Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова
І. В. Алєксєєва, О. О. Диховичний

РЯДИ. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Київ — 2013

Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. (ІІ курс І семестр) / Уклад.: В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алєксеєва, О. О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

Навчальне видання

Ряди.

Функції комплексної змінної.

Операційне числення

Конспект лекцій

для студентів ІІ курсу технічних спеціальностей

Укладачі:

Гайдей Віктор Олександрович, канд. фіз-мат. наук, доц.
Федорова Лідія Борисівна, канд. фіз-мат. наук, доц.
Алєксеєва Ірина Віталіївна, канд. фіз-мат. наук, доц.
Диховичний Олександр Олександрович, канд. фіз-мат. наук, доц.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Конспект лекцій з вищої математики «Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення» є складовою **навчального комплекту** з вищої математики, який містить:

— конспект лекцій,

— практикум,

— збірник індивідуальних домашніх завдань,

— збірник контрольних та тестових завдань.

Конспект складено на основі багаторічного досвіду викладання математики в НТУУ «Київський політехнічний інститут», його зміст відповідає навчальним програмам з вищої математики всіх технічних спеціальностей НТУУ «КПІ» денної та заочної форм навчання і містить такі розділи дисципліни «Вища математика»:

— числові і функціональні ряди;

— теорія функцій комплексної змінної;

— інтегральні перетворення Фур'є і Лапласа та їх застосування.

Конспект містить теоретичний матеріал, обсяг і рівень строгості якого потребує курс вищої математики для майбутніх інженерів. Передбачено, що опанування лекції з конспекту супроводжується опануванням відповідного заняття з практикуму.

Метою конспекту є:

— систематичний виклад теоретичного матеріалу, що звільняє лектора від «надиктовування» і дозволяє більше пояснювати;

— ефективна підготовка студента до колоквіуму та іспиту;

— виділення наріжних питань математичного аналізу.

Пропонований конспект супроводжує, але аж ніяк не замінює живу лекцію, як і текст драматичного твору не замінює вистави.

РОЗДІЛ 1. РЯДИ

ЛЕКЦІЯ 1. ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1. Основні поняття

Розгляньмо числову послідовність

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}.$$

Вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

називають *числовим рядом (рядом).* Числа $a_1, a_2, ...$ називають *членами* ряду, а $a_n = f(n)$ — n-*м* (*загальним*) *членом* ряду.

Для скорочення замість $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ інколи писатимемо Σa_n.

Уточнимо, як розуміють «додавання» нескінченної кількості членів ряду.

Суму перших n членів ряду називають n-*ю частковою сумою* ряду і позначають

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.}$$

Ряд

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ... = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,$$

який одержують відкиданням з ряду Σa_n його перших n членів, називають n-*м залишком ряду.*

Приміром,

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...$ — ряд, який називають *гармонічним*,

$a_n = \frac{1}{n}$ — загальний член ряду,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ — } n\text{-скінченна сума,}$$

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ — } n\text{-й залишок ряду.}$$

Розгляньмо послідовність $\{S_n\}$ часткових сум ряду:

$S_1 = a_1,$

$S_2 = a_1 + a_2,$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$

.............................,

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,$

....

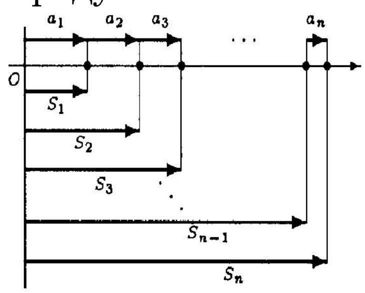


Рис. 1.1. Часткові суми ряду з додатними членами

Означення 1.1 **(суми ряду).** Якщо послідовність часткових сум $\{S_n\}$ збігається до числа S, то ряд Σa_n називають *збіжним*, а число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ називають *сумою ряду* і пишуть

$$\boxed{S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n}.$$

Якщо послідовність $\{S_n\}$ скінченної границі не має, то ряд Σa_n називають *розбіжним*.

Приклад 1.1. Дослідити на збіжність ряди:

1) $0 + 0 + ... + 0 + ...$;

2) $1 + 1 + ... + 1 + ...$;

3) $1 - 1 + 1 - 1 + ... + 1 - 1 + ...$

Зауважимо, що існує аналогія між поняттями невластивого інтеграла і ряду:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} f(x)dx;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Прикладом збіжного числового ряду є дійсне число, яке можна записати як нескінченний десятковий дріб:

$$a_0, a_1 a_2 ... a_n ... = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$$

1.2. Важливі приклади рядів

1.2.1. Парадокс про Ахіллеса і черепаху

Розгляньмо сучасний варіант парадоксу, запропонованого, давньогрецьким філософом Зеноном:

«Прудкий Ахіллес ніколи не наздожене черепаху, якщо перед початком руху черепаха буде попереду на деякій віддалі від нього».

Припустімо, що Ахіллес бігає у десять разів швидше за черепаху, і перебуває на віддалі в 1000 метрів від черепахи. За той час, за який Ахіллес пробіжить ці 1000 метрів, черепаха проповзе 100 метрів. Коли Ахіллес пробіжить 100 метрів, черепаха проповзе ще 10 метрів тощо. Процес триватиме до нескінченності. Ахіллес так ніколи не наздожене черепаху?

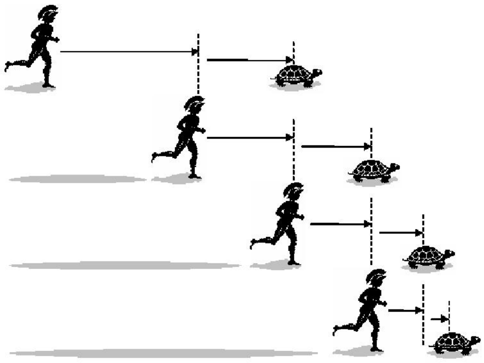


Рис. 1.2. Чи наздожене Ахіллес черепаху?

1.2.2. Геометричний ряд

Дослідімо збіжність ряду

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, a \neq 0,$$

який називають *геометричним* рядом.

$\{aq^{n-1}\}$ — геометрична прогресія.

Часткова сума геометричного ряду

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a - aq^n}{1-q} = \dfrac{a}{1-q} - \dfrac{aq^n}{1-q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases}$$

Розгляньмо можливі випадки:

1) якщо $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$;

2) якщо $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$;

3) якщо $q = -1$, то ряд набуває вигляду

$$a - a + a - a + \ldots -,$$

$S_{2k} = 0, S_{2k-1} = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує;

4) якщо $q=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(na)=\infty$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q|<1, \\ \text{розбігається}, & |q|\geq 1. \end{cases}}.$$

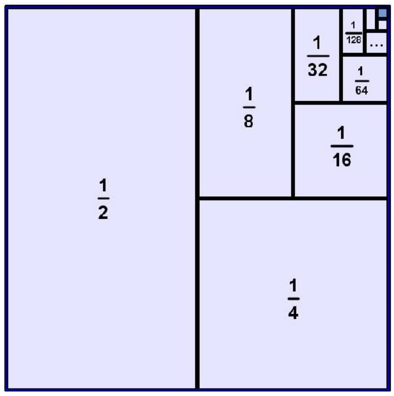


Рис. 1.3. Сума геометричного ряду

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$$

Оскільки

$$1000\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{10^{n-1}}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1000}{1-\dfrac{1}{10}}=\frac{10000}{9}=1111,(1),$$

то Ахіллес наздожене черепаху, пробігши $1111,(1)$ метра.

1.2.3. Гармонічний ряд

Дослідімо збіжність гармонічного ряду

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Кожен член ряду, починаючи з другого є середнім гармонічним двох сусідніх:

$$a_n=\frac{2}{\dfrac{1}{a_{n-1}}+\dfrac{1}{a_{n+1}}}.$$

Оскільки

$$\forall k\in\mathbb{N}: \int_k^{k+1}\frac{dx}{x}dx<\frac{1}{k},$$

то

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=$$

$$=\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln x\,\Big|_1^{n+1}=\ln(n+1).$$

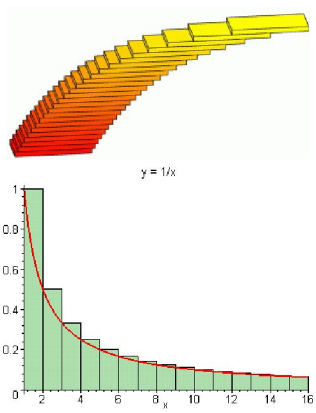


Рис. 1.5. Гармонічний ряд

Отже,

$\forall n\in\mathbb{N}: S_n>\ln(n+1)\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n=+\infty.$

Гармонічний ряд розбіжний.

1.2.4. Телескопічний ряд

Дослідімо збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) =$$
$$= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) + \ldots,$$

який називають *телескопічним*.

Оскільки

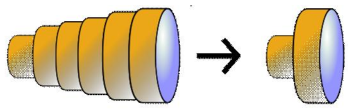


Рис. 1.6. Телескопічні ряди

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) =$$
$$= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1},$$

то *послідовність* $\{S_n\}$ *збігається, якщо збігається послідовність* $\{b_n\}$.

Приклад 1.2. Дослідити збіжність ряду:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

1.3. Основні властивості рядів

Сумою (*різницею*) рядів Σa_n та Σb_n називають ряд $\Sigma(a_n + b_n)$ (ряд $\Sigma(a_n - b_n)$).

Властивість 1 (дистрибутивність збіжного ряду). Якщо ряди із загальними членами a_n та b_n збігаються відповідно до сум S та T, то ряд із загальними членом $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$ збігається до суми $\alpha S + \beta T$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha S + \beta T.}$$

► Справді,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\alpha\sum_{k=1}^{n} a_k + \beta\sum_{k=1}^{n} b_k\right) =$$
$$= \alpha\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k + \beta\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = \alpha S + \beta T. ◄$$

Питання 1.1. Що можна сказати про ряд $\Sigma(\alpha a_n)$, $\alpha \neq 0$, якщо ряд Σa_n розбігається?

Питання 1.2. Що можна сказати про ряд $\Sigma(a_n + b_n)$, якщо ряд Σa_n збігається, а ряд Σb_n — розбігається?

Властивість 2. Якщо переставити, відкинути або дописати скінченну кількість членів ряду, то це не вплине на його збіжність (розбіжність).

► Вказані дії змінюють на одну й ту саму скінченну величину всі часткові суми, починаючи з деякого номера, а це не впливає на збіжність або розбіжність послідовності скінченних сум ряду. ◄

Зауважимо, що після вказаних дій сума ряду може змінитись.

Властивість 3 (асоціативність збіжного ряду). Якщо ряд збігається, то його члени можна групувати будь-яким чином, не переставляючи їх.

Зауваження.

1. Розкривати дужки, взагалі кажучи, **не можна:** так ряд

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0+0+0+\ldots$$

збіжний, а ряд

$$1-1+1-1+1-1+\ldots$$

розбіжний.

2. Переставляти члени ряду, взагалі кажучи, не можна.

3. У збіжному ряді можна розставляти дужки, але не можна їх розкривати.

Властивість 4. Числовий ряд збігається тоді й лише тоді, коли збігається будь-який його залишок.

Якщо ряд Σa_n збігається, то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=0.$$

1.4. Необхідна ознака збіжності ряду

Теорема 1.1 (необхідна ознака збіжності ряду). Якщо ряд Σa_n збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

► Якщо S — сума заданого ряду, то

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(S_{n-1}+a_n)=S;\quad \lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0. \blacktriangleleft$$

Наслідок (достатня умова розбіжності ряду). Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то ряд Σa_n розбігається.

Умова $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ є лише **необхідною** для збіжності ряду, але не є **достатньою**: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; але ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ — розбігається.

Приклад 1.3. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

ЛЕКЦІЯ 2. ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ З НЕВІД'ЄМНИМИ ЧЛЕНАМИ

2.1. Властивості рядів з невід'ємними членами

Нехай задано ряд Σa_n з невід'ємними членами $a_n \geq 0$.

Властивість 1. Ряд Σa_n збігається тоді й лише тоді, коли послідовність $\{S_n\}$ його часткових сум обмежена.

Властивість 2 (комутативність збіжних рядів). Якщо ряд Σa_n збігається до суми S, то ряд Σb_n, одержаний з нього переставленням членів, також збігається і має ту саму суму.

Зрозуміло, що необхідної ознаки збіжності ряду **не достатньо.**

Розгляньмо найпоширеніші достатні ознаки збіжності і розбіжності рядів з невід'ємними членами.

Із властивості 1 випливає, що для доведення збіжності такого ряду, досить довести лише обмеженість його часткових сум.

Так само можна розглядати ряди з недодатними членами.

2.2. Інтегральна ознака Маклорена — Коші

Теорема 2.1 **(інтегральна ознака Маклорена — Коші).** Якщо члени ряду Σa_n з додатними членами можна представити як значення неперервної, додатної, спадної на проміжку $[1;+\infty)$ функції $f(x)$ так, що

$$a_n = f(n), n \in \mathbb{N},$$

то:

1) зі збіжності інтеграла $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ випливає збіжність ряду Σa_n;

2) з розбіжності інтеграла випливає розбіжність ряду.

► Доведімо випадок збіжності. Завдяки спаданню функції $f(x)$ маємо

$$f(k) \leq \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \leq f(k-1);$$

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int\limits_{1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n} f(k-1);$$

$$S_n - a_1 \leq \int\limits_{1}^{n} f(x)dx \leq S_{n-1} \leq S_n.$$

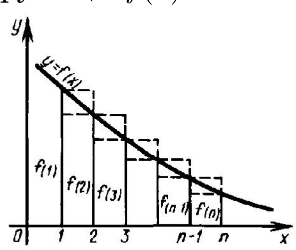


Рис. 2.1. Інтегральна ознака Коші

Нехай збігається інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$. Тоді з лівої частини нерівності випливає, що зростаюча послідовність часткових сум S_n обмежена зверху і за теоремою Веєрштраса збігається, а, отже, збігається і ряд Σa_n. ◄

Зауважимо, що замість $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ можна розглядати $\int_N^{+\infty} f(x)dx$ $(N \geq 1)$?

Наслідок 1. Похибка $R_n = S - S_n$ після замінювання суми збіжного ряду Σa_n, його частковою сумою S_n не перевищує $\int_n^{+\infty} f(x)dx$.

$$\boxed{0 < R_n \leq \int\limits_n^{+\infty} f(x)dx}$$

Наслідок 2. *Узагальнений гармонічний* ряд Діріхле

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} - \begin{cases} \text{збігається}, & \alpha > 1, \\ \text{розбігається}, & \alpha \leq 1. \end{cases}}$$

Приклад 2.1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$.

2.3. Ознаки порівняння

Збіжність або розбіжність ряду з додатними членами можна встановити порівнюючи його з іншим («еталонним») рядом, про який відомо збігається він чи розбігається.

За еталонний ряд вибирають геометричний ряд або узагальнений геометричний.

Теорема 2.2 (ознака порівняння у формі нерівності). Нехай задано ряди Σa_n та Σb_n з невід'ємними членами і для всіх n виконано нерівність

$$0 \leq a_n \leq b_n.$$

Тоді:

1) зі збіжності ряду Σb_n випливає збіжність ряду Σa_n;

2) з розбіжності ряду Σa_n випливає розбіжність ряду Σb_n.

► 1. Якщо ряд Σb_n збігається, тоді його часткові суми T_n обмежені зверху. Оскільки $a_n \le b_n$, то часткові суми S_n ряду Σa_n також обмежені зверху і він збігається.

2. Доводиться від супротивного.◄

Ряд Σb_n називають *мажорантою* для ряду Σa_n.

Зауважимо, що ознака може виконуватись починаючи з номера $N \ge 1$.

Приклад 2.2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

Теорема 2.3 (гранична ознака порівняння). Нехай задано два ряди Σa_n та Σb_n з додатними членами. Якщо існує скінченна, відмінна від нуля,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \notin \{0, \infty\},$$

то ряди Σa_n та Σb_n одночасно збігаються або одночасно розбігаються.

► З означення границі послідовності випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon$$

виконано нерівність

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon \Leftrightarrow (L-\varepsilon) b_n < a_n < (L+\varepsilon) b_n.$$

Якщо ряд Σa_n збігається, то з лівої нерівності і теореми 2.2 випливає, що ряд $\Sigma(L-\varepsilon)b_n$ збігається, а, отже, і ряд Σb_n збігається.

Якщо ряд Σb_n збігається, то збігається і ряд $\Sigma(L+\varepsilon)b_n$, а, отже, і ряд Σa_n теж збігається.◄

Якщо $L = 0$, то зі збіжності ряду Σb_n випливає збіжність ряду Σa_n.

Якщо $L = \infty$, то з розбіжності ряду Σb_n випливає розбіжність ряду Σa_n.

Приклад 2.3. Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{3n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^3}$.

2.4. Ознака д'Аламбера

Теорема 2.4 **(ознака д'Аламбера).** Якщо для ряду Σa_n з додатними членами існує

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то:
1) ряд збігається при $q < 1$;
2) ряд розбігається при $q > 1$.

Наслідок. Із розбіжності ряду за ознакою д'Аламбера випливає, що його загальний член не прямує до нуля.

Для $q = 1$ ряд потребує додаткового дослідження.

Приклад 2.4. Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

2.5. Радикальна ознака Коші

Теорема 2.5 **(радикальна ознака Коші).** Якщо для ряду Σa_n з додатними членами існує скінченна

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то:
1) ряд збігається при $q < 1$;
2) ряд розбігається при $q > 1$.

Для $q = 1$ ряд потребує додаткового дослідження.

► 1. Нехай $q < 1$. Розгляньмо число r, яке справджує нерівність $q < r < 1$. Існує номер N такий, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$\left|\sqrt[n]{a_n} - q\right| < \varepsilon = r - q \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < r \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_n < r^n \quad \forall n > N.$$

Отже, всі члени ряду Σa_n, починаючи з a_{N+1}, менші за відповідні члени збіжного геометричного ряду Σr^n. За ознакою порівняння ряд

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

збігається, а отже збігається і ряд Σa_n.

2. Нехай $q > 1$. Тоді, починаючи з деякого номера N для всіх $n > N$, виконуватиметься нерівність

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \Leftrightarrow a_n > 1.$$

Отже, $\lim a_n \neq 0$ і ряд Σa_n розбігається.◄

Наслідок. Із розбіжності ряду за радикальною ознакою Коші випливає, що його загальний член не прямує до нуля.

Зауваження. Застосовуючи радикальну ознаку Коші часто використовують границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 0)$.

Приклад 2.5. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\dfrac{4n}{n+1}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^n \dfrac{\pi}{3n}$.

2.6. Порівняння «потужності» різних ознак збіжності

Якість ознаки збіжності визначає її універсальність, практичність (простота використання) і чутливість.

За чутливістю розглянуті ознаки можна розташувати так (за зростанням):

1) ознака д'Аламбера (найгрубша);

2) радикальна ознака Коші;

3) ознаки порівняння;

4) інтегральна ознака Маклорена — Коші (найтонша).

Перед тим як аналізувати збіжність ряду за допомогою якоїсь ознаки треба перевірити чи потрапляє розглядуваний ряд у сферу застосовності ознаки.

Існує багато тонших і складніших ознак за розглянуті:

— ознака Раабе — Дюамеля,

— ознака Ґауса,

— ознака Єрмакова тощо.

ЛЕКЦІЯ 3. ЧИСЛОВІ РЯДИ З ДОВІЛЬНИМИ ЧЛЕНАМИ

3.1. Знакопочережні ряди

Знакопочережними називають ряди вигляду

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n,$$

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

де $a_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Додатні і від'ємні члени таких рядів йдуть один за одним **почергово.**

Теорема 3.1 (ознака Лейбніца). Знакопочережний ряд $\Sigma(-1)^{n-1} a_n$, $a_n > 0$, збігається, якщо виконано умови:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

2) $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

При цьому сума ряду S справджує нерівність

$$0 < S < a_1.$$

► Розгляньмо часткову суму парної кількості членів ряду

$$S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2m-1} - a_{2m} =$$

$$= (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}) > 0.$$

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots < a_1.$$

Послідовність $S_2, S_4, S_6, \ldots, S_{2m}, \ldots$ зростає і обмежена зверху. Отже, вона має границю $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, причому $0 < S < a_1$.

Розгляньмо часткові суми непарної кількості членів.

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1};$$

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} \left(S_{2m} + a_{2m+1}\right) = S.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Ряд збігається, причому його сума справджує нерівність

$$0 < S < a_1. \blacktriangleleft$$

Існують збіжні знакопочережні ряди, для яких порушено умову спадання.

Наслідок. Абсолютна похибка від заміни суми збіжного знакопочережного ряду $\Sigma(-1)^{n-1}a_n$ його частковою сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто

$$\left|S - S_n\right| = \left|R_n\right| \le a_{n+1}.$$

Приклад 3.1. Дослідіть на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Приклад 3.2. Обчислити наближено суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\,!}$, обмежившись чотирма членами, і оцінити похибку.

Приклад 3.3. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(4n)^3}$ збігається і знайти його суму з точністю до $\varepsilon = 0,001$.

3.2. Знакозмінні ряди

Ряд називають *знакозмінним*, якщо серед його членів є як від'ємні, так і додатні. Знакопочережний ряд є окремим випадком знакозмінного ряду.

Розгляньмо разом із знакозмінним рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ряд, утворений з модулів його членів

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right|.$$

Зауважимо, що існують збіжні ряди, що ряди, утворені з модулів їх членів розбігаються:

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ збігається, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ — розбігається.

Теорема 3.2. Якщо збігається ряд $\Sigma\left|a_n\right|$, то збігатиметься і ряд Σa_n.

► Для членів ряду

$$\left(a_1 + \left|a_1\right|\right) + \left(a_2 + \left|a_2\right|\right) + \ldots + \left(a_n + \left|a_n\right|\right) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \left|a_n\right|\right),$$

який є сумою рядів Σa_n та $\Sigma|a_n|$, виконано нерівність

$$0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n| \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ряд $\Sigma 2|a_n|$ збігається за властивістю числових рядів (п. 1.3.1). Отже, на підставі ознаки порівняння (теорема 2.2) збігається і ряд $\Sigma\left(a_n + |a_n|\right)$. Оскільки розглядуваний знакозмінний ряд Σa_n є різницею двох збіжних рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + |a_n|\right) - \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|,$$

то на підставі властивості 1 ряд Σa_n збігається.◄

Означення 3.1 (абсолютної і умовної збіжності). Знакозмінний ряд Σa_n називають *абсолютно збіжним*, якщо ряд $\Sigma|a_n|$, утворений з модулів його членів, збігається.
Якщо ряд Σa_n збіжний, а ряд $\Sigma|a_n|$ розбігається, то ряд Σa_n називають *умовно збіжним*.

3.3. Достатні умови абсолютної збіжності

Теорема 3.3 (ознака порівняння). Якщо для членів ряду Σa_n та $\Sigma b_n, b_n > 0$, правдива нерівність $|a_n| \le b_n$, і ряд Σb_n збігається, то ряд Σa_n збігається абсолютно.

Теорема 3.4 (ознака д'Аламбера). Якщо для ряду Σa_n існує $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, то:

1) для $q < 1$, ряд Σa_n збігається абсолютно;

2) для $q > 1$ ряд Σa_n розбігається.

Теорема 3.5 (радикальна ознака Коші). Якщо для ряду Σa_n існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$, то:

1) для $q < 1$ ряд Σa_n збігається абсолютно;

2) для $q > 1$ ряд Σa_n розбігається.

Приклад 3.4. Дослідити на збіжність ряд:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n;\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{2^n n!}.$$

3.4. Властивості абсолютно й умовно збіжних рядів

Властивість 1 (теорема Діріхле). Абсолютно збіжний ряд Σa_n після будь-якого переставлення його членів залишається абсолютно збіжним і його сума не міняється.

Властивість 2. Якщо ряди Σa_n та Σb_n збігаються абсолютно до сум S та T, то ряд $\Sigma(\alpha a_n + \beta b_n)$ збігається абсолютно до суми $\alpha S + \beta T$.

Властивість 3. Якщо ряд Σa_n збігається умовно, то обидва ряди, утворені лише з додатних і лише з від'ємних членів ряду, розбігаються.

Властивість 4 (теорема Рімана). Якщо ряд збігається умовно, то для будь-якого числа A, можна так переставити члени цього ряду, що перетворений ряд збігатиметься до A.

Зауважимо, що члени умовно збіжного ряду можна переставити так, що одержаний ряд буде розбіжним.

3.5. Числові ряди з комплексними членами

Розгляньмо послідовність комплексних чисел $z_n = x_n + iy_n, n \in \mathbb{N}$, і ряд з комплексними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Ряд Σx_n називають *дійсною частиною* ряду Σz_n, а Σy_n — його *уявною частиною*.

Теорема 3.6. Ряд Σz_n збігається до числа $S = U + iV$ тоді й лише тоді, коли ряди $\Sigma x_n, \Sigma y_n$ збігаються відповідно до чисел U та V.

Нагадаємо, що

$$\left|z_n\right| = \left|x_n + iy_n\right| = \sqrt{(x_n)^2 + (y_n)^2}$$

З нерівностей

$$\begin{gathered} \left|x_n\right| \le \left|z_n\right| \le \left|x_n\right| + \left|y_n\right|; \\ \left|y_n\right| \le \left|z_n\right| \le \left|x_n\right| + \left|y_n\right| \end{gathered}$$

випливає, що ряд Σz_n збігається абсолютно тоді й лише тоді, коли збігаються абсолютно його дійсна та уявна частини.

Приклад 3.5. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{i(-1)^n}{n}\right)$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+in}{2n^2+3}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2-i}{3}\right)^n$.

ЛЕКЦІЯ 4. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

4.1. Функціональний ряд і його область збіжності

Функціональним рядом називають ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

членами якого є функції $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, означені на деякій множині X числової осі.

$$\boxed{X = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(u_n(x)).}$$

Важливими прикладами функціональних рядів є:

1) степеневі ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n;$$

2) тригонометричні ряди

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Покладаючи $x = x_0 \in X$, дістаємо числовий ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

який може як збігатися, так і розбігатися.

Якщо числовий ряд $\Sigma u_n(x_0)$ збігається (розбігається), то точку $x_0 \in X$ називають *точкою збіжності* (*розбіжності*) функціонального ряду $\Sigma u_n(x)$.

Означення 4.1 (області збіжності). Сукупність точок збіжності функціонального ряду $\Sigma u_n(x)$ називають *областю збіжності* D цього ряду.

$$\boxed{D \subset X}$$

Частковою сумою функціонального ряду $\Sigma u_n(x)$ називають

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

Залишок функціонального ряду $\Sigma u_n(x)$

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

В області збіжності D функціонального ряду $\Sigma u_n(x)$ визначено його *суму*

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), x \in D.$$

Використовують позначення

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \to S(x), x \in D.$$

4.2. Абсолютна і рівномірна збіжність рядів

Означення 4.2 **(абсолютної збіжності).** Ряд $\Sigma u_n(x)$ називають *абсолютно збіжним* на множині $D_{\text{абс}}$, якщо на цій множині збігається ряд $\Sigma\left|u_n(x)\right|$.

$$\boxed{D_{\text{абс}} \subset D \subset X}$$

Приклад 4.1. Знайдіть область збіжності ряду:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln x}}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{nx}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(1+x^2)^n}$.

Означення 4.3 **(рівномірної збіжності).** Функціональний ряд $\Sigma u_n(x)$ називають *рівномірно збіжним* на множині $D_{\text{рів}}$ до суми $S(x)$,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow$$
$$\left|R_n(x)\right| = \left|S(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon \quad \forall x \in D_{\text{рів}}.$$

$$\boxed{D_{\text{рів}} \subset D \subset X}$$

Використовують позначення

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x), x \in D_{\text{рів}}.$$

Практично рівномірна збіжність ряду означає, що суму ряду $S(x)$ на проміжку $(a;b)$ можна наближено, з наперед заданою точністю, замінити однією і тією самою частковою сумою $S_n(x)$:

$$S(x) \approx S_n(x), x \in (a;b).$$

Якщо ряд збіжний на проміжку $(a;b)$, але нерівномірно, то не існує «універсального» номера, починаючи з якого часткова сума потрапляє в 2ε-смугу. При цьому збільшення кількості доданків у сумах $S_n(x)$ не забезпечує потрапляння в цю смугу.

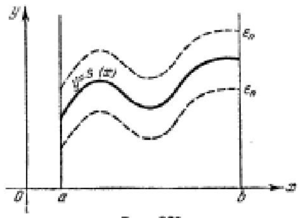


Рис. 4.1. Рівномірна збіжність ряду

Теорема 4.1 **(ознака Веєрштраса).** Функціональний ряд $\Sigma u_n(x)$ абсолютно й рівномірно збіжний на відрізку $[a;b]$, якщо існує знакододатний збіжний числовий ряд Σa_n такий, що

$$\left|u_n(x)\right| \le a_n \quad \forall x \in [a;b], n \in \mathbb{N}.$$

Ряд Σa_n називають *мажорантою* для ряду $\Sigma u_n(x)$.

Приклад 4.2. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{4+n^3x^2}$ збігається рівномірно на проміжку $0 \le x < +\infty$.

4.3. Властивості рівномірно збіжних рядів

Властивість 1. Сума членів рівномірно збіжного на деякому проміжку ряду неперервних функцій є функція, неперервна на цьому проміжку.

Властивість 2. Якщо на відрізку $[a;b]$ функціональний ряд $\Sigma u_n(x)$ рівномірно збіжний і члени ряду неперервні на відрізку $[a;b]$, то його можна почленно інтегрувати в межах $(\alpha;\beta)$, де $(\alpha;\beta) \subset [a;b]$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) dx.$$

Властивість 3. Якщо функціональний ряд $\Sigma u_n(x)$ збіжний на відрізку $[a;b]$, а його члени мають неперервні похідні $u_n'(x), x \in [a;b], n \in \mathbb{N}$, причому ряд $\Sigma u_n'(x)$ рівномірно збіжний на $[a;b]$, то заданий ряд можна почленно диференціювати:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), x \in [a;b].$$

Приклад 4.3. Дослідити властивості суми ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$.

ЛЕКЦІЯ 5. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

5.1. Степеневі ряди. Теорема Абеля

Степеневим рядом за степенями $(x - x_0)$ (із центром у точці x_0) називають функціональний ряд вигляду

$$c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n,$$

де $c_n, n \in \mathbb{N}$,— *коефіцієнти* ряду.

Заміною змінної $t = x - x_0$ степеневий ряд із центром у точці x_0 зводиться до ряду із центром у точці $t_0 = 0$.

Теорема 5.1 (перша теорема Абеля). Якщо степеневий ряд $\Sigma c_n t^n$ збігається в точці $t_1 \neq 0$, то він абсолютно збіжний у всіх точках t, для яких $|t| < |t_1|$.
Якщо у точці t_2 ряд розбігається, то він розбіжний у всіх точках t, для яких $|t| > |t_2|$.

► За умовою ряд $\Sigma c_n t_1^n$ збігається. Отже, за необхідною ознакою збіжності ряду $\lim\limits_{n\to\infty} c_n t_1^n = 0$. Звідси випливає, що існує таке число $M > 0$, що виконано нерівність

$$\left|c_n t_1^n\right| \le M, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Нехай $|t| < |t_1|$, тоді $q = \left|\dfrac{t}{t_1}\right| < 1$, отже

$$\left|c_n t^n\right| = \left|c_n t_1^n\right| \cdot \left|\frac{t^n}{t_1^n}\right| \le Mq^n, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

тобто модуль кожного члена ряду $\Sigma c_n t^n$ не перевищує відповідного члена збіжного геометричного ряду. Тому за ознакою порівняння ряд $\Sigma c_n t^n$ абсолютно збігається для $|t| < |t_0|$. ◄

Будь-який степеневий ряд $\Sigma c_n t^n$ збіжний в точці $t = 0$.

Питання 5.1. Як довести другу частину теореми?

5.2. Область збіжності степеневого ряду

Теорема Абеля характеризує множини точок збіжності та розбіжності степеневого ряду.

Справді, якщо x_0 — точка збіжності ряду $\Sigma c_n x^n$, то весь інтервал $(-|x_0|;|x_0|)$ заповнено точками абсолютної збіжності цього ряду. Якщо x_1 — точка розбіжності ряду, то об'єднання нескінченних проміжків $(-\infty;-|x_1|)\cup(|x_1|;+\infty)$ утворено з точок розбіжності цього ряду.

Отже, для області збіжності степеневого ряду $\Sigma c_n x^n$ можливі три випадки:

1) ряд збіжний лише в точці $x=0$;

2) ряд збіжний при всіх $x\in(-\infty;+\infty)$;

3) існує додатне число $R\in(0;+\infty)$, що при всіх $|x|<R$ степеневий ряд абсолютно збіжний, а при $|x|>R$ — розбіжний.

Число R називають *радіусом збіжності* степеневого ряду, а інтервал $(-R;R)$ — *інтервалом збіжності*.

Радіус збіжності степеневого ряду можна знаходити за формулою Коші — Адамара:

$$\boxed{R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}.}$$

Зауваження.
1. Практично інтервал збіжності степеневого ряду знаходять за ознакою д'Аламбера або радикальною ознакою Коші.
2. Збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності $x=\pm R$ досліджують для кожного ряду окремо. Можливі такі варіанти:
1) ряд збігається в обох точках абсолютно;
2) ряд розбігається в обох точках;
3) ряд збігається в одній точці умовно, а в другій — розбігається.

Степеневий ряд $\Sigma c_n(x-x_0)^n$ збігається абсолютно в інтервалі $|x-x_0|<R$.

Приклад 5.1. Дослідіть на збіжність ряд:

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!};\ 2)\ \sum_{n=0}^{\infty}(nx)^n;\ 3)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1};\ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^n n^2}.$$

Застосовують ознаки порівняння, достатню ознаку розбіжності, інтегральну ознаку Маклорена — Коші, Лейбніцову ознаку.

5.3. Властивості степеневих рядів

Властивість 1 (друга теорема Абеля). Степеневий ряд $\Sigma c_n x^n$ абсолютно й рівномірно збігається на будь-якому відрізку $[-\rho;\rho]$, який цілком міститься в інтервалі збіжності $(-R;R)$.

Властивість 2. Сума степеневого ряду $\Sigma c_n x^n$ неперервна всередині його інтервалу збіжності.

Властивість 3. Якщо межі інтегрування α та β лежать усередині інтервалу збіжності $(-R;R)$ ряду $\Sigma c_n x^n = S(x)$, то на відрізку $[\alpha;\beta]$ цей ряд можна почленно інтегрувати:

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, x \in [\alpha;\beta] \subset (-R;R).$$

Властивість 4. Степеневий ряд $\Sigma c_n x^n$ можна почленно диференціювати всередині інтервала збіжності $(-R;R)$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, x \in (-R;R).$$

Приклад 5.2. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n+\dfrac{1}{n}\right)x^n$.

5.4. Степеневі ряди в комплексній області

Розгляньмо степеневий ряд за степенями $(z - z_0)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

де $z = x + iy \in \mathbb{C}, z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}, c_n \in \mathbb{C}$.

Теорема 5.2 (Абеля). Якщо степеневий ряд $\Sigma c_n (z - z_0)^n$ збігається в точці $z_1 \neq 0$, то він абсолютно збігається у крузі

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0| = R;$$

Якщо степеневий ряд $\Sigma c_n (z - z_0)^n$ розбігається в точці $z_2 \neq 0$, то він розбігається в точках z:

$$|z - z_0| > |z_2 - z_0|.$$

Для будь-якого степеневого ряду $\Sigma c_n (z - z_0)^n$ знайдеться число R таке, що у крузі $|z - z_0| < R$ ряд збігається, а за межами цього кругу, при $|z - z_0| > R$, розбігається.

Область $|z - z_0| < R, R > 0$ називають *кругом збіжності* степеневого ряду; число R — *радіусом збіжності.*

Степеневий ряд $\Sigma c_n (z - z_0)^n$ рівномірно збігається у крузі

$$|z - z_0| \leq r < R.$$

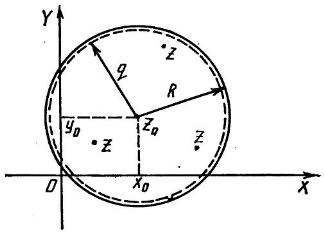


Рис. 5.2. Круг збіжності степеневого ряду

Приклад 5.3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2 (1+i)^n}$.

ЛЕКЦІЯ 6. ТЕЙЛОРІВ РЯД

6.1. Означення

Кажуть, що функція $f(x)$ *розвивається у степеневий ряд* за степенями x в інтервалі $(-R;R)$, якщо в цьому інтервалі степеневий ряд збігається до суми $f(x)$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, x\in(-R;R).$$

Теорема 6.1 (теорема єдиності). Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(-R;R)$ розвивається у степеневий ряд $\Sigma c_n x^n$, то це розвинення єдине, тобто коефіцієнти ряду $\Sigma c_n x^n$ за його сумою визначаються однозначно.

► Нехай функція $f(x)$ в інтервалі $(-R;R)$ розвивається у степеневий ряд

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Диференціюючи цей ряд почленно n разів, маємо

$$f^{(n)}(x)=n!c_n+2\cdot 3\cdot\ldots(n+1)c_{n+1}x+\ldots$$

При $x=0$ дістаємо

$$f^{(n)}(0)=n!c_n, n=0,1,2,\ldots,$$

звідки

$$\boxed{c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},}$$

де $f^{(0)}(0)=f(0), 0!=1$.

Отже, коефіцієнти c_n степеневого ряду $\Sigma c_n x^n$ визначаються однозначно.◄

Функція f не може мати двох різних розвинень за степенями x.

Наслідок. Коефіцієнти розвинення функції $f(x)$ у степеневий ряд за степенями $(x-x_0)$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n, \left|x-x_0\right|<R,$$

визначають за формулами

$$\boxed{c_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n=0,1,2,\ldots,(f^{(0)}(x_0)=f(x_0)).}$$

Нехай функція $f(x)$ при $x=x_0$ має похідні всіх порядків $f'(x_0), f''(x_0),\ldots,$ тобто є нескінченно диференційовною в точці x_0. Утворімо для цієї функції формальний степеневий ряд, обчислюючи його коефіцієнти за відповідними формулами

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Означення 6.1 **(Тейлорового ряду).** *Тейлоровим рядом* функції $f(x)$ щодо точки x_0 називають степеневий ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Коефіцієнти цього ряду називають *Тейлоровими коефіцієнтами* функції f.

Тейлорів ряд для $x_0 = 0$ називають *рядом Тейлора — Маклорена*.

Теорема 6.2. Якщо функція $f(x)$ розвивається у степеневий ряд $\Sigma c_n (x - x_0)^n$, в інтервалі $|x - x_0| < R, R > 0$, то цей ряд є Тейлоровим рядом функції $f(x)$.

6.2. Умови розвивності функції у Тейлорів ряд

Теорема 6.3 **(критерій розвивності).** Функція $f(x)$ розвивається у степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

в інтервалі $\left| x - x_0 \right| < R$ тоді й лише тоді, коли:

1) у цьому інтервалі нескінченно разів диференційовна;

2) залишковий член $R_n(x)$ в її Тейлоровій формулі

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

прямує до нуля, коли $n \to \infty$ для всіх x з інтервалу $\left| x - x_0 \right| < R$.

Приміром, нескінченно диференційовна функція

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

має ряд Тейлора з нульовими коефіцієнтами, який збігається до 0.

Теорема 6.4 **(достатня умова розвивності).** Для того, щоб функцію $f(x)$ в інтервалі $|x-x_0|<R$ можна було розвинути у Тейлорів ряд, достатньо щоб:
1) функція $f(x)$ в цьому інтервалі була нескінченно разів диференційовною;
2) існувала стала $M>0$ така, що

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M \ \ \forall n=0,1,2,\ldots,\forall x:|x-x_0|<R.$$

6.3. Ряди Тейлора — Маклорена елементарних функцій

Розгляньмо розвинення в ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

основних елементарних функцій.

1. Розвинення експоненти $f(x)=e^x$. Ця функція має похідні всіх порядків в інтервалі $(-R;R), R>0$, причому

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x < e^R, n = 0,1,2,\ldots, x\in(-R;R).$$

Отже,

$$\boxed{e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, x\in\mathbb{R}}$$

2. Розвинення синуса $f(x)=\sin x$.

$$\boxed{\begin{aligned}\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x\in\mathbb{R}.\end{aligned}}$$

3. Розвинення косинуса $f(x)=\cos x$.

$$\boxed{\begin{aligned}\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, x\in\mathbb{R}.\end{aligned}}$$

4. Біноміальний ряд для $f(x)=(1+x)^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}$.

$$\boxed{\begin{gathered}(1+x)^{\alpha} = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\\ |x|<1.\end{gathered}}$$

Якщо $\alpha \in \mathbb{N}$, функція $(1+x)^{\alpha}$ є многочленом n-го степеня, та $R_n(x) \equiv 0\ \forall n > \alpha$.

5. Важливі окремі випадки біноміального ряду.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x|<1;\\ \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, |x|<1.\end{aligned}}$$

6. Розвинення логарифмічної функції $f(x)=\ln(1+x)$.

$$\boxed{\begin{gathered}\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots=\\ =\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, |x|<1.\end{gathered}}$$

Можна показати, що розвинення правдиве і для $x=1$:

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

Покладаючи $(-x)$ замість x на підставі теореми 6.1 дістаємо розвинення для функції

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}, |x|<1.$$

Приклад 6.1. Розвинути функцію $f(x)$ за степенями $(x-x_0)$:

1) $f(x)=3^x, x_0=2$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}, x_0=0$.

6.4. Застосування степеневих рядів

6.4.1. Наближенні обчислення за допомогою рядів

Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ у точці $x=x_1$. Якщо функцію $f(x)$ можна розвинути в степеневий ряд $\Sigma c_n(x-x_0)^n$ в інтервалі $(x_0-R; x_0+R)$ і $x_1 \in (x_0-R; x_0+R)$, то

$$f(x_1) \approx S_n(x_1).$$

А. Для знакопочережних рядів

$$\left|f(x_1) - S_n(x_1)\right| \le \left|c_{n+1}(x_1 - x_0)^{n+1}\right|.$$

Б. Для знакозмінних та знакосталих рядів похибку, як правило, оцінюють так:

$$\left|f(x_1) - S_n(x_1)\right| \le$$
$$\le \left|c_{n+1}(x_1 - x_0)^{n+1}\right| + \left|c_{n+2}(x_1 - x_0)^{n+2}\right| + \ldots <$$
$$< a_1 + a_2 + \ldots = S,$$

де Σa_n — певний знакододатний збіжний ряд, суму якого легко обчислити, приміром, геометричний ряд.

6.4.2. Наближене обчислення інтегралів.

Щоб обчислити інтеграл

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

який або не виражається через елементарні функції, або складний і незручний для обчислення, функцію $f(x)$ розвивають (якщо це можливо) у степеневий ряд і інтегрують його всередині інтервалу збіжності.

6.4.3. Наближене інтегрування диференціальних рівнянь

Якщо розв'язок диференціального рівняння не зводиться до інтегралів, то для наближеного інтегрування можна скористатись Тейлоровим рядом.

Нехай треба знайти частинний розв'язок $y(x)$ задачі Коші:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0.$$

За певних умов на функцію $f(x, y)$ цей розв'язок можна шукати як суму Тейлорового ряду з центром у точці x_0:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Значення $y(x_0)$ беруть з початкової умови, значення $y'(x_0)$ з диференціального рівняння:

$$y'(x_0) = f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}};$$

а значення $y''(x_0), y'''(x_0), \ldots$ знаходять поступовим диференціюванням обох частин диференціального рівняння.

Приклад 6.2. Розвинути функцію за степенями $(x - x_0)$:

1) $f(x) = \arcsin x = \int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, x_0 = 0;$

2) інтегральний синус $\operatorname{Si} x = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt, x_0 = 0.$

Приклад 6.3. Обчислити наближено:

1) $\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10} \approx 0,309, \varepsilon = 10^{-3};$

2) $e = 2,717, \varepsilon = 0,001;$

3) $y' = y^2 + x^2, y(0) = 0,5,$ чотири відмінні від нуля члени.

6.5. Формула Ейлера

Розгляньмо ряди, які можна взяти за означення $e^z, \sin z, \cos z$ у комплексні площині:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Їхні області збіжності $|z| < +\infty$.

Між показниковою функцією e^z та тригонометричними функціями $\sin z$ та $\cos z$ існує простий зв'язок.

Підставмо в ряд для e^z замість z iz і згрупуємо окремо доданки, із множником i та без нього:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \ldots =$$

$$= 1 + i\frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - i\frac{z^7}{7!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - i\frac{z^7}{7!} + \ldots\right).$$

Отже,

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i\sin z.}$$

Так само, підставляючи в ряд замість z значення $(-iz)$, дістаємо

$$\boxed{e^{-iz} = \cos z - i\sin z.}$$

Формули називають *формулами Ейлера*. Якщо їх почленно додати (відняти) ці рівності, то матимемо, що

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}, \quad \boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}.$$

ЛЕКЦІЯ 7. РЯДИ ФУР'Є. Ч. 1

7.1. Періодичні процеси

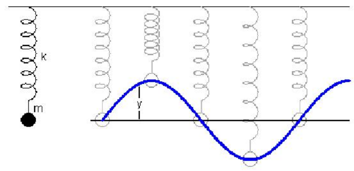


Рис. 7.1. Періодичний рух підчепленої кульки

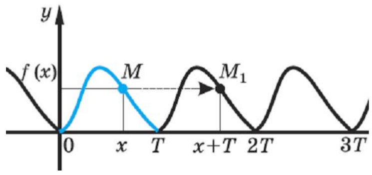


Рис. 7.2. Графік T-періодичної функції

У природі й техніці часто трапляються *періодичні* процеси і явища. Прикладами періодичних процесів можуть бути механічні та електромагнітні коливання, періодичні рухи в теорії пружності, акустиці, радіо- та електротехніці.

Моделюють періодичні процеси за допомогою періодичних функцій.

Нагадаймо, що функцію називають *періодичною з періодом* $T > 0$, якщо вона означена на необмеженій множині D та існує число $T > 0$ таке, що:

1) для кожного $x \in D(f)$ $x + T \in D(f)$;

2) $f(x+T) = f(x)$.

Властивості періодичних функцій:

1) сума, різниця, добуток і частка T-періодичних функцій є T-періодичною функцією;

2) якщо функція $f(x)$ має період T, то функція $y = f(ax), a > 0$, має період $\dfrac{T}{a}$;

3) якщо функція f є T-періодичною, то

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx.$$

Найпростішим коливанням з періодом T є просте гармонічне коливання

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0), t \geq 0,$$

де A — амплітуда коливання; $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ — колова частота; φ_0 — початкова фаза. Функцію $x(t)$ та її графік називають *простою гармонікою*.

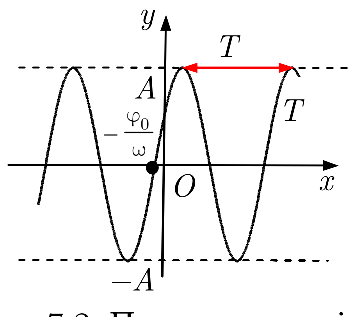


Рис. 7.2. Проста гармоніка

Коливання, утворені накладанням кількох простих гармонік, називають *складеними гармонічними* коливаннями, графіки яких можуть значно відрізнятись від графіків окремих гармонік.

Виникає питання:

Чи не можна деяку періодичну функцію, зобразити сумою простих гармонік?

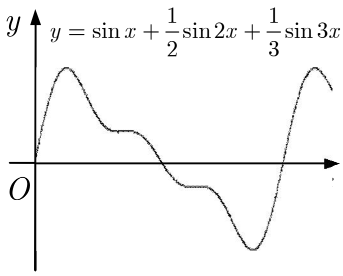


Рис. 7.3. Графік складеного гармонічного коливання

7.2. Тригонометричні ряди

Накладанням простих гармонік можна дістати різноманітні періодичні коливання, які зовсім не схожі на прості гармонічні коливання.

Означення 7.1 (тригонометричного ряду). Функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 x + b_n \sin n\omega_1 x)$$

називають *тригонометричним*, сталі $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$, — *коефіцієнтами* тригонометричного ряду, ω_1 — *основною частотою*.

Систему функцій $\{1, \sin n\omega_1 x, \cos n\omega_1 x\}, n \in \mathbb{N}$, називають *тригонометричною*.

Оскільки членами тригонометричного ряду є періодичні функції з періодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$, то в разі збіжності ряду його сума $S(x)$ є також T-періодичною функцією.

7.3. Ортогональність тригонометричної системи

Означення 7.2 (ортогональної системи). Скінченну чи нескінченну систему функцій

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x), ...,$$

де $\varphi_n(x) \neq 0, n \in \mathbb{N}$, називають *ортогональною* на відрізку $[a; b]$, якщо для будь-яких різних номерів n та m:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0.$$

Безпосереднім обчисленням можна довести, що

Тригонометрична система функцій

$$\{1, \cos(n\omega_1 x), \sin(n\omega_1 x)\} = \left\{1, \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right), \sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\right\}, n \in \mathbb{N},$$

є ортогональною на відрізку $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$.

Це означає, що

$$\int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) dx = 0 \ \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot \sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) dx = 0 \ \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) \cos\left(m\frac{2\pi}{T}x\right) dx = 0 \ \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m;$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) \sin\left(m\frac{2\pi}{T}x\right) dx = 0 \ \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m;$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) \sin\left(m\frac{2\pi}{T}x\right) dx = 0 \ \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Також маємо:

$$\int_{-T/2}^{T/2} dx = T;$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) dx = \frac{T}{2};$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin^2\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) dx = \frac{T}{2}.$$

7.4. Ряд Фур'є

Розвинути T-періодичну функцію f у тригонометричний ряд означає знайти тригонометричний ряд який збігається до функції $f(x)$ (за винятком, можливо деяких точок).

Теорема 7.1 **(єдиності тригонометричного ряду).** Якщо функція $f(x)$ означена на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$, розвивається у рівномірно збіжний тригонометричний ряд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega_1 x)+b_n\sin(n\omega_1 x)), \omega_1=\frac{2\pi}{T},$$

то це розвинення єдине.

► Оскільки члени ряду є неперервними функціями, то його сума $f(x)$ є також неперервною функцією. Інтегруючи почленно ряд на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ і дістаємо

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-T/2}^{T/2}a_n\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)dx+\int_{-T/2}^{T/2}b_n\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)dx\right),$$

звідки

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{a_0}{2}dx=a_0\frac{T}{2}.$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx.$$

Помножмо обидві частини розвинення на $\cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)$ і зінтегруймо одержаний ряд почленно на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)dx+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-T/2}^{T/2}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)dx+b_n\int_{-T/2}^{T/2}\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)dx\right).$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)dx = a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)dx = a_n\frac{T}{2};$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)dx, n \in \mathbb{N}.$$

Так само, помноживши на $\sin kx$ і зінтегрувавши почленно на відрізку $[-\pi;\pi]$, знайдімо

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)dx, n \in \mathbb{N}.◄$$

Нехай задано довільну періодичну функцію $f(x)$ з періодом T, інтегровну на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$. Чи можна її розвинути у тригонометричний ряд, заздалегідь невідомо.

За одержаними формулами можемо обчислити коефіцієнти $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$, і зіставити функції f на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ тригонометричний ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + b_n\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\right).$$

Означення 7.3 (ряду Фур'є). Тригонометричний ряд

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega_1 x) + b_n\sin(n\omega_1 x)), \omega_1 = \frac{2\pi}{T},}$$

коефіцієнти якого визначаються через функцію $f(x)$ за формулами

$$\boxed{\begin{gathered} a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx, a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(n\omega_1 x\right)dx, \\ b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(n\omega_1 x\right)dx, n \in \mathbb{N}. \end{gathered}}$$

називають *тригонометричним рядом Фур'є функції* $f(x)$, а коефіцієнти цього ряду називають *коефіцієнтами Фур'є функції* $f(x)$.

7.5. Умови розвивності функції в ряд Фур'є

Функцію f називають *кусково-монотонною* на відрізку $[a;b,]$ якщо цей відрізок можна розбити скінченною кількістю точок $a < x_1 < ... < x_{n-1} < b$ на інтервали $(a;x_1),(x_1;x_2),...,(x_n;b)$, на кожному з яких $f(x)$ монотонна, тобто або не спадає, або не зростає.

Функція $f(x)$, кусково-монотонна й обмежена на відрізку $[a;b]$, може мати на ньому лише точки розриви 1-го роду — усувні або типу скінченного стрибка, тобто є кусково-неперервною.

Теорема 7.2 (Діріхле). Якщо T-періодична функція $f(x)$ справджує *умови Діріхле* на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$, тобто є на цьому відрізку:

1) кусково-монотонною;
2) обмеженою,
то її ряд Фур'є збігається у кожній точці x цього відрізку, причому для суми

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega_1 x) + b_n \sin(n\omega_1 x)), \omega_1 = \frac{2\pi}{T},$$

цього ряду виконано умови:
1) $S(x) = f(x)$, якщо x є точкою неперервності функції $f(x)$;
2) $S(x) = \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, якщо x є точкою розриву функції $f(x)$;
3) $S\left(-\frac{T}{2}\right) = S\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(-\frac{T}{2}+0\right)+f\left(\frac{T}{2}-0\right)\right)$.

Зауважимо, що:

1. Клас кусково-монотонних функцій є широким, але він не вичерпує усі функції, для яких ряд Фур'є збігається.
2. Існують необмежені функції, які є сумами своїх рядів Фур'є;
3. Існують збіжні тригонометричні ряди які не є рядами Фур'є.
4. Якщо T-періодична функції неперервна на всій осі й кусково-гладка, то її ряд Фур'є збігається до $f(x)$ рівномірно.

Приклад 7.1. Розвинути 2π-періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

у ряд Фур'є в інтервалі $(-\pi; \pi)$.

7.6. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичної функції

Часто виникає потреба розвинути у тригонометричний ряд неперіодичну функцію $f(x)$ означену лише на відрізку $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$. Оскільки у формулах для коефіцієнтів Фур'є інтеграли обчислюють за відрізком $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$, то для такої функції також можна записати тригонометричний ряд Фур'є. Разом з тим, якщо продовжити функцію $f(x)$ періодично на всю вісь Ox, то дістаємо функцію $F(x)$, періодичну з періодом T, що збігається з функцією $f(x)$ в інтервалі $\left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right)$:

$$F(x) = f(x) \ \forall x \in \left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right).$$

Цю функцію $F(x)$ називають *періодичним продовженням* функції $f(x)$. При цьому функція $F(x)$ може бути й неозначеною в точках $k\frac{T}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Ряд Фур'є для функції $F(x)$ тотожній ряду Фур'є для функції $f(x)$. До того ж, якщо ряд Фур'є для функції $f(x)$ збігається до неї, то його сума, періодична функція, дає періодичне продовження функції $f(x)$ з відрізку $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ на всю числові вісь.

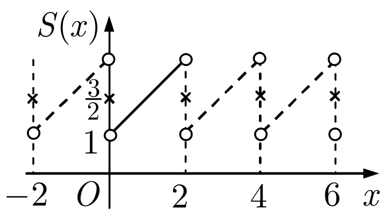


Рис. 7.4. Періодична функція

7.7. Ряд Фур'є для функції, що задана на довільному відрізку

Якщо функцію f задано на відрізку $[a;b]$, і на цьому відрізку вона справджує умови теореми Діріхле, то її можна періодично продовжити на всю числові вісь з періодом $T = b - a$ і частотою $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$ і тоді її можна розвинути в ряд Фур'є

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\omega_1 x) + b_n\sin(n\omega_1 x)\Big), \\ a_0 = \frac{2}{T}\int\limits_a^b f(x)dx; \\ a_n = \frac{2}{T}\int\limits_a^b f(x)\cos(n\omega_1 x)dx, n \in \mathbb{N}; \\ b_n = \frac{2}{T}\int\limits_a^b f(x)\sin(n\omega_1 x)dx, n \in \mathbb{N}. \end{gathered}}$$

Приклад 7.2. Розвинути функцію $f(x) = \pi - x, x \in [0;\pi]$ в ряд Фур'є з періодом $T = \pi$.

ЛЕКЦІЯ 8. РЯД ФУР'Є. Ч. 2

8.1. Розвинення в ряд Фур'є функцій, графіки яких мають симетрію

8.1.1. Розвинення в ряд Фур'є парних функцій

Нагадаємо, що функцію $f(x)$, означену на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right], T>0$, називають **парною**, якщо

$$\boxed{f(-x)=f(x), x\in\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right].}$$

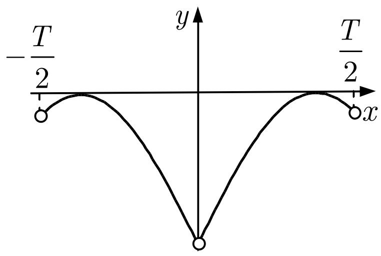


Рис. 8.1. Парна функція

Графік парної функції симетричний щодо осі ординат.

Нехай функція $f(x)$, що справджує умови Діріхле, є парною на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$. Тоді

$$f(-x)\cos\left(-n\frac{2\pi}{T}x\right)=f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right),$$

$$f(-x)\sin\left(-n\frac{2\pi}{T}x\right)=-f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right), x\in\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right],$$

тобто $f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)$ — парна функція, а $f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)$ — непарна функція. Тому коефіцієнти Фур'є парної функції $f(x)$ рівні

$$\boxed{a_0=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(x)dx, a_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(x)\cos\left(n\omega_1 x\right)dx, b_n=0, n\in\mathbb{N}.}$$

Отже, ряд Фур'є парної функції має вигляд

$$\boxed{f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_n\cos\left(n\omega_1 x\right).}$$

Приклад 8.1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & 1<|x|<2\end{cases}$ з періодом $T=4$.

8.1.2. Розвинення в ряд Фур'є непарних функцій

Нагадаємо, що функцію $f(x)$, означену на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right], T>0$, називають **непарною**, якщо

$$\boxed{f(-x)=-f(x), x\in\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right].}$$

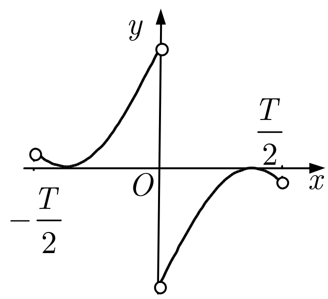


Рис. 8.2. Непарна функція

Графік непарної функції симетричний щодо початку координат.

Нехай функція $f(x)$, що справджує умови Діріхле, є непарною на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$. Тоді

$$f(-x)\cos\left(-n\frac{2\pi}{T}x\right)=-f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right),$$

$$f(-x)\sin\left(-n\frac{2\pi}{T}x\right)=f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right), x\in\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right],$$

тобто $f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)$ — непарна функція, а $f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)$ — парна функція. Тому коефіцієнти Фур'є непарної функції $f(x)$ рівні

$$\boxed{a_0=0, a_n=0, b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(x)\sin\left(n\omega_1 x\right)dx, n\in\mathbb{N}.}$$

Отже, ряд Фур'є непарної функції має вигляд

$$\boxed{f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_n\sin\left(n\omega_1 x\right).}$$

8.1.3. Розвинення в ряд Фур'є функцій, графік яких симетричний відносно точки на осі ординат

Графік функції $f(x)=g(x)+c$, де функція $g(x)$ — непарна, симетричний щодо точки $A(0;c)$.

Коефіцієнти Фур'є для такої функції рівні

$$\boxed{a_0=2c, a_n=0, b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}(f(x)-c)\sin\left(n\omega_1 x\right)dx, n\in\mathbb{N}.}$$

Ряд Фур'є для функції $f(x)$ має вигляд

$$\boxed{f(x) \sim c + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.}$$

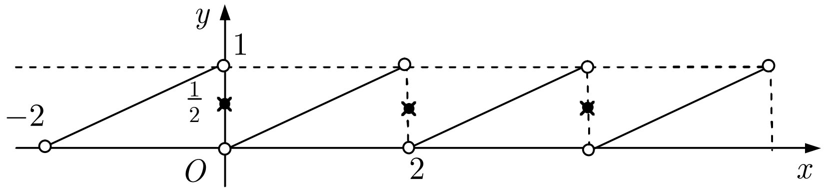


Рис. 8.3. Графік, симетричний щодо точки $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

Приклад 8.2. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$ з періодом $T = 2\pi$.

8.2. Розвинення функції в ряд за косинусами чи за синусами

Нехай обмежену кусково-монотонну функцію $f(x)$ задано в інтервалі $(0;b)$. Значення цієї функції на відрізок $(-b;0)$ можна доозначити різним чином.

Приміром, якщо доозначити функцію $f(x)$ на $(-b;0)$, так щоб

$$f(x) = f(-x),$$

то кажуть, що $f(x)$ **продовжено** на проміжок $(-b;0)$ **парним чином**; її ряд Фур'є міститиме лише косинуси.

Якщо ж функцію $f(x)$ доозначити на $(-b;0)$, так щоб

$$f(x) = -f(-x),$$

то кажуть, що $f(x)$ **продовжено** на проміжок $(-b;0)$ **непарним чином**; її ряд Фур'є міститиме лише синуси.

Отже, кожну обмежену кусково-монотонну функцію $f(x)$, означену в інтервалі $(0;b)$, можна розвинути в ряд Фур'є лише за косинусами чи лише за синусами.

Приклад 8.2. Функцію $f(x) = \pi - x, 0 < x < \pi$, розвинути в ряд Фур'є: 1) за косинусами; 2) за синусами.

8.3. Особливості розвинень функцій у ряд Фур'є

8.3.1. Ґібсів ефект

Послідовність прямокутних імпульсів погано підходить для зображення рядом Фур'є — вона містить стрибки, а сума будь-якої кількості гармонік із довільними амплітудами завжди буде неперервною функцією. Тому поведінка ряду Фур'є в околах розривів є особливо цікавою.

У прямокутного й пилкуватого періодичного сигналів амплітуди гармонік із зростанням їхніх номерів спадають пропорційно n.

Послідовність прямокутних імпульсів погано підходить для зображення рядом Фур'є — вона містить стрибки, а сума будь-якої кількості гармонік із довільними амплітудами завжди буде неперервною функцією. Тому поведінка ряду Фур'є в околах розривів є особливо цікавою. На рис. 8.5 видно, що в околі точки розриву підсумовування ряду Фур'є дає похилу ділянку, причому крутизна нахилу зростає з кількістю доданків.

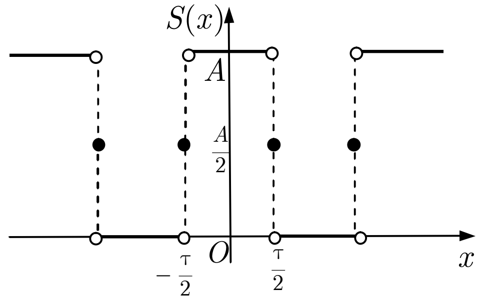


Рис. 8.4. Прямокутний імпульс

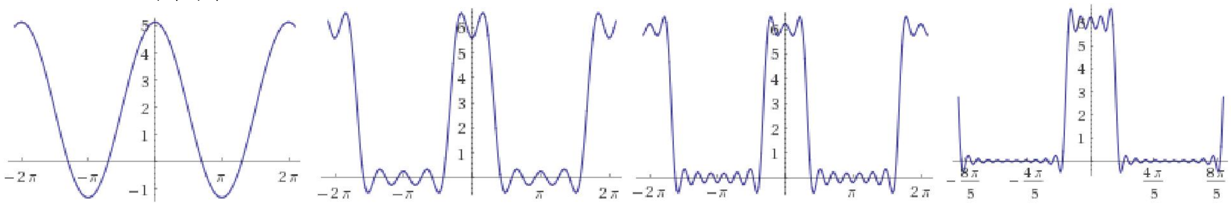


Рис. 8.5. Проміжні стадії підсумовування ряду Фур'є для прямокутного імпульсу

У точках розриву ряд Фур'є збігається до півсуми лівої та правої граничних значень. На прилеглих до розриву ділянках сума ряду Фур'є дає помітні пульсації, причому амплітуда пульсацій не зменшується зі зростанням кількості доданків — пульсації лише стискаються вздовж горизонталі, наближаючись до точки розриву. Це явище, притаманне рядам Фур'є для будь-яких сигналів із розривами 1-го роду називають ***Ґібсовим ефектом***.

У трикутного періодичного сигналу амплітуди гармонік спадають пропорційно n^2. Це прояв закономірності, що швидкість спадання спектра залежить від глад-

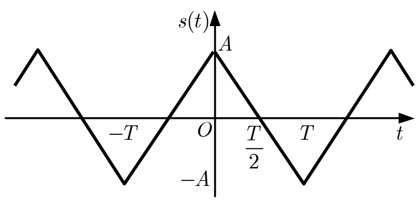


Рис. 8.6. Трикутний імпульс

кості сигналу. Прямокутний і пилкуватий сигнали мають розриви 1-го роду (стрибки), а трикутний сигнал є неперервною функцією (але його перша похідна має розриви). Правдиве правило: якщо N — номер останньої неперервної похідної сигналу, то спектр цього сигналу спадатиме зі швидкістю $\dfrac{1}{n^{N+2}}$. Граничним випадком є гармонічний сигнал, диференціювати який без втрати неперервності можна нескінченно.

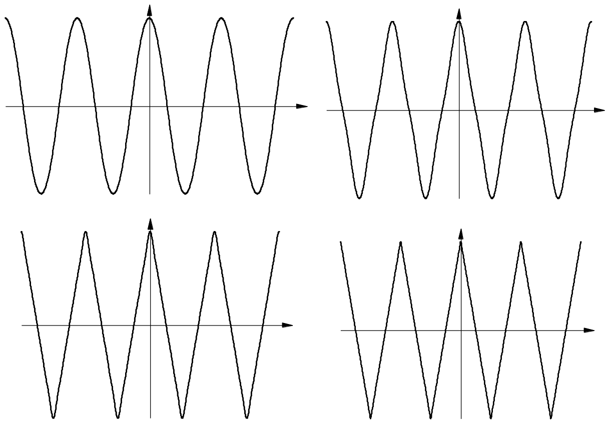


Рис. 8.7. Проміжні стадії підсумовування трикутного імпульсу

Завдяки неперервності сигналу відсутній Ґібсів ефект.

8.3.2. Вибір розвинення

Часто функція $f(x)$, що задана на проміжку $[0;b]$ і яку треба розвинути в ряд Фур'є не тільки неперервна, але й диференційовна. Постає питання, якому розвиненню надати перевагу — за косинусами або за синусами? Якій ряд «краще» збігатиметься?

Характер збіжності ряду Фур'є визначений властивостями заданої функції в точках $x = 0$ та $x = b$.

Якщо функція $f(x)$ в цих точках відмінна від нуля, то періодичне її продовження за принципом непарної функції призведе до розривів у двох точках $x = 0$ та $x = b$ Ці розриви легко ліквідуються, якщо функцію продовжити парним чином. Саме з цієї причини розвинення в ряд за косинусами має кращі властивості збіжності ніж за синусами. Коефіцієнти ряду за косинусами спадають зі швидкістю $\dfrac{1}{n^2}$, а коефіцієнти ряду синусів — лише зі швидкістю $\dfrac{1}{n}$.

Якщо ж $f(0) = f(b) = 0$, то розвинення в ряд за синусами дає кращу збіжність, аніж розвинення в ряд за косинусами. Причина полягає в тому, що розвинення функції $f(x)$ за принципом непарної функції забезпечує неперервність як функції, так і її першої похідної, тоді як періодичне продовження за принципом парної функції призводить до розриву першої похідної в точках $x = 0$ та $x = b$. Коефіцієнти ряду за синусами спадають із швидкістю $\dfrac{1}{n^3}$.

8.4. Комплексна форма ряду Фур'є

Нехай функція $f(x)$ справджує умови Діріхле на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$. Тоді на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ її можна зобразити рядом вигляду

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega_1 nx)+b_n\sin(n\omega_1 x)).$$

Користуючись формулами Ейлера маємо

$$\cos(n\omega_1 x)=\frac{e^{in\omega_1 x}+e^{-in\omega_1 x}}{2};\ \sin(n\omega_1 x)=\frac{e^{in\omega_1 x}-e^{-in\omega_1 x}}{2i},$$

матимемо

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{in\omega_1 x}+e^{-in\omega_1 x}}{2}-ib_n\frac{e^{in\omega_1 x}-e^{-in\omega_1 x}}{2}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{in\omega_1 x}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-in\omega_1 x}\right).$$

Позначмо,

$$\frac{a_0}{2}=c_0,\frac{a_n-ib_n}{2}=c_n,\frac{a_n+ib_n}{2}=c_{-n}.$$

Тоді ряд набуде вигляду

$$\boxed{f(x)\sim c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{in\omega_1 x}+c_{-n}e^{-in\omega_1 nx})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega_1 x}.}$$

Це *ряд Фур'є у комплексній формі*. Коефіцієнти його обчислюють за формулами

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{T}\left(\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos(n\omega_1 x)dx-i\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\sin(n\omega_1 x)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)(\cos(n\omega_1 x)-i\sin(n\omega_1 x))dx=$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)(\cos(-n\omega_1 x)+i\sin(-n\omega_1 x))dx=$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)e^{-in\omega_1 x}dx.$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\omega_1 x}dx.}$$

Приклад 8.3. Побудувати комплексну форму ряд Фур'є функції $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & 1 < |x| < 2. \end{cases}$

8.5. Амплітудний і фазовий спектри ряду Фур'є

Тригонометричні ряди Фур'є широко застосовують у радіотехніці, акустиці, механіці коливних процесів тощо.

Розгляньмо ряд Фур'є (у дійсній формі)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega_1 x) + b_n \sin(n\omega_1 x))$$

T-періодичної функції $f(x)$, для якої виконано умови Діріхле на відрізку $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$.

Для n-ої гармоніки ряді Фур'є

$$a_n \cos(n\omega_1 x) + b_n \sin(n\omega_1 x)$$

можна розглянути:
амплітуду

$$\boxed{A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2};}$$

початкову фазу

$$\varphi_n : \begin{cases} \cos\varphi_n = \dfrac{a_n}{A_n}, \\ \sin\varphi_n = \dfrac{b_n}{A_n} \end{cases}$$

і частоту

$$\omega_n = n\omega_1.$$

Запроваджуючи ще позначення

$$A_0 = \frac{a_0}{2},$$

перепишімо ряд Фур'є в компактнішій формі

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n x + \varphi_n),$$

яку називають гармонічною.

Складна T-періодична функція $f(x)$ повністю визначається сукупністю амплітуд $A_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, та початкових фаз $\varphi_n, n \in \mathbb{N}$.

Сукупність $\left|A_0\right|, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ називають дійсним амплітудним частотним спектром періодичної функції $f(x)$.

Сукупність $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ називають фазовим частотним спектром періодичної функції $f(x)$.

Амплітудний спектр зображують точками $(\left|A_0\right|; 0), (A_n; \omega_1 n), n \in \mathbb{N}$, які унаочнюють вертикальними відрізками.

Амплітудний спектр періодичної функції $f(x)$ дискретний (лінійчатий). Оскільки частоти гармонік кратні основній частоті ω_1, то спектр складається з рівновіддалених спектральних ліній.

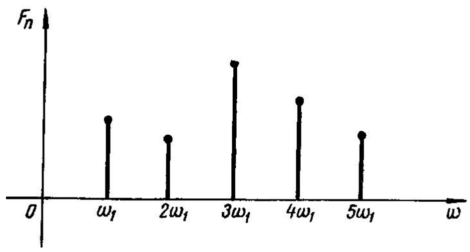


Рис. 8.8. Амплітудний спектр періодичної функції

Розглядають також і комплексні спектри:
сукупність

$$C_n = \left|c_n\right|, n \in \mathbb{Z},$$

називають *амплітудним спектром* функції f;
сукупність

$$\varphi_n = -\arg c_n, n \in \mathbb{Z},$$

називають *фазовим спектром* функції $f(x)$ (зазвичай тут вважають, що $\arg z \in (-\pi; \pi])$.

Приклад 8.4. Знайти амплітудний і фазовий спектри ряду Фур'є функції $f(x) = \begin{cases} 1, & \left|x\right| < 1, \\ 0, & 1 < \left|x\right| < 2. \end{cases}$

РОЗДІЛ 2. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

ЛЕКЦІЯ 9. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

9.1. Множини на комплексній площині

1. Комплексна площина. Комплексне число $z = x + iy$ зображають на площині Oxy точкою $M(x;y)$ або її радіусом-вектором $\overline{OM}$. Це встановлює взаємну однозначну відповідність між множиною комплексних чисел $\mathbb{C}$ і множиною точок площини $\mathbb{R}^2$. Площину, на якій зображають комплексні числа, називають *комплексною* площиною і позначають $\mathbb{C}$.

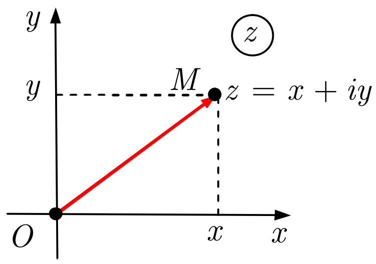


Рис. 9.1. Комплексна площина

Віддаль між двома точками $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ комплексної площини визначають за формулою

$$\rho(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2. Окіл. ε-*околом* точки $z_0 \in \mathbb{C}$ називають множину точок

$$\boxed{U_\varepsilon(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon \right\}.}$$

ε-окіл точки z_0 є відкритим кругом із центром у точці z_0 радіусом ε:

$$|z - z_0| < \varepsilon \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2.$$

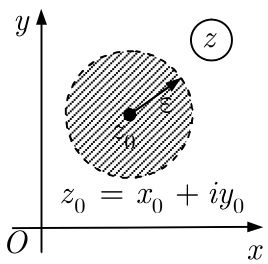


Рис. 9.2. ε-окіл на комплексній площині

3. Відкрита множина. Точку $M_0 \in D$ називають *внутрішньою* точкою множини D, якщо вона належить множині D разом з деяким своїм ε-околом. Множину D називають *відкритою*, якщо кожна її точка внутрішня.

Прикладом відкритої множини є ε-окіл будь-якої точки.

4. Область. Множину D називають *зв'язною*, якщо будь-які дві її точки можна з'єднати неперервною кривою (зокрема ламаною), що повністю лежить у множині D.

Відкриту зв'язну множину називають *областю*.

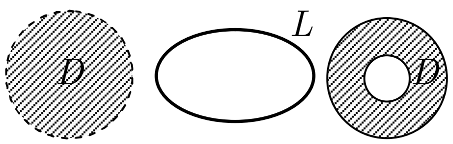


Рис. 9.3. Приклади зв'язних множин

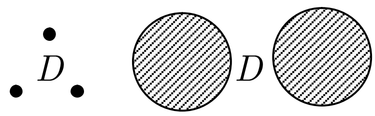


Рис. 9.4. Приклади незв'язних множин

5. Межа множини. Точку M називають *межовою* точкою множини D, якщо будь-який її окіл містить як точки, які належать D, так і точки, які їй не належать. Множину всіх межових точок множини називають *межею множини* D і позначають ∂D.

6. Однозв'язна область. Замкнену криву без самоперетинів називають *контуром*. Будь-який контур розбиває площину на дві різні області і є межею кожного з них. Одна з областей — внутрішність контуру — обмежена, а інша — зовнішність контуру — необмежена.

Область D називають *однозв'язною*, якщо внутрішність будь-якого контуру, що належить D, також належить D.

7. Замкнена множина. Точку M називають *граничною* точкою множини D, якщо кожен її окіл містить нескінченну кількість точок множини D.

Кожна гранична точка множини є або її внутрішньою точкою, або її межовою точкою. Об'єднання множини D і множини її граничних точок називають *замиканням* множини D і позначають $\overline{D}$.

Множину D називають *замкненою*, якщо вона містить усі свої граничні точки, тобто збігається з власним замиканням.

Прикладом замкненої множини є круг зі своєю межею колом.

8. Окіл нескінченно віддаленої точки. Розгляньмо послідовність $\{z_n\}$ комплексних чисел $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$

Якщо для будь-якого числа $M > 0$ існує натуральне число N таке, що всі члени z_n послідовності $\{z_n\}$ з номерами $n > N$ справджують нерівність

$$|z_n| > M,$$

то вважають, що послідовність $\{z_n\}$ збігається до *нескінченно віддаленої точки*, до нескінченності, і пишуть

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty.$$

Поповнюючи площину комплексної змінної так запровадженою нескінченно віддаленою точкою $z = \infty$, дістають *розширену комплексну* площину.

Околом нескінченно віддаленої точки (R — околом) називають сукупність усіх точок z, які справджують нерівність $\left|z\right| > R$ (з приєднаною нескінченно віддаленою точкою), тобто сукупність усіх точок z, які лежать за межами круга досить великого радіуса R з центром у початку координат.

9. Криві на комплексній площині. Нехай

$$x = x(t), y = y(t), t \in T,$$

— неперервні або неперервно диференційовні дійсні функції. Тоді комплексна функція

$$z(t) = x(t) + iy(t), t \in T,$$

означує на комплексній площині $\mathbb{C}$ неперервну чи гладку криву L, яку на площині Oxy задають параметричні рівняння

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in T.$$

Приклад 9.1. Записати в комплексній формі рівняння кола з центром у точці $z_0 = x_0 + iy_0$ радіусом R.

9.2. Функції комплексної змінної

1. Означення функції комплексної змінної. Нехай задано дві множини D та E, елементами яких є комплексні числа

$$z = x + iy \in D,$$

$$w = u + iv \in E.$$

Якщо кожному числу $z \in D$ за деяким правилом f поставлено у відповідність певне число $w \in E$, то кажуть, що на множині D означено *однозначну функцію комплексної змінної*

$$w = f(z)$$

що відображує множину D у множину E.

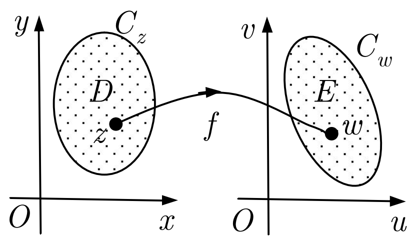


Рис. 9.5. Функція комплексної змінної

Якщо кожному $z \in D$ відповідає декілька значень w, то функцію $w = f(z)$ називають *багатозначною*.

Функція $w = f(z)$ перетворює комплексні числа $z = x + iy$ на комплексні числа $w = u + iv$:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Отже, комплекснозначну функцію комплексної змінної $z = x + iy$ можна розглядати як пару дійсних функцій
$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$
двох дійсних змінних x та y.

Функцію $u(x, y) = \operatorname{Re} w$ називають *дійсною частиною* функції $w = f(z)$, а функцію $v(x, y) = \operatorname{Im} w$ — її *уявною частиною*.

Приклад 9.2. Знайти дійсну та уявну частини функції $w = z^2 - 3z + 2$.

9.3. Границя і неперервність функції комплексної змінної

1. Границя функції. Нехай функція $w = f(z)$ означена в деякому проколеному околі $U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ точки $z_0 = x_0 + iy_0$.

Число $A = a + bi$ називають границею функції $f(z)$ у точці z_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що для всіх $z \in U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ виконано нерівність
$$\left|f(z) - A\right| < \varepsilon$$
і пишуть
$$A = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Зауважимо, що функція $w = f(z)$ прямує до своєї границі A незалежно від способу наближення точки z до точки z_0.

Існування границі
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A = a + ib$$
рівносильно існуванню границі двох дійсних функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$:
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = a, \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = b.$$

2. Властивості функцій, що мають скінченні границі.

1. Якщо $f(z)$ має в точці z_0 границю, то ця границя єдина.

2. Функція $f(z)$, яка має границю в точці z_0, обмежена в деякому проколеному околі цієї точки:
$$\exists C > 0 \ \forall z \in D : \left|f(z)\right| \leq C.$$

3. Якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \neq 0$, то існує проколений окіл $U(z_0) \setminus \{z_0\}$ точки z_0, такий, що $f(z) \neq 0$, $\forall z \in U(z_0) \setminus \{z_0\}$.

4. Якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B$, то

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = A \pm B;$$

$$\lim_{z \to z_0} (f(z)g(z)) = AB;$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, B \neq 0.$$

3. Неперервність функції. Функцію $w = f(z)$, задану на множині D, називають *неперервною в точці* $z_0 \in D$, якщо

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0), z \in D.$$

Функція комплексної змінної

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

неперервна у точці $z_0 = x_0 + iy_0$ тоді й лише тоді, коли її дійсна та уявна частини — функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ неперервні в точці $(x_0; y_0)$ за сукупністю змінних x та y.

Функцію $f(z)$ називають *неперервною на множині* D, якщо вона неперервна в кожній точці множини D.

9.4. Основні елементарні функції комплексної змінної

1. Модуль комплексного числа. *Модуль* комплексного числа $z = x + iy$ знаходять за формулою

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. Аргумент комплексного числа. *Аргумент* φ комплексного числа $z = x + iy$ визначають із співвідношень

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

і позначають $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Значення аргументу, яке належить проміжку $(-\pi; \pi]$ називають *головним* і позначають $\arg z$. Отже,

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,$$
$$\arg z \in (-\pi; \pi], k \in \mathbb{Z}$$

3. Показникова функція. *Показникову* функцію e^z означають для будь-якого комплексного числа $z = x + iy$ співвідношенням

$$\boxed{w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).}$$

Отже,

$$\operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y, \operatorname{Im}(e^z) = e^x \sin y;$$
$$\left|e^z\right| = e^x, \operatorname{Arg} e^z = y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Для $x = 0$ дістаємо *формулу Ейлера*

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y.}$$

4. Основні властивості показникової функції.

1. Для будь-яких z_1 та z_2 правдива теорема додавання

$$\boxed{e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.}$$

► Нехай $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$. Тоді

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)e^{x_2}(\cos y_1 + i \sin y_2) =$$
$$= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) =$$
$$= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{z_1+z_2}. ◄$$

2. Функція e^z періодична з основним періодом $2\pi i$, тобто для всіх z

$$\boxed{e^{z+2\pi i} = e^z.}$$

► $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$.◄

3. Функція e^z неперервна на всій комплексні площині $\mathbb{C}$.

4. Для всіх $z \in \mathbb{C}$ значення $e^z \neq 0$.

5. Логарифмічна функція. З рівняння

$$z = e^w$$

де $z \neq 0, w = u + iv$, дістаємо

$$\left|z\right| = e^u, \operatorname{Arg} z = v + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$u = \ln\left|z\right|, v = \operatorname{Arg} z.$$

Отже, обернена до функції $w = e^z$ означена для будь-якого $z \neq 0$ формулою

$$\boxed{\begin{aligned} w = \operatorname{Ln} z = \ln\left|z\right| + i \operatorname{Arg} z = \\ = \ln\left|z\right| + i(\arg z + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}}$$

Цю багатозначну функцію називають *логарифмічною*.

Функцію

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i\arg z}$$

називають *головним значенням логарифму*.

З формули випливає, що логарифмічна функції $w = \mathrm{Ln}\, z$ має відомі властивості логарифму дійсної змінної:

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2;$$

$$\mathrm{Ln}\,\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2.$$

Функція $w = \mathrm{Ln}\, z$ неперервна для всіх $z \neq 0$.

За допомогою показникової та логарифмічної функцій комплексної змінної можна означити *загальну показникову* функцію

$$\boxed{a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\, a}, a \neq 0.}$$

Приклад 9.3. Записати в алгебричній формі значення:
1) $e^{\pi i}$; 2) $\mathrm{Ln}(-1)$; 3) i^i.

6. Степенева функція.

1. Степеневу функція цілого степеня $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ означують рівністю

$$\boxed{w = z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).}$$

Для натурального значення n дійсну та уявну частини функції $w = z^n$ можна знайти за допомогою біному Ньютона.

Функція $w = z^n$ однозначна і неперервна (крім точки $z = 0$ для від'ємних n).

2. Степеневу функцію з показником $\alpha = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, означують рівністю:

$$\boxed{\begin{gathered} w = z^{1/n} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \\ k = \overline{0, n-1}. \end{gathered}}$$

Функція $w = \sqrt[n]{z}$ n-значна.

3. Загальну степеневу функцію означують рівністю

$$\boxed{w = z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\, z}.}$$

Функція z^a означена для всіх $z \neq 0$, є багатозначною функцією.

Приклад 9.4. Знайти всі значення $\sqrt[3]{8i}$.

7. Тригонометричні функції. Тригонометричні функції комплексної змінної z означують рівностями:

$$\boxed{\begin{array}{c} \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \\ \operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}. \end{array}}$$

Приклад 9.4. Знайти алгебричну форму $\cos(i \ln(5 + 2\sqrt{6}))$.

8. Властивості тригонометричних функцій. Функції $\sin z$ та $\cos z$:

1) для дійсних $z = x$ збігаються з тригонометричними функціями $\sin x$ та $\cos x$ дійсної змінної;

2) неперервні на всій комплексній площині;

3) періодичні з періодом 2π;

4) $\sin z$ — непарна функція, а $\cos z$ — парна;

5) зберігають відомі тригонометричні співвідношення для $\sin x$ та $\cos x$;

6) у комплексній площині необмежені.

$$\lim_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} \sin z = \infty, \lim_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} \cos z = \infty.$$

Функції $\operatorname{tg} z$ та $\operatorname{ctg} z$:

1) для дійсних $z = x$ збігаються з тригонометричними функціями $\operatorname{tg} x$ та $\operatorname{ctg} x$ дійсної змінної;

2) є періодичними з періодом π;

3) є непарними функціями;

4) означені і неперервні на всій комплексній площині, окрім $z = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, для $\operatorname{tg} z$ і $z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, для $\operatorname{ctg} z$.

9. Гіперболічні функції. Гіперболічні функції комплексної змінної z означують за формулами

$$\boxed{\begin{array}{cc} \operatorname{sh} z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}, & \operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \\ \operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, & \operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \end{array}}$$

Функції $\operatorname{sh} z$ та $\operatorname{ch} z$ періодичні з періодом $2\pi i$; $\operatorname{th} z$ та $\operatorname{cth} z$ періодичні з періодом πi.

10. Співвідношення між тригонометричними і гіперболічними функціями. Гіперболічні функції зв'язані із тригонометричні функціями рівностями:

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz, \\ \cos z = \operatorname{ch} iz, \quad \sin z = -i \operatorname{sh} iz. \end{array}}$$

З цих формул випливає, що:

1) $\operatorname{sh} z = 0$ для $z = k\pi i, k \in \mathbb{Z}$;

2) $\operatorname{ch} z = 0$ для $z = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i, k \in \mathbb{Z}$.

11. Обернені тригонометричні та гіперболічні функції. Функції $\operatorname{Arcsin} z, \operatorname{Arccos} z, \operatorname{Arctg} z$ та $\operatorname{Arcctg} z$ означають як обернені відповідно для функцій $\sin z, \cos z, \operatorname{tg} z$ та $\operatorname{ctg} z$.

Так, якщо $z = \sin w$, то w називають арксинусом числа і позначають $w = \operatorname{Arcsin} z$.

З означення функції $\sin w$ маємо

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2} \Leftrightarrow e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}.$$

Мінус можна випустити, якщо розуміти корінь як двозначну функцію:

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2};$$

$$iw = \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \Leftrightarrow w = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Отже,

$$\boxed{\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).}$$

Так само маємо:

$$\boxed{\begin{array}{c} \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}); \\ \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}, z \neq i; \\ \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i}, z \neq \pm i. \end{array}}$$

Усі ці функції нескінченнозначні.

Приклад 9.5. Знайти алгебричну форму $\operatorname{Arcsin} 4$.

ЛЕКЦІЯ 10. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

10.1. Диференційовність функції комплексної змінної

1. Диференційовність функції. Нехай однозначна функція $w = f(z)$ означена в деякому околі точки z_0.

Означення 10.1 **(диференційовності функції).** Функцію $f(z)$ називають *диференційовною* в точці z_0, якщо існує границя

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z},$$

яку називають *похідною* функції $f(z)$ у точці z_0 і позначають $f'(z_0)$.

У цій рівності Δz будь-яким чином прямує до нуля, тобто точка $z_0 + \Delta z$ може наближатись до точки z_0 за будь-яким з нескінченної кількості напрямів.

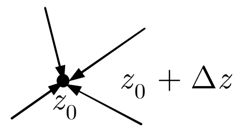


Рис. 10.1. Точка $z_0 + \Delta z$ наближається до точки z_0

Диференційовність функції $w = f(z)$ у точці z_0 означає, що її приріст можна зобразити у вигляді

$$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|),$$

де $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{o(\Delta z)}{\Delta z} = 0.$

Приклад 10.1. Показати, що функція $w = \operatorname{Re} z$ не диференційовна в жодній точці. Розглянути $z = s, z = it$.

Функція диференційовна в точці z_0 є неперервною в цій точці.

Функцію називають *диференційовною в області*, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області.

2. Правила диференціювання. З означення похідної і властивостей границь випливає, що для функцій комплексної змінної зберігаються основні правила диференціювання функцій:

1) $(f_1(z) \pm f_2(z))' = f_1'(z) \pm f_2(z);$

2) $(f_1(z)f_2(z))' = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z);$

3) $\left(\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \dfrac{f_1'(z)f_2(z) - f_1(z)f_2'(z)}{f_2^2(z)}, f_2(z) \neq 0;$

4) якщо $\varphi(z)$ диференційовна в точці z, а $f(w)$ диференціовна в точці $w = f(z)$, то $(f(\varphi(z)))' = f_\varphi'(\varphi)\varphi_z'(z)$.

10.2. Умови Коші — Рімана

Вимога диференційовності функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ у точці $z = x + iy$ накладає певні умови на дійсну та уявну частини цієї функції в околі точки $(x; y)$.

Теорема 10.1 **(критерій диференційовності).** Функція
$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$
диференційовна в точці $z = x + iy$, тоді й лише тоді, коли функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$:

1) диференційовні в точці $(x; y)$;

2) справджують *умови*
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$
які називають *умовами Коші — Рімана* (*Ейлера — д'Аламбера*).

▶ Границя
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z),$$
не повинна залежати від шляху прямування z до $z + \Delta z$.

Виберімо два можливих шляхи:

1) $z \to z + \Delta z$ уздовж прямої, паралельної дійсній осі;

2) $z \to z + \Delta z$ уздовж прямої, паралельної уявній осі.

Для 1-го випадку
$$\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x + i\Delta y = \Delta x \to 0.$$

Тоді

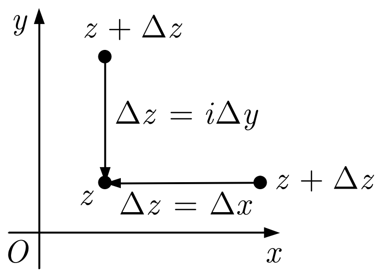


Рис. 10.2. Шляхи прямування точки $z + \Delta z$ до точки z

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Для 2-го випадку
$$\Delta x = 0, \Delta z = \Delta x + i\Delta y = i\Delta y \to 0.$$

Тоді
$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y) - u(x,y) - iv(x,y)}{i\Delta y} =$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Прирівнюючи вирази для $f'(z)$, маємо
$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Достатність залишимо без доведення.◂

Приміром, функція $w = \overline{z} = x - iy$ не диференційовна в жодній точці, оскільки
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

2. Формули обчислення похідної диференційовної функції. З доведення теореми 10.1 і умов Коші — Рімана випливають формули для похідної диференційовної функції $f'(z)$:
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Теорема 10.2 **(про диференційовність елементарних функцій).** Функції
$$w = e^z, w = z^n \ (n \in \mathbb{N}),$$
$$w = \sin z, w = \cos z, w = \operatorname{tg} z, w = \operatorname{ctg} z,$$
$$w = \operatorname{sh} z, w = \operatorname{ch} z, w = \operatorname{th} z, w = \operatorname{cth} z$$
диференційовні в будь-якій точці комплексної площини, в якій вони означені.

10.3. Аналітичність функції

Означення 10.2 **(аналітичної функції).** Функцію $w = f(z)$ називають *аналітичною в точці* z, якщо вона диференційовна як у самій точці z, так і в деякому її околі.

Функцію $w = f(z)$, диференційовну в кожній точці деякої області D, називають *аналітичною* функцією *в цій області*.

Умова аналітичності функції в точці сильніша за вимогу диференційовності.

Точку z_0, у якій функція $f(z)$ аналітична називають *правильною* точкою функції. Якщо ж функція $f(z)$ аналітична в деякому проколеному околі точки z_0 і не аналітична в самій точці z_0 або не означена в ній, то z_0 називають *особливою* точкою функції $f(z)$.

Приклад 10.2. З'ясувати, чи є функція $w = z\overline{z}$ аналітичної хоча б в одній точці?

Приклад 10.3. Показати, що функція $w = e^z$ є аналітичною на всій комплексній площині z і знайти її похідну.

Якщо функції $f_1(z)$ та $f_2(z)$ аналітичні в області D, то їхні алгебрична сума $f_1(z) \pm f_2(z)$ і добуток $f_1(z)f_2(z)$ також аналітичні в цій області, а частка $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ аналітична в області D, за винятком тих точок, у яких знаменник дорівнює нулеві.

10.4. Гармонічні функції. Відновлення аналітичної функції

1. Гармонічні функції. Функцію $\varphi(x, y)$ називають *гармонічною* в області D, якщо вона має в цій області неперервні частинні похідні до 2-го порядку включно і справджує в цій області *Лапласове рівняння*

$$\Delta\varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Нехай функція

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

аналітична в області D, причому функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ мають неперервні частинні похідні до 2-го порядку включно. Оскільки в області D виконано умови Коші — Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

то, диференціюючи першу з цих рівностей за змінною x, а другу — за змінною y, дістаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Звідси, враховуючи рівність $v''_{xy} = v''_{yx}$ матимемо співвідношення

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Таке саме рівняння можна одержати і для функції $v(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Якщо функція $f(z) = u + iv$ аналітична в деякій області D, то її дійсна частина $u(x, y)$ та уявна частина $v(x, y)$ є гармонічними функціями у відповідній області площини Oxy.

Теорема 10.3 **(про відновлення аналітичної функції).** Будь-яка гармонічна в однозв'язній області D функція є дійсною (уявною) частиною деякої аналітичної в цій області функції.

▶ Нехай $u(x, y)$ — гармонічна в однозв'язній області D функція. Розгляньмо диференціальну форму

$$W = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = P dx + Q dy.$$

Оскільки функція $u(x, y)$ справджує рівняння Лапласа, то

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

А форма W є повним диференціалом деякої функції $v(x, y)$, тобто

$$dv(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Отже, функції u та v справджують умови Коші — Рімана.

Оскільки функцію $v(x, y)$ можна відновити за її повним диференціалом з точністю до довільної дійсної сталої C, то функція

$f(z) = u + iv$ визначається з точністю до довільної суто уявної сталої iC.◄

За заданою функцією $u(x,y)$ $(v(x,y))$ функцію $v(x,y)$ $(u(x,y))$ можна знайти за формулами:

$$\boxed{\begin{aligned} v(x,y) &= \int\limits_{M_0(x_0;y_0)}^{M(x;y)} -u'_y dx + u'_x dy + C = -\int\limits_{x_0}^{x} u'_y(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} u'_x(x,t)dt + C; \\ u(x,y) &= \int\limits_{M_0(x_0;y_0)}^{M(x;y)} v'_y dx - v'_x dy + C = \int\limits_{x_0}^{x} v'_y(t,y_0)dt - \int\limits_{y_0}^{y} v'_x(x,t)dt + C. \end{aligned}}$$

Приклад 10.4. Відновити аналітичну функцію $w = f(z)$ за її дійсною частиною $u(x,y) = e^x \cos y$ за умови, що $f(0) = 1$.

ЛЕКЦІЯ 11. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

11.1. Інтеграл від функції комплексної змінної

1. Означення інтеграла. Розгляньмо на комплексній площині z кусково-гладку орієнтовану криву L і припустімо, що на цій кривій означено функцію $f(z)$ комплексної змінної z.

Розбиваємо криву L на n ланок точками поділу

$$z_0 = a, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = b,$$

де a та b — кінці кривої L.

Покладаючи

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1},$$

утворімо суму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

(тут ζ_k — довільна точка k-ї часткової дуги $[z_{k-1}; z_k]$), яку називають *комплексною інтегральною* сумою вздовж кривої L.

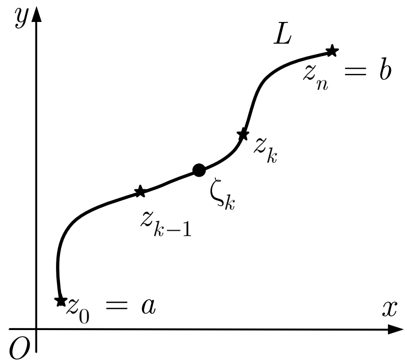


Рис. 11.1. Запровадження інтеграла від функції комплексної змінної

Означення 11.1 (інтеграла від функції комплексної змінної). Якщо при $\max\limits_k |\Delta z_k| \to 0$ існує границя інтегральної суми, що не залежить ані від способу розбиття кривої на ланки, ані від вибору точок ζ_k на них, то цю границю називають *інтегралом від функції* $f(z)$ *уздовж кривої* L:

$$\lim_{\substack{\max|\Delta z_k|\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \int_L f(z)dz.$$

2. Зв'язок інтеграла від функції комплексної змінної з криволінійними інтегралами.

Покладімо

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

$$z_k = x_k + iy_k, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1},$$

$$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k, u_k = u(\xi_k, \eta_k), v_k = v(\xi_k, \eta_k).$$

Тоді інтегральну суму можна записати у вигляді

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k).$$

Із цього співвідношення видно, що дійсна та уявна частина суми є інтегральними сумами криволінійних інтегралів 2-го роду

$$\int_L udx - vdy \text{ та } \int_L vdx + udy.$$

Отже, питання про існування інтеграла зводиться до питання існування двох криволінійних інтегралів від функцій дійсної змінної:

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy.$$

Для існування цих інтегралів досить кускової неперервності функцій u та v дійсних змінних x та y.

Якщо L — кусково-гладка крива, а $f(z)$ — кусково-неперервна та обмежена на L функція, то інтеграл завжди існує і правдива формула

$$\boxed{\int_L f(z)dz = \int_L (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy).}$$

3. Властивості інтеграла від функції комплексної змінної.

З поданої формули випливає, що для інтегралів від функції комплексної змінної зберігаються основні властивості криволінійних інтегралів 2-го роду.

1. $c_1\int_L f_1(z)dz + c_2\int_L f_2(z)dz = \int_L [c_1f_1(z) + c_2f_2(z)]dz$ (*лінійність*).

2. $\int_{L^-} f(z)dz = -\int_{L^+} f(z)dz$, де криві L_1 та L_2 мають протилежну орієнтацію (*орієнтованість*).

3. $\int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz = \int_{L_1\cup L_2} f(z)dz$ (*адитивність*).

4. Нехай $M = \max\limits_{z\in L}\left|f(z)\right|$ та l — довжина кривої L. Тоді

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \le \int_L \left|f(z)\right|\left|dz\right| \le M\int_L \left|dz\right| = Ml.$$

11.2. Зв'язок інтеграла від функції комплексної змінної з визначеним інтегралом

Нехай

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), t_1 \le t \le t_2,$$

— параметричне задання гладкої кривої L. Тоді правдива формула

$$\boxed{\int_L f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt.}$$

►Якщо $z(t)$ неперервно диференційовна функція змінної t, то

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))(x_t'dt + iy_t'dt) = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt. ◄$$

Приклад 11.1. Показати, що $\displaystyle\int\limits_{\gamma_r: |z-z_0|=r} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \ne -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$

11.3. Теорема Коші

1. Теорема Коші для однозв'язної області.

Теорема 11.1 **(Коші для однозв'язної області).** Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то інтеграл від цієї функції за будь-яким замкненим кусково-гладким контуром L, який лежить в області D, дорівнює нулеві, тобто

$$\oint_L f(z)dz = 0.$$

►Доведімо теорему, припускаючи неперервність похідної $f'(z)$. Маємо

$$\oint_L f(z)dz = \oint_L udx - vdy + i\oint_L vdx + udy.$$

Завдяки аналітичності $f(z) = u + iv$ і неперервності $f'(z)$ в однозв'язній області D, функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ неперервні й диференційовні в цій області і справджують умови Коші — Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

За теоремою Остроградського — Ґріна ці умови означають, що

$$\oint_L udx - vdy = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,$$
$$\oint_L vdx + udy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

де G — внутрішність контуру L.

Отже,

$$\oint_L f(z)dz = 0. \blacktriangleleft$$

Якщо функція $f(z)$ ще й неперервна в замкненій області $\bar{D} = D \cup \partial D$, то теорему Коші можна узагальнити: інтеграл від функції $f(z)$, узятий уздовж межі ∂D цієї області, дорівнює нулеві:

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

2. Орієнтація межі багатозв'язної області. Розгляньмо на комплексній площині n замкнених кусково-гладких контурів $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_{n-1}$ таких, що кожний з контурів $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_{n-1}$ лежить у зовнішності решти і всі вони розташовані у внутрішності контуру Γ_0.

Множина точок площини, що лежить всередині контуру Γ_0 і за межами контурів $\Gamma_1, ..., \Gamma_{n-1}$, є n-зв'язною областю D.

Повна межа Γ області D є складеним контуром, утвореним із кривих $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_{n-1}$.

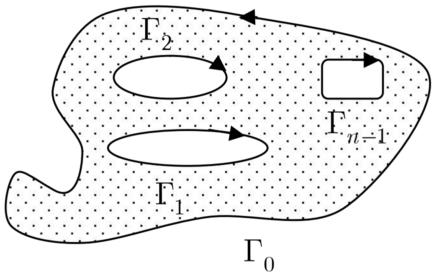


Рис. 11.2. n-зв'язна область

Орієнтуймо повну межу Γ області D таким чином. *Додатним напрямом* обходу межі багатозв'язної області називають такий напрям руху, під час якого область D весь час лишається ліворуч. При цьому зовнішній контур Γ_0 обходиться проти годинникової стрілки, а контури $\Gamma_1, ..., \Gamma_{n-1}$ — за годинниковою стрілкою.

3. Теорема Коші для багатозв'язної області.

Теорема 11.2 **(Коші, для багатозв'язної області).** Нехай функція $f(z)$ аналітична в багатозв'язній області D і неперервна в замкненій області $\bar{D}$. Тоді

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0,$$

де Γ — повна межа області D, яка утворена контурами $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$ і обходиться у додатному напрямі.

►Доведімо теорему для двозв'язної області, обмеженої звонішнім контуром Γ_0 і внутрішнім контуром Γ_1.

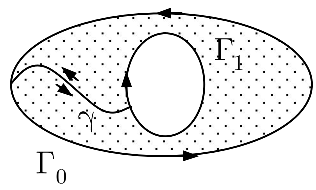


Рис. 11.3. Двозв'язна область

З'єднаймо зовнішній контур Γ_0 з контуром Γ_1 гладкою кривою γ, тобто проведімо розріз, і розгляньмо область D^*, межа Γ^* якою утворена кривими Γ_0, Γ_1 та кривою γ. При цьому допоміжну криву γ проходять двічі у протилежних напрямах; цю криву завжди можна побудувати так, щоб область D^* була однозв'язною.

На підставі узагальненої теореми Коші інтеграл за межею Γ^* області D^* дорівнює нулеві. Оскільки інтеграли вздовж γ взаємно знищуються, то

$$\oint_{\Gamma^*} f(z)dz = \oint_{\Gamma_0^+} f(z)dz + \oint_{\Gamma_1^-} f(z)dz = 0.$$

У разі n-зв'язної області маємо співвідношення

$$\oint_{\Gamma^*} f(z)dz = \oint_{\Gamma_0^+} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n-1} \oint_{\Gamma_k^-} f(z)dz = 0,$$

яке можна записати ще у вигляді

$$\oint_{\Gamma_0^+} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n-1} \oint_{\Gamma_k^+} f(z)dz. \blacktriangleleft$$

11.4. Формула Ньютона — Лейбніца

Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то значення інтеграла $\int\limits_L f(z)dz$, узятого вздовж кусково-гладкої кривої L, що належить області D, не залежить від вибору кривої L, а визначається лише положенням початкової точки z_0 та кінцевої точки z цієї кривої.

▶ Справді, нехай L_1 та L_2 — дві криві в області D, які сполучають точки z_0 та z.

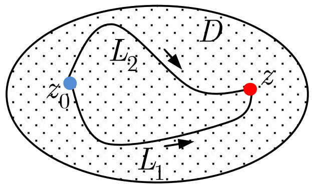


Рис. 11.4

За теоремою Коші для однозв'язної області

$$\oint\limits_{L_1 \cup L_2^-} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{L_1} f(z)dz + \int\limits_{L_2^-} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{L_1} f(z)dz - \int\limits_{L_2} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{L_1} f(z)dz = \int\limits_{L_2} f(z)dz. \blacktriangleleft$$

У разі, коли інтеграл залежить лише від початкової і кінцевої точок шляху інтегрування, його позначають як

$$\int\limits_{L} f(z)dz = \int\limits_{z_0}^{z_1} f(s)ds.$$

Якщо зафіксувати точку z_0, а точку z змінювати, то $\int\limits_{z_0}^{z} f(s)ds$ стає функцією від z:

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(s)ds.$$

Теорема 11.3 **(Морери).** Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D; точки z_0 та z належать D. Тоді функція

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(s)ds$$

аналітична в області D, і

$$F'(z) = f(z).$$

Означення 11.2 **(первісної).** Функцію $F(z)$ називають *первісною* функції $f(z)$ в області D, якщо в кожній точці цієї області виконано рівність

$$\boxed{F'(z) = f(z).}$$

Якщо $F(z)$ є деякою первісною для $f(z)$, то сукупність усіх первісних має вигляд

$$F(z)+C,$$

де $C = \mathrm{const}$.

Сукупність усіх первісних функції $f(z)$ називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(z)$ і позначають символом $\int f(z)dz$.

Методи обчислення невизначених інтегралів від аналітичних функцій в комплексному аналізі ті самі, що й в дійсному.

Для аналітичної функції $f(z)$ правдива також формула Ньютона — Лейбніца:

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(s)ds = F(z) - F(z_0) = F(z)\,\Big|_{z_0}^{z},$$

де $F(z)$ — деяка первісна функції $f(z)$ в області, якій належать точки z_0 та z.

Приклад 11.2. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{1}^{i} (3z^2 + 2z)dz$.

ЛЕКЦІЯ 12. РЯДИ ТЕЙЛОРА І ЛОРАНА

12.1. Інтегральна формула Коші

Ця формула зв'язує значення аналітичної функції $f(z)$ у будь-якій точці z області D зі значенням цієї функції у межових точках області D.

Теорема 12.1 **(про інтегральну формулу Коші).** Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D і неперервна в замкненій області $\overline{D} = D \cup L$. Тоді для будь-якої внутрішньої точки z області D правдива *інтегральна формула Коші для функції*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz,$$

де L — межа області D, що обходиться в додатному напрямі.

► Побудуймо коло $\gamma_r : \left| z - z_0 \right| = r$ з центром у точці z_0 радіусом r так, щоб це коло містилося всередині області D (коло γ_r не перетинало контур L). Дістанемо двозв'язну область D^*, обмежену контурами L та γ_r, у якій функція $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ аналітична.

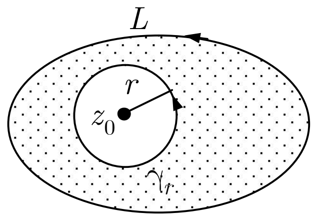


Рис. 12.1

Тоді

$$\oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint\limits_{\gamma_r^+ : |z - z_0| = r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_r^+ : |z - z_0| = r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Завдяки тому, що

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_r : |z - z_0| = r} \frac{dz}{z - z_0},$$

маємо

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_r : |z - z_0| = r} \frac{f(z_0) dz}{z - z_0},$$

Віднімімо обидві рівності:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_r^+ : |z - z_0| = r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz.$$

Ліва частина рівності не залежить від радіусу r кола. Виявляється, праву частину можна зробити як завгодно малою. Отже,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz. \blacktriangleleft$$

Диференціюючи формулу Коші за параметром z_0 дістаємо *інтегральну формулу Коші для похідної*:

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, n = 0,1,2,\ldots}$$

Приклад 12.1. Обчислити $\oint_{L_i}\frac{e^z}{z-2}dz$, якщо:
1) $L_1 : |z| = 1$; 2) $L_2 : |z| = 3$.

12.2. Тейлорові ряди

1. Розвинення функції комплексної змінної в ряд Тейлора.

Теорема 12.2 (Тейлора). Будь-яку аналітичну у крузі $|z-z_0| < R$ функцію $f(z)$ можна єдиним чином розвинути у цьому крузі у степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

коефіцієнти якого визначають за формулами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, n = 0,1,\ldots,$$

де γ_r — довільне коло з центром у точці z_0, який лежить усередині заданого круга.

Цей ряд називають *Тейлоровим рядом* з центром у точці z_0 функції $f(z)$.

Теорема 12.3 (єдиності розвинення в Тейлорів ряд). Якщо функція $f(z)$ розвивна у крузі $|z - z_0| < R$ у степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

то цей ряд буде Тейлоровим рядом з центром у точці z_0 функції $f(z)$.

Отже, будь-який збіжний степеневий ряд є Тейлоровим рядом своєї суми. Його коефіцієнти можна шукати так само як і в дійсному випадку.

2. Розвинення деяких функцій у ряд Тейлора — Маклорена з центром у точці $z_0 = 0$.

1) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C};$

2) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ z \in \mathbb{C};$

3) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ z \in \mathbb{C};$

4) $\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, |z| < 1;$

5) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \ \ |z| < 1;$

6) $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \ |z| < 1.$

Приклад 12.2. Розвинути в ряд Тейлора з центром у точці z_0 функцію $f(z)$:

1) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}, z_0 = 0;$

2) $f(z) = z \sin z, z_0 = \frac{\pi}{2}.$

12.3. Лоранові ряди

Теорема 12.3 (Лорана). Будь-яку аналітичну в кільці $r < \left|z - z_0\right| < R$ $(0 \le r < R \le +\infty)$ функцію $f(z)$ можна єдиним чином розвинути у цьому кільці в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

коефіцієнти якого визначають за формулами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, n \in \mathbb{Z},$$

де γ_r — довільне коло з центром у точці z_0, який лежить усередині заданого кільці.

Цей ряд називають *Лорановим рядом* функції з центром у точці z_0 функції $f(z)$.

Ряд Лорана для функції

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

складається з двох частин.

Першу частину ряду Лорана

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

називають *правильною частиною* ряду Лорана; цей ряд збігається до аналітичної функції $f_1(z)$ усередині круга $\left|z - z_0\right| < R$.

Другу частину ряду Лорана

$$f_2(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

називають *головною частиною* ряду Лорана; цей ряд збігається до аналітичної функції $f_2(z)$ ззовні круга $\left|z - z_0\right| > r$.

Усередині кільці $r < \left|z - z_0\right| < R$ ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

збігається до аналітичної функції $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

При цьому в будь-якому вужчому кільці

$$r' \le |z - z_0| \le R',$$

де $r < r' \le R' < R$, Лоранів ряд збігається абсолютно і рівномірно.

Якщо функція $f(z)$ не має особливих точок усередині круга $\left|z - z_0\right| < R$, то її розвинення в Лоранів ряд перетворюється на Тейлорів ряд.

Приклад 12.3. Визначити область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{z^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{2^{n+1}}$.

Формули для коефіцієнтів Лоранового ряду практично не використовують. Їх одержують, застосовуючи готові Тейлорові розвинення елементарних функцій. На підставі єдиності розвинення будь-який законний прийом приводить до потрібного розвинення. для однієї і тої самої функції $f(z)$ Лоранові розвинення, взагалі кажучи, мають різний вигляд для різних кілець.

Приклад 12.4. Знайти всі Лоранові розвинення функції $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2 + z - 2}$ за степенями z.

Приклад 12.5. Знайти Лоранове розвинення функції $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2 + z - 2}$ у кільці $0 < |z-1| < 3$.

Приклад 12.6. Розвинути в Лоранів ряд функцію $f(z) = z^2 \cos\dfrac{1}{z}$ в околі точки $z_0 = 0$.

ЛЕКЦІЯ 13. ІЗОЛЬОВАНІ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ

13.1. Нулі аналітичної функції

Нехай $f(z)$ — аналітична функція в області D. Точку $z_0 \in D$ називають *нулем* функції $f(z)$, якщо $f(z_0) = 0$. Розвинення функції $f(z)$ в околі її нуля у степеневий ряд має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, c_0 = 0.$$

Якщо й $c_1 = c_2 = \dots = c_{k-1} = 0, c_k \neq 0$, то точку z_0 називають *нулем* k-го порядку.

В околі нуля k-го порядку розвинення функції $f(z)$ у степеневий ряд має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_k (z - z_0)^k + c_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \dots =$$
$$= (z - z_0)^k (c_k + c_{k+1} (z - z_0) + \dots) = (z - z_0)^k g(z), g(z_0) \neq 0.$$

Теорема 13.1 **(про порядок нуля функції).** Точка $z = z_0$ є нулем порядку k функції $f(z)$ тоді й лише тоді, коли:

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Нулі функції $f(z)$ називають *ізольованими*, якщо їх можна оточити неперетинними околами.

Нулі відмінної від тотожного нуля аналітичної функції ізольовані.

Приклад 13.1. Знайти нулі функції $f(z) = 1 - e^{2z}$ та визначити їхні порядки.

Приклад 13.2. Знайти порядок нуля $z_0 = 0$ функції $f(z) = \dfrac{z^9}{z - \sin z}$.

13.2. Ізольовані особливі точки

1. Класифікація ізольованих особливих точок. Точку z_0 називають *ізольованою особливою точкою* функції $f(z)$, якщо існує проколений окіл точки z_0 — кільце

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon$$

у якому функція $f(z)$ однозначна й аналітична. У самій точці z_0 функція не означена, або не є однозначною і аналітичною.

Залежно від поведінки функції $f(z)$ під час наближення до точки z_0 розрізняють три типи особливих точок.

Означення 13.1 **(типів особливих точок).** Ізольовану особливу точку z_0 називають:

1) *усувною*, якщо існує скінченна $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$;

2) *полюсом*, якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;

3) *істотно особливою* точкою, якщо функція $f(z)$ не має границі, коли $z \to z_0$.

2. Властивості ізольованих особливих точок.

Якщо $z = z_0$ усувна особлива точка функції $f(z)$, то функція

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ \lim\limits_{z\to z_0} f(z), & z = z_0 \end{cases}$$

стає аналітичної в деякому околі точки z_0; особливість «усувається».

Теорема 13.1 **(про зв'язок між полюсом і нулем функції).** Точка z_0 є полюсом *порядку* m для функції $f(z)$ тоді й лише тоді, коли для функції $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ точка z_0 є нулем порядку m.

Полюс порядку $m = 1$ ще називають *простим полюсом*.

Теорема 13.2 **(Сохоцького).** Якщо z_0 — істотно особлива точка функції $f(z)$, то існує послідовність точок $z_k \to z_0$ така, що для будь-якого комплексного числа A

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = A.$$

3. Лоранові розвинення в околі особливої точки. Тип ізольованої особливої точки зв'язаний з характером Лоранового розвинення функції $f(z)$ у кільці $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ з виколотим центром z_0.

Нехай в околі точки z_0 функція $f(z)$ розвивається в Лоранів ряд:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Теорема 13.3. Ізольована особлива точка z_0 функції $f(z)$ є:
1) усувною особливою точкою тоді й лише тоді, коли Лоранове розвинення функції $f(z)$ у проколеному околі цієї точки не містить головної частини:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

2) полюсом *порядку* m тоді й лише тоді, коли головна частина Лоранового розвинення функції $f(z)$ у проколеному околі цієї точки містить скінченну (і додатну) кількість відмінних від нуля членів:

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, c_{-m}\neq 0.$$

3) істотно особливою тоді й лише тоді, коли головна частина Лоранового розвинення в проколеному околі цієї точки містить нескінченно багато відмінних від нуля членів:

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

Приклад 13.3. Дослідити особливу точку $z=0$ функції:
1) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$; 2) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^7}$; 3) $f(z)=z\,\mathrm{sh}\,\dfrac{1}{z}$.

4. Поведінка функції в нескінченно віддаленій точці. Класифікацію ізольованих точок можна поширити і на випадок, коли особливою точкою функції $f(z)$ є нескінченно віддалена точка, $z=\infty$.

Околом точки $z=\infty$ називають зовнішність будь-якого круга з центром у точці $z=0$ і радіусом $R>0$, множину $|z|>R$.

Точку $z=\infty$ називають ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо в деякому околі точки немає інших особливих точок функції.

Нескінченно віддалена ізольована особлива точка може бути:

— усувною (розвинення в ряд Лорана в околі точки $z=\infty$ не містить членів з додатними степенями);

— полюсом (розвинення в ряд Лорана в околі точки $z=\infty$ містить скінченну кількість з додатними степенями);

— істотно особливою точкою (розвинення в ряд Лорана в околі точки $z=\infty$ містить нескінченну кількість з додатними степенями).

Приміром, функція

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

має у нескінченності неізольовану особливість: полюси $z_k = k\pi$ накопичуються в нескінченності, якщо $k \to \infty$.

Відомі Тейлорові розвинення функцій $e^z, \cos z, \sin z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ можна розглядати також і як Лоранові розвинення в околі точки $z = \infty$. Оскільки всі ці розвинення містять нескінченну кількість додатних степенів z, то вказані функції мають у точці $z = \infty$ істотну особливість.

Вивчення функції $f(z)$ в околі точки $z = \infty$ можна звести заміною $z = \dfrac{1}{\zeta}$ до вивчення функції $\tilde{f}(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ в околі точки $\zeta = 0$.

Приклад 13.4. Дослідити особливу точку $z = \infty$ функції $f(z) = \dfrac{1}{z-3}$.

13.3. Лишок функції

1. Лишок функції в ізольованій особливій точці.

Означення 13.2 (лишка). *Лишком* функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці z_0 називають число

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma: |z-z_0|=r} f(z)dz,$$

де γ коло, яке лежить в області аналітичності функції $f(z)$.

З формули для коефіцієнтів Лоранового ряду

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho: |z-z_0|<\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, n \in \mathbb{Z},$$

випливає, що

$$\boxed{\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1}.}$$

Отже, лишок функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці z_0 дорівнює коефіцієнту при $(z-z_0)^{-1}$у Лорановому розвиненні цієї функції у проколеному околі точки z_0.

13.4. Обчислення лишків функції

1. Лишок в усувній особливій точці. Якщо $z = z_0$ є правильною або усувною особливою точкою, то

$$\boxed{\operatorname{res} f(z_0) = 0,}$$

оскільки у відповідному Лорановому розвиненні відсутня головна частина.

2. Лишок функції в полюсі 1-го порядку. Нехай точка z_0 є полюсом 1-го порядку (простим полюсом) функції $f(z)$, тоді

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Помножмо обидві частини цієї рівності на $z - z_0$ та, переходячи до границі, коли $z \to z_0$, дістаємо, що

$$\boxed{\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1} = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0).}$$

Нехай

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

де $\varphi(z_0) \neq 0$, а $\psi(z)$ має простий нуль у точці $z = z_0$, тобто

$$\psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0.$$

Застосовуючи формулу для обчислення лишка в простому полюсі, маємо:

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z - z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z) - \psi(z_0)}{(z - z_0)}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)},$$

тобто

$$\boxed{\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.}$$

3. Лишок функції у полюсі порядку *m*. Нехай точка z_0 є полюсом порядку m функції $f(z)$:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, c_{-m} \neq 0.$$

Щоб усунути від'ємні степені $z - z_0$, помножмо обидві частини цієї рівності на $(z - z_0)^m$,

$$f(z)(z-z_0)^m = c_{-m} + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+m}.$$

Здиференціюємо одержане співвідношення $(m-1)$ разів і, переходячи до границі, коли $z \to z_0$, дістаємо, що

$$\boxed{\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right].}$$

4. Лишок в істотно особливій точці. Якщо точка z_0 — істотно особлива точка функції $f(z)$, то коефіцієнт c_{-1}, а, отже, і лишок цієї функції визначають з Лоранового розвинення функції в проколеному околі точки z_0.

Приклад 13.5. Знайти лишки функції в усіх особливих точках:

1) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2 + z}$; 2) $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-i)^2}$; 3) $f(z) = z^3 e^{1/z}$.

5. Лишок функції в нескінченно віддаленій точці. Нехай функція $f(z)$ — аналітична в деякому околі точки $z = \infty$ (крім, можливо, самої цієї точки).

Лишком функції $f(z)$ у нескінченності називають

$$\boxed{\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_r^-:|z|=r} f(\xi)d\xi = -c_{-1},}$$

де зовнішність круга $|z| > r$ не містить інших особливих точок.

Приміром, для функції $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ маємо $f(z) = 1 + \dfrac{1}{z}$. Цей вираз можна розглядати як її Лоранове розвинення в околі точки ∞, з якого випливає, що

$$\operatorname{res} f(\infty) = -1.$$

З цього прикладу випливає, що лишок аналітичної функції щодо нескінченно віддаленої усувної точки (на відміну від скінченної усувної особливої точки) може бути відмінним від нуля.

ЛЕКЦІЯ 14. ОСНОВНА ТЕОРЕМА ПРО ЛИШКИ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Теорема 14.1 **(основна теорема про лишки).** Нехай функція $f(z)$ аналітична скрізь в однозв'язній області D за винятком скінченної кількості ізольованих особливих точок $z_1, ..., z_n$ і L — замкнена додатно орієнтована крива, яка розташована в D і містить точки $z_1, ..., z_n$ усередині. Тоді правдива рівність

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k).$$

► Побудуймо кола

$$\gamma_k : |z - z_k| = r, k = \overline{1, n},$$

такого малого радіусу, щоб обмежені ними круги містилися в області D і не перетиналися один з одним.

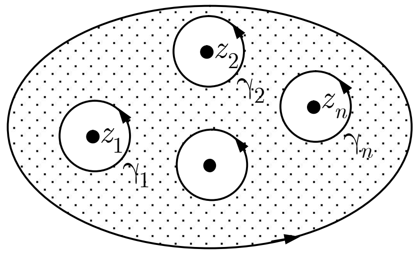


Рис. 14.1

Позначмо через D^* область, яку одержимо з області D видаленням усіх кругів.

Оскільки функція $f(z)$ аналітична в багатозв'язній області D^*, то за теоремою Коші для багатозв'язної області маємо

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k : |z - z_k| = r} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k). \blacktriangleleft$$

Терема 14.2 **(про суму лишків функції).** Якщо функція $f(z)$ має в розширеній комплексній площині скінченну кількість особливих точок, то сума всіх її лишків разом із лишком у нескінченності дорівнює нулеві:

$$\operatorname{res} f(\infty) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{res} f(\infty) = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k).$$

Отже,

$$\oint_L f(z)dz = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty).$$

Приклад 14.1. Обчислити інтеграл:

1) $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{(z^2+1)(z+3)}$; 2) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^8}$.

14.2. Застосування лишків до обчислення визначених і невластивих інтегралів

1. Інтеграл вигляду $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$, де $R(u,v)$ — раціональна функція аргументів u та v.

Запровадьмо комплексну змінну $z = e^{it}$. Тоді

$$dt = \frac{dz}{iz}, \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

У цьому випадку $\left|z\right| = 1, 0 \le x \le 2\pi$. Отже, початковий інтеграл переходить в інтеграл від функції комплексної змінної за замкненим контуром:

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint\limits_{\left|z\right|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}.$$

Цей інтеграл можна обчислити за основною теоремою про лишки.

Приклад 14.2. Обчисліть інтеграл $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 4\cos x)^2} = \frac{10\pi}{27}$.

2. Інтеграли вигляду $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$. Якщо дробово-раціональна функція $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ неперервна на всій дійсній осі $(Q_m(x) \ne 0)$ і $m \ge n + 2$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ (\operatorname{Im} z_k > 0)}}^{l} \operatorname{res} f(z_k),$$

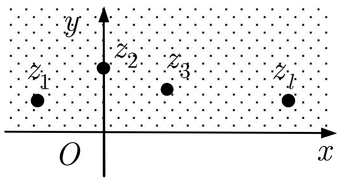


Рис. 14.1

де лишки обчислюють за особливими точками підінтегральної функції, які лежать у верхній півплощині.

Приклад 14.3. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}$.

3. Інтеграли вигляду $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} e^{itx} dx$. Якщо $n > m, t > 0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} e^{itx} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{l} \operatorname*{res}_{\substack{z=z_k,\\ \operatorname{Im} z_k>0}} \left(\frac{P_m(z)}{Q_n(z)} e^{itz} \right).$$

Якщо $t > 0, n > m$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \left\{ \begin{matrix} \cos tx \\ \sin tx \end{matrix} \right\} dx = \left\{ \begin{matrix} \operatorname{Re} \\ \operatorname{Im} \end{matrix} \right\} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} e^{itx} dx.$$

Приклад 14.4. Обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2} dx, a > 0, k > 0.$

РОЗДІЛ 3. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

ЛЕКЦІЯ 15. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

15.1. Інтеграл Фур'є

Будь-яку функцію $f(x)$, яка на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ справджує умови розвивності в ряд Фур'є, можна розвинути на цьому відрізку у тригонометричний ряд Фур'є:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x)\Big), \omega_n = \frac{2\pi}{T} n.$$

із коефіцієнтами

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\omega_n t)dt, n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\omega_n t)dt, n = 1, 2, \ldots$$

Якщо функцію $f(x)$ було означено в інтервалі ширшому ніж відрізок $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ (приміром, на всій осі), то розвинення її в ряд Фур'є відтворить значення цієї функції лише на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ і продовжить її на всю числову вісь як періодичну функцію з періодом T. Тому, якщо функцію $f(x)$ (взагалі кажучи, неперіодичну) означено на всій числовій осі, то у формулах розвинення можна спробувати спрямувати $T \to +\infty$. При цьому природно вимагати, щоб виконувались умови:

1) $f(x)$ справджує умови розвивності в ряд Фур'є на будь-якому скінченному відрізку осі Ox;

2) функція $f(x)$ *абсолютно інтегровна* на всій числовій осі, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) \right| dx = K < +\infty.$$

Теорема 15.1 (Фур'є). Якщо функція $f(x)$ справджує умови Діріхле на кожному скінченному відрізку (кусково-неперервна, кусково-монотонна, обмежена) і є абсолютно інтегровною, то її можна зобразити інтегралом Фур'є

$$I(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x) \Big) d\omega,$$

де

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t) dt,$$
$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t) dt.$$

Причому:
1) $f(x) = I(x)$, якщо x — точка неперервності;
2) $I(x) = \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, якщо x — точка розриву.

Інтеграли для $A(\omega), B(\omega)$ розуміють у сенсі головного значення:

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x) dx.$$

Формулу

$$f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x) \Big) d\omega,$$

називають *інтегральною формулою Фур'є*, а інтеграл, який стоїть праворуч — *інтегралом Фур'є у дійсній формі*.

Функції $a(\omega), b(\omega)$ є аналогами відповідних коефіцієнтів Фур'є a_n та b_n 2π-періодичної функції, але останні означені для дискретних значень n, тоді як $A(\omega), B(\omega)$ означені для неперервних значень $\omega \in (-\infty; +\infty)$.

Приклад 15.1. Зобразити інтегралом Фур'є в дійсній формі функцію $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$

15.2. Комплексна форма інтеграла Фур'є

За аналогією з комплексною формою ряду Фур'є T-періодичної функції:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n x}, \omega_n = \frac{2\pi}{T} n,$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega_n x} dx, n \in \mathbb{Z},$$

за умови виконання умов теореми Фур'є для функції $f(x)$ можна записати інтегральну формулу Фур'є в комплексній формі:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \end{aligned}}$$

Функцію $F(\omega)$ називають *перетвором Фур'є* функції $f(x)$. Перехід від функції $f(x)$ до функції $F(\omega)$ називають *прямим перетворенням Фур'є*, і позначають

$$\mathcal{F}\{f(x)\}(\omega) = F(\omega)$$

а від функції $F(\omega)$ до функції $f(x)$ — *оберненим перетворенням Фур'є*, і позначають

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}(x) = f(x).$$

Приклад 15.2. Зобразити комплексним інтегралом Фур'є функцію

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (\alpha > 0).$$

15.3. Косинус- і синус-перетворення Фур'є

1. Інтеграл Фур'є для парної функції. Нехай $f(x)$ — парна функція, яка справджує умови теореми Фур'є. Тоді в сенсі головного значення

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt, B(\omega) = 0,$$

оскільки $f(t)\cos(\omega t)$ — парна, а $f(t)\sin(\omega t)$ — непарна за змінною t функція.

Отже, інтеграл Фур'є набуває вигляду

$$f(x) = 2\int\limits_0^{+\infty} A(\omega)\cos(\omega x)d\omega,$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt.$$

Ці формули можна переписати у симетричному вигляді:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos(\omega x)d\omega, \\ F_c(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt, \end{aligned}}$$

де функцію $F_c(\omega)$ називають *косинус-перетвором Фур'є* функції $f(x)$.

Подана пара формул задає пряме й обернене косинус-перетворення Фур'є:

$$\mathcal{F}_c\{f(x)\}(\omega) = F_c(\omega),$$

$$\mathcal{F}_c^{-1}\{F_c(\omega)\}(x) = f(x).$$

Функції $f(x)$ та $F_c(\omega)$ є косинус-перетворами одна одної.

2. Інтеграл Фур'є для непарної функції. Так само для непарної функції $f(x)$ можна запровадити синус-перетворення Фур'є:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} F_s(\omega)\sin(\omega x)d\omega, \\ F_s(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt, \end{aligned}}$$

$$\mathcal{F}_s\{f(x)\}(\omega) = F_s(\omega),$$
$$\mathcal{F}_s^{-1}\{F_s(\omega)\}(x) = f(x),$$

де функцію $F_s(\omega)$ називають *синус-перетвором Фур'є* функції $f(x)$.

Функції $f(x)$ та $F_s(\omega)$ є синус-перетворами одна одної.

3. Функція, яку задано лише на півосі. Якщо функцію задано лише на проміжку $(0;+\infty)$, то її можна продовжити на проміжок $(-\infty;0)$ у різний спосіб, зокрема — парним чи непарним чином: у першому випадку її можна зобразити косинус-інтегралом Фур'є, а в другому — синус-інтегралом Фур'є.

Приклад 15.3. Знайти косинус-перетвір функції

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad a = \text{const} > 0.$$

Приклад 15.4. Знайти синус-перетвір функції $f(x) = \begin{cases} x, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases}$

15.4. Амплітудний та фазовий спектр інтеграла Фур'є

Неперіодичну функцію $f(x)$, заданої на $(-\infty;+\infty)$, за певних умов можна зобразити інтегралом Фур'є:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega,$$
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx,$$

яке «розвиває» функцію f за всіма частотами $0 < \omega < +\infty$.

Функцію $F(\omega)$ — перетвір Фур'є функції $f(x)$ називають ще *спектральною функцією* (*спектральною щільністю*) інтеграла Фур'є.

Функцію

$$S(\omega) = |F(\omega)|$$

називають *амплітудним спектром*, а функцію

$$\varphi(\omega) = -\arg F(\omega), \arg z \in (-\pi;\pi],$$

— *фазовим спектром* функції $f(x)$.

Приклад 15.5. Знайти амплітудний та фазовий спектри функції $f(x) = e^{-|x|}$.

ЛЕКЦІЯ 16. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

16.1. Оригінали та їх зображення

1. Ідея операційного числення. Операційне числення є одним з ефективних методів математичного аналізу, що дозволяє зводити дослідження диференціальних і деяких типів інтегральних операторів і рівнянь, які містять ці оператори, до розгляду простіших алгебричних задач.

Методи операційного числення реалізують таку схему розв'язання задачі:

1) від шуканих функцій переходять до деяких інших функцій — їх зображень;

2) над зображеннями проводять дії, які відповідають заданим діям над шуканими функціями;

3) одержавши деякий результат після дій над зображеннями, вертаються до шуканих функцій — оригіналів.

2. Інтегральне перетворення функції. Нехай функцію $f(x)$ задано в інтервалі $(a;b)$, скінченному або нескінченному. *Інтегральним перетвором* (зображенням) функції $f(x)$ називають функцію

$$F(\omega) = \int_a^b K(x,\omega)f(x)dx,$$

де $K(x,\omega)$ — фіксована для заданого перетворення функція, яку називають *ядром* перетворення (припускають, що інтеграл існує у властивому чи невластивому сенсі). Перехід від функції до її інтегрального перетвору називають *інтегральним перетворенням* (прямим).

У лекції 15 уже було розглянуто інтегральне перетворення Фур'є:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt,$$

з ядром

$$K(t,\omega) = e^{-i\omega t}.$$

Умова абсолютної інтегровності функції $f(x)$ на всій осі є вельми жорсткою. Вона виключає, приміром такі елементарні функції, як сталі, степеневі, тригонометричні та експоненту, для яких перетвір Фур'є (в розглядуваному класичному розумінні) не існує.

Перетвір Фур'є мають лише ті функції, які досить швидко прямують до нуля, коли $|x| \to +\infty$.

Розгляд перетворення Лапласа з ядром

$$K(t, p) = e^{-pt}, p \in \mathbb{C},$$

дозволяє послабити це обмеження.

3. Функції-оригінали.

Означення 16.1 (оригінала). *Оригіналом* називають будь-яку комплекснозначну функцію $f(t)$, $t \in (-\infty; +\infty)$, яка справджує умови:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0, f(0) = f(+0)$;
2) існують сталі $s \geq 0$ та $M > 0$, такі що
$$\left|f(t)\right| \leq Me^{st}, t > 0,$$
3) на будь-якому відрізку $[0; T]$ функція $f(t)$ може мати лише скінченну кількість точок розриву 1-го роду.

Якщо нерівність

$$\left|f(t)\right| \leq Me^{st}, t > 0,$$

виконана для деякого $s = s_1$, то вона буде виконана і для будь-якого $s_2 > s_1$. Точну нижню межу всіх чисел $s, s_0 = \inf s$, для яких виконана нерівність, називають *показником росту* функції $f(t)$.

Приміром, функція

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^t, & t \geq 0 \end{cases}$$

є оригіналом з показником росту $s_0 = 1$, а

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{t^2}, & t \geq 0 \end{cases}$$

не є оригіналом.

Найпростішою функцією-оригіналом є *одинична функція Гевісайда*

$$\boxed{\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}}$$

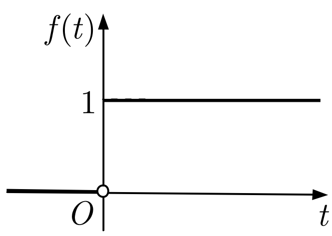


Рис. 16.1. Графік функції Гевісайда

Виявляється, що якщо функція $f(t)$ справджує умови 2) та 3), то помноживши цю функцію на $\eta(t)$ вже одержимо функцію оригінал $\eta(t)f(t)$.

Надалі пишучи $\sin t$ — розуміємо $\eta(t)\sin t$.

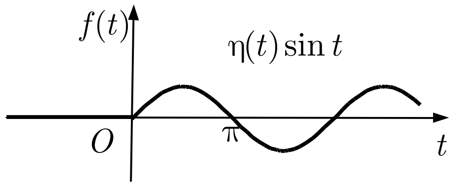


Рис. 16.2. Графік функції-оригінала $\sin t$

4. Інтегральне перетворення Лапласа.

Означення 16.2 (зображення). *Зображенням за Лапласом* (*перетвором Лапласа*) функції-оригінала $f(t)$ називають функцію

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

комплексної змінної $p = s + i\sigma$.

Той факт, що функція-оригінал $f(t)$ має своїм зображенням $F(p)$ позначають

$$f(t) \to F(p);$$
$$f(t) \risingdotseq F(p);$$
$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = F(p).$$

Теорема 16.1 (існування зображення). Для будь-якої функції оригіналу $f(t)$ з показником росту s_0 зображення $F(p)$ визначене у півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$ і є в цій півплощині аналітичною функцією.

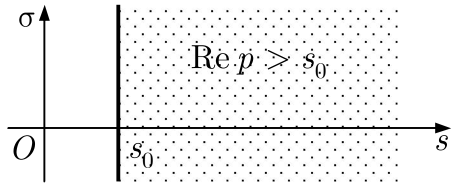


Рис. 16.3

Теорема 16.2 (необхідна ознака існування зображення). Якщо точка p прямує до нескінченності так, щоб $\operatorname{Re} p = s$ необмежено зростає, то

$$\lim_{s\to+\infty} F(p) = 0.$$

З теореми 16.2 випливає, що функції $F(p) = 5$ чи $F(p) = p^2$ не можуть бути зображеннями.

Теорема 16.3 (єдиності). Якщо дві неперервні функції $f(t)$ та $\varphi(t)$ мають те саме зображення $F(p)$, то вони тотожно рівні.

Знайдімо зображення функцій-оригіналів $f(t) = 1$ та $f(t) = e^{at}$ (розуміючи одиничну функцію Гевісайда $\eta(t)$ та $e^{at}\eta(t)$).

Функція $\eta(t)$ є функцією-оригіналом з показником росту $s_0 = 0$.

$$1 \to \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt}dt = \lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} e^{-pt}dt = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Bigg|_0^A =$$
$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-Ap}+\frac{1}{p}\right) = \left|\begin{matrix} p = s+i\sigma, \\ s>0 \end{matrix}\right| = \frac{1}{p}.$$

Функція $f(t) = e^{at}, a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, є функцією-оригіналом з показником росту $s_0 = \alpha$.

Отже, правдива формула:

$$\boxed{1 \to \frac{1}{p},\quad \operatorname{Re} p > 0.}$$

Розглядаючи $\operatorname{Re} p = s > \alpha$, маємо

$$e^{at} \to \int_0^{+\infty} e^{at}\cdot e^{-pt}dt = \lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} e^{-(p-a)t}dt = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{p-a}e^{-(p-a)t}\right)\Bigg|_0^A =$$
$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{p-a}e^{-A(p-a)}+\frac{1}{p-a}\right) = \left|\begin{matrix} p = s+i\sigma, \\ s>\alpha \end{matrix}\right| = \frac{1}{p-a}.$$

Отже, правдива формула:

$$\boxed{e^{at} \to \frac{1}{p-a},\quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a.}$$

16.2. Властивості перетворення Лапласа

1. Лінійність. Якщо $f(t)$ та $\varphi(t)$ — функції-оригінали відповідно з порядками росту s_1 та s_2, то для будь-яких комплексних сталих α та β

$$\boxed{\alpha f(t) + \beta\varphi(t) \to \alpha F(p) + \beta\Phi(p),}$$

де $\operatorname{Re} p > \max\{s_1, s_2\}$.

Знайдімо зображення функцій, які лінійно виражаються через експоненту:

$$\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \to \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2};$$
$$\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2};$$

$$\operatorname{sh}\omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2};$$
$$\operatorname{ch}\omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{p}{p^2 - \omega^2}.$$

2. Подібність. Якщо $f(t)$ — функція-оригінал, то для будь-якого сталого $\alpha > 0$

$$\boxed{f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).}$$

► Нехай $f(t) \to F(p)$. Тоді

$$f(\alpha t) \to \int_0^{+\infty} f(\alpha t)e^{-pt}dt = \left|\alpha t = \tau\right| = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\frac{p}{\alpha}\tau}d\tau = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \blacktriangleleft$$

3. Диференціювання оригіналу. Якщо $f(t)$ є функцією-оригіналом з порядком росту s_0 і функції $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ — також функції-оригінали з порядками росту відповідно $s_1, s_2, \ldots, s_n$, то

$$f'(t) \to pF(p) - f(0),$$
$$f''(t) \to pF(p) - (pf(0) + f'(0)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(t) \to p^nF(p) - (p^{n-1}f(0) + p^{n-2}f'(0) + \ldots + f^{(n-1)}(0)),$$

де $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t), k = \overline{1,n}$.

► Доведімо властивість для $n = 1$.

Нехай $f(t) \to F(p)$. Тоді для $\operatorname{Re} p = s > \overline{s} = \max\{s_0, s_1\}$ маємо

$$f'(t) \to \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = (f(t)e^{-pt})\Big|_{t=0}^{t=+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Якщо $\operatorname{Re} p = s > \overline{s}$, то

$$\left|f(t)e^{-pt}\right| \le Me^{-(s-\overline{s})t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

і

$$f'(t) \to -f'(0) + pF(p). \blacktriangleleft$$

З властивості диференціювання оригіналу випливає формула включення:

$$\lim_{\operatorname{Re} p\to+\infty} pF(p) = f(0).$$

► Справді,

$$f'(t) = g(t) \to pF(p) - f(0) = G(p) \to 0, \operatorname{Re} p \to +\infty \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{\operatorname{Re} p \to +\infty} pF(p) = f(0). \blacktriangleleft$$

4. Диференціювання зображення. Диференціювання зображення зводиться до помноження на $(-t)$ оригіналу,

$$F^{(n)}(p) \leftarrow (-t)^n f(t).$$

$\blacktriangleright$ Оскільки функція у півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$ є аналітичною, то її можна диференціювати за змінною p. Маємо

$$F'(p) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-pt}dt,$$
$$F''(p) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-pt}dt,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} (-1)^n t^n f(t)e^{-pt}dt. \blacktriangleleft$$

З цієї властивості і зображення одиничної функції Гевісайда можна одержати зображення функції-оригіналу t^n:

$$(-t)^n \cdot 1 \to \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{p^{n+1}} \Leftrightarrow t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

5. Інтегрування оригіналу. Інтегрування оригіналу зводиться до ділення зображення на p: якщо $f(t) \to F(p)$, то

$$\int_0^t f(\xi)d\xi \to \frac{F(p)}{p}.$$

$\blacktriangleright$ Покладімо

$$\varphi(t) = \int_0^t f(t)dt.$$

Можна показати, що якщо $f(t)$ є функцією-оригіналом, то й $\varphi(t)$ буде функцією-оригіналом, причому $\varphi(0) = 0$. Нехай $\varphi(t) \to \Phi(p)$. Тоді

$$f(t) = \varphi'(t) \to p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F(p) = p\Phi(p) \Rightarrow \Phi(p) = \frac{F(p)}{p}. \blacktriangleleft$$

6. Інтегрування зображення. Якщо $f(t) \to F(p)$ й інтеграл $\int\limits_p^\infty F(q)dq$ збігається, то він є зображенням функції $\dfrac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \to \int\limits_p^{+\infty} F(q)dq.$$

$$\blacktriangleright \int\limits_p^\infty F(q)dq = \int\limits_p^\infty \left\{ \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-qt}dt \right\} dq =$$

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t) \left\{ \int\limits_p^\infty e^{-qt}dt \right\} dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt}dt. \blacktriangleleft$$

7. Запізнення (зміщення оригіналу). Нехай $f(t)$ — оригінал. Тоді $f(t-a), a > 0$ — також є оригіналом з аргументом, який запізнюється на величину a. Графік $f(t-a)$ дістають з графіка $f(t)$ зсувом праворуч на величину a.

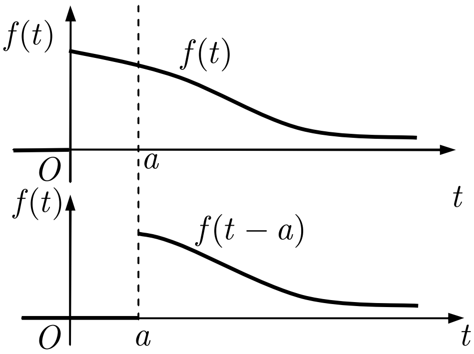


Рис. 16.4. Запізнення оригіналу

Якщо $f(t) \to F(p)$, то для будь-якого додатного a («запізнення»)

$$f(t-a) \to e^{-pa}F(p).$$

$\blacktriangleright$ Оскільки $f(t-a) \equiv 0, t < a$, то

$$f(t-a) \to \int\limits_0^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}dt = \int\limits_\tau^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}dt = \left| x = t-a \right| =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-p(x+a)}dx = e^{-pa}\int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx = e^{-pa}F(p). \blacktriangleleft$$

8. Зміщення (зображення). Якщо $f(t) \to F(p)$, то для будь-якого комплексного числа α

$$e^{\alpha t}f(t) \to F(p-\alpha).$$

$$\blacktriangleright\ e^{\alpha t}f(t) \to \int\limits_0^{+\infty} e^{\alpha t}f(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-\alpha)t}dt = F(p-\alpha). \blacktriangleleft$$

9. Зображення періодичного оригіналу. Нехай функція $f(t)$ періодична з періодом T є функцією-оригіналом з показником росту s. Тоді,

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt, \quad \mathrm{Re}\, p = s > 0.$$

$$\blacktriangleright f(t) \to F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt + \int\limits_T^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt =$$

$$= \int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt + \int\limits_0^{+\infty} f(t+T)e^{-p(t+T)}dt =$$

$$= \int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt + e^{-pT}F(p) \Rightarrow F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt. \blacktriangleleft$$

Приклад 16.1. Знайти зображення:

1) $f(t) = te^t$; 2) функції-ножиці $f(t) = \eta(t-a) - \eta(t-b)$;

3) $f(t) = e^{-\lambda t}\sin\omega t$; 4) $f(t) = e^{-\lambda t}\cos\omega t$; 5) $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.

16.3. Основна таблиця зображень

1. $1 \to \dfrac{1}{p}$.

2. $e^{at} \to \dfrac{1}{p-a}$.

3. $t^n \to \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

4. $\sin\omega t \to \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$,

5. $\cos\omega t \to \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$,

6. $\mathrm{sh}\,\omega t \to \dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$,

7. $\mathrm{ch}\,\omega t \to \dfrac{p}{p^2-\omega^2}$.

16.4. Згортка функцій. Теорема множення

1. Згортка функцій. Нехай функції $f(t)$ та $\varphi(t)$ означені й неперервні для всіх t. *Згорткою* $(f*\varphi)(t)$ цих функцій називають нову функцію від t, яку означують рівністю

$$(f*\varphi)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau$$

якщо цей інтеграл існує.

Для функцій-оригіналів $f(t)$ та $\varphi(t)$ згортання завжди виконуване, причому

$$\boxed{(f*\varphi)(t)=\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau.}$$

Згортання функцій комутативне, тобто

$$\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

2. Теорема множення. Якщо $f(t)\to F(p),\varphi(t)\to\Phi(p)$, то згортка $(f*\varphi)(t)$ має зображення $F(p)\Phi(p)$:

$$(f*\varphi)(t)=\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\to F(p)\Phi(p).$$

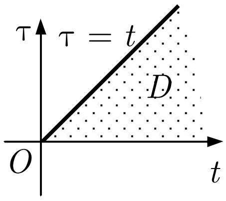


Рис. 16.5

$$\blacktriangleright\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\to\int_0^{+\infty}e^{-pt}\left\{\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\right\}dt=$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\left\{\int_0^{+\infty}f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\right\}dt=$$

$$=\int_0^{+\infty}f(\tau)\left\{\int_0^{+\infty}e^{-pt}\varphi(t-\tau)dt\right\}d\tau=\int_0^{+\infty}f(\tau)\Phi(p)e^{-p\tau}d\tau=\Phi(p)F(p).\blacktriangleleft$$

3. Інтеграл Дюамеля. Нехай $f(t)$ та $\varphi(t)$ — функції-оригінали, причому функція $f(t)$ неперервна на $[0;+\infty)$, а $\varphi(t)$ — неперервно диференційовна на $[0;+\infty)$. Тоді якщо $f(t)\to F(p),\varphi(t)\to\Phi(p)$, то

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\to pF(p)\Phi(p).$$

$$\blacktriangleright\frac{d}{dt}\left(\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\right)=f(t)\varphi(0)+\int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau\to pF(p)\Phi(p).\blacktriangleleft$$

Приклад 16.2. Знайти зображення функції $f(t)=\int_0^t\tau\sin(t-\tau)d\tau$.

ЛЕКЦІЯ 17. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

17.1. Відшукання оригіналу за зображенням

1. Достатні умови для зображення. Отже, поставмо задачу: задано функцію $F(p)$, треба знайти функцію-оригінал $f(t)$, зображенням якої є $F(p)$.

Теорема 17.1 **(достатні умови для зображення).** Якщо аналітична в півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$ функція $F(p)$:

1) прямує до нуля, коли $|p| \to +\infty$ у будь-якій півплощині $\operatorname{Re} p = a > s_0$ рівномірно щодо $\arg p$;

2) інтеграл $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp$ збігається абсолютно,

то $F(p)$ є зображенням деякої функції-оригіналу $f(t)$.

2. Відшукання оригіналу за допомогою таблиць зображень. У разі, коли $F(p)$ — дробово-раціональна функція аргументу p, її розкладають на елементарні дроби і використовують відповідні властивості Лапласового перетворення й основну таблицю зображень.

3. Обернене перетворення Лапласа.

Теорема 17.2 **(обернення).** Якщо функція $f(t)$ є функцією-оригіналом з показником росту s_0 і $F(p)$ — її зображення, то в будь-якій точці неперервності функції $f(t)$ правдива *формула Рімана — Мелліна* для *оберненого перетворення Лапласа*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}dp,$$

де інтеграл береться вздовж будь-якої прямої $\operatorname{Re} p = s > s_0$ і його розуміють як головне значення відповідного інтеграла.

Безпосереднє обчислення інтеграла у формулі обернення складне. Відшукання оригінала за зображенням спрощується при деяких додаткових обмеженнях на $F(p)$.

4. Теореми розвинення.

Теорема 17.3 **(1-а теорема розвинення).** Нехай зображення $F(p)$ — дробово-раціональна функція з полюсами $p_1, p_2, ..., p_n$. Тоді оригіналом для $F(p)$ буде функція $f(t)\eta(t)$, де

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(F(p)e^{pt}) \,|_{p=p_k}.$$

Теорема 17.4 **(2-а теорема розвинення).** Нехай зображення $F(p)$ є аналітичною функцією в нескінченно віддаленій точці $p = \infty$, причому її розвинення в околі $|p| > R$ нескінченно віддаленої точки має вигляд

$$F(p) = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + ... + \frac{c_n}{p^n} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}.$$

Тоді оригіналом для $F(p)$ буде функція $f(t)\eta(t)$, де

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}.$$

Приклад 17.1. Знайти оригінал для зображення:

1) $F(p) = \dfrac{3p^2}{(p^3-1)^2}$; 2) $F(p) = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$.

17.2 Застосування Лапласового перетворення

1. Розв'язання задачі Коші для ЛДР зі сталими коефіцієнтами зі знаходженням зображення правої частини рівняння. Розгляньмо задачу Коші для диференціальне рівняння 2-го порядку:

$$a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t), x(0) = x_0, x'(0) = x_0',$$

де a_0, a_1, a_2 — сталі, $a_0 \neq 0$.

Нехай

$$x(t) \to X(p), f(t) \to F(p)$$

(припускаючи, що $x(t)$ та $f(t)$ — функції-оригінали). Застосовуючи перетворення Лапласа до обох частин ДР і враховуючи початкові умови, дістаємо операторне рівняння

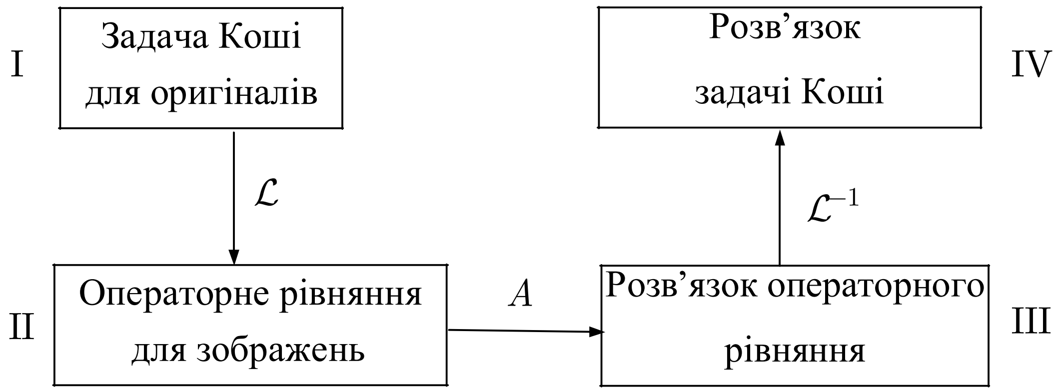
$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) X(p) - (a_0 p x_0 + a_0 x_0' + a_1 x_0) = F(p).$$

З операторного рівняння дістаємо операторний розв'язок

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0 p x_0 + a_0 x_1 + a_1 x_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}.$$

За знайденим зображенням $X(p)$ знаходимо оригінал $x(t)$, який є розв'язкомок задачі Коші.

Подамо загальну схему розв'язання задачі Коші:



2. Розв'язання задачі Коші без знаходження зображення правої частини рівняння. Розгляньмо задачу Коші для диференціального рівняння 2-го порядку з нульовими початковими умовами:

$$a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t),$$
$$x(0) = x'(0) = 0,$$

де a_0, a_1, a_2 — сталі, $a_0 \neq 0$.

Перший метод. Нехай

$$x(t) \to X(p), f(t) \to F(p)$$

(припускаючи, що $x(t)$ та $f(t)$ — функції-оригінали), і явний вигляд $F(p)$ не знаходимо.

Маємо операторне рівняння:

$$X(p)(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) = F(p).$$

Тоді,

$$X(p) = \frac{1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} F(p) = K(p)F(p),$$

де $K(p) = \dfrac{1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}$.

Розв'язок $x(t)$ шукаємо як згортку:

$$x(t) = k(t) * f(t) = \int_0^t k(\tau) f(t - \tau) d\tau = \int_0^t k(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

де $K(p) \leftarrow k(t)$.

Знаходячи за зображенням $X(p)$ оригінал $x(t)$, одержуємо функцію $x(t)$ — розв'язок задачі Коші.

Другий метод. Якщо відомий розв'язок $x_1(t)$ задачі Коші:

$$a_0x'' + a_1x' + a_2x = 1, x_1(0) = x_1'(0) = 0,$$

то розв'язок $x(t)$ задачі Коші

$$a_0x'' + a_1x' + a_2x = f(t), x(0) = x'(0) = 0,$$

можна знайти за Дюамелевою формулою:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau = \int_0^t f'(t-\tau)x_1(\tau)d\tau.$$

3. Розв'язання систем ЛНДР зі сталими коефіцієнтами. Розгляньмо задачу Коші для системи ЛНДР 1-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t), \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t), \end{cases} x(0) = x_0, y(0) = y_0.$$

Припустімо, що $x(t), y(t)$ та $f_1(t), f_2(t)$ є функціями-оригіналами і позначимо:

$$x(t) \to X(p), y(t) \to Y(p),$$
$$f_1(t) \to F_1(p), f_2(t) \to F_2(p).$$

Заданій системі з початковими умовами відповідає система операторних рівнянь:

$$\begin{cases} (p - a_{11})X(p) - a_{12}Y(p) = F_1(p) + x_0, \\ -a_{21}X(p) + (p - a_{22})Y(p) = F_2(p) + y_0. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, приміром, методом Крамера, знаходимо зображення $X(p)$ та $Y(p)$, за якими відновлюємо оригінали $x(t)$ та $y(t)$ розв'язків задачі Коші.

4. Розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра 2-го роду типу згортки. Нехай маємо інтегральне рівняння Вольтерра 2-го роду типу згортки

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt.$$

Нехай

$$\varphi(x) \to \Phi(p), f(x) \to F(p), k(x) \to K(p).$$

Застосовуючи до обох частин інтегрального рівняння перетворення Лапласа і користуючись властивістю зображення згортки, матимемо

$$\Phi(p) = F(p) + K(p)\Phi(p),$$

звідки

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}, K(p) \neq 1.$$

Для зображення $\Phi(p)$ знаходимо оригінал $\varphi(x)$ — розв'язок інтегрального рівняння.

Приклад 17.2. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $x'' + x = \cos t, x(0) = 0, x'(0) = 0;$

2) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}, y(0) = y'(0) = 0;$

3) $y'' + y = f(x)$, де $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ 1, & a < x < b, \\ 0, & \quad x > b, \end{cases} \quad y(0) = 0, y'(0) = 2;$

4) $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x + 2y, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 0.$

Приклад 17.3. Розв'яжіть інтегральне рівняння

$$\varphi(t) = \sin t + 2\int\limits_0^t \cos(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau.$$