$

де $Z(x) = z$ — результат кожного шару, окрім *softmax*. Тоді y — розподіл імовірностей для параметра x , який показує до якого класу його можна віднести. Оскільки нейронна мережа зазвичай має декілька шарів, формулу моделі можна покращити:

$$F = \text{softmax} \circ F_n \circ F_{n-1} \circ \dots \circ F_1, \text{ де } F_i = \sigma(\theta_i * x) + \gamma_i,$$

а σ — деяка нелінійна активуюча функція (*tanh*, *sigmoid*, *ReLU*), а θ і γ — параметри моделі.

1.2. Постановка задачі Вагнера-Карліні. Гіпотеза. Нехай є вхідні дані x і ціль $t \neq C(x)$. Тоді можна знайти такий x' , що $C(x') = t$ і x та x' є близькими за певною метрикою відстані, тобто $D(x - x') \Rightarrow 0$. У цьому випадку ми розглядаємо більш складний варіант цільової змагальної атаки.

Метрика дистанції L_p є найбільш вживаною для змагальних атак:

$$L_p = \|x - x'\|_p, \\ \|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Дистанція L_0 вимірює кількість таких координат i , що $x_i \neq x'_i$, тобто показує кількість пікселів, що змінилися в зображенні.

Дистанція L_2 вимірює стандартну Евклідову відстань між x та x' . Вона залишається малою, коли вносяться невеликі зміни у багато пікселів.

Дистанція L_∞ вимірює величину максимальних змін для будь-якого пікселя для умовно нескінченної (необмеженої) кількості пікселів.

$$\|x - x'\|_\infty = \max(|x_1 - x'_1|, \dots, |x_n - x'_n|)$$

Задача. Мінімувати відстань $D(x, x + \delta)$ за умов $C(x + \delta) = t$ і $x + \delta \in [0, 1]^n$, де x — стала. Тобто, знайти таке значення δ , за якого $D(x, x + \delta)$ набуває свого мінімального значення, де D це одна з метрик L_0, L_2, L_∞ , описаних вище.

Описана задача є складною для розв'язання методами нейронних мереж, які нині існують, оскільки обмеження $C(x + \delta) = t$ є нелінійним. Нехай існує цільова функція f , для якої $C(x + \delta) = t$ тоді і тільки тоді, коли $f(x + \delta) \leq 0$. Задача зводиться до вибору оптимальної функції f . Вчені Д.Вагнер і Н.Карліні[1] при розгляді можливих варіантів такої функції дійшли до наступних обмежень щодо умови початкової задачі:

Знайти таке значення δ , за якого $D(x, x + \delta) + c * f(x + \delta)$ набуває мінімального значення, за умови $x + \delta \in [0, 1]^n$, де c — обрана константа за умови $c > 0$. Більш детальний огляд внесення змін до початкової умови описаний у книзі "Towards Evaluating the Robustness of Neural Networks"[1] за авторством Д.Вагнера та Н.Карліні та не буде розглядатися тут для збереження контексту аналізу задачі проведення змагальної атаки. Шляхом тестувань використання різних можливих функцій f автори дійшли висновку, що оптимальним варіантом буде:

$$f(x') = \max(\max(Z(x')_i - Z(x')_t), 0)$$

Для того, щоб задовільнити умову $0 \leq x + \delta \leq 1$, введемо додаткову змінну ω таким чином, що:

$$\delta_i = \frac{1}{2}(\tanh(\omega_i) + 1) - x_i.$$

Оскільки, як відомо, $-1 \leq \tanh(\omega_i) \leq 1$, з вищевказаної формули очевидно, що $0 \leq x + \delta \leq 1$, тобто тепер умова задовільняється автоматично для кожної δ , для якої існує відповідне значення ω . Отже, задача зводиться до імпіричного пошуку параметру c , який можна виконати за допомогою використання обчислювальної техніки та програмування.

Висновки. У цій роботі було надане визначення поняття "змагальні атаки" та наведений приклад однієї з її можливих варіантів — атаки Карліні-Вагнера. Була розглянута постановка задачі та оптимізації, які були здійснені авторами атаки для її реалізації.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] N. Carlini, D. Wagner. Towards evaluating the robustness of neural networks // Computer Science. DOI:10.1109/SP.2017.49.

МЕТОДИ ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНОЇ СТРАТЕГІЇ УЧАСТІ В АУКЦІОНІ

А.В. Сивохіп

(Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ, Україна)

Платформа з продажу реклами (англ. Ad Exchange Platform) є посередником між публішером (англ. *publisher*, власник сайту) та рекламодавцем у аукціоні рекламних оголошень у реальному часі. Технологія працює даним чином:

1. Користувач заходить на сайт публішера
2. Публішер відправляє запити на показ реклами з вказуванням мінімальної ставки r на різні платформи
3. Платформа додає свою націнку $m \in (0, 100)$ і передає запит рек-ламодавцю з новою мінімальною ставкою $r/(1 - m/100)$
4. Рекламодавець приймає рішення, чи буде він відповідати на запит. Якщо мінімальна ставка є зависокою для рекламодавця, він ігнорує запит. У зворотньому випадку, він дає відповідь зі своєю ставкою b
5. Платформа отримує відповідь зі ставкою рекламодавця, віднімає свою націнку за формулою

$$final\ bid = b \times (1 - m/100)$$

та відправляє відповідь на запит публішера.

6. Публішер на своєму боці проводить аукціон. Найвища ставка виграє та отримує можливість показати свою рекламу
7. Якщо виграє наш рекламодавець – платформа отримує прибуток, який визначається за формулою

$$profit = b - final\ bid = b \times m/100$$

Задача полягає в тому, щоб розробити модель, яка буде прогнозувати оптимальну націнку для кожного запиту на основі наявної інформації, такої як ліміт рекламодавця, країна, ОС, формат реклами тощо, з метою максимізації заробітку платформи. Ця модель повинна бути навчена на історичних даних та здатна працювати в режимі реального часу, швидко приймаючи рішення про націнку для кожного нового запиту.

ВИЗНАЧЕННЯ ПОНЯТЬ

Щоб сформулювати проблему як марковський процес прийняття рішень, нам потрібно визначити множини станів середовища S , множини дій A та функцію винагороди.

Множина S : Стан s на момент часу t складається з усієї доступної інформації про поточний запит на аукціон. Визначимо стан s як сукупність (r, c, os, f) , де

- c – країна користувача,
- os – операційна система користувача,
- f – формат оголошення.

Множина A : Дія a в момент часу t – це відсоток націнки платформи на мінімальну ставку у відповідь на запит. Дії A – всі можливі націнки, які може застосувати платформа. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, де кожне a_i – відсоток націнки.

Функція винагороди $R(s, a)$ у момент часу t – це прибуток, отриманий платформою за запит на аукціон, враховуючи відсоток націнки a . Функцію винагороди $R(s, a)$ можна визначити як:

$$R(s, a) = \begin{cases} b - (1 - a/100) * b, & \text{якщо } b \text{ є виграшною ставкою,} \\ 0, & \text{якщо рекламодавець не відповів або} \\ & b \text{ не є виграшною ставкою} \end{cases}$$

МЕТОДИ ВИРІШЕННЯ ПРОБЛЕМИ

Стратегія (англ. *policy*) – це відображення станів в дії або функція поведінки агента.

Щоб вирішити дану проблему за допомогою навчання з підкріпленням, ми можемо використовувати підхід на основі моделі або підхід без моделі.

У підході, заснованому на моделі, ми б створили модель середовища з функцією винагороди, а потім використали методи динамічного програмування, такі як value iteration або policy iteration, щоб знайти оптимальну стратегію.

У безмодельному підході ми не створюємо модель середовища, а навчаємося оптимальній стратегії методом проб і помилок. Два основні методи – Q-навчання та Policy gradient methods. Основна перевага останніх полягає в тому, що вони можуть вивчати стохастичні стратегії, що може бути важливим у середовищах із високою мінливістю.

Загалом навчання з підкріпленням забезпечує багатообіцяючий підхід до вирішення проблеми платформи Ad Exchange, особливо враховуючи велику кількість доступних історичних даних.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, *Reinforcement learning: An introduction*, MIT Press, 1998.
- [2] Benoit Liqueur, Sarat Moka, and Yoni Nazarathy, *Deep Learning Math*, 2023
<https://deeplearningmath.org/deep-reinforcement-learning.html>
- [3] Титаренко, Д., *Оцінка ефективності стратегій навчання з підкріпленням на прикладі гри в 21*, Бакалаврська робота, НТУУ "КПІ 2021.
- [4] Han, X., *Reinforcement Learning in Finance*, Written and Oral Presentation, New York University, 2018.

Секція 5.

Історії математики та
методики навчання математики

РОЗВИТОК КРЕАТИВНОГО МИСЛЕННЯ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Т.Ю. Годя

(УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна)

Школа має надавати учням не лише знання, а й розвивати їх компетентності та навички. Згідно даних Всесвітнього економічного форуму у 2020 році однією із трьох навичок які високо оцінюють роботодавці стала креативність, на рівні із критичним мисленням та комплексним вирішенням проблем [2].

В Україні креативність є важливою у життєвому просторі молодого покоління (резюме, творча самореалізація, кар'єра та інші). Креативність - створення, творчість, новаторська діяльність [1]. Це здатність генерувати ідеї, шукати нестандартні розв'язки проблем, втілення нових ідей у реальність. Трапляється, що на уроках математики всі завдання подібні, мають певну структуру та алгоритм записів, такий підхід сприяє засвоєнню матеріалу, але не дає учням простору для створення чогось нового. У навчальному процесі творча діяльність учнів виступає як організована вчителем навчально-творча або творчо-пізнавальна діяльність.

Вивчення тригонометричних функцій є досить складним завданням для учнів, але можна використати декілька підходів, щоб сприяти цьому процесу та створити простір для творчості учнів:

- (1) Інтегровані уроки або прикладні задачі. Це може стимулювати учнів до творчого використання тригонометричних функцій в реальному житті. Можна запропонувати задачу з фізики [4]: гармонічні коливання матеріальної точки описуються рівнянням

$x = A \cdot \cos(Bt + C)$, де $A = 0,07\text{м}$, $B = \frac{\pi}{4}\text{сек}^{-1}$, $C = \pi/3$. Визначте період коливань, максимальне зміщення матеріальної точки, зміщення через 2 с від початку коливань. Побудуйте графік цих коливань.

- (2) Залучення учнів до вирішення проблем. Наприклад, створити графічне зображення тригонометричної функції використовуючи додаток VistaCreate, Canva або інші засоби. Можна запропонувати учням створити власні опорні конспекти для кожної функції в довільному форматі. Даємо учням інструкцію які складові (назва функції, графік, основні формули, таблиця значень тригонометричних функцій деяких аргументів) там мають бути, задаємо термін виконання та можемо перевірити потім.

- (3) Застосовувати різні методи розв'язання задач (графічний, таблиці, математичні формули, комп'ютерні програми). Пропонуємо учням задачу: Летюча риба Eхосоetidae перед зльотом робить 70 рухів хвостом, перш ніж зробити ривок на поверхню. Розрахуйте відстань яку ця риба пропливає перед зльотом та побудуйте графік руху, якщо траєкторія руху - синусоїда.
- (4) Інтерактивні методи навчання (онлайн-ресурси та інтерактивні додатки [3]).
- (5) Запропонуйте альтернативні оцінювання: Поширюйте методи оцінювання, що сприяють творчому мисленню. Наприклад, замість стандартних тестів або контрольних робіт, можна запросити учнів створити проект, презентацію або рольову гру, де вони зможуть продемонструвати свою творчість.

Загалом, ці рекомендації можуть сприяти розвитку креативності учнів на уроці, але необхідно враховувати їх індивідуальні особливості (адже вони по різному виражають свою творчість - через письмо або малюнок, групову діяльність, публічні виступи та ін).

Важливо також надавати постійну підтримку та конструктивний фідбек учням, незалежно від результатів їхньої творчої роботи. Стимулюйте їх до постійного вдосконалення та вірте в їхній потенціал.

Розвиток креативності є процесом, який вимагає часу, терпіння та постійної підтримки. Ми вважаємо, що варто практикувати різноманітні підходи та методи на уроці, створювати стимулююче середовище, де учні можуть розкрити свій творчий потенціал та розвивати свої навички. Оскільки важливо показати, що математика та тригонометричні функції не просто суха теорія, а може бути застосована в різних контекстах та сферах, а розвиток креативного мислення допоможе учням стати більш ефективними та успішними в навчанні та майбутній кар'єрі.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Дімітрова-Бурлаєнко С. Д. *Поняття «Креативна компетентність» у контексті психолого-педагогічних досліджень* // Збірник наукових праць «Педагогіка та психологія». 2017. № 58.
- [2] Свінцицька О.М., Ткачук В.О. *Креативна економіка та креативні індустрії: навч. посібн.* // Житомир: Державний університет «Житомирська політехніка», 2020. – 218. ISBN 978-966-683-558-4
- [3] *Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу.* // LearningApps. URL: <https://learningapps.org/18446180>
- [4] Корнієнко Т. Л. *Математика. 10 клас. Рівень стандарту : зошит для оцінювання результатів навчання : У 2 ч. Ч. 1. Алгебра і початки аналізу.* // Харків : Вид-во «Ранок», 2018. — 64 с.

ПРО ДАВНЬОЄГИПЕТСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ТЕРМІН ‘SEKED’

С. Дорофєєва, Г.О. Маслюк

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

До наших часів збереглося декілька документів, які дозволяють схарактеризувати підхід у математичних міркуваннях стародавніх єгиптян. Найдовшим і надзвичайно важливим історичним документом є Математичний папірус Райнда (1550 р. до н.е.), який зберігається у Британському музеї [1], і складається із двох частин (EA10057: 296 см × 33 см, EA10058: 198,5 см × 32 см), секція ж довжиною ≈ 18 см, яка з'єднувала частини між EA10057 і EA10058 нині залишається відсутньою, хоча деякі можливі фрагменти тексту цієї секції були виявлені (1922) в колекції Нью-Йоркського історичного товариства і зберігаються в Бруклінському музеї. Папірус містить багато прикладів арифметичних і геометричних задач. Проаналізуємо, на прикладі однієї із задач, давньоєгипетську методологію знаходження нахилу (‘seked’) трикутних гра

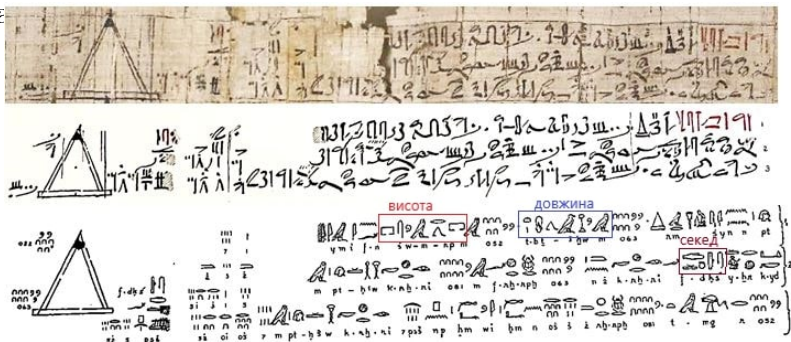


Рис. 1. Задача RMP №56 [1, EA10057]

Задача RMP №56. Висота піраміди дорівнює 250 ліктів, а сторона її основи — 360 ліктів. Знайти секед в єгипетських дробових одиницях (королівських ліктях), а також у долонях. [Секед — це відношення половини основи до висоти.]

Спочатку знайдемо половину основи трикутника, що становить $1/2$ від 360. Отримаємо 180. Поділимо 180 на 250. Знаходимо $1/2$ від 250, це 125. Залишається $180 - 125 = 55$. Розкладемо 55 як суму $50 + 5$. 50 це $1/5$ від 250, а 5 це $1/50$ від 250. Отже, секед = $1/2 + 1/5 + 1/50$ (ліктів) [1 лікоть = 52.35 см].

Дроби в Стародавньому Єгипті являли собою суму кількох дробів у яких в чисельнику 1, а в знаменнику будь-яке натуральне число. Такий запис був доволі практичним та зручним, тому що такі операції як ділення та множення були досить громіздкими. Існували навіть спеціальні таблиці, в яких частки числа представлялися у вигляді певної суми і навіть на папірусі Райнда наведена така таблиця.

Тепер знайдемо секед в долонях. Оскільки лікоть — це 7 долонь, то помножимо раніше отриманий результат на 7.

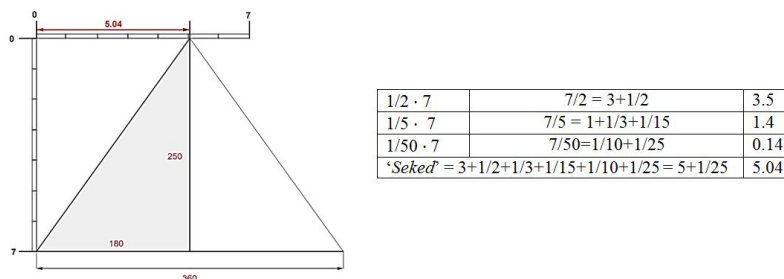


Рис. 2. Інтерпретація міркувань знаходження секед на папірусі

Зауважимо, що в задачі 56 на папірусі Райнда трикутник намальований подвійними лініями, однак у наступних чотирьох задачах (RMP 57, 58, 59 і 59B) бічні сторони намальовані однією лінією, а подвійними лініями лише основа трикутника [див. 1, електронна версія папіруса]. Це може бути пов'язано з тим, що у цих задачах секед дорівнює $5+1/4$, який відтворює прямокутний трикутник з такими ж пропорціями, як піфагорійська трійка 3-4-5 [2].

Стародавні єгиптяни не лише роз'язували задачі на знаходження секеда, але й використовували ці розрахунки для побудови пірамід. Поняття 'секед' подібне до наших сучасних кутів та градусів. Щоб зрозуміти як же будували піраміди, потрібно підійти до їх вивчення, використовуючи давньоєгипетські системи вимірювання. Дуже багато інформації можна дізнатися, вивчаючи артефакти. Зокрема, обчисливши секед можна визначити якій піраміді належав певний камінь, оскільки їх кути нахилу відрізняються. Також обчислення секеда піраміди може допомогти визначити її висоту.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] The British Museum: *The Rhind Mathematical Papyrus (EA10057, EA10058)*. URL: <https://www.britishmuseum.org/collection/object/>
- [2] Paolo Di Pasquale *Rhind's Mathematical Papyrus (Problems 56, 57, 58, 59 and 59B) concerning the Pyramids*. URL: <https://www.academia.edu/>

ПРО ДЕЯКІ ПРИЙОМИ РОБОТИ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ З УЧНЯМИ, ЩО МАЮТЬ ОСОБЛИВІ ОСВІТНІ ПОТРЕБИ, ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ФУНКЦІЙ В КУРСІ АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

В.О. Журбін

(УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна)

Освіта є важливою складовою життя кожної людини. Саме вона визначає її можливості та перспективи у майбутньому. Одним із способів підвищити якість освіти є інклюзивна освіта. Вона забезпечує навчання всіх, незалежно від їх етнічної, соціальної, економічної чи будь-якої іншої з характеристик.

Інклюзивне навчання — система освітніх послуг, гарантованих державою, що базується на принципах недискримінації, врахуванні багатоманітності людини, ефективного залучення та включення до освітнього процесу всіх його учасників.[1]

Для успішної та ефективної реалізації принципів інклюзивної освіти необхідною умовою є знання вчителів про методику роботи з дітьми, їх нозології та особливості викладання в таких класах. А саме вчителі молодшої школи та вчителі-предметники старшої школи мають бути добре обізнаними в усіх вищеперелічених сферах, та розуміти основні перешкоди до засвоєння учнем матеріалу.

Однією з поширених проблем в дітей є погіршення зору, що спричиняє необхідність створювати індивідуальну програму розвитку та робити заключення ІРЦ з рекомендаціями по роботі з цими учнями. Це може бути як і незначне погіршення зору, так і серйозні проблеми з ним та навіть повна сліпота. Саме через існування такої проблеми варто знати, як працювати з цими дітьми та враховувати їх особливості.

Необхідно наголосити, що учні, які мають проблеми з зором не вимагають модифікації навчальних програм. Такі діти засвоюють матеріал на нормальному рівні за умови адаптації навчального матеріалу під їх потреби.

Під час розробки навчальної програми для цих учнів варто враховувати не лише державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів, а й планувати корекційно-розвивальну роботу. Розберемо це на прикладі теми “Функції” у 8 класі.

В межах вивчення теми «Функція» корекційною роботою буде.

Сенсомоторний розвиток: Розвиток аналітичного спостереження з опорою на збережені органи відчуття, формування навичок читання та запису математичних формул та виразів, формування навичок роботи зі спеціальними приладами для побудови графіків деяких функцій та читання графіків, розпізнавання функцій за формулами і графіками, формування вміння переводити знання в практичну дію. [2]

Пізнавальний розвиток: Розвиток пізнавальної активності, аналітичного мислення, розвиток мисленнєвих операцій, конкретизація уявлень про використання математичних моделей до розв'язування прикладних задач, формування логіко-математичної компетентності учнів, вміння планувати, прогнозувати, передбачати, розвиток уявлень та навичок застосування математичних знань в інших сферах життєдіяльності. [2]

Мовленнєво-комунікативний розвиток: Розвиток мовлення: навички побудови логічного висловлювання, вміння самостійно робити висновки та доводити свої міркування грамотною математичною мовою. [2]

Особистісний розвиток: Формування основних світоглядних ідей, виховання кращих людських якостей, розвиток інтересу, відповідального ставлення до навчальної діяльності, до вирішення математичних завдань, формування вміння приймати рішення, ефективно розподіляти час, розвиток самостійності, відповідальності, формування інноваційно-пошукової діяльності, розвиток здібностей використання математичних знань та навичок у повсякденному житті, у творчості. [2]

Розберемо на прикладі уроку з засвоєння нових знань, як має виглядати урок щоб вважатись ефективним.

На етапі мотивації всього класу до вивчення нової теми можна дати задачі прикладного характеру. І для класу цю задачу можна пояснити, або ж зробити схематичні записи на дошці, то для учня з ООП варто заздалегідь зробити якісні, матові картинки до цих задач.

Одним із можливих варіантів мотивації може бути задача, до якої заздалегідь підготовано додаткові ілюстрації. Таким чином учень на практиці може зрозуміти і детальніше подивитись на ті поняття, які розглядають у задачі.

На етапі введення основних понять доречно учню дати роздрукований аркуш з цими поняттями який можна вклеїти в зошит. Таким чином учень не буде напружувати зір, щоб виконати запис в зошит, а присвятить час для осмислення нового матеріалу, та може поставити додаткові запитання вчителю.

На етапі формування компетентностей варто попрацювати всім класом з графіками, при цьому для учня з ООП цей графіки мають бути роздруковані у більшому розмірі та бути дуже чіткими, також, мають бути всі одиниці позначені, щоб учень не напружував зір для того щоб зрозуміти координати точок.

Такі уроки з дидактичними матеріалами які полегшують сприйняття та створюють менше навантаження на зір варто проводити частіше. Вони будуть допомагати учневі засвоювати матеріал на достатньому рівні.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Міністерство освіти і науки України — інклюзивне навчання.* // URL: <https://mon.gov.ua/ua/tag/inklyuzivne-navchannya>.
- [2] *Міністерство освіти і науки України — Для дітей з порушеннями зору.* // URL: <https://is.gd/Sn1Uco>.

ВІД ГУБЕРНСЬКОГО РЕГІСТРАТОРА ДО ВИДАТНОГО МАТЕМАТИКА. ЖИТТЄВИЙ ШЛЯХ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

О.В. Курінна, О.О. Дем'яненко

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Ми живемо в тяжкий та буремний, але разом з тим відповідальний час – час становлення української нації. Тому знайомство зі здобутками та біографіями видатних українців є важливою та корисною справою, а у випадку Михайла Васильовича Остроградського це й захоплюючою. Михайло Васильович Остроградський – один із найвидатніших математиків ХІХ століття. За геніальність та важливість своїх досліджень був внесений до списку визначних математиків ЮНЕСКО.

Народився Михайло Васильович 24 вересня 1801 року у селі Пашена, Полтавської губернії. Родина Остроградських походила з козацьких старшин і по материнській лінії мала родинні зв'язки з гетьманом Данилом Апостолом. Його батько Василь Іванович був поміщиком і дослужився до чину колезького асесора. Сім'я Остроградських зберігала звичаї свої пращурів та розмовляла українською мовою. З раннього дитинства за Михайлом помічали зацікавленість різними вимірами, а також виняткову спостережливість та уважність до деталей. 1809 року, за старим дворянським звичаєм, Михайла записали на службу до канцелярії полтавського цивільного губернатора у чині губерньського регістратора, де він числився до весни 1815 року.

Майбутній учений не одразу відчув своє покликання, з раннього дитинства він мріяв стати військовим. Але рідний дядько Петро Устимович переконав Михайла підготуватися до вступу до відділення фізичних та математичних наук Харківського університету. 1820 року він відмінно складає випускні іспити. Але після скандальної ситуації, яка виникла при закінченні навчання, він був змушений покинути університет, а Міністерство народної освіти позбавило його вже виданого атестата. Вчений не втратив запалу і прийняв рішення вирушити до Парижа, який був на той час центром наукової діяльності усієї Європи. Діставшись до Парижу, математик вдосконалює свої знання у Коледж де Франс та наполегливо працює. Він слухає лекції Ампера, Коші, Лапласа, Пуассона, Фур'є та інших видатних вчених того часу. Життя Михайла Васильовича у Парижі не було легким. Через матеріальні проблеми він потрапляє у боргову в'язницю. Звільнив його звідти Огюстен Коші, який сплатив борг Остроградського. У 1826 році у Паризькій Академії наук він представляє свою першу працю «Мемуари про поширення хвиль у циліндричному басейні», що стало значним внеском у розвиток гідродинаміки. Зауважимо, що над дослідженням цієї проблеми

працювали також П'єр Лаплас, Жозеф Лагранж, Симеон Пуассон, Огюстен Коші. Існує версія що ця робота була написана ним саме у борговій в'язниці, під час спостереження за хвилями на Сені.

Повернувшись додому вже відомим вченим, Михайло Васильович подає праці до Петербурзької Академії наук, в яких розглядає рівняння Пуассона, методи розв'язування задач математичної фізики (так званий метод Фур'є, який сам Фур'є застосовував лише в окремих випадках), доводить формулу що пов'язує тривимірні та поверхневі інтеграли (формула Остроградського-Гаусса), розглядає питання збіжності тригонометричних рядів і порушує низку важливих проблеми математичного аналізу, які протягом століть будуть досліджуватись іншими математиками.

За три роки Михайло Остроградський став академіком Петербурзької Академії Наук, членом-кореспондентом Паризької Академії Наук і дійсним членом інших європейських академій. Він наполегливо та плідно працює. В сферу його інтересів потрапляють лінійні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння з частинними похідними, варіаційне числення, тощо. Йому належать базові курси небесної та аналітичної механіки.

Окрім таланту до математики, вчений відкрив у собі ще й талант педагога. Його учнями були: основоположник теорії автоматичного регулювання І. О. Вишнеградський, творець гідродинамічної теорії тертя М. П. Петров, вчений-інженер, засновник теорії розрахунку в мостобудуванні Д. І. Журавський, інженер-фортифікатор Ц. А. Кюї та ін.

Михайло Остроградський був багатогранною особистістю. Він зробив значний внесок не тільки в розвиток математики, науки і техніки, а й виховав значну когорту вчених - новаторів, які несли його славу по всьому світу.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Бородін О.І., Бугай А.С.. *Біографічний словник діячів у галузі математики* — Київ «Радянська школа», 1973 — С. 378–381.
- [2] Гол. ред. Жулинський М.Г.. *Шевченківська енциклопедія: в 6 т. // Ін-т літератури ім. Т.Г. Шевченка* — 2013. — Т. 6, № 4. — С. 740

СИНГУЛЯРНИЙ δ -РОЗПОДІЛ ДІРАКА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

В.В. Марчук, О.Г. Білий

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Відомий англійський фізик-теоретик Поль Дірак в 1929 році запропонував застосувати в теоретичних дослідженнях незвичайну, але дуже підходящу функцію для не менш дивної на той час квантової фізики. Формально ця функція виглядала так:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}; \delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t_0 \neq 0 \\ \infty, & t_0 = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \end{cases}$$

Як бачимо, $\delta(t)$ визначена зовсім не класичним способом і не схожа на звичайні функції, але її обережне застосування давало переваги і зрозумілі пояснення природи тих явищ та процесів, зміни характеристик яких відбувалися практично миттєво. Застосування ж класичної математики в цьому випадку приводило до певних непорозумінь. Пізніше, зусиллями багатьох математиків, в першу чергу Л.Шварца та С.Соболева, було знайдено математично коректне визначення цієї функції - представника цілого класу узагальнених функційрозподілів та їх похідних як лінійних неперервних сингулярних функціоналів над деяким простором основних функцій. Це дало можливість значно розширити область застосування класичного математичного аналізу. Межі застосування та властивості δ -функцій були строго доведені і вона посіла чільне, хоча і особливе місце в арсеналі методів дослідження природи. Зручність δ -функції полягає в тому, що вона сама, будучи «дуже розривною», допомагає навести лад в дослідженнях саме розривних функцій.

Означення 1. ($\varphi \in C^\infty, \exists$ компакт $K \subset \mathbb{R}^m, m \geq 1 : \varphi(\mathbb{R}^m \setminus K) \equiv 0$) $\Leftrightarrow \Leftrightarrow (\varphi \in \mathfrak{D})$, де \mathfrak{D} — називається простором основних функцій [2].

Означення 2. Розподілом або узагальненою функцією називається будьякий лінійний неперервний функціонал L на \mathfrak{D} . Якщо $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — інтегрована на $K \subset \mathbb{R}^m, m \geq 1, m_0$

$$L = L_f : (L_f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in \mathfrak{D}$$

визначає L_f — регулярний розподіл і його значення $(L_f, \varphi) = (f, \varphi)[2]$.

Означення 3. Якщо $(L, \varphi) = \varphi(0), \forall \varphi \in \mathfrak{D}$, то

$$(L, \varphi) = (\delta, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

визначає сингулярний δ -розподіл Дірака [2].

При $m = 1$ маємо $(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \int_{K(0 \in K)} \delta(x)\varphi(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$ – визначальна властивість одновимірної

δ -функції Дірака. І дійсно, звідси випливають всі три умови формального визначення δ -функції, а саме:

(1) $\delta(x) = 0$, при $x \neq 0$ (бо $x = 0$ -носій); 2) $\delta(0) = \infty$;

(2) При $\varphi(x) \equiv 1$ маємо $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot 1dx = 1$. Також $\delta(x)\varphi(x) = \varphi(0)$ – фільтруюча властивість δ -функції. Аналогічно для $\delta(x - x_0)$, маємо

$\delta(x - x_0) \cdot \varphi(x) = \varphi(x_0)$. Розглянемо застосування δ -функції

Приклад 1. Нехай $\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ – одинична функція Хевісайда. Тоді $(L, \varphi) = (\eta, \varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx$, $\eta'(\varphi) = (L', \varphi) = -(L, \varphi') = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$, тобто $\eta'(x) = \delta(x)$. Ясно, що $\eta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x)dx$. Зрозуміло також, що $\eta'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$.

Приклад 2. Нехай ξ -неперервно-дискретна випадкова величина із щільністю розподілу $p_{\xi}(x) = C_1\gamma(x)(\eta(x - x_1) - \eta(x - x_2)) + C_2\sum_{i=3}^n p_i\delta(x - x_i)$, де $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, C_1 та C_2 підібрані таким чином, щоб виконувалась умова нормування: $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x)dx = 1$. Тоді можна знайти всі характеристики $\xi : F_{\xi}(x)$, m_{ξ} , D_{ξ} , ... Наприклад [1], нехай

$$p_{\xi}(x) = C_1\sqrt{x}(\eta(x) - \eta(x - 1)) + C_2\left(\frac{1}{3}\delta(x - 2) + \frac{1}{4}\delta(x - 3)\right).$$

Виберемо $C_2 = 1$, тоді $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x)dx = C_1\int_0^1 \sqrt{x}dx + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}C_1 + \frac{7}{12} = 1$, звідси $C_1 = \frac{5}{8}$. Знайдемо $m_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} xp_{\xi}(x)dx = \frac{5}{8}\int_0^1 \sqrt{x^3}dx + \frac{1}{3}\int_{2-\varepsilon}^{2+\varepsilon} x\delta(x - 2)dx + \frac{1}{4}\int_{3-\varepsilon}^{3+\varepsilon} x\delta(x - 3)dx = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{5}{3}$.

Приклад 3. Розглянемо похідну від $\delta(x)$, маємо: $(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0), \dots, (\delta^{(n)}, \varphi) = (-1)^n(\delta, \varphi^{(n)}) = (-1)^n\varphi^{(n)}(0)$, інакше, із фільтруючої властивості $\delta(x) : x\delta(x) = 0$, маємо: $\delta(x) + x\delta'(x) = 0, \Rightarrow \delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x}$, диференціюючи ще раз, отримаємо: $2\delta'(x) + x\delta''(x) = 0 \Rightarrow \delta''(x) = -\frac{2\delta'(x)}{x} = \frac{2\delta(x)}{x^2}, \dots, \delta^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!\delta(x)}{x^n}$.

Приклад 4. Розглянемо перетворення аргумента δ -функції. Нехай $g(x)$ – неперервно диференційована функція, така, що $g(x_0) = 0$, а $g'(x_0) \neq 0$, тоді можна показати, що $\delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_0)|}\delta(x - x_0)$ або, якщо $g(x)$ має прості корені в точках $x_i, i = \overline{1, n}$, то $\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x - x_i)$, де $g(x_i) = 0, g'(x_i) \neq 0$

Наприклад [1], для $g(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x + 2)(x - 1)(x - 2)$, буде $g'(x) = 3x^2 - 2x - 4, g'(-2) = 12, g'(1) = -3, g'(2) = 4$, тоді $\delta(g(x)) = \delta(x^3 - x^2 - 4x + 4) = \frac{1}{12}\delta(x + 2) + \frac{1}{3}\delta(x - 1) + \frac{1}{4}\delta(x - 2)$.

Приклад 5. На $x \in (-\pi, \pi)$ розклад $\delta(x)$ в ряд Фур'є має вигляд: $\frac{\pi}{2}\delta(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$, ($a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \delta(x) dx = \frac{2}{\pi}$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \delta(x) \cos nxdx = \frac{2}{\pi}$). Знайдемо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = S(x)$, маємо $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \frac{\pi}{2}\delta(x) - \frac{1}{2}$.

Маємо диференціальне рівняння: $S'(x) = \frac{\pi}{2}\delta(x) - \frac{1}{2}$, яке розв'яжемо операційним методом $S(x) \doteq S(p)$; $S'(x) \doteq pS(p)$, $\delta(x) \doteq \int_0^{\infty} \delta(x)e^{-px} dx = e^{-px}|_{t=0} = 1$, тобто $pS(p) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2p}$, $S(p) = \frac{\pi}{2p} - \frac{1}{2p^2} \doteq \frac{\pi-x}{2} = S(x)$.

Приклад 6. Відновлення неперервного сигналу по його дискретним значенням. Розглянемо неперервний сигнал з обмеженим спектром [1], тобто, спектральна функція якого

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_c}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}, \text{ де } \omega_c - \text{максимальна частота спектра.}$$

Тоді $f_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\pi}{\omega_c} e^{i\omega t} d\omega = \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t}$ – функція відліку.

Можна показати, що $f_k(t) = f_0\left(t - \frac{k\pi}{\omega_c}\right) = \frac{\sin(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi}$, де $k \in \mathbb{Z}$ – ортогональні на $[-\omega_c, \omega_c]$. Тому маємо ряд $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{\sin(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \frac{\sin(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi}$, тобто функція з обмеженим спектром повністю визначається своїми значеннями в дискретні моменти часу, а це означає, що для передачі аналогового неперіодичного сигналу (зображення) з обмеженим спектром достатньо передати лише його окремі значення через $\frac{\pi}{\omega_c}$, що можна виконати, передаючи короткі імпульси з амплітудами пропорційними $a_k = \frac{k\pi}{\omega_c}$. Цими імпульсами якраз і можуть бути відповідні δ -функції, а саме, замість $f(t)$ можна передати сигнал $\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \delta\left(t - \frac{k\pi}{\omega_c}\right)$, потім пропустити його через фільтр нижніх частот з полосою пропускання ω_c , отримаємо пропорційний сигнал

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-i\omega \frac{k\pi}{\omega_c}} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \frac{\sin(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi}.$$

Технічно для цього використовуються діафрагми (як фільтри), одновимірні та двовимірні дифракційні решітки та системи лінз відповідних конфігурацій.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Білий О.Г., Білий В.О., Марчук В.В. Дельта-функція Дірака. Основні властивості та застосування // Mathematics in Modern Technical University. – 2022 (1) – С. 5–17.
- [2] Ляшко І.І. Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Математичний аналіз. Частина 2. Київ: “Вища школа”, 1985. – 552 с.

МЕЙКЕРСТВО НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В 5-6 КЛАСАХ

Т.О. Насадюк

(УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна)

Нова українська школа – середовище інтегрованого навчання, де діти можуть розвивати навички, які стануть їм у нагоді в реальному житті більше, ніж підручникова теорія. Такий підхід отримав назву діяльнісного, а його ідеї знайшли розвиток в основах Державного стандарту НУШ [1]. Рівень пізнавальної активності сучасних школярів залежить як від їх зацікавленості безпосереднім процесом навчання, так і від його результативності. Діяльнісний підхід, або «навчання через дію» в буквальному його розумінні дозволяє учням побачити певні результати своєї роботи не в далекій перспективі, а відразу. Діяльність, яка гармонійно поєднує навчальну і практичну діяльність в процесі виконання одного навчального завдання отримала сучасну назву англійського походження – мейкерство. Мейкерство — це творча діяльність, результатом якої є власноруч створена річ. Це можуть бути як створені у початкових класах аплікації, фігурки-орігамі, пластилінові моделі, вироби з конструктора, так і вирізані з дерева чи надруковані на 3D принтері і зібрані дорослішими учнями механізми та роботи. Кожна дитина власноруч вибудовує структуру власного світогляду з тих засобів навчання, які їй пропонуються, й чим різноманітніші засоби ми запропонуємо учням, тим повнішими та глибшими будуть їх знання і вміння. В умовах відсутності спеціального обладнання для робототехніки в більшості українських шкіл, реалізацію STEM-ідей можна ефективно здійснювати саме завдяки мейкерству, яке дозволяє вивчати різні наукові явища і процеси, працювати з найрізноманітнішими матеріалами, знайомитись з вимірювальними приладами та дає можливість створення індивідуальних або групових проєктів. Мейкерство в STEM-навчанні гармонійно поєднує навчальну та практичну діяльність, розвиває в дітях творчі здібності та креативне мислення. Мейкерство на уроках математики сприяє розвитку в учнів: логічного мислення, пам'яті і зв'язного мовлення шляхом розвитку дрібної моторики; алгоритмічного мислення шляхом виконання практичних дій в певній послідовності за інструкцією; стійкості уваги шляхом концентрації на певному практичному завданні і самоконтролю; технічних навичок і конструювання шляхом виготовлення моделей фігур, вимірювальних приладів чи простих механічних пристроїв; креативності шляхом використання власних ідей і стилю виконання; позитивного ставлення до засвоєння нових знань шляхом залучення різних органів чуття та

задоволення потреби в активному навчанні. Учні 5-6 класів доцільно запропонувати такі "мейкерські" завдання, як:

- (1) «Стародавній годинник» – виготовлення моделі годинника, шкала якого містить знаки однієї з стародавніх систем числення.
- (2) «Паралелепіед-шифрувальник» – виготовлення паралелепіеда за розгортою, на гранях якого розміщені зашифровані слова-підказки (ребуси, анаграми, цифрові головоломки, тематичні малюнки тощо), за якими можна розгадати зашифроване слово.
- (3) «Картонний лабіринт» – виготовлення лабіринту для проходження кулькою та його дослідження (обчислення площі ділянки, необхідної для побудови такого лабіринту в масштабі 1:2000; визначення середнього часу проходження кулькою лабіринту експериментальним шляхом та створення рейтингу лабіринтів за їх складністю тощо).
- (4) «Полігональне серце» – створення об'ємної фігури з плоских багатокутників шляхом згинання і склеювання паперу в техніці «Паперкрафт». Мейкерство не є універсальною освітньою технологією, адже виготовлення певних моделей, об'єктів чи механізмів передбачає наявність в учнів знань, умінь і навичок як з математики, так і з суміжних дисциплін, отриманих на традиційних уроках. Тільки грамотне гармонійне поєднання традиційних і новітніх методів навчання дозволяє досягати очікуваних результатів, спрямованих на виховання успішної конкурентоспроможної особистості.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Освіта. Більше, ніж гра: діяльнісний підхід у Новій українській школі.* // LearningApps. URL: <https://osvita.ua/school/method/85081/>

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ТЕХНОЛОГІЇ ЗМІШАНОГО НАВЧАННЯ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ

В.О. Павліченко

(УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна)

Історія змішаного навчання почалася багато років тому, коли з'явилися перші електронні засоби навчання. Перші програми з електронного навчання було створено у 60-х роках минулого століття. Згодом вони були модифіковані та з 90-х років перетворились у онлайн-курси, які мали популярність як у США, так і у Європі. Завдяки розвитку інформаційних технологій та зростання інтернет-технологій на основі досвіду використання онлайн-курсів і з'явилося змішане навчання, також відоме як гібридне навчання або блендед-лернінг (англ. blended learning). Вперше цей термін був використаний в 2000 р. статті Клейтона Крістенсена та Майкла Хорн "Blended Learning: An Oxymoron?".

Існує кілька загальноприйнятих способів реалізації змішаного навчання, вони різняться тим у якому відношенні міксується традиційне навчання та онлайн навчання: підкріплення традиційного навчання, ротаційна модель, гнучка, самостійне змішування, онлайн лабораторія, переважно онлайн навчання, «перевернутий клас». В Україні зараз використання моделі залежить від регіону. Найважчим для вчителя в організації вивчення теми під час змішаного навчання є аналіз навчального змісту та розподіл його на етапи і з визначенням матеріал якого блоку можна дати учням на самостійне опрацювання, а що учень повинен вивчати під керівництвом вчителя у класі. Серед особливостей використання технології змішаного навчання (ТЗН), на нашу думку, перш за все слід виділити використання відеоуроків. Відеоуроки учень може переглядати у зручний для нього час і необмежену кількість разів. Це допомагає їм краще зрозуміти складні математичні викладки завдяки візуальній демонстрації. Широке використання онлайн-ресурсів є другою особливістю ТЗН. Завдяки таким ресурсам як Khan Academy, Coursera, та MIT OpenCourseWare учні можуть знайти додаткові матеріали для вивчення теми з математики або виконати додаткові справи.

Особливу увагу потрібно приділяти під час вивчення математики колективній роботі, ТЗН розкриває більше можливостей для вчителя, наприклад учні можуть працювати в групах над проектами або спільно розв'язувати прикладні задачі, готувати в парах або мікрогрупах семінари, різноманітні творчі завдання, також разом шукають та аналізують інформацію, приймають участь у диспутах. У залежності від

конкретних потреб та можливостей, змішане навчання може бути використано як додатковий інструмент для вивчення математики, щоб забезпечити більш гнучкий та індивідуалізований підхід до навчання. Наприклад, онлайн-ресурси можуть бути використані для закріплення матеріалу, поглиблення знань, додаткових вправ та тестувань. Традиційні лекції і вправи можуть бути використані для демонстрації матеріалу та допомоги учням з розв'язанням завдань. Технологія змішаного навчання може допомогти підвищити мотивацію та збільшити ефективність навчання, що дозволяє учням краще засвоювати матеріал. Незважаючи на переваги, змішане навчання також має свої виклики та обмеження. Один з найважливіших викликів полягає у забезпеченні рівної доступності до технологій та онлайн-ресурсів для всіх учнів. На сьогоднішній день ТЗН є пріоритетною формою в сучасних умовах, має багато переваг для вчителів та учнів. Але щоб її застосовувати потрібно враховувати такі фактори як, наявність технічного забезпечення в усіх учасників навчального процесу, важливо урізноманітнювати не тільки форми і методи навчання, а й види навчально-пізнавальної діяльності учнів, мотивувати їх до самоконтролю та рефлексії.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] С. В. Антощук, Л. Л. Ляхоцька. *Технологія змішаного навчання. Теоретичний Аспект.* // LearningApps. URL: <https://lib.iitta.gov.ua/718620/>

ВИБІР РОЗМІРНОСТІ МОДЕЛІ MIRT ДЛЯ АНАЛІЗУ ТЕСТІВ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

М.О. Попрожук, Н.В. Круглова, О.О. Диховичний
(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Наразі, через агресію РФ проти України, дистанційна освіта для українських студентів була й залишається однією із основних форм навчання. Як наслідок, створення якісного контенту для перевірки знань студентів в таких умовах є надзвичайно важливою задачею. У цій царині основним напрямком є статистичний аналіз якості створених тестів. Команда викладачів з Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» забезпечує процес створення нових тестів з вищої математики та їх статистичного аналізу. Основна увага приділяється статистичному аналізу. Мета такого аналізу - покращення якості тестів. На основі проведеного аналізу відбувається переформатування тесту, видалення або переформулювання занадто легких або занадто складних завдань.

Основу такого аналізу традиційно складають Classical Test Theory (CTT) та Item Response Theory (IRT) [1]. Для аналізу тестів з вищої математики ми використовуємо більш розвинену теорію – Multidimensional Item Response Theory (MIRT) [2], що дає можливість більш тонко вирізняти окремі риси та здібності іспитників. Центральним питанням застосування MIRT є питання підбору адекватної моделі для проведення аналізу і, зокрема, вибору розмірності моделі. Цій тематиці присвячено багато робіт, зокрема, [3, 1, 5]. У цій роботі автори пропонують наступну методика такого підбору:

- (1) Проведення Exploratory Factor Analysis (EFA). Для первинного вибору розмірності згідно Auerswald (2019) проводиться EFA. На цьому етапі застосовують Parallel Analysis, Empirical Kaiser Criterion, etc. Ці методи дозволяють попередньо визначити кількість компетентностей, що виявляє даний тест, або скільки латентних числових параметрів характеризують студента.
- (2) Оцінка параметрів моделей. Для компенсаторних і некомпенсаторних моделей MIRT згідно Confirmatory Factor Analysis (CFA) [6] проводиться оцінка параметрів із застосуванням алгоритмів EM або NH-RM.
- (3) Перевірка адекватності. Оскільки алгоритми EFA можуть визначати різні розмірності моделі, то проводиться вибір найбільш адекватної моделі на підставі критеріїв: $M2$, RMSEA, TLI, CFI [6].

Для статистичного аналізу якості тестів нами обрано мову програмування R. Аналіз проводився по результатах контрольних робіт для студентів першого курсу РТФ. Об'єм вибірки склав – 79 студентів. Кількість завдань—20. Розглянуто розмірності 1,2,3. Оцінено параметри моделі. Проведено перевірку адекватності.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Crocker L., Algina J. *Introduction to Classical and Modern Test Theory*. — Belmont, CA:Wadsworth, 2006. — 527 с.
- [2] [2] Reckase M. D. *Multidimensional item response theory*. — New York:Springer, 2009. — 354 с.
- [3] Mahmood Ul H., Frank M. *Discrimination with unidimensional and multidimensional item response theory models for educational data**Communications in Statistics // Simulation and Computation*. — 2019.—С. 1–21.
- [4] Круглова Н. В., Диховичний О. О. *Добір математичної моделі для аналізу тестових завдань типу «будовані відповіді» з математичних дисциплін*// Інформаційні технології і засоби навчання.—2022.—87 № 1. — С. 166–184.
- [5] Kruglova N., Dykhovychnyi O. *Choosing MIRT Model for Analysis of Quality of Pedagogical and Psychological Tests // 2022 IEEE 3rd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC)*.— 2022.— С. 1–4.
- [6] Chalmers R. *Multidimensional Item Response Theory Package for the R Environment // Journal of Statistical Software*.—2012. —V. 48, № 6.— С. 1–29.

ЗАСТОСУВАННЯ WOLFRAM MATHEMATICA 13.2.1 ДЛЯ СТВОРЕННЯ ТЕСТОВИХ ПИТАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

М.О. Попрожук, Н.В. Круглова, О.О. Диховичний
(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Останніх три роки в багатьох ВУЗах України кардинально змінився формат навчання. Тепер дистанційна освіта являється необхідним і важливим елементом освітнього процесу. Під час віддаленого контролю найкраще проводити модульні контрольні роботи для студентів у вигляді тестів. Система Moodle є одним з найпопулярніших інструментів для проведення електронного навчання та оцінювання. Важливим аспектом такої системи є можливість створювати тестові завдання для оцінювання знань студентів.

В [1] було показано, що типи питань "пропущені слова" добре підходять для контрольних робіт з вищої математики. У такому завданні використовуються вбудовані блоки для обробки введених даних. В ці блоки можна додати як теоретичні питання, так і елементи розв'язку задачі. Це дозволяє краще диференціювати знання студентів та перевіряти наступні компетентності: знання теорії, навички виконувати арифметичні обрахунки, вміння будувати графічні зображення і порівнювати їх з шаблонами і т.п. Також такі типи завдань дають можливість навіть слабшим студентам набирати певні бали і навчатися в процесі проходження тесту.

Оскільки без нагляду викладача під час модульного контролю студенти обмінюються відповідями та викладають розв'язки у вільний доступ, то постійно виникає необхідність у створенні великої кількості однотипних варіантів завдань. Тому надзвичайно корисним інструментом для створення тестових задач з математики є система комп'ютерної алгебри Wolfram [2]. Ось лише деякі можливості цієї програми при створенні тестів:

- дозволяє вводити параметр у задачі, що сприяє створенню завдань з цілими числами при правильному підборі значень параметру;
- будує графічні зображення для завдань;
- генерує цілочисельні коефіцієнти для завдань;
- правильно розв'язує створені задачі.

Приклад 5. Розглянемо задачу на інтегрування раціональних дробів. Створимо шаблон прикладу, використовуючи генератор цілих чисел.

```
a = RandomInteger[{2, 5}];
```

```

b = RandomInteger[{0, 10}];
Simplify[Together[
  RandomInteger[{2, 20}]/(x - b) + (RandomInteger[{2, 20}] x +
    RandomInteger[{0, 10}])/(x^2 + 2*a x + a^2 + 1) +
  RandomInteger[{2, 20}]/(x - 2 b)]]

```

Кожний запуск такого шаблону дозволяє згенерувати новий варіант підінтегральної функції з цілими коефіцієнтами. Наприклад, можна отримати наступну функцію:

$$\frac{24x^3 - 86x^2 - 302x - 952}{(x - 8)(x - 4)(x^2 + 6x + 10)}$$

Отже, Wolfram дозволяє суттєво економити час викладачів при створенні якісного контенту для дистанційного контролю знань.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Круглова Н. В., Диховичний О. О. *Добір математичної моделі для аналізу тестових завдань типу «вбудовані відповіді» з математичних дисциплін* // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2022. — 87 № 1. — С. 166–184.
- [2] <https://reference.wolfram.com/language/>

ТЕОРІЯ ІГОР: ВІД МИНУЛОГО ДО СЬОГОДЕННЯ

А.В. Савицька, К.М. Гринтус, К.В. Плясуля

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Перші концепції теорії ігор базувалися на антагоністичних іграх. Зіткнення протилежних інтересів призводило до виникнення конфліктних ситуацій, тому постала необхідність створення рекомендацій для раціональних дій усіх учасників конфлікту. Теорія ігор – це вивчення стратегічної взаємодії між раціональними особами, що приймають рішення, з використанням математичних моделей [1].

Одним із творців теорії ігор є Джон фон Нейман (Янош Лайош Нейман) – американський математик угорського походження, який зробив значний внесок у квантову фізику, функціональний аналіз, теорію множин, інформатику та економічні науки. Результати його досліджень щодо застосування теорії ігор для розв'язання економічних задач було опубліковано у спільній з Оскаром Моргенштерном праці «Теорія ігор і економічна поведінка» у 1944 році [2].

Насправді, приклади теорії ігор були відомі і раніше: трактат вавилонського Талмуда про розподіл майна померлого чоловіка між його дружинами, карточні ігри у XVIII ст., розвиток теорії шахової гри початку XX ст. Один із найвідоміших прикладів використання теорії ігор відбувся під час холодної війни, коли йшли перемовини про «Договір нерозповсюдження ядерної зброї», а невелика гонка озброєнь загрожувала перетворитись у велику небезпеку. Саме теорія ігор допомогла знайти оптимальну стратегію й уникнути найгіршого: гарантованого взаємного знищення. Одним із рішень, яке унеможливило використання ядерного удару було те, що обидві сторони могли завдати удару у відповідь. На жаль, із часом кількість гравців і спектр нового озброєнь масового ураження продовжують зростати, а їх доставка, з використанням гіперзвукових ракет, не лише супротивнику часу на зважену відповідь. Це призводить до швидкого зростання кількості вірогідних рішень і відповідей, а відповідно – прорахунків [3]. Джон Неш розробив концепцію («рівновага за Нешем» або «некооперативна рівновага»), що полгає у ситуації, коли ні у одного гравця немає стимулів змінювати свою стратегію при даній стратегії іншого гравця, що дозволяє досягти компромісного рішення. Тобто, ніхто нічого не отримає, якщо вирішить змінити свою стратегію, припускаючи, що інші не змінюють свою.

Найголовнішим недоліком теорії ігор є те, що у ній людей вважають раціональними гравцями, хоча це не завжди так. У житті досить часто трапляються ситуації, коли людина не максимізує функцію виграшу, також на неї можуть впливати культурні

та соціальні норми особливості, звички. Data Science в теорії ігор – це концепція, яка допомагає приймати ефективні рішення на основі даних про поведінку раціональних людей [4]. Основними компонентами, які допомагають аналізувати проблему прийняття рішень на основі даних, є: набір усіх доступних варіантів; набір результатів на основі наведених вище варіантів; оцінка результатів [5].

Останнім часом відбувається активний розвиток штучного інтелекту, зокрема, різновидів нейронних мереж. Штучні нейронні мережі імітують справжні біологічні, оскільки вузли інформації пов'язані між собою через мережу з надсилання та отримання сигналів. У літературі з поведінкової теорії ігор розроблено широкий спектр моделей для прогнозування поведінки людини у стратегічних умовах, шляхом включення когнітивних упереджень та обмежень, отриманих зі спостережень за грою, та ідей когнітивної психології. Тобто, аби навчити машину думати як людина, необхідно використовувати математичні варіації людського мислення. Досягненням у сфері штучного інтелекту сприяють «загальні мережі» (наприклад, GAN), які використовують передові методи теорії ігор для глибокого вивчення інформації, що дозволяє комп'ютеру самостійно навчатися багатьом методам і стратегіям. Цей тип середовища забезпечується недосконалими інформаційними іграми, у яких комп'ютери здатні формувати рівновагу Неша та знаходити найкращі рішення.

Щоразу, коли нейронна мережа проходить через набір даних, вона грає відповідно до теорії ігор. Залежно від результату цієї гри машина робить висновки і вчиться досягати успіху на основі ймовірностей та стратегій, а також за допомогою попередньо пройдених ігор та досвіду інших гравців. Це непростий спосіб глибокого навчання, що робить величезні кроки у напрямі вдосконалення штучного інтелекту, його здатності самостійно приходять до тих чи інших відповідей та аналізувати інформацію.

Отже, теорія ігор – галузь математики, яка вивчає можливі концепції для ухвалення оптимальних рішень у конфліктних ситуаціях. На відміну від деяких розділів математики, теорія ігор активно розвивається для систем штучного інтелекту та машинного навчання, знаходить широке практичне застосування в економіці, політиці, Data Science.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] А.А. Шиян *Теорія ігор: основи та застосування в економіці та менеджменті* // Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ – 2009. – 164 С.
- [2] Poundstone, W. *John von Neumann* // Encyclopedia Britannica. – <https://www.britannica.com/biography/John-von-Neumann> – (дата звернення: 05.04.2023).
- [3] Bloomberg. *Загроза ядерної війни зростає разом з вірогідністю поширення арсеналів* – <http://surl.li/hqwff> – (дата звернення: 05.04.2023).
- [4] *Game Theory and Data Science* – <https://melaniesoek0120.medium.com/game-theory-for-data-scientists-81c5756fdf83> – (дата звернення: 05.04.2023).
- [5] *Game Theory for Data Scientists. The basics: simultaneous move games & dominance solvable strategies* – <https://towardsdatascience.com/game-theory-666abe63215e> – (дата звернення: 05.04.2023).

ВИКОРИСТАННЯ ІКТ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ «КВАДРАТИЧНІ ФУНКЦІЇ» З ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

А. Сачева

(Волинський національний університет ім. Лесі Українки, Київ, Україна)

Процес інформатизації, який охопив сьогодні всі сторони життя сучасного суспільства, має кілька пріоритетних напрямків, до яких слід віднести інформатизацію освіти. Вона є першоосною глобальної раціоналізації інтелектуальної діяльності людини за рахунок використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні. Використання інформаційно-комунікаційних технологій на уроках математики допомагає учителю зменшити час на вивчення нового матеріалу за рахунок швидкості та наочності виконання роботи, перевірки знання здобувачів освіти в інтерактивному режимі, також допомагає реалізовувати весь потенціал особистості таких як творчий, естетичний, пізнавальний, комунікативний та морально-етичний.

В наш час глобальна комп'ютеризація та інформатизація надає сучасному учителю математики, невідомі раніше засоби інтенсифікації процесів інтелектуального розвитку здобувачів освіти, озброєння їх системою знань та прийомів розумової діяльності. Також використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій суттєво підвищує інтерес до пізнання математики, пізнавальну активність та самостійності здобувачів освіти. Тому актуальним є скористатися інформаційно-комунікативними технологіями при вивченні математики для того, щоб розкривати, розвивати та реалізовувати інтелектуальний потенціал у здобувачів освіти.

Мета та завдання інформаційно-комунікаційних технологій на уроках математики:

1. Породжувати навички роботи з комп'ютером.
2. Розвивати пам'ять, увагу та творчу здібність.
3. Розвивати інтелектуальну активність дитини та знаходити рішення проблемних ситуацій.
4. Наочна презентація навчального матеріалу.
5. Поглиблення та поширення знань здобувачів освіти з певної теми.
6. Діагностика отриманих знань.
7. Виконувати творчі роботи різного характеру.

Застосування інформаційно-комунікаційних технологій на уроках може здійснюватися за різними напрямками відповідно до потреб певного уроку: використання

готових мультимедійних програм; створення власних розробок за допомогою стандартного програмного забезпечення. Переваги інформаційно-комунікативних технологій в навчальному процесі має безліч позитивів як для вчителя, так і для здобувача освіти: індивідуалізація навчання; інтенсифікація самостійної роботи здобувачів освіти; зростання обсягу виконаних завдань на уроці; розширення інформаційних потоків при використанні Internet; підвищення мотивації за рахунок різноманітності форм роботи.

Застосування одного із найпоширеніших програмних засобів, на сьогодні є електронна таблиця Microsoft Office Excel. Її можна використовувати на уроках математики для вивчення властивостей елементарних функцій. Наприклад, розглянемо функцію, яка задана аналітично $y = x^2 + x$. Процес побудови графіка даної функції в Excel: Вибрати межі зміни аргументу і крок зміни аргументу.

1. Нехай $x_{min} = -4$, $x_{max} = 4$, $\Delta x = 0,5$.
2. Заповнити стовпець значень аргументу функції.
3. Стовпець значень функції дістанемо, якщо у відповідну комірку ввести формулу: =СТЕПІНЬ(В1,2)+В1, де I - номер рядка.
4. Виділити комірки В3:С19.
5. Викликати «Майстер діаграм» (на панелі інструментів).
6. З усіх запропонованих діаграм, вибрати точку з гладким з'єднанням.
7. Перевірити діапазон введених даних.
8. Виконати оформлення одержаного графіка і розмістити його у зручному місці.

Таким чином, використання інформаційно-комунікаційних технологій на уроках математики стає невід'ємною частиною теперішнього навчального процесу, сучасні технології дозволяють збільшити швидкість сприйняття, розуміння та глибину засвоєння величезних масивів знань. Це є запорукою більш якісного навчання.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Старцева Н. О. *с.н.с. Інституту електронних програмно-методичних засобів навчання РАВ. Інформаційні технології на уроках математики.* // Збірник наукових праць «Педагогіка та психологія». 2017. № 58.
- [2] *Методика та технологія.* // LearningApps. URL: <https://osvita.ua/school/method/technol/6804>
- [3] *Використання ІКТ на уроках математики.* // LearningApps. URL: <https://naurok.com.ua/vikoristannya-ikt-na-urokah-matematiki-92195>

МАТЕМАТИКА В МЕДИЦИНІ

К.Ю. Сизьон, Т.Г. Пригалінська

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Математика, без перебільшення, відіграє важливу роль у розвитку та житті людства. Ми часто недооцінюємо вклад математики в медицину та її відкриття, такі як винахід ліків або медичної апаратури, а бачимо в ній лише інструментарій для обчислення, вимірювання, дозування та статистичного аналізу. Однак, велика кількість технологічних досягнень, якими лікарі користуються сьогодні, носить математичний характер і є результатом спільних зусиль математиків, інженерів та медиків.

Медична візуалізація — це процес створення зображень внутрішніх органів, що проводиться з метою клінічного аналізу або медичного втручання. Найпоширеніший спосіб її проведення — комп'ютерна томографія. Математична теорія комп'ютерної томографії, яка спочатку не передбачала конкретного застосування, була заснована на перетворенні Радона, яке ввів у 1917 році австрійський математик Йоган Радон. А перший КТ-сканер був винайдений Алленом Кормаком і Годфрі Хаунсфілдом у 1963 році [1].

Комп'ютерна томографія базується на просвічуванні ділянки органу рентгенівськими променями. Апарат вимірює проекції променів (вектор їх інтенсивності) та згідно з лінійкою фотодетекторів присвоює кожній точці $(x; y)$ цифрового зображення рівень сірого в діапазоні від білого до чорного [2].

Мовою математики чорно-біле зображення є функцією $f(x; y)$, яка присвоює кожному пікселю певний номер, що відповідає його рівню сірого. У 1920-х роках зображення кодувалися за допомогою п'яти різних рівнів сірого і мали низьку якість. Зараз стандартом є 8-бітні зображення, тобто маємо $2^8 = 256$ рівнів сірого [3].

Отже, цифрове зображення, як результат комп'ютерної томографії, є функцією $f(x; y)$, що ставиться у відповідність кожній точці $(x; y)$ на площині уздовж траєкторії проходження рентгенівських променів через об'єкт та характеризується поглинанням рентгенівського випромінювання тканинами, пропорційно їх щільності, або фазовим зсувом хвилі.

Інше неочевидне, але поширене застосування математики в медичній практиці, а саме в урології — визначення розміру нирки за спрощеною формулою математичної моделі еліпсоїда обертання: $V = \frac{\pi \cdot a \cdot b \cdot c}{6}$, де a — розмір нирки по вертикалі, b — поперечний розмір, c — передньо-задній розмір. Аналогічно можна обчислювати розмір кістки, паренхіми та синуси нирок [4, 5].

Крім того, властивості еліпсоїда обертання, а саме його оптична здатність, використовуються при лікуванні нефролітіазу. Нехай еліпс виготовлено із матеріалу, здатного відбивати промені світла. Джерело світла розміщують у фокусі $F1$, світло розсіюється, відбивається від стінок і всі промені збираються у фокусі $F2$. Тому, щоб роздробити лазером камінь у нирці, приймають цю точку за $F1$. Операція виконується за допомогою апарата, що має форму еліпсоїда обертання із джерелом випромінювання, розміщеним у фокусі $F2$. Таким чином лазерні промені відбиваються від поверхні стінок та акумулюються у $F1$ — місцезнаходженні каменю, у результаті чого відбувається його руйнування [6].

Математичні дослідження мають корисне та практичне застосування, призводять до інновацій і навіть рятівних технологій, зокрема в медицині. Важко переоцінити роль математики, такої абстрактної і в той же час такої точної науки, яка в симбіозі із прикладними науками стає рушійною силою новаторських ідей і надійною опорою для їх реалізації.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Gonzalez, R. C. *Digital Image Processing* / R. C. Gonzalez, R. E. Woods // Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 3rd ed. – 2006.
- [2] *Математичні методи рентгенівської комп'ютерної томографії* / Н. О. Тулякова, О. М. Трофимчук // Математичне моделювання в економіці. — 2019. — № 4(17). — С. 50-66. — Бібліогр.: 11 назв. — укр.
- [3] Путятін Є. П. *Застосування перетворення Радона для нормалізації зображень* / Є. П. Путятін, О. В. Гороховатський // Біоніка інтелекту. — 2005. — № 1(62).— С. 3-9.
- [4] Монастирський В. М. *Характеристика параметрів нирки за даними магнітно-резонансної томографії хворих на сечокам'яну хворобу в осіб з єдиною ниркою* / В. М. Монастирський // Клінічна анатомія та оперативна хірургія. — 2018. — Т. 17, № 3. — С. 38-43.
- [5] Варвашеня М. В. *Вибір тактики малоінвазивних ендouroлогічних втручань у хворих простими кістами нирок* : дис. ... канд. мед. наук : 14.01.06 — Урологія / М. В. Варвашеня ; ДЗ «Запорізька медична академія післядипломної освіти МОЗ України». — Запоріжжя, 2016. — С. 140.
- [6] Loske A. M. *More Efficient Focusing for Extracorporeal Shock Wave Lithotripsy* / A. M. Loske, F. E. Prieto. // American Institute of Physics. — 2001. — P. 99-104.

ПРОПОЗИЦІЇ ЩОДО СТРУКТУРИ УРОКУ ЗАСВОЄННЯ НОВИХ ЗНАНЬ З МАТЕМАТИКИ З МЕТОЮ СПРИЯННЯ КРАЩОМУ ЗАПАМ'ЯТОВУВАННЮ УЧНЯМИ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ

Ю.В. Тихоненко

(УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна)

У процесі навчання математики важливим аспектом є повторення пройденого раніше матеріалу. Зокрема, пригадування готує учнів до вивчення наступних тем. Про це зазначають З.І. Слєпкань, М.І. Бурда, Є.П. Нелін, В.Г. Бєвз, Н.А. Тарасєнкова та інші фахівці в галузі методики навчання математики. У своїй педагогічній практиці помічаю, що часом повторення переростає, фактично, в повторне вивчення з причини забування учнями значної частини навчального матеріалу. Тому актуальною є проблема такої організації вивчення математики, котра би сприяла сприянням кращому запам'ятовуванню учнями навчального матеріалу. Спираючись на дослідження у галузі когнітивістики [2, 3, 5] та власні спостереження, виокремлю деякі причини забування учнями вивченого матеріалу, зумовлені особливостями організації навчального процесу:

- (1) недостатнє відпрацювання навичок під час вивчення теми;
- (2) несвоєчасне повторення (зарано, коли інформація тримається в оперативній пам'яті, або ж запізно, коли відповідно до кривої забування Еббінгауза [1] частина інформації втрапилася);
- (3) надмірна концентрація інформації, яку учень нездатний втримати одночасно в оперативній пам'яті, а отже отримує лише фрагменти знань, які можуть не сформувати цілісну картину в довготерміновій пам'яті [2, 3].
- (4) низький рівень концентрації уваги.

На основі власного досвіду роботи з учнями, я пропоную такі кроки до усунення наведених факторів.

Недостатнє відпрацювання навичок. Пріоритетом класної роботи поставити практику виконання завдань, переважно у груповій чи самостійній роботі учня. За потреби вдатися до технології перевернутого навчання, коли теоретична частина вноситься на домашню роботу.

Несвоєчасне повторення. Передбачити у календарно-тематичному плануванні інтервальне повторення пройденної теми (окремо від актуалізації знань перед вивченням іншої) відповідно до кривої забування.

Надмірна концентрація інформації. Розбити планований навчальний матеріал на підтеми по 3-5 нових фрагментів у кожному, і після кожного з них додати вправи на застосування нових знань [4].

Відволікання та низька концентрація уваги. Дотримуватися мінімалізму в оформленні навчальних матеріалів; змінювати форми та види діяльності учня кожні 10-12 хвилин.

Таким чином, урок засвоєння нових знань має орієнтовну структуру:

- (1) актуалізація знань до нової теми
- (2) теоретична частина (3-5 нових фрагментів)
- (3) практична частина (завдання початкового та середнього рівня)
- (4) повторення пунктів 2,3 двічі чи тричі за урок
- (5) систематизація нового матеріалу (усне повторення, складання таблиць чи структурних схем)

При застосуванні мною запропонованої системи введення нових понять у 10 класі під час вивчення теми «Похідна та її застосування» учні показали на підсумковому тестуванні середній результат у 76% правильно виконаних завдань проти 65% успішності за тест із теми «Тригонометричні функції», коли введення понять відбувалося іншим чином. Такі результати дають підставу вважати, що запропонована структура уроку засвоєння знань може покращити результати навчання. Проте дані припущення потребують подальшої перевірки шляхом проведення педагогічного експерименту на ширшій вибірці та в межах вивчення однієї теми.

Висновки. Запам'ятовування учнями нового матеріалу є важливим для забезпечення поступовості вивчення тем за шкільний курс математики. Запропоновано рекомендації щодо організації уроку засвоєння знань задля покращення запам'ятовування учнями інформації. Експериментальна перевірка даної гіпотези є предметом подальших досліджень.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Мокін Б.І., Войцеховська О.О. *Математичне обґрунтування необхідності і змістовної деталізації матеріалу, викладеного студентам на попередніх лекціях, на початку лекцій, присвяченій викладенню нового матеріалу.* // «INTERNET-EDUCATION-SCIENCE»(IES-2020), ВНТУ – 2020. — С. 110–112.
- [2] Оклі Б. *Навчитися вчитися: як запустити свій мозок на повну.* — Київ: Наш формат, 2018. — 272 с.
- [3] Baddeley A. *Memory.* — NY: Psychology Press, 2009. — P. 438–456.
- [4] Бурда М., Васильєва Д. *Особливості навчання математики в умовах воєнного стану.* // «Математика в рідній школі», №4–5 — 2022. — С. 6–15.
- [5] Dehaene S. *How We Learn.* — NY: Viking, 2020. — 352 p.

ФОРМУВАННЯ КОМПЕТЕНТНОСТІ ПІДПРИЄМЛИВІСТЬ ТА ФІНАНСОВА ГРАМОТНІСТЬ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

О.В. Ткач

(УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна)

Згідно навчальних програм з математики для учнів 5-9 класів та модельних навчальних програмах 5-6 класів однією з ключових визначена компетентність підприємливість та фінансова грамотність. [1,2,3,4].

Формування підприємливості та фінансової грамотності починається ще з початкової школи.[5]

Компетентність підприємливість та фінансова грамотність є важливою складовою успіху в сучасному світі. Вона включає у себе розуміння ринкових процесів, планування та управління ресурсами та ризиками, аналіз даних та прийняття рішень, комунікаційні та лідерські навички, фінансову грамотність та інше.

Вивчення математики в середній школі може відігравати важливу роль у формуванні компетентності підприємливості та фінансової грамотності учнів. Для досягнення цієї мети можуть бути застосовані різноманітні методи та підходи, серед яких можна виділити наступні:

1. Застосування практичних завдань та проєктів, пов'язаних з реальними життєвими ситуаціями, які вимагають застосування математичних знань та навичок. Наприклад, створення бізнес-плану, розробка проєкту інвестування, оцінка ризиків тощо.
2. Розвиток критичного мислення та аналітичних навичок учнів, які є важливими складовими підприємливості та фінансової грамотності. Учні повинні навчитися аналізувати різні фінансові інформації, оцінювати її достовірність та корисність.
3. Використання інтерактивних технологій та ігрових форматів навчання, які можуть стимулювати інтерес до математики та фінансів. Наприклад, використання комп'ютерних програм для розрахунку фінансових показників, ігрових симуляцій для моделювання різних фінансових ситуацій.

Одним з найпростіших способів формування підприємницької компетенції в шкільному курсі математики є розв'язування задач фінансового змісту. Оскільки необхідною умовою формування компетентності є саме діяльнісна спрямованість навчання[2], то для формування підприємницької компетентності доцільно запропонувати учням задачі, які ілюструють застосування математичного апарату на практиці та будуть спонукати учасників освітнього процесу до критичного мислення та знайомитимуть з елементарними фінансовими поняттями.

Приклад 1. У книжковому магазині “Маленький принц” коштує 128,5 грн, а в інтернет-магазині - 99,9 грн. Обчисліть, на скільки дешевше книга в інтернет-магазині, ніж у книжковому. Що більш вигідно замовити книжку в інтернет-магазині (доставка коштує 50 грн), проте з кешбеком, який становить 34 від вартості книги, чи купити в магазині?

Важливою частиною розв'язування задач є обговорення поставленої проблеми та пошук шляхів її вирішення, тільки тоді можна говорити про формування компетентності в учня.

На жаль, наразі розроблено недостатня кількість навчальних та методичних матеріалів для ефективної реалізації цієї компетентності.

Отже, компетентність підприємливості та фінансова грамотність являється однією з ключових адже дозволяє сформуванню економічно незалежну особистість, яка може критично мислити, робити свідомий вибір та розпоряджатися власним бюджетом. Дане питання потребує подальших досліджень та розробки навчальних та методичних матеріалів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Істер О.С. *Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи»*
- [2] Навчальна програма з математики для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів
- [3] Василюшин М.С., Милянник А.І, Працьовитий М.В, Простакова Ю.С, Шкільний О.В. *Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти*
- [4] Бурда М.І., Васильєва Д.В. *Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти*
- [5] Нова школа [Електронний ресурс] <https://osvita.ua/doc/files/news/520/52062/new-school.pdf>. — 2016.
- [6] Назаренко Г.А. *Формування підприємницької компетентності учнів загальноосвітніх навчальних закладів у відповідності до вимог нових державних стандартів // метод. посібник. — Черкаси: ЧОШПО, 2014. — 68 с.*
- [7] О. Пометун, Л. Пироженко *Інтерактивні технології навчання: Теорія, досвід // метод. посібник. — Київ: А.П.Н, 2002. — 136 с.*
- [8] Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Д.В. Васильєва, Н.Г. Владімірова *Математика: підруч. для 5 класу закладів загальної середньої освіти // “Освіта”*
- [9] Джон Ендрю Біос *Математика: підруч. для 5 класу закладів загальної середньої освіти // “Лінгвіст”*

ЛЕОПОЛЬД КРОНЕКЕР

В.П. Яцуненко, Т.В. Маловічко

(КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Леопольд Кронекер народився в заможній єврейській родині 7 грудня 1823 р. в Лігніці, Пруссія. Як і його батьки, він дотримувався іудаїзму майже все життя і тільки за рік до смерті перейшов у християнство. Його батько, Ісідор Кронекер, власник процвітаючого торгового бізнесу, був добре освіченою людиною з невгамовною жагою до філософії, яку він передав Леопольду. Мати, Йоханна Праусницер, також походила з заможної родини [1]. Батьки наймали репетиторів для початкової освіти своїх дітей. Брат Леопольда, Карл Гуго Кронекер (1839–1914) став відомим фізіологом.

Леопольд Кронекер продовжив навчання у гімназії Лігніця, де на нього сильно вплинув його викладач Ернст Едуард Куммер. Він розгледів у своєму учні великі математичні здібності та впровадив йому індивідуальну програму [2].

У 1841 р. Кронекер вступив до Берлінського університету, де він захопився математикою, але не обмежувався тільки нею. Він також вивчав астрономію, метеорологію, хімію. Тоді на нього вплинули такі математики, як Діріхле та Якобі, які привили йому любов до теорії чисел та еліптичних функцій, якими він займався все своє життя. Також він навчався в університетах Бонна та Бреслау [1]. У 1845 р. Кронекер захистив дисертацію, присвячену алгебраїчним числам, на тему „*De Unitatibus Complexis*“ за яку він отримав ступінь доктора філософії.

Одразу після захисту дисертації, у віці 22 років, Кронекер отримав великий спадок від свого дядька та на 8 років занурився у проблеми бізнесу, відійшовши від професійного заняття математикою, почавши займатися нею у власний час. У 1848 р. він одружився на своїй кузині, Фанні Праусницер, з якою він прожив решту свого життя. Подружжя мало шестеро дітей.

У 1853 р. Кронекер після тривалої перерви опублікував працю «*Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen*», присвячену теорії рівнянь та теорії Галуа. У цей час він почав активне листування із виднішими математиками Франції того часу. У 1855 р. він повернувся до Берліну та посилив свою активність у математичних дослідженнях. Він не хотів бути працевлаштованим в університеті, а просто брати участь у «математичному житті» університету та контактувати з іншими математиками щодо своїх досліджень.

У 1862 році Кронекер почав читати лекції у Берлінському університеті (здебільшого на тему власних досліджень), а через 20 років він зайняв місце Куммера на позиції професора [2]. Лекції Кронекера не були популярними серед студентів із-за своєї складності, але до тих, хто все ж таки їх відвідував, Кронекер ставився дуже привітно та завжди чекав їх у своєму домі для обговорення новітніх математичних проблем. Кронекер здобув свою відомість не лише завдяки своїм видатним роботам, а і через свої особливі погляди на математику. Так він заперечував результати Вейерштрасса в аналізі, не визнавав трансцендентних чисел. Як член редколегії журналу «Crelle's Journal» він не брав до публікації роботи Кантора з теорії множин, вважаючи, що таких об'єктів просто не існує [1]. Він був впевнений, що математики можуть лише відкривати вже існуючі об'єкти, а не створювати нові, а сама математика має мати справу лише із об'єктами, з якими ми стикаємося в реальному житті. Кронекер був за розділення математики на дисципліни, кожна з яких займалася б власними об'єктами: «Дійсно, я вважаю спеціальними дисциплінами нашої науки механіку, яка оперує поняттям часу, геометрію, яка прагне відкрити просторові залежності, де час не з'являється, і так звану чисту математику, де не з'являються ані час, ані простір і яку я хочу назвати «арифметика»» [3].

23 серпня 1891 внаслідок нещасного випадку померла дружина Кронекера. Він помер у своєму домі в Берліні від бронхіту 29 грудня 1891 р.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kronecker/>
- [2] Bell E.T. *Men of mathematics*. — New York: Simon and Schuster, 1937 — 628 с.
- [3] Boniface J. *Leopold Kronecker's conception of the foundations of mathematics* // *Philosophia Scientia* — 2005. — CS 5. — С. 143–156.

Наукове видання

XI Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків

11-13 травня 2023 р.

Збірник містить тези доповідей учасників наукової конференції.

Автор (колектив авторів) несе повну відповідальність за новизну і достовірність результатів наукового дослідження.

Редакційна колегія:

Секція 1.: Клесов О.І., Чорней Р.К.

Секція 2.: Працьовитий М.В., Барановський О.М.

Секція 3.: Олійник Б.В., Петравчук А.П.

Секція 4.: Глибовець В.М., Франчук В.М.

Секція 5.: Шкільний О.В., Гончаренко Я.В.

Комп'ютерний набір та верстка: Бондаренко О.І., Ратушняк С.П.

Адреса: 01601, м. Київ, вул. Пирогова, 9, тел. (044) 239-30-91

Факультет математики, інформатики та фізики

УДУ імені Михайла Драгоманова