Лекция 14

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Функция распределения преобразований

Часто приходится рассматривать разнообразные функции от случайных величин. Например, в леммах 13.1 и 13.3 мы рассматривали случайные величины $a\xi$ и $|\xi|$, что соответствует преобразованиям вида $g(\xi)$ для $g(t) = at$ и $g(t) = |t|$.

Пусть ξ — случайная величина, а g — измеримая функция (например, непрерывная или монотонная). Тогда отображение $\eta = g(\xi) : \Omega \to \mathbf{R}^1$ является случайной величиной (Колмогоров–Фомин, гл. V, §4, стр. 283, следствие теоремы 1), которая называется *преобразованием случайной величины* ξ. Во многих случаях функция распределения F_η достаточно просто выражается через g и F_ξ.

1.1. Обратная функция. Пусть g — непрерывная и строго монотонная функция. Обозначим $A = \lim_{t\to-\infty} g(t)$ и $B = \lim_{t\to\infty} g(t)$. Выберем $A < x < B$ и рассмотрим уравнение

$$g(y) = x \quad \text{или} \quad g(y) - x = 0.$$

относительно неизвестного y. Из первой теоремы Больцано–Коши (Фихтенгольц, т. I, глава II, § 5, стр. 168) вытекает, что решение существует и единственно. Рассматривая его в зависимости от x, мы приходим к *обратной функции* $y(x)$, которая также обозначается $g^{-1}(x)$ (чтобы подчеркнуть ее связь с функцией g). Обратные функции подробно рассмотрены в Фихтенгольц, т. I, глава II, § 83, стр. 172–173. Напомним, что

$$g^{-1}(g(x)) = g\left(g^{-1}(x)\right) = x$$

для любых $x \in \mathbf{R}$.

Теорема 1. *Пусть функция g непрерывна и строго монотонна, ξ — случайная величина, $\eta = g(\xi)$. Положим $A = \lim_{t\to-\infty} g(t)$ и $B = \lim_{t\to\infty} g(t)$. Тогда*

если функция g возрастает / *если функция g убывает*

$$(1) \quad F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le A, \\ F_\xi(y), & x \in (A,B), \\ 1, & x \ge B; \end{cases} \qquad F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le B, \\ \mathsf{P}(\xi > y), & x \in (B,A), \\ 1, & x \ge A, \end{cases}$$

где $y = y(x)$ — это решение уравнения $g(y) = x$. Если $A = -\infty$ в случае возрастания функции g или $B = -\infty$ в случае ее убывания, то первые строчки в этих равенствах надо игнорировать. Аналогично, если $B = \infty$ в случае возрастания функции g или $A = \infty$ в случае ее убывания, то третьи строчки в этих равенствах также надо игнорировать.

[0]Printed from the file [TV_L=15.tex] on 28.10.2011

Доказательство для монотонно возрающей функции g. Рассмотрим случай $A > -\infty$, $B < \infty$. ② Имеем $A < g(t) < B$, $t \in \mathbf{R}$. Значит $\{\omega\colon g(\xi) < x\} \overset{③}{=} \varnothing$ при $x \le A$, то есть $F_\eta(x) = 0$ для таких x. Аналогично $\{\omega\colon g(\xi) < x\} \overset{③}{=} \Omega$ при $x \ge B$, то есть $F_\eta(x) = 1$ для таких x. Если же $A < x < B$, то $\eta < x \overset{③}{\Longleftrightarrow} \xi < y$ и поэтому

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}(\eta < x) = \mathsf{P}(g(\xi) < x) = \mathsf{P}\left(\xi < g^{-1}(x)\right) = F_\xi(y).$$

Доказательство для монотонно убывающей функции g. Имеем $B < g(t) < A$, $t \in \mathbf{R}$. Значит $\{\omega\colon g(\xi) < x\} \overset{④}{=} \varnothing$ при $x \le B$, то есть $F_\eta(x) = 0$ для таких x. Аналогично $\{\omega\colon g(\xi) < x\} \overset{④}{=} \Omega$ при $x \ge A$, то есть $F_\eta(x) \overset{?}{=} 1$ для таких x. Если же $B < x < A$, то то $\eta < x \overset{④}{\Longleftrightarrow} \xi > y$ и поэтому $\{\eta < x\} = \{\xi > y\}$. Следовательно

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}(\eta < x) = \mathsf{P}(g(\xi) < x) = \mathsf{P}\left(\xi > g^{-1}(x)\right) = \mathsf{P}(\xi > y). \qquad \square$$

Пример 1. Пусть $g(x) = e^x$. Тогда $A = 0$, $B = \infty$ и $g^{-1}(x) = \ln x$, $x > 0$. Поэтому

$$F_{e^\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ F_\xi(\ln x), & x > 0. \end{cases}$$

Замечание 1. Заметим, что $\mathsf{P}(\xi > y) = 1 - F_\xi(y) - \mathsf{P}(\xi = y)$. Значит, если ξ абсолютно непрерывная случайная величина, то $\mathsf{P}(\xi > y) = 1 - F_\xi(y)$ (свойство (f_6) в теореме 11.2). Поэтому $F_\eta(x) = 1 - F_\xi(y)$ в теореме 1 при $x \in (B, A)$, если g убывающая функция, а $y = g^{-1}(x)$.

2. Плотность преобразований

Теорема 2. *Пусть g строго монотонна и дифференцируема, причем $g'(t) \ne 0$ для любого t. Если ξ является абсолютно непрерывной случайной величиной, то $\eta = g(\xi)$ также является абсолютно непрерывной случайной величиной. Если положить $\lim_{t\to-\infty} g(t) = A$ и $\lim_{t\to\infty} g(t) = B$, то*

если g возрастает   *если g убывает*

$$(2) \qquad f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le A, \\ f_\xi(y)y', & x \in (A, B), \\ 0, & x \ge B; \end{cases} \qquad f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le B, \\ f_\xi(y)\,|y'|, & x \in (B, A), \\ 0, & x \ge A, \end{cases}$$

где $y = y(x)$ — решение уравнения $g(y) = x$, то есть $y = g^{-1}(x)$. Если $A = -\infty$ в случае возрастания функции g или $B = -\infty$ в случае ее убывания, то первые строчки в этих равенствах надо игнорировать. Аналогично, если $B = \infty$ в случае возрастания функции g или $A = \infty$ в случае ее убывания, то третьи строчки в этих равенствах также надо игнорировать.

Замечание 2. На основании теоремы о производной обратной функции (Фихтенгольц, т. I, § 94, стр. 196)

$$(3) \qquad \left(g^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)} \quad \text{или} \quad y' = \frac{1}{g'(y)}.$$

Доказательство. Мы рассмотрим случай $A=-\infty$, $B=\infty$. ⑧ Пусть сначала g монотонно возрастает. Рассмотрим функцию f_η, определенную формулой (2), и докажем, что она является плотностью функции распределения F_η, заданной равенством (1). Из теоремы 1 получаем $F_\eta(x)=0$ для $x\le A$, то есть действительно $F_\eta(x)\overset{⑤}{=}\int_{-\infty}^{x} f_\eta(u)\,du$ для таких x. В частности, $\int_{-\infty}^{A} f_\eta(u)\,du=0$.

Далее, из той же теоремы 1, но при $x\in(A,B)$, имеем

$$(4)\quad F_\eta(x)=F_\xi\left(y\right)=\int_{-\infty}^{y} f_\xi(u)\,du=\left[\begin{smallmatrix}\text{Замена:}\\ u=g^{-1}(v)\end{smallmatrix}\right]\overset{⑥}{=}\int_{A}^{x} f_\xi\left(g^{-1}(v)\right)\left(g^{-1}(v)\right)'\,dv.$$

Поэтому $F_\eta(x)=\int_A^x f_\eta(v)\,dv=\int_{-\infty}^{x} f_\eta(v)\,dv$ и для $x\in(A,B)$. Пусть, наконец, $x\ge B$. Тогда $F_\eta(x)=1$ для таких x согласно теореме 1. С другой стороны, для $x\ge B$

$$(5)\qquad F_\eta(x)=\int_{-\infty}^{x} f_\eta(v)\,dv=\int_{A}^{B} f_\eta(v)\,dv=\left[\begin{smallmatrix}\text{Замена:}\\ v=g(u)\end{smallmatrix}\right]\overset{⑦}{=}\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u)\,du=1,$$

то есть $F_\eta(x)=\int_{-\infty}^{x} f_\eta(v)\,dv$ для $x\ge B$ ⑤, что и доказывает теорему в случае монотонного возрастания g.

Если g монотонно убывает, то рассуждения при $x\le B$ и $x\ge A$ аналогичны случаю возрастающей функции. ⑤ Случай $x\in(B,A)$ вытекает из теоремы 1, замечания 1 и

$$\begin{aligned}F_\eta(x)=1-F_\xi(y)=\mathsf{P}(\xi\ge y)=\int_{y}^{\infty} f_\xi(u)\,du=\left[\begin{smallmatrix}\text{Замена:}\\ u=g^{-1}(v)\end{smallmatrix}\right]\\ =\int_{x}^{B} f_\xi\left(g^{-1}(v)\right)\left(g^{-1}(v)\right)'\,dv=\int_{B}^{x} f_\xi\left(g^{-1}(v)\right)\left|\left(g^{-1}(v)\right)'\right|\,dv\\ =\int_{-\infty}^{x} f_\eta(v)\,dv,\end{aligned}$$

что и доказывает теорему 2 для убывающих g. $\square$

2.1. Линейный сдвиг. Пусть c — некоторая константа, а $g(t)=t-c$. Тогда

$$F_{\xi-c}(x)=F_\xi(x+c).$$

Если случайная величина ξ имеет плотность, то

$$f_{\xi-c}(x)=f_\xi(x+c).$$

2.2. Масштабирование. Пусть c — некоторая константа, а $g(t)=ct$. Тогда

$$F_{c\xi}(x)=\begin{cases}F_\xi(x/c), & c>0;\\ \mathsf{P}(\xi>x/c), & c<0;\\ \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), & c=0.\end{cases}$$

Кроме того, если случайная величина ξ имеет плотность, то

$$f_{c\xi}(x)=f_\xi(x/c)\cdot\begin{cases}\frac{1}{c}, & c>0;\\ \frac{1}{|c|}, & c<0;\end{cases}$$

(ср. с леммой 13.1).

Объединяя §2.1 с §2.2, приходим к такому результату. ⑪

2.3. Линейное преобразование. *Пусть $g(t) = at + b$ и $a \neq 0$. Пусть ξ — случайная величина и F_ξ — ее функция распределения. Положим $\eta \stackrel{\text{def}}{=} g(\xi) = a\xi + b$ и обозначим функцию распределения η через F_η. Если $a > 0$, то*

$$F_\eta(x) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Если же $a < 0$, то

$$F_\eta(x) = 1 - F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) - \mathsf{P}\left(\xi = \frac{x-b}{a}\right).$$

Если дополнительно предположить, что ξ абсолютно непрерывная случайная величина, то

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

3. Более общие случаи

3.1. Существование нулей у производной.

Пример 2. Пусть $g(t) = t^3$. Тогда $g^{-1}(t) = t^{1/3}$ и $F_{\xi^3}(x) = F_\xi\left(x^{1/3}\right)$ согласно теореме 1. С другой стороны, теорема 2 не применима в этом случае, так как производная g' имеет нули: $g'(t) = 3t^2$ и $g'(0) = 0$.

В общем случае формула (2) не применима для тех аргументов x, при которых $g'(g^{-1}(x)) = 0$.

Теорема 3. *Пусть g непрерывная, строго возрастающая функция и $A = -\infty$, $B = \infty$. Предположим, что $g'(t) = 0$ только в одной точке $t = t_0$. Если ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, то $\eta = g(\xi)$ также абсолютно непрерывная случайная величина, причем плотность $f_\eta(x)$ определяется по формуле (2) для всех $x \neq g(t_0)$; в этой точке плотность можно доопределить, положив $f_\eta(g(t_0)) = 0$.*

Доказательство. В силу монотонности функции g плотность f_η не определена формулой (2) только для одного аргумента $x = g(t_0)$. Доопределим f_η в точке $x_0 = g(t_0)$, положив $f_\eta(x_0) = 0$. Покажем, что такая функция f_η является плотностью случайной величины $\eta = g(\xi)$. Используя теорему 1 и формулу (4), получаем для $x < x_0$ и $y = g^{-1}(x)$

$$F_\eta(x) = F_\xi(y) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(x)} f_\xi(u)\,du = \left[\begin{smallmatrix}\text{Замена:}\\ u=g^{-1}(v)\end{smallmatrix}\right] = \int_{-\infty}^{x} f_\eta(v)\,dv.$$

Переходя к пределу при $x \uparrow x_0$ и используя непрерывность слева функции распределения, доказываем это равенство и для $x = x_0$, так как интеграл как функция верхнего предела непрерывен (Натансон, глава IX, § 4, стр. 234, теорема 1). Рассмотрим, наконец, случай $x > x_0$. Делая ту же замену переменных $u = g^{-1}(v)$, имеем

$$F_\eta(x) = \int_{-\infty}^{t_0} f_\xi(u)\,du + \int_{t_0}^{g^{-1}(x)} f_\xi(u)\,du = \int_{-\infty}^{x_0} f_\eta(v)\,dv + \lim_{t \downarrow t_0} \int_{t}^{g^{-1}(x)} f_\xi(u)\,du,$$

$$\int_{t}^{g^{-1}(x)} f_\xi(u)\,du = \int_{g(t)}^{x} f_\eta(v)\,dv \to \int_{x_0}^{x} f_\eta(v)\,dv,$$

откуда вытекает, что $F_\eta(x) = \int_{-\infty}^{x_0} f_\eta(v)\,dv + \int_{x_0}^{x} f_\eta(v)\,dv$, что и заканчивает доказательство. $\square$

Пример 3 (окончание примера 2). Имеем $g^{-1}(t) = t^{1/3}$ и $\left(g^{-1}(t)\right)' = \frac{1}{3t^{2/3}}$. Поэтому

$$f_{\xi^3}(x) = \begin{cases} f_\xi\left(x^{1/3}\right)\cdot\frac{1}{3x^{2/3}}, & x \neq 0,\\ 0, & x = 0.\end{cases}$$

3.2. Кусочно монотонные преобразования.

Пример 4. Пусть $g(t) = t^2$. Ни теорему 1, ни теорему 2 применить непосредственно нельзя для нахождения функции распределения и плотности преобразования, так как g не является монотонной.

Корни уравнения $g(y) = x$. Предположим, что g убывает в строгом смысле в интервале $t \le t_0$ и возрастает в строгом смысле в интервале $t \ge t_0$. Обозначим $x_0 = g(t_0)$. Если $A \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$ и $B \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, то уравнение $g(y) = x$ имеет ровно два корня при $x > x_0$. ⑫ Для доказательства этого свойства необходимо дважды воспользоваться теоремой Больцано–Коши на интервалах $(-\infty, t_0)$ и (t_0, ∞).

Теорема 4. *Пусть g — непрерывная и дифференцируемая функция, причем $g'(t) \neq 0$ для всех t. Предположим, что g убывает в строгом смысле в интервале $t \le t_0$ и возрастает в строгом смысле в интервале $t \ge t_0$. Считаем, что $A = B = \infty$. Положим $x_0 = g(t_0)$. Если ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, то $\eta = g(\xi)$ является абсолютно непрерывной случайной величиной, причем*

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_0,\\ F_\xi(y_2) - F_\xi(y_1), & x > x_0,\end{cases} \tag{6}$$

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_0,\\ f_\xi(y_2)y_2' - f_\xi(y_1)y_1', & x > x_0,\end{cases} \tag{7}$$

где $y_1 < y_2$ два корня уравнения $g(y) = x$.

Доказательство теоремы 4. Понятно, что ⑮

(8)

$$\{\eta < x\} = \begin{cases} \varnothing, & x \le x_0,\\ \{y_1 < \xi < y_2\}, & x > x_0,\end{cases} \qquad F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_0,\\ \mathsf{P}(y_1 < \xi < y_2), & x > x_0.\end{cases}$$

Поскольку ξ абсолютно непрерывная случайная величина, то $\mathsf{P}(\xi = y_1) = 0$ (см. свойство (PF_5) (лекция 10, стр. 72)). Поэтому формула (6) вытекает из (8) и свойства (PF_4) (лекция 10, стр. 72).

Докажем теперь, что если ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, то плотность η определяется формулой (7). Равенство $F_\eta(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\eta(u)\,du$ очевидно для $x \le x_0$. Если $x > x_0$, то

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= \int_{y_1(x)}^{t_0} f_\xi(u)\,du + \int_{t_0}^{y_2(x)} f_\xi(u)\,du = \left[\begin{smallmatrix}\text{Замена:}\\ u=g^{-1}(v)\end{smallmatrix}\right]\\ &= \int_{x}^{x_0} f_\xi(y_1(u))y_1'\,du + \int_{x_0}^{x} f_\xi(y_2(u))y_2'\,du = \int_{x_0}^{x} f_\eta(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} f_\eta(u)\,du. \end{aligned}$$

Отсюда и вытекает равенство (7) для $x > x_0$. $\square$

Замечание 3. Пусть $g'(t) = 0$ только для одного аргумента $t = t_1$, а все остальные условия теоремы 4 выполнены без изменений. Обозначим $x_1 = g(t_1)$. Как и в теореме 3 для монотонных функций, можно доказать, что случайная величина $\eta = g(\xi)$ является абсолютно непрерывной, а ее плотность задается формулой (7) для всех $x \neq x_1$. Если эту функцию доопределить в точке x_1, положив $f_\eta(x_1) = 0$, то такая функция f_η будет плотностью η.

Пример 5 (окончание примера 4). Возвращаясь к примеру 4, отметим, что $g \downarrow$ для $t \leq 0$ и $g \uparrow$ для $t \geq 0$, значит $t_0 = 0$. Далее $g'(t) = 2t$, то есть $t_1 = 0$ является корнем производной. Имеем $y_1(t) = -\sqrt{t}$ и $y_2(t) = \sqrt{t}$ для $t \geq 0$, откуда $y_1'(t) = -\frac{1}{2t^{1/2}}$ и $y_2'(t) = \frac{1}{2t^{1/2}}$. Воспользуемся теоремой 4 и замечанием 3:

$$\text{(9)}\qquad \begin{array}{ccc} & x \leq 0 & x > 0 \\ F_{\xi^2}(x) & 0 & F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x}) \\ f_{\xi^2}(x) & 0 & \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f_\xi(\sqrt{x}) + f_\xi(-\sqrt{x})\right) \end{array}$$

3.3. Второй момент. Используя формулы для функций распределения и плотностей преобразований случайных величин, (1) и (2), можно вычислить их математические ожидания для монотонных g. Усложняя структуру преобразования g и пользуясь более сложными формулами для функций распределения, мы сможем вычислить математическое ожидание преобразования и в общем случае. Мы рассмотрим важный случай квадратичного преобразования. Найдем $\mathsf{E}\left[\xi^2\right]$ для абсолютно непрерывной случайной величины ξ. Положим $g(t) \overset{\text{def}}{=} t^2$. Используя (9) и определение (13.1), имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[g(\xi)\right] = \mathsf{E}\left[\xi^2\right] &= \int_0^\infty x f_{\xi^2}(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \sqrt{x}\left(f_\xi\left(\sqrt{x}\right) + f_\xi\left(-\sqrt{x}\right)\right)\,dx \\ &= \left[\begin{smallmatrix}\text{Замена:}\\ \sqrt{x}=v\end{smallmatrix}\right] = \int_0^\infty v^2\left(f_\xi(v) + f_\xi(-v)\right)\,dv = \int_{-\infty}^\infty v^2 f_\xi(v)\,dv \\ &= \int_{-\infty}^\infty g(v) f_\xi(v)\,dv.\end{aligned}$$

Пример 6. Пусть ξ абсолютно непрерывная случайная величина, а c — некоторая константа. Найдем плотность случайной величины $\eta = g(\xi)$ для $g(t) = (t-c)^2$. Согласно §2.1 имеем $f_{\xi-c}(x) = f_\xi(x+c)$. Поэтому из (9) вытекает, что $f_{(\xi-c)^2}(x) = 0$ для $x \leq 0$, но

$$f_{(\xi-c)^2}(x) = \frac{f_{\xi-c}(\sqrt{x}\,) + f_{\xi-c}(-\sqrt{x}\,)}{2\sqrt{x}} = \frac{f_\xi(\sqrt{x}+c) + f_\xi(-\sqrt{x}+c)}{2\sqrt{x}}$$

для $x > 0$.

Пример 7 (продолжение примера 6). Найдем математическое ожидание $\mathsf{E}\left[\eta\right]$ для $\eta = (\xi - c)^2$. Согласно формуле (13.1)

$$\mathsf{E}\left[\eta\right] = \int_{-\infty}^\infty x f_\eta(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{2}\left(f_\xi\left(\sqrt{x}+c\right) + f_\xi\left(-\sqrt{x}+c\right)\right)\,dx \equiv I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \left[\begin{smallmatrix}\text{Замена:}\\ \sqrt{x}=v\end{smallmatrix}\right] = \int_0^\infty \frac{v}{2} f(v+c)\,2v dv = \int_0^\infty v^2 f(v+c)\,dv,$$

$$I_2 = \left[\begin{smallmatrix}\text{Замена:}\\ -\sqrt{x}=v\end{smallmatrix}\right] = \int_0^{-\infty} \frac{-v}{2} f_\xi(v+c)\,2v dv = \int_{-\infty}^0 v^2 f_\xi(v+c)\,dv.$$

Поэтому

$$\mathsf{E}\left[(\xi-c)^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}v^2 f_\xi(v+c)\,dv=\begin{bmatrix}\text{Замена:}\\ v+c=u\end{bmatrix}=\int_{-\infty}^{\infty}(u-c)^2 f_\xi(u)\,du. \tag{10}$$

Пример 8. Рассмотрим частный случай $c=\mathsf{E}[\xi]$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[(\xi-c)^2\right]&=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f_\xi(x)\,dx-2c\int_{-\infty}^{\infty}x f_\xi(x)\,dx+c^2\int_{-\infty}^{\infty}f_\xi(x)\,dx\\&=\mathsf{E}\left[\xi^2\right]-\left(\mathsf{E}[\xi]\right)^2.\end{aligned}$$

4. Математическое ожидание преобразований случайных величин

Зная функцию распределения случайной величины, математическое ожидание ее преобразования можно вычислить и в общем случае.

Теорема 5. *Пусть ξ — случайная величина, F — ее функция распределения. Пусть функция g либо непрерывна, либо имеет конечное число разрывов первого рода. Предположим, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,dF<\infty$$

(интеграл понимается в смысле Стильтьеса). Тогда преобразование $g(\xi)$ имеет математическое ожидание $\mathsf{E}[g(\xi)]$, причем

$$\mathsf{E}[g(\xi)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,dF \tag{11}$$

(*интеграл понимается в смысле Стильтьеса*).

Доказательство. Докажем эту теорему только для двух частных (но важных) случаев.

Случай 1. Пусть ξ — дискретная случайная величина с конечным математическим ожиданием и $\eta=g(\xi)$. Если $\xi\sim\begin{pmatrix}c_1 & \dots & c_m\\ p_1 & \dots & p_m\end{pmatrix}$, то $\eta\sim\begin{pmatrix}g(c_1) & \dots & g(c_m)\\ p_1 & \dots & p_m\end{pmatrix}$. Согласно определению математического ожидания (см. формулу (12.1))

$$\mathsf{E}[g(\xi)]=\sum_{j=1}^{m}g(c_j)p_j. \tag{12}$$

Если $m=\infty$, то для существования $\mathsf{E}[g(\xi)]$ необходимо требовать, чтобы ряд в правой части (12) сходился абсолютно. Как мы видели в разделе 12.5, сумма в правой части (12) равна интегралу Стильтьеса из правой части (11). Это и доказывает теорему для дискретных случайных величин.

Случай 2. Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина с непрерывной плотностью f, а g — строго монотонная и дифференцируемая функция, причем $g'(t) \neq 0$ во всех точках t. В силу теоремы 2 случайная величина $\eta = g(\xi)$ также абсолютно непрерывна, а ее плотность задается формулой (2). Согласно определению 13.1

$$\mathsf{E}[\eta] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\eta(x)\,dx = \int_a^b x f_\xi\left(g^{-1}(x)\right)\left|\left(g^{-1}(x)\right)'\right|\,dx,$$

где $a = \min\{A, B\}$, $b = \max\{A, B\}$. Делая в интеграле, стоящем в правой части, замену переменной $u = g^{-1}(x)$, приводим его к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\xi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x).$$

□

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Вопрос 1. Пусть функция g строго монотонна и непрерывна. Почему уравнение $g(y) = x$ имеет единственное решение для $x \in (A, B)$, причем g^{-1} возрастающая, если g возрастающая; и g^{-1} убывающая, если g убывающая.

Вопрос 2. Какие изменения необходимы в доказательстве теоремы 1, если $A - \infty$ или $B = \infty$?

Вопрос 3. Почему верны равенства

1) $\{\omega\colon g(\xi) < x\} = \varnothing$ при $x \le A$,
2) $\{\omega\colon g(\xi) < x\} = \Omega$ при $x \ge B$,
3) $\eta < x \Longleftrightarrow \xi < y$ при $A < x < B$,

которые мы использовали в доказательстве теоремы 1 в случае возрастающей функции g?

Вопрос 4. Почему верны равенства

1) $\{\omega\colon g(\xi) < x\} = \varnothing$ при $x \le B$,
2) $\{\omega\colon g(\xi) < x\} = \Omega$ при $x \ge A$,
3) $\eta < x \Longleftrightarrow \xi > y$ при $B < x < A$,

которые мы использовали в доказательстве теоремы 1 в случае убывающей функции g?

Вопрос 5. Почему в теореме 2 равенство $F_\eta(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\eta(t)\,dt$ выполнено для $x \le A$ и $x > B$ в случае возрастающей функции g, а также при $x \le B$ и $x > A$ в случае убывающей функции g?

Вопрос 6. Объяснить равенство $\int_{-\infty}^{y} f_\xi(u)\,du = \int_A^x f_\xi\left(g^{-1}(v)\right)\left(g^{-1}(v)\right)'\,dv$ (порядки интегрирования) в (4), полученное заменой $u = g^{-1}(v)$.

Вопрос 7. Объяснить равенство $\int_A^B f_\eta(v)\,dv = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u)\,du = 1$ (порядки интегрирования) в (5), полученное заменой $v = g(u)$.

Вопрос 8. Какие изменения необходимы в доказательстве теоремы 2 для случаев $A = -\infty$ и $B = \infty$?

Вопрос 9. Почему в условиях теоремы 4 уравнение $g(y) = x$ имеет два корня для $x > x_0$; один корень для $x = x_0$; и не имеет корней для $x < x_0$.

Вопрос 10. Почему в §2.2 не рассматривается случай $c = 0$ для абсолютно непрерывной случайной величины ξ?

Вопрос 11. Как доказывается теорема 2.3?

Вопрос 12. Почему уравнение $g(y) = x$ имеет ровно два корня при $x > x_0$, если $g(t)$ непрерывна и убывает слева от $x_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} g(t_0)$, но возрастает справа от x_0, и $A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$, $B \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$?

Вопрос 13. Объяснить почему функция f_η, определенная равенством (7), является неотрицательной и поэтому действительно может быть плотностью.

Вопрос 14. Почему случайная величина $\eta = g(\xi)$ в замечании 3 является абсолютно непрерывной, а ее плотность задается формулой (7) для всех $x \neq x_1$?

Вопрос 15. Почему выполнены равенства (8)?

УПРАЖНЕНИЯ

Упражнение 1. Пусть g — монотонная и непрерывная функция. Положим

$$A = \lim_{t\to-\infty} g(t) \quad \text{и} \quad B = \lim_{t\to\infty} g(t).$$

Обозначим $y = g^{-1}(x)$. Далее пусть F — функция распределения. Доказать, что

1) $F(y) \to 1$, $y \uparrow B$, если g возрастает;
2) $1 - F(y) \to 0$, $y \downarrow A$, если g убывает.

Упражнение* 2. Доказать теорему 3 для случая, когда $g'(t)$ имеет конечное число корней.

Упражнение* 3. Доказать теорему 4 для функций g, имеющих конечное количество изменений характера монотонности.

Упражнение 4. Пусть ξ — случайная величина Радемахера, то есть

$$\boxed{\begin{array}{c|cc} \xi & -1 & 1 \\ \mathsf{P} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}}$$

Найти (a) $\mathsf{E}\,[\xi^n]$; (b) $\mathsf{E}\left[e^{it\xi}\right]$.

Упражнение 5. Пусть $\xi \in \mathrm{U}\,(0,2)$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta \stackrel{\mathrm{def}}{=} |\xi - 1|$.

Упражнение 6. Пусть случайная величина ξ имеет плотность

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Найти плотность случайной величины ξ^2.

Упражнение 7. Пусть случайная точка ξ имеет равномерное распределение на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Обозначим через длину проекции вектора $\vec{\xi}$ на ось Ox. Найти (a) плотность и (b) математическое ожидание η.

Упражнение 8. Пусть $X \in \mathrm{U}\,(0,1)$. Доказать, что $Y \in \mathrm{Exp}\,(\theta)$, где $Y = -\theta \ln X$. Это свойство используется при моделировании экспоненциальных случайных величин на компьютере.

Упражнение 9. Плотность лог-нормальной случайной величины с параметрами a и σ^2 задается равенством

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln(x)-a)^2/2\sigma^2} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x). \tag{13}$$

Название такой случайной величины объясняется тем, что ее логарифм является нормальной случайной величиной. Доказать это. Иными словами, пусть $X \in \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, $Y = e^X$. Найти плотность случайной величины Y и сравнить ее с (13).

Упражнение 10. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина. Показать, что

$$\mathsf{E}[\xi] + \mathsf{E}\left[\frac{1}{\xi}\right] \geq 2, \qquad \mathsf{E}\left[\max\left\{\xi, \frac{1}{\xi}\right\}\right] \geq 1.$$

Упражнение 11 (*неравенство Гельдера*). Пусть $p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Доказать, что

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}, \qquad x, y \geq 0.$$

Вывести отсюда, что

$$\mathsf{E}[|\xi\eta|] \leq \left(\mathsf{E}[|\xi|^p]\right)^{1/p} \cdot \left(\mathsf{E}[|\eta|^q]\right)^{1/q} \tag{14}$$

для случайных величин ξ и η, для которых $\mathsf{E}[|\xi|^p] < \infty$ и $\mathsf{E}[|\eta|^q] < \infty$.

Упражнение 12. Пусть ξ — случайная величина, причем $\mathsf{E}[\xi^2] = 1$, $\mathsf{E}[\xi^4] < \infty$. Доказать, что

$$\mathsf{E}[|\xi|] \geq \frac{1}{\sqrt{\mathsf{E}[\xi]^4}}.$$

Указание. Записать $\xi^2 = |\xi|^r \cdot |\xi|^{2-r}$ для подходящего $r = \frac{2}{3}$, воспользоваться неравенством Гельдера с $p = \frac{3}{2}$, $q = 3$.

О т в е т ы

5. $\eta \in \mathrm{U}(0,1)$.

6. $f_{\xi^2}(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x)\sqrt{x}} \cdot \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$.

7. (a) $f_\eta(x) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $0 < x < 1$; (b) $\mathsf{E}\,[\eta] = \dfrac{2}{\pi}$.