Следствие 3. *Пусть L — момент последнего возвращения в начало блуждания $S_1, \ldots, S_{2n}$. Тогда*

$$\mathsf{P}_{2n}(L = 2k) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}, \qquad k, n-k \to \infty. \tag{5}$$

Доказательство. Используя формулу (4.9) и следствие 1, получаем

$$\mathsf{P}(L = 2k) = \mathsf{P}(S_{2k} = 0)\mathsf{P}(S_{2n-2k} = 0) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}, \qquad k, n-k \to \infty.$$

□

Замечание 2. Пусть $0 < v < 1$. Тогда $\mathsf{P}(L_{2n} = 2nv) \to 0$, $n \to \infty$. Если n таково, что nv не является натуральным числом, то $\mathsf{P}(L = 2nv) = 0$. Если же n таково, что nv — натуральное число, то необходимый результат вытекает из следствия 3.

Следствие 4. *Пусть $0 < u < v < 1$. Тогда соотношение* (5) *выполняется равномерно по $B_n \stackrel{\text{def}}{=} \{k \colon u \le k/n \le v\}$.*

Доказательство. Пусть $\{a_{n,k}\}$ — последовательность неотрицательных чисел, зависящих от двух параметров. Равномерная сходимость $a_{n,k} \to 1$ на B_n при $n, k \to \infty$ означает, что

$$\max_{k \in B_n} |a_{n,k} - 1| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Таким образом, утверждение следствия 4 означает, что

$$\max_{k \in B_n} \left| \frac{\mathsf{P}(L_{2n} = 2k)}{1/\pi\sqrt{k(n-k)}} - 1 \right| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Для доказательства равномерной сходимости положим $M_i = i! e^i / i^{i+\frac{1}{2}}$, $i \ge 1$. Тогда

$$\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} = \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k}} = \frac{M_{2k}}{M_k^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{k}}, \qquad \frac{C_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k}}{2^{2n}} = \frac{M_{2k} M_{2n-2k}}{M_k^2 M_{n-k}^2} \cdot \sqrt{\frac{4}{k(n-k)}}.$$

Воспользуемся формулой (4.9) и обозначением $a_i \stackrel{\text{def}}{=} M_{2i}/M_i^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathsf{P}(L_{2n} = 2k)}{1/\pi\sqrt{k(n-k)}} - 1 \right| &= |2\pi a_k a_{n-k} - 1| = \left| 2\pi a_k a_{n-k} - 1 \pm \sqrt{2\pi} a_k \right| \\ &\le 2\pi a_k \left| a_{n-k} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right| + \sqrt{2\pi} \left| a_k - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right|. \end{aligned}$$

Так как $\sqrt{2} a_k = \sqrt{k}\mathsf{P}(S_{2k} = 0)$, то из следствия 1 вытеает, что последовательность $\{a_k\}$ является ограниченной. $\boxed{\text{объяснить!}}$ Это означает, что $a_k \le A$ для всех $k \geq 1$ и некоторой константы A. $\boxed{\text{показать!}}$ Кроме того, $a_k \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $k \to \infty$. $\boxed{\text{почему?}}$ Положим

$$\varepsilon_i \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j \geq i} \left| a_j - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right|.$$

Понятно, что $\varepsilon_i \to 0$, $i \to \infty$. $\boxed{\text{объяснить!}}$ Обозначим теперь $k_{1n} = \min B_n$ и $k_{2n} = \max B_n$. Тогда $k_{1n} \to \infty$ и $k_{2n} \to \infty$. $\boxed{\text{доказать!}}$

Следовательно

$$\max_{k \in B_n} \left| \frac{\mathsf{P}(L_{2n} = 2k)}{1/\pi\sqrt{k(n-k)}} - 1 \right| \leq A'(\varepsilon_{n-k_{2n}} + \varepsilon_{k_{1n}}), \qquad A' = \max\{2\pi A, \sqrt{2\pi}\}.$$

Таким образом, сходимость в (5) равномерна по $k \in B_n$. $\boxed{\text{почему?}}$ $\square$

Задача 2. *Показать, что наиболее вероятными моментами последнего возврата в 0 для блуждания с $2n$ шагами являются 0 и $2n$, то есть*

$$\mathsf{P}(L_{2n} = 0) = \mathsf{P}(L_{2n} = 2n) = \max_{0 \leq k \leq n} \mathsf{P}(L_{2n} = 2k).$$

Задача 3. *Показать, что наименее вероятным моментом последнего возврата в 0 для блуждания с $4n$ шагами является $2n$, то есть*

$$\mathsf{P}(L_{4n} = 2n) = \min_{0 \leq k \leq 2n} \mathsf{P}(L_{4n} = 2k).$$

3. Дискретное распределение арксинуса

Набор чисел

$$\frac{C_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k}}{2^{2n}}, \qquad 0 \leq k \leq n, \tag{6}$$

называется *дискретным распределением арксинуса порядка n*. Из теоремы 4.3 вытекает, что этот набор действительно является распределением вероятностей, так как k-ое число в (6) — это вероятности того, что случайное блуждание $S_1, \ldots, S_{2n}$ возвращается в начало в момент k.

Название распределения объясняется тем, что значения арксинуса дают отличное приближение для его значений даже при незначительных n. Мы докажем, что это распределение аппроксимируется значениями арксинуса в теореме 2.

Задача 4. *Доказать непосредственно, что набор чисел (6) действительно является вероятностным распределением.*

4. Закон арксинуса для последнего возвращения

Теорема 2. *Для $x \in (0,1)$ имеет место*

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(\frac{L_{2n}}{2n} < x \right) = \frac{2}{\pi} \arcsin x^{1/2}.$$

Замечание 3. Заметим, что $\arcsin \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = \frac{\pi}{4}$, поэтому $\mathsf{P}\left(L_{2n} < n\right) \to \frac{1}{2}$. Этот результат уже был получен в следствии 4.4.