так как $f^*(t) \geq 0$ в силу свойства (f_1) теоремы 11.1.

Докажем (E_4). В силу свойств интеграла Римана

$$
(7)\qquad \begin{aligned}
|\mathsf{E}[\xi]| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} t f_\xi(t)\,dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |t| f_\xi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} t f_\xi(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} t f_\xi(t)\,dt \\
&\overset{⑯}{=} \int_{0}^{\infty} t f_\xi(-t)\,dt + \int_{0}^{\infty} t f_\xi(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} t(f_\xi(t) + f_\xi(-t))\,dt.
\end{aligned}
$$

Из леммы 3 вытекает, что правая часть (7) равна $\mathsf{E}[|\xi|]$, что и доказывает (E_4).

Свойство (E_5) мы докажем для общих случайных величин в теореме 2, свойство (E_5^*) (см. также теорему 19.2). $\square$

5. Свойства математического ожидания в общем случае

Все свойства (E_1)–(E_5) справедливы не только для дискретных или абсолютно непрерывных случайных величин, но и в общем случае. Доказательства в общем случае основаны на свойствах интеграла Стильтьеса.

Лемма 4. *Предположим, что* $\mathsf{E}[\xi]$ *существует. Тогда*

$$
(8)\qquad \lim_{x\to-\infty} xF(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} x(1 - F(x)) = 0.
$$

Доказательство. Первое свойство выполнено в силу

$$
0 \leq |x| F_\xi(x) \leq \int_{-\infty}^{x} |t|\,dF_\xi \to 0, \qquad x \to -\infty.
$$

Второе доказывается аналогично.⑰ $\square$

Лемма 5. *Пусть* $\mathsf{E}[\xi]$ *существует. Тогда функция* $\mathsf{P}(\xi = x)$ *интегрируема по Риману, причем*

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{P}(\xi = x)\,dx = 0.
$$

Доказательство. Пусть $a > 0$ — произвольное число. Обе функции $\mathsf{P}(\xi \geq x)$ и $\mathsf{P}(\xi > x)$ монотонны и ограниченны на интервале $[0, a]$ и поэтому интегрируемы на нем в смысле Римана. Следовательно функция

$$
\mathsf{P}(\xi = x) = \mathsf{P}(\xi \geq x) - \mathsf{P}(\xi > x)
$$

также интегрируема на интервале $[0, a]$.

Докажем, что $\int_0^a \mathsf{P}(\xi = x)\,dx = 0$. Действительно, функция распределения F_ξ имеет не более, чем счетное множество точек разрыва. Поэтому в каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ любого разбиения интервала $[0, a]$ найдется точка непрерывности функции F_ξ. В каждой такой точке x функция $\mathsf{P}(\xi = x)$ равна 0. Если выбрать именно такую промежуточную точку в каждом интервале разбиения, то сумма Дарбу для $\mathsf{P}(\xi = x)$ окажется равной 0. Это и означает, что $\int_0^a \mathsf{P}(\xi = x)\,dx = 0$ для любого $a > 0$. Отсюда мы делаем вывод, что $\int_0^\infty \mathsf{P}(\xi = x)\,dx = 0$. Аналогичные рассуждения доказывают, что $\int_{-\infty}^0 \mathsf{P}(\xi = x)\,dx = 0$. $\square$