НТУУ “КПІ” **2015** **КИЇВ**

IV ВСЕУКРАЇНСЬКА КОНФЕРЕНЦІЯ МОЛОДИХ ВЧЕНИХ З ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

В. В. Булдигін
(1946–2012)

Ю. В. Боднарчук
(1955–2013)

НАРОДЖЕННЯ НОВОЇ МАТЕМАТИКИ

О. І. Клесов

Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут”

Божествений геометр

Катастрофа 1665 року

Помер П. Ферма (1601–1665)

Катастрофа 1665 року

Б. Паскаль (1623–1662)

Катастрофа 1665 року

І. Кеплер (1571–1630)
Г. Галілей (1564–1642)
Р. Декарт (1596–1650)

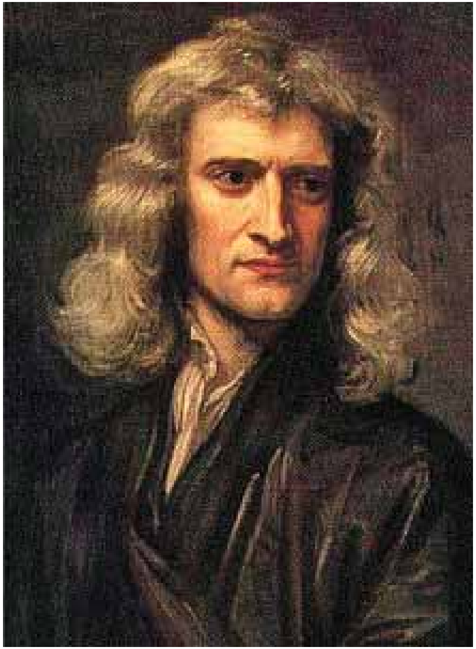
Якщо я й бачив далі від інших, то через те,

що стояв на плечах гігантів ...

Ісаак Ньютон

Математика до 1665 року

1. Геометрія Евкліда
2. Листування Ферма та Паскаля
3. Теорія чисел Ферма
4. Розв'язання рівнянь 3 ступеня
5. Нескінченна геометрична прогресія
6. Розбіжність гармонічного ряду
7. Біном "Ньютона"



Ісаак Ньютон (1642–1726)

І. Ньютон про березень 1665 року

На початку 1665 року я знайшов метод наближених рядів і правило перетворення будь-якого степеня двочлена в такий ряд . . .

І. Ньютон про листопад 1665 року

...у листопаді одержав прямий метод флюксій [диференціальне числення] ...

I. Ньютон про травень 1666 року

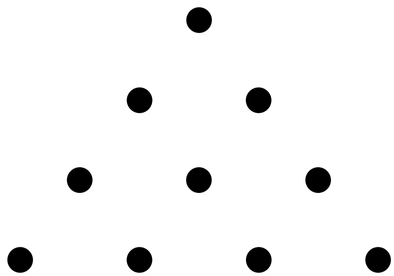
. . . а в травні приступив до зворотного методу флюксій [інтегральне числення]. . .

I. Ньютон про цей період його життя

У цей час я переживав найкращу пору своєї юності й більше цікавився математикою й філософією, як нічим досі . . .

Що це нагадує?

А це?



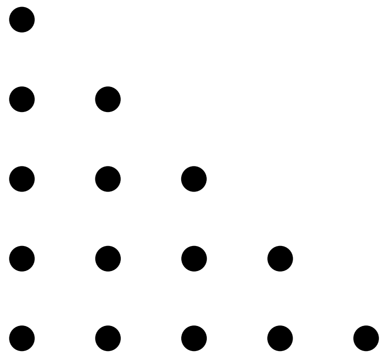
Трикутник Паскаля

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Правило суми

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Вирівняємо по лівому краю



Вирівняємо по лівому краю

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

Правило суми

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

Додамо нулів справа

$n = 0$	$1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots$
$n = 1$	$1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots$
$n = 2$	$1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots$
$n = 3$	$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad \ldots$
$n = 4$	$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad \ldots$

Ньютон додав рядок $n = -1$

$n=-1$	? ? ? ? ? …
$n=0$	1 0 0 0 0 …
$n=1$	1 1 0 0 0 …
$n=2$	1 2 1 0 0 …
$n=3$	1 3 3 1 0 …
$n=4$	1 4 6 4 1 …

щоб зберігалось правило суми

$$
\begin{array}{c|cccccc}
n = -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \ldots \\
n = 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
n = 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
n = 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\
n = 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \ldots \\
n = 4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \ldots
\end{array}
$$

Додамо рядок $n = -2$

$n = -2$	1	-2	3	-4	5	$\dots$
$n = -1$	1	-1	1	-1	1	$\dots$
$n = 0$	1	0	0	0	0	$\dots$
$n = 1$	1	1	0	0	0	$\dots$
$n = 2$	1	2	1	0	0	$\dots$
$n = 3$	1	3	3	1	0	$\dots$

Додамо рядок $n = -3$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
n = -3 & 1 & -3 & 6 & -10 & 15 & \dots \\
n = -2 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & \dots \\
n = -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\
n = 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
n = 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
n = 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots
\end{array}
$$

Додамо рядок $n = -4$

$n = -4$	1	-4	10	-20	35	$\dots$
$n = -3$	1	-3	6	-10	15	$\dots$
$n = -2$	1	-2	3	-4	5	$\dots$
$n = -1$	1	-1	1	-1	1	$\dots$
$n = 0$	1	0	0	0	0	$\dots$
$n = 1$	1	1	0	0	0	$\dots$

Біном Ньютона

$$(x+y)^1 = 1 \cdot x^1 + 1 \cdot y^1$$

$$(x+y)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot xy + 1 \cdot y^2$$

$$(x+y)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 y^1 + 3 \cdot x^1 y^2 + 1 \cdot y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Біном Ньютона

$$(1+x)^1 = 1 + x$$

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

Біном Ньютона $n = -1$

$$\boxed{n = -1 \,\Big|\, 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad \dots}$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$$\frac{1}{1-(-x)} = (-x)^0 + (-x)^1 + (-x)^2 + (-x)^3 + \dots$$

Сума нескінченої геометричної прогресії

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

Чи є щось між рядками?

$$\begin{array}{r|cccccc}
n = 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
n = \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & -\frac{5}{128} & \ldots \\
n = 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots
\end{array}$$

Чи є щось між рядками?

$$
\begin{array}{r|cccccc}
n = 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
n = \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & -\frac{5}{128} & \ldots \\
n = 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots
\end{array}
$$

Як Ньютон це побачив?

$$(1+x)^{1/2} = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

$$1 + x = (1+x)^{1/2} \cdot (1+x)^{1/2}$$

$$
\begin{aligned}
1 + x = {} & \left(1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots\right) \\
& \times \left(1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &= 2c_1 \\
0 &= 2c_2 + c_1^2 \\
0 &= 2c_3 + 2c_1 c_2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &= 2c_1 && \iff c_1 = \frac{1}{2} \\
0 &= 2c_2 + c_1^2 && \iff c_2 = -\frac{1}{8} \\
0 &= 2c_3 + 2c_1c_2 && \iff c_3 = \frac{1}{16} \\
0 &= 2c_4 + 2c_1c_3 + c_2^2 && \iff c_4 = -\frac{5}{128}
\end{aligned}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Справжній біном Ньютона

$$(x + xy)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} \cdot Ay + \\ + \frac{m-n}{2n} \cdot By + \\ + \frac{m-2n}{3n} \cdot Cy +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Коефіцієнти A, B, C, ...

A	це перший член розкладу
B	це другий член розкладу
C	це третій член розкладу

. . . .

Коефіцієнт A

$$(x + xy)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} + \ldots$$

$$A = x^{\frac{m}{n}}$$

Коефіцієнт B

$$(x + xy)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} \cdot Ay + \ldots$$

$$B = \frac{m}{n} \cdot Ay = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}} y$$

Коефіцієнт C

$$(x+xy)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} \cdot Ay + \frac{m-n}{2n} \cdot By + \ldots$$

$$C = \frac{m-n}{2n} \cdot By = \frac{m-n}{2n} \cdot \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}} y^2$$

Випадок $m = 2$, $n = 1$

$$(x + xy)^2 = x^2 + 2 \cdot Ay + \frac{2-1}{2 \cdot 1} \cdot By$$

$$+ \frac{2-2}{3 \cdot 1} \cdot Cy + \ldots$$

Коефіцієнти A, B, C

$$A = x^2$$

$$B = 2 \cdot Ay = 2x^2y$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot By = x^2y^2$$

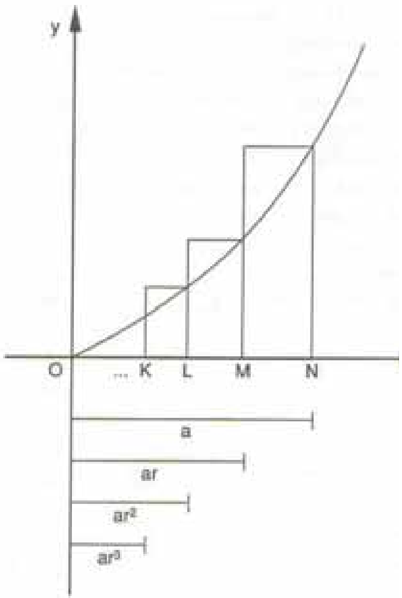
Розклад Ньютона

$$(x+xy)^2 = x^2 + 2x^2y + x^2y^2$$

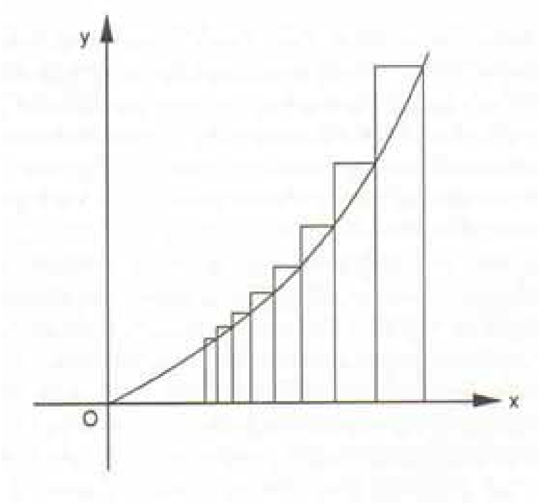
Біном Ньютона

$$(x+xy)^2 = x^2 + 2x^2y + x^2y^2$$

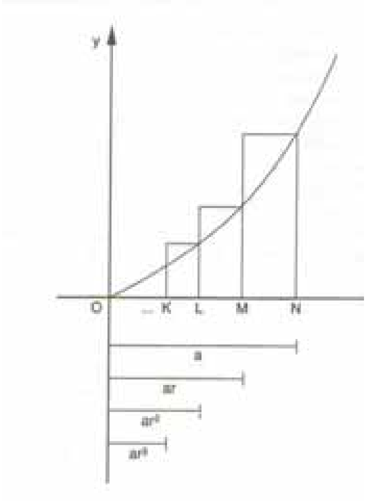
Метод Ферма (1640)



Метод Ферма $r \uparrow 1$



Метод Ферма $y = x^n$



ордината точки $N = a^n$

ордината точки $M = (ar)^n$

ордината точки $L = (ar^2)^n$

ордината точки $K = (ar^3)^n$

$\boxed{\text{площа з основою } MN = a^n \times (a - ar)}$

Обчислення Ферма

площа з основою $MN = a^n \times (a - ar)$

площа з основою $LM = (ar)^n \times (ar - ar^2)$

площа з основою $KL = (ar^2)^n \times (ar^2 - ar^3)$

. . . .

Загальна площа

$$
\begin{aligned}
a^n(a - ar) \\
&+ (ar)^n(ar - ar^2) \\
&+ (ar^2)^n \times (ar^2 - ar^3) + \dots \\
= \sum_{k=0}^{\infty} (ar^k)^n (ar^k - ar^{k+1})
\end{aligned}
$$

Сума геометричної прогресії

$$\sum_{k=0}^{\infty}(ar^k)^n(ar^k - ar^{k+1})$$

$$= a^{n+1}(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^{kn+k}$$

$$= a^{n+1}\frac{1-r}{1-r^{n+1}}$$

Оскільки

$$\frac{1-r}{1-r^{n+1}} = \frac{1}{1+r+r^2+\cdots+r^n},$$

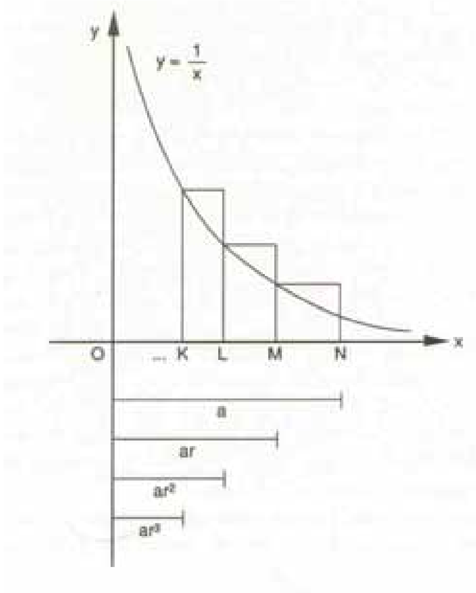
то

$$\text{загальна площа} = \frac{a^{n+1}}{1+r+r^2+\cdots+r^n}$$

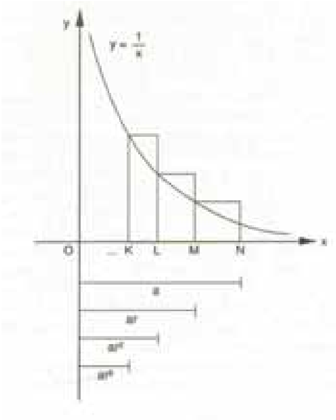
Перейшовши до границі $r \uparrow 1$

$$\text{площа під } x^n = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Метод С. Вінсента (1647)



Обчислення Вінсента



Висота точки $M = \dfrac{1}{ar}$

Висота точки $L = \dfrac{1}{ar^2}$

Висота точки $K = \dfrac{1}{ar^3}$

$$\boxed{\text{площа над } MN = (a - ar) \times \frac{1}{ar}}$$

Обчислення Вінсента

$$\text{площа над } MN = \frac{a - ar}{ar} = \frac{1-r}{r}$$

$$\text{площа над } LM = \frac{ar - ar^2}{ar^2} = \frac{1-r}{r}$$

$$\text{площа над } KL = \frac{ar^2 - ar^3}{ar^3} = \frac{1-r}{r}$$

Теорема Вінсента

Позначимо через $A(r^n)$

площу над відрізком $[1, r^n]$

Теорема (С. Вінсент (1647))**.**

$$A(r^{n-1}) = \frac{1-r}{r} + A(r^n).$$

Формулювання Вінсента

Теорема (С. Вінсент (1647)). *Якщо аргумент зростає як геометрична прогресія, то значення площі зростає як арифметична прогресія:*

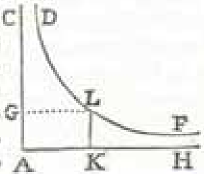
$$A(r^n) = n\frac{1-r}{r}.$$

Логарифм числа

$$\log c^n = n \log c$$

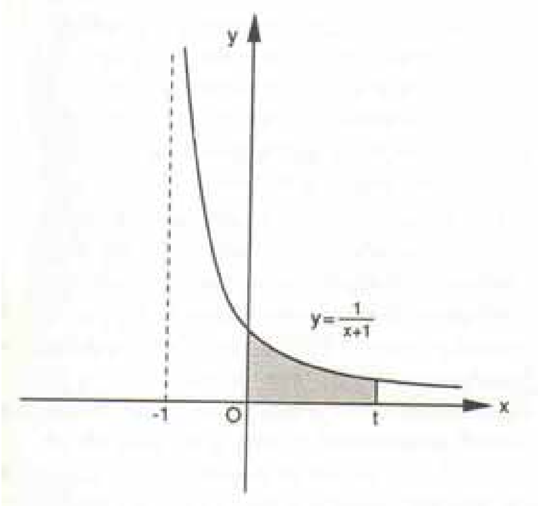
Квадратура гіперболи в релігії

Problem $\frac{n}{n-1} - 1 = a$, which gives $n = \frac{a+1}{a-1}$, so the Equation to the Hyperbola sought, is $\overline{yx}|^{\frac{n-1}{n}} = 1$.



Let (as before) AC, AH be the Asymtotes of any Hyperbola DLF defined by this Equation $yx^n = 1$, in which the Abscissa $AK = x$, and Ordinate $KL = y$, and n is supposed either equal to, or greater than Unity. 1°. It appears that in all Hyperbola's the interminate Space $CAKLD$ is infinite, and the interminate Space $HAGLF$ (except in the *Apollonian* where $n = 1$) is finite. 2°. In every Hyperbola, one Part of it continually approaches nearer and nearer to the Asymptote AC, and the other part continually nearer to the other Asymptote AH; that is, LD meets with AC at a Point infinitely distant from A, and LF meets with AH at a Point infinitely distant from A.

Розклад логарифма в ряд



С. Вінсент: площа під $\frac{1}{x+1} = \log(1+t)$

З іншого боку

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\text{площа під } \frac{1}{1+x} = \text{площа під } 1$$

$$- \text{ площа під } x$$

$$+ \text{ площа під } x^2$$

$$- \text{ площа під } x^3$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

За теоремою Ферма

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots$$

Диференціальне числення

$$\text{площа під } (x^n) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{похідна від } \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$$

Ньютон помітив, що

$$\text{площа під}\left(\text{похідна від}\ \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{площа під}\left(f'(x)\right) = f(x)$$

Теорема Ньютона–Лейбниця

$$\int_0^x f'(u)\,du = f(x) - f(0)$$