Зміст

1. Вступ.. 4

2. Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку. 6

3. Лінійні рівняння з частинними похідними другого порядку. 7

4. Метод характеристик розв'язування крайових задач для рівнянь математичної фізики. 15

5. Задача Штурма - Ліувілля. 16

6. Метод Фур'є (відокремлення змінних, власних функцій). 17

7. Метод інтегральних перетворень розв'язання рівнянь математичної фізики. 25

8. Метод Функції Гріна. 29

9. Інтегральні рівняння. 31

10. Деякі спеціальні функції та їх основні властивості. 38

Предметний покажчик. 55

Список рекомендованої літератури 57

1. Вступ.

В багатьох випадках дослідження природних явищ або штучних систем використовується їх описання за допомогою функцій двох або більше змінних [1]. Ці функції виявляються розв'язками диференціальних рівнянь з частинними похідними. Аналогічно до звичайних диференціальних рівнянь, порядком рівняння з частинними похідними називається найвищий порядок похідної, який входить до рівняння. Кількістю змінних рівняння є кількість незалежних аргументів невідомої функції. Рівняння називають лінійним, якщо воно має вигляд:

$$F\left(x_1,...,x_n,u\left(x_1,...,x_n\right),\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1}...\partial x_n^{i_n}} \right)=0,$$

а функція $F(\cdot)$ – лінійна відносно невідомої функції u та всіх її частинних похідних. Найчастіше, при моделюванні явищ, пов'язаних з динамікою рідин та газів, статикою та динамікою деформування пружних тіл, електростатикою, електродинамікою, тепловими та дифузійними процесами, оптикою, квантовою механікою, загальною теорією відносності, використовуються диференціальні рівняння з частинними похідними першого або другого порядку, а також системи таких рівнянь.

Таким чином, вказані об'єкти виявляються дуже важливими при вивченні навчальних курсів ”Акустика”, ”Механіка суцільних середовищ”, ”Теорія електромагнітного поля”, ”Квантова механіка” та аналогічних до них. В той же час, нині діюча програма курсу вищої математики (математичного аналізу) не виділяє для вивчення методів математичної фізики вагомого об'єму учбових годин. До того ж, ця тема вивчається в кінці семестру, що теж впливає на рівень її засвоєння студентами. Дані методичні вказівки призначені для поглибленого (порівняно з нормативним курсом математики) ознайомлення студентів з поняттями та методами математичної фізики, що викликано потребами професійно-орієнтованих та фахових дисциплін.

2. Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку.

У загальному випадку таке рівняння має вигляд:

$$f\left(x_1,...,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0.$$

Лінійне однорідне диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку записується у вигляді:

$$f_1(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+f_2(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2}+...+f_n(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0,$$

причому функції $f_1(\cdot),...,f_n(\cdot)$ – неперервні і диференційовні в області, в якій визначають розв'язок рівняння, розв'язок є функцією $u(x_1,...,x_n)$, яка обертає рівняння на тотожність (знову ж таки, у заданій області) [1]. Для знаходження такого розв'язку записують систему диференціальних рівнянь (звичайних):

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,...,x_n)}=\frac{dx_2}{f_2(x_1,...,x_n)}=...=\frac{dx_n}{f_n(x_1,...,x_n)}.$$

Відомо, що довільний інтеграл вказаної системи, тобто функція, визначена рівністю $\varphi(x_1,...,x_n)=C$, задовольняє вихідному рівнянню, а загальний розв'язок рівняння є довільна диференційовна функція всіх перших інтегралів системи:

$$u=\Phi\left(\varphi_1(\cdot),...,\varphi_{n-1}(\cdot)\right).$$

Задача Коші [1, 2, 3] для таких рівнянь полягає у знаходженні такого розв'язку, який задовольняє умові:

$$u(x_1,...,x_n)\Big|_{x=x_k^o}=g(x_1,...,x_{k-1},x_{k+1},...,x_n),$$

де x_k^o – задане число, $g(x_1,...,x_{k-1},x_{k+1},...,x_n)$ – задана функція.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

В цьому випадку система має вигляд $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$, її інтеграл $x^2 + y^2 = C$, отже, $u = g\left(x^2 + y^2\right)$, де g – довільна диференційовна функція.

3. Лінійні рівняння з частинними похідними другого порядку.

Означення. Лінійним рівнянням з частинними похідними другого порядку називається рівняння [1, 4, 5]

$$a_{11}(x,y)u''_{xx} + 2a_{12}(x,y)u''_{xy} + a_{22}(x,y)u''_{yy} +$$
$$+a(x,y)u'_x + b(x,y)u'_y + c(x,y)u = f(x,y) \qquad (1)$$

Зауваження 1. Такі рівняння тісно пов'язані з найпоширенішими фізичними моделями і тому часто називаються рівняннями математичної фізики [1,6].

Зауваження 2. Якщо $u = u(x,y)$, і x, y мають зміст координат на площині, то таке рівняння називають стаціонарним, якщо ж $u = u(x,t)$, де x – координата, а t – час, то рівняння нестаціонарне (динамічне).

Означення. Рівняння (1) в точці $M_0(x_0, y_0)$ називається [1, 3, 5]

еліптичним, якщо $a_{12}^2(x_0,y_0) - a_{11}(x_0,y_0)\cdot a_{22}(x_0,y_0) < 0$;

гіперболічним, якщо $a_{12}^2(x_0,y_0) - a_{11}(x_0,y_0)\cdot a_{22}(x_0,y_0) > 0$;

параболічним, якщо $a_{12}^2(x_0,y_0) - a_{11}(x_0,y_0)\cdot a_{22}(x_0,y_0) = 0$.

Зауваження 3. Методи розв'язування рівнянь еліптичного, гіперболічного та параболічного типів у великій мірі різняться, тому надалі вважатимемо, що рівняння, для якого треба знайти розв'язок в певній області, має в кожній точці цієї області один і той самий тип.

Зауваження 4. Частіше за все, еліптичні рівняння є стаціонарними, гіперболічні та параболічні – нестаціонарними.

Означення. Рівняння

$$a_{11}(x,y)dy^2 - 2a_{12}(x,y)dydx + a_{22}(x,y)dx^2 = 0 \qquad (2)$$

називається рівнянням характеристик для рівняння (1), а його інтегральні криві $\varphi(x,y) = C$ – характеристиками цього рівняння.

Рівняння (2) еквівалентне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{ll} a_{11}(x,y)dy - \left(a_{12}(x,y) + \sqrt{a_{12}^2(x,y) - a_{11}(x,y)\cdot a_{22}(x,y)}\right)dx = 0 & (3) \\ a_{11}(x,y)dy - \left(a_{12}(x,y) - \sqrt{a_{12}^2(x,y) - a_{11}(x,y)\cdot a_{22}(x,y)}\right)dx = 0 & (4) \end{array}\right.$$

Для еліптичних рівнянь загальні інтеграли (3) та (4) є комплексно спряжені, загальний інтеграл (2) має вигляд

$$\varphi(x,y) + i\psi(x,y) = C.$$

За допомогою підстановки $\xi = \varphi(x,y), \eta = \psi(x,y)$ це рівняння зводиться до канонічного вигляду еліптичного рівняння:

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + \alpha_1(\xi,\eta)u'_\xi + \beta_1(\xi,\eta)u'_\eta + \gamma_1(\xi,\eta)u = f_1(\xi,\eta) \qquad (5)$$

Для гіперболічних рівнянь загальні інтеграли (3) та (4) $\varphi(x,y) = C_1$ та $\psi(x,y) = C_2$ дійсні та різні. В цьому випадку заміна $\xi = \varphi(x,y), \eta = \psi(x,y)$ зводить рівняння (2) до канонічного вигляду гіперболічного рівняння

$$u''_{\xi\xi} + \alpha_2(\xi,\eta)u'_\xi + \beta_2(\xi,\eta)u'_\eta + \gamma_2(\xi,\eta)u = f_2(\xi,\eta) \qquad (6)$$

Зауваження 5. Канонічним виглядом гіперболічних рівнянь часто вважають також наступну форму їх запису:

$$u''_{\xi\xi} - u''_{\eta\eta} + \alpha_2^*(\xi,\eta)u'_\xi + \beta_2^*(\xi,\eta)u'_\eta + \gamma_2^*(\xi,\eta)u = f_2^*(\xi,\eta) \qquad (6^*)$$

Для параболічних рівнянь (3) та (4) співпадають, їх спільний загальний інтеграл є $\varphi(x,y) = C_1$, здійснюється заміна

$\xi=\varphi(x,y),\eta=\psi(x,y)$, де $\psi(x,y)$ – довільна функція, що є двічі неперервно диференційовною та не пропорційна $\varphi(x,y)$ (перевіряється за допомогою відповідного якобіану). В такому випадку отримуємо канонічний вигляд параболічного рівняння.

$$u''_{\eta\eta}+\alpha_3(\xi,\eta)u'_{\xi}+\beta_3(\xi,\eta)u'_{\eta}+\gamma_3(\xi,\eta)u=f_3(\xi,\eta).$$

Зауваження 6. При розв'язуванні рівнянь математичної фізики, як правило, першим кроком є зведення їх до канонічного вигляду. Надалі розглядатимемо рівняння вже записані у канонічному вигляді.

Приклад. Нехай маємо рівняння $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+u_x-u_y=0$.

Його рівняння характеристик має вигляд: $dy^2+2dxdy+dx^2=0$, тобто $(dx+dy)^2=0$, рівняння параболічного типу, звідси $dx+dy=0$, $x+y=C$.

В якості функції $\psi(x,y)$ можемо вибрати, наприклад, $\psi=y$:

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial(y+x)}{\partial x} & \dfrac{\partial(y+x)}{\partial y}\\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Після підстановки $\xi=x+y,\eta=y$ рівняння набуває вигляду

$$u''_{\eta\eta}-u'_{\eta}=0.$$

Характеристичне рівняння для такого лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами другого порядку є $\lambda^2-\lambda=0$, звідки $\lambda_1=0,\lambda_2=1$, $u=C_1e^{\eta}+C_2$.

Враховуючи, що "константи" C_1 та C_2 незалежні від η, але не від ξ, отримуємо, що $u(\xi,\eta)=C_1(\xi)e^{\eta}+C_2(\xi)$, відповідно:

$u(x,y)=C_1(x-y)e^{y}+C_2(x-y)$, де $C_1(\cdot),C_2(\cdot)$ – довільні двічі неперервно диференційовні функції своїх аргументів.

Найпоширеніші основні рівняння математичної фізики [1, 2, 3, 5, 6]:

Рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ називається <u>двовимірним рівнянням Лапласа</u>, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\left(x,y\right)$ – <u>двовимірним рівнянням Пуассона</u>.

Відповідно, рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ – <u>тривимірне рівняння Лапласа</u>, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f\left(x,y,z\right)$ – <u>тривимірне рівняння Пуассона</u>. Ці рівняння – еліптичного типу. Вони виникають при дослідженні стаціонарних (незалежних від часу) фізичних об’єктів – стаціонарних теплових, електричних, магнітних полів, потенціального руху частинок рідини.

<u>Хвильовими рівняннями</u> [5] (відповідно – одновимірним, двовимірним та тривимірним) називаються рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f\left(x,t\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f\left(x,y,t\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f\left(x,y,z,t\right).$$

Ці рівняння гіперболічного типу. Вони пов’язані з коливальними процесами електромагнітного та механічного (одновимірне – рівняння коливань струни, двовимірне – рівняння коливань стрижня або мембрани, тривимірне – коливань просторового резонатора ,в тому числі певного об’єму рідини або газу).

Якщо права частина таких рівнянь тотожно нульова, то рівняння називають однорідними, а відповідні коливання – вільними.

До рівнянь гіперболічного типу належать також одно-, дво- та тривимірні телеграфні рівняння [5]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} + cu = f\left(x,t\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} + cu = f\left(x,y,t\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} + cu = f\left(x,y,z,t\right).$$

Це рівняння параболічного типу, вони пов’язані з явищами дифузії, теплопровідності, поширенням електромагнітних полів у провідних середовищах, рухом в’язкої рідини тощо.

Розглянемо тепер деякі крайові задачі для рівнянь математичної фізики [1, 3, 5, 7].

Зазначимо, що для рівнянь в частинних похідних задачі знаходження загальних розв’язків розглядаються рідше, ніж для звичайних диференціальних рівнянь. Це пов’язано, серед іншого, з тим, що відповідні множини функцій виявляються дуже широкими – замість довільних сталих – довільні функції.

Розглянемо задачу знаходження частинного розв’язку для рівнянь гіперболічного типу. Оскільки такі рівняння зазвичай є нестаціонарними, то для них традиційно ставиться задача Коші. Наприклад, якщо маємо рівняння малих поперечних коливань струни (надалі – рівняння коливань струни) $u''_{xx} = \frac{\rho}{T_0}u''_{tt}$, де $u\left(x,t\right)$ – величина відхилення точки струни з абсцисою x (вісь абсцис вибрано так, що струна в положенні рівноваги знаходиться на ній) в момент часу t від положення рівноваги, ρ – маса ділянки струни одиничної довжини, T_0 – натяжіння струни, то початкові умови для такого рівняння мають вигляд $u(t_0,x)=f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(t_0,x)=\varphi(x)$ (задані початкові відхилення та швидкості точок струни).

При вивченні коливань нескінченної струни ($-\infty<x<+\infty$) задання таких умов виявляється достатнім для однозначного визначення функції $u(x,t)$. Якщо ж струна є напівнескінченною (наприклад, $x\in[0;+\infty)$) або обмеженою (наприклад, $x\in[0;l]$), то необхідні додаткові <u>граничні умови</u>, які стосуються кінців струни.

Розрізняють граничні умови в точці, наприклад ,$x=0$, трьох наступних типів [1, 5]:

– гранична умова першого роду – $u(0;t)=\mu(t), t\in[0;+\infty)$;

– гранична умова другого роду – $u'_x(0;t)=\gamma(t), t\in[0;+\infty)$;

– гранична умова третього роду – $au(0;t)+bu'_x(0;t)=\theta(t), t\in[0;+\infty)$.

Зазначимо, що гранична умова I роду означає – відповідний кінець струни має визначений функцією $\mu(t)$ закон руху, гранична умова II роду – до кінця струни прикладено силу, величина якої в часі змінюється відповідно до функції $\gamma(t)$, гранична умова III типу означає пружне кріплення кінця струни.

Якщо струна обмежена ($0\le x\le l$), то комбінації умов різних родів на її кінцях визначають, очевидно, шість можливих типів граничних умов.

Задача про знаходження розв’язку диференціального рівняння, який задовольняє одночасно початковим та граничним умовам, називається <u>крайовою задачею</u> для цього диференціального рівняння [7].

Розглянемо тепер рівняння параболічного типу. Наприклад, рівняння розповсюдження тепла в однорідному ізотропному стрижні є

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, де $u(x,t)$ – температура перерізу стрижня з абсцисою x (вісь абсцис розташована по осі стрижня) в момент часу t, $a^2 = \frac{\kappa}{c \cdot \rho}$ – коефіцієнт температуропровідності, κ – коефіцієнт теплопровідності, c – питома теплоємність, ρ – густина матеріалу стрижня.

Початкова умова в цьому випадку обмежується лише заданням початкової температури стрижня $u(x,0) = \varphi(x)$. Аналогічно попередньому, у випадку нескінченного стрижня, задання початкової умови однозначно визначає функцію $u(x,t)$. Якщо ж стрижень є напівнескінченним ($0 \le x \le \infty$) або обмеженим ($0 \le x \le l$), то на його кінцях задають граничні умови таких же трьох родів, як і для попереднього типу рівнянь, причому умовам першого роду відповідає знаходження кінця стрижня у термостаті ($u(0,t) = \mu(t)$, тобто температура кінця стрижня змінюється за даним законом), умовам другого роду – зміна теплового потоку через відповідний торець стрижня за даним законом, а умовам третього роду – теплообмін за законом Ньютона між торцем стрижня та оточуючим середовищем, яке має температуру $\theta(t)$.

Аналогічно до попереднього, комбінації різних типів граничних умов на різних кінцях стрижня ведуть до різних типів крайових задач. Часто розглядаються також крайові задачі без початкових умов, у яких вважається, що час, який збіг від початку процесу теплообміну достатньо значний, щоб знехтувати початковими умовами [7]. Задачею з нелінійними граничними умовами є, наприклад, задача знаходження такого розподілу тепла, при якому торець стрижня випромінює його у середовище з температурою $\theta(t)$, тобто $\kappa\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\sigma\left(u^4(0,t)-\theta^4(t)\right)$ (закон Стефана-Больцмана).

Для рівнянь еліптичного типу задача пошуку частинного розв'язку рівняння Лапласа та Пуассона в області D (на площині або у просторі), обмеженій лінією або поверхнею Σ може визначатися як

– перша крайова задача (задача Діріхлє), якщо $u(\cdot)\Big|_{\Sigma}=f_1(\cdot)$;

– друга крайова задача (задача Неймана), якщо $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\cdot)\Big|_{\Sigma}=f_2(\cdot)$;

– третя крайова задача, якщо $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\cdot)+\alpha(\cdot)u(\cdot)=f_3(\cdot)$;

де $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\cdot)$ – похідна $u(\cdot)$ по зовнішній нормалі до лінії чи поверхні Σ, $\alpha(\cdot),f_1(\cdot),f_2(\cdot),f_3(\cdot)$ – задані функції. В цьому випадку крайові задачі можуть бути внутрішніми (якщо функція $u(\cdot)$ визначається всередині лінії або поверхні Σ) або зовнішніми (в протилежному випадку).

Нагадаємо, що найважливішою задачею для звичайних диференціальних рівнянь була задача Коші – задача знаходження частинного розв'язку даного диференціального рівняння, який задовольняє даним початковим умовам. Існування та єдиність такого розв'язку забезпечувалося відповідними теоремами (наприклад, теоремою Пікара).

У випадку ж рівнянь математичної фізики запроваджується поняття коректності. Якщо розв'язок u крайової задачі єдиний у деякому функціональному просторі F_1, існує при будь-яких крайових умовах, визначених функціями простору F_2 і при малій зміні (в сенсі норми F_2)

крайових умов мало змінюється u (в сенсі норми F_1), то така задача називається коректною.

4. Метод характеристик розв'язування крайових задач для рівнянь математичної фізики.

Сутність методу характеристик полягає у спрощенні рівняння при перетворенні до канонічного вигляду за допомогою його характеристик. Таке перетворене рівняння значно простіше зінтегрувати, що дозволяє, наприклад, ефективно розв'язувати задачі Коші для хвильових рівнянь (в цьому випадку метод називається методом Даламбера) [1, 4].

Приклад. Нехай маємо рівняння вільних коливань однорідної струни $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$ $\left(a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}} \right)$, причому $t \ge 0, -\infty < x < +\infty$, початкова форма струни задається співвідношенням $u(x,0) = \varphi(x)$, а початкові швидкості його точок – співвідношенням $u'_t(x,0) = \psi(x)$.

Оскільки характеристики цього рівняння $x \pm at = const$, то заміною $\xi = x - at, \eta = x + at$, воно зводиться до вигляду $u''_{\xi\eta} = 0$.

Звідси $u'_\xi = f_1(\xi), u = f(\xi) + g(\eta)$. Таким чином

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at).$$

При $t = 0$ маємо $\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ -af'(x) + ag'(x) = \psi(x) \end{cases}$, звідки

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz.$$

Така формула для відхилень нескінченної струни називається формулою Даламбера.

5. Задача Штурма - Ліувілля.

Нехай задано диференціальний оператор

$$Lu = \left(p(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x)$$

на відрізку $[a;b]$, причому $p(x) > 0$ і неперервно диференційовна на цьому проміжку, $q(x)$ – неперервна на цьому ж проміжку. Від функції $u(x)$ вимагаємо, щоб вона була

а) двічі неперервно диференційовною на $(a;b)$;

б) неперервно диференційовною на $[a;b]$;

в) справджувала крайові умови $\begin{cases} \left(\alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a)\right)\sqrt{\rho(a)} = 0 \\ \left(\alpha_2 u(b) - \beta_2 u'(b)\right)\sqrt{\rho(b)} = 0 \end{cases}$,

де $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – сталі, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$, $\alpha_1 + \beta_1 > 0, \alpha_2 + \beta_2 > 0$, $\rho(x)$ – додатна, неперервна на $[a;b]$ функція, яка називається <u>ваговою</u>.

<u>Задачею Штурма-Ліувілля</u> [3, 5] називають задачу знаходження таких значень λ (власних значень задачі Штурма-Ліувілля), для яких рівняння

$$Lu = \lambda \rho u$$

має ненульовий розв'язок (<u>власну функцію</u> задачі Штурма-Ліувілля, яка відповідає даному власному значенню).

Для розв'язків задачі Штурма-Ліувілля мають місце наступні властивості:

1. Всі власні значення дійсні, невід'ємні при $q(x) \geq 0$, їх множина зліченна, тобто може бути упорядкована: $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.
2. Кожному власному значенню відповідає одна власна функція.

3. Власні функції, що відповідають різним власним числам, ортогональні на $[a;b]$ з вагою $\rho(x)$, тобто при $i \neq j,\quad \int\limits_a^b u_i(x)u_j(x)\rho(x)dx = 0$,

де $u_i(x)$, $u_j(x)$ – власні функції, які відповідають власним значенням λ_i, λ_j.

4. Справедлива теорема Стеклова: власні функції утворюють базис у просторі двічі неперервно диференційовних на $[a;b]$ функцій $\Phi(x)$, які справджують крайові умови, тобто кожна така функція є сумою рівномірно та абсолютно збіжного ряду Фур'є:

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x),$$

де $c_k = \dfrac{1}{\|u_k\|^2}\int\limits_a^b \Phi(x)u_k(x)\rho(x)dx$, $\|u_k\|^2 = \int\limits_a^b u_k^2(x)\rho(x)dx$.

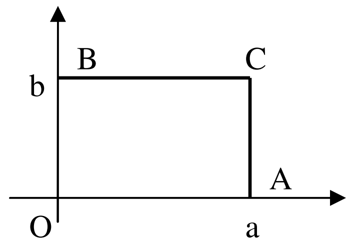
5. Якщо $\int\limits_a^b \Phi^2(x)\rho(x)dx < \infty$, то відповідний ряд Фур'є збігається до $\Phi(x)$ у середньому з вагою $\rho(x)$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \rho(x)\left[\Phi(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x)\right]^2 dx = 0.$$

6. Метод Фур'є (відокремлення змінних, власних функцій).

Суть цього методу полягає у припущенні, про можливість представлення функції багатьох змінних спочатку у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної з наступним представленням у вигляді суми ряду, кожний член якого є описаним вище добутком. Така процедура дає можливість використовувати у випадку однорідних (нульових) крайових умов наведені вище властивості розв'язків задачі Штурма-Ліувілля [1, 5, 6, 7].

<u>Приклад.</u> Знайдемо розподіл потенціалу $u(x,y)$ електростатичного поля всередині прямокутника $OACB: 0 \le x \le a, 0 \le y \le b$, якщо на стороні OB потенціал підтримується рівним u_0, а решта сторін заземлені, електричні заряди всередині прямокутника відсутні.



Маємо в цьому випадку задачу Діріхлє для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0,\ u(0,y) = u_0,$$

$$u(a,y) = 0,\ 0 \le x \le a,$$

$$u(x,0) = 0,\ 0 \le y \le b,$$

$$u(x,b) = 0.$$

Покладемо $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ і підставимо цей вираз в рівняння.

Маємо $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$ (це відношення може бути тільки числом).

Тобто $\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \end{cases}$, $Y(0) = Y(b) = 0$.

Таким чином для функції $Y(y)$ задачу Штурма-Ліувілля, власні числа якої, як легко довести $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2$, власні функції $Y_n(y) = B_n \sin\dfrac{n\pi y}{b}$.

Отже, відповідно, $X_n(x) = C_n e^{\frac{n\pi x}{b}} + D_n e^{-\frac{n\pi x}{b}}$.

Звідси $u_n(x,y) = X_n(x) \cdot Y_n(y)$,

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{A_n}e^{\frac{n\pi x}{b}}+\overline{B_n}e^{-\frac{n\pi x}{b}}\right)\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Враховуючи крайові умови, отримуємо

$$\begin{cases} u(0,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\overline{A_n}+\overline{B_n}\right)\sin\dfrac{n\pi y}{b}=u_0 \\ u(a,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\overline{A_n}e^{\frac{n\pi a}{b}}+\overline{B_n}e^{-\frac{n\pi a}{b}}\right)\sin\dfrac{n\pi y}{b}=0 \end{cases}.$$

Нехай $\overline{A_n}+\overline{B_n}=b_n$, тоді

$$b_n=\frac{2}{b}\int_0^b u_0\sin\frac{n\pi y}{b}=\frac{2u_0}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, & n=2k,\ \ k=1,2,...\\ \dfrac{4u_0}{n\pi}, & n=2k+1,\ \ k=0,1,2,...\end{cases}.$$

Покладемо для парних n $\overline{A_n}=\overline{B_n}=0$, для непарних повинна мати місце рівність $\overline{A_n}e^{\frac{n\pi a}{b}}+\overline{B_n}e^{-\frac{n\pi a}{b}}=0$, звідки $\overline{B_n}=-\overline{A_n}e^{\frac{2n\pi a}{b}}$, тобто

$$\overline{A_n}=-\frac{4u_0e^{-\frac{n\pi a}{b}}}{n\pi\left(e^{\frac{n\pi a}{b}}-e^{-\frac{n\pi a}{b}}\right)},\qquad \overline{B_n}=\frac{4u_0e^{\frac{n\pi a}{b}}}{n\pi\left(e^{\frac{n\pi a}{b}}-e^{-\frac{n\pi a}{b}}\right)}.$$

Таким чином, остаточно

$$u(x,y)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{sh\left[\dfrac{2k+1}{b}\pi(a-x)\right]}{(2k+1)sh\dfrac{(2k+1)\pi a}{b}}\sin\frac{2k+1}{b}\pi y.$$

Приклад. Розв'яжемо неоднорідне рівняння

$$u''_{xx}-\frac{1}{a^2}u''_{tt}=\frac{f(x,t)}{a^2}\quad (0<x<l,t>0)$$

з однорідними крайовими умовами $u(0;t)=u(l;t)=0,\ (t>0)$, та початковими умовами $u(x,t)=\varphi(x),\ u'_t=\psi(x),\ 0\le x\le l$.

Зазначимо, що неоднорідність рівняння не дозволяє приступити при його розв'язанні до представлення $u(x,t)$ у вигляді $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$.

Розвинемо праву частину рівняння та початкові умови в ряди Фур'є:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l},\ f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(y,t)\sin\frac{k\pi y}{l}dy,$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l},\ b_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(y)\sin\frac{k\pi y}{l}dy,$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{k\pi x}{l},\ c_k = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(y)\sin\frac{k\pi y}{l}dy.$$

Відзначимо, що при цьому використовувалися розвинення саме по власних функціях $u_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}$ відповідної задачі Штурма-Ліувілля. Розв'язок початкової задачі також шукатимемо у вигляді суми ряду за тими ж власними функціями: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}$.

Тут важливе те, що у випадку рівномірної збіжності цього ряду, його сума справджує крайові умови незалежно від функцій $T_k(t)$, що дає можливість підібрати ці функції так, щоб справджувалися рівняння та початкові умови.

Припустивши, що ряд допускає двократне почленне диференціювання, отримуємо:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t) - f_k(t)\right)\sin\frac{k\pi x}{l} = 0 \quad при \quad t > 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k(0) - b_k\right)\sin\frac{k\pi x}{l} = 0 \quad при \quad 0 \le x \le l \\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k'(0) - c_k\right)\sin\frac{k\pi x}{l} = 0 \quad при \quad 0 \le x \le l \end{cases}.$$

Таким чином, функції $T_k(t)$ знаходяться як розв'язки задач Коші:

$$\begin{cases} T_k''(t)+\left(\dfrac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t)=f_k(t) \\ T_k(0)=b_k, \quad T_k'(0)=c_k \end{cases}, \; k=1,2,...$$

Застосовуючи, наприклад, метод Лагранжа (варіації довільної сталої), отримуємо:

$$T_k(t)=\frac{1}{ak\pi}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{ak\pi(t-\tau)}{l}d\tau+b_k\cos\frac{ak\pi t}{l}+\frac{lc_k}{ak\pi}\sin\frac{ak\pi t}{l}.$$

Таким чином,

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{ak\pi}\int_0^t\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(y,t)\sin\frac{k\pi y}{l}dy\right)\sin\frac{ak\pi(t-\tau)}{l}d\tau+\right.$$
$$\left.+b_k\cos\frac{ak\pi t}{l}+\frac{lc_k}{ak\pi}\sin\frac{ak\pi t}{l}\right]\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Запровадивши позначення,

$G(x,y,t-\tau)=\dfrac{2}{a\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\sin\dfrac{k\pi y}{l}\sin\dfrac{ak\pi(t-\tau)}{l}$, та внісши знак суми під знак інтеграла, отримуємо:

$$u(x,t)=\int_0^t d\tau\int_0^l G(x,y,t-\tau)f(y,\tau)dy+\sum_{k=1}^{\infty}\left(b_k\cos\frac{ak\pi t}{l}+\frac{lc_k}{ak\pi}\sin\frac{ak\pi t}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Фізичний зміст вказаної задачі полягає в описанні коливання струни із закріпленими кінцями під дією зовнішньої сили, розподіленої з густиною $f(x,t)$. Відповідно, у розв'язку перший доданок описує вимушені коливання під дією такої сили з нульовими початковими умовами, а другий – вільні коливання, спричинені вказаним початковим зміщенням $\varphi(x)$ та початковою швидкістю $\psi(x)$. Таким чином, результуючі коливання є суперпозицією вимушених та вільних.

Приклад. Знайти розподіл температур $f(x,y,t)$ у тонкій прямокутній пластинці, якщо відомий початковий їх розподіл, пластинка вважається вписаною в перший квадрант ($0 \le x \le l,\ 0 \le y \le m$), $u(0,y,t)=0$, $u(l,y,t)=0$ ($0 \le y \le m$), $u(x,0,t)=\varphi_0(x)$, $u(x,m,t)=\varphi_1(x)$ ($0 \le x \le l$).

Такий розподіл описується рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

Вважаючи, що $u(x,y,0)=f(x,y)$, шукатимемо розв'язок у вигляді суми $u(x,y,t)=v(x,y,t)+w(x,y)$, де

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,\quad w(0,y)=w(l,y)=0,\quad w(x,0)=\varphi_0(x),\quad w(x,m)=\varphi_1(x),$$

$v(x,y,t)$ задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \text{ за умов}$$

$$v(0,y,t)=v(l,y,t)=v(x,0,t)=v(x,m,t)=0,\ v(x,y,0)=f(x,y)-w(x,y).$$

Шукаємо $w(x,y)$ аналогічно попередньому :

нехай $w(x,y)=X(x)\cdot T(t)$, тоді $X''+\lambda X=0,\quad X(0)=X(l)=0$

$$Y''-\lambda Y=0,\quad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ X_n=\sin\frac{n\pi x}{l}, Y_n=A_n e^{\frac{n\pi y}{l}}+B_n e^{-\frac{n\pi y}{l}},$$

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{n\pi y}{l}}+B_n e^{-\frac{n\pi y}{l}}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Після врахування крайових умов, остаточно маємо

$$w(x,y)=\frac{2}{l sh\frac{n\pi m}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[sh\frac{n\pi(m-y)}{l}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\right.$$

$$+sh\frac{n\pi y}{l}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\Bigg]\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Функцію $v(x,y,t)$ шукатимемо наступним чином.

Покладемо $v(x,y,t)=Z(x,y)\cdot T(t)$, звідки

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+\lambda Z=0,\quad Z(0,y)=Z(l,y)=0,\ Z(x,0)=Z(x,m)=0.$$

При $Z(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$, $\frac{X''}{X}+\lambda=-\frac{Y''}{Y}=v$, поклавши $\lambda-v=\mu$, маємо $X_n=\sin\frac{n\pi x}{l}$, $Y_k=\sin\frac{k\pi y}{m}$, $\lambda_{n,k}=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{m}\right)^2$,

$Z_{n,k}(x,y)=\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{k\pi y}{m}$, $T_{n,k}(t)=C_{n,k}e^{-\lambda_{n,k}a^2t}$.

Таким чином,

$$v(x,y,t)=\sum_{n,k=1}^{m}C_{n,k}e^{-a^2\pi^2\left(\frac{n^2}{l^2}+\frac{k^2}{m^2}\right)}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{k\pi y}{m},$$

$$\text{де } C_{n,k}=\frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m\left[f(x,y)-w(x,y)\right]\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\frac{k\pi y}{m}dxdy.$$

Приклад. Визначити закон зміни температур точок кулі радіусу R, поверхня якої підтримується при сталій температурі u_0, а початкова температура визначається відстанню до центра кулі .

В цьому випадку закон зміни температури задовольняє тривимірному рівнянню теплопровідності

$\Delta u=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}$, де $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Запровадивши сферичну систему координат (r, φ, θ) з початком координат у центрі кулі та записавши оператор Лапласа для сферичних координат, маємо, $u(x, y, z, t) = u(r, t)$,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$

таким чином, функція $u(r,t)$ задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t},$$

початкова умова $u(r,0) = f(r)$, крайова умова $u(R,t) = u_0$.

Зауважимо також, що, відповідно до фізичного змісту задачі, $u(0,t) < +\infty$.

Покладемо $v(r,t) = r\left(u(r,t) - u_0\right)$, тоді $\dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}$ $(0 \le r < R, t > 0)$,

$v(r,0) = r\left(f(r) - u_0\right)$, $(0 \le r < R)$, $v(0,t) = v(R,t) = 0$.

Розв'язуючи отриману задачу методом Фур'є, отримуємо

$$v(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{R^2}t} \sin\frac{k\pi r}{R}, \text{ де } C_k = \frac{2}{R}\int_0^R \left[f(r) - u_0\right] r \sin\frac{k\pi r}{R}\, dr.$$

Розглянемо наостанок ще один цікавий випадок застосування методу Фур'є.

<u>Приклад.</u> Розглянемо задачу розподілу тепла в нескінченному стрижні

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = \varphi(x),\ x \in (-\infty; +\infty),\ 0 < t < +\infty.$$

Аналогічно до попереднього маємо

$$\begin{cases} T' + a^2\omega^2 T = 0 \\ X'' + \omega^2 X = 0 \end{cases} \Rightarrow u_\omega(x,t) = T_\omega(t) X_\omega(x) = e^{-a^2\omega^2}\left[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right].$$

Відповідно, $u(x,t)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2\omega^2}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$ теж є розв'язком рівняння. З початкової умови випливає

$$\varphi(x)=\int\limits_0^{+\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega,$$

тобто маємо представлення функції $\varphi(x)$ інтегралом Фур'є, звідки

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\cos\omega y dy,\ B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\sin\omega y dy.$$

Звідси $u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\left(\cos\omega x\cos\omega y+\sin\omega x\sin\omega y\right)dy=$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\cos\omega(x-y)dy=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)dy\int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t}\cos\omega(x-y)d\omega.$$

Легко довести, що $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha\omega^2}\cos\beta\omega d\omega=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$, тому остаточно

$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}dy$, це – формула Пуассона.

7. Метод інтегральних перетворень розв'язання рівнянь математичної фізики.

Цей метод полягає у заміні невідомої функції її інтегральним перетворенням ("зображенням"), що дозволяє звести диференціальне рівняння з частинними похідними до звичайного диференціального рівняння відносно відповідних "зображень" [5, 8].

Приклад. Розглянемо задачу розповсюдження тепла в напівнескінченному стрижні, температура кінця якого змінюється за даним законом, а початкова температура – нульова. Якщо $u(x,t)$ – температура перерізу стрижня з абсцисою x в момент часу t, то

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},0\le x<+\infty,t\ge 0,\ u(0,t)=f(t),t>0,\ u(x,0)=0,x>0.$$

Застосуємо до обох частин рівняння $\sin$-перетворення Фур'є:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\alpha x dx=a^2\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\alpha x dx,$$

звідки, поклавши $\overline{u}(\alpha,t)=\int_0^{+\infty}u(x,t)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\alpha x dx$,

маємо $\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+a^2\alpha^2\overline{u}=a^2 f(t)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha$.

Враховуючи, що $\overline{u}\Big|_{t=0}=0$ і розв'язуючи вказане звичайне лінійне диференціальне рівняння, отримуємо

$$\overline{u}(\alpha,t)=a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}a\int_0^t e^{-a^2\alpha^2(t-\tau)}f(\tau)d\tau,$$

звідки $u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\overline{u}(\alpha,t)\sin\alpha x d\alpha=\frac{2a^2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)d\tau\int_0^t ae^{-a^2\alpha^2(t-\tau)}\sin\alpha x d\alpha=$

$$=-\int_0^t\frac{f(\tau)}{t-\tau}\left[e^{-a^2\alpha^2(t-\tau)}\sin\alpha x\Big|_0^{+\infty}-x\int_0^{+\infty}e^{-a^2\alpha^2(t-\tau)}\cos\alpha x d\alpha\right]d\tau=$$

$$=\frac{x}{\pi}\int_0^t\frac{f(\tau)}{t-\tau}\left[\int_0^{+\infty}e^{-a^2\alpha^2(t-\tau)}\cos\alpha x d\alpha\right]d\tau=\frac{x}{2\sqrt{\pi}a}\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau.$$

<u>Приклад</u>. Розглянемо задачу про розповсюдження тепла в стрижні довжиною l, якщо його початкова температура нульова, лівий кінець теплоізольований, а правий – підтримується при сталій температурі A.

В цьому випадку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t},\ 0 \le x \le l, t \ge 0$$

$$u(x,0) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, u(l,t) = A.$$

Нехай $\overline{u}(x,p) = \int\limits_0^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}dt$, тоді

$$\frac{d^2\overline{u}}{dx^2} - a^2 p\overline{u} = 0, \quad \left.\frac{d\overline{u}}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad \overline{u}(l,p) = \frac{A}{p}.$$

Оскільки загальний розв'язок отриманого рівняння має вигляд

$$\overline{u} = C_1 cha\sqrt{p}x + C_2 sha\sqrt{p}x, \text{ то } \overline{u}(x,p) = \frac{Acha\sqrt{p}x}{pcha\sqrt{p}l}.$$

Визначимо оригінал цього зображення за допомогою лишків. Маємо нулі знаменника $p_0 = 0$ – простий полюс, нехай $cha\sqrt{p}l = \frac{e^{a\sqrt{p}l} + e^{-a\sqrt{p}l}}{2} = \frac{e^{2a\sqrt{p}l} + 1}{2e^{a\sqrt{p}l}} = 0$, звідки $2a\sqrt{p}l = Ln(-1) = i\pi + 2\pi ki$, остаточно $p = -\frac{\pi^2}{a^2 l^2}\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2$.

Ці особливі точки також є простими полюсами. Обчислюємо лишки:

$$\operatorname*{Res}_{p=0}\left(\overline{u}(x,p)e^{pt}\right) = A$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-\frac{\pi^2}{a^2l^2}\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2}\left(\overline{u}(x,p)e^{pt}\right) = \lim_{p \to -\frac{\pi^2}{a^2l^2}\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2} \frac{Acha\sqrt{p}x}{cha\sqrt{p}l + psha\sqrt{p}l \cdot \frac{al}{2\sqrt{p}}} =$$

$$= -\frac{A\cos\frac{\pi}{l}\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{\frac{\pi}{4}(2k+1)\cos kx} e^{-\frac{\pi^2}{a^2l^2}\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 t}.$$

Остаточно, $u(x,t) = A\left(1 - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}e^{-\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2\frac{\pi^2 t}{a^2 l^2}}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right)$.

Перетворення Ганкеля [5, 8] функції $f(\rho)$ $(0 \le \rho < \infty)$ обчислюється за формулою $F(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty}\beta J_n(\lambda\rho) f(\rho)\, d\rho$ $(0 \le \lambda < +\infty)$, $J_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ – функція Бесселя n-го порядку. За умови виконання умов Діріхлє на довільному проміжку $0 < \rho < R$ таке перетворення існує і справедлива формула обернення

$$f(\rho) = \int\limits_0^{+\infty}\lambda J_n(\lambda\rho) F(\lambda)\, d\lambda.$$

Розглянемо, наприклад, граничну задачу для рівняння Лапласа вісесиметричного характеру (крайові умови не залежать від φ) – задачу Діріхлє у півпросторі $0 \le \rho < \infty$, $0 \le z < \infty$:

$$\Delta u = 0, \ \ u(\rho, 0) = f(\rho) \ \ (0 \le \rho < \infty).$$

Переходячи в рівнянні Лапласа до циліндричних координат, отримуємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Поклавши $u(\rho, z) = R(\rho) \cdot Z(z)$, маємо

$$\begin{cases} Z'' - \lambda^2 Z = 0 \\ R'' + \frac{1}{\rho}R' + \lambda^2 R = 0 \end{cases}, \text{ звідки } u_\lambda(\rho, z) = A(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda\rho).$$

Шукаючи розв'язок рівняння $\Delta u = 0$ у вигляді, який би дозволив задовольнити граничну умову, запишемо

$$u(\rho, z) = \int\limits_0^{+\infty}\lambda A(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda\rho)\, d\lambda.$$

Звідси, при $z=0$

$\int\limits_0^{+\infty}\lambda A(\lambda)e^{-\lambda z}J_0(\lambda\rho)d\lambda=f(\rho)$, тобто $A(\lambda)=\int\limits_0^{+\infty}\rho J_0(\lambda\rho)f(\rho)d\rho$, є перетворенням Ганкеля заданої функції $f(\rho)$.

8. Метод Функції Гріна.

Цей метод використовується при розв'язуванні крайових задач для рівнянь еліптичного типу [4, 6]. Він ґрунтується на формулі

$$\oiint\limits_S\left(\overline{A}\cdot\overline{n}\right)ds=\iiint\limits_V div\overline{A}dxdydz,$$

де $\overline{A}=\overline{A}(x,y,z)$ – векторне поле, V – область у тривимірному просторі, S – границя цієї області, $\overline{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до S. Якщо $\overline{A}=ugradv-vgradu$, де $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ – двічі неперервно диференційовні функції, то отримуємо формулу Гріна:

$$\oiint\limits_S\left(u\frac{\partial v}{\partial\overline{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\overline{n}}\right)ds=\iiint\limits_V\left(u\Delta v-v\Delta u\right)dxdydz,$$

де $\dfrac{\partial u}{\partial\overline{n}}$, $\dfrac{\partial v}{\partial\overline{n}}$ – похідні відповідних функцій за напрямом вектора нормалі.

Будемо називати $\delta(P,P_0)=\dfrac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$, де $P(x,y,z)$, $P_0(x_0,y_0,z_0)$ – точки тривимірного простору, функцією одиничного джерела в точці P_0 для тривимірного рівняння Лапласа.

Відповідно, функцією одиничного джерела для двовимірного рівняння Лапласа називають функцію

$$\delta(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}, \text{ де}$$

$M(x, y), M_0(x_0, y_0)$ – точки на площині.

Важливо те, що функція $\delta(P, P_0)$ є потенціалом електростатичного поля, утвореного зарядом величини $\frac{1}{4\pi}$, який знаходиться в точці P_0, а $\delta(M, M_0)$ – потенціалом плоского поля, утвореного розміщеними на прямій, перпендикулярній до площини і такій, що проходить через точку M_0, з густиною $\frac{1}{4\pi}$, зарядами.

Покладемо у формулі Гріна $V = \delta(P, P_0) + g(P, P_0)$, де $g(P, P_0)$ – двічі неперервно диференційовна функція і справджує всі умови однієї з крайових задач теорії потенціала в області V з нульовими умовами. В цьому випадку $V(x, y, z)$ називається функцією Гріна (функцією виливу) відповідної крайової задачі для області V і позначається $G(P, P_0)$. побудова функції Гріна здійснюється за певними правилами і дозволяє записати розв’язок крайової задачі в явному вигляді.

Нехай, наприклад, маємо круг на площині, радіус якого R, а центр співпадає з початком координат. Будемо називати точки $P_0(x_0, y_0)$ та P_0^* спряженими відносно кола якщо вони лежать на промені, який виходить з початку координат і добуток їх відстаней від центра дорівнює квадрату радіуса. Значення функції Гріна в точці $M(x, y)$ являє собою суперпозицію потенціалів, утворених джерелами інтенсивності 1 в точці P_0 та (-1) в точці P_0^*:

$$G(M, P_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|MP_0|} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{|OP_0| \cdot |MP_0^*|} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|OP_0| \cdot |MP_0^*|}{R|MP_0|}.$$

Якщо на межі області (колі) C задано крайову умову $u\Big|_C = \varphi(x, y)$ для рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, то

$$u(x_0, y_0) = \oint_C \varphi(x, y) \frac{\partial G(M, P_0)}{\overline{n}} dl .$$

У випадку рівняння Пуассона $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ матимемо

$$u(x_0, y_0) = \oint_C \varphi(x, y) \frac{\partial G(M, P_0)}{\overline{n}} dl + \iint_D G(M, P_0) f(x, y) dxdy ,$$

де D – круг.

9. Інтегральні рівняння.

Рівняння вигляду $\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \varphi(t) K(x,t) dt$, де $\varphi(x)$ – невідома функція, $f(x)$, $K(x,t)$ (ядро) – задані функції, визначені $[a;b]$, λ – числовий параметр називається <u>лінійним інтегральним рівнянням Вольтерра II роду</u> [9, 10]. Якщо $f(x) \equiv 0$, $x \in [a;b]$, то таке лінійне інтегральне рівняння Вольтерра II роду називається однорідним.

<u>Інтегральним рівнянням Вольтерра I роду</u> називається рівняння вигляду [10]

$$\int_0^x \varphi(t) K(x,t) dt = f(x).$$

<u>Інтегральним рівнянням Фредгольма</u> II роду називається рівняння

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \varphi(t) K(x,t) dt$$

Відповідно, якщо $f(x)\equiv 0$, $x\in[a;b]$, то таке рівняння називається однорідним. Рівнянням Фредгольма І роду називається рівняння вигляду

$$\int_a^b \varphi(t)K(x,t)\,dt = f(x).$$

Ядра вказаних рівнянь називаються виродженими, якщо

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\cdot b_k(t).$$

Ядра називаються симетричними, якщо $K(x,t)=K(t,x)$.

Розв'язком інтегрального рівняння називають функцію $\varphi(x)$, яка перетворює його на тотожність.

Однорідні рівняння завжди мають тривіальний (нульовий) розв'язок.

Значення λ, при яких неоднорідні рівняння мають нетривіальні (ненульові) розв'язки називають власними (характеристичними) числами цього рівняння або відповідного ядра, розв'язки, які їм відповідають – власними функціями, що відповідають таким числам.

Для інтегрального рівняння Фредгольма з симетричним ядром справедливі наступні твердження:

1) рівняння має принаймні одне характеристичне число;
2) власні функції, що відповідають різним характеристичним числам, ортогональні на $[a;b]$: $\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = 0,\ \ i\neq j$;
3) кожному характеристичному числу λ відповідає скінченне число q лінійно незалежних власних функцій, причому $q\le \lambda^2\left(\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)\,dxdt\right)^2$.

Також для рівнянь Фредгольма справедливі

Альтернатива Фредгольма – неоднорідне рівняння або має єдиний розв’язок при довільній функції $f(x)$, або відповідне однорідне рівняння має один нетривіальний розв’язок;

Теорема Пікара – інтегральне рівняння Фредгольма I роду має єдиний розв’язок в класі $L_2[a;b]$ якщо

а) ядро $K(x,t)$ дійсне, симетричне;

б) ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 f_k^2(x)$ – збіжний на $[a;b]$, де λ_k – характеристичні числа, $f_k(x)$ – відповідні їм власні функції;

в) система власних функцій $f_k(x)$ повна на $[a;b]$.

Розглянемо деякі методи розв’язання інтегральних рівнянь.

Нехай, наприклад, рівняння Фредгольма другого роду має вироджене ядро: $\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\cdot b_k(t)\right)\varphi(t)\,dt=f(x)$, тобто

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k a_k(x),\ \text{де}\ C_k=\int_a^b b_k(t)\varphi(t)dt.$$

Враховуючи лінійну незалежність $a_k(x)$ і підставивши такий вираз для $\varphi(x)$ у вихідне рівняння, отримуємо

$$C_m-\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{km}C_k=f_m,\ \text{де}\ a_{km}=\int_a^b a_k(t)b_m(t)\,dt,\ f_m=\int_a^b b_m(t)f(t)\,dt.$$

Розв’язуючи таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь,отримуємо

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k a_k(x),$$

причому λ знаходиться з умови про нерівність визначника системи нулю.

<u>Приклад.</u> Нехай рівняння має вигляд

$$\varphi(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\sin t\varphi(t)\,dt=\sin x.$$

Поклавши $s=\int_0^{2\pi}\sin t\varphi(t)\,dt$, маємо $\varphi(x)-\frac{s}{\pi}\cos x=\sin x$, звідки, помноживши обидві частини рівняння на $\sin x$ та проінтегрувавши його на $[0;2\pi]$,

$$s-\frac{s}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\sin x\,dx=\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx,\ s=\pi,\ \varphi(x)=\sin x+\cos x.$$

Якщо ядро інтегрального рівняння не вироджене, то його характеристичні числа є нулями <u>визначника Фредгольма</u>

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}C_n\lambda^n,$$

$$C_n=\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix}K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \ldots & K(t_1,t_n)\\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t) & \ldots & K(t_2,t_n)\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & K(t_n,t_n)\end{vmatrix}dt_1dt_2\ldots dt_n.$$

<u>Резольвентою Фредгольма</u> називається величина [4, 10]

$$R(x,t,\lambda)=\frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)},\ \text{де}\ D(x,t,\lambda)=K(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n(x,t)\lambda^n,$$

$$B_n(x,t)=\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,t) & K(x,t_1) & \ldots & K(x,t_n)\\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \ldots & K(t_1,t_n)\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & K(t_n,t_n)\end{vmatrix}dt_1dt_2\ldots dt_n.$$

Знання резольвенти дозволяє знаходити розв’язок рівняння Фредгольма у вигляді:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)f(t)\,dt.$$

Приклад. Нехай $K(x,t)=x^2e^t$, тоді $B_0(x,t)=x^2e^t$, $B_1(x,t)=0$, $B_2(x,t)=0$, …

$C_1=e-2, C_2=0, C_3=0,...$

Звідси $D(x,t,\lambda)=x^2e^t$, $D(\lambda)=1-(e-2)\lambda$, $R(x,t,\lambda)=\dfrac{x^2e^t}{1-(e-2)\lambda}$.

Якщо ядро інтегрального рівняння невироджене, то його характеристичні числа є нулі визначника Фредгольма (або, що те ж саме, полюси резольвенти). Загальний розв'язок однорідного рівняння є лінійною комбінацією власних функцій.

Приклад. Нехай маємо рівняння

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 x\cos 2t+\cos 3x\cos^3 t\right)\varphi(t)\,dt=0.$$

В цьому випадку характеристичні функції шукатимемо у вигляді

$$\varphi(x)=C_1\cos^2 x+C_2\cos 3x.$$

Характеристичні числа знаходимо з умови

$$\begin{vmatrix} 1-\dfrac{\lambda\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{\lambda\pi}{8} \end{vmatrix}=0, \text{ тобто } \lambda_1=\frac{4}{\pi}, \lambda_2=\frac{8}{\pi}.$$

Константи C_1 та C_2 визначаємо з системи $\begin{cases} \left(1-\dfrac{\lambda\pi}{4}\right)C_1=0 \\ \left(1-\dfrac{\lambda\pi}{8}\right)C_2=0 \end{cases}$, враховуючи знайдені значення λ_1 і λ_2, маємо, що $C_1=0$, C_2 – довільне або навпаки, таким чином

$\varphi_1(x)=\cos^2 x$, $\varphi_2(x)=\cos 3x$, $\varphi(x)=C_1\cos^2 x+C_2\cos 3x$, де C_1, C_2 – довільні числа.

Розглянемо розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра II роду:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x \varphi(t) K(x,t)\,dt.$$

Покладемо $\varphi(x) = f_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots$

Звідси, після підстановки у рівняння і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях λ

$$\varphi_0(x) = f(x),\ \varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t) f(t)\,dt,\ \varphi_2(x) = \int_0^x K(x,t)\int_0^t K(t,t_1) f(t_1)\,dt_1 dt, \ldots$$

Запровадивши поняття <u>ітерованого ядра</u>

$$K_1 = K(x,t),\ K_2 = K(x,t_1) = \int_{t_1}^x K(x,t) K(t,t_1)\,dt, \ldots$$

$$K_{n+1} = K(x,t) = \int_t^x K(x,\xi) K_n(\xi,t)\,d\xi, \ldots$$

можемо записати $\varphi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i\int_0^x K_i(x,t) f(t)\,dt$.

<u>Резольвентою рівняння Вольтерра</u> є функція $R(x,t,\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i K_{i+1}(x,t)$

Таким чином, $\varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(t) R(x,t,\lambda)\,dt$.

Резольвента справджує рівняння

$$R(x,t,\lambda) = K(x,t) + \lambda\int_t^x K(x,s) R(s,t,\lambda)\,ds.$$

<u>Приклад.</u> Знайдемо резольвенту рівняння з ядром $K(x,t) = e^{x-t}$.

Маємо $K_2(x,t) = \int_t^x e^{x-\xi}\cdot e^{\xi-t}\,d\xi = e^{x-t}(x-t)$.

За допомогою методу математичної індукції можна довести, що

$$K_n(x,t)=e^{x-t}\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Звідси $R(x,t,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}=e^{(1+\lambda)(x-t)}$.

Існують також численні інші методи розв’язання інтегральних рівнянь. Наприклад, якщо в інтегральному рівнянні Вольтерра $K(x,t)=K(x-t)$, то для розв’язування таких рівнянь використовують операційний метод, застосовуючи до обох його частин перетворення Лапласа.

<u>Приклад.</u> $\varphi(x)=\sin x+\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt=\sin x+x*\varphi(x)$.

Нехай $\varphi(x)\xrightarrow{L}F(p)$, тоді, враховуючи, що $\sin x\xrightarrow{L}\frac{1}{p^2+1}$, $x\xrightarrow{L}\frac{1}{p^2}$, маємо $F(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p^2}\cdot F(p)$, $F(p)=\frac{p^2}{(p^2+1)(p^2-1)}=$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2-1}-\frac{1}{p^2+1}\right)$, звідки $\varphi(x)=\frac{1}{2}(shx-\sin x)$.

Використання інтегральних рівнянь про розв’язуванні крайових задач для рівнянь математичної фізики можна проілюструвати таким прикладом.

Нехай треба розв’язати задачу

$\Delta u=0\ (0<x<\infty, 0<y<h)$, $u(x,h)=0$, $u(0,y)=0\ (0\le y\le h)$, $u(x,0)=f_1(x)\ (0\le x\le a)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=f_2(x)\ (0<x<\infty)$.

Функція вигляду $u(x,y)=\int\limits_0^\infty A(\lambda)sh\lambda(h-\lambda)\sin\lambda x d\lambda$ задовольняє рівнянню та дві граничні умови. Решта граничних умов означає виконання системи рівностей

$$\begin{cases}\int\limits_0^\infty A(\lambda)sh\lambda h\sin\lambda x d\lambda=f_1(x), \quad 0\le x<a\\ -\int\limits_0^\infty \lambda A(\lambda)ch\lambda h\sin\lambda x d\lambda=f_2(x), \quad 0<x<\infty\end{cases},$$

які називаються дуальними інтегральними рівняннями.

10. Деякі спеціальні функції та їх основні властивості.

В багатьох випадках, розглянуті вище задачі не можуть бути розв'язані за допомогою виключно елементарних функцій. Нижче розглянуті деякі найпростіші спеціальні (неелементарні) функції і наведені їх властивості [11, 12].

Гамма - функцією (ейлеровим інтегралом другого роду) називають функцію $\Gamma(x)$, яка може бути задана за Ейлером

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}dt \quad (0<x<+\infty)$$

або за Гауссом

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{x-1}}{x(x+1)...(x+n-1)} \quad (x\ne 0,-1,-2,...),$$

а також іншими способами.

Її основні властивості такі:

$\Gamma(z+1)=z\cdot\Gamma(z)$, $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(n)=(n-1)!$, $n=1,2,3...$,

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)=-z\Gamma(-z)\Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},\ \Gamma(1+z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi z}{\sin\pi z},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z},\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\ \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi},\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=(2n-1)!!\sqrt{\pi}\,2^{-n},\ n=0,1,2,...,\ \frac{\Gamma(x-n)}{\Gamma(x)}=\frac{(-1)^n}{(1-x)^n},\ n=1,2,...$$

$$\Gamma(2x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}2^{2x-\frac{1}{2}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{4^x}{2\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right),$$

$$\ln\left[\Gamma(1+x)\right]=\int_0^1\left(\frac{t^x-1}{t-1}-x\right)\frac{dt}{\ln t}\quad(x>-1).$$

Бета - функцією або ейлеровим інтегралом першого роду називається функція

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt=\int_0^{+\infty}t^{x-1}(1+t)^{-x-y}\,dt\quad(x>0,y>0)$$

Основні співвідношення:

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\mathrm{B}(y,x);$$

$$\mathrm{B}(x,y)=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(x+y+k)}{(x+k)(y+k)};$$

$$\mathrm{B}(x,-x)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^x}{x}, & x=\pm1,\pm2,....\\ 0, & \text{в інших випадках}\end{cases};$$

$$\mathrm{B}(x,y+1)=\frac{y}{x}\mathrm{B}(x+1,y)=\frac{y}{x+y}\mathrm{B}(x,y).$$

Псі - функція або дігамма-функція є логарифмічною похідною $\Gamma(x)$:

$$\psi(x)=\frac{d\ln\Gamma(x)}{dx}=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\lim_{n\to\infty}\left[\ln n-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+x}\right]=-\gamma+\int_0^1\frac{1-t^{x-1}}{1-t}dt\quad(x>0),$$

$\gamma = 0,577... = \lim\limits_{m\to\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \ln m\right)$ – стала Ейлера.

Для такої функції $\psi(x) = \psi(1+x) - \frac{1}{x}$; $\psi(x) - \psi(1-x) = -\pi ctg \pi z$;

$\psi(2x) = \frac{\psi(x) + \psi\left(x + \frac{1}{2}\right)}{2} + \ln 2$; $\psi(1) = -\gamma$; $\psi'(1) = \frac{\pi^2}{6}$; $\psi\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - \gamma - \ln 4$;

$\psi(2) = 1 - \gamma$, $\psi'(2) = \frac{\pi^2}{6} - 1$.

<u>Інтегральним синусом</u> називається функція

$$Six = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \int\limits_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt .$$

<u>Інтегральним косинусом</u> називається функція

$$Cix = -\int\limits_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \gamma + \ln|x| + \int\limits_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt \quad \left(|\arg x| < \pi\right).$$

<u>Інтеграли Френеля</u> (перший та другий) визначаються формулами

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x \sin t^2 dt = \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt ;$$

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x \cos t^2 dt = \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{x^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt ;$$

при цьому узагальнені інтеграли Френеля є

$$S(x,\nu) = \int\limits_x^{+\infty} t^{\nu-1} \sin t dt \quad (x \ge 0,\ \nu < 1);$$

$$S(x,\nu) = \int\limits_x^{+\infty} t^{\nu-1} \cos t dt \quad (x \ge 0,\ \nu < 1).$$

<u>Інтегралом імовірностей</u> називають функцію

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x^2}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=\int_0^{\infty}\frac{e^{-t^2}\sin 2xt}{t}dt=\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x^2t^2}dt .$$

Доповнювальна функція помилок

$$erfc(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}e^{-t^2}dt .$$

Зауважимо, що в теорії імовірностей найчастіше використовують функції імовірності

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \text{ та } \Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2}erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Запроваджуються також функції, обернені до інтегралу імовірностей та доповнювальної функції помилок – $y=inverf(x)$ та $y=inverfc(x)$ відповідно.

Для запроваджених функцій мають місце такі властивості

$$erf(x)=\frac{x}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-x^2\right)^k}{k!\left(k+\frac{1}{2}\right)};\ erfc(-x)=2-erfc(x);\ e^x erfc\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}\frac{e^{t-1}}{\sqrt{t}}dt;$$

$$erf(x)\sim\frac{2x}{\sqrt{\pi}} \text{ при } x\to 0;\ erf(x)\sim 1-\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{2}} \text{ при } x\to\infty .$$

Функції Бесселя (циліндричні функції) визначаються як розв’язки рівняння Бесселя

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}+\left(z^2-\nu^2\right)u=0 .$$

Функція Бесселя I роду ν-го порядку

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} .$$

При цьому $e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)t^n$.

Функція Бесселя II роду ν-го порядку (функції Вебера або функції Неймана)

$$N_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}.$$

Функції Бесселя III роду ν-го порядку (функції Ганкеля):

$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iY_\nu(z)=i\operatorname{cosec}\left[e^{-\nu\pi i}J_\nu(z)-J_{-\nu}(-z)\right];$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iY_\nu(z)=i\operatorname{cosec}\nu\pi\left[J_{-\nu}(z)-e^{\nu\pi i}J_\nu(z)\right].$$

Мають місце наступні формули для таких функцій

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z;\ J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z.$$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\frac{\sin z}{z};$$

$$J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\frac{\cos z}{z};$$

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos(n\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi;$$

$$\int\limits_0^1 J_\nu(\alpha_n x)J_\nu(\alpha_m x)\,dx=\begin{cases}1, m=n\\0, m\neq n\end{cases},\text{ де }\alpha_1,\ldots.\text{ – нулі }J_\nu(x);$$

$$J_{n-1}(z)+J_{n+1}(z)=\frac{2n}{x}J_n(z),\quad n=1,2,\ldots;$$

$$J_{n-1}(z)-J_{n+1}(z)=2J_n'(z),\quad n=1,2,\ldots;$$

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left[x-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]+\mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right),\quad(x\to+\infty);$$

тобто $J_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left[x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]+\mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x\to+\infty$ (*)

При цьому $J_0'(x) = -J_1(x)$, $\int\limits_0^{\pi} J_1(x)\,dx = 1 - J_0(x)$,

$\frac{d}{dx}\left[xJ_1(x)\right] = xJ_0(x)$, $\int\limits_0^{x} J_0(x)\,dx = xJ_1(x)$.

Модифіковані функції Бесселя є розв'язками рівняння

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} - \left(z^2 + \nu^2\right)u = 0,$$

отриманого з рівняння Бесселя заміною z на iz [12].

Модифіковані функції Бесселя I роду

$$I_\nu(z) = \begin{cases} e^{-\frac{\pi\nu i}{2}} J_\nu\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right), & \left(-\pi < \arg z \le \frac{\pi}{2}\right) \\ e^{\frac{3\pi\nu i}{2}} J_\nu\left(ze^{-\frac{3\pi i}{2}}\right), & \left(\frac{\pi}{2} < \arg z \le \pi\right) \end{cases}.$$

Модифіковані функції Бесселя III роду (називаються також функціями Макдональда, функціями Бассе, функціями Бесселя II роду уявного аргументу) [12]:

$K_\nu(z) = \frac{i\pi}{2} e^{\frac{i\pi\nu}{2}} H_\nu^{(1)}(iz)$, при $\left|\arg z\right| < \pi$, $K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \pi\nu}$.

Мають місце наступні асимптотичні формули при $x \to +\infty$:

$H_\nu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$; $H_\nu^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$;

$I_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^{-x}$; $K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$; $K_n(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$.

Для довільних циліндричних функцій дійсного аргументу мають місце рекурентні співвідношення:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}Z_{\nu}(x)\right)=x^{\nu}Z_{\nu-1}(x);\ \frac{d}{dx}\left(\frac{Z_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right)=-\frac{Z_{\nu+1}(x)}{x^{\nu}};$$

$$Z_{\nu-1}(x)+Z_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}Z_{\nu}(x).$$

Також $I_{\nu-1}(x)+I_{\nu+1}(x)=\dfrac{2\nu}{x}I_{\nu}(x)$; $I_0'(x)=I_1(x)$; $I_{\nu-1}(x)-I_{\nu+1}(x)=2I_{\nu}'(x)$;

$$K_{\nu-1}(x)-K_{\nu+1}(x)=-\frac{2\nu}{x}K_{\nu}(x);\ K_{\nu-1}(x)+K_{\nu+1}(x)=-2K_{\nu}'(x);$$

$$K_0'(x)=-K_1(x).$$

Визначники Вронського для таких функцій мають вигляд:

$$\begin{vmatrix} J_{\nu}(x) & N_{\nu}(x) \\ J_{\nu}'(x) & N_{\nu}'(x) \end{vmatrix}=\frac{2}{\pi x};\ \begin{vmatrix} H_{\nu}^{(1)}(x) & H_{\nu}^{(2)}(x) \\ H_{\nu}^{(1)\prime}(x) & H_{\nu}^{(2)\prime}(x) \end{vmatrix}=-\frac{4i}{\pi x};\ \begin{vmatrix} I_{\nu}(x) & K_{\nu}(x) \\ I_{\nu}'(x) & K_{\nu}'(x) \end{vmatrix}=-\frac{1}{x}.$$

<u>Функції Кельвіна</u> $ber_{\nu}(x), bei_{\nu}(x), ker_{\nu}(x), kei_{\nu}(x)$ визначаються рівностями:

$$ber_{\nu}(x)+ibei_{\nu}(x)=J_{\nu}\left(xe^{\frac{3\pi i}{4}}\right)=e^{\frac{\nu\pi i}{2}}I_{\nu}\left(xe^{\frac{\pi i}{4}}\right);$$

$$ker_{\nu}(x)+ikei_{\nu}(x)=e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}K_{\nu}\left(xe^{\frac{\pi i}{4}}\right)=\frac{1}{2}\pi i H_{\nu}^{(1)}\left(xe^{\frac{3\pi i}{4}}\right)=-\frac{1}{2}\pi i e^{-\nu\pi i}H_{\nu}^{(2)}\left(xe^{-\frac{\pi i}{4}}\right).$$

При цьому $\mathrm{ber}(0)=1, \mathrm{ker}_{\pm 2}(0)=\dfrac{1}{2}, \mathrm{kei}(0)=\dfrac{\pi}{4}, \mathrm{ker}_{\nu}(\infty)=0, \mathrm{kei}_{\nu}(\infty)=0$.

<u>Функції Ангера</u> $J_{\nu}(z)$ та <u>Вебера</u> $E_{\nu}(z)$ визначаються так:

$$J_{\nu}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\nu t-z\sin t)\,dt;\ E_{\nu}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(\nu t-z\sin t)\,dt.$$

Іноді $E_{\nu}(z)$ <u>називають функцією Ломмеля-Вебера</u> і позначають $Q_{\nu}(z)$. Функції Ангера та Вебера є розв’язками неоднорідних рівнянь Бесселя

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}+\left(z^2-\nu^2\right)u=f\left(z\right),$$

для яких, відповідно, $f\left(z\right)=\frac{1}{\pi}\left(z-\nu\right)\sin\nu\pi$ або

$-\frac{1}{\pi}\left[\left(z+\nu\right)+\left(z-\nu\right)\cos\nu\pi\right]$.

<u>Функцією Струве</u> називається функція

$$H_\nu\left(z\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(z\cos t\right)\sin^{2\nu}tdt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1\left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin ztdt.$$

<u>Модифікована функція Струве</u> $L_\nu\left(z\right)$ визначається рівністю

$$L_\nu\left(z\right)=-ie^{-\frac{i\nu\pi}{2}}H_\nu\left(iz\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1\left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\mathrm{s}hztdt\quad\left(\mathrm{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right).$$

Рівняння $z\left(1-z\right)\frac{d^2u}{dz^2}+\left[c-\left(a+b+1\right)z\right]\frac{du}{dz}-abcu=0$, де a,b,c – параметри (можливо, комплексні) називається <u>гіпергеометричним</u>. Відповідно, <u>гіпергеометричною функцією</u> називають один з розв’язків цього рівняння

$F\left(a,b,c,z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(a\right)_n\left(b\right)_n}{\left(c\right)_n}\frac{z^n}{n!}$, де $\left(a\right)_n=a\left(a+1\right)...\left(a+n-1\right)$, $a\left(1\right)=1$ – <u>символ Похгамерра</u> (аналогічно $\left(b\right)_n,\left(c\right)_n$) [12]. Якщо $c\neq0,-1,-2,...$, то такий розв’язок регулярний в нулі. Основні його властивості наступні:

$F\left(a,b,c,0\right)=1$; $F\left(a,b,c,1\right)=\frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(c-a-b\right)}{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(c-b\right)}$ (при $c>a+b$);

$F\left(1,1,2,z\right)=\frac{1}{2z}\ln\frac{1+z}{1-z}=-\frac{1}{z}\ln(1-z)$;

$$F\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-z^2\right)=\frac{arctgz}{z};\ F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},z^2\right)=\frac{\arcsin z}{z};$$

$$F(a,b,b,z)=(1-z)^{-a};\ F\left(-a,a,\frac{1}{2},\sin^2 z\right)=\cos 2az.$$

Гіпергеометричні функції пов'язані з <u>еліптичними інтегралами</u> співвідношеннями

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;k^2\right);$$

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;k^2\right).$$

Для інтегралів Ейлера має місце рівність

$$F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1\frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-zt)^a}dt \text{ при } (c>b>0,\ z<1).$$

<u>Функція Куммера</u> $M(a,c,z)$ (іноді її позначають $\Phi(a,c,z)$) є одним із розв'язків рівняння

$$z\frac{d^2u}{dz^2}+(c-z)\frac{du}{dz}-au=0,$$

при $c\neq 0,-1,-2,...$ то $M(a,c,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}=\lim_{b\to+\infty}F\left(a,b,c,\frac{z}{b}\right).$

Також $M(a,c,x)=\dfrac{\Gamma(c)x^{1-c}}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)}\displaystyle\int_0^x\frac{t^{a-1}e^t}{(x-t)^{t+a-c}}dt\quad(0<a<c);$

$$M(a,c,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)}\int_0^1\frac{t^{a-1}e^{zt}}{(1-t)^{t+a-c}}dt\quad(\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}a>0);$$

$$M(a,a,x)=e^x;\ M(1,c,x)=1+x^{1-c}e^x\gamma(c,x);\ M(a,c,0)=1.$$

Функція Трікомі $U(a,c,z)$ (іноді $\Psi(a,c,z)$) визначається співвідношенням

$$U(a,c,z) = z^{-a}\lim_{\gamma\to 0} F\left(a, 1+a-c, \gamma, 1-\frac{\gamma}{z}\right) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}e^{-zt}}{(1+t)^{1+a-c}}dt \quad (\mathrm{Re}\,c > \mathrm{Re}\,a > 0)$$

Функції Віттекера [12] $W_{k,\mu}(z), M_{k,\mu}(z)$ це розв'язки рівняння

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{z^2}\right)u = 0.$$

$$M_{k,\mu}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{1}{2}+\mu} M\left(\frac{1}{2}+\mu-k, 1+2\mu, z\right);$$

$$W_{k,\mu}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{1}{2}+\mu} U\left(\frac{1}{2}+\mu-k, 1+2\mu, z\right).$$

Функції параболічного циліндра (функції Вебера або Вебера-Ерміта) – це розв'язки диференціального рівняння Вебера

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right)u = 0.$$

$$D_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^\nu \cos\left(zt - \frac{\nu\pi}{2}\right)dt \quad (\mathrm{Re}\,\nu > -1)$$

або $D_\nu(z) = \dfrac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\Gamma(-\nu)}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt-\frac{t^2}{2}} t^{-\nu-1}dt \quad (\mathrm{Re}\,\nu < 0)$.

При цьому $D_0(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$, $D_1(x) = xe^{-\frac{x^2}{4}}$, $D_{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{\frac{x^2}{4}} arfc\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

Нехай задано систему многочленів відповідних степенів

$$p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x), ...$$

Будемо називати таку сукупність многочленів ортогональною системою з вагою $w(x) \geq 0$ на $[a,b]$, якщо

$\int_a^b p_n(x)\cdot p_m(x)w(x)dx = h_n\delta_{mn}$, де δ_{mn} – символ Кронекера.

Многочлени Якобі $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ задовольняють диференціальне рівняння:

$$\left(1-x^2\right)y'' + \left[(\beta-\alpha)-(\lambda+1)x\right]y' + n(n+\lambda)y = 0,$$

де $\alpha > -1, \beta > -1, \lambda = \alpha+\beta+1$.

Для них справедливі формула Родріга

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]$$

наступна формула зв'язку

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)}F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-x}{2}\right),$$

формула диференціювання

$$\frac{d^m P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx^m} = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_m}{2^m}P_{n-m}^{(\alpha+m,\beta+m)}(x),$$

та формула інтегрування

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)dx = \frac{2\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\lambda)\Gamma(n+\lambda)n!}\delta_{mn}.$$

Функція Якобі другого роду $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ справджує те саме рівняння, що й многочлени. При цьому

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + 2^{\lambda+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\times$$

$$\times(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}F\left(n+1, -n-\alpha-\beta, 1-\alpha, \frac{1-x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2(x-1)^\alpha(x+1)^\beta}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta}{x-t}P_n^{(\alpha,\beta)}(t)dt$$

Многочлени Гегенбауера (ультрасферичні) $C_n^{\alpha}(x)$ (також позначають $G_n^{\alpha}(x)$) є частинним випадком многочленів Якобі

$$C_n^{\alpha+1}(x)=\frac{(2\alpha+1)_n}{(\alpha+1)_n}P_n^{(\alpha,\alpha)}(x).$$

Вони задовольняють диференціальне рівняння

$$\left(1-x^2\right)y''-(2\alpha+1)xy'+n(n+2\alpha)y=0;$$

формула інтегрування

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)x^{\alpha-\frac{1}{2}}C_n^{\alpha}(x)C_m^{\alpha}(x)dx=\frac{\pi 2^{1-2\alpha}\Gamma(n+2\pi)}{n!(n+\alpha)\Gamma^2(\alpha)}\delta_{mn};$$

Формула Родріга

$$C_n^{\alpha}(x)=(-1)^n\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)}{2^n n!\Gamma(2\alpha)\Gamma\left(\alpha+n+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^{\alpha+n-\frac{1}{2}}\right].$$

При цьому $C_n^{\alpha}(1)=\frac{(2\alpha)_n}{n!}$, $C_0^0(1)=1$, $C_n^0(1)=\frac{2}{n}$ $(n=1,2,...)$,

$$C_n^{\alpha}(-x)=(-1)^n C_n^{\alpha}(x),\ C_n^{\alpha}(0)=\begin{cases}0, & n-\textit{непарне}\\ (-1)^m\frac{(\alpha)_m}{m!}, & \textit{якщо}\ \ n=2m\end{cases},$$

$$C_n^{\alpha}(\cos\varphi)=\frac{2^{\alpha}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)(2\alpha)_n}{\sqrt{\pi}n!\Gamma(\alpha)}\sin^{1-2\alpha}\varphi\cdot\int_0^{\varphi}\frac{\cos(n+\alpha)tdt}{(\cos t-\cos\varphi)^{1-\alpha}}.$$

Многочлени Лежандра (сферичні многочлени) $P_n(x)$ – це многочлени Якобі при $\alpha=\beta=0$ (відповідно, многочлени Гегенбауера при $\alpha=\frac{1}{2}$);

диференціальне рівняння

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+n(n+1)y=0;$$

формула інтегрування

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn};$$

формула Родріга

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n};$$

основні формули

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x),\ P_n(\pm1)=(\pm1)^n,\ P_{2m+1}(0)=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n, & \left(|t|<1,|x|\le 1\right)\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^{-n-1}, & \left(|t|<1,|x|\le 1\right)\end{cases};$$

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos t\right)^n dt\ \ (x>1);\ P_n(\cos t)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\cos t-\cos\varphi}d\varphi.$$

<u>Многочлени Лагерра</u> $L_n(x)$:

диференціальне рівняння

$$xy''+(1-x)y'+ny=0;$$

формула інтегрування

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}L_n(x)L_m(x)\,dx=\delta_{mn};$$

формула Родріга

$$L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{d^n\left(x^ne^{-x}\right)}{dx^n}\ \ (n=0,1,2,...).$$

<u>Многочлени Ерміта</u> $H_n(x)$:

диференціальне рівняння: $y'' - 2xy' + 2ny = 0$;

формула Родріга: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n\left(e^{-x^2}\right)}{dx^n}$;

формула інтегрування: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn}$;

частинні випадки: $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$;

інтегральне зображення: $H_n(x) = \dfrac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \int\limits_0^{\infty} t^n e^{-t^2} \cos\left(2xt - \dfrac{n\pi}{2}\right) dt$.

Многочлени Чебишова $T_n(x)$ (першого роду) та $U_n(x)$ (другого роду) визначаються формулами

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x);\ U_n(x) = \sin(n \arccos x).$$

Відповідно, $\dfrac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n \quad (|t| < 1)$, $\dfrac{1}{1 - 2tx + t^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n \quad (|t| < 1)$.

Диференціальне рівняння: $(1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0$.

Формула інтегрування $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\delta_{mn} & (m^2 + n^2 \neq 0) \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases}$.

Функції Лежандра (сферичні функції) є розв'язками диференціального рівняння

$$(1 - x^2)\frac{d^2u}{dz^2} - 2z\frac{du}{dz} + \left[\nu(\nu + 1) - \frac{\mu}{1 - z^2}\right] u = 0.$$

При цьому функції Лежандра $P_\nu^\mu(z)$ (першого роду) та $Q_\nu^\mu(z)$ (другого роду) пов'язані з гіпергеометричними функціями наступним чином

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{2^\mu (z^2 - 1)^{-\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(1 - \mu)} F\left(1 - \mu + \nu, -\mu - \nu, 1 - \mu, \frac{1 - z}{2}\right);$$

$$Q_\nu^\mu(z)=\frac{e^{i\mu\pi}2^{-\nu-1}}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\Gamma(\nu+\mu+1)z^{-1-\nu+\mu}\left(z^2-1\right)^{-\frac{\mu}{2}}\times$$
.
$$\times F\left(\frac{1+\nu-\mu}{2},1+\frac{\nu-\mu}{2},\nu+\frac{3}{2},\frac{1}{z^2}\right),\quad |z|>1$$

Вони пов'язані формулою Вінпла:

$$Q_\nu^\mu(z)=e^{i\mu\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Gamma(\nu+\mu+1)\left(z^2-1\right)^{-\frac{1}{4}}P_{-\mu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right).$$

Їх інтегральні зображення наступні:

$$P_\nu^\mu(ch\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{sh^\mu\alpha}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_0^\alpha\frac{ch\left(\nu+\frac{1}{2}\right)tdt}{(ch\alpha-cht)^{\mu+\frac{1}{2}}};$$

$$Q_\nu^\mu(ch\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{sh^\mu\alpha}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_\alpha^{+\infty}e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}(cht-ch\alpha)^{-\mu-\frac{1}{2}}dt$$

при $\alpha>0$, $\mathrm{Re}(\nu+\mu+1)>0$, $\mathrm{Re}\,\mu<\frac{1}{2}$.

При цьому функції $P_{\nu-\frac{1}{2}}^\mu(ch\eta)$, $Q_{\nu-\frac{1}{2}}^\mu(ch\eta)$ називають функціями тору, а функції $P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^\mu(\cos\theta)$, $Q_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^\mu(\cos\theta)$ – функціями конусу.

Еліптичними інтегралами називають інтеграли вигляду $\int R\left(x,\sqrt{P_n(x)}\right)dx$, де $R(\cdot)$ – раціональна функція, а многочлен $P_n(x)$ – третього або четвертого степеня.

Конкретніше, еліптичний інтеграл першого роду

$$F(\varphi,k)=\int_0^\varphi\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}=\int_0^{\sin\varphi}\frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}},$$

другого роду

$$E(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt=\int_0^{\sin\varphi}\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

третього роду

$$\Pi(\varphi,n,k)=\int_0^{\varphi}\frac{dt}{\left(1-n\sin^2 t\right)\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}=\int_0^{\sin\varphi}\frac{dx}{\left(1+nx^2\right)\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}},$$

де параметр k $(k^2<1)$ називається модулем інтегралу, а n – характеристикою інтегралу третього роду.

Мають місце наступні властивості таких інтегралів:

$$F(\varphi,0)=E(\varphi,0)=\varphi,\, F(\varphi,1)=\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right),\ \ |\varphi|\le\frac{\pi}{2},\, E(\varphi,1)=\sin\varphi,\ \ |\varphi|\le\frac{\pi}{2}.$$

Якщо верхня границя у наведених вище інтегралах $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ (або $\sin\varphi=1$) маємо повні еліптичні інтеграли:

$$K(k)=F\left(\frac{\pi}{2},k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-k^2\sin^2 t\right)^{-\frac{1}{2}}dt=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{\left(1+t^2\right)\left(1+k^2t^2\right)}}$$

$$E(k)=E\left(\frac{\pi}{2},k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-k^2\sin^2 t\right)^{\frac{1}{2}}dt=\int_0^1\frac{\left(1-k^2t^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{1+k'^2t^2}}{\sqrt{\left(1+t^2\right)^3}}dt,$$

де $k'=\sqrt{1-k^2}$ – додатковий модуль.

Еліптичні функції – це функції, обернені до еліптичних інтегралів [1, 6, 12].

Зауваження. Оскільки всі розглянуті вище спеціальні функції виражаються через елементарні лише в окремих випадках, то вони табульовані.

Одиничною функцією або функцією Гевісайда називається функція

$$u(x-a)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{1}{2}, & x=a\\ 1, & x>a\end{cases}.$$

Для неї $u(-x)=1-u(x)$.

Наостанок запровадимо так звану функцію Дірака $\delta(x-a)$ – найпростішу <u>узагальнену функцію</u>, яка має нетривіальний характер

$$\delta(x-a)=\begin{cases}0, & x\neq a\\ \infty, & x=a\end{cases}.$$

Ця функція може бути визначена багатьма способами.

<u>Наприклад.</u>

$\delta(x-a)=\lim\limits_{b\to+\infty}\sqrt{\dfrac{b}{\pi}}e^{-b(x-a)^2}$, або $\delta(x-a)=\dfrac{du(x-a)}{dx}$,

або $\delta(x-a)=\lim\limits_{T\to+\infty}\int\limits_{-T}^{T}\cos 2\pi(x-a)t\,dt$.

Найпростіші властивості такої функції наступні:

$\delta(a-x)=\delta(x-a)$, $\delta(\nu x)=\dfrac{\delta(x)}{\nu}, \quad (\nu>0)$,

$\delta\left(x^2-a^2\right)=\dfrac{1}{2a}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right], \quad (a>0)$,

$\int\limits_{a-t}^{a+t}\delta(x-a)dx=1, \quad t>0$.

Зазначимо, що необхідність використання таких функцій випливає, наприклад, з можливості ”ламаної” початкової форми струни для хвильового рівняння ”точкових” джерел тепла або зарядів та ін.

Предметний покажчик.

альтернатива Фредгольма, 31
бета - функція, 37
визначник Фредгольма, 32
власна функція, 15
власні функції, 31
власні числа інтегрального рівняння, 31
гамма - функція, 37
гіперболічне рівняння, 6
гіпергеометрична функція, 44
гіпергеометричне рівняння, 44
гранична умова другого роду, 11
гранична умова першого роду, 11
гранична умова третього роду, 11
граничні умови, 11
додатковий модуль, 52
доповнювальна функція помилок, 39
дуальні інтегральні рівняння, 36
еліптичне рівняння, 6
еліптичний інтеграл другого роду, 51
еліптичний інтеграл першого роду, 51
еліптичний інтеграл третього роду, 51
еліптичні інтеграли, 44, 51
еліптичні функції, 52
задача з нелінійними граничними умовами, 12
задача Коші, 10
задача Штурма-Ліувілля, 15
інтеграл імовірностей, 39
інтеграли Френеля, 39
інтегральний косинус, 38
інтегральний синус, 38
ітероване ядро, 34
крайова задача, 11
крайова задача без початкових умов, 12
метод Даламбера, 13
многочлени Гегенбауера, 47
многочлени Ерміта, 49
многочлени Лагерра, 49
многочлени Лежандра, 48
многочлени ультрасферичні, 47
многочлени Чебишова, 49
многочлени Якобі, 46
модуль еліптичного інтегралу третього роду, 51
неоднорідне рівняння Бесселя, 43
нетривіальний розв'язок, 31
одинична функція, 52
ортогональна система з вагою, 46
параболічне рівняння, 6
перетворення Ганкеля, 26
повні еліптичні інтеграли, 52
псі - функція, 38
резольвента рівняння Вольтерра, 35
резольвента Фредгольма, 33
рівняння Вебера, 45
рівняння Вольтерра І роду, 30
рівняння Вольтерра ІІ роду, 30
рівняння коливань струни, 10
рівняння Лапласа двовимірне, 8
рівняння Лапласа тривимірне, 9
рівняння лінійне, 4
рівняння математичної фізики, 6
рівняння Пуассона двовимірне, 9
рівняння Пуассона тривимірне, 9
рівняння Фредгольма І роду, 30
рівняння Фредгольма ІІ роду, 30
рівняння характеристик, 7
розв'язок інтегрального рівняння, 30
символ Кронекера, 46
символ Похгамерра, 44
симетричне ядро, 30
спеціальні функції, 37
сферичні многочлени, 48
сферичні функції, 50
теорема Пікара, 31
теорема Стеклова, 15
точки, спряжені відносно кола, 29
тривіальний розв'язок, 31
узагальнена функція, 52
формула Вінпла, 50
формула Родріга, 46
функції Бассе, 42
функції Бесселя, 40
функції Бесселя І роду модифіковані, 41
функції Бесселя ІІ роду уявного аргументу, 42
функції Бесселя ІІІ роду, 40
функції Бесселя ІІІ роду модифіковані, 42
функції Бесселя модифіковані, 41
функції Вебера, 40, 45
функції Вебера-Ерміта, 45

функції Віттекера, 45
функції Ганкеля, 40
функції імовірності, 39
функції Кельвіна, 42
функції конусу, 51
функції Лежандра, 50
функції Лежандра другого роду, 50
функції Лежандра першого роду, 50
функції Макдональда, 42
функції Неймана, 40
функції параболічного циліндра, 45
функції тору, 51
функція Ангера, 43
функція Бесселя I роду, 40
функція Бесселя II роду, 40
функція Вебера, 43
функція Гевісайда, 52
функція Гріна, 29
функція Дірака, 52
функція Куммера, 45
функція Ломмеля-Вебера, 43
функція одиничного джерела, 28
функція Струве, 43
функція Струве модифікована, 43
функція Трікомі, 45
функція Якобі другого роду, 47
функція, обернена до доповнювальної функції помилок, 39
функція, обернена до інтегралу імовірностей, 39
характеристика еліптичного інтегралу третього роду, 51

Список рекомендованої літератури

1. Вірченко Н.О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики.–Навчальний посібник.–Київ: КПІ.– 1997 – 370 с.

2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука. – 1971. – 512 с.

3. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир. – 1964. – 830 с.

4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики: В 2-х т. – М., Л.: Физматгиз. – 1951. – Т.1. – 476 с.

5. Тихонов А.Н. ,Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука. – 1977. – 724 с.

6. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции.– М.: Наука.– 1974.– 368 с.

7. Вірченко Н.О. Деякі типові крайові задачі математичної фізики та методи їх розв'язаня. – К.: Вища школа.– 1976.– 56 с.

8. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Физматгиз. – 1961. – 542 с.

9. Интегральные уравнения / Задачи и упражнения / Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. – М.: Наука.– 1976. – 216 с.

10. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. – М.: Наука. – 1979. – 185 с.

11. Вірченко Н.О., Ляшко І.І. Графіки елементарних та спеціальних функцій. – К.: Наукова думка. – 1996. – 584 с.

12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.– М.: Наука –

Т.1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. – 1973.– 296 с.

Т.2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.– 1974. – 296 с.