О. І. Клесов

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ КРАТНИХ СУМ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Київ–2013

наукове видавництво

ТВіМС

УДК 519.21

О. І. Клесов.
Граничні теореми для кратних сум випадкових величин. — Наукове видання.
Київ, ТВіМС, 2013 р. — 404 стор. — ISBN 978–966–8725–09–8

У монографії вивчаються граничні властивості кратних сум незалежних випадкових величин. Встановлено умови збіжності та обмеженості кратних рядів, підсиленого закону великих чисел з довільним нормуванням, закону повторного логарифму. Розглянуто теорему відновлення для процесів, побудованих за випадковим блукання з багатовимірним часом. Вивчено ергодичні властивості для повної збіжності. Отримано умови для існування моментів максимумів нормованих сум.

Для наукових співробітників, аспірантів, студентів старших курсів математичних спеціальностей університетів.

Бібліогр. 428 найменувань

Рекомендовано до друку
Вченою радою Національного технічного університету України “КПІ”
протокол 12 від 2.12.2013 р.

ISBN 978–966–8725–09–8

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА

Не буде великим перебільшенням сказати, що історія теорії ймовірностей — це історія її граничних теорем, серед яких виділяються закони великих чисел, закони малих чисел та центральні граничні теореми. Імена класиків Якоба Бернуллі, Абрахама де Муавра, Пьєра Лапласа, Сімеона Пуассона назавжди пов'язані у теорії ймовірностей з їхніми досягненнями у граничних теоремах для схеми Бернуллі та для її найпростіших узагальнень.

Теорія ймовірностей і після робіт класиків залишилась у значній мірі теорією граничних теорем, неоціненний внесок у розвиток якої на межі XIX і XX сторічь зробили видатні російські математики П. Л. Чебишов, А. А. Марков та О. М. Ляпунов.

У першій половині XX сторіччя, як і в попередні роки, граничні теореми залишаються серед найбільших досягнень теорії ймовірностей. Роботи Е. Бореля, А. М. Колмогорова, О. Я. Хінчіна, П. Леві, В. Феллера сформували основи сучасної теорії. Саме у цей період стало зрозумілим, що задачі для схеми Бернуллі мають природні аналоги у набагато більш загальній теорії сум незалежних випадкових величин. Монографія Б. В. Гнеденка та А. М. Колмогорова, опублікована у 1949 році, підвела (у певному розумінні) риску під цілим напрямком досліджень стосовно збіжності розподілів.

Друга половина XX сторіччя ознаменувалась видатними досягненнями в рамках класичних задач для сум незалежних випадкових величин: було остаточно розв'язано багато старих задач, але з'явились і нові. Зокрема, були знайдені необхідні і достатні умови для закону повторного логарифма та підсиленого закону великих чисел для довільного нормування; виникли функціональні граничні теореми, які часто називають принципами інваріантності.

При безсумнівних досягненнях теорії граничних теорем, головна її задача для збіжності майже напевно так і залишається нерозв'язаною: знайти необхідні і достатні умови для

$$\mathsf{P}(S_n > b_n \text{ н.к.р.}) = 0 \quad \text{та} \quad \mathsf{P}(S_n > b_n \text{ н.к.р.}) = 1$$

а також для

$$\mathsf{P}(S_n < b_n \text{ н.к.р.}) = 0 \quad \text{та} \quad \mathsf{P}(S_n < b_n \text{ н.к.р.}) = 1,$$

де $\{S_n\}$ — послідовність кумулятивних сум незалежних однаково розподілених випадкових величин, $\{b_n\}$ — послідовність дійсних чисел, а " н.к.р." — скорочення для "нескінченну кількість разів". Зауважимо, що закони великих чисел та закони повторного логарифму, згадані вище, очевидним чином вкладаються в цю постановку.

Природна логіка розвитку граничних теорем теорії ймовірностей привела до багатьох узагальнень класичних постановок. Відповідно до першого з цих узагальнень, замість дискретного індексу n розглядають неперервний індекс t. Багатство задач і результатів цього напрямку тут не обговорюється, оскільки це практично неможливо зробити в рамках вступу до монографії.

Разом з цим виникли й інші узагальнення. Одним з них, тісно пов'язаним з теорією випадкових процесів, стали граничні теореми для сум випадкових елементів, що приймають значення в абстрактних лінійних просторах. І цей напрямок досліджень неможливо оглянути на декількох сторінках, оскільки просте перерахування різноманітних постановок і відповідних результатів потребує істотно більше місця.

Ще одне узагальнення виникло при заміні операції "акумулювання" випадкових величин: якщо в класичній теорії для цього використовується підсумовування $\sum$, то у згаданному узагальненні використовується добуток $\prod$ або взяття максимуму $\max$. Маючи багато схожих з класичною теорією постановок, цей напрямок зараз став самостійним і має різноманітні відгалуження, яким присвячені численні публікації. Окремої згадки заслуговує випадок, у якому застосовується операція $\prod$, але для випадкових матриць замість випадкових величин.

Серед інших узагальнень згадаємо ще одне, яке виникає при відмові від ключової умови класичної теорії, а саме від умови про нескінченну малість доданків. В останні кілька десятиліть цьому напрямку були присвячені сотні публікацій, як в періодичній літературі, так і в монографічній.

Окремої згадки заслуговує узагальнення, в якому незалежність випадкових величин замінюється на різні схеми залежності. І цей напрямок, практично нескінченний по постановках і публікаціям, ми не будемо обговорювати в цій книзі, оскільки йому присвячені тисячі сторінок в журналах і інших книгах; навіть коротке перерахування результатів зайняло б дуже багато місця.

Замість цього ми зосередимося на іншому напрямку в граничних теоремах, що з'явився після усвідомлення того, що множиною індексів може бути не тільки $\mathbf{N}$ або $\mathbf{R}$. Ми будемо вивчати таке узагальнення класичних задач, у якому індекси випадкових величин залежать від кількох параметрів, кожен з яких є натуральним числом. Множину таких індексів ми позначаємо $\mathbf{N}^d$ і кажемо, що випадкові величини залежать від *кратного індексу*, або *мультиіндексу.* Самі індекси ми позначаємо $\mathbf{k}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ ... .

Таким чином, ми розглядаємо *кратні суми* незалежних випадкових величин і вивчаємо для них граничні теореми, приділяючи переважну увагу збіжності майже напевно. Будь-яку сім'ю випадкових величин, які залежать від індексу з простору $\mathbf{N}^d$, ми називаємо *випадковим полем.*

Збіжність випадкових полів можна означати різними способами в залежності від того, що розуміється під "$\mathbf{n} \to \infty$". Серед різноманітних способів, якими мультиіндекс $\mathbf{n}$ “може прямувати до нескінченості”, ми виділяємо два, а саме

$$(n_1, \ldots, n_d) \to \infty \iff \min(n_1, \ldots, n_d) \to \infty$$

або

$$(n_1, \ldots, n_d) \to \infty \iff \max(n_1, \ldots, n_d) \to \infty.$$

Першу збіжність ми називаємо min-збіжність, другу — max-збіжність. У певному розумінні, min-збіжність є найменш обтяжливою, а max-збіжність — найбільш обтяжливою серед усіх можливих типів збіжності.

Коротку історичну довідку про розвиток теорії граничних теорем для кратних сум випадкових величин вміщено у главу 1.

Зміст. Наведемо у телеграфному стилі основні відомості про матеріал, що вміщено у монографію.

Глава 1 є неформальним вступом до теорії граничних теорем для кратних сум незалежних випадкових величин. Ми пояснюємо, що ця теорія має самостійний предмет та потребує нових методів. Крім того, там наведено дуже стислий історичний опис результатів стосовно кратних сум.

Глава 2 містить низку необхідних нерівностей для розподілів та моментів кратних сум незалежних випадкових величин. Між випадками $d = 1$ та $d > 1$ існує істотна різниця, пов’язана з відсутністю повної впорядкованості у просторі $\mathbf{N}^d$ при $d > 1$. Ми демонструємо кілька способів подолати цю перешкоду при доведенні моментних нерівностей для максимумів кратних сум.

У главі 3 розв’язано класичну задачу про граничні розподіли сум, але у випадку $d > 1$. Ми знаходимо необхідні та достатні умови слабкої збіжності для обох типів min- та max-збіжності. Хоча ці умови мало відрізняються одна від іншої зовнішньою формою, між ними існує велика різниця, яку ми демонструємо у главі 4 на прикладі умов для закону великих чисел для обох типів збіжностей.

Глава 5. Вивчається збіжність майже напевно кратних рядів незалежних випадкових величин. У випадку $d > 1$, на відміну від $d = 1$, критерій збіжності спирається на чотири числові ряди. Проте у деяких ситуаціях ці результати вдається звести до класичного вигляду з використанням лише трьох рядів.

Глава 6 є пов’язаною з попередньою главою; тут вивчається обмеженість майже напевно кратних рядів. Одним з феноменів випадку $d > 1$ полягаї у тому, що збіжний ряд не обов’язково є обмеженим.

Глава 7 також пов’язана з главою 5; тут вивчається швидкість збіжності кратних рядів. Тут ми стикаємось з іншим феноменом при $d > 1$, що якщо ряд збігається, то не обов’язково збігаються його залишки. Не виключена також і інша можливість, коли ряд розбігається, але його залишки збігаються.

Глава 8. Вивчається підсилений закон великих чисел для кратних сум незалежних випадкових величин. Однією з несподіваних перешкод є відсутність аналогу леми Кронекера при $d > 1$, що потребує абсолютно нового способу доведення.

Глава 9. Розглядається підсилений закон великих чисел для кратних сум незалежних однаково розподілених випадкових величин з використанням загальних результатів, отриманих у попередній главі. Особливістю випадку $d > 1$ є те, що підсилений закон великих чисел може виконуватись для нормувань, які не мають аналогів при $d = 1$. Якщо, наприклад, $d = 2$, то одним з таких нормувань є $m\sqrt{n}$.

Главу 10 присвячено ще одному класичному результату, закону повторного логарифма. Якщо для однаково розподілених доданків вдається знайти необхідні та достатні умови, то у загальному випадку ще існують певні відмінності в результатах для $d > 1$ та $d = 1$.

Глава 11. Отримано асимптотичні результати для функцій та процесів відновлення, побудованих за випадковими блуканнями з багатовимірним часом. Тут представлено новий підхід до означення таких процесів відновлення та до дослідження їхніх ергодичних властивостей у випадку $d > 1$.

В главі 12 вивчено умови існування моментів супремумів зважених кратних сум незалежних однаково розподілених випадкових величин. Ми наводимо також застосування цих результатів до нових форм підсиленого закону великих чисел та закону повторного логарифму, які не мають аналогів у випадку $d = 1$.

Глава 13. Досліджено так звану повну збіжність. Результати стосовно такої збіжності можна застосовувати для отримання інформації про швидкість збіжності у підсилених законах великих чисел. Проте існує багато інших інтерпретацій цих результатів.

Кожна глава закінчується спеціальним розділом, у якому наведено необхідні бібліографічні посилання.

В додатку A обговорюються особливості min-, max- та інших типів збіжності у просторі $\mathbf{N}^d$. Додаток A містить також й інші означення та результати стосовно простору $\mathbf{N}^d$; там обговорюються відмінності випадків $d = 1$ та $d > 1$ в означеннях та результатах. Загалом цю главу можна вважати дуже стислим вступом до математичного аналізу у просторі кратних індексів $\mathbf{N}^d$.

Подяки. Розглянути граничні теореми для кратних сум запропонував мені М. Й. Ядренко у 1975 році для виконання курсової роботи, коли я був студентом III курсу механіко-математичного факультету Київського університету імені Тараса Шевченка. Одним з результатів моєї дипломної роботи став аналог теореми Колмогорова про збіжність майже напевно кратних рядів незалежних випадкових величин. У ті часи випускники кафедри теорії ймовірностей перед офіційним захистом дипломних робіт доповідали свої результати на семінарі А. В. Скорохода. Така нагода випала і мені. Під час доповіді здавалося, що А. В. Скороход слухає з інтересом, але його вердикт був несподіваним: “*Ви використовуєте невірне означення*”. Я не зовсім зрозумів його зауваження, оскільки всі означення були взяті мною з класичних підручників і здавалися абсолютно коректними. В мене не вистачило духу спитати тоді у Анатолія Володимировича, що ж він мав на увазі. Мабуть невдовзі він і сам забув про те зауваження; я ж протягом багатьох років розмірковував над ним, намагаючись наблизитись до його думки. Фактично кілька глав цієї книги містять різні відповіді на зауваження Скорохода (точніше, на мою сучасну інтерпретацію його зауваження).

Трохи пізніше М. Й. Ядренко запропонував мені продовжити дослідження цієї ж теми для підготовки кандидатської дисертації. Перед представленням дисертації до Вченої ради на механіко-математичному факультеті, Михайло Йосипович направив мене до Ленінграду для виступу на семінарі В. В. Петрова. Саме там я відчув, що моя тема цікавить не тільки мене та мого наукового керівника. На семінарі Валентина Володимировича я зустрів О. І. Мартікайнена та Т. Мікоша, яких з того часу вважаю своїми друзями і колегами. Після доповіді В. В. Петров приділив мені досить багато часу для обговорення існу-

ючих результатів та подальших узагальнень. Від імені “*провідної установи*” він направив до Вченої ради позитивний висновок стосовно моєї дисертації.

Опонентами на захисті у січні 1981 року виступили А. Я. Дороговцев та В. В. Булдигін. У своєму виступі Анатолій Якович, окрім іншого, зауважив, що результати дисертації варто було б видати окремою книгою. Тоді я навіть не спробував здійснити його пораду, оскільки здогадувався, що в СРСР існує достатньо перепон у такій справі. Тільки тепер я зміг повернувся до його ідеї, проте теперішній варіант книги майже не має перетинів з тим, який я міг би написати тоді.

Валерій Володимирович був більш емоційним у своєму виступі на захисті дисертації і також порадив продовжити працювати над цією темою. З того часу ми багато разів обговорювали з ним різні аспекти граничних теорем. Значно пізніше саме він наполіг, щоб я захистив також і докторську дисертацію. Хоча тоді захист докторської дисертації не здавався мені необхідним, зараз я вдячний йому за його наполегливість у реалізації тієї ідеї.

Завдяки зауваженням О. В. Іванова, Ю. В. Козаченка та О. І. Мартікайнена, які виступили офіційними опонентами на захисті докторської дисертації, я зрозумів наскільки її текст далекий від досконалості, але і те, що деякі з результатів заслуговують на увагу. Врахувавши їхні зауваження, я за час, що минув після захисту, докорінно змінив (сподіваюсь, що тим самим зміг покращити) текст, який і передаю на суд читача.

Не можу також не згадати інших колег, з якими я обговорював деякі з ідей або результатів цієї книги: М. У. Гафурова, А. Гута, П. Духана, К.-Х. Індлекофера, І. Катаі, Д. Лі, З. Рихліка, А. Росальскі, І. Фазекаша, У. Штадтмюллера, Й. Штайнебаха. Наукові дискусії з ними мали неабиякий стимулюючий вплив на мене при роботі над цією монографією.

Всім, кого я згадав вище, я щиро вдячний за творче спілкування і корисні обговорення наукових проблем, які я пам’ятаю і ціню до цього часу.

Київ, грудень 2013 р. *О. І. Клесов*

Глава 1

ОСОБЛИВОСТІ ГРАНИЧНИХ ТЕОРЕМ ДЛЯ КРАТНИХ СУМ

Існує (необґрунтована) точка зору, що граничні теореми для кратних сум безпосередньо випливають з відповідних класичних теорем для звичайних сум і тому випадок мультііндексів не є самостійним. Спочатку ми більш детально розглянемо один з результатів для кратних сум, який дійсно випливає з свого класичного аналога (саме це і "провокує" появу згаданої точки зору). Після цього ми пояснимо, чому ця ситуація не є універсальним явищем.

1. Чи дійсно результати для кратних сум випливають зі своїх класичних аналогів?

Співвідношення

$$\frac{\zeta_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} \mu, \qquad n \to \infty,$$

ми називаємо *законом великих чисел* для незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{\xi_k, k \geq 1\}$, де $\zeta_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, а μ — невипадкова константа. Критерій Хінчіна закону великих чисел є добре відомим; е випадку $\mu = 0$ його можна записати у вигляді

$$\lim_{m\to\infty} m[F(-m) + 1 - F(m)] = 0, \qquad \lim_{m\to\infty} \int_{-m}^{m} x\, dF(x) = 0,$$

де F — функція розподілу величини ξ_1.

Розглянемо тепер сім'ю незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{X(k,l), k \geq 1, l \geq 1\}$, які залежать від двох індексів k та l. Утворимо подвійні суми $S(m,n)$ за правилом

$$S(m,n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} X(k,l), \qquad m \geq 1, \quad n \geq 1. \tag{1}$$

За аналогією з класичним випадком ми кажемо, що *закон великих чисел* виконаний для подвійних сум $\{S(m,n)\}$, якщо

$$\frac{S(m,n)}{mn} \xrightarrow{\mathsf{P}} \mu,$$

коли m та n зростають до нескінченності. Цілком зрозуміло, що у законі великих чисел для подвійних сум ми вивчаємо задачу про прямування до 0 ймовірностей

$$\mathsf{P}(|S(m,n) - \mu mn| \geq \varepsilon mn)$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$, коли m та n зростають до нескінченності.

Разом з $\{X(k,l)\}$ розглянемо також послідовність незалежних випадкових величин $\{\xi_i\}$, які мають той же розподіл, що і $X(1,1)$; як і вище, позначимо через ζ_n їхні часткові суми. Якщо $k = mn$, то розподіл величини $S(m,n)/mn$ є таким же, як і розподіл величини ζ_k/k і тому закон великих чисел для $\{S(m,n)\}$ виконується тоді і тільки тоді, коли він виконується для $\{\zeta_n\}$. Таким чином, закон великих чисел для подвійних сум випливає безпосередньо з закону великих чисел для звичайних сум.

Подібні міркування, як здається, можна провести у випадку *будь-якої* граничної теореми для подвійних сум, але це зовсім не так. Описаний вище метод спирається на дві властивості сім'ї $\{S(m,n)\}$:

(i) розподіл величини $S(m,n)$ залежить від добутку mn,
(ii) центруюча та нормуюча послідовності також залежать від добутку mn.

Якщо порушується хоча б одна з цих властивостей, то описаний метод використати вже неможливо. Наприклад, властивість (i) порушується, якщо випадкові величини $X(k,l)$ не є однаково розподіленими, а властивість (ii) — якщо замість нормуючої послідовності mn розглядається $m^a n^b$, $a \neq b$.

Більше того, як ми зараз побачимо, описана ситуація, коли результат для кратних сум випливає зі свого аналога для звичайних сум, фактично неможлива для збіжності майже напевно, навіть для нормування mn.

2. Чи дійсно класичні методи підходять для кратних сум?

Трохи менш скептична точка зору на граничні теореми для кратних сум полягає у тому, що хоча формально результати для кратних сум не завжди випливають зі своїх класичних аналогів, все ж таки класичні методи доведень легко адаптуються до випадку мультиіндексів.

На "підтримку" цієї точки зору можна навести таке міркування стосовно *підсиленого закону великих чисел.* Нагадаємо, що співвідношення

$$\frac{\zeta_n}{n} \xrightarrow{\text{м.н.}} \mu, \qquad n \to \infty,$$

називається підсиленим законом великих чисел для послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{\xi_k, k \geq 1\}$, де ми зберігаємо позначення для ζ_n, μ та F, введені вище. Теорема Колмогорова стверджує, що критерієм такого граничного результату є існування першого моменту:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x) = \mu. \tag{2}$$

Співвідношення

$$\frac{S(m,n)}{mn} \xrightarrow{\text{м.н.}} \mu, \tag{3}$$

коли m та n зростають до нескінченності природно вважати аналогом теореми Колмогорова про для подвійнх сум.

Зважаючи на міркування з розділу 1, природно також припустити, що умова (2) є достатньою також і для підсиленого закону великих чисел (3). Щоб "обгрунтувати" таке припущення, вважатимемо, що умову (2) виконано. Для доведення збіжності (3) у випадку незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{X(k,l), k \geq 1, l \geq 1\}$ можна застосувати наступний прийом, оснований на критерії Коші збіжності послідовностей з двома індексами.

Розглянемо довільні монотонно зростаючі послідовності натуральних чисел $\{m_k, k \geq 1\}$ та $\{n_k, k \geq 1\}$ й розглянемо підпослідовність випадкових величин

$$\frac{S(m_k, n_k)}{m_k n_k}.$$

Поклавши $i_k = m_k n_k$ та $\zeta_{i_k} = S(m_k, n_k)$, бачимо, що $(\zeta_{i_k}, k \geq 1) \subseteq (\zeta_n, n \geq 1)$. Оскільки

$$\frac{\zeta_{i_k}}{i_k} = \frac{S(m_k, n_k)}{m_k n_k}, \tag{4}$$

то з класичного підсиленого закону великих чисел Колмогорова випливає, що границя лівої частини (4) існує майже напевно на підставі скінченності першого моменту. Значить і границя правої частини в (4) існує майже напевно. Послідовності $\{m_k\}$ та $\{n_k\}$ є довільними, тому з критерію Коші для послідовностей з двома індексами "отримуємо" існування границі майже напевно правої частини (3).

Зауважимо проте, що границя послідовності (4) існує тільки на деякій випадковій події Ω_1, яка хоча і має ймовірність 1, але залежить від підпослідовностей $\{m_k\}$ та $\{n_k\}$. Це означає, що границя для (3) існує на випадковій події $\cap\Omega_1$, де переріз береться за всьома монотонно зростаючими послідовностями $\{m_k\}$ та $\{n_k\}$.

Множина таких послідовностей $\{m_k\}$ та $\{n_k\}$ є незліченою і тому випадкова подія $\cap\Omega_1$ може мати ймовірність нуль і тому імплікацію (2) $\Rightarrow$ (3) не можна вважати обґрунтованою. Більше того, як ми побачимо згодом, існування першого моменту не завжди гарантує, що ця ймовірність дорівнює одиниці на відміну від класичного випадку.

Цей приклад показує, що (принаймні) не завжди результати для кратних сум випливають з відповідних класичних аналогів.

3. Чи завжди класичні методи придатні для кратних сум?

Ще одна скептична точка зору (менш скептична, ніж попередня) полягає у тому, що результати для кратних сум можна отримати використовуючи класичні схеми доведення, (можливо) врахувавши особливості мультиіндексів.

У багатьох випадках це твердження також хибне. Продемонструємо це на прикладі іншого підсиленого закону великих чисел Колмогорова для неоднаково розподілених випадкових величин, який стверджує, що якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{var}\,[\xi_n]}{b_n^2} < \infty$$

для незалежних випадкових величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ та монотонно зростаючої невипадкової послідовності $\{b_n, n \geq 1\}$, то

$$\frac{\zeta_n - \mathsf{E}\,[\zeta_n]}{b_n} \xrightarrow{\text{м.н.}} 0$$

(тут "м.н." — це скорочення для "майже напевно"). Класичне доведення Колмогорова, яке можна знайти у будь-якому підручнику з теорії ймовірностей, складається з двох кроків і базується на його ж критерії збіжності майже напевно рядів незалежних доданків та лемі Кронекера.

Такий метод не "спрацьовує" у випадку кратних сум. Найбільш просто це можна продемонструвати за допомогою приклада 2, додаток А, де показано, що лема Кронекера не виконується для кратних сум.

Але ще більш суттєвою є та обставина, що класичні результати Колмогорова про збіжність майже всюди випадкових рядів незалежних доданків також не виконуються для кратних сум. Приклад 1, глава 5, показує, що існують такі незалежні випадкові величини $\{X(k,l)\}$, що подвійний ряд $\sum X(i,j)$ ряд збігається майже напевно, але ряд $\sum \mathsf{P}(|X(i,j)| \ge c)$ розбігається *для всіх* $c > 0$ на відміну від класичного випадку, коли цей ряд *збігається* для всіх $c > 0$. Таким чином жоден з кроків класичного доведення підсиленого закону великих чисел для неоднаково розподілених доданків не можна застосувати для кратних сум.

4. Чи придатні класичні ідеї для кратних сум?

З'ясувавши, що класичні методи не завжди працюють у випадку кратних сум, можна тим не менше сподіватись, що класичні інструменти можна налаштувати для випадку кратних сум так, щоб вони дозволяли доводити необхідні результати і для мультиіндексів.

Не тільки *методи* класичної теорії не завжди "працюють" у випадку кратних сум, навіть основні *ідеї* можуть не мати відповідної інтерпретації для багатовимірних індексів. Наприклад, однією з найважливіших у класичній теорії є ідея використання "моментів першого досягнення". Так, у доведенні нерівності Леві для максимуму сум незалежних симетричних доданків використовують випадкову величину $\tau = \tau(\omega)$, яка є моментом *першого* виходу випадкового блукання за границю x:

$$\tau = \min\{n : S_n > x\}.$$

Оскільки у просторі кратних індексів впорядкованість не є повною, то аналог такої випадкової величини взагалі не існує для $d \ge 2$ (наприклад, який момент вважати першим виходом за рівень x, якщо $S(1,1) \le x$, але $S(m,n) > x$ для всіх інших m та n). Тому всі доведення, які спираються на поняття моментів першого виходу, жодним чином не придатні для використання для $d \ge 2$.

5. Чи підходять класичні умови для кратних сум?

Ми вже відмітили, що класична умова

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, dF(x) < \infty$$

не є достатньою для підсиленого закону великих чисел у випадку кратних сум. Ми побачимо, що у випадку d-кратних сум необхідною та достатньою умовою для підсиленого закону великих чисел у випадку d-кратних сум є

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \left(\log^+ |x|\right)^{d-1} \, dF(x) < \infty,$$

яка переходить в класичну при підстановці $d = 1$. Природно було б вважати, що і для інших граничних теорем умови для d-кратних сум стають класичними, якщо в них підставити $d = 1$.

Насправді ж, умови виконання граничних теорем для кратних сум часто мають інший вигляд у порівнянні з класичними. Наприклад, критерієм закону повторного логарифму для класичних сум незалежних однаково розподілених величин є умова Хартмана–Вінтнера

$$\mathsf{E}\left[X^2\right] < \infty. \tag{5}$$

Пізніше ми побачимо, що у випадку кратних сум критерієм закону повторного лггарифму є умова Вічури

$$\mathsf{E}\left[X^2 \frac{\left(\log^+ |X|\right)^{d-1}}{\log^+ \log^+ |X|}\right] < \infty,$$

де d — розмірність мультиіндексів. Підставляючи в останнє співвідношення значення $d = 1$, яке відповідає класичному випадку, ми не отримуємо умову (5). Це означає, що умова Вічури при $d > 1$ “не переходить” у класичну умову при $d = 1$.

6. Класичні константи змінюються для кратних сум

Можна було б і далі перераховувати відмінності між випадками $d = 1$ і $d > 1$, але вже сказаного мабуть достатньо, щоб погодитися з тим, що задачі для кратних сум заслуговують окремого розгляду і вимагають спеціальних методів. Згадаємо ще одну обставину, яка відрізняє випадок кратних сум від класичного.

Добре відомою є роль різноманітних нерівностей у теорії ймовірностей. Досить часто такі нерівності включають певні константи, з'ясування оптимальності яких є окремим важливим питанням. Найважливіші константи класичної теорії граничних теорем змінюються при переході до кратних сум. Наприклад одиниця у законі повторного логарифму перетворюється у $\sqrt{d}$, а двійка у нерівності Леві для максимуму сум симетричних доданків стає 2^d і т.д.

Досить часто конкретне значення констант не є критичним у доведеннях, але існують і інші приклади, коли їхні значення є дійсно важливими. Наприклад, константа у згаданій нерівності Леві дорівнює 2 при $d = 1$ й 4 при $d = 2$. Оптимальність константи 2 при $d = 1$ доводиться прикладом випадкових величин Бернуллі, для яких нерівність Леві стає рівністю. Крім того, якщо існує другий момент, то на підставі принципу інваріантності

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\Psi(x)} \mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le 1} |w(t)| \ge x\right) = 1,$$

де Ψ — це хвіст розподілу абсолютної величини стандартної гауссової випадкової величини, а w — це стандартний процес броунівського руху.

При $d = 2$ зазначену властивість для сум встановити не вдається. Проте можна довести, що

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{4\Psi(x)} \mathsf{P}\left(\sup_{0\le s,t\le 1} |w(s,t)| \ge x\right) = 1,$$

де w — це аналог процесу броунівського руху для двовимірного часу (так зване поле Ченцова). Асимптотика розподілу поля Ченцова є важливою у багатьох статистичниї процедурах. Нескладно зрозуміти, що дріб у попередній границі — це “неперервний” аналог відношення лівої та правої частин нерівності Леві у випадку гауссових доданків. Саме у цьому розумінні константа 4 є оптимальною для нерівності Леві при $d = 2$.

7. Деякі класичні результати не мають аналогів для кратних сум

Іноді для кратних сум взагалі не можна отримати аналоги класичних результатів. Приклад такого сорту дають класи функцій В. В. Петрова (див. [72], глава IX). У випадку звичайних послідовностей випадкових величин зі скінченними моментами певного порядку, наприклад другого, існує клас функцій Ψ_c, таких, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\psi(B_n)} = 0 \qquad \text{м. н.}$$

для будь-якої $\psi \in \Psi_c$, де S_n — це суми незалежних випадкових величин $\{X_k\}$ з нульовими математичними сподіваннями, а $B_n = \mathsf{E}\left[S_n^2\right]$. Важливою обставиною в цьому результаті є те, що клас функцій Ψ_c є універсальним, тобто не залежить від розподілів випадкових величин $\{X_k\}$.

Ситуація змінюється кардинально у випадку кратних сум. Приклад 5, додаток A, показує, що у випадку подвійних сум *для будь-якої* функції ψ знайдеться поле незалежних випадкових величин $\{X(m,n); m \ge 1, n \ge 1\}$, для якого

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \frac{S(m,n)}{\psi(B(m,n))} \ne 0 \qquad \text{м. н.},$$

де $S(m,n)$ — це подвійні суми незалежних випадкових величин з нульовими математичними сподіваннями, а $B(m,n) = \mathsf{E}\left[S^2(m,n)\right]$.

8. Деякі результати для кратних сум не мають аналогів для класичного випадку

Існують приклади протилежного сорту, коли результат для кратних сум не має жодного аналога у класичному випадку. Розглянемо, наприклад, поле

$$\frac{S(m,n)}{m\sqrt{n}}, \qquad m \ge 1, \quad n \ge 1,$$

де $S(m,n)$ означено згідно з (1), а $X(k,l)$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини. Чи можливо, щоб виконувалось співвідношення

$$\frac{S(m,n)}{m\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0? \tag{6}$$

Якщо розглядати границю тільки за першою координатою, то це звісно можливо, але за другою — ні, оскільки це б протирічило центральній граничній теоремі. Ми побачимо в главі 4, що співвідношення (6) виконується за певних умов при $m \to \infty$ та $n \to \infty$. Нічого подібного не можна очікувати при $d = 1$.

Іншими прикладами такого сорту є граничні властивості

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sup_{n\ge 1} \left| \frac{S(m,n)}{n} \right| = 0 \qquad \text{м. н.}$$

та

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt{m\log\log m}} \sup_{n\ge 1} \left| \frac{S(m,n)}{\sqrt{n\log\log n}} \right| = \sqrt{2} \qquad \text{м. н.},$$

які ми розглядаємо в главі 12. Жодного результату, схожого на ці два, не може існувати для $d = 1$.

Таким чином класична теорія підказує напрямки для досліджень кратних сум (наприклад, закон великих чисел чи закон повторного логарифму, тощо), але її ідеї, методи, результати, умови та універсальні константи в більшості випадків можна застосовувути тільки після належних змін.

9. Трохи історії граничних теорем для кратних сум

Історію граничних теорем для кратних сум випадкових величин умовно можна розділити на два етапи.

9.1. Перший етап. Перші дослідження, які можна віднести до предмету граничних теорем теорії ймовірностей для кратних сум, почалися в ергодичній теорії. Н. Вінер [417] розглядав перетворення T, яке зберігає міру μ на деякому вимірному просторі (Ω, μ). Він вивчав d-кратні суми, $d \ge 1$,

$$S_m[f] = \sum_{n_1=1}^{m} \cdots \sum_{n_d=1}^{m} f\left(T^{n_1+\cdots+n_d}\omega\right)$$

для функцій $f \in \mathbf{L}_1(\Omega,\mu)$ й довів, що границя

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_m[f]}{m^d}$$

існує для μ-майже всіх $\omega \in \Omega$. Зауважимо, що нормуюча послідовність залежить від розмірності d, але клас функцій, для яких границя існує, не відрізняється від випадку звичайних сум в класичній ергодичній теорії.

Н. Данфорд [164] та А. Зігмунд [428] розглядали аналогічну задачу, але для кратних сум з різними індексами

$$S_{m_1,\dots,m_d}[f] = \sum_{n_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{n_d=1}^{m_d} f\left(T^{n_1+\cdots+n_d}\omega\right)$$

і для функцій f, для яких

$$\int_\Omega |f(\omega)| \left(\log^+ |f(\omega)|\right)^{d-1} \, d\mu < \infty. \tag{7}$$

Їм вдалося довести, що границя

$$\lim_{\substack{m_1\to\infty\\ \cdots\\ m_d\to\infty}} \frac{S_{m_1,\dots,m_d}[f]}{m_1\dots m_d}$$

також існує для μ-майже всіх $\omega\in\Omega$. Зауважимо, що клас функцій (7) є більш вузьким, ніж $\mathbf{L}_1(\Omega,\mu)$. Пізніше з'ясувалось, що умову (7) покращити неможливо у загальному випадку.

З точки зору теорії ймовірностей дослідження ергодичної теореми Н. Вінера, Н. Данфорда та А. Зігмунда стосуються стаціонарних у вузькому розумінні випадкових полів

$$X(n_1,\dots,n_d)=T^{n_1+\dots+n_d}X_0,$$

де T — оператор зсуву, та їх сум

$$S(m_1,\dots,m_d)=\sum_{n_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{n_d=1}^{m_d}X(n_1,\dots,n_d),$$

причому твердження Вінера, Данфорда та Зігмунда, згадані вище, — це підсилені закони великих чисел для таких полів.

У 40-их–50-их роках XX сторіччя з'являлися лише поодинокі роботи, присвячені граничним теоремам для випадкових полів, які сприяли накопиченню нових постановок й задач. Наприклад, С. Бохнер [122] та К. Крікеберг [286] розглядали мартингали, які залежать від параметра, що змінюється у частково впорядкованій множині (зрозуміло, що $\mathbf{N}^d$ є саме такою множиною, а суми незалежних випадкових величин — це один з прикладів мартингалів).

З середини 60-их років зростає інтерес до суто ймовірнісних питань теорії випадкових величин з кратними індексами. В роботі Г. Чернофф та Г. Тейчера [141] досліджувалось питання про граничні розподіли для

$$W_n=\min_{1\le i\le n}\max_{1\le j\le n}X(i,j),\qquad Z_n=\max_{1\le i\le n}\min_{1\le j\le n}X(i,j),$$

де $X(i,j)$ — незалежні та однаково розподілені випадкові величини. На жаль у подальшому цей напрямок не знайшов продовження, хоча його застосування (різні схеми максиміну, асимптотична надійність паралельно-послідовних систем тощо) активно розвиваються в прикладних дослідженнях.

9.2. Другий етап. М. Вічура [418] першим зробив спробу довести суто ймовірнісними міркуваннями деякі з класичних граничних теорем теорії ймовірностей для кратних сум незалежних випадкових величин. Його метою було встановити принцип інваріантності для кратних сум, для доведення якого він запропонував метод зведення задачі для кратних сум до відповідної задачі для звичайних сум, але для випадкових векторів.

Стаття М. Вічури [418] і особливо оглядова праця Р. Пайка [351] мали великий вплив на відновлення досліджень в галузі граничних теорем для випадкових величин з мультиіндексами. Згодом Р. Смайз [375] знайшов перше ймовірнісне доведенні підсиленого закону великих чисел для кратних сум незалежних однаково розподілених випадкових величин. Якщо повернутися до термінології ергодичної теорії Вінера–Данфорда–Зігмунда, то можна сказати, що Р. Смайзу вдалося довести, що умова (7) є необхідною та достатньою для виконання ергодичної теореми, якщо обмежитись випадком незалежних однаково розподілених випадкових величин. Доведення Р. Смайза спиралось на техніку обернених мартингалів. Пізніше стало зрозумілим, що такий підхід не можна узагальнити для інших нормувань.

Саме цими роботами М. Вічури, Р. Пайка та Р. Смайза розпочався другий етап розвитку граничних теорем теорії ймовірностей для кратних сум випадкових величин, протягом якого були доведені аналоги майже всіх класичних граничних теорем.

Подальшу історію кожного з питань, які розглядаються у цій книзі, буде висвітлено більш детально у відповідних главах. Зараз ми у "телеграфному" стилі відзначимо лише основні роботи, які впливали на розвиток теорії.

М. Вічура [419] вивчав також закон повторного логарифму у формі Штрассена для d-кратних сум. Йому вдалося знайти необхідні та достатні умови закону повторного логарифму для незалежних однаково розподілених випадкових величин. Ці умови цікаві ще й тим, що після формальної підстановки $d = 1$ вони не переходять в класичну умову Хартмана–Вінтнера про існування другого моменту.

Р. Смайз [376] звернувся до сильних граничних теорем для сум незалежних випадкових величин на частково впорядкованих множинах, більш загальних, ніж $\mathbf{N}^d$. Крім збіжності майже напевно в його роботі розглядалась також так звана повна збіжність.

Р. Смайз та Г. Шорак [370] отримали нерівності типу Гаєка–Реньї для моментів максимуму кратних сум випадкових величин, що дозволило довести підсилений закон великих чисел для більш загальних нормувань. Більш загальні результати отримано пізніше в [32].

У своїй першій роботі, присвяченій випадковим величинам з кратними індексами, А. Гут [198] досліджував збіжність обернених мартингалів. Розуміючи обмеження методу обернених мартингалів при вивченні кратних сум, він у роботі [199] звернувся до іншого (більш "класичного") методу, який дозволив довести підсилений закон великих чисел для нормувань Марцинкевича–Зігмунда. Необхідні та достатні умови для підсиленого закону великих чисел з більш загальними нормуваннями були знайдені в [42]. В роботі [200] А. Гут вивчав умови, за яких існують певні моменти супремуму кратних сум. В роботі [202] він запропонував використовувати нерівність Хоффман-Йоргенсена для дослідження повної збіжності. Це дозволило скоротити доведення й зробило їх більш прозорими.

У своїй диссертації Г. Габріел [187] зауважив, що якщо індекси кратних сум розглядати не для всього простору $\mathbf{N}^d$, а тільки для певних підмножин, то умови граничних теорем для кратних сум стають близькими до класичних. А. Гут [203] продемонстрував це твердження на прикладі підсиленого закону великих чисел з такими обмеженнями на координати індексів: $\theta n_i \le n_j \le \theta^{-1} n_i$, $i \ne j$, $0 < \theta < 1$. Виявилось, що, як і у класичному випадку, необхідною та достатньою умовою підсиленого закону великих чисел є існування першого моменту.

Г. Габріел [188] розглядав також збіжність майже напевно кратних рядів та збіжність d-параметричних мартингалів, узагальнивши теорему Колмогорова про три ряди на випадок кратних сум. Згодом виявилось, що три ряди у теоремі Колмогорова треба замінити на чотири у випадку кратних сум [31], [51].

Оцінки для розподілів та моментів максимуму кумулятивних сум є потужним інструментом при дослідженні збіжності майже напевно. Узагальнення нерівності Леві для максимуму кратних сум незалежних симетричних випадкових величин, яке є дуже корисним у багатьох граничних теоремах, розглядалось багатьма авторами. Як видається, Г. Циммерман [427] був першим, хто довів нерівність Леві для подвійних сум. Без доведення, для будь-якого $d \geq 1$, ця нерівність з'явилась у роботі С. Параньяпа та Ч. Парка [346]. Набагато більш загальну нерівність, яка узагальнює нерівність В. В. Петрова [73] для квантилей, доведено в [36].

Підсилений закон великих чисел у формі Прохорова–Лоева для кратних сум вивчався у роботі [39], а також Т. Мікошем [328], Т. Мікошем та Р. Норвайшею [330]. Зауважимо, що розв'язок цієї проблеми все ще не можна вважати задовільним, оскільки не вдається охопити весь клас можливих нормувань. Причину цього відзначив О. І. Мартікайнен [65] і вона полягає у тому, що при $d > 1$ змінюються певні структурні характеристики нормувань. Мартікайнен [65] зміг подолати труднощі при вивченні швидкості збіжності випадкових полів й наблизитись до розв'язку задачі про підсилений закон великих чисел у формі Прохорова–Лоева.

Закон повторного логарифму у формі Колмогорова для кратних сум різнорозподілених доданків доведено в [36]. Метод доведення в [36] є цілком класичним, але з урахуванням нової особливості, пов'язаної з неоднозначністю вибора "підпослідовності, яка зростає зі швидкістю геометричної прогресії" (такий вибір є ключовим для випадку $d = 1$). В [36] цю проблему було усунуто припущенням про спеціальний вигляд дисперсії сум. Мартікайнен [64] показав, що без такого припущення необхідно змінювати нормування: замість $\log\log$ необхідно використовувати так звану *характеристику* поля (див. розділ 8, додаток А). Випадок кратних сум стійких доданків розглянуто у [33].

Підсилений закон великих чисел у формі Ердеша–Реньї для кратних сум отримав Й. Штайнебах [383].

Питання про збіжність рядів великих та малих відхилень вигляду

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{N}^d} w(\mathbf{n})\mathsf{P}(|S(\mathbf{n})| \geq \varepsilon b(\mathbf{n}))$$

для різних класів полів $\{w(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathbf{N}^d\}$ та $\{b(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathbf{N}^d\}$ часто пояснюється потребами так званої повної збіжності. Першими, хто розглядав таку збіжність для кратних сум, були Р. Смайз [376] та А. Гут [199].

Теорія відновлення тісно пов'язана з дослідженнями асимптотичних властивостей сум випадкових величин. Функція відновлення, побудована за випадковим блуканням з багатовимірним часом, тобто ряд вигляду

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(S(\mathbf{n}) < x),$$

вивчалась Неєм та Вагнером [341], Маежімой та Морі [321], Галамбошем та Катаі [192], [193], Галамбошем, Індлекофером та Катаі [191]. Процес відновлення у випадку $d > 1$ осліджувався в [56].

Згадаємо також про результати Пайка, Александера та Басса [118], [119], [109] стосовно підсиленого закону великих чисел, закону повторного логарифму та функціональної центральної граничної теореми для часткових сум, побудованих за випадковими величинами, індексованими множинами з $\mathbf{N}^d$.

10. Коментарі

10.1. Література про граничні теореми. Література стосовно граничних теорем теорії ймовірностей є неосяжною; кожен підручник містить їх з тими чи іншими подробицями. Серед публікацій стосовно граничних теорем для звичайних сум згадаємо монографії Б. В. Гнеденка та А. М. Комогорова [12], В. В. Петрова [72], [74], В. Стаута [385], Ю. Чао та Х. Тайшера [146], П. Холла та К. Хейді [217], П. Ревеса [358], П. Ревеса та М. Черге [153], А. Гута [208].

10.2. Література про випадкові поля. Зараз не існує жодної монографії, присвяченої граничним теоремам для кратних сум. З іншого боку, існує багато монографій, в яких розглядаються різноманітні аспекти теорії випадкових функцій, що залежать від кілької змінних. Варто лише згадати монографії Р. Адлера та Дж. Тейлора [107], Ж. Азаїса та М. Вшебора [112], Б. Хошневісана [261], М. Й. Ядренка [96].