Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ТЕОРІЯ, ПРИКЛАДИ, ЗАДАЧІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

ДЛЯ СТУДЕНТІВ ФІНАНСОВО—ЕКОНОМІЧНОГО ПРОФІЛЮ

Рекомендовано Методичною радою НТУУ «КПІ»

Київ
НТУУ "КПІ"
2012

Вища математика.Теорія, приклади, задачі для розв'язування : Посібник для студентів фінансово–економічного профілю /Уклад.: В. В. Булдигін, З. П. Ординська, Л. А. Репета – К.: НТУУ "КПІ", 2012. – 215 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»
(*Протокол № 1 від 20. 09. 2012*)

Навчальне видання

«Вища математика. Теорія, приклади, задачі для розв'язування»

Укладачі: *Булдигін Валерій Володимирович*, докт. фіз.-мат. наук, проф.
Ординська Зоя Павлівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Репета Леся Анатоліївна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *О. В. Іванов*, д-р. фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти *П. В. Задерей,* д-р. фіз.-мат. наук, проф. Завідувач кафедри вищої математики Київського національного університету технологій та дизайну
О. М. Станжицький, , д-р. фіз.-мат. наук, проф. Завідувач кафедри загальної математики Київського національного університету ім. Тараса Шевченка

За редакцією укладачів
Електронна версія

Київ
НТУУ "КПІ"
2012

ПЕРЕДМОВА

Курс "Вища математика" належить до числа фундаментальних дисциплін, які вивчаються при підготовці спеціалістів фінансово-економічного профілю. При вивченні цієї дисципліни студенти засвоюють основи математичного аналізу, аналітичної геометрії, лінійної алгебри, знайомляться з методами теорії рядів та диференціальних рівнянь.

Курс вивчається протягом першого та другого семестрів, у кожному з яких передбачено складання студентами іспиту або заліку з опрацьованого матеріалу. Слід зазначити, що лекції та практичні заняття з курсу передбачені у малому обсязі, що вказує на особливу важливість самостійної роботи студентів як при вивченні теоретичного матеріалу, так і при застосуванні практичних навичок для виконання контрольних робіт.

РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА КУРСУ

Вступ. Значення математики для економічної дисципліни.

Тема 1. Елементи лінійної алгебри.

Матриці та дії над ними.

Визначники другого і третього порядку. Основні властивості. Визначники n – го порядку.

Ранг матриці, елементарні перетворення матриць.

Системи лінійних рівнянь. Метод Гаусса. Правило Крамера. Обернена матриця. Матричні рівняння. Теорема Кронекера – Капеллі.

Тема 2. Елементи аналітичної геометрії.

Геометричні вектори на площині і у просторі, лінійні операції над ними. Координати вектора.

Лінійні простори. n –мірні вектори та операції над ними. Лінійно незалежні системи векторів, базис у R^2, R^3.

Скалярний добуток в R^3 та його властивості.

Лінія на площині. Пряма лінія у R^n (векторна та координатна форми). Криві другого порядку та їх властивості.

Поверхні у просторі. Пряма і площина у просторі. Поверхні другого порядку.

Тема 3. Вступ до математичного аналізу.

Множини та дії над ними. Обмежені числові множини.

Функції: поняття, графік, основні елементарні функції та їх графіки, взаємнооднозначне відображення.

Числові послідовності, границя числової послідовності, ознаки їх існування.

Границя функції у точці, нескінченно малі та нескінченно великі функції та їх границі.

Неперервність функції у точці та на відрізку, властивості неперервних функцій.

Тема 4. Диференціальне числення функцій однієї змінної.

Похідна функції, її геометричний, фізичний, та економічний зміст. Основні правила диференціювання. Похідні та диференціали вищих порядків. Теореми про диференційовні функції, правило Лопіталя.

Формула Тейлора і її застосування.

Тема 5. Дослідження функції за допомогою похідних.

Тема 6. Інтегральне числення функцій однієї змінної.

Первісна функції та невизначений інтеграл, їх властивості. Основні методи інтегрування. Інтегрування раціональних дробів, деяких ірраціональних виразів та тригонометричних функцій.

Тема 7. Визначений інтеграл та його застосування.

Основні задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла. Поняття інтегральної суми визначеного інтеграла та його властивості. Похідна інтеграла за верхньою границею, формула Ньютона – Лейбніца.

Обчислення інтеграла інтегруванням частинами та підстановкою.

Застосування визначених інтегралів при обчисленні площ плоских фігур, довжин дуг кривих, об'єму тіла обертання.

Невласні інтеграли першого і другого роду.

Тема 8. Функції багатьох змінних.

Область визначення, границя, неперервність. Частинні похідні, повний диференціал, інваріантність його форми.

Скалярні та векторні поля. Похідна за напрямком, градієнт скалярного поля.

Частинні похідні та частинні диференціали вищих порядків. Неявні функції, теорема існування. Екстремум функції багатьох змінних, умовний екстремум, метод множників Лагранжа, найбільше і найменше значення функції в області.

Тема 9. Звичайні диференціальні рівняння.

Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші.

Диференціальні рівняння вищих порядків. Лінійні диференціальні рівняння.

Тема 10. Числові ряди.

Збіжність та сума ряду. Ознаки збіжності числових рядів з додатними членами. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність.

Тема 11. Функціональні ряди.

Степеневі ряди. Теорема Абеля. Розклад функцій у степеневі ряди. Ряд Тейлора. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.

Тема 12. Ряди Фур'є. Розклад функцій у ряд Фур'є.

ТЕМА 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1. МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ

Прямокутну таблицю, яка складається з $m \times n$ чисел a_{ij} $(i = 1, 2, ..., n; \;\; j = 1, 2, ..., m)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називають ***матрицею***, а числа a_{ij} називають ***елементами*** цієї матриці. Добуток кількості рядків на кількість стовпчиків $m \times n$ називають ***розміром*** матриці.

Матрицю називають ***квадратною***, якщо кількість рядків дорівнює кількості стовпчиків. В іншому випадку матрицю називають ***прямокутною***.

Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то матрицю називають нульовою і позначають

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ утворюють ***головну діагональ*** квадратної матриці, а елементи $a_{1n}, ..., a_{n1}$ - ***бічну діагональ***.

Квадратну матрицю називають ***трикутною***, якщо всі елементи, розташовані під (над) головною діагоналлю, дорівнюють нулю, а серед тих, що залишилися є ненульові.

Квадратну матрицю, всі елементи якої, крім діагональних, дорівнюють нулю, називають ***діагональною***.

Квадратну матрицю, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, а всі інші – нулю, називають ***одиничною*** і позначають

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Матрицю A^T називають ***транспонованою*** до матриці A, якщо її рядки є стовпчиками матриці A, а її стовпчики є рядками матриці A.

Нехай A і B матриці однакового розміру. ***Сумою*** матриць A і B є матриця $A+B$ того самого розміру, кожен елемент якої є сумою відповідних елементів матриць A і B.

Добутком довільного ***дійсного числа*** λ ***на матрицю***

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

є матриця

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Нехай A і B матриці, розмірів $m\times n$ і $n\times k$ відповідно. ***Добутком матриці*** A ***на матрицю*** B називають таку матрицю $C=AB$ розміру $m\times k$, у якої елемент c_{ij} є сумою добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпчика матриці B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj},$$

де $i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,k$.

Зауважимо, що $AB\neq BA$ у загальному випадку. Матриці A і B називають ***комутативними***, якщо $AB=BA$.

Наведемо ***властивості дій над матрицями***.

1. $A+B=B+A$; 2. $A+(B+C)=(A+B)+C$;

3. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$; 4. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

5. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$; 6. $(\alpha A)B=A(\alpha B)$;

7. $(A+B)C=CA+BC$; 8. $(AB)C=A(BC)$;

9. $(A^T)^T=A$; 10. $(A+B)^T=A^T+B^T$;

11. $(AB)^T=B^T A^T$.

Приклад 1. Знайти добуток матриць AB, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 5 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки кількість стовпчиків матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, то операція множення AB має зміст і добуток матриць дорівнює:

$$AB=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+3\cdot 5+2\cdot 4 & 1\cdot 0+3\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 1+3\cdot(-1)+2\cdot 2\\ 4\cdot(-2)+1\cdot 5+3\cdot 4 & 4\cdot 0+1\cdot 1+3\cdot 3 & 4\cdot 1+1\cdot(-1)+3\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}21 & 9 & 2\\ 9 & 10 & 9\end{pmatrix}.$$

Цілим додатним степенем A^n квадратної матриці A є добуток n матриць, рівних A.

Приклад 2. Знайти A^3, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Виконаємо дії

$$AA=A^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2-1\cdot 3 & 2\cdot(-1)-1\cdot 1\\ 3\cdot 2+1\cdot 3 & 3\cdot(-1)+1\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 9 & -2\end{pmatrix}.$$

Далі

$$A^3=A^2A=AA^2=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 9 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-9 & -1-3\\ 18-6 & -9-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7 & -4\\ 12 & -11\end{pmatrix}.$$

Матриці широко використовуються при побудові економіко-математичних моделей економічних процесів.

Приклад 3. Відомі витрати трьох видів ресурсів P_1, P_2, P_3 на виробництво одиниці кожного з двох різних видів продукції $\varPi_1, \varPi_2$ (в умовних одиницях). Ціни умовних одиниць P_1, P_2, P_3 дорівнюють відповідно 12, 7 і 5 у.о. Визначити вартість ресурсів для одиниці кожного виду продукції та їх загальну вартість, якщо продукції $\varPi_1$ випущено 5 одиниць, а продукції $\varPi_2$ – 8 одиниць.

Розв'язання. Складемо матрицю A витрат ресурсів на одиницю кожного виду продукції:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \varPi_1 \\ \varPi_2 \end{array} \end{array}$$

та матрицю B вартості одиниці кожного виду ресурсів:

$$B = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Вартість ресурсів для одиниці кожного виду продукції дорівнює добутку матриць AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 67 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що порядок множників визначається можливістю множення двох матриць, а також конкретним змістом їх добутку.

Елементами матриці AB є вартість ресурсів для одиниці кожного з двох видів продукції. Кількість одиниць продукції $\varPi_1$ і $\varPi_2$ запишемо у вигляді матриці $C = \begin{pmatrix} 5 & 8 \end{pmatrix}$. Тоді загальна вартість ресурсів є добутком матриць $C(AB)$:

$$C(AB) = \begin{pmatrix} 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 \\ 67 \end{pmatrix} = 741.$$

Загальну вартість ресурсів можна визначити іншим чином. Знайдемо матрицю витрат ресурсів CA на 5 і 8 одиниць продукції:

$$CA=\begin{pmatrix}5 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 42 & 39\end{pmatrix},$$

а потім, використовуючи матрицю B цін одиниці кожного виду ресурсів, знаходимо матрицю загальних витрат:

$$(CA)B=\begin{pmatrix}21 & 42 & 39\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\ 7\\ 5\end{pmatrix}=741.$$

Приклад 4. В області m підприємств однієї галузі. Кожне з них використовує n видів сировини з одного й того ж джерела надходження. Кожне підприємство для постачання сировини може використати тільки один з трьох видів транспорту: 1) залізничний, 2) водний, 3) повітряний. Нехай x_{ij} - кількість j-го виду сировини, що використовується протягом року i-м підприємством; $X=\left(x_{ij}\right)$, $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$ – матриця витрат сировини. Нехай p_{ij} - вартість доставки одиниці сировини j-го виду з джерела надходження на підприємство транспортом k-го виду і $P=\left(p_{ij}\right)$, $j=1,2,...,n$, $k=1,2,3$ – матриця вартості перевозок. Визначити витрати кожного підприємства на доставку всієї сировини, що використовується протягом року, транспортом кожного виду.

Розв'язання. Розглянемо матрицю витрат $Y=\left(y_{ik}\right)$, елементи якої y_{ik} - витрати i-го підприємства на доставку всієї сировини транспортом k-го виду знаходяться за формулою:

$$y_{ik}=x_{i1}p_{1k}+x_{i2}p_{2k}+...+x_{in}p_{nk},$$

де кожен доданок - це витрати підприємства на доставку відповідного виду сировини. Використовуючи правило множення матриць, розв'язок задачі записується у вигляді $Y=XP$.

Задачі для розв'язування.

1. Знайти $A+B$, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 5 & 1 & -3\\ 0 & 2 & -7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 5 & 3 & -2\\ 7 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

2. Знайти $3A-2B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Знайти x_1 і x_2 з рівнянь:

3. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. **4**. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Транспонувати матриці:

5. $A=(2 \quad -7 \quad 1)$. **6**. $A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **7**. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. **9**. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **10**. $A=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Знайти AB:

11. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$. **12**. $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. **13**. $A=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B=(-2 \quad 5 \quad 1)$. **14**. $A=(2 \quad 1 \quad 3)$,

$B=\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. **15**. $A=(-3 \quad 1 \quad 2)$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. **17**. $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Перевірити, чи комутативні матриці:

18. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}$. **19**. $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\5 & 3\end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$. **21**. $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\3 & 9 & 4\\1 & 5 & 3\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}7 & -6 & 1\\-5 & 3 & 1\\6 & -3 & -3\end{pmatrix}$.

22. Довести, що матриця $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\5 & 2\end{pmatrix}$ задовольняє рівняння $x^2-5x+11=0$.

23. Довести, що матриця $A=\begin{pmatrix}4 & -5\\-1 & 2\end{pmatrix}$ задовольняє рівняння $x^2-6x+3=0$.

24. Знайти $f(A)$, якщо $f(x)=2x^2-3x+4$, $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & 3 & -1\\-4 & 5 & 2\end{pmatrix}$.

25. Знайти $f(A)$, якщо $f(x)=x^3-x^2+4x-3$, $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}$.

Що повинен знати і вміти студент. Знати означення та властивості матриць та дій над ними. Вміти виконувати дії над матрицями.

§ 2. ВИЗНАЧНИКИ ДРУГОГО ТА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКІВ. ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Розглянемо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1;\\a_2x+b_2y=c_2.\end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на b_2, а друге на b_1 і віднімемо від першого рівняння друге.

Маємо

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1.$$

Подібним чином виключимо з системи змінну x:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = c_1a_2 - c_2a_1.$$

За умови, що вираз $(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$ ділимо обидві частини отриманих рівнянь на цей множник і одержимо єдиний розв'язок системи:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}; \quad y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Запишемо коефіцієнти системи у вигляді матриці $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$.

Тоді вираз $(a_1b_2 - a_2b_1)$ називають ***визначником матриці***

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

другого порядку і позначають

$$|A| = \Delta = \Delta A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \det A = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо ще систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1; \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2; \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Виключимо з системи змінні x, y. Помножимо перше рівняння на $(b_2c_3 - b_3c_2)$, друге на $(b_3c_1 - b_1c_3)$, третє на $(b_1c_2 - b_2c_1)$ і додамо всі три рівняння.

Маємо

$$(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)x +$$
$$+(b_1b_2c_3 - b_1b_3c_2 + b_2b_3c_1 - b_2b_1c_3 + b_3b_1c_2 - b_3b_2c_1)y +$$
$$+(c_1b_2c_3 - c_1b_3c_2 + c_2b_3c_1 - c_2b_1c_3 + c_3b_1c_2 - c_3b_2c_1)z =$$

$$= d_1 b_2 c_3 - d_1 b_3 c_2 + d_2 b_3 c_1 - d_2 b_1 c_3 + d_3 b_1 c_2 - d_3 b_2 c_1 .$$

Коефіцієнти при y, z дорівнюють нулю, а коефіцієнт при змінній x відіграє таку ж роль, що і $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ для системи другого порядку. Його називають ***визначником*** матриці третього порядку і позначають так:

$$\Delta A = |A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Елементи визначника, аналогічно елементам матриці, записують з подвійними індексами, тобто

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \ |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Введемо кілька означень для узагальнення результату на системи n рівнянь з n невідомими.

Нехай є перестановка $j = (j_1, j_2, ..., j_n)$, де $j_1, j_2, ..., j_n$ – числа 1, 2, ...,n, розташовані в певному порядку.

Пара елементів (j_i, j_k), $i < k$ утворює ***інверсію***, якщо $j_i > j_k$. Число всіх таких пар інверсій називають ***числом інверсій*** у перестановці $j = (j_1, j_2, ..., j_n)$ і позначають: $inv(j_1, j_2, ..., j_n)$. Перестановку називають ***парною***, якщо число інверсій парне і ***непарною*** – в протилежному випадку. Так $inv(3, 2, 1) = 3$.

Визначником n-го порядку квадратної матриці A розміру n називають алгебраїчну суму всіх можливих добутків, які містять по одному елементу з кожного рядка і кожного стовпчика матриці. Знак кожного доданка дорівнює $(-1)^t$, де t – число інверсій в других індексах, якщо елементи доданка розташовані у порядку зростання перших індексів.

$$\Delta A = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j} (-1)^{inv(j_1, j_2, ..., j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \quad .$$

Порядок визначника дорівнює числу його рядків або стовпчиків.

Визначники 2-го і 3-го порядків визначають рівності

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ ;$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Наведемо властивості визначників на прикладі визначників другого порядку:

1) визначник не зміниться, якщо його рядки поміняти місцями з відповідними стовпчиками, тобто
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix};$$
2) визначник змінить знак на протилежний, якщо переставити два рядки (два стовпчики), тобто
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix};$$
3) визначник з двома однаковими рядками (стовпчиками) дорівнює нулю;
4) спільний множник усіх елементів рядка (стовпчика) можна винести за знак визначника:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$
5) якщо усі елементи рядка (стовпчика) дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю;
6) визначник, який містить два пропорційні рядки (стовпчики), дорівнює нулю;
7) якщо елементи деякого рядка (стовпчика) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

8) якщо до елементів будь-якого рядка (стовпчика) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпчика), помножені на одне й те саме число, то значення визначника не зміниться:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Усі властивості визначників другого порядку мають місце і для визначників довільного порядку.

Мінором M_{ij} ***елемента*** a_{ij} визначника n - го порядку називають визначник $(n-1)$ - го порядку, що отриманий з визначника n - го порядку шляхом викреслення i -го рядка та j - го стовпчика.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називають його мінор M_{ij}, помножений на $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

При обчисленні визначників порядку $n(n>2)$ часто користуються ***теоремою Лапласа***: визначник n -го порядку дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпчика) на їх алгебраїчні доповнення, тобто

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Приклад1. Обчислити визначник, розклавши його за елементами першого рядка.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & -4\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+3}\cdot(-4)\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\cdot(-4)-2\cdot 8-4\cdot 4=-44\,.$$

Задачі для розв'язування.

Обчислити визначники другого порядку:

1. $\begin{vmatrix}12 & 4\\ 7 & 5\end{vmatrix}$. **2**. $\begin{vmatrix}a & ab\\ 1 & b\end{vmatrix}$. **3**. $\begin{vmatrix}\operatorname{tg}\varphi & -1\\ 1 & \operatorname{tg}\varphi\end{vmatrix}$.

Розв'язати рівняння:

4. $\begin{vmatrix}x-1 & 2\\ 3-x & 3\end{vmatrix}=0$. **5**. $\begin{vmatrix}x-1 & x-1\\ 7-x & x+3\end{vmatrix}=0$. **6**. $\begin{vmatrix}x+2 & x-1\\ -2x & x-3\end{vmatrix}=0$.

7. $\begin{vmatrix}\sin 2x & -\sin x\\ \cos 2x & \cos x\end{vmatrix}=0$.

Обчислити визначники третього порядку:

8. $\begin{vmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 7 & 3\\ 4 & 5 & 8\end{vmatrix}$. **9**. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$. **10**. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & 0 & 3\\ 7 & 5 & 8\end{vmatrix}$. **11**. $\begin{vmatrix}1 & \sin\alpha & \cos\alpha\\ 1 & \sin\beta & \cos\beta\\ 1 & \sin\gamma & \cos\gamma\end{vmatrix}$.

Розв'язати рівняння та нерівності:

12. $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ x-1 & 5 & 2\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}=0$. **13**. $\begin{vmatrix}2x+1 & -1 & 2\\ 3-x & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2x+3\end{vmatrix}=0$.

14. $\begin{vmatrix}3 & x & 2-x\\ 2 & -1 & 5\\ x+10 & 1 & 3\end{vmatrix}>0$. **15**. $\begin{vmatrix}2 & 0 & -x\\ 5 & x+5 & -1\\ -3 & 0 & 5\end{vmatrix}\le 0$.

§ 3. ПОНЯТТЯ n-ВИМІРНОГО ЛІНІЙНОГО ПРОСТОРУ

Множину L елементів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \ldots$ довільної природи називають ***дійсним лінійним простором***, якщо виконуються умови:

1) визначено операцію додавання, що будь-яким двом елементам $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ з множини L ставить у відповідність третій елемент з цієї множини $\vec{x}_3 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ – суму елементів $\vec{x}_1$ і $\vec{x}_2$;

2) визначено операцію множення довільного числа α на довільний елемент $\vec{x} \in L$ рівний $\alpha\vec{x} \in L$;

3) операції додавання і множення на число мають властивості:

1. $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{x}_2 + \vec{x}_1$;
2. $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \vec{x}_3 = \vec{x}_1 + (\vec{x}_2 + \vec{x}_3)$;
3. існує нульовий елемент $\vec{0}$ такий, що $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$;
4. для кожного $\vec{x} \in L$ існує протилежний елемент $\vec{x}'$ такий, що $\vec{x} + \vec{x}' = \vec{0}$;
5. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ для будь-якого $\vec{x} \in L$;
6. $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$;
7. $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$;
8. $\lambda(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \lambda\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2$.

Елементи лінійного простору часто називають ***векторами***. Множина квадратних матриць n-го порядку з введеними для матриць операціями додавання і множення на число утворює лінійний простір.

Вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ називають ***лінійно залежними***, якщо існують такі числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ не всі рівні нулю одночасно, що лінійна комбінація

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \ldots + c_n\vec{x}_n = 0$$

і ***лінійно незалежними***, якщо ця рівність виконується лише за умови, що усі $c_1, c_2, \ldots, c_n$ рівні нулю одночасно.

Сукупність лінійно незалежних векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ називають ***базисом простору*** L, якщо для кожного вектора $\vec{x}$ з L існують такі дійсні числа $a_1, a_2, ..., a_n$ не рівні нулю одночасно, що справедлива рівність

$$\vec{x} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + ... + a_n\vec{x}_n .$$

Цю рівність називають ***розкладом вектора*** $\vec{x}$ у базисі $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$.

Лінійний простір називають ***n – вимірним***, якщо у ньому існує n лінійно незалежних векторів, а будь-які $(n+1)$ вектори лінійно залежні.

§ 4. РАНГ МАТРИЦІ

Нехай задано матрицю A розміру $m \times n$. Виділимо в матриці A будь-які k рядків і стільки ж стовпчиків, де число k не більше чисел m і n.

Визначник порядку k, складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називають ***мінором*** k ***- го порядку матриці*** A.

Рангом матриці називають найвищий порядок відмінного від нуля мінора (***базисного мінора***) цієї матриці і позначають $r(A) = r$.

Для знаходження рангу матриці користуються ***методом обвідних мінорів***, коли від мінорів меншого порядку переходять до мінорів більших порядків. Якщо знайдено ненульовий мінор порядку k, то обчислюють мінори порядку $k+1$, які містять цей мінор. У разі, якщо усі ці мінори дорівнюють нулю, ранг матриці $r(A) = k$, якщо знайдеться ненульовий мінор порядку $k+1$, то обчислюють мінори порядку $k+2$.

Інший метод обчислення рангу матриці – ***метод елементарних перетворень***. До елементарних перетворень матриці відносять:
– перестановку рядків або стовпчиків;

– додавання до усіх елементів рядка (стовпчика) елементів іншого рядка (стовпчика) помножених на одне й те саме число.

Матриці, одержані одна з іншої у результаті скінченного числа елементарних перетворень називають ***еквівалентними*** і їх ранги рівні.

Матрицю називають ***трапецієподібною***, якщо вона має вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг трапецієподібної матриці дорівнює k – кількості її ненульових рядків (стовпців). Для будь-якої ненульової матриці A існує еквівалентна їй трапецієподібна.

Приклад 1. Обчислити ранг матриці а) методом обвідних мінорів; б) методом елементарних перетворень, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 13 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. **а)** мінор другого порядку, що стоїть у лівому верхньому кутку відмінний від нуля $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$. Розглянемо мінори третього порядку, які його містять.

$$M = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 13 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 13 + 1\cdot 3\cdot 4 - 3\cdot 3\cdot 5 - 4\cdot 2\cdot 5 -$$

$$-2\cdot 3\cdot 3 - 1\cdot(-3)\cdot 13 = 0,$$

$$M = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 1 - 3\cdot 0\cdot 5 - 1\cdot 2\cdot 5 -$$

$$-2\cdot 3\cdot 0 - 1\cdot(-3)\cdot 1 = 0,$$

$$M=\begin{vmatrix}2 & -3 & -2\\ 1 & 2 & 2\\ 5 & 3 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 2\cdot 4+1\cdot 3\cdot(-2)-3\cdot 2\cdot 5-(-2)\cdot 2\cdot 5-$$

$-2\cdot 2\cdot 3-1\cdot(-3)\cdot 4=0$.

Усі мінори третього порядку, що містять відмінний від нуля мінор $\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}$ дорівнюють нулю, тому ранг матиці $r\left(A\right)=2$.

б) Виконаємо елементарні перетворення матриці A. Поміняємо місцями перший і другий рядки

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & 4 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 3 & 0 & 2\\ 5 & 3 & 13 & 1 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & 2\\ 2 & -3 & 4 & 1 & -2\\ 5 & 3 & 13 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Додамо до другого рядка перший рядок, помножений на (-2) і до третього рядка перший рядок, помножений на (-5). Дістанемо матрицю

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & 2\\ 2 & -3 & 4 & 1 & -2\\ 5 & 3 & 13 & 1 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & 2\\ 0 & -7 & -2 & 1 & -6\\ 0 & -7 & -2 & 1 & -6\end{pmatrix}.$$

Другий рядок помножимо на (-1) і додамо до третього

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & 2\\ 0 & -7 & -2 & 1 & -6\\ 0 & -7 & -2 & 1 & -6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & 2\\ 0 & -7 & -2 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Трапецієподібна матриця містить два ненульових рядки, тому ранг матиці $r\left(A\right)=2$.

Задачі для розв'язування.

Знайти ранг матриці, вказати базисний мінор:

1. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 7\\ 7 & 7 & 11\end{pmatrix}$. **2**. $\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 2 & 9\\ 2 & 5 & 4 & 7 & 3\\ -1 & -3 & 0 & -2 & -9\end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 5 \\ 7 & 6 & 11 & -1 \end{pmatrix}$. **4**. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Знайти ранг матриці для різних значень λ:

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1+\lambda & -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. **6**. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & -1 & 1+\lambda \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 4 & -9 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

Що повинен знати і вміти студент. Знати означення мінора елемета та матриці, алгебраїчного доповнення, лінійної залежності і незалежності векторів, означення рангу матриці. Вміти знаходити ранг матриці.

§ 5. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. МЕТОД ГАУССА. ПРАВИЛО КРАМЕРА. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Матрицю A^{-1} називають ***оберненою*** до матриці A, якщо $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця.

Якщо $|A| \neq 0$, то обернену матрицю шукають за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}. Якщо $|A| = 0$, обернена матриця не існує.

Приклад 1. Знайти обернену до матриці A матрицю, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2; \qquad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5;$$

Обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо систему m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно n змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ з відомими коефіцієнтами a_{ij} ($i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$) та вільними членами $b_1, b_2, ..., b_m$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}.$$

Використовуючи поняття матричного добутку, цю систему можна записати у матричній формі $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матрицю $\quad \tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

називають ***розширеною матрицею*** системи.

СЛАР називають ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, в іншому випадку система є несумісною.

Теорема Кронекера-Капеллі. Для сумісності СЛАР необхідно і достатньо, щоб ранг матриці $r(A)$ дорівнював рангу розширеної матриці $r(\tilde{A})$. При цьому система має єдиний розв'язок, якщо $r(A)=r(\tilde{A})=n$ і безліч розв'язків, якщо $r(A)=r(\tilde{A})<n$; якщо $r(\tilde{A})>r(A)$ – система несумісна.

Якщо в СЛАР $n=m$ і визначник системи $|A|\neq 0$, то єдиний розв'язок системи можна знайти за формулою $X=A^{-1}B$,
або за ***правилом Крамера***:

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta},\ \ j=1,2,...,n,$$

де Δ - визначник системи, а Δ_j – визначник, який отримують з Δ заміною j – го стовпчика стовпцем вільних членів.

Систему виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

називають ***однорідною***. Однорідна система завжди сумісна, оскільки має нульовий (тривіальний) розв'язок $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$. Якщо ранг матриці A дорівнює кількості невідомих однорідної системи (тобто визначник матриці не дорівнює нулю), то цей розв'язок єдиний. У випадку $r(A)=r<n$ система має безліч розв'язків, відмінних від нульового. Сукупність $(n-r)$ лінійно незалежних розв'язків однорідної системи утворює ***фундамента-***

льну систему розв'язків. Змінні $x_1, x_2, \ldots, x_r$ називають ***базовими***, $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ – ***вільними***.

Приклад 2. Розв'язати матричним методом і за формулами Крамера систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Шукаємо визначник матриці

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -11 .$$

Обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{-1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & -7 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & -7 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$.

Використаємо тепер формули Крамера:

$$\Delta = -11, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -11, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -11,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0 .$$

Приклад 3. Витрати трьох видів сировини (A, B, C) на виробництво одиниці кожного з трьох типів продукції (I,II,III) і запаси кожного виду сировини наведені в таблиці:

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			Запаси сировини
	I	II	III	
A	2	3	1	245
B	1	0	2	130
C	3	4	0	270

Необхідно визначити план виробництва, що забезпечує використання всієї сировини.

Розв'язання. Нехай x_1, x_2, x_3 – кількість одиниць продукції відповідно I, II, III типів, яку повинно виготовити підприємство. Витрати сировини A на виробництво за таким планом складе $(2x_1 + 3x_2 + x_3)$ одиниць, що за умовою повинно дорівнювати його запасу, тобто

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 245.$$

Склавши аналогічні рівняння для інших видів сировини, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 245, \\ x_1 + 2x_3 = 130, \\ 3x_1 + 4x_2 = 270. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо $x_1 = 30$, $x_2 = 45$, $x_3 = 50$.

Отже, підприємство при сбалансованому плані повинно випускати 30 одиниць продукції I типу, 45 одиниць продукції II типу і 50 одиниць продукції III типу.

Приклад 4. У трьох торгівельних точках проведено ревізію і отримано такі дані про кількість проданих товарів трьох видів (в умовних одиницях):

№ магазина	Вид товару		
	I	II	III
1	1	0	3
2	3	1	7
3	2	1	8

У касі першого магазина знаходиться 31.8 у.о. , 2-го – 154,6, 3-го – 141,1. Визначити, за якою ціною продавався кожен вид товара (для того, щоб порівняти ці ціни з цінами, поданими у накладних).

Розв'язання. Нехай $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ – матриця – стовпчик вартостей товарів; $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\3&1&7\\2&1&8\end{pmatrix}$ – матриця продажу;

$B=\begin{pmatrix}31,8\\154,6\\141,1\end{pmatrix}$ – матриця-стовпчик виручки (по магазинам). Складемо матричне рівняння $AX=B$, звідки отримаємо $X=A^{-1}B$.

Обернена матриця A^{-1} має вигляд $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3&-3\\-10&2&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3&-3\\-10&2&2\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}31,8\\154,6\\141,1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18,8\\68,35\\4,57\end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок однорідної системи.

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3-x_4+x_5=0,\\2x_1-x_2+4x_3-3x_4+5x_5=0,\\3x_1-2x_2+5x_3-4x_4+6x_5=0.\end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень приведемо її до трапецієподібного виду. Для цього перший рядок множимо на (-2) і на (-3) додаємо до другого та до третього рядків. Маємо

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & -4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці дорівнює 2, тобто ситема має дві незалежні змінні і три вільні. Візьмемо за базові змінні x_1 та x_2. Перетворена система має вигляд

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ \quad x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши її відносно x_1 та x_2, дістанемо

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 + x_4 - x_5, \\ x_2 = -2x_3 + x_4 - 3x_5, \\ x_3 = 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5, \\ x_4 = 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 + 0\cdot x_5, \\ x_5 = 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 1\cdot x_5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 + 2x_4 - 4x_5, \\ x_2 = -2x_3 + x_4 - 3x_5, \\ x_3 = 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5, \\ x_4 = 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 + 0\cdot x_5, \\ x_5 = 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 1\cdot x_5, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 .$$

Вектори $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків. Загальний розв'язок системи рівнянь можна записати у вигляді $\vec{x} = C_1\vec{a}_1 + C_2\vec{a}_2 + C_3\vec{a}_3$, де C_1, C_2, C_3 – довільні дійсні сталі.

Або в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задачі для розв'язування.

Знайти обернену матрицю:

1. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. **2**. $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. **3**. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. **4**. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язати матричні рівняння:

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. **7**. $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **11**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язати систему матричним способом та за формулами Крамера:

12. $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = -3. \end{cases}$ **13**. $\begin{cases} x - 3y - 3z = -6, \\ 3x + y + 3z = 4, \\ 3x - 2y - z = -3. \end{cases}$ **14**. $\begin{cases} 5x - y - 3z = 2, \\ 2x - 2y + z = 9, \\ x + 3y - z = -4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x + y - 4z = 9, \\ x - 3y + 3z = -16, \\ 2x + 2y - 3z = 10. \end{cases}$

Дослідити систему на сумісність:

16. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2x-y+z=2, \\ x+4y+2z=5. \end{cases}$ **17**. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=8, \\ 2x_1-x_2-43x_3+3x_4=1, \\ 4x_1-7x_2-18x_3+11x_4=-13, \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=9. \end{cases}$

Знайти фундаментальну систему розв’язків однорідної системи

18. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1-3x_2-4x_3+x_4=0, \\ x_1+7x_3-4x_4=0. \end{cases}$

Що повинен знати та вміти студент. Знати означення оберненої матриці, теорему Кронекера-Капеллі. Вміти знаходити обернену матрицю, досліджувати сумісність системи лінійних рівнянь, розв’язувати системи за методом Крамера, Гаусса.

§ 6. ВЛАСНІ ЧИСЛА І ВЛАСНІ ВЕКТОРИ МАТРИЦЬ

Всякий ненульовий вектор-стовпець X, що задовольняє умову $AX=\lambda X$, де λ – дійсне число називають ***власним вектором*** матриці A, а число λ – ***власним числом*** матриці A, що відповідає вектору X. Вектор X визначається неоднозначно, а з точністю до ненульового скалярного множника C.

Власні числа матриці A є коренями її ***характеристичного рівняння*** $\Delta(A-\lambda E)=0$, або в розгорнутому вигляді

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Власний вектор $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, що відповідає власному числу λ, визначається з системи рівнянь

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+a_{23}x_3=0,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-\lambda)x_3=0.\end{cases}$$

Коли λ – кратний корінь характеристичного рівняння, система може визначати кілька власних векторів.

Приклад 1. Знайти власні числа і власні вектори матриці $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&5&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Розв'яжемо характеристичне рівняння матриці

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&-1&1\\-1&5-\lambda&-1\\1&-1&3-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

$$(3-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda)+1+1-5+\lambda-3+\lambda-3+\lambda=0,$$

$$(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-6)=0,\quad \lambda_1=2,\quad \lambda_2=3,\quad \lambda_3=6.$$

Отже, матриця A має три власних числа. Знайдемо тепер власні вектори, підставляючи по черзі значення $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ в систему

$$\begin{cases}(3-\lambda)x_1-x_2+x_3=0,\\ -x_1+(5-\lambda)x_2-x_3=0,\\ x_1-x_2+(3-\lambda)x_3=0.\end{cases}$$

Власному числу $\lambda_1=2$ відповідає власний вектор X_1, координати якого задовольняють систему

$$\begin{cases}(3-2)x_1-x_2+x_3=0,\\ -x_1+(5-2)x_2-x_3=0,\\ x_1-x_2+(3-2)x_3=0,\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ -x_1+3x_2-x_3=0,\\ x_1-x_2+x_3=0.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} 2x_2 = 0, \\ x_1 = -x_3 \end{cases}$ і власний вектор $X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Аналогічно знаходяться власні вектори

$$X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ та } X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

де C_1, C_2, C_3 – відмінні від нуля дійсні числа.

Якщо найбільше за модулем власне число матриці A є меншим одиниці, то ***матриця є продуктивною***.

Приклад 2. При яких значеннях параметра a задана матриця Леонт'єва буде продуктивною?

$$A = a \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Знайдемо власні числа матриці A. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 5a-\lambda & -3a & 2a \\ 6a & -4a-\lambda & 4a \\ 4a & -4a & 5a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

або

$$-\lambda^3 + 6a\lambda^2 - 11a^2\lambda + 6a^3 = 0.$$

Шукаємо корені рівняння серед дільників вільного члена. Ними будуть числа $a, 2a, 3a.$ Отже, власними числами матриці A будуть $\lambda_1 = a,\ \ \lambda_2 = 2a,\ \ \lambda_3 = 3a.$ Щоб матриця A була про-дуктивною, повинна виконуватись умова $|3a| < 1,$ тобто $|a| < \dfrac{1}{3}$.

Задачі для розв'язування.

Знайти власні числа та власні вектори матриці

1. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. **2**. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. **3**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **4**. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **6**. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. 7. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

Що повинен знати та вміти студент. Знати означення власних векторів та власних чисел. Вміти знаходити власні числа та власні вектори матриці.

ТЕМА 2. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

§ 1. ГЕОМЕТРИЧНІ ВЕКТОРИ. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА

Вектором (геометричним) називають напрямлений відрізок прямої $\overrightarrow{AB}$, довжина якого – ***модуль*** або ***довжина вектора***.

Задати вектор означає задати його напрям та довжину.

Точку A називають початком, а точку B – кінцем вектора $\overrightarrow{AB}$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають ***рівними***, якщо вони мають однакову довжину та співнапрямлені.

Вектор, початок і кінець якого співпадають, називають ***нуль–вектором***. Напрям його не визначений.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці називають ***одиничним*** вектором.

Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$ називають ***ортом*** вектора $\vec{a}$ і позначають $\overrightarrow{a^0}$.

Вектори можна вільно переміщувати по площині (в просторі). Тому їх називають ***вільними*** векторами.

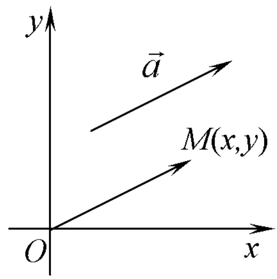
Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній або на паралельних прямих. Колінеарні вектори можуть бути напрямленими однаково або протилежно.

Три вектори називають ***компланарними***, якщо вони лежать в одній або паралельних площинах. Зокрема, три вектори компланарні, якщо два з них або всі три колінеарні, або хоча б один з них є нуль-вектор.

Якщо вектор $\vec{a}$ паралельним переносом розташувати так, щоб його початок співпав з початком декартової системи координат, то координати його кінця $M(x, y)$ $(M(x, y, z))$ називають ***координатами вектора*** $\vec{a}$.

Вектор $\vec{a}$, заданий своїми координатами x, y, z записують у вигляді $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ або $\vec{a} = (x, y, z)$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні (***орти***), взаємно перпендикулярні вектори.

Якщо відомі координати початку $A(x_1, y_1, z_1)$ та кінця $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.



Довжину вектора $\vec{a}$ записують так:

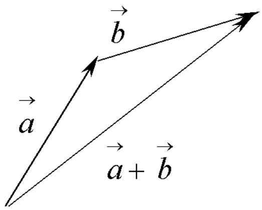
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Операції над векторами

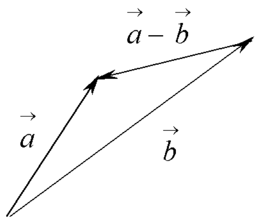
1. ***Добутком вектора*** $\vec{a}$ ***на число*** λ називають новий вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, довжина якого дорівнює довжині вектора $\vec{a}$ помноженій на модуль числа λ, а напрям співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$, за умови, що $\lambda > 0$, і протилежний вектору $\vec{a}$, якщо $\lambda < 0$.

З означення множення вектора на число випливає, що коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то існує єдине число λ таке, що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ і , навпаки, якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

2. ***Сумою векторів*** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ такий, що його початок співпадає з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$, за умови, що кінець вектора $\vec{a}$ співпадає з початком вектора $\vec{b}$. Аналогічно визначають суму будь-якого скінченого числа векторів. Вектор $\vec{a}$ називають ***протилежним*** вектору $\vec{a}$. Ці два вектори колінеарні, мають однакові довжини та протилежно напрямлені.



3. ***Різницею*** векторів $\vec{a} - \vec{b}$ є вектор $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$, тобто вектор, напрямлений з кінця вектора $\vec{b}$ у кінець вектора $\vec{a}$ за умови, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виходять з однієї точки.



Властивості операцій над векторами

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
3. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
5. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
6. $\vec{a}(\lambda + \mu) = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.
7. $\lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$.

Якщо вектори задані своїми координатами

$$\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\} \text{ та } \vec{b} = \{x_b;\ y_b;\ z_b\},$$

то лінійні операції над векторами замінюють лінійними операціями над їх координатами, тобто

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda x_a; \lambda y_a; \lambda z_a\}; \quad \vec{a}+\vec{b} = \{x_a + x_b;\ y_a + y_b;\ z_a + z_b\}.$$

Кутом між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зведеними до спільного початку, називають найменший кут, на який необхідно повернути вектор $\vec{a}$ навколо спільного початку, щоб він співпав з вектором $\vec{b}$.

Кути, які вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями *Ox, Oy, Oz* називають ***напрямними кутами***, а косинуси цих кутів ***напрямними косинусами***.

Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ знаходять з формул:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}.$$

Для напрямних косинусів виконується рівність

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Задачі для розв'язування.

1. Довести, що $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$, якщо AD, BE, CF медіани трикутника $\triangle ABC$.

2. Точки E і F середини сторін AD і BC чотирикутника $ABCD$. Довести, що $EF = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

3. $ABCD-$ рівнобічна трапеція з нижньою основою $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, бічною стороною $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ і кутом між ними $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \pi/3$. Розкласти за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$.

4. Відомо дві координати вектора $\vec{a}$: $x = 4,\ y = -12$. Знайти його третю координату z, якщо $|\vec{a}| = 13$.

5. Дано точки $A(1, 3, -2)$, $B(-2, 5, 2)$. Знайти довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
6. Визначити, при яких значеннях α, β колінеарні вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$.
7. Знайти модулі різниці та суми векторів $\vec{a} = \{3; -5; 8\}$, $\vec{b} = \{-1; 1; -4\}$.
8. Знайти $5\vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \{8; 3; -2\}$, $\vec{b} = \{3; 5; 1\}$.

Що повинен знати та вміти студент. Виконувати лінійні операції над векторами, знаходити координати вектора та його довжину за координатами початку та кінця вектора. Знати умову колінеарності векторів.

§ 2. БАЗИС В R^2 І R^3

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, розташовані на одній прямій або на паралельних прямих, називають ***колінеарними*** і для них виконується рівність $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, де λ – дійсне число. З цієї рівності випливає пропорційність координат колінеарних векторів.

Два неколінеарні вектори утворюють на площині R^2 ***базис***. Існує безліч базисів на площині. Одиничні взаємно перпендикулярні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ утворюють ***ортонормований базис*** в R^2.

Теорема. Якщо вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ утворюють базис в R^2, то будь-який третій вектор $\vec{a}$ з R^2 можна подати у вигляді ***лінійної комбінації*** цих векторів

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

зі сталими x_1, x_2, які називають ***координатами*** вектора $\vec{a}$ у базисі $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$. Таке представлення єдине.

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називають ***компланарними***, якщо вони розташовані в одній площині або в паралельних площинах. Якщо відомі координати векторів $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, $\vec{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$, то умову компланарності цих векторів можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0\,.$$

Три некомпланарні упорядковані вектори утворюють у просторі R^3 ***базис***. Кожен вектор у просторі R^3 можна розкласти за базисом. Тобто, якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ складають базис, то $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$, а числа α,β,γ - називають ***координатами вектора*** $\vec{d}$ у даному базисі.

Приклад 1. Розкласти вектор $\vec{x}=\{8;34;22\}$ за векторами $\vec{p}=\{1;6;3\}$, $\vec{q}=\{6;3;1\}$, $\vec{r}=\{3;-1;-6\}$.

Розв'язання. Спочатку покажемо, що вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ утворюють базис. Для цього обчислимо визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -6 \end{vmatrix}=-18+18-18-27+1+216=172\,.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ утворюють базис. Тому вектор $\vec{x}$ запишемо у вигляді

$$\vec{x}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}$$

або в матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 34 \\ 22 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

і знайдемо координати α,β,γ, розв'завши систему

$$\begin{cases} \alpha+6\beta+3\gamma=8 \\ 6\alpha+3\beta-\gamma=34 \\ 3\alpha+\beta-6\gamma=22 \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 172, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 3 \\ 34 & 3 & 1 \\ 22 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 860,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 6 & 34 & 1 \\ 3 & 22 & -6 \end{vmatrix} = 172, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 34 \\ 3 & -1 & 22 \end{vmatrix} = -172.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 5, \quad \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

Тому $\vec{x} = 5\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$.

Приклад 2. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$, побудовані на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \{1; -2; 3\}$, $\vec{b} = \{2; -2; 5\}$, $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{a} + 3\vec{b}$?

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$.

$2\vec{a} = \{2; -4; 6\}$, $3\vec{b} = \{6; -6; 15\}$,

$\vec{c}_1 = \{2; -4; 6\} - \{2; -2; 5\} = \{0; -2; 1\}$,

$\vec{c}_2 = \{1; -2; 3\} + \{6; -6; 15\} = \{7; -8; 18\}$.

Оскільки координати векторів $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$ не пропорційні, то вектори $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$ не колінеарні.

Задачі для розв'язування.

1. На площині задано вектори $\vec{p} = \{2; -3\}, \vec{q} = \{1; 2\}$. Записати представлення вектора $\vec{x} = \{9; 4\}$ у базисі $\vec{p}, \vec{q}$.

2. Довести, що вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}$ за цим базисом, якщо
$\vec{x} = \{-1; 9; 12\}$, $\vec{p} = \{1; 3; 2\}$, $\vec{q} = \{-2; -1; 3\}$, $\vec{r} = \{3; 2; -1\}$.

3. Задано вектори $\vec{p} = \{2; 1; 0\}$, $\vec{q} = \{1; -1; 2\}$, $\vec{r} = \{2; 2; -1\}$, $\vec{x} = \{3; 7; -7\}$. Довести, що кожні три з них утворюють базис і знайти представлення кожного з них, приймаючи три інші за базисні.

4. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$, побудовані на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\{1;-2;4\}$, $\vec{b}=\{7;-2;3\}$, $\vec{c}_1=\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{a}+5\vec{b}$?

5. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{3;-2;4\}$, $\vec{b}=\{1;4;-7\}$, $\vec{c}=\{2;-2;5\}$?

6. Вектори $\vec{a},\vec{b}$ не колінеарні. Довести, що вектори $\vec{m}=3\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{n}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{p}=\vec{a}+3\vec{b}$ лінійно залежні, а вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ не колінеарні.

7. Довести, що для довільних векторів $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ вектори $\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{q}+\vec{r}$, $\vec{r}-\vec{p}$ компланарні.

8. Для трьох не компланарних векторів $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ знайти значення λ, при яких компланарні вектори $\lambda\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\lambda\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}+\lambda\vec{c}$.

Що повинен знати та вміти студент. Розкладати вектори за базисом, знати умови колінеарності та компланарності векторів.

§ 3. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

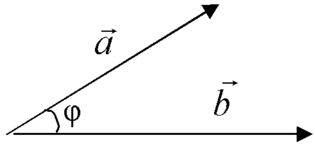
Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число $\vec{a}\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi .$$

Якщо хоча б один з векторів нульовий, то за означенням $(\vec{a},\vec{b})=0$.

З малюнку видно, що $|\vec{a}|\cos\varphi=np_{\vec{b}}\vec{a}$, $|\vec{b}|\cos\varphi=np_{\vec{a}}\vec{b}$.

Отже $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\,np_{\vec{b}}\vec{a}$.



З цих двох формул маємо ***геометричний зміст*** скалярного добутку, а саме: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного вектора на проекцію на нього другого вектора. Звідси формули для знаходження проекцій

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|},\ np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}.$$

Алгебраїчні властивості скалярного добутку.

1. $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$.
2. $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a},\vec{b})$.
3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{a},\vec{c})$.

Ці три властивості обумовлюють аналогію між векторною алгеброю та алгеброю чисел. Проте вона не повна, оскільки:

1. Не існує скалярного добутку трьох векторів і більше.
2. Рівність нулю $(\vec{a},\vec{b}) = 0$ може виконуватись за умови, що $\vec{a} \neq 0$ та $\vec{b} \neq 0$.
3. З рівності $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a},\vec{c})$ не випливає рівність $\vec{b} = \vec{c}$, навіть коли $\vec{a} \neq 0$.

Геометричні властивості скалярного добутку.

1. Якщо $\vec{a} \neq 0$ та $\vec{b} \neq 0$, то $(\vec{a},\vec{b}) > 0$ за умови, що кут φ гострий, і $(\vec{a},\vec{b}) < 0$ за умови, що кут φ тупий.
2. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.
3. $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$, звідси довжину вектора $\vec{a}$ можна знайти за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами

$$\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\},\ \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}.$$

Тоді $\quad (\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

З цієї формули маємо:

1) необхідну і достатню умову перпендикулярності векторів
$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0;$$
2) довжину вектора $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$;
3) косинус кута між векторами
$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Приклад 1. Знайти проекцію вектора $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ на вектор $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \{2;, 0; -2\}$, $\vec{b} = \{-2; 1; 2\}$.

Розв'язання. Знайдемо вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$. Для цього кожну координату вектора $\vec{a}$ помножимо на 2 і додамо до координат вектора $\vec{b}$, тобто $\vec{c} = \{2; 1; -2\}$.

Тому

$$np_{\vec{b}}\vec{c} = \frac{(\vec{c}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{-4 + 1 - 4}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = -\frac{7}{3}.$$

Приклад 2. Знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $A = (0, -1, 2)$, $B = (-1, -2, 7)$, $C = (1, -2, 0)$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Для цього від координат кінця віднімемо координати початку, тобто

$$\overrightarrow{AB} = \{-1 - 0; -2 + 1; 7 - 2\} = \{-1; -1; 5\}$$

$$\overrightarrow{AC} = \{-1 - 1; -2 + 2; 0 - 2\} = \{-2; 0; -2\}.$$

Скористаємось формулою для знаходження косинуса кута між векторами

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{2+0-10}{\sqrt{1+1+25}\sqrt{4+0+4}} = -\frac{8}{\sqrt{26}\sqrt{8}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Отже кут $\varphi = \pi - \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Задачі для розв'язування.

1. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $2\pi/3$. Обчислити $(3\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$, якщо $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$.

2. Знайти значення α, для яких перпендикулярні вектори $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ і $\vec{a}-\alpha\vec{b}$, за умови, що $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5$.

3. Знайти косинус кута, який утворюють між собою вектори $2\vec{a}-\vec{b}$ і $3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, \left(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b}\right)=120^\circ$.

4. Знайти проекцію вектора $\vec{c}=3\vec{a}-5\vec{b}$ на вектор $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\{1;3;-4\}$, $\vec{b}=\{2;-5;3\}$.

5. Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $A(3,-1,-5)$, $B(2,-2,3)$, $C(4,-5,2)$.

6. Знайти косинус кута між векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=\sqrt{3},\ |\vec{b}|=1,\ \left(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b}\right)=30^\circ$.

7. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}, \vec{b}=5\vec{p}+2\vec{q}$, якщо $|\vec{p}|=2\sqrt{2},\ |\vec{q}|=3,$ $\left(\vec{p}\,\widehat{,}\,\vec{q}\right)=\pi/4$.

8. Дано вершини трикутника $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$. Знайти довжини сторін і кути при вершинах цього трикутника.

9. Знайти вектор $\vec{x}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}=\{2;3;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-2;3\}$, якщо $\vec{x}(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6$.

10. Знайти координати вектора $\vec{x}$ колінеарного вектору $\vec{a}=\{2;1;-1\}$, який задовольняє умову $(\vec{x},\vec{a})=3$.

11. Знайти координати вектора $\vec{x}$ колінеарного вектору $\vec{a}=\{6;-8;-7,5\}$, якщо він утворює гострий кут з віссю Oz і його довжина $|\vec{x}|=50$.

Що повинен знати та вміти студент. Знаходити скалярний добуток векторів за означенням та за координатами векторів співмножників, знаходити кут між векторами та проекції вектора на вектор. Знати умову ортогональності векторів.

§ 4. ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

Рівняння $F(x,y)=0$ називають ***рівнянням лінії*** l, заданої на площині відносно декартової системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати кожної точки лінії l і не задовольняють координати жодної точки, що не належить l.

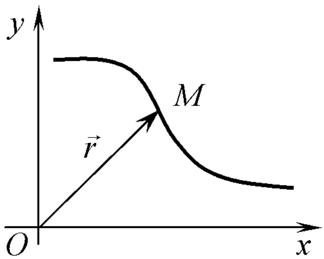
Якщо лінія задана рівнянням, то про кожну точку площини можна сказати чи належить вона цій лінії, чи ні..

В аналітичній геометрії лінії класифікують залежно від властивостей рівняння $F(x,y)=0$. За умови, що вираз $F(x,y)$ є многочленом від змінних x і y, лінію називають алгебраїчною.

Алгебраїчні лінії розрізняють залежно від їх порядку. Степенем одночлена $ax^m y^n$ називають суму $m+n$ степенів при змінних x і y. Степенем рівняння називають найвищий степінь одночлена, що входить у це рівняння. ***Алгебраїчною лінією*** n-го порядку називають лінію, яку задано рівнянням n-го степеня. Порядок алгебраїчної лінії не зміниться у разі заміни декартової системи координат на іншу.

Лінію можна задати і векторним рівнянням $\vec{r}=\vec{r}(t)$, де t – скалярний змінний параметр. Кожному значенню t_0 відповідає цілком визначений вектор $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$. Таким чином за умови, що параметр t набуває певної множини значень, рівняння $\vec{r} = \vec{r}(t)$ визначає деяку множину векторів.

Якщо від точки О площини відкласти вектори $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, то геометричне місце точок, які збігаються з кінцями цих векторів (за умови, що всі вектори компланарні) визначить на площині деяку лінію l.



Вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ називають ***радіус-вектором*** точки $M(x, y)$ площини.

У прямокутній системі координат векторному рівнянню лінії відповідають два рівняння

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases}$$

Такі рівняння називають ***параметричними рівняннями*** лінії.

Крім декартової системи координат часто використовують ***полярну систему координат***.

Довільну точку M у площині буде задано, якщо задано відповідну їй пару чисел ρ і φ, де ρ – відстань від початку координат до точки M, тобто довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$, а φ – кут, на який необхідно повернути проти годинникової стрілки вісь Ox до співпадіння з променем, на якому розташовано вектор $\overrightarrow{OM}$. Числа ρ і φ називають ***полярними координатами*** точки M: ρ – полярним радіусом, φ – полярним кутом. Вісь Ox називають полярною віссю, а точку O – полюсом. У полярній системі координат точку M записують так: $M(\rho, \varphi)$.

§ 5. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

Відомо, що через дві задані точки проходить одна єдина пряма. Нехай задано точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Координати довільної точки M, що належить прямій M_1M_2 позначимо (x, y). Оскільки точка M належить прямій M_1M_2, то вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ – колінеарні, тобто $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{M_1M_2}$
або у координатній формі

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) \text{ та } y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1).$$

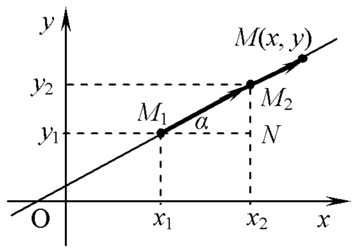
Звідси

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Це рівняння називають ***рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки.***

У випадку, коли $x_1 \neq x_2$ останнє рівняння запишемо так:

$$y - y_1 = k(x - x_1), \text{ де } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



З трикутника M_1M_2N маємо $k = \operatorname{tg}\alpha$, де α – кут, на який треба повернути проти годинникової стрілки вісь Ox до співпадіння з прямою M_1M_2. Коефіцієнт k називають ***кутовим коефіцієнтом прямої***, а рівняння

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

рівнянням з кутовим коефіцієнтом.

Розглянемо випадок, коли точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ лежать на координатних осях. Позначимо координати цих точок через $M_1(a; 0)$ і $M_2(0; b)$. У цьому випадку рівняння прямої набуде вигляду $\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$, або після перетворень

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Таке рівняння називають ***рівнянням прямої у відрізках***.

Нехай у декартовій системі координат задано точку $M_1(x_1; y_1)$ та вектор $\vec{l}=\{m; n\}$. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1; y_1)$ паралельно до вектора $\vec{l}=\{m; n\}$. Оскільки довільна точка M прямої має координати (x, y) і вектор $\overrightarrow{M_1M}$ колінеарний вектору $\vec{l}$, то $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\vec{l}$, або у координатній формі $x-x_1=\lambda m$ та $y-y_1=\lambda n$.

Виключимо з цих рівностей параметр λ та запишемо ***канонічне рівняння*** прямої з напрямним вектором $\vec{l}$:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}.$$

Розглянемо рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_1(x_1; y_1)$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{N}=\{A; B\}$.

Точка $M(x, y)$ належить такій прямій тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\vec{N}=\{A; B\}$ перпендикулярні, тобто їх скалярний добуток дорівнює нулю $\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_1M}=0$ або у координатній формі

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0.$$

Вектор $\vec{N}=\{A; B\}$ називають ***нормальним вектором*** прямої.

Різні форми запису рівняння прямої мають по суті вид

$$Ax+By+C=0.$$

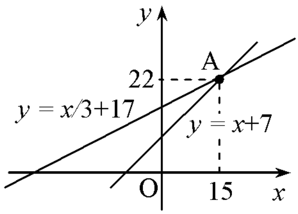
Це рівняння називають *загальним рівнянням* прямої. Коефіцієнти A та B – це координати вектора нормалі прямої.

***Приклад* 1.** Транспортні витрати перевезення одиниці вантажу y залізничним та автомобільним транспортом на відстань x (вимірюється десятками кілометрів) знаходять за формулами

$$y=\frac{x}{3}+17 \text{ та } y=x+7.$$

Визначити рентабельність кожного виду транспорту.

Розв'язання. Побудуємо графіки транспортних витрат перевезення



Знайдемо їх точку перетину A, розв'язавши систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-y=-17; \\ x-y=-7. \end{cases}$$

Отже, маємо:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1/3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1/3+1=2/3; \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} -17 & -1 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}=17-7=10;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1/3 & -17 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}=-7/3+17=44/3;$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=15; \quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=22.$$

Точка перетину A має координати $(15,22)$.

Звідси випливає:

1) якщо $x \in (0,15)$, тобто $x < 150$ км, транспортні витрати перевезення y автотранспортом нижче витрат перевезення залізничним транспортом;
2) якщо ж $x \in (15, \infty)$, тобто $x > 150$ км, більш рентабельним буде залізничний транспорт.

Задачі для розв'язування.

1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(2,1)$ а) паралельно; б) перпендикулярно до прямої $2x+3y+4=0$.

2. Знайти точку Q симетричну точці $P(-5,13)$ відносно прямої $2x-3y-3=0$.

3. Рівняння двох сторін паралелограма $x+2y+2=0$, $x+y-4=0$, рівняння однієї з діагоналей $x-2=0$. Знайти координати вершин паралелограма.

4. Скласти рівняння прямої, паралельної до прямих $3x-2y-1=0$ і $3x-2y-13=0$, що проходить посередині між ними.

5. Знайти кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через точки $M(2;-5), N(3;2)$

6. Знайти точку Q, симетричну точці $P(8,-9)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(3,-4)$ і $B(-1,-2)$.

7. Знайти площу квадрата, якщо його дві сторони лежать на прямих $5x-12y-65=0, 5x-12y+26=0$.

8. Відомі рівняння двох сторін квадрата $5x+12y-10=0$, $5x+12y+29=0$. Скласти рівняння двох інших його сторін, якщо відомо, що точка $M(-3, 5)$ лежить на одній зі сторін.

9. Записати рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих $5x-2y-6=0$, $10x-4y+3=0$.

10. Записати рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $3x+4y-1=0$, $5x+12y-2=0$.

Що повинен знати та вміти студент. Знати основні типи рівнянь прямої на площині, застосовувати їх для розв'язання основних геометричних задач на площині: взаємне розташування прямих, кути між прямими.

§ 6. ПРЯМА І ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ

Кожна площина в декартових координатах визначається рівнянням першого степеня відносно координат x, y, z і може бути задана одним з наступних рівняннь:

1) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – ***рівняння площини, що проходить через точку*** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=\{A;B;C\}$, який називається ***вектором нормалі*** цієї площини (або ***нормальним вектором***);

2) $Ax+By+Cz+D=0$ – ***загальне рівняння площини***, де A, B, C – координати вектора $\vec{n}$, а D – вільний член рівняння;

3) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ – ***рівняння площини у відрізках***, де $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$– точки перетину площини з координатними осями Ox, Oy, Oz .

Пряма в просторі може бути задана:

1) ***загальними рівняннями***

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}, \text{ де } \frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2};$$

2) ***канонічними рівняннями***

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

де (x_0, y_0, z_0) – координати точки, яка належить прямій, а $\{l, m, n\}$ – координати напрямного вектора прямої (тобто вектора, паралельного даній прямій);

3) ***параметричними рівняннями***

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}, \text{ де } t \in]-\infty, +\infty[\text{ , а } (x_0, y_0, z_0) \text{ – координати}$$

точки M_0, яка належить прямій, а $\{l, m, n\}$ – координати напрямного вектора прямої;

4) ***рівняннями прямої, що проходить через дві задані точки*** $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Приклад 1. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{6}$ і площини $2x + 3y + z + 2 = 0$.

Розв'язання. Для того, щоб знайти точку перетину прямої з площиною необхідно записати параметричні рівняння прямої. Оскільки напрямний вектор має координати $\{1; -2; 6\}$, а точка M_0, що належить прямій має координати $(1; -2; 0)$, то параметричні рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 6t \end{cases}.$$

Координати точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ перетину прямої і площини задовольняють обидва рівняння

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ y_1 = -2 - 2t \\ z_1 = 6t \end{cases} \quad \text{і} \quad 2x_1 + 3y_1 + z_1 + 2 = 0.$$

Отже, маємо $2(1+t)+3(-2-2t)+6t+2=0$. З цього рівняння знаходимо параметр t:

$$2+2t-6-6t+6t+2=0,\ \ 2t=2,\ \ t=1.$$

Підставляючи знайдене значення параметра у рівняння прямої, знайдемо координати точки перетину:

$$\begin{cases} x_1=1+1 \\ y_1=-2-2 \\ z_1=6 \end{cases}, \qquad M_1\,(2;-4;6).$$

Приклад 2. Дано координати точок $M_0\,(2;3;1)$, $M_1\,(1;2;-1)$, $M_2\,(3;1;-2)$, $M_3\,(-2;3;-2)$. Знайти:

а) канонічні рівняння прямої $M_1\,M_2$;

б) рівняння площини $M_1\,M_2\,M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1\,M_2\,M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1\,M_2\,M_3$.

Розв'язання.

а) Скористаємось рівняннями прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{1-2}=\frac{z+1}{-2+1} \quad \text{або} \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-1}.$$

б) На площині $M_1\,M_2\,M_3$ візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ і запишемо вектори $\overrightarrow{M_1M}=\{x-1;y-2;z+1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2;-1;-1\}$, $\overrightarrow{M_1M_3}=\{-3;1;-1\}$. Ці три вектора будуть компланарні (тому що належать одній площині).

Скористаємось умовою компланарності векторів:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Розв'язавши це рівняння отримаємо рівняння площини $M_1 M_2 M_3$: $\quad 2x+5y-z-13=0$.

в) Запишемо рівняння площини α, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1 M_2 M_3$, використавши той факт, що паралельні площини мають однакові вектори нормалі. Вектором нормалі площини $M_1 M_2 M_3$ є вектор $\vec{n} = \{2; 5; -1\}$.

Тому рівняння площини α має вигляд:

$$2(x-2)+5(y-3)-(z-1)=0,$$

або після розкриття дужок $\quad 2x+5y-z-18=0$.

г) Щоб записати рівняння площини β, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_3}$, скористаємось загальним рівнянням площини, в якому координати вектора $\overrightarrow{M_1M_3}$ є координатами вектора нормалі:

$$-3(x-2)+(y-3)-(z-1)=0 \quad \text{або} \quad 3x-y+z-4=0.$$

д) Щоб записати рівняння прямої l, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1 M_2 M_3$ зауважимо, що вектор нормалі площини $M_1 M_2 M_3$ і напрямний вектор прямої l колінеарні. Тому рівняння прямої l має вигляд:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{-1}.$$

Приклад 3. Знайти точку M', симетричну точці $M\ (-2; 3; -5)$ відносно прямої $\dfrac{x-8}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Розв'язання. Запишемо рівняння площини, що проходить через точку $M\ (-2; 3; -5)$ перпендикулярно до прямої

$\frac{x-8}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{-1}$. При цьому напрямний вектор прямої є вектором нормалі площини, тобто

$$3(x+2)+(y-3)-(z+5)=0 \quad \text{або} \quad 3x+y-z-2=0.$$

Знайдемо точку Q перетину прямої з площиною (див. приклад 1). Це точка $Q(2;-3;1)$. Точка Q є серединою відрізка MM', тому її координати задовольняють рівності

$$x_Q=\frac{x_M+x_{M'}}{2},\ \ y_Q=\frac{y_M+y_{M'}}{2},\ \ z_Q=\frac{z_M+z_{M'}}{2},$$

тобто

$$2=\frac{-2+x_{M'}}{2},\quad -3=\frac{3+y_{M'}}{2},\quad 1=\frac{-5+z_{M'}}{2}.$$

Звідси знаходимо координати точки $M'(6;-9;7)$.

Приклад 4. Знайти точку M', симетричну точці $M(3;1;-3)$ відносно площини $x-4y+2z-14=0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $M(3,1,-3)$ перпендикулярно до площини $x-4y+2z-14=0$, тобто $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{2}$.

Знайдемо точку Q перетину прямої з площиною (див. приклад 1) : $Q(4;-3;-1)$. Точка Q є серединою відрізка MM', тому її координати задовольняють рівності

$$4=\frac{3+x_{M'}}{2},\quad -3=\frac{1+y_{M'}}{2},\quad -1=\frac{-3+z_{M'}}{2}.$$

Звідси точка M' має координати $(5;-7;1)$.

Задачі для розв'язування.

1. Записати рівняння площини, що проходить через точку $A(1;1;1)$ паралельно до площини $-2x+y-z+1=0$.

2. Записати рівняння площини, що проходить через точку $A(1;1;1)$ паралельно до векторів $\vec{l}=\{0;1;2\}$, $\vec{m}=\{-1;0;1\}$.

3. Записати рівняння площини, що проходить через точки $A(1;2;0)$, $B(2;1;1)$ паралельно вектору $\vec{l}=\{3;0;1\}$.

4. Записати рівняння площини, що проходить через точки $A(1;1;1)$, $B(0;-1;2)$, $C(2;3;-1)$.

5. Записати канонічні і параметричні рівняння прямої, що проходить

а) через точки $M_1(1;-1;2)$, $M_2(2;3;1)$;

б) через точку $M_1(-1;1;-2)$ паралельно до вектора $\vec{s}=\{1;2;-1\}$.

6. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$ і площини $3x-2y-4z-8=0$.

7. Знайти точку M', симетричну точці $M(2,-2,-3)$ відносно площини $y+z+2=0$.

8. Знайти точку M', симетричну точці $M(3,-3,-1)$ відносно прямої $\dfrac{x-6}{5}=\dfrac{y-3,5}{4}=\dfrac{z+0,5}{0}$.

Що повинен знати та вміти студент. Знати основні типи рівнянь прямої на площині, прямої у просторі і площини, застосовувати їх для розв'язання основних геометричних задач.

§ 7. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Лінією (кривою) другого порядку називають множину точок площини, координати яких задовольняють рівняння

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0,$$

де хоча б одне з чисел a,b,c відмінне від нуля.

До ліній другого порядку належать коло, еліпс, гіпербола і парабола.

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки цієї ж площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу). Координати точок кола задовольняють рівняння

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

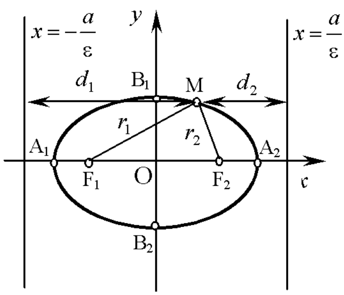
У випадку, коли центр кола розташований у початку координат ($a=b=0$), рівняння набуває канонічного вигляду

$$x^2+y^2=R^2.$$

Еліпсом називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини (***фокусів***) є величина стала і більша ніж відстань між фокусами.

Розглянемо на площині точки F_1 і F_2 – фокуси еліпса. Розташуємо координатні осі так, щоб вісь *Ox* проходила через ці точки, а вісь *Oy* проходила через середину відрізку F_1F_2 перпендикулярно до *Ox*.

Позначимо відстань між фокусами $F_1F_2=2c$, а суму відстаней від довільної точки еліпсу до фокусів $2a$, $2a>2c$. Тоді фокуси матимуть координати $F_1(-c,0)$ та $F_2(c,0)$.



За означенням довільна точка $M(x,y)$ належить еліпсу тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Піднесемо двічі до квадрату ліву і праву частини цього рівняння, маємо

$$x^2(a^2-c^2)+y^2a^2=a^2(a^2-c^2).$$

Позначимо різницю $a^2-c^2=b^2$.

Тоді $x^2b^2+y^2a^2=a^2b^2$ або

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Останнє рівняння є канонічним рівнянням еліпса.

Величини $A_1A_2=2a$ та $B_1B_2=2b$ називають відповідно ***великою*** та ***малою осями*** еліпса.

Якщо $a=b$, то рівняння набуває вигляду $x^2+y^2=a^2$. Тобто коло є частинним випадком еліпса, у якого фокуси збігаються в одну точку – центр.

Міру відхилення еліпса від кола характеризує величина $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$, $0\le\varepsilon<1$, яку називають ***ексцентриситетом*** еліпса.

Відрізки F_1M і F_2M називають ***фокальними радіусами*** точки M:

$$r_1=F_1M=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \text{і} \quad r_2=F_2M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Прямі $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}=\pm\dfrac{a^2}{c}$ називають ***директрисами*** еліпса.

Оскільки $0\le\varepsilon<1$, то $\dfrac{a^2}{c}>a$, тобто директриси еліпса лежать поза ним.

Для директрис має місце наступне твердження. Відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстаней цієї точки до відповідних директрис є стала величина, що дорівнює ексцентриситету еліпса, тобто

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon.$$

Гіперболою називають множину всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох заданих точок цієї площини (фокусів) є величина стала і менша відстані між фокусами.

Позначимо відстань між фокусами $F_1F_2 = 2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів $2a, \quad 2a < 2c$. Тоді фокуси матимуть координати $F_1(-c, 0)$ та $F_2(c, 0)$.

За означенням довільна точка $M(x, y)$ належить гіперболі тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

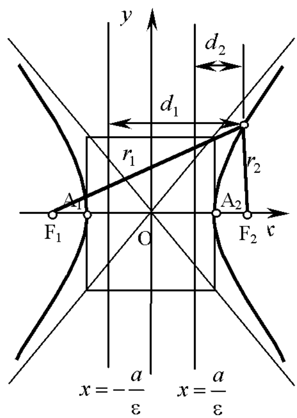
Після перетворень, дістаємо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b^2 = c^2 - a^2$.

Гіпербола складається з двох віток і має дві асимптоти $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називають ***дійсною віссю*** гіперболи, а відрізок $B_1B_2 = 2b$ ***уявною*** віссю.



Рівняння $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ також визначає гіперболу, яку називають ***спряженою*** до гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ексцентриситет гіперболи визначають як відношення фокальної відстані гіперболи до довжини її дійсної осі

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon > 1.$$

Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c}$, де a – дійсна піввісь гіперболи називають ***директрисами*** гіперболи. Вони мають ту саму властивість, що і директриси еліпса:

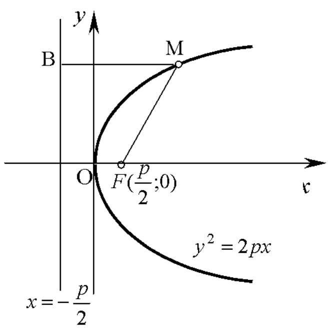
$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon .$$

Параболою називають множину всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).

Запишемо рівняння параболи.

Нехай на площині задано фокус F і директрису таким чином, що відстань між ними дорівнює p. Розташуємо вісь Ox так, щоб вона проходила через фокус перпендикулярно до директриси, а вісь Oy ділила навпіл відстань між фокусом і директрисою. Тоді фокус має координати $F(\frac{p}{2}, 0)$, а рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$.

Довільна точка $M(x, y)$ належить параболі тоді і тільки тоді, коли виконується рівність
$MB = MF$, де



$$MB = x + \frac{p}{2},$$

$$MF = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} .$$

Звідси

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} ,$$

або після перетворень канонічне рівняння параболи:

$$y^2 = 2px .$$

Вісь симетрії параболи називають ***віссю параболи***. Точку перетину параболи з віссю називають ***вершиною*** параболи, а число p, яке дорівнює відстані між фокусом і параболою називають ***параметром параболи***.

Параметр p характеризує ширину області, яку обмежує парабола (чим більше p, тим ширша парабола).

Приклад 1. Визначити тип кривої та вказати всі її характеристики: $25x^2 - 9y^2 + 150x - 54y - 81 = 0$.

Розв'язання. Виділимо в рівнянні кривої повні квадрати.

$$(5x+25)^2 - (3y+9)^2 - 625 = 0.$$

Звідси

$$25(x+5)^2 - 9(y+3)^2 = 625 \quad \text{або} \quad \frac{(x+5)^2}{25} - \frac{(y+3)^2}{625/9} = 1.$$

Останнє рівняння – канонічне рівняння гіперболи з центром у точці $O(-5; -3)$. Дійсна піввісь $a = 5$, уявна піввісь $b = \frac{25}{3}$. Фокуси розміщені на осі Ox і мають координати

$$-3 \pm \sqrt{25 + \frac{625}{9}} = -3 \pm 5\sqrt{34},$$

тобто

$$F_1(-3 - 5\sqrt{34}; 0) \text{ і } F_2(-3 + 5\sqrt{34}; 0).$$

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{-3+5\sqrt{34}}{5}$, директриси гіперболи $d = \pm \frac{25}{-3+5\sqrt{34}}$, асимптоти $y = \pm \frac{5}{3} x$.

Приклад 2. Для забезпечення споживачів деякою продукцією побудовано заводи A і B. Визначити зони тяжіння для цих заводів і скласти рівняння граничної лінії, якщо $A(1; 0)$, $B(3; 0)$, собівартість виробництва одиниці продукції $p_A = 1$, $p_B = 6$ і витрати на їх перевезення $Q_A = 2$, $Q_B = 2$ для заводів A і B відповідно.

Розв'язання. Під ***зоною тяжіння*** для заводу A розуміють множину таких точок, у якій вартість одиниці продукції цього заводу буде меншою, ніж вартість одиниці аналогічної продукції заводу B.

Зафіксуємо довільну точку $M(x; y)$. Відстань від цієї точки до заводів A і B позначимо $|AM|$ і $|BM|$. Тоді вартість одиниці продукції з відповідного заводу для цієї точки буде включати в себе собівартість виробництва продукції та витрати на її перевезення, тобто для заводу A:

$$P_A + Q_A|AM| = 1 + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2},$$

а для заводу B:

$$P_B + Q_B|BM| = 6 + 2\sqrt{(x-3)^2 + y^2}.$$

Граничну лінію складають точки, для яких ці суми врівноважені, тобто

$$P_A + Q_A|AM| = P_B + Q_B|BM|$$

або

$$1 + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 6 + 2\sqrt{(x-3)^2 + y^2}.$$

Звідси

$$2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 5 + 2\sqrt{(x-3)^2 + y^2}.$$

Після піднесення обох частин рівності до квадрата і зведення подібних маємо рівняння

$$\frac{(x-2)^2}{225/144} + \frac{y^2}{9/16} = 1.$$

Отже, гранична лінія являє собою еліпс.

Задачі для розв'язування.

1. Показати, що рівняння $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ визначає коло. Знайти його центр і радіус.

2. З'ясувати розташування прямої $2x - y - 3 = 0$ (перетинає, дотикається чи проходить зовні) відносно кола $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$.

3. Записати рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі Ox, симетрично відносно початку координат, якщо мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c = 10$.

4. Записати рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі Ox, симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

5. Знайти вершину та параметр p параболи $y = 4x^2 - 8x + 7$.

6. Визначити тип кривої та зробити рисунок
$4x^2 - 32x - y^2 + 2y + 59 = 0$.

Що повинен знати та вміти студент. Знати канонічні рівняння кривих другого порядку, їх форму, розміщення на площині, та основні співвідношення між параметрами кожної з цих кривих.

§ 8. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Поверхнею другого порядку називають множину точок, координати яких задовольняють рівняння
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + l = 0,$$
де хоча б один з коефіцієнтів a, b, c, d, e, f відмінний від нуля. Таке рівняння називають ***загальним рівнянням поверхні другого порядку***.

Як геометричний об'єкт поверхня другого порядку не зміниться при переході від однієї системи координат до іншої. Існує система координат, в якій рівняння поверхні має найпростіший (***канонічний***) вигляд.

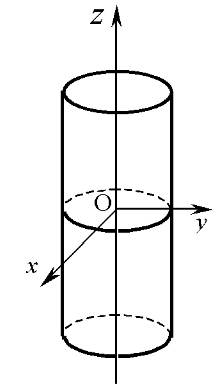
До поверхонь другого порядку відносять циліндричні, конічні поверхні, поверхні обертання, сферу, еліпсоїд, однопорожнинний та двопорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди.

Циліндричною поверхнею називають поверхню, утворену множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію L (напрямну). Найчастіше розглядають такі циліндричні поверхні, напрямні яких лежать в координатній площині, а твірні паралельні осі, що перпендикулярна до цієї площини. Наприклад, рівняння

$$f(x, y) = 0$$

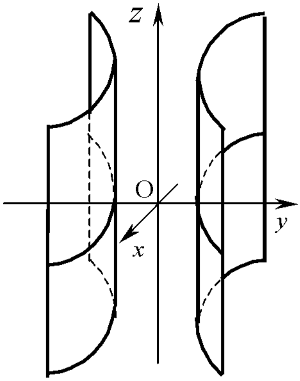
описує циліндричну поверхню з напрямними в площині XOY і твірними, паралельними осі Oz.

Циліндричні поверхні, напрямними яких є криві другого порядку, називають ***циліндричними поверхнями другого порядку***.



Канонічним рівнянням ***кругового циліндра*** є рівняння $x^2 + y^2 = R^2$.

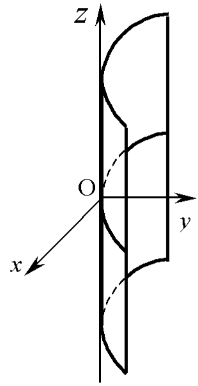
У випадку $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = R^2$ циліндр називають ***еліптичним***.



У випадку $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = R^2$ –

гіперболічним циліндром.

Рівняння $y^2 = 2px$ описує ***параболічний*** циліндр.



Поверхнею, утвореною обертанням заданої плоскої кривої l навколо заданої прямої (осі), розташованої в площині кривої l, називають ***поверхнею обертання***.

Щоб дістати рівняння поверхні обертання навколо координатної осі необхідно в рівнянні кривої l залишити без змін координату, що відповідає осі обертання, а другу координату замінити на корінь квадратний з суми квадратів двох інших координат, взятий зі знаком "+" або " –".

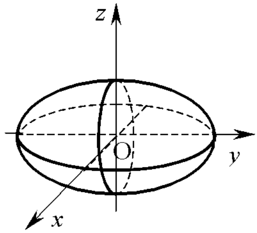
Приклад 1. Знайти рівняння поверхні обертання еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$ навколо осі Ox.

Розв'язання. Осі обертання відповідає координата *x*, отже її залишимо без змін, а координату y замінимо на $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ і підставимо у рівняння еліпса

$$x^2 + 4(y^2 + z^2) = 4 .$$

Звідси маємо рівняння еліпсоїда обертання

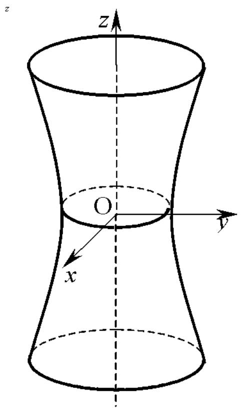
$$\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1 .$$



Канонічне рівняння ***трьохвісного еліпсоїда***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Результатом обертання гіперболи



$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

навколо осі Oz є поверхня, яку називають ***однопорожнинним гіперболоїдом обертання***. Його рівняння

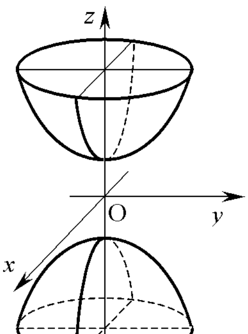
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Результатом обертання гіперболи

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

навколо осі Oy є поверхня, яку називають ***двопорожнинним гіперболоїдом обертання***. Його рівняння

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

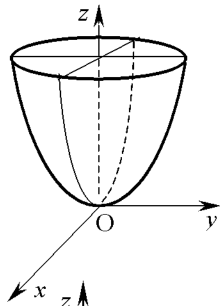


Двопорожнинним гіперболоїдом називають поверхню, яку описує рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Параболоїдом обертання називають поверхню, яку утворено обертанням параболи $y^2 = 2pz$ навколо осі Oz. Його рівняння

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2} = 2z\,.$$

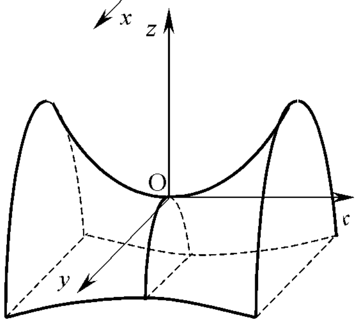


Еліптичним параболоїдом називають поверхню, рівняння якої

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p,q > 0\,.$$

Гіперболічним параболоїдом називають поверхню, рівняння якої

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p,q > 0\,.$$



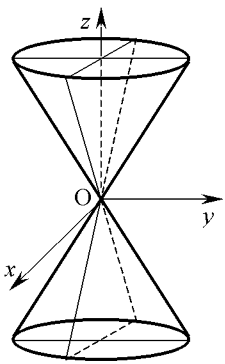
Цю поверхню ще називають ***сідлоподібною поверхнею***.

Конічною поверхнею називають поверхню, утворену множиною прямих, що проходять через задану точку (вершину) P і перетинають задану лінію l (напрямну). Кожну з прямих, що утворюють конічну поверхню називають ***твірною***.

Прикладом конічної поверхні є конус. Його канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\,.$$

У випадку $a = b = c$ маємо ***прямий круговий конус*** $x^2 + y^2 = z^2$.



ТЕМА 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Основні математичні символи:
$\forall$ – кожний, будь-який;
$\exists$ – існує, знайдеться;
$\vee$ – логічне додавання, “ або ”;
$\wedge$ – логічний добуток, “ і ”;
$\Rightarrow$ – випливає;
$\Leftrightarrow$ – еквівалентність, “ тоді і тільки тоді ”, “необхідно і достатньо”;
$\in$ – належить;
$\subset$ – включення;
$|$, $(:)$ – такий, що;
$\neg$ – заперечення ;
def– за означенням;
$\sum$ – знак суми.

§ 1. МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ. БІНОМ НЬЮТОНА

Позначимо через $A(n)$ певне твердження (формулу), яке залежить від $n \in N$. Суть методу математичної індукції полягає у наступному: якщо твердження $A(n)$ вірне при $n = 1$ і для довільного $k > 1$ з вірності $A(k)$ випливає вірність $A(k+1)$, тоді $A(n)$ вірне для довільного натурального n . Тобто

$$((A(n) \wedge A(k)) \Rightarrow A(k+1), \forall k > 1) \Rightarrow (A(n), \forall n).$$

Приклад 1. Методом математичної індукції довести, що має місце рівність

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad (n \in N).$$

Розв'язання. Позначимо нашу рівність $A(n)$.
За умови $n = 1$ маємо

$$1^2 = \frac{1}{6} 1(1+1)(2+1) \Rightarrow 1 = 1 .$$

Тобто $A(1)$ вірне.

Припустимо, що $A(k)$ вірне $(k>1)$ і доведемо, що $A(k+1)$ вірне:

$$A(k):\ 1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1),$$

$$A(k+1):\ 1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=$$

$$=(k+1)\cdot\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6}=(k+1)\cdot\frac{2k^2+7k+6}{6}=$$

$$=(k+1)\cdot\frac{2k^2+7k+6}{6}=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)=$$

$=\frac{1}{6}(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)$, тобто $A(k+1)$ вірне.

За принципом математичної індукції $A(n)$ вірне для $\forall n\in N$.

Методом математичної індукції можна довести формулу, яка носить назву ***бінома Ньютона***:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k},$$

де $x,y\in R;\ n,k\in N;\ C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число комбінацій з n елементів по k елементів; $n!=1\cdot 2\cdot 3\ldots n$ і припускають, що $0!=1$.

Числа C_n^k називають ***біноміальними коефіцієнтами***, яким властиві наступні основні співвідношення:

$$C_n^k=C_n^{n-k};\quad C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}.$$

§ 2. МНОЖИНИ І ДІЇ НАД НИМИ

Поняття ***множина*** є фундаментальним у математиці.

Під ***множиною*** розуміють сукупність об'єктів довільної природи і, як правило, позначають великими латинськими літерами: *A, B, X, Y* і т.д.

Об'єкти, що складають множину називають її ***елементами*** і, як правило, позначають малими латинськими літерами: *a, b, x, y* і т.д.

Якщо елемент a належить множині A, то записують так:
$a \in A$.

Множини можна задати:

1) переліком її елементів;
2) визначенням характерної властивості елементів множини, тобто властивості, притаманної всім елементам цієї множини і не притаманної жодному елементу, що не належить до неї.

Приклад 1.

$X = \left\{x : x^2 - 3x + 2 = 0\right\} = \left\{1, 2\right\}$, тобто множина X складається з чисел 1 та 2.

$Q = \left\{\dfrac{m}{n}; m \in Z, n \in N\right\}$ – множина раціональних чисел.

Множину, яка не містить жодного елементу називають ***порожньою*** і позначають символом Ø.

Підмножиною B множини A називають множину, кожен елемент якої належить множині A і позначають $B \subset A$ (B належить A) або $A \supset B$ (A містить B).

Множини A і B називають ***рівними***, якщо вони складаються з одних і тих же елементів. Для цього необхідно і достатньо, щоб виконувались включення

$$B \subset A \text{ і } A \subset B.$$

Об'єднанням (сумою) множин A і B називають множину, яка складається лише з тих елементів, що належать або A або B

$$A \cup B = \left\{x : x \in A \vee x \in B\right\}.$$

Об'єднання множин має такі властивості:

1. $A \cup A = A$.
2. $A \cup \varnothing = A$.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4. $A \cup B = B \cup A$.

Перетином (добутком) множин A і B називають множину, яка складається лише з тих елементів, що належать одночасно A і B

$$A \cap B = \left\{x : x \in A \wedge x \in B\right\}.$$

Властивості перетину множин:

1. $A \cap A = A$.
2. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
3. $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Різницею множин A і B називають множину, яка складається з елементів A, що не належать B

$$A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Якщо B є підмножина A, то різницю $A \backslash B$ називають ***доповненням*** множини B до A.

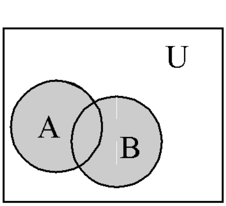
Множину називають ***універсальною U***, якщо її елементів достатньо для розв'язання даного класу задач.

Властивості доповнення:

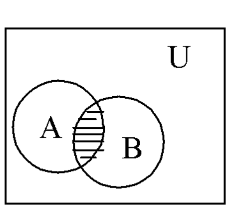
1. $\overline{\overline{A}} = A$.
2. $\overline{\varnothing} = U$.
3. $\overline{U} = \varnothing$.
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
5. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Останні дві властивості носять назву ***правило де Моргана***.

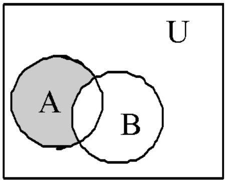
Операції над множинами мають просту геометричну інтерпретацію за допомогою кругів Ейлера (діаграм Ейлера-Венна).



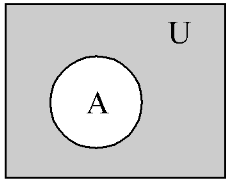
A∪B



A∩B



A \ B

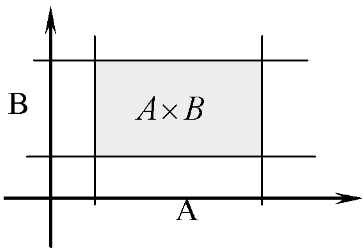


$\overline{A}$

Впорядкованою парою елементів x і y називають пару (x, y). ***Прямим добутком*** множин A і B називають сукупність усіх можливих впорядкованих пар (a, b) таких, що $a \in A$, $b \in B$ і позначають

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Приклад 2. Нехай множина $A = [a, b]$– відрізок прямої, множина $B = [c, d]$– відрізок прямої. Тоді прямим добутком $A \times B = \{(x, y) : a \le x \le b \wedge c \le y \le d\}$ є прямокутник



Прямий добуток $R \times R = R^2$ є вся площина, а прямий добуток $R \times R \times R = R^3$ є дійсний простір.

Множину $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ називають ***відкритим інтервалом***.

Множину $[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$ називають ***закритим інтервалом***.

Множини $[a, b) = \{x : a \le x < b\}$ і $(a, b] = \{x : a < x \le b\}$ називають ***напіввідкритими інтервалами*** або ***проміжками***.

Множини $[a, \infty) = \{x : a \le x\}$ і $(-\infty, b] = \{x : x \le b\}$ називають ***напівнескінченими інтервалами***.

Множину $(-\infty, \infty) = R$ називають ***нескінченим інтервалом***.

Будь-який інтервал з центром у точці x_0 називають околом точки x_0. ***Епсілон-околом*** точки x_0 називають інтервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ і позначають $O(x_0, \varepsilon)$.

Задачі для самостійної роботи.

1. Встановити, який запис вірний: а) $\{1;2\} \in \{1;2;\{1;2;3\}\}$ чи $\{1;2\} \subset \{1;2;\{1;2;3\}\}$;

б) $\{1;2\} \in \{1;2;\{1;2\}\}$ чи $\{1;2\} \subset \{1;2;\{1;2\}\}$.

Вказані множини задати переліком усіх своїх елементів

2. $A = \{x \in \mathrm{R} : x^3 + 2x^2 - 3x = 0\}$.

3. $A = \{x \in \mathrm{R} : x + \dfrac{1}{x} \le 2,\ x > 0\}$.

4. $A = \{x \in \mathrm{N} : x^2 - 3x - 4 \le 0\}$.

5. $A = \{x \in \mathrm{Z} : \dfrac{1}{4} \le 2^x < 5\}$.

Зобразіть на координатній площині множини

6. $A = \{(x;y) \in \mathrm{R}^2 : x + y - 2 = 0\}$.

7. $A = \{(x;y) \in \mathrm{R}^2 : (x^2 - 4)(1 + y) = 0\}$.

8. $A = \{(x;y) \in \mathrm{R}^2 : 4x^2 - y^2 > 0\}$.

9. $A = \{(x;y) \in \mathrm{R}^2 : y^2 > 3x + 2\}$.

10. Знайдіть $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, якщо

а) $A = [2, 6]$, $B = (-3, 3)$.

б) $A = \left\{x \in N : x^2 - 5x + 4 \le 0\right\}$, $B = \left\{x \in N : x^2 + 3x - 4 \le 0\right\}$.

11. Доведіть, що сума перших n ($n \in N$) непарних чисел дорівнює квадрату їх числа $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = n^2$.

Що повинен знати та вміти студент. Вміти виконувати операції над абстрактними та числовими множинами, ілюструвати їх діаграмами Ейлера-Венна, вміти користуватися основними математичними символами для короткого запису математичних тверджень.

§ 3. ФУНКЦІЇ. ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ. ВЗАЄМНООДНОЗНАЧНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ

Нехай X та Y дві непусті множини. Відповідність, що співвідносить кожному елементу $x \in X$ за певним законом елемент $y \in Y$, називають ***відображенням*** множини X у множину Y або ***функцією***, визначеною на множині X зі значеннями у множині Y.

Цей факт записують так:

1. $x \in X \xrightarrow{f} y \in Y$.
2. $f : X \to Y$.
3. $y = f(x), \quad \forall x \in X \to y \in Y$.

Елементи $y \in Y$ називають ***образами*** елементів $x \in X$ при відображенні f , а елементи $x \in X$ – ***прообразами*** елементів $y \in Y$.

Якщо при відображенні $f : X \to Y$ кожен $y \in Y$ є образом деякого елемента $x \in X$, то таке відображення називають ***відображенням множини X на множину Y***. У цьому випадку за умови, що різним $x_1 \neq x_2$ з X відповідають різні $y_1 \neq y_2$ з Y відображення $X \to Y$ називають взаємно однозначним, тобто $X \leftrightarrow Y$. Множини, для яких встановлено взаємно однозначне відображення, називають ***еквівалентними*** і пишуть $X \Leftrightarrow Y$. Наприклад, множини цілих і натуральних чисел еквівалентні.

Графіком відображення $f : X \to Y$ називають множину точок $(x, f(x))$.

У випадку взаємно однозначного відображення $X \leftrightarrow Y$ відображення $f^{-1} : Y \to X$ називають ***оберненим*** або ***оберненою***

функцією. У декартовій системі координат графіки прямої та оберненої функцій співпадають.

Числовою функцією називають відображення підмножини $D \subset R$ на підмножину $E \subset R$. У цьому випадку множину D називають ***областю визначення***, а множину E – ***областю значень*** функції і позначають $D(f)$ і $E(f)$

Існують три основних способи задання функцій: табличний, графічний, аналітичний.

Основними елементарними функціями є такі функції:

1) степенева функція $y = x^{\alpha}$, де α – дійсне число;

2) показникова функція $y = a^x$, де a – додатне число, відмінне від одиниці;

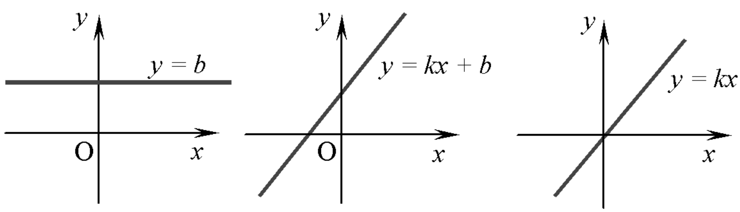
3) логарифмічна функція $y = \log_a x$, де a – додатне число, відмінне від одиниці;

4) тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$;

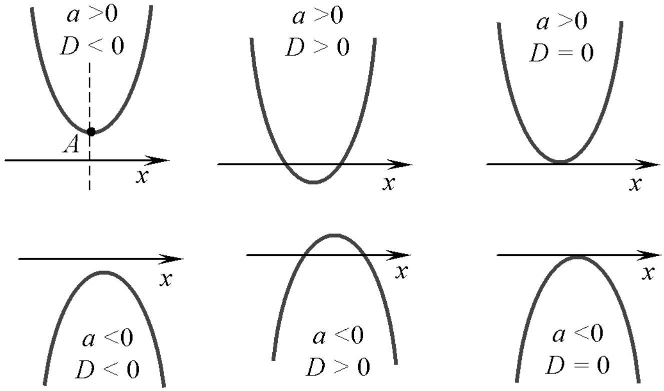
5) обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Наведемо графіки основних елементарних функцій.

1. Лінійна функція $y = kx + b$:



2. Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$:



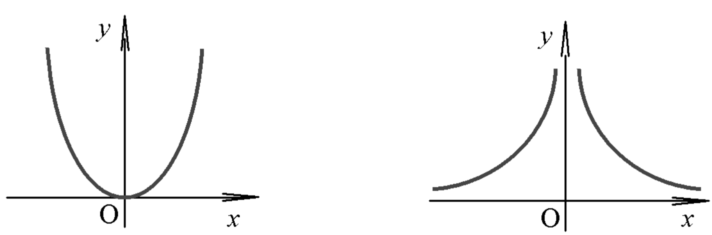
Точка $A\left(-\frac{b}{2a};-\frac{D}{4a}\right)$ – вершина параболи; $x = -\frac{b}{2a}$ – рівняння осі симетрії параболи.

Якщо $c = 0$, то графік квадратичної функції проходить через початок координат.

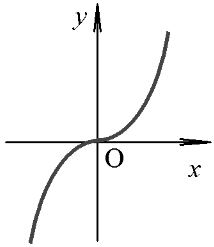
Якщо $b = 0$, то вершина параболи знаходиться на осі Oy.

3. Степенева функція $y = x^{\alpha}$:

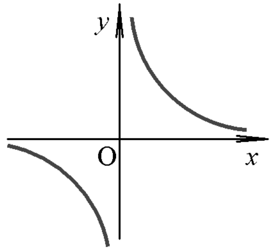
а) $\alpha = 2n, n \in N$: б) $\alpha = -2n, n \in N$:



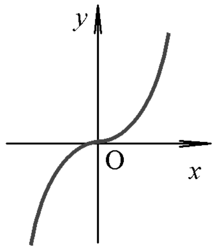
в) $\alpha = 2n+1, n \in N$:



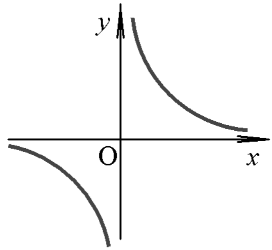
г) $\alpha = -(2n-1)$, $n \in N$:



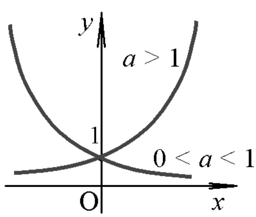
д) $\alpha = \dfrac{1}{2n}$, $n \in N$:



е) $\alpha = \dfrac{1}{2n+1}$, $n \in N$:

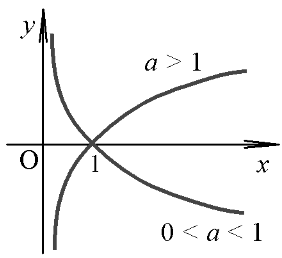


4. Показникова функція $y = a^x$



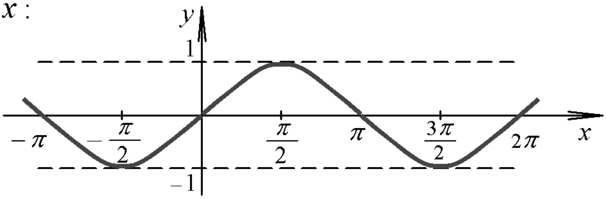
5. Логарифмічна функція

$y = \log_a x$:

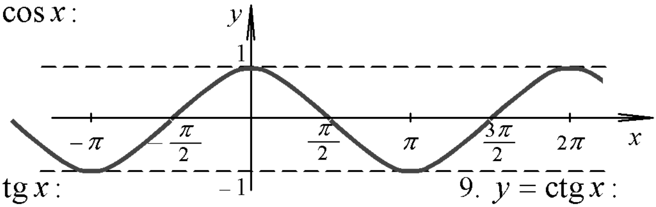


Тригонометричні функції

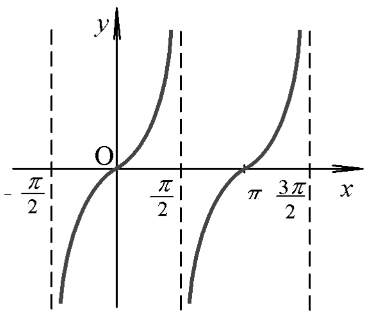
6. $y = \sin x$:



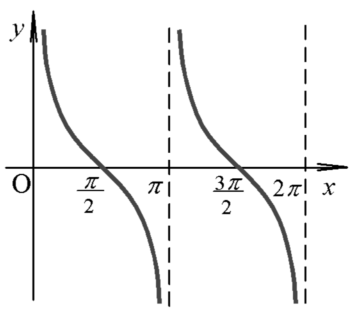
7. $y = \cos x$:



8. $y = \operatorname{tg} x$:

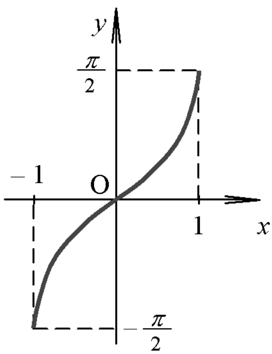


9. $y = \operatorname{ctg} x$:

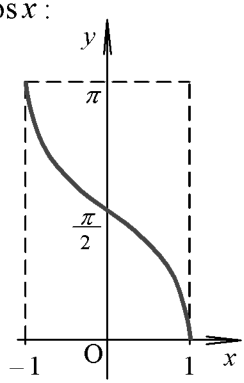


Обернені тригонометричні функції

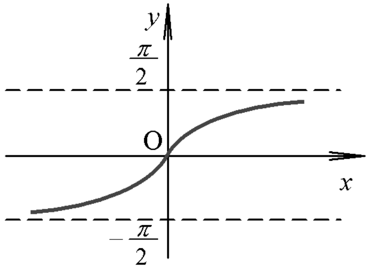
10. $y = \arcsin x$:



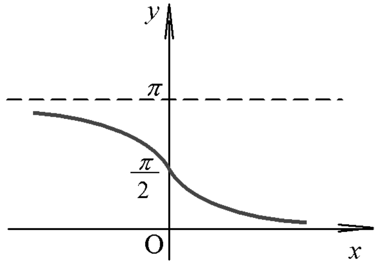
11. $y = \arccos x$:



12. $y = \operatorname{arctg} x$:



13. $y = \operatorname{arcctg} x$:



Функцію, утворену з основних елементарних функцій та чисел виконанням скінченного числа арифметичних дій та операцій взяття функції від функції (утворення складеної функції) називають ***елементарною***.

Функцію $y = f(x)$ називають ***парною***, якщо для будь-якого значення аргументу з області визначення функції виконується рівність $f(-x) = f(x)$. Графік парної функції симетричний відносно осі ординат.

Непарною функцією називають функцію $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення аргументу з області визначення функції виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Функцію, що не є ні парною, ні непарною, називають ***функцією загального вигляду***.

Функцію $y = f(x)$ називають ***періодичною***, якщо існує таке дійсне число $T \neq 0$, що за будь-яких значень аргументу $x \in D$ виконується рівність $f(x) = f(x + kT)$, де k – будь-яке ціле число. Число T називають ***періодом***. Найменший додатний період функції називають ***основним періодом функції***.

Функцію $y = f(x)$, визначену на множині X називають ***обмеженою зверху або знизу***, якщо існує таке число M або m, що для будь-якого $x \in X$ виконується нерівність

$$f(x) \leq M \quad \text{або} \quad f(x) \geq m.$$

Функцію, обмежену зверху і знизу називають ***обмеженою***. У протилежному випадку функція є необмеженою.

Якщо для двох будь-яких значень аргументу $x_1 \neq x_2$ з області визначення функції із нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що:

1) $f(x_1) < f(x_2)$, то функцію називають ***зростаючою***;
2) $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функцію називають ***неспадною***;
3) $f(x_1) > f(x_2)$, то функцію називають ***спадною***;
4) $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функцію називають ***незростаючою***.

Такі функції називають ***монотонними*** (***строго монотонними*** у випадках 1) та 3)).

Задачі для самостійної роботи.

1. Знайдіть $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$, якщо

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, -\infty < x \leq 0, \\ 2^x, x > 0. \end{cases}$$

Знайдіть область визначення функцій

2. $f(x) = \sqrt{2x-5}$. **3**. $f(x) = \ln(x-2)$ **4**. $f(x) = \sqrt{|x|-1}$.

5. $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4)$. **6**. $f(x) = \ln(1 - 2\cos x)$.

7. З'ясуйте, чи є функції парними чи непарними, періодичними, монотонними. Побудуйте схематичні графіки

а) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$; б) $y = 3\cos(2x + \dfrac{\pi}{4})$; в) $y = \log_2 \dfrac{1}{|x-3|}$.

Що повинен знати та вміти студент. Знати основні елементарні функції, їх властивості, графіки, класифікацію функцій.

§ 4. ЧИСЛОВА ПОСЛІДОВНІСТЬ. ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Вважатимемо, що задано ***послідовність чисел*** $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$, якщо кожному натуральному n відповідає деяке число x_n. Цю послідовність позначимо $\{x_n\}$ або $\{x_n, n \in N\}$. Число x_n називають ***загальним членом*** послідовності. Формулу, яка задає x_n, називають ***формулою загального члена*** послідовності.

Приклад 1. Послідовність $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5};\dots$ можна задати формулою $x_n = \frac{1}{n}$.

Приклад 2. Послідовність $-1; 1; -1; 1; -1; 1; \dots$ задають формулою $x_n = (-1)^n$ або $x_n = \cos n\pi$.

Послідовність $\{x_n\}$ називають ***обмеженою***, якщо існує число C таке, що для будь-якого номера n (тобто, $\forall n \in N$) виконується нерівність $|x_n| \le C$.

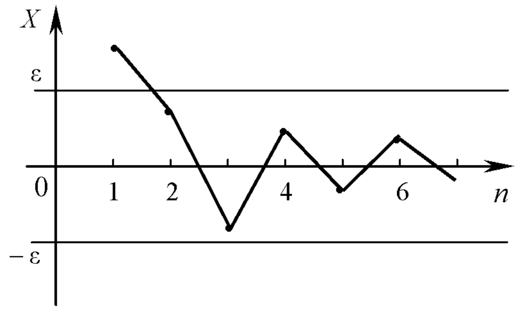
Очевидно, що послідовності $x_n = \frac{1}{n}$ і $x_n = (-1)^n$ є обмеженими. Дійсно, можна вказати константу C, що дорівнює одиниці, для якої виконується нерівність $|x_n| \le C = 1$.

Приклад 3. Послідовність $1; 4; 9; 16; \dots$ із загальним членом $x_n = n^2$ буде необмеженою, тому що для будь-якої константи C завжди знайдеться член послідовності $x_m = m^2$, де $m \in N$ і $m > \sqrt{|C|}$, для якого нерівність $|x_m| \le C$ буде порушуватися.

Послідовність $\{x_n\}$ ***прямує до нуля*** при необмеженому зростанні n, якщо для будь-якого малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться номер N, який залежить від ε, такий, що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність $|x_n| < \varepsilon$, тобто, починаючи від деякого номера N всі члени послідовності $\{x_n\}$ потрапляють в ε-окіл точки *О*. Це записують як

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0.$$

У деяких випадках послідовність $\{x_n\}$ можна зобразити таким чином. Позначимо на площині точки з координатами (n, x_n) і з'єднаємо ці точки ламаною лінією. Дістанемо „графік послідовності ” зображений на рисунку.



Тоді умова $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ означає, що ця ламана для будь-якого $\varepsilon > 0$, починаючи від деякої ланки, цілком знаходиться всередині смуги шириною 2ε, яка оточує пряму $x = 0$.

Послідовність $\{x_n\}$, яка прямує до нуля називають ***нескінченно малою***.

Послідовність $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$, де $\{x_n\}$ – нескінченно мала, називають ***нескінченно великою***.

Число A називають ***границею послідовності*** $\{x_n\}$, якщо послідовність $\{x_n - A\}$ прямує до нуля при необмеженому зростанні n, тобто для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться номер N, який залежить від ε, такий, що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність $|x_n - A| < \varepsilon$.

У цьому випадку записують $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, а саму послідовність називають з***біжною***.

Геометрично це означає, що який би малий не вибрати ε-окіл точки A – усі члени послідовності $\{x_n\}$, починаючи з деякого достатньо великого номера N, будуть перебувати всередині цього ε-околу.

Для того, щоб послідовність $\{x_n\}$ мала скінченну границю необхідно і достатньо, щоб цю послідовність можна було подати у вигляді суми сталої A та нескінченно малої $\{\alpha_n\}$:

$$x_n = A + \alpha_n .$$

***Основні властивості границь послідовностей*.**

1. Границя сталої послідовності $c = \text{const}$ дорівнює цій сталій:

$$\lim_{n\to\infty} c = c .$$

2. Границя алгебраїчної суми скінченного числа збіжних послідовностей дорівнює відповідній сумі їх границь, наприклад:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n - z_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} z_n .$$

3. Границя добутку скінченного числа збіжних послідовностей дорівнює добутку їх границь, наприклад:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n z_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n \lim_{n\to\infty} z_n .$$

Звідси ***наслідки***:

1. Числовий множник можна виносити за знак границі:

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c \lim_{n\to\infty} x_n .$$

2. Границя натурального степеня збіжної послідовності дорівнює степеню її границі:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n)^k = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k .$$

3. Границя частки двох збіжних послідовностей дорівнює частці їх границь, якщо границя дільника не дорівнює нулю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} .$$

Наведемо ознаки існування границь послідовностей.

***Ознака Вейерштрасса*.** Якщо послідовність монотонна і обмежена, то вона має скінченну границю.

***Критерій Коші*.** Для того, щоб послідовність $\{x_n\}$ мала скінченну границю необхідно і достатньо, щоб для будь-якого малого числа $\varepsilon > 0$ існував такий номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, що для всіх номерів $n > n_0$ і $\forall p \in N$ була справедливою нерівність

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon .$$

Властивість проміжної послідовності. Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{z_n\}$ збігаються до однієї границі A та для $\forall n \in N$ справедливі нерівності $x_n \le y_n \le z_n$, то послідовність $\{y_n\}$ також збігається до A.

Задачі для самостійної роботи.

1. Записати перші 5 членів послідовностей: а) $x_n = 1 + (-1)^n \dfrac{1}{n}$;

б) $x_n = \dfrac{2n-1}{3n+4}$; в) $x_n = (-1)^n \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$.

2. Записати формулу загального члена послідовностей:

а) $2; \dfrac{4}{3}; \dfrac{6}{5}; \dfrac{8}{7}; \ldots$ б) $-3; \dfrac{5}{3}; -\dfrac{7}{5}; \dfrac{9}{7}; -\dfrac{11}{9}; \ldots$

3. Довести, що число $A = \dfrac{1}{2}$ є границею послідовності $x_n = \dfrac{1}{2n-3}$. Знайти номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|x_n - \dfrac{1}{2}| < \varepsilon$, $\varepsilon = 0{,}005$ для усіх $n > N(\varepsilon)$.

Знайти границю послідовності:

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$. **5**. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{2+9n}$. **7**. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+n+n^2}{2n-9}$. **8.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n+n^2}{2-n+3n^3}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!+(n+1)!}{2(n+1)!}$. **10**. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+n}{2n-3} - \dfrac{n^2+5}{2n^2+6}\right)$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$. **12**. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[3]{n^3-2}-\sqrt[3]{n^3+1})$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$. **14**. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

Що повинен знати та вміти студент. Знати означення послідовності, границі послідовності, основні теореми про границі, вміти їх застосовувати при обчисленні границь послідовностей. Знати арифметичну та геометричну прогресії.

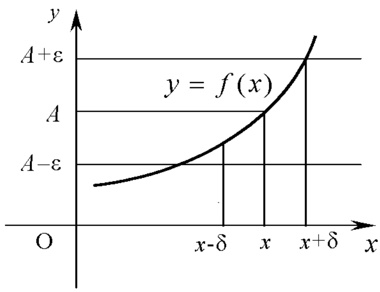
§ 5. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Нехай функція $f(x)$ означена на множині $D\subset R$. Число A називають ***границею функції*** $f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $\delta(\varepsilon)$, яке залежить від ε, таке що для будь-якого $x\in D$ з умови $0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$ випливає нерівність

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

У цьому випадку позначають $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Геометрично означення границі функції у точці можна інтерпретувати так. Який би малий ε-окіл $B(A,\varepsilon)$ точки A не вибрати, має існувати такий δ-окіл $B(x_0,\delta)$ точки x_0, що коли $x\in B(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$, графік функції $y=f(x)$ знаходиться у смузі шириною 2ε між прямими $y=A-\varepsilon$ і $y=A+\varepsilon$.



Зауважимо, що у точці $f(x_0)$ функція може бути не визначена або може набувати значення, яке не дорівнюватиме A.

Число A називають ***правою границею функції*** $f(x)$ (границею справа) у точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon)$, яке залежить від ε, таке що для будь-якого $x \in D$ з умови $0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)$ випливає нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

У цьому випадку позначають $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$.

Число A називають ***лівою границею функції*** $f(x)$ (границею зліва) у точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon)$, яке залежить від ε, таке що для будь-якого $x \in D$ з умови $0 < x_0 - x < \delta(\varepsilon)$ випливає нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

У цьому випадку позначають $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

Приклад 1. Нехай $D = R \setminus \{1\}$, $x_0 = 1$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x \in D$.

Тоді $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Розв'язання. Дійсно, нехай задано $\varepsilon > 0$. Візьмемо $\delta = \varepsilon$. Тоді для будь-якого $x \in R$ і такого, що $0 < |x - 1| < \delta$, маємо:

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon .$$

Число A називають ***границею функції*** $f(x)$ на нескінченності, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $M(\varepsilon) > 0$, яке залежить від ε, таке, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ як тільки $|x| > M(\varepsilon)$. У цьому випадку записують $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Приклад 2. Нехай $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in R\setminus\{0\}$. Тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

Розв'язання. Дійсно, нехай задано $\varepsilon>0$. Зауважимо, що

$$\forall\quad x\in R\setminus\{0\}:\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon\Leftrightarrow|x|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Візьмемо $M(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}$.

Тоді $\forall x:|x|>M(\varepsilon)\Rightarrow\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}<\frac{1}{M(\varepsilon)}=\varepsilon$.

Для обчислення границь часто використовують ***першу***

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

і ***другу***

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

важливі границі.

До числа e зводять розв'язання багатьох прикладних задач статистики, фізики, біології, аналіз таких процесів, як зростання народонаселення, розпад радію тощо.

Розглянемо ***задачу про неперервне нарахування процентів***. Початковий вклад у банк становить Q_0 грошових одиниць. Банк сплачує щорічно p, % річних. Необхідно знайти суму вкладу Q_t через t років.

Розв'язання. Очевидно, що при p, % річних розмір вкладу буде збільшуватися в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ разів, тобто

$$Q_1=Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right),\quad Q_2=Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,\ \ldots,$$

$$Q_t=Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$

Якщо нараховувати проценти за вкладами не один раз на рік, а n разів, то при тому самому щорічному прирості p, % , процент нарахування за $\frac{1}{n}$ період року становитиме $\frac{p}{n}$, %, а розмір вкладу за t років при nt нарахуваннях становитиме $Q_t = Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}$.

Якщо вважати, що проценти за вкладом нараховують кожного півріччя ($n=2$), кожного кварталу ($n=4$), щомісяця ($n=12$), щодня ($n=365$), щогодини ($n=8760$) і т.д., неперервно $n \to \infty$. Тоді сума вкладу за t років становитиме

$$Q_t = \lim_{n\to\infty} Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt} = Q_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{pt}{100}}$$

або коли $x = \frac{100n}{p} \to \infty$ $Q_t = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}$.

Ця формула виражає показниковий закон зростання (коли $p>0$) або спадання (коли $p<0$). Її можна використовувати при неперервному нарахуванні процентів.

Зауважимо, що в практичних фінансово-кредитних операціях неперервне нарахування процентів застосовують дуже рідко. Воно є надзвичайно ефективним при аналізі складних фінансових проблем, зокрема, при обґрунтуванні та виборі інвестиційних рішень.

Функцію $\alpha(x)$ називають ***нескінченно малою*** при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to x_0$ називають ***порівнянними***, якщо існує хоча б одна з границь :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \quad \text{або} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}.$$

Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$– порівнянні нескінченно малі при $x \to x_0$, і нехай для визначеності існує границя

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c.$$

1. Якщо $c \neq 0$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – називають ***нескінченно малими одного порядку*** і позначають $\alpha(x) = O(\beta(x))$. Зокрема , якщо $c = 1$ нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають ***еквівалентними*** і записують $\alpha(x) \sim \beta(x)$.
2. Якщо $c = 0$, то $\alpha(x)$ називають ***нескінченно малою вищого порядку***, ніж $\beta(x)$, і позначають $\alpha(x) = o(\beta(x))$.
3. Функція $\alpha(x)$ є ***нескінченно малою порядку*** n порівняно з функцією $\beta(x)$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^n} = c,\ 0 < |c| < \infty.$$

При обчисленні границь зручно використовувати ***ланцюжок еквівалентностей*** при $x \to 0$:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a}.$$

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 2x - \sin x)^3}{\operatorname{tg} x - \sin x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Розглянемо чисельник. При $x \to 0$ $\sin 2x \sim 2x$, $\sin x \sim x$. Оскільки $\sin 2x$ і $\sin x$ не еквівалентні, то границя не зміниться, якщо $(\sin 2x - \sin x)^3$ замінити на x^3. Розглянемо знаменник. При

$x \to 0$ $\operatorname{tg} x \sim x$, $\sin x \sim x$, тобто $\sin x \sim \operatorname{tg} x$. Оскільки різниця еквівалентних нескінченно малих функцій $\alpha(x)$ і $\beta(x)$– нескінченно мала вищого порядку, ніж $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ і вона не дорівнює нулю, то в цьому прикладі не можна $\operatorname{tg} x - \sin x$ замінити на $x - x = 0$. З цієї ж причини не можна замінити знаменник на $\operatorname{tg} x - x$ або $x - \sin x$. Перетворимо знаменник:

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \operatorname{tg} x(1 - \cos x) = 2 \operatorname{tg} x \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2x \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{2}.$$

Отже, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin 2x - \sin x)^3}{\operatorname{tg} x - \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{\frac{x^3}{2}} = 2$.

Задачі для самостійної роботи.

Знайти границі функцій

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2}{3x^2 - 5x + 1}$. **2**. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^4 + x^2 + 1}$. **3**. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{|x + 2|}$.

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$. **5**. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$. **6**. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{2x - 1} - \dfrac{x^3}{2x^2 + 1} \right)$.

7. $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{\sqrt{x - 1} - 3}{x - 10}$. **8**. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \arcsin x}{3x}$. **9**. $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{ctg} \pi x$.

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$. **11**. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\sin 7x}$. **12**. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right)$.

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x}{3 + x} \right)^{2x}$. **14**. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 5} \right)^{x^2}$. **15**. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{cosec} x}$.

16. $\lim\limits_{x \to \infty} x(\ln(x + 2) - \ln x)$. **17**. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \ln \sqrt{\dfrac{x + 1}{1 - x}}$.

Визначити порядок малості $\alpha(x)$ відносно $\beta(x) = x$, $x \to 0$

18. $\alpha(x) = \dfrac{2\sqrt[3]{x}}{1 - x}$. **19**. $\alpha(x) = \sin(\sqrt{x + 2} - \sqrt{2})$. **20**. $\alpha(x) = 3^{\sqrt{x}} - 1$.

Що повинен знати та вміти студент. Знати означення границі функції у точці, основні теореми про границі, вміти їх застосовувати при обчисленні границь функцій, вміти розкривати неозначеності. Вміти застосовувати першу та другу важливі границі, їх наслідки. Порівнювати нескінченно малі функції, знати ланцюжок еквівалентностей і вміти користуватися ним.

§ 6. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ У ТОЧЦІ ТА НА ВІДРІЗКУ

Різницю $\Delta x = x_2 - x_1$ називають ***приростом змінної*** x; $\Delta f = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ називають ***приростом функції*** $f(x)$ у точці x, що відповідає приросту Δx.

Функцію називають ***неперервною у точці*** x_0:

1) якщо вона визначена в точці x_0 і в деякому її околі;

2) якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Для неперервності функції $f(x)$ у точці x_0 необхідно і достатньо, щоб границя функції зліва при $x \to x_0$ дорівнювала границі функції справа і дорівнювала значенню функції у даній точці, тобто

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Символи функції та границя для неперервних функцій можна міняти місцями, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x).$$

Функцію $f(x)$ називають ***неперервною на відрізку*** $[a, b]$, якщо вона неперервна в кожній точці цього відрізку.

Алгебраїчна сума або добуток скінченного числа неперервних функцій в точці чи на відрізку є функція неперервна в тій самій точці або на відрізку.

Частка двох неперервних функцій в точці чи на відрізку є функція неперервна, якщо знаменник не дорівнює нулю у точці або на відрізку.

Суперпозиція неперервних функцій є функція неперервна.

Неперервна на відрізку функція має такі ***властивості***:

1) будь-яка неперервна на відрізку функція обмежена на цьому відрізку;

2) якщо функція неперервна на відрізку, то на цьому відрізку існує точка, в якій функція набуває свого найбільшого значення та точка, в якій функція набуває свого найменшого значення на цьому відрізку;

3) якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і на його кінцях набуває значень різних знаків $f(a)f(b) < 0$, то хоча б в одній точці відрізку $[a, b]$ значення функції дорівнює нулю, тобто рівняння $f(x) = 0$ має на $[a, b]$ принаймні один дійсний корінь.

Приклад 1. Фірма платить продавцю за x одиниць проданого товару $(2x + 50)$ грн, якщо продано товару менше, ніж 40 од., та доплачує 20 % комісійних, якщо кількість проданого товару 40 од. і більше. Описати залежність між кількістю проданого товару та заробітною платнею, отриманою продавцем, і побудувати графік функції.

Розв'язання. Залежно від інтервалу, в якому знаходиться кількість проданого товару, функція буде мати різний вигляд, а саме:

$$y = \begin{cases} 2x + 50, & 0 \le x < 40, \\ 1{,}2(2x + 50), & x \ge 40. \end{cases}$$

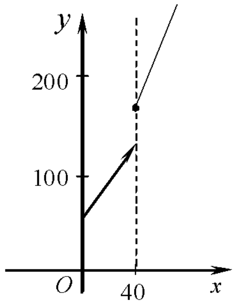
Графіком функції на інтервалі $0 \le x < 40$ буде частина прямої

$$y = 2x + 50,$$

а на півосі $x \ge 40$ – промінь

$$y = 1{,}2(2x + 50).$$

У точці $x = 40$ функція y не є неперервною і має розрив.



Скінченні розриви функції називають ***розривами першого роду***, а нескінченні – ***розривами другого роду***. Прикладом розривної функції другого роду є функція $y = \dfrac{1}{x}$, яка має розрив у точці $x = 0$, причому

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Точку x_0 називають точкою ***усувного розриву*** функції $f(x)$, якщо

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) \neq f(x).$$

Приклад 2 . Знайти точки розриву функції $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x}$.

Розв'язання. Функція $f(x)$ елементарна і визначена для всіх x, окрім $x = -1$, де вона має розрив. Знаходимо границі:

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -1-0} \frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} = 3;$$

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -1+0} \frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} = 3.$$

Оскільки права і ліва границі існують і рівні, то точка $x = -1$ є точкою усувного розриву. Розрив можна усунути, якщо визначити функцію так:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1+x^3}{1+x}, & x \neq -1, \\ 3, & x = -1. \end{cases}$$

Задачі для самостійної роботи.

Дослідити на неперервність функції

1. $f(x)=\frac{1}{x^2(x+3)}$. **2**. $f(x)=\frac{x-2}{|x-2|}$. **3**. $f(x)=\frac{6x^2-x-1}{2x-1}$.

4. $f(x)=1-x\sin\frac{1}{x}$. **5**. $f(x)=2^{\frac{x}{x^2-9}}$. **6**. $f(x)=\frac{|x+1|}{\mathrm{arctg}(x+1)}$.

7. $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.

Довести за означенням неперервність функцій у кожній точці $x_0 \in R$.

8. $f(x)=x^3$. **9**. $f(x)=e^x$. **10**. $f(x)=x^2-4x+5$. **11**. $f(x)=\sin x$.

12.Скільки точок розриву і якого роду має функція $y=\frac{1}{\lg|x|}$. Побудувати її графік.

Що повинен знати та вміти студент. Знати поняття неперервної функції у точці та на відрізку. Вміти знаходити точки розриву функцій, їх класифікувати. Знати властивості неперервних на відрізку функцій.

ТЕМА 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§ 1. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Похідною функції $y=f(x)$ у точці x називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Правою (лівою) похідною функції $y=f(x)$ у точці x називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля справа (зліва), тобто

$$f'_+(x) = y'_+ = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\left(f'_-(x) = y'_- = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right).$$

Для існування похідної функції $y = f(x)$ у точці x необхідно і достатньо, щоб у цій точці існували і були рівні між собою ліва і права похідні:

$$f'_-(x) = f'_+(x)$$

Функцію, яка має скінченну похідну в точці x називають ***диференційовною*** у цій точці. Приріст диференційовної у точці x функції має вигляд

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

де $\alpha(\Delta x)$ нескінченно мала функція при $\Delta x \to 0$. Вираз $f'(x)\Delta x$ називають ***диференціалом*** функції $y = f(x)$ і позначається dy. Диференціал є головною лінійною частиною приросту функції.

Обчислення похідної y' називають ***диференціюванням***.

Правила знаходження похідних

Нехай функції $u : X \to R$ і $v : X \to R$ мають похідні $u'(x_0)$ і $v'(x_0)$ у точці x_0.

Тоді

1. $(cu)'(x_0) = cu'(x_0)$ для $\forall c \in R$.
2. $(u(x_0) + v(x_0))' = u'(x_0) + v'(x_0)$.
3. $(u(x_0) \cdot v(x_0))' = u'(x_0) \cdot v(x_0) + v'(x_0) \cdot u(x_0)$.
4. Якщо додатково $v(x_0) \neq 0$, тоді

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - v'(x_0)u(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

5. Правило диференціювання складеної функції.

Нехай функція $f : X \to R$ має похідну $y' = f'(x_0)$ у точці $x_0 \in X$. Функція $g : Y \to R$, $Y \supset \{f(x) : x \in X\}$ має похідну $z'(y_0) = g'(y_0)$ у точці $y_0 = f(x_0)$. Тоді складена функція $z = g(f) : X \to g(f(x))$ має похідну у точці x_0:

$$[g(f)]'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

6. *Таблиця похідних деяких елементарних функцій*

1) $(\text{const})' = 0$;
2) $(x^n)' = nx^{n-1}$;
3) $(a^x)' = a^x \ln a$;
4) $(e^x)' = e^x$;
5) $(\sin x)' = \cos x$;
6) $(\cos x)' = -\sin x$;
7) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
8) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
9) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;
10) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
11) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
12) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;
13) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;
15) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
16) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
17) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
18) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a e$.

Приклад 1. Знайти похідну функцій:

а) $y = \operatorname{tg}^3(2-5x)$; б) $y = \dfrac{x^2 + \sin x}{3^x} - x \ln 4x$; в) $y = x^{\cos x}$.

Розв'язання.

а) Застосовуючи правило обчислення похідної складеної функції, маємо:

$$y' = 3\operatorname{tg}^2(2-5x)\frac{1}{\cos^2(2-5x)}(-5) = \frac{-15\operatorname{tg}^2(2-5x)}{\cos^2(2-5x)};$$

б) користуючись правилами обчислення похідних суми, частки, добутку та складеної функції, маємо:

$$y' = \frac{(2x+\cos x)3^x - 3^x \ln 3(x^2+\sin x)}{3^{2x}} - \ln 4x - \frac{x}{4x}4 =$$

$$= \frac{2x+\cos x - x^2 \ln 3 - \ln 3 \sin x}{3^x} - \ln 4x - 1;$$

в) для диференціювання степенево-показникової функції, тобто функції вигляду $u^{v(x)}(x)$, де $u(x)$ і $v(x)$ – функції, що мають скінченну похідну, застосуємо логарифмічне диференціювання: $y = x^{\cos x}$, $\ln y = \ln\left(x^{\cos x}\right)$, або $\ln y = \cos x \ln x$.

Диференціюючи обидві частини рівності за змінною x, одержуємо:

$$\frac{1}{y}y' = -\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}.$$

Звідси

$$y' = \left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}\right)y = \left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}\right)x^{\cos x}.$$

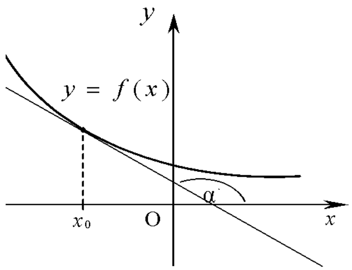
Похідну, її геометричний та фізичний зміст широко застосовують при розв’язанні цілого ряду задач у різних галузях діяльності.

Геометричний зміст похідної. Похідна функції $y = f(x)$ для кожного значення x дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка даної функції у відповідній точці, тобто $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, де α – кут, який утворює дотична до графіка функції в точці x_0 з додатним напрямом осі Ox.

На основі геометричного змісту похідної рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ записують так:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Для нормалі, тобто прямої, що проходить через точку дотику перпендикулярно до дотичної, рівняння має вигляд



$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

$f'(x_0) \neq 0$.

Приклад 2. Написати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = \cos 2x - 2\sin x$ у точці $x_0 = \pi$.

Розв'язання. Знайдемо y' у точці $x_0 = \pi$.

$$y' = -2\sin 2x - 2\cos x, \quad y'(\pi) = 2, \quad y(\pi) = 1.$$

Підставляючи знайдені значення у рівняння дотичної і нормалі, отримаємо рівняння дотичної: $y - 1 = 2(x - \pi)$, або

$$y = 2x - 2\pi + 1$$

та рівняння нормалі:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - \pi) \text{ або } y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} + 1.$$

Під фізичним змістом похідної розуміють швидкість зміни функції у цій точці. У зв'язку з цим можна визначити ***економічний зміст похідної*** як швидкість зміни деякого економічного процесу.

Враховуючи, що похідна функції $y = f(x)$ це $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, і вважаючи, що витрати y виробництва є функцією кількості x однорідної продукції, що виробляється, знаходимо середній приріст витрат на одиницю продукції як $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, де Δy – приріст витрат виробництва, а Δx – приріст продукції. Тоді похідна $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ виражає граничні витрати виробництва.

Приклад 3. На основі досліджень отримали функцію прибутку від ціни p за одиницю продукції: $f(p) = -50p^2 + 500p$. Яким буде граничний прибуток фірми залежно від ціни для значень: $p = 2,\ p = 5,\ p = 10$?

Розв'язання. Згідно з економічним значенням похідної граничний прибуток буде визначатися похідною $f'(p)$:

$$f'(p) = -100p + 500.$$

Звідки $f'(2) = 300;\ f'(5) = 0;\ f'(10) = -500.$

Отже, при збільшенні ціни одиниці продукції до 5 ($p < 5$) прибуток зростатиме і найбільшим буде при $p = 5$: $f(5) = 1250$. При збільшенні ціни, починаючи з $p = 5$, прибуток фірми зменшуватиметься. Отже, знак мінус у похідної $f'(10)$ вказує, що виробництво стане менш прибутковим порівняно з оптимальним варіантом.

Граничні величини характеризують процес, зміну економічного об'єкта.

Зауважимо, що економіка не завжди дозволяє використовувати граничні величини у зв'язку з неподільністю багатьох об'єктів економічних розрахунків, розривності (дискретності) багатьох показників у часі (наприклад, річних, квартальних та. ін.). Проте у багатьох випадках можна ефективно використовувати граничні величини.

Характеристикою відносної зміни приросту функції $y = f(x)$ при малих відносних змінах приросту аргументу x є ***еластичність*** функції. ***Коефіцієнт еластичності*** $E_x(y)$ визначають так:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}y'.$$

Його широко використовують при дослідженнях споживчого попиту на товари залежно від цін або доходів споживачів. Коефіцієнт еластичності наближено показує, на скільки процентів зміниться функція $y = f(x)$ при зміні незалежної змінної x на 1%.

Якщо скористатися поняттям відносної швидкості зміни (темпу) функції $y = f(x)$, яку визначають логарифмічною похідною, $T_y = (\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$, то коефіцієнт еластичності можна записати у вигляді $E_x(y) = xT_y$.

З означення коефіцієнта еластичності випливають наступні його властивості:

1. $E_x(u \pm v) = \dfrac{uE_x(u) \pm vE_x(v)}{u \pm v}$;
2. $E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v)$;
3. $E_x\left(\dfrac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v)$;
4. $E_x(y) = \dfrac{1}{E_y(x)}$.

За коефіцієнтом еластичності розрізняють товари еластичного і нееластичного попиту (залежно від зміни цін).

При дослідженні залежності попиту від доходів покупців визначають, як попит на різні товари реагує на зміну доходів. У цьому розумінні, наприклад, еластичність низькосортних продуктів від'ємна (зі зростанням прибутків їх купляють менше), і навпаки, еластичність предметів розкошів, зазвичай, додатна.

У більшості прикладів зі збільшенням ціни продукції попит на неї спадає. Отже, справедлива нерівність $y' < 0$.

Щоб не було від'ємних чисел при вивченні еластичності попиту домовимося, що

$$E_x(y) = -\frac{x}{y}y'.$$

Якщо $E_x(y) > 1$, то підвищення ціни на 1% відповідає зниженню попиту більше, ніж на 1%. У цьому випадку говорять, що попит еластичний.

Якщо $E_x(y)=1$, то підвищення ціни на 1% відповідає зниженню попиту рівно на 1%. У цьому випадку говорять, що попит нейтральний.

Якщо $E_x(y)<1$, то підвищення ціни на 1% відповідає зниженню попиту менше, ніж на 1%. У цьому випадку говорять, що попит нееластичний.

На еластичність попиту впливають як об'єктивні так і суб'єктивні чинники. Завжди враховується суб'єктивна необхідність у купівлі деякого товару. Чим вона нижча, тим вища еластичність щодо ціни. До об'єктивних факторів відносять питому вагу товару у доході покупця. Чим вона нижча, тим вища еластичність щодо ціни. Так, наприклад, попит на сірники практично не змінюється при зміні їх ціни.

Приклад 4. Функція попиту y від ціни x продукту має вигляд $y=10-x$. Знайти коефіцієнт еластичності попиту при ціні товару $x=2$ од.

Розв'язання. Коефіцієнт еластичності попиту дорівнює

$$E_x(y)=\frac{x}{y}y'=\frac{x}{10-x}(-1)=\frac{-x}{10-x}.$$

При $x=2$ отримаємо: $E_{x=2}(y)=\dfrac{-2}{10-2}=0{,}25$, тобто за збільшення ціни на 1 % попит на товар зменшиться на 0,25 %. Враховуючи, що $|E_{x=2}(y)|<1$ попит при ціні $x=2$ нееластичний.

Приклад 5. Фірма продає індонезійське морозиво у великих об'ємах. Найняті фірмою спеціалісти з маркетингу визначили функції попиту та пропозиції

$$q=\frac{p+8}{p+2};\ \ s=p+\frac{1}{2}.$$

Знайти: 1) рівноважну ціну; 2) еластичність попиту і пропозиції щодо ціни і значення цієї еластичності для рівноважности ціни; 3) зміну доходу фірми при збільшенні ціни на 5% від рівноважної.

Розв'язання. Функція попиту зв'язує між собою кількість товару q, який купується покупцями, і продажну ціну p. Функція пропозиції зв'язує між собою кількість товару s, який пропонується для продажу, і продажну ціну p.

Товар вираховується в кількості одиниць за годину, ціна вираховується в індонезійських рупіях.

Рівноважною називають ціну, при якій попит і пропозиція рівні між собою, тобто $q = s$.

1. Знайдемо рівноважну ціну з рівності функцій попиту і пропозиції

$$\frac{p+8}{p+2} = p + \frac{1}{2} \Rightarrow p + 8 = (p+2)\left(p + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 + \frac{3}{2}p - 7 = 0 \Rightarrow p_1 = 2$$

Отже, рівноважна ціна дорівнює 2 індонезійським рупіям.

2.Знайдемо формули для обчислення еластичності $E_p(q)$ попиту щодо ціни і для обчислення еластичності $E_p(s)$ пропозиції щодо ціни

$$E_p(q) = \frac{p}{q}q' = \frac{p(p+2)}{p+8}\left(\frac{p+8}{p+2}\right)' = \frac{p(p+2)}{p+8}\frac{p+2-p-8}{(p+2)^2} =$$

$$= -\frac{6p}{(p+2)(p+8)};$$

$$E_p(s) = \frac{p}{s}s' = \frac{p}{p+\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{2p}{2p+1}.$$

Для випадку, коли ціна рівноважна, тобто $p = 2$, еластичності дорівнюють

$$E_{p=2}(q) = -\frac{6 \cdot 2}{(2+2)(2+8)} = -0.3; \ E_{p=2}(s) = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 1} = 0.8.$$

Обидва значення мають модулі, які є меншими одиниці. Це свідчить про те, що при рівноважній ціні і попит, і пропозиція нееластичні щодо ціни. Зміна ціни на 1% призведе до зміни попиту і пропозиції на величини, менші 1%: попит зменшиться на 0.3% і пропозиція збільшиться на 0.8%.

3.Якщо ціну збільшити згідно з умовою задачі на 5% від рівноважної, то попит зменшиться на $5 \cdot 0.3\% = 1.5\%$. Отже, дохід фірми збільшиться тільки на $5\% - 1.5\% = 3.5\%$.

Задачі для самостійної роботи.
Знайти похідні функцій

1. $y = x^4 + 3x - 2$. **2**. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$. **3**. $y = \frac{x^2+1}{x^3 - x}$. **4**. $y = \frac{1}{x^3 + 2x - 1}$.

5. $y = x^3 \operatorname{ctg} x$. **6**. $y = \sqrt{x} \sin x$. 7. $y = \frac{\ln x}{x}$. **8**. $y = \cos 5x$.

9. $y = 7^{3x-1}$. **10**. $y = \arcsin \sqrt{x}$. **11**. $y = e^{\operatorname{tg} 2x}$. **12**. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

13 . $y = x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$. **14** . $x^3 + y^3 = 3xy$. **15**. $x \sin y + y \sin x = 0$. **16**. $y = (\operatorname{arctg} x)^{x^2}$. **17**. $\begin{cases} x = \ln\sin\frac{t}{2}, \\ y = \ln\sin t, \end{cases}$ $0 < t < \pi$. **18.** $\begin{cases} y = e^t \sin t, \\ x = e^t \cos t. \end{cases}$

Записати рівняння дотичної і нормалі до графіків функцій у заданих точках.

19. $y = x^2 - 5x + 4,\ x_0 = -1$.

20. $y = \operatorname{tg} 2x, x_0 = 0$.

21. $y^5 + x^5 - 2xy = 0, M(1,1)$.

22. $x = t\cos t,\ y = t \sin t$ у початку координат і у точці $t = \pi/4$.

Що повинен знати та вміти студент. Знати означення похідної функції, її геометричний та економічний зміст. Вміти розв'язувати задачі на застосування похідної. Знати таблицю похідних основних елементарних функцій, правила диференціювання, вміти їх застосовувати, метод логарифмічного диференціювання для знаходження похідної.

§ 2. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

У деяких задачах виникає необхідність обчислити похідну від функції, яка є похідною іншої функції. Такі похідні називають ***похідними вищих порядків***.

Нехай функція $f(x)$ задана і диференційовна на деякому проміжку $[a, b]$. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x},$$

то її називають ***другою похідною*** функції $f(x)$ у точці x і позначають символом y'' або $f''(x)$. За означенням

$y'' = (y')'$ або $f''(x) = (f'(x))'$.

Аналогічно $y''' = (y'')'$, $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Приклад 1. Обчислити похідні вищих порядків функції $y = -2 - 3x^2 + x^3$.

Розв'язання. Ця функція має першу похідну $y' = -6x + 3x^2$,

другу похідну $y'' = -6 + 6x$, третю – $y''' = 6$. Усі інші похідні порядку $n > 3$ дорівнюють нулю.

Нехай функція $f(x)$ диференційовна на деякому проміжку. Тоді її перший диференціал $dy = f'(x)dx$ – деяка функція від x.

Другим диференціалом d^2y називають диференціал від першого диференціала:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2$$

Взагалі***, n-м диференціалом*** $d^n y$ називають диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку: $d^n y = f^n(x)dx^n$.

Наведемо ***основні теореми диференціального числення***.

Теорема Ферма. Нехай функція $f(x)$ неперервна в інтервалі (a, b) і набуває свого найбільшого або найменшого значення у деякій точці c цього інтервалу. Тоді , якщо в точці c існує похідна $f'(c)$, то $f'(c)=0$.

Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,\, b]$, диференційовна в інтервалі $(a,\, b)$ і на кінцях відрізка набуває однакових значень $f(a)=f(b)$, то знайдеться хоча б одна точка $c\in(a,\, b)$, в якій $f'(c)=0$.

Теорема Коші. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a,\, b]$, диференційовні в інтервалі $(a,\, b)$, причому $g'(x)\neq 0$, $x\in(a,\, b)$, то існує така точка $c\in(a,\, b)$, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,\, b]$, диференційовна в інтервалі $(a,\, b)$, то всередині цього інтервалу знайдеться хоча б одна точка $c\in(a,\, b)$, у якій

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Цю формулу називають формулою Лагранжа або формулою скінченних приростів, оскільки вона виражає точне значення приросту функції $\Delta y=f(b)-f(a)$ через похідну в деякій точці c інтервалу $(a,\, b)$ і скінченне значення приросту аргументу $\Delta x=b-a$.

Вкажемо правило обчислення границь, в якому застосовують поняття похідної – ***правило Лопіталя***.

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені та диференційовні в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, причому

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0,$$

і в цьому околі $g'(x)\neq 0$. Тоді якщо існує границя відношення похідних $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує границя відношення функцій $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ і ці границі рівні між собою:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені та диференційовні в околі точки x_0 і в цьому околі

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty\,, g'(x)\neq 0\,.$$

Тоді якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ і

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

<u>Зауваження.</u> Якщо похідні $f'(x)$ і $g'(x)$ задовольняють ті самі умови, що і функції $f(x)$ і $g(x)$, то правило Лопіталя можна застосовувати ще раз. При цьому дістаємо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Приклад 2. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

Розв'язання. а) Маємо невизначеність $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, тому за правилом Лопіталя $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{1}=0$.

б) Маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, тому за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2.$$

Задачі для самостійної роботи.
Знайти похідні другого порядку

1. $y=\cos^2 x$. **2.** $y=\operatorname{arctg} x^2$. **3.** $y=e^{-x^2}$. **4.** $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Знайти формулу для n-ої похідної вказаних функцій

5. $y=\cos x$. **6.** $y=\ln x$. **7.** $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$.

Знайти похідні другого порядку функцій, заданих неявно

8. $y=1+xe^y$. **9.** $y=\operatorname{tg}(x+y)$. **10.** $xy=e^{x-y}$.

Знайти похідні другого порядку функцій, заданих параметрично

11. $x=\ln t,\ y=t^3,\ t\in(0;\infty)$. **12.** $x=\arcsin t,\ y=\ln(1-t^2),\ t\in(-1;1)$.

Застосовуючи правило Лопіталя знайти границі функцій

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$. **14.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$. **16.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$. **17.** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2e^{-x}$.

Що повинен знати та вміти студент. Знати основні теореми диференціального числення: Ферма, Коші; знаходити границі за правилом Лопіталя у випадках невизначеностей $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[\infty^{0}\right]$, $\left[0^{\infty}\right]$, вміти знаходити похідні та диференціали вищих порядків.

§ 3. ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА ТА МАКЛОРЕНА. ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Для функції, яка диференційовна $(n+1)$ раз включно в околі точки x_0 має місце ***формула Тейлора***:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \xi\in(x_0,x).$$

Останній доданок у формулі Тейлора

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

називають ***залишковим членом у формі Лагранжа*** , і якщо $(n+1)$ похідна обмежена, то він прямує до нуля при $x\to x_0$.

При $x_0=0$ ця формула набуває вигляду:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ \text{де}\ \ 0<\theta<1.$$

Її називають ***формулою Маклорена***.

Приклад 1. Записати формулу Маклорена для функції $f(x)=e^x$.

Розв'язання. Похідна будь-якого порядку функції $f(x)=e^x$ дорівнює самій функції e^x, тому $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=1$.

Тоді за формулою Маклорена

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\ \text{де}\ \ 0<\theta<1.$$

Приклад 2. Записати формулу Маклорена для функції $f(x)=\sin x$.

Розв'язання. Знайдемо похідну n-го порядку функції $\sin x$.

$$f'(x)=\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}+x);$$

$f''(x) = -\sin x = \sin(\frac{\pi}{2}2 + x)$; $f'''(x) = -\cos x = \sin(\frac{\pi}{2}3 + x)$;

$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin(\frac{\pi}{2}4 + x)$;

....

$f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin(\frac{\pi}{2}n + x)$.

У точці $x = 0$ сама функція $f(x) = \sin x$ і похідні парних порядків ($f''(0), f^{(4)}(0), \dots, f^{(2k)}(0)$) дорівнюють нулю, а всі похідні непарних порядків дорівнють ± 1.

Отже

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin(\theta x + \pi n).$$

Аналогічно записують формулу Маклорена для функції $f(x) = \cos x$, а саме

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} +$$

$$+ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos(\theta x + \frac{\pi}{2}(2n+1)).$$

Приклад 3. Записати формулу Маклорена для функції $f(x) = \ln(1-x)$.

Розв'язання. Знайдемо похідну n-го порядку функції $f(x) = \ln(1-x)$.

$f'(x) = -\frac{1}{1-x}$; $f''(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}$; $f''(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}$;

$f^{(4)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1-x)^4}$;

....

$f^{(n)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{(1-x)^n} = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$.

Коли $x=0$ маємо

$f(0)=0$; $f'(0)=-1$; $f''(0)=-1$; ... $f^{(n)}(0)=-(n-1)!$.

Підставимо знайдені коефіцієнти в формулу Маклорена:

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}} .$$

За допомогою формул Тейлора і Маклорена складні функції з великою точністю замінюють многочленами, що полегшує обчислення значень функцій у заданих точках.

Приклад 4. Обчислити значення *е* з точністю до $0{,}0001$.

Розв'язання. Скористаємося формулою Маклорена для функції $f(x)=e^x$ коли $x=1$.

Маємо $$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}.$$

Підберемо *n* так, щоб $\dfrac{e^{\theta}}{(n+1)!}<0{,}0001$, $0<\theta<1$.

Скористаємось нерівністю $\dfrac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\dfrac{3}{(n+1)!}$ і знайдемо *n* з умови

$$\frac{3}{(n+1)!}<0{,}0001 \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)!>30000 .$$

Оскільки $7!=5040$, $8!=40320>30000$, то $n+1=8$, $n=7$.

Отже $$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}\approx 2{,}71826 .$$

Задачі для самостійної роботи.

1. Розкласти многочлен $P_3(x)=1-2x+3x^2-4x^3$ за степенями $(x+1)$.

Записати формулу Маклорена для функцій

2. $y=\ln(x+1)$. **3.** $y=(1+x)^{\alpha}$, де $\alpha\in R$.

4. Записати формулу Тейлора третього порядка для функції $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ у точці $x_0=2$.

5. Записати формулу Тейлора третього порядка для функції $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ у точці $x_0=1$.

6. Обчислити наближено $\sqrt[3]{9}$ з точністю до 0,001.

Що повинен знати та вміти студент. Вміти записувати формулу Тейлора для даної функції, знаходити наближення функцій за допомогою формул Тейлора та Маклорена.

ТЕМА 5. ПОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

Функцію $f(x)$ називають ***зростаючою (спадною)*** на інтервалі $(a;b)$, якщо для довільних двох точок x_1 та x_2 з вказаного інтервалу таких, що $x_1<x_2$, виконується нерівність

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2)).$$

Ознаки зростання та спадання функції:

1) якщо $f'(x)>0$ для всіх $x\in(a;b)$, то функція $f(x)$ зростає на інтервалі $(a;b)$;

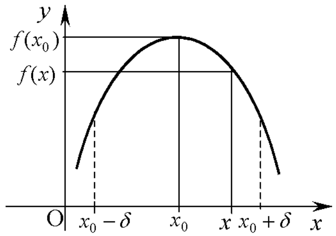
2) якщо $f'(x)<0$ для всіх $x\in(a;b)$, то функція $f(x)$ спадає на інтервалі $(a;b)$;

3) якщо $f'(x)=0$ для всіх $x\in(a;b)$, то функція $f(x)$ стала на інтервалі $(a;b)$.

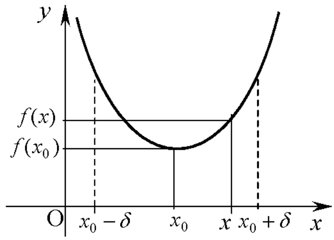
Точку x_0 називають точкою ***локального максимуму*** (або ***мінімуму***) функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0<|x-x_0|<\delta$ точки x_0, який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність

$$f(x)<f(x_0)\ (f(x)>f(x_0)).$$

Геометричний зміст означення зрозумілий з рисунків.



x_0 – *точка* max



x_0 – *точка* min

Необхідна умова локального екстремуму. Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційовна у цій точці, то $f'(x_0)=0$.

Геометричний зміст цього твердження: якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційовна в цій точці, то в цій точці існує дотична до графіка функції $y=f(x)$ і ця дотична паралельна осі Ox.

Умова $f'(x_0)=0$ є необхідною, але не достатньою для того, щоб диференційовна в точці x_0 функція мала локальний екстремум.

Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називають ***стаціонарними***. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають ***критичними***. Критичні точки – це точки можливого екстремуму.

Перша достатня умова локального екстремуму. Нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$, яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, в якому функція має похідну $f'(x)$ крім, можливо, точки x_0. Тоді:

1) якщо в інтервалі $(x_0-\delta; x_0)$ похідна $f'(x)>0$, а в інтервалі $(x_0; x_0+\delta)$ похідна $f'(x)<0$, то точка x_0 є точкою ***локального максимуму*** функції $f(x)$;

2) якщо в інтервалі $(x_0-\delta;x_0)$ похідна $f'(x)<0$, а в інтервалі $(x_0;x_0+\delta)$ похідна $f'(x)>0$, то точка x_0 є точкою ***локального мінімуму*** функції $f(x)$;
3) якщо в обох інтервалах $(x_0-\delta;x_0)$ і $(x_0;x_0+\delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак, то точка x_0 не є екстремальною точкою функції $f(x)$.

Іншими словами, якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 знак похідної $f'(x)$ змінюється з плюса на мінус, то x_0 – точка локального максимуму; якщо знак похідної змінюється з мінуса на плюс, то x_0 – точка локального мінімуму; якщо похідна не змінює знак, то в точці x_0 екстремум відсутній.

Приклад 1. Знайти інтервали зростання та спадання функції

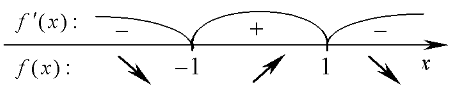
$$f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)^2}\ .$$

Розв'язання. Область визначення $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$. Знайдемо похідну

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)^2-2(x-1)(x^2+1)}{(x-1)^4}=-\frac{2(x+1)}{(x-1)^3}.$$

Похідна $f'(x)$ дорівнює нулю при $x=-1$ і не існує при $x=1$.

Відмітимо ці точки на числовій прямій пам'ятаючи про область визначення функції і визначимо знак похідної на кожному з інтервалів:



Таким чином, функція спадає , якщо $x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$, і зростає на інтервалі $(-1;1)$

Приклад 2. Виробник з'ясував, що тижневий прибуток P фірми залежить від тижневого рекламного бюджету x за формулою

$$P(x)=200\sqrt{x}-x-1000\,,$$

де x і P вимірюються в гривнях. Знайти максимальний прибуток, отриманий протягом тижня, і з'ясувати, за яких вкладеннях рекламного бюджету прибуток фірми зростає, а за яких спадає.

Розв'язання. Необхідно знайти значення x_0, за якого функція $P(x)$ досягає максимуму. Для цього розв'яжемо рівняння

$$P'(x_0) = 0.$$

$$P'(x_0) = \frac{100}{\sqrt{x_0}} - 1, \; P'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{100}{\sqrt{x_0}} - 1 \text{або } x_0 = 10000.$$

Оскільки при $x < 10\ 000$ $P'(x) > 0$, а при $x > 10\ 000$, $P'(x) < 0$, то при вкладенні в рекламний бюджет до 10 000 грн прибуток фірми зростатиме, а при вкладенні більше, ніж 10 000 грн, прибуток фірми спадатиме. При вкладанні рівно 10 000 грн прибуток фірми буде максимальним і складатиме

$$P(x_0) = 200\sqrt{10\ 000} - 10\ 000 - 1000 = 9000 \text{ грн.}$$

Найбільше та найменше значення функції на проміжку

Не слід плутати локальний максимум (мінімум) з найбільшим (найменшим) значенням функції, якого вона досягає на відрізку. Локальних максимумів і мінімумів функція може мати декілька, тоді як найбільше значення (його ще називають абсолютним максимумом), якщо воно існує, єдине. Це саме стосується і найменшого значення (абсолютного мінімуму) функції.

Щоб знайти найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$ на проміжку $[a;b]$, потрібно:

1) знайти похідну $f'(x)$ і визначити критичні точки даної функції;

2) обчислити значення функції в тих критичних точках, що належать інтервалу $(a;b)$, а також у точках a і b;

3) серед одержаних значень вибрати найбільше і найменше.

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^2 \ln x$ на відрізку $[1;e]$.

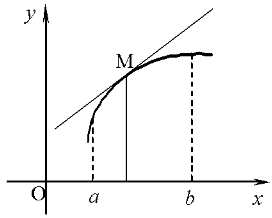
Розв'язання. Знайдемо похідну функції

$$y' = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

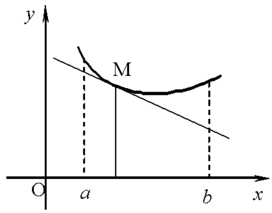
Оскільки функція визначена при $x > 0$, то критичну точку знайдемо з умови $2\ln x + 1 = 0$, тобто $x = e^{-0.5} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Ця точка не належить проміжку $[1;e]$. Тому обчислимо лише значення функції на кінцях відрізка. Маємо $y(1) = 0$, $y(e) = e^2$.

Таким чином, $\max\limits_{x\in[1;e]} f(x) = f(e) = e^2$, $\min\limits_{x\in[1;e]} f(x) = f(1) = 0$.

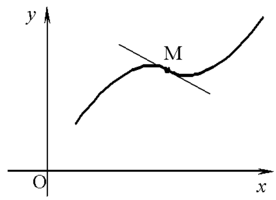


Криву $y = f(x)$ називають ***опуклою*** на інтервалі $(a;b)$, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.



Криву $y = f(x)$ називають ***вгнутою*** на інтервалі $(a;b)$, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі .

Точкою перегину називають таку точку кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої .Для дослідження графіка функції на опуклість та вгнутість застосовують другу похідну функції.



Нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційовна на $(a;b)$.

Тоді:

1) якщо $f''(x) < 0$, $x \in (a;b)$, то графік функції $y = f(x)$ опуклий на $(a;b)$;

2) якщо $f''(x) > 0$, $x \in (a;b)$, то крива $y = f(x)$ вгнута на інтервалі $(a;b)$.

З цього твердження випливає, що у точці перегину друга похідна дорівнює нулю, якщо вона існує. Однак точками перегину кривої $y = f(x)$ можуть бути також і точки, в яких друга похідна $f''(x)$ не існує (наприклад, точка $x = 0$ кривої $f(x) = \sqrt[5]{x}$).

Точки, у яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, називають ***критичними точками другого роду*** функції $y = f(x)$. Отже, якщо x_0 – абсциса точки перегину, то x_0 є критичною точкою другого роду цієї функції. Обернене твердження невірне.

Достатні умови існування точки перегину.

Нехай x_0 – критична точка другого роду функції $f(x)$. Якщо при переході через точку x_0 $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину кривої $f(x)$.

Приклад 4. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривої $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

Розв'язання. Знайдемо похідні

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2, \quad f''(x) = 36x^2 - 24x = 36x(x - \frac{2}{3}).$$

З розв'язання рівняння $f''(x) = 0$, $36x(x - \frac{2}{3}) = 0$ маємо критичні точки другого роду: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{2}{3}$.

Визначимо знак другої похідної: якщо $x < 0$, то $f''(x) > 0$ – крива вгнута; якщо $x \in (0; 2/3)$, то $f''(x) < 0$ – крива опукла; якщо $x > 2/3$, то $f''(x) > 0$ – крива вгнута. При переході через точки $x_1 = 0$ і $x_2 = \frac{2}{3}$ друга похідна змінює знак. Звідси випливає, що точки $(0; f(0))$ та $(2/3; f(2/3))$, тобто $(0;1)$ та $(2/3; 11/27)$ є точками перегину даної кривої.

Асимптотою кривої $y = f(x)$ називають пряму, до якої необмежено наближається точка кривої при необмеженому віддаленні її від початку координат. Існує три типи асимптот: вертикальні, похилі та горизонтальні.

Пряма $x = c$ – ***вертикальна*** асимптота , якщо

$$\lim_{x \to c+0} f(x) = \pm\infty \quad \text{або} \quad \lim_{x \to c-0} f(x) = \pm\infty.$$

Пряма $y = kx + b$ є ***похилою*** асимптотою, якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ ($k \neq 0$), $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b$. При цьому зауважимо, що потрібно розглядати випадки як $x \to +\infty$ так і $x \to -\infty$.

Горизонтальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$ називають пряму $y = b$, коли

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \;\; (\lim_{x\to-\infty} f(x) = b).$$

Зрозуміло, що горизонтальна асимптота є окремим випадком похилої асимптоти ($k = 0$).

Схема дослідження і побудова графіка функції.

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік, треба:

1) знайти область існування функції;
2) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність; Зауважимо, що графік парної функції симетричний відносно осі ординат, а графік непарної функціїї симетричний відносно початку координат;
3) знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з осями координат. Знайти точки розриву та встановити їх характер;
4) за першою похідною знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;
5) за другою похідною знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;
6) знайти асимптоти кривої;
7) дослідити поведінку функції в нескінченно віддалених точках;
8) побудувати графік функції з урахуванням результатів попередніх пунктів.

Приклад 5. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ та побудувати її графік.

Розв'язання. 1) Область існування – вся числова пряма, крім точки $x = 1$, тобто $D(y) = (-\infty;1) \cup (1;\infty)$.

2) Графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь ординат (якщо це можливо) в точці $(0; f(0))$. Знаходимо $y(0) = -1$, отже $A(0;-1)$ – точка перетину кривої з віссю Oy. Щоб знайти точки перетину графіка з віссю Ox, потрібно розв'язати рівняння $y = 0$, тобто $\dfrac{x^2+1}{x-1} = 0$. Це рівняння не має дійсних коренів, тому дана функція не перетинає вісь абсцис.

3) Функція неперіодична. Розглянемо вираз

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x-1} = \frac{x^2+1}{-x-1},$$

таким чином, $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$. Це означає, що дана функція не є ні парною, ні непарною, тобто є функцією загального виду.

4) Функція в точці $x = 1$ має розрив другого роду, причому

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty.$$

В усіх інших точках функція неперервна.

5) Знайдемо похідну

$$y' = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

і розв'яжемо рівняння $y' = 0$, тобто $x^2 - 2x - 1 = 0$, $x_1 = 1-\sqrt{2}$, $x_2 = 1+\sqrt{2}$ – стаціонарні точки. Крім того, похідна невизначена при $x = 1$. Отже, $x_1 = 1-\sqrt{2}$, $x_2 = 1+\sqrt{2}$, $x_3 = 1$ – критичні точки або точки можливого екстремуму. Ці точки розбивають числову пряму на чотири інтервали

$$(-\infty; 1-\sqrt{2}),\ (1-\sqrt{2}; 1),\ (1; 1+\sqrt{2}),\ (1+\sqrt{2}, \infty).$$

На кожному з цих інтервалів похідна y' має певний знак, який можна встановити за методом інтервалів або обчислення значень похідної в окремих точках (по одній точці з кожного інтервалу). На інтервалах $(-\infty; 1-\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2}, \infty)$ похідна додатна, отже функція зростає; якщо $x \in (1-\sqrt{2};1) \cup (1;1+\sqrt{2})$, то функція спадає, бо на цих інтервалах похідна від'ємна. При переході через точку $x_1 = 1-\sqrt{2}$ (рух відбувається зліва направо) похідна змінює знак з плюса на мінус, отже, в цій точці досягається локальний максимум, знайдемо

$$y_{\max} = y(1-\sqrt{2}) = \frac{(1-\sqrt{2})^2+1}{1-\sqrt{2}-1} = 2-2\sqrt{2}\,.$$

При переході через точку $x_2 = 1+\sqrt{2}$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, в цій точці існує локальний мінімум, причому

$$y_{\min} = y(1+\sqrt{2}) = \frac{(1+\sqrt{2})^2+1}{1+\sqrt{2}-1} = 2+2\sqrt{2}\,.$$

Точка $x=1$ не є точкою екстремуму (у цій точці функція невизначена).

6) Знайдемо другу похідну

$$y'' = \left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}\,.$$

На інтервалі $(-\infty;1)$ $y''<0$, отже, на цьому інтервалі крива опукла; якщо $x \in (1;\infty)$, то $y''>0$ – крива вгнута. В точці $x=1$ функція невизначена, тому ця точка не є точкою перегину.

7) З результатів п.4 випливає, що пряма $x=1$ – вертикальна асимптота кривої.

Оскільки

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x-1} = +\infty\,,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x-1} = -\infty\,,$$

то горизонтальні асимптоти відсутні.

Знайдемо границі

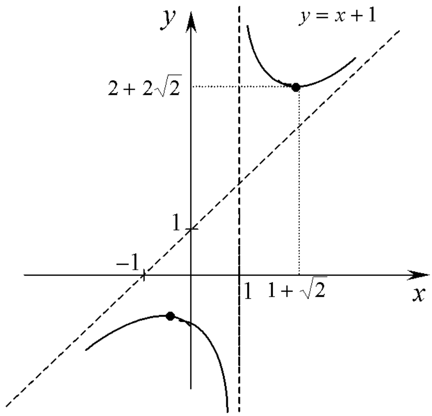
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x} = 1,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x} = 1\,.$$

Отже, $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$,

тоді $\quad b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (\dfrac{x^2+1}{x-1} - x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$.

Таким чином, пряма $y = x + 1$ – похила асимптота даної кривої. Інших асимптот немає.

8) Враховуючи проведені дослідження, будуємо графік.



Приклад 6. На малому підприємстві працюють 15 робітників. Вони виробляють і розповсюджують вареники ручної роботи у спеціальній упаковці по 10 штук. Об'єм продукції q, яку обчислюють упаковками і виробляють на протязі восьмигодинного робочого дня, описується рівнянням $q = -\dfrac{5}{6}t^3 + \dfrac{15}{2}t^2 + 100t + 50$.

Час t обчислюється в годинах.

Знайти продуктивність праці, швидкість і темп зміни продуктивності праці через годину і дві після початку робочого дня і за дві години і одну годину до закінчення робочого дня.

Розв'язання. Продуктивність праці $P(t)$ у будь-який момент часу означають як похідну від об'єму продукції

$$P(t)=\frac{dq}{dt}=-\frac{5}{2}t^2+15t+100$$

і вираховують в упаковках за годину.

Швидкість $P'(t)$ зміни продуктивності праці означають як похідну від $P(t)$ за часом і темп зміни $T_p(t)$ продуктивності праці означають як логарифмічну похідну від $P(t)$

$$P'(t)=\frac{dP}{dt}=-5t+15;$$

$$T_p(t)=\frac{P'(t)}{P(t)}=\frac{-5t+15}{-\frac{5}{2}t^2+15t+100}=\frac{2t-6}{t^2-6t-40}.$$

Першу величину обчислюють в упаковках за квадрат часу в годинах, другу – в упаковках за годину.

Знайдемо значення всіх трьох знайдених функцій у моменти часу $t=1$ година (одна година після початку роботи), $t=2$ години (дві години після початку роботи) і $t=6$ годин (дві години до кінця роботи), $t=7$ годин (одна година до кінця роботи)

$$P(1)=\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=1}=-\frac{5}{2}\cdot 1^2+15\cdot 1+100=112.5\,;$$

$$P(2)=\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=2}=-\frac{5}{2}\cdot 2^2+15\cdot 2+100=120.5\,;$$

$$P(6)=\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=6}=-\frac{5}{2}\cdot 6^2+15\cdot 6+100=100\,;$$

$$P(7)=\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=7}=-\frac{5}{2}\cdot 7^2+15\cdot 7+100=82.5\,;$$

$$P'(1)=\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=1}=-5\cdot 1+15=10\,;$$

$$P'(2)=\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=2}=-5\cdot 2+15=5\,;$$

$$P'(6)=\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=6}=-5\cdot6+15=-15;$$

$$P'(7)=\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=7}=-5\cdot7+15=-20;$$

$$T_p(1)=\left.\frac{P'(t)}{P(t)}\right|_{t=1}=\frac{2\cdot1-6}{1^2-6\cdot1-40}=0.09;$$

$$T_p(2)=\left.\frac{P'(t)}{P(t)}\right|_{t=2}=\frac{2\cdot2-6}{2^2-6\cdot2-40}=0.04;$$

$$T_p(6)=\left.\frac{P'(t)}{P(t)}\right|_{t=6}=\frac{2\cdot6-6}{6^2-6\cdot6-40}=-0.15;$$

$$T_p(7)=\left.\frac{P'(t)}{P(t)}\right|_{t=7}=\frac{2\cdot7-6}{7^2-6\cdot7-40}=-0.24.$$

Знайдемо значення, при якому похідна $P'(t)$ дорівнює нулеві $P'(t)=-5t+15=0 \quad \Rightarrow t=3$.

Згідно з теорією локальних екстремумів, за цього значення продуктивність праці буде максимальною

$$P(3)=\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=3}=-\frac{5}{2}\cdot3^2+15\cdot3+100=122.5$$

Отримані значення продуктивності праці показують, що на початку робочого дня вона зростає і до кінця робочого дня спадає. Найбільше значення досягається через три години після початку роботи. Лише тоді зміниться до кращого функціональна залежність об'єму продукції від часу.

Задачі для самостійної роботи.

Знайти інтервали монотонності та екстремуми функцій

1. $y=x\sqrt{1-x^2}$. **2.** $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. **3.** $y=xe^{-x}$. **4.** $y=x\ln x$ **.**

Знайти найбільше та найменше значення функції на вказаному інтервалі

5. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $x\in[-1;3]$. **6.** $y=x-2\sqrt{x}$, $x\in[0;4]$.

7. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, $x\in[0;1]$.

Знайти інтервали опуклості графіків функцій, точки перегину і кутові коефіцієнти дотичних у цих точках

8. $y=x^5+5x+1$. **9.** $y=x^4+6x^2$. **10.** $y=xe^{2x}+1$. **11.** $y=x^3\ln x+1$.

Провести повне дослідження функцій та побудувати їх графіки

12. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$. **13.** $y=\dfrac{x}{\ln x}$. **14.** $y=xe^{-1/x}$.

Що повинен знати та вміти студент. Знати необхідні та достатні умови монотонності функції, її локальних екстремумів. Вміти знаходити інтервали монотонності, локальний та глобальний екстремум. Вміти знаходити інтервали опуклості, точки перегину, асимптоти. Вміти будувати графіки функцій за загальною схемою дослідження функцій.

ТЕМА 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§ 1. ПЕРВІСНА І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Нехай $y=f(x)$, $x\in(a,b)$ – функцію, задано на відкритому інтервалі (a,b) (не виключено, що $(a,b)=(0,\infty)$, $(a,b)=(-\infty,0)$, $(a,b)=(-\infty,+\infty)$).

Диференційовну функцію $F(x)$, визначену для всіх $x\in(a,b)$, називають ***первісною*** для функції $f(x)$ на інтервалі (a,b), якщо $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in(a,b)$.

Сукупність усіх первісних $F(x)+C$, $C \in R$ функції $f(x)$ на (a,b) називають ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ і записують так: $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Означення невизначеного інтеграла дозволяє записати такі його властивості:

1. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.
2. $\int dF(x) = F(x)+C$.
3. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$.
4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
5. Якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$ і $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)du = F(u)+C$.

Остання властивість (її називають ***інваріантністю формули інтегрування***) дуже важлива. Вона означає, що та чи інша формула для невизначеного інтеграла залишається справедливою незалежно від того, чи змінна інтегрування є незалежною змінною, чи довільною функцією від неї, що має неперервну похідну. Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають ***інтегруванням*** цієї функції.

ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Інтеграли цієї таблиці називаються табличними і їх треба знати з двох причин. По-перше, мета існуючих методів інтегрування полягає в тому, щоб звести шуканий інтеграл до табличного. Отже, табличний інтеграл треба вміти розпізнавати. По-друге, внаслідок інваріантності кожен табличний інтеграл "породжує" безліч інтегралів, що легко обчислюються на основі табличного.

Нехай $u(x)$ – довільна функція, що має на деякому проміжку неперервну похідну $u'(x)$; тоді на цьому проміжку справедливі такі формули

1. $\int 0dx = C$; 2. $\int du = u + C$;

3. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$; 4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$;

5. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$; 6. $\int e^u du = e^u + C$;

7. $\int \sin u du = -\cos u + C$; 8. $\int \cos u du = \sin u + C$;

9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C$; 10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$;

11. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{u}{a} + C$; 12. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right| + C$;

13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C$;

14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

Задачі для самостійної роботи.

За допомогою таблиці знайти інтеграли

1. $\int \dfrac{\sqrt[3]{x} - x^2 + x^3 e^x}{x^3} dx$. **2.** $\int \dfrac{2x+3}{x^4} dx$. **3.** $\int (3\cos x - 2x) dx$.

4. $\int \dfrac{3 - 2\,\mathrm{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$. **5.** $\int \sin^2 \dfrac{x}{2} dx$. **6.** $\int \dfrac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$ **7.** $\int \dfrac{dx}{x^2 + 4}$.

8. $\int \dfrac{dx}{9 - x^2}$. **9.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{25 + x^2}}$. **10.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$. **11.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}}$.

12. $\int 2^x e^x dx$. **13.** $\int \mathrm{tg}^2 x dx$. **14.** $\int \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 8} dx$.

Що повинен знати та вміти студент. Знати таблицю основних невизначених інтегралів і вміти її застосовувати для знаходження інтегралів.

§ 2. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Метод безпосереднього інтегрування базується на використанні таблиці інтегралів, властивостей лінійності інтеграла та інваріантності формул інтегрування.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \sqrt{x} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} + C$;

2) $\int (\sin x + 3\cos x + 1) dx = \int \sin x dx + 3\int \cos x dx + \int dx =$
$= -\cos x + 3\sin x + x + C$;

3) $\int (x-2)^2 dx = \int (x^2 - 4x + 4) dx =$

$= \int x^2 dx - 4\int x dx + 4\int dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + C$;

4) $\int (x-2)^{90} dx = \int (x-2)^{90} d(x-2) = \frac{(x-2)^{91}}{91} + C$;

5) $\int (2x-7)^{26} dx = \frac{1}{2}\int (2x-7)^{26} d(2x-7) = \frac{(2x-7)^{27}}{54} + C$;

6) $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5}\int e^{5x} d(5x) = \frac{1}{5} e^{5x} + C$;

7) $\int \operatorname{ch} x dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2}\left[\int e^x dx + \int e^{-x} dx\right] = \frac{1}{2} e^x -$

$-\frac{1}{2}\int e^{-x} d(-x) = \frac{1}{2} e^x - \frac{e^{-x}}{2} + C = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + C = \operatorname{sh} x + C$;

8) $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C$;

9) $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) =$

$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$;

10) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} =$
$= \operatorname{arctg}(x+1) + C$;

11) $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$;

12) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin \ln x + C$;

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;

14) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} dx +$

$+ \frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} dx = -\int \frac{d\left(\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}} + \int \frac{d\left(\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} =$

$-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C = = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

Метод безпосереднього інтегрування є частинним випадком більш загального методу підстановки (заміни) змінної.

Метод підстановки базується на такому твердженні: нехай $f(x)$, $x \in (a,b)$ – неперервна функція та існує $\int f(x)dx = F(x) + C$. Якщо функція $x = \varphi(t)$ – неперервно диференційовна на інтервалі (α, β) і $\varphi(t) : (\alpha,\beta) \to (a,b)$, то

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$$

є ***формулою заміни змінної*** в невизначеному інтегралі.

Приклад 2. Знайти інтеграли.

1) $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx,\ \ a > 0.$

Розв'язання. Зробимо підстановку $x = a\sin t$; $dx = a\cos tdt$; $t = \arcsin\frac{x}{a}$; $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Тоді

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}a\cos tdt = a^2\int \cos^2 tdt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C = \frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a} +$$

$$+ \sin t\cos t) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C$$. (З урахуванням того, що

$\sin(\arcsin\frac{x}{a}) = \frac{x}{a}$ і $\cos(\arcsin\frac{x}{a}) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$).

2) $\int \frac{\sqrt{x+5}}{1 - \sqrt[3]{x+5}}dx$.

Розв'язання. Зробимо підстановку $x + 5 = t^6$; $dx = 6t^5dt$; $t = \sqrt[6]{x+5}$.

Тоді

$$\int \frac{\sqrt{x+5}}{1 - \sqrt[3]{x+5}}dx = \int \frac{t^3 6t^5dt}{1 - t^2} = 6\int \frac{\left(t^8 - 1\right) + 1}{1 - t^2}dt = = \int \frac{t^3 6t^5dt}{1 - t^2} =$$

$$= 6\int \frac{(t^8 - 1) + 1}{1 - t^2}dt = -6\int (t^4 + 1)(t^4 - 1)dt + +6\int \frac{dt}{1 - t^2} =$$

$$=-6\int(t^6+t^4+t^2+1)dt+\frac{6}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=$$

$$=-6\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}+t\right)-3\ln|1-t|+3\ln|1+t|+C=-\frac{6}{7}(x+5)^{\frac{7}{6}}-$$

$$-\frac{6}{5}(x+5)^{\frac{5}{6}}-2(x+5)^{\frac{1}{2}}-6\sqrt[6]{x+5}+3\ln\frac{1-\sqrt[6]{x+5}}{1+\sqrt[6]{x+5}}+C\,.$$

3) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$.

Розв'язання. Замінимо змінну

$$x=a\,\mathrm{tg}\,t\,;\quad dx=\frac{adt}{\cos^2 t}\,;\quad t=\mathrm{arctg}\,x\,;\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}.$$

Тоді

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\int\frac{adx}{\cos^2 t(a^2\,\mathrm{tg}^2\,t+a^2)^{3/2}}=\int\frac{a\cos^3 tdx}{\cos^2 ta^3}=$$

$$=\int\frac{\cos tdx}{a^2}=\frac{1}{a^2}\sin t+C=\frac{1}{a^2}\sin(\mathrm{arctg}\frac{x}{a})+C=$$

$$=\frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\frac{x}{a})}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\frac{x}{a})}}+C=\frac{1}{a^2}\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}+C=$$

$$=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$$

Для знаходження цього інтеграла було використано формулу

$$\sin x=\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,x}}\,.$$

Метод інтегрування частинами.

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді

$$d(uv) = udv + vdu\,,\quad udv = d(uv) - vdu\,.$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, дістаємо:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu\,, \text{ або } \int udv = uv - \int vdu\,.$$

Цю формулу називають ***формулою інтегрування частинами***. Вона дає змогу звести обчислення інтеграла $\int udv$ до обчислення інтеграла $\int vdu$.

Іноді цю формулу доводиться застосовувати декілька разів.

Укажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами:

1) інтеграли вигляду $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)$ – многочлен. У цих інтегралах за u слід взяти множник $P(x)$, а за dv – вираз, що залишився;

2) інтеграли вигляду $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,xdx$, де $P(x)$ – многочлен. У цих інтегралах слід взяти $dv = P(x)dx$;

3) інтеграли вигляду $\int e^{\alpha x}\sin\beta xdx$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta xdx$, де α, β – дійсні числа. Після двократного застосування методу інтегрування частинами одержують лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. З цього рівняння знаходять інтеграл.

Приклад 3. Знайти інтеграли.

1) $\int \mathrm{arctg}\,xdx$; 2) $\int xe^{2x}dx$; 3) $\int e^{ax}\sin bxdx$.

1) $\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$

$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$;

2) $\int xe^{2x}dx = \left| u = x; dv = e^{2x}dx; du = dx; v = \frac{1}{2}e^{2x} \right| =$

$= x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{e^{2x}dx}{2} = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$;

3) $\int e^{ax} \sin bxdx = \left| \begin{matrix} u = e^{ax};\ dv = \sin bxdx; \\ v = -\frac{1}{b}\cos bx;\ du = ae^{ax}dx \end{matrix} \right| =$

$= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx = I.$

Знову інтегруємо частинами, приймаючи $u = e^{ax}$;

$\cos bxdx = dv$; звідки $du = ae^{ax}dx$; $v = \frac{1}{b}\sin bx$.

Тоді

$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left[\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx\right]$ або

$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}I$;

$$I\left(1 + \frac{a^2}{b_2}\right) = \frac{e^{ax}}{b^2}(a\sin bx - b\cos bx) .$$

Остаточно маємо

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C .$$

Інтегрування раціональних дробів

Розглянемо раціональний дріб вигляду $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени відносно x степенів n і m відповідно.

При інтегруванні раціонального дробу необхідно подати його у вигляді, зручному для інтегрування, спираючись на такі правила.

1. З неправильного дробу $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ виділяють цілу частину, поділивши чисельник на знаменник:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{P_k(x)}{Q_m(x)}, \quad k < m .$$

2. Знаменник $Q_m(x)$ правильного дробу розкладають на множники вигляду $(x-a)^\alpha (x_2 + px + q)^\beta$; $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$. При цьому сам дріб розкладають на суму елементарних дробів:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha (x^2 + px + q)^\beta} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{\left(x-a\right)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{\left(x-a\right)^\alpha} +$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_\beta x + N_\beta}{(x^2 + px + q)^\beta} .$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx$, коли $q - \dfrac{p^2}{4} > 0$.

Розв'язання. Виділимо в чисельнику похідну від знаменника $\left(x^2 + px + q\right)' = 2x + p$ і запишемо чисельник у вигляді

$$Mx + N = \frac{M}{2}(2x + p) - \frac{Mp}{2} + N .$$

Маємо $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx =$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C,$$

коли $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int\frac{xdx}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)}$.

Розв'язання. Розкладаємо підінтегральний дріб на елементарні за схемою:

$$\frac{x}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Зведемо праву частину рівності до спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$$x=A(2x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+C(x+1)(2x-1).$$

Два многочлени тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли рівні коефіцієнти при однакових степенях x. Прирівняємо коефіцієнти:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 0=2A+B+2C; \\ x^2 & 0=-A+B+2D+C; \\ x & 1=2A+B-D+C; \\ x^0 & 0=-A+B=D. \end{array}$$

Розв'язками цієї системи є $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{4}{15}$, $C=-\frac{3}{10}$, $D=\frac{1}{10}$.

Інтеграл має вигляд

$$\int\frac{xdx}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)}=$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{4}{15}\int\frac{dx}{2x-1}+\frac{1}{10}\int\frac{-3x+1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{6}\ln|x+1|+\frac{2}{15}\ln|2x-1|-\frac{3}{20}\left(\ln\left|x^2+1\right|+\operatorname{arctg}x\right)+C.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int\frac{(x+1)^2}{x^2-x}dx$.

Розв'язання. Дріб $\frac{(x+1)^2}{x^2-x}$ неправильний, тому виділимо цілу частину, поділивши чисельник на знаменник .

Маємо:

$$\frac{(x+1)^2}{x^2-x}=1+\frac{3x+1}{x^2-x}.$$

Тоді інтеграл має вигляд

$$\int\frac{(x+1)^2}{x^2-x}dx=\int\left(1+\frac{3x+1}{x^2-x}\right)dx=\int dx+\int\frac{3x+1}{x^2-x}dx=$$

$$=x+4\ln|x-1|-\ln|x|+C.$$

Інтегрування деяких ірраціональних функцій.

1. Інтеграли вигляду $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ зводять до табличних шляхом виділення повного квадрата у підкореневому виразі та підведення під знак диференціала частини підінтегрального виразу.

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{7+6x-x^2}}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7+6x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16-(x-2)^2}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{16-(x-2)^2}} =$$

$$= \arcsin\frac{x-2}{4} + C .$$

2. Інтеграли вигляду $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ знаходять за допомогою тригонометричної підстановки $x = a\sin t$ або $x = a\cos t$.

3. Інтеграли вигляду $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ знаходять за допомогою підстановки $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ або $t = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $t = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$,

$$dt = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}}\right)dx = \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} .$$

Тоді $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int dt = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$.

4. Інтеграли вигляду $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$ зручно знаходити інтегруванням частинами після переведення радикалів у знаменник.

Інтегрування тригонометричних функцій.

Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R – раціональна функція від $\sin x$ і $\cos x$ за допомогою підстановки $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$ зводять до інтегралів від раціональних функцій. При цьому:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt .$$

Таку підстановку називають ***універсальною тригонометричною підстановкою***. З її допомогою зручно знаходити інтеграли вигляду $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$.

Приклад 9. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$.

Тоді

$$\int \frac{dx}{5-3\cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{\left(5+5t^2-3t+3t^2\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{1+4t^2} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2t) + C = \frac{1}{2}(2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}) + C .$$

Зауважимо, що універсальна підстановка часто приводить до раціональних дробів з великими степенями. Тому в багатьох випадках використовують інші підстановки. Наведемо деякі з них.

1) $\int R(\sin x, \cos x)dx$ раціоналізуємо підстановкою $\cos x = t$, якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\sin x$ або підстановкою $\sin x = t$, якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\cos x$, або підстановкою $\mathrm{tg}\, x = t$, якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ парна відносно $\cos x$ і $\sin x$ одночасно;

2) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ знаходимо підстановкою $\cos x = t$, якщо m – ціле додатне непарне число, або підстановкою $\sin x = t$, якщо n – ціле додатне непарне число, а також за допомогою формул пониження степеня: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$,

якщо m,n – цілі додатні парні числа; коли ж m,n – цілі парні числа, але хоча б одне з них від'ємне, то застосовуємо підстановку $\operatorname{tg} x = t$; таку ж підстановку використовуємо у випадку, коли числа m,n – цілі непарні від'ємні .

Приклад 10. Знайти інтеграл $\int \sin^5 x \cos x dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну $\sin x = t$.

Тоді $$\int \sin^5 x \cos x dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

Приклад 11. Вартість деякого обладнання зменшується зі швидкістю $v'(t) = -340te^{-0,1t^2}$, де t вимірюється у роках. Якщо початкова вартість обладнання дорівнює 3400 у.о., то скільки воно коштуватиме через 2 роки?

Розв'язання. Для знаходження вартості обладнання необхідно знайти невизначений інтеграл:

$$v(t) = \int v'(t)dt = \int (-340te^{-0,1t^2})dt = -170\int te^{-0,1t^2} d(t^2) =$$

$$= -170(-\frac{1}{0,1}e^{-0,1t^2}) + C = 1700\, e^{-0,1t^2} + C.$$

Константу C можна знайти з умови: $v(0) = 3400$;

$$3400 = 1700 + C \quad \Rightarrow C = 1700.$$

Таким чином, функція вартості має вигляд

$$v(t) = 1700(e^{-0,1t^2} + 1).$$

Відповідно, вартість обладнання через 2 роки

$$v(2) = 1700(e^{-0,4} + 1).$$

Задачі для самостійної роботи.

Знайти інтеграли

1. $\int x\sqrt{x+2}dx$. **2.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$. **3.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$. **4.** $\int \frac{xdx}{x^2-3x-2}$.

5. $\int x \ln x dx$. **6.** $\int (3x+1)\cos x dx$. **7.** $\int x^2 e^x dx$. **8.** $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}}dx$.

9. $\int x^3 e^{x^2} dx$. **10.** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$. **11.** $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$. **12.** $\int \frac{xdx}{x^3+1}$.

13. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^7 x}dx$. **14.** $\int \cos^6 xdx$. **15.** $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

Що повинен знати та вміти студент. Вміти обчислювати інтеграли методами заміни змінних та частинами. Вміти інтегрувати раціональні дроби, тригонометричні та ірраціональні функції.

ТЕМА 7. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§ 1. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Нехай функцію $f(x)$ визначено на відрізку $[a,b]$.

Розіб'ємо його на n частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ і виберемо на кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ довільну точку ξ_i. Знайдемо значення функції у цій точці і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \text{ де } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Цю суму називають ***інтегральною сумою*** функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ називають границю інтегральної суми , яка не залежить від способу подрібнення відрізка $[a,b]$ і від вибору точок ξ_i за умови, що число відрізків n прямує до нескінченності, а довжина найбільшого з них прямує до нуля і позначають так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Функцію $f(x)$ називають ***інтегрованою на відрізку*** $[a,b]$, якщо для неї існує визначений інтеграл.

Визначений інтеграл існує:

1) для кожної функції $f(x)$, обмеженої на відрізку $[a,b]$ і такої, що має не більше ніж скінченне число точок розриву;

2) для обмеженої і монотонної на відрізку $[a,b]$ функції;

3) для неперервної на відрізку $[a,b]$ функції.

Властивості визначеного інтеграла:

1. $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

2. $\int\limits_a^b \alpha f(x)dx \pm \int\limits_a^b \beta g(x)dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx \pm \beta\int\limits_a^b g(x)dx$.

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

4. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$

5. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a,b]$ і $f(x) \le g(x)$ для $\forall x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$ і, як наслідок, за умови

$$m \le f(x) \le M \quad \text{для} \quad \forall x \in [a,b]$$

виконується нерівність $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x) \le M(b-a)$.

Геометричний зміст визначеного інтеграла. Визначений інтеграл задає площу криволінійної трапеції, обмеженої вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$, якщо $a < b$, віссю Ox і графіком невід'ємної і неперервної функції $y = f(x)$.

Правило обчислення визначеного інтеграла встановлює теорема Ньютона – Лейбніца.

Нехай $F(x)$ – деяка з первісних функцій для $f(x)$ на $[a,b]$,

тоді $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ для $\forall x \in [a,b]$.

Цей факт записують так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Для обчислення визначених інтегралів користуються методами знаходження невизначених інтегралів.

1. Метод підстановки здійснюють за формулою

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

де $x = \varphi(t)$ – неперервно диференційовне відображення $[\alpha,\beta] \xrightarrow{\varphi} [a,b]$ для якого існує $\varphi^{-1}(x)$.

2. Формула інтегрування частинами

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Приклад 1. Обчислити $\int_1^3 x^3 dx$.

Розв'язання: $\int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$

Приклад 2. Обчислити $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Розв'язання: $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, x = 2\operatorname{arctg} t \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \end{array} \right| =$

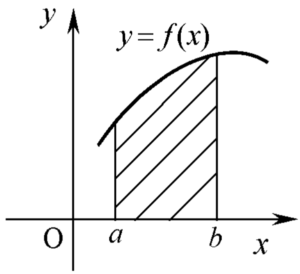
x	0	$\pi/2$
t	0	1

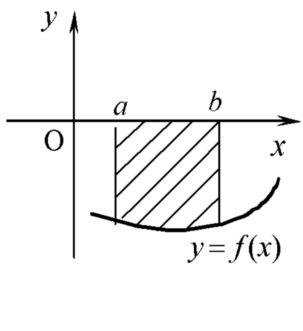
$$=\int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\bigg|_0^1 =$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{8}}.$$

Обчислення площ плоских фігур. Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $f(x) \geq 0$ і неперервна, то площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$, де $a < b$ і віссю Ox, знаходять за формулою

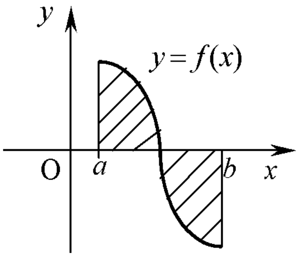
$$S = \int_a^b f(x)dx.$$





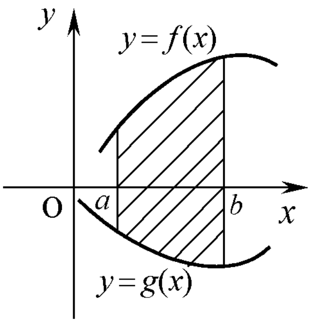
Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $f(x) \leq 0$, то площу цієї фігури знаходять за формулою

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$



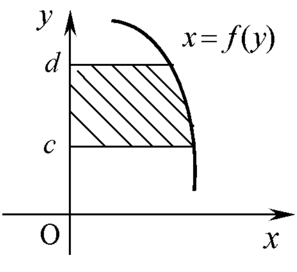
Формули $S = \int_a^b f(x)dx$ і $S = -\int_a^b f(x)dx$ можна об'єднати в одну $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

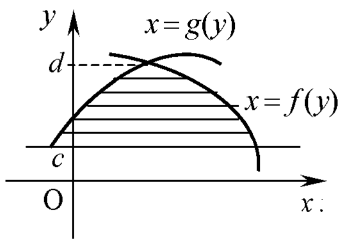
Ця формула залишається вірною, якщо функція $f(x)$ на відрізу $[a, b]$ скінченне число разів змінює знак.



Якщо треба обчислити площу фігури, утвореної функціями $f(x)$ і $g(x)$, то $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Якщо фігуру розташовано таким чином, як зображено на рисунках,

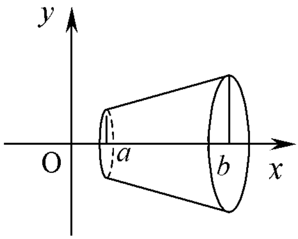




то формули обчислення площ мають вигляд:

$$S = \int_c^d f(y)dy; \qquad S = \int_c^d |f(y) - g(y)| dy.$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$



знаходять за формулою $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$,

а об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ знаходять за формулою $V = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy$.

Приклад 3. Нехай y – частина загального прибуткового податку, пропорційна частині x усього населення держави. Наприклад, якщо $x = 1/2$, а $y = 1/4$, то це означає, що 50 % населення сплачує 25 % від загального прибуткового податку.

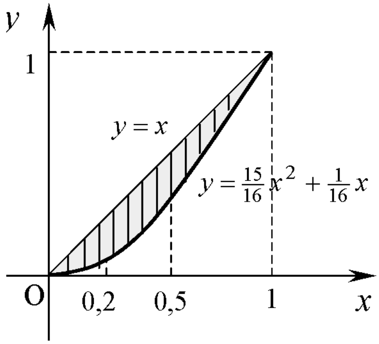
У загальному випадку x та y – дробові частини цілого ($0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$) і y є функцією від x, тобто $y = f(x)$.

Будемо вважати, що немає осіб, які не сплачують прибуткового податку, тобто $f(0) = 0$ і весь прибутковий податок сплачує 100 % населення, тобто $f(1) = 1$.

Графік функції $y = f(x)$, яка описує дійсний розподіл прибуткового податку, називають ***кривою Лоренца***.

Припустимо, що криву Лоренца задано рівнянням

$$y = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x\,.$$



Якщо $x = 0,2$, маємо $y = \frac{15}{16}(0,2)^2 + \frac{1}{16}(0,2) = 0,05$. Це означає, що 20 % населення сплачує 5 % від загального податку.

Коефіцієнтом нерівності розподілу податку за кривою Лоренца називають відношення площі фігури, обмеженої кривою Лоренца та прямою $y = x$ (на рисунку це заштрихована фігура) до площі фігури, що лежить нижче прямої $y = x$ (на рисунку це прямокутний трикутник $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$, $y = x$).

Коефіцієнт нерівності розподілу податку, що здійснюється за законом Лоренца, позначають через L.

Площа трикутника $S_1 = \frac{1}{2}$. Площу заштрихованої фігури одержимо з використанням визначеного інтеграла за формулою

$$S_2 = \int_0^1 (x - f(x))dx = \int_0^1 (x - \frac{15}{16}x^2 - \frac{1}{16}x)dx = \frac{5}{32}\,.$$

Тому, згідно з означенням, коефіцієнт Лоренца обчислюємо за формулою

$$L = \frac{S_2}{S_1} = 2\int_0^1 (x - f(x))dx = \frac{5}{16}.$$

Зауважимо, що коефіцієнт нерівності розподілу податку завжди задовольняє співвідношення $0 \le L \le 1$.

Коли $L = 0$, прибутковий податок розподілено рівномірно, коли $L = 1$, то нерівномірність розподілу податків найбільша.

Приклад 4 . Компанія повинна обрати одну із двох можливих стратегій розвитку: 1) вкласти 10 млн. грн. у нове обладнання і одержувати 3 млн. грн. прибутку щорічно протягом 10 років; 2) закупити на 15 млн. грн. більш досконале обладнання, яке дозволить одержувати 5 млн. грн. прибутку щорічно протягом 7 років.

Яку стратегію треба обрати компанії, якщо номінальна облікова щорічна ставка становить 10 %?

Розв'язання. Якщо $f(t)$ – прибуток за час t і $r = \frac{R}{100}$ – номінальна облікова щорічна ставка, то дійсне значення загального прибутку за час між $t = 0$ та $t = T$ дорівнює $\int_o^T f(t)e^{-rt}dt$.

Якщо $R = 10$, то маємо $r = 0,1$. Тому для першої стратегії дійсне значення загального прибутку за 10 років буде:

$$P_1 = \int_o^{10} 3e^{-0,1t}dt - 10 = (-30e^{-0,1t})\Big|_0^{10} - 10 = 8,964 \text{ (млн. грн.)}$$

Для другої стратегії одержимо:

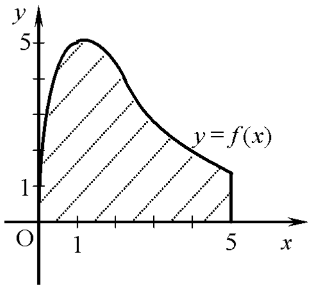
$$P_2 = \int_o^7 5e^{-0,1t}dt - 15 = 50(1 - e^{-0,7t}) - 15 = 10,17 \text{ (млн. грн.)}$$

Отже, друга стратегія краща за першу і тому для подальшого розвитку компанії доцільно обрати її .

Приклад 5. Нехай залежність об'єму продажу даного товару від часу задано функцією $f(t)=\dfrac{10t}{1+t^2}$ ($0\le t\le 5$). Тоді загальний об'єм продажу можна знайти за формулою

$$Q=\int_0^5\frac{10t}{1+t^2}dt=\int_0^5\frac{5d(t^2+1)}{1+t^2}==5\ln(t^2+1)\Big|_0^5=5\ln 26\approx 15,$$

що дорівнює площі криволінійної трапеції.



Приклад 6. Деяка компанія визначила, що її маржинальна функція прибутку має вигляд $P'(x)=50+200x-18x^2$, де x – кількість проданих одиниць продукції. Знайти який прибуток компанія отримає від продажу 10 одиниць продукції, якщо $P(2)=0$ (компанія отримує нульовий прибуток від продажу 2 одиниць продукції). Знайти суму загального прибутку, який отримає компанія, якщо кількість одиниць проданої продукції збільшиться з 5 до 10.

Розв'язання. Для знаходження прибутку компанії необхідно знайти невизначений інтеграл:

$$P(x)=\int P'(x)dx=\int(50+200x-18x^2)dx=50x+100x^2-6x^3+C.$$

Оскільки $P(2)=0$, то $0=100+400-48+C$. Звідси $C=452$.

Тому функція прибутку має вигляд:

$$P(x)=50x+100x^2-6x^3+452;$$

$$P(10)=50\cdot 10+100\cdot 10^2-6\cdot 10^3+452=4952 \text{ (грн)}.$$

Для знаходження суми загального прибутку компанії за умови зростання кількості проданих одиниць продукції з 5 до 10, знайдемо визначений інтеграл:

$$\int_5^{10} P'(x)dx = \int_5^{10} (50 + 200x - 18x^2)dx = (50x + 100x^2 - 6x^3)\Big|_5^{10} =$$

$$= 500 + 10000 - 6000 - 250 - 2500 + 750 = 2500 \text{ (грн).}$$

Задачі для самостійної роботи.

Обчислити визначені інтеграли

1. $\int_1^3 (3x^2 - 2x + 1)dx$. **2.** $\int_1^8 \frac{2 + 5\sqrt[3]{x}}{x^3}dx$. **3.** $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx$.

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$. **5.** $\int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$. **6.** $\int_1^2 \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}dx$.

7. $\int_{3/4}^2 \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$. **8.** $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$. **9.** $\int_0^2 \frac{2x - 1}{2x + 1}dx$. **10.** $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5 - 4x}}$.

11. $\int_0^1 \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1 + x}}$. **12.** $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$. **13.** $\int_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x dx$.

14. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = x(x-1)^2$ та віссю абсцис.

15. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = e^{-x}$ і прямою $x = 1$.

16. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої параболою $y = 2x - x^2$ та віссю абсцис навколо осі ординат.

Що повинен знати та вміти студент. Обчислювати визначені інтеграли за формулою Ньютона–Лейбніца. Знати та вміти використовувати геометричний та економічний зміст визначеного інтеграла.

§ 2. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Для практичного застосування важливе значення має розширення поняття визначеного інтеграла у випадку нескінченного проміжку інтегрування, а також, якщо функція необмежена на скінченному відрізку інтегрування. Такі інтеграли називають ***невласними інтегралами*** відповідно ***першого і другого роду***.

Нехай функція $f(x)$ задана на нескінченному проміжку $[a,\infty)$ та інтегровна на будь-якому скінченному відрізкові $[a,b]$, $a<b<\infty$. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то її називають ***невласним інтегралом першого роду*** від функції $f(x)$ і позначають $\int\limits_a^\infty f(x)dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Якщо функція $f(x)$ задана на проміжку $[a,b)$ та інтегровна на кожному відрізкові $[a,b-\varepsilon]$ при довільному $\varepsilon>0$, тоді скінченну границю $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ називають ***невласним інтегралом другого роду*** від функції $f(x)$ і позначають

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Приклад 1. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

Розв'язання:

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg} x\Big|_1^b)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює $\frac{\pi}{4}$. Геометрично це означає, що площа необмеженої трапеції скінченна і дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$.

Розв'язання.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\ln|b|=\infty .$$

Інтеграл розбігається.

Приклад 3. Дослідити збіжність інтеграла $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ залежно від α.

Розв'язання. Випадок $\alpha=1$ розглянуто в прикладі 2. Якщо $\alpha\neq 1$ маємо

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^b=\lim_{b\to\infty}\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}+\frac{1}{\alpha-1}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1},\alpha>1,\\ \infty,\ \alpha<1.\end{cases}$$

Отже, інтеграл збігається коли $\alpha>1$ і розбігається коли $\alpha\le 1$.

Приклад 4. Обчислити невласний інтеграл $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Заданий інтеграл є невласним інтегралом другого роду – у точці $x=0$ функція $\frac{1}{\sqrt{x}}$ має нескінченний розрив

За означенням

$$\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right)=2 .$$

Інтеграл збігається.

Приклад 5. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ залежно від степеня p.

Розв'язання. Інтеграл має особливість в точці $x=0$. За умови, що $p \neq 1$ маємо

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{1-p}-\frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-p}-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p}=\begin{cases}\frac{1}{1-p}, & p<1,\\ \infty, & p>1.\end{cases}$$

Якщо $p=1$ маємо

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|x|\Big|_\varepsilon^1 = +\infty .$$

Інтеграл розбігається. Тобто інтеграл збіжний коли $p<1$ і розбіжний коли $p \geq 1$.

Приклад 6. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$.

Розв'язання. Збіжність інтеграла досліджуємо за допомогою ***ознаки порівняння***: якщо при $x>a$ $0 \leq f(x) \leq g(x)$ та інтеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ збігається, то інтеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ також збігається;

з розбіжності інтеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

Наслідок: якщо $g(x)>0$ на $[0;\infty)$ та існує скінченна границя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k,\ k\neq 0,$$

то інтеграли $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ і $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ збігаються чи розбігаються одночасно.

Враховуючи, що $\frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ $\forall x \in [1;+\infty)$ та інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ збігається, то за ознакою порівняння $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ збігається .

Приклад 7. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x+\ln x}}$.

Розв'язання. Скористаємося наслідком з порівняльної ознаки. Візьмемо $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ і враховуючи, що

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{4x-\ln x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{\ln x}{x}}} = \frac{1}{2}$$

та інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ розбігається, то даний інтеграл також розбігається.

Приклад 8. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sin x}$.

Розв'язання. Скористаємося ***порівняльною ознакою в граничній формі*** для невласних інтегралів другого роду: якщо $g(x)>0$ на $[a,b)$ та існує $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k,\ k\ne 0$, то інтеграли $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ і $\int\limits_a^{b} g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Візьмемо $g(x)=\frac{1}{x}$. Коли $x\to 0$ маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sin x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\,.$$

Враховуючи, що інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ розбіжний, то за наслідком з порівняльної ознаки інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ також розбіжний .

Приклад 9. Розглянемо випадок експлуатації земельної ділянки, коли грошовий потік неперервний. Нехай r – неперервна процентна ставка, а $R(t)$ – відповідна рента. Тоді дисконтовану вартість земельної ділянки знаходять за формулою

$$\Pi=\int\limits_0^{\infty} R(t)e^{-rt}dt\,.$$

Наприклад, якщо $R(t)=5e^{-0,7t}$ (млн грн/рік) – рента, яку отримують з земельної ділянки, а $r=10\,\%$ – процентна ставка, то дисконтовану вартість розраховують так:

$$\Pi=\int\limits_0^{\infty} 5e^{-0,7t}e^{-0,1t}dt=5\int\limits_0^{\infty} e^{-0,8t}dt=5\left(\frac{e^{-0,8t}}{-0,8}\bigg|_0^{\infty}\right)=\frac{5}{0,8}=6,25\,(\text{млн грн})$$

Задачі для самостійної роботи.

Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність

1. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. **2.** $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$. **3.** $\int\limits_0^{\infty} 2x\sin x dx$. **4.** $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{x}dx$.

5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$. **6.** $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{dx}{1-\cos 2x}$. **7.** $\int\limits_0^{1} x\ln x dx$. **8.** $\int\limits_0^{1/4}\frac{dx}{x\ln x}$.

9. $\int\limits_2^{5}\frac{dx}{(x-4)^2}$. **10.** $\int\limits_0^{2}\frac{dx}{x^2-4x+3}$.

Дослідити збіжність інтегралів

11. $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^6}}$. **12.** $\int_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}dx$. **13.** $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} xdx}{x^2}$. **14.** $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+9}}$.

15. $\int_1^{\infty} \frac{2+3\cos xdx}{x^6}$. **16.** $\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)dx}{x}$. **17.** $\int_0^{1} \frac{e^x-1}{\sin x}dx$.

18. $\int_0^{1} \frac{dx}{e^x-\cos x}$. **19.** $\int_1^{3} \frac{dx}{\ln x}$. **20.** $\int_0^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$. **21.** $\int_0^{1} \frac{dx}{x^3-2x^2}$.

Що повинен знати та вміти студент. Знати простіші типи невласних інтегралів першого та другого роду. Досліджувати невласні інтеграли на збіжність за допомогою порівняння.

ТЕМА 8. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

§ 1. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ

За аналогією з функцією однієї змінної $y=f(x)$ можна розглянути функцію, яка буде залежати від кількох незалежних змінних $(x_1,x_2,...,x_n)$. У загальному випадку це можна записати у вигляді $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$.

Сукупність значень $x_1,x_2,...,x_n$, для яких має смисл вираз $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$, називають ***областю визначення*** функції, а значення, яких набуває залежна змінна, утворюють ***область значень функції***.

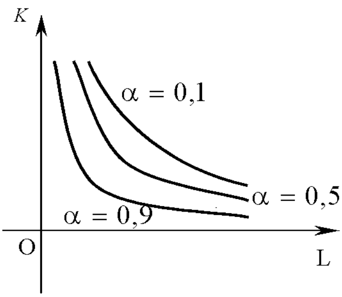
Однією з перших функцій двох змінних, яка привернула увагу економістів, була степенева функція $Y=AK^{\alpha}L^{\beta}$, названа ***функцією Кобба – Дугласа*** на честь американських вчених – математика Д. Кобба й економіста П. Дугласа, які вперше застосували її як виробничу функцію для аналізу економіки.

Тут Y – вартість виробленої продукції, K – вартість основного капіталу, L– вартість затрат праці, A, α, β– числові невід'ємні параметри, на які накладають додаткову умову $\alpha + \beta = 1$.

Областю визначення функції Кобба – Дугласа буде перший квадрант декартової системи координат

$$D = \{(K, L) : K \ge 0, L \ge 0\},$$

областю значень Y – піввісь: $E(y) = \{Y : Y \ge 0\}$. Оскільки всі три економічні параметри є за своєю природою обмеженими, то на них накладають додаткові умови:



$$D = \{(K, L) : 0 \le K \le K_1, 0 \le L \le L_1\},$$

$$E(y) = \{Y : 0 \le Y \le Y_1\}.$$

Криві лінії, які задовольняють умову

$$f(x, y) = \text{const},$$

називають ***лініями рівня***. Для функції Кобба – Дугласа лінії рівня зображено на рисунку.

Вони вказують на вартості основного капіталу та затрати праці, які забезпечують однакову вартість виробленої продукції. Наприклад, якщо вартість валової продукції становить C_1 одиниць, то її можна досягти із затратами основного капіталу K_1 і затратами праці L_1. При затратах праці $L_2 > L_1$ потрібно витратити основного капіталу у кількості $K_2 < K_1$.

Поняття ***неперервності функції багатьох змінних*** визначають так само, як і для функції однієї змінної.

Нехай $f = f(x, y)$. Тоді приріст функції дорівнює

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Якщо $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f = 0$, то функція $f = f(x, y)$ є ***неперервною*** у точці (x_0, y_0). Якщо функція $f = f(x, y)$ є неперервною у кожній точці області визначення D, то вона неперервна в усій області D.

Приклад 1. Функція $z = x^2 + y^2$ є неперервною для всіх точок $(x, y) \in E^2$, тобто на всій площині Евкліда. Функція $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ є неперервною для всіх точок E^2 за винятком початку координат –точка $(0,0)$: $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty$.

Для функції багатьох змінних за аналогією з функцією однієї змінної можна ввести поняття похідної.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$ як функцію x з параметром y, який зафіксуємо. Розглянемо відношення

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Границю цього диференціального відношення при $\Delta x \to 0$ називають ***частинною похідною*** функції $f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) за змінною x і позначають

$$f_x(x_0, y_0), \ z_x, \ \frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Операцію знаходження похідної z_x називають ***диференціюванням функції*** z ***за аргументом*** x, а точку (x_0, y_0) називають ***точкою диференціювання***.

Частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$ обчислюють як звичайну похідну за змінною x, припустивши, що змінна y є постійною величиною.

Аналогічно обчислюють похідну за y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Отже, частинних похідних існує стільки, скільки є аргументів.

Приклад 2. Обчислити частинні похідні функції

$$z = 3x^2 y + x^4 + y^2 + 1.$$

Розв'язання. Спочатку знаходимо частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x}$, зафіксувавши змінну y: $\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy + 4x^3$.

Аналогічно $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + 2y$.

Повний диференціал функції z має вигляд

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy .$$

Вираз повного диференціала зберігає свою форму незалежно від того, є змінні x та y незалежними змінними, чи функціями від інших незалежних змінних. Цю властивість форми повного диференціала називають ***інваріантністю***.

Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ є функціями від тих самих змінних, що й функція z, тому можна обчислювати похідні від похідних першого порядку. Такі похідні називають похідними другого порядку.

Для функції двох змінних буде чотири частинних похідних другого порядку:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Приклад 3. Знайти частинні похідні другого порядку від функції $z = x^4 + 3xy^2 - y^3 + 2x + 4$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 3y^2 + 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 3y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6y; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x - 6y.$$

Частинні похідні другого порядку за різними аргументами називають ***мішаними***. Якщо існують неперервні мішані похідні другого порядку, то вони рівні між собою.

Аналогічно до похідних другого порядку вводять похідні третього порядку як похідні від частинних похідних другого порядку і т.д.

Повним диференціалом другого порядку функції $z = f(x, y)$ називають диференціал від її повного диференціала:

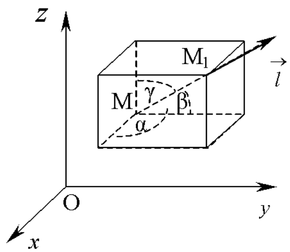
$$d^2 z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 .$$

Повні диференціали більш високих порядків визначаються аналогічно.

Зауважимо, що повні диференціали порядків, вищих першого не мають властивості інваріантності своєї форми.

Розглянемо функцію $u = f(x, y, z)$, визначену і неперервну в околі точки $M(x, y, z)$.

Задамо в точці M одиничний вектор $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, який утворює з осями координат Ox, Oy, Oz відповідно кути α, β, γ. Візьмемо на прямій, яка проходить через точку M в напрямі $\vec{l}$, точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ Позначимо довжину відрізка MM_1 через Δl. Тоді $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.



Похідною функції $u(x, y, z)$ ***за напрямом вектора*** $\vec{l}$ називають границю відношення $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$, якщо вона існує, і позначають $\frac{\partial u}{\partial l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{\Delta l} .$$

Для обчислення похідної в напрямі вектора $\vec{l} = \{l_x, l_y, l_z\}$ користуються формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \text{ де}$$

$\cos\alpha = \dfrac{l_x}{|\vec{l}\,|}$, $\cos\beta = \dfrac{l_y}{|\vec{l}\,|}$, $\cos\gamma = \dfrac{l_z}{|\vec{l}\,|}$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$,

$|\vec{l}\,| = \sqrt{(l_x)^2 + (l_y)^2 + (l_z)^2}$ – довжина вектора $\vec{l}$.

Похідна за напрямом узагальнює поняття частинної похідної. Так, якщо $\vec{l} = \{1, 0, 0\}$, то $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ називають вектор, координатами якого є частинні похідні функції $u(x, y, z)$, обчислені у точці M, тобто

$$\text{grad } u(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\vec{k}$$

або

$$\text{grad } u(M) = \left\{\frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z}\right\}.$$

Між градієнтом і похідною за напрямом існує зв'язок

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u, \vec{l}) = |\text{grad } u|\,|\vec{l}\,|\cos\varphi, \text{ де}$$

φ – кут між градієнтом функції $u(x, y, z)$ і напрямним вектором $\vec{l}$.

Із цієї формули випливає, що похідна $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ набуває найбільшого значення тоді, коли $\cos\varphi = 1$, тобто тоді, коли напрям вектора $\vec{l}$ збігається з напрямом градієнта, при цьому найбільше значення похідної $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ дорівнює $|\text{grad } u|$.

Приклад 4. Знайти похідну функції $u = x^2y + xy^2z + z^3$ у точці $M(0,\ 1,\ -1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Розв'язання. Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{l}$:
$\vec{l} = \{-2,\ 1,\ 2\}$, $|\vec{l}| = \sqrt{4+1+4} = 3$, $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$.

Обчислимо частинні похідні даної функції у точці $M(0,\ 1,-1)$:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = 2xy + y^2 z\big|_M = -1; \quad \frac{\partial u(M)}{\partial y} = x^2 + 2xyz\big|_M = 0;$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial z} = xy^2 + 3z^2\big|_M = 3.$$

Отже,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (-1)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 0\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

Зазначимо, що функція $u(x, y, z)$ у точці M у напрямі вектора $\vec{l}$ зростає, оскільки $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$.

Приклад 5. Знайти кут між градієнтами функції $u = \frac{\sqrt{xy}}{z}$, які обчислені в точках $M_1(2,\ 2,\ 1)$ та $M_2(1,\ 1,\ -1)$.

Розв'язання. Кут між векторами $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ знайдемо за формулою $\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1\vec{a}_2}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}$.

У нашому випадку $\vec{a}_1 = \text{grad } u(M_1)$, $\vec{a}_2 = \text{grad } u(M_2)$. Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2z}\sqrt{\frac{y}{x}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2z}\sqrt{\frac{x}{y}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{z^2}\sqrt{xy},$$

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - 2\vec{k}, \qquad \vec{a}_2 = -\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - \vec{k};$$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\cdot(-1)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+4}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таким чином, $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задачі для самостійної роботи.

Знайти область визначення функцій

1. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ **. 2.** $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}$ **. 3.** $z = \frac{3x + 2y - 1}{x - y}$**.**

4. $z = \ln(-x - y)$ **. 5.** $z = y\sqrt{\cos x}$ **. 6.** $z = \arccos\frac{x}{x+y}$**.**

Знайти частинні похідні першого і другого порядків

7. $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$ **. 8.** $z = xe^{-xy}$ **. 9.** $z = \frac{\cos y^2}{x}$ **.**

10. Показати, що $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} + x + z = 0$**,** якщо $z = 4e^{-2y} +$ $+(2x + 4y - 3)e^{-y} - x - 1$.

11. Показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, якщо $z = e^x(\cos y + x \sin y)$.

Знайти диференціали функцій

12. $z = \ln(x^3 - 2yx - y^4)$ **. 13.** $z = \mathrm{tg}\,\frac{y^2}{x}$**. 14.** $z = \ln\cos\frac{x}{y}$**.**

Знайти диференціали другого порядку функцій

15. $z = \sin(2x + y^3)$**. 16.** $z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **. 17.** $z = \mathrm{arctg}\,\frac{x}{x+y}$**.**

18. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = e^{2x-3y}$, $x = \mathrm{tg}\,t$, $y = t^2 - t$.

19. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = x^y$, $x = \ln t$, $y = \sin t$.

20. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = u^2 \ln v$, $u = \frac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$.

21. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$, якщо $y\sin x-\cos(x-y)=0$.

22. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3=0$.

23. Обчислити наближено $\sqrt{(4,05)^2+(3,07)^2}$ **.**

24. Для функції $z=x^2+3y^2-xy$, вектора $\vec{l}=\{-5;12\}$ і точки $M(1;1)$ знайти $\operatorname{grad} z(M)$, $\dfrac{\partial z(M)}{\partial l}$ **.**

Що повинен знати та вміти студент. Обчислювати частинні похідні, повні та частинні диференціали першого і вищих порядків.

§ 2. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Максимумом (мінімумом) функції $z=f(x,y)$ у точці $M_0(x_0,y_0)$ називають таке її значення $f(x_0,y_0)$, яке більше (менше) всіх інших її значень, що набуваються в точках $M(x,y)$, достатньо близьких до точки $M_0(x_0,y_0)$ і відмінних від неї.

Максимум і мінімум функції називають її ***екстремумом***. Точку, у якій функція досягає екстремуму, називають ***точкою екстремуму***.

Екстремум функції трьох і більше змінних визначають аналогічно.

Необхідні умови екстремуму. У точці екстремуму диференційовної функції багатьох змінних її частинні похідні дорівнюють нулю, тобто $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0. \end{cases}$

З цієї системи рівнянь знаходять стаціонарні точки.

Достатні умови екстремуму. Нехай $M_0(x_0,y_0)$ – стаціонарна точка, тоді:

1) якщо $d^2z(x_0,y_0)<0$,

то $f(x_0,y_0)$ – максимум функції $z=f(x,y)$;

2) якщо $d^2z(x_0,y_0)>0$,

то $f(x_0,y_0)$ – мінімум функції $z=f(x,y)$.

Для функцій трьох і більше змінних необхідні і достатні умови екстремуму аналогічні.

Щоб знайти екстремум функції багатьох змінних, які пов'язані між собою одним або кількома рівняннями (число рівнянь має бути меншим за кількість змінних), застосовують метод невизначених множників Лагранжа і говорять про ***умовний екстремум***.

Щоб знайти умовний екстремум функції $z=f(x,y)$ за наявності рівняння зв'язку $\phi(x,y)=0$, складають ***функцію Лагранжа***

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

де λ – невизначений постійний множник (множник Лагранжа), і шукають її екстремум.

Необхідні умови екстремуму функції Лагранжа виражають системою трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0,\\ \varphi(x,y)=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\\ \varphi(x,y)=0.\end{cases}$$

Питання існування і характер умовного екстремума виявляють при дослідженні знака другого диференціала функції Лагранжа для знайдених з системи значень x,y,λ за умови , що dx і dy пов'язані рівнянням $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0$ $\left(dx^2+dy^2\neq 0\right)$.

Приклад 1. Знайти екстремум функції

$$z = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y .$$

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку і розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 18 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 30 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи отримаємо чотири стаціонарні точки: $M_1(1, 3)$, $M_2(3, 1)$, $M_3(-1, -3)$, $M_4(-3, -1)$.

Запишемо похідні другого порядку і другий диференціал:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y , \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x , \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y ,$$

$$d^2 z = 6y \ dx^2 + 12x \ dxdy \ +6ydy^2 \ .$$

Обчислюємо другий диференціал у стаціонарних точках:

$$d^2 z(M_1) = 18 \ dx^2 + 12 \ dxdy \ +18dy^2 =$$

$$= 6\left(3dx^2 + 2dxdy + 3dy^2\right) =$$

$$= 6\left(2dx^2 + 2dy^2 + (dx + dy)^2\right) > 0.$$

Оскільки $d^2 z(M_1) > 0$, то в точці M_1 функція має мінімум, рівний значенню функції при $x = 1$ і $y = 3$, тобто $z(1, 3) = -72$.

У точці M_2 маємо:

$$d^2 z(M_2) = 6\,dx^2 + 36\,dxdy \ +6dy^2 = 6\left(dx^2 + 6dxdy + dy^2\right) =$$

$$= 6\left((dx + dy)^2 + 4dxdy\right).$$

Знак другого диференціала в точці M_2 не визначений, тому в цій точці не існує екстремум.

У точці M_3 маємо:

$$d^2 z(M_3) = -18\,dx^2 - 12\,dxdy \ 18dy^2 =$$

$$= -6\left(3dx^2 + 2dxdy + 3dy^2\right) = -6\left(2dx^2 + 2dy^2 + \left(dx + dy\right)^2\right) < 0.$$

Оскільки $d^2z(M_3) < 0$, то в точці M_3 функція має максимум, рівний значенню функції при $x = -1$ і $y = -3$, тобто $z(-1, -3) = 72$.

І у точці M_4 $\quad d^2z(M_4) = -6dx^2 - 36dxdy - 6dy^2 =$

$$= -6\left(\left(dx + dy\right)^2 + 4dxdy\right)$$

знак другого диференціала не визначений, тобто у точці M_4 функція не має екстремуму.

Приклад 2*.* Знайти екстремум функції $z = 9 - 8x - 6y$, якщо її аргументи задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 25$.

Розв'язання*.* Складемо функцію Лагранжа

$$F(x, y) = 9 - 8x - 6y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 25\right)$$

і знайдемо її частинні похідні:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -8 + 2\lambda x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -6 + 2\lambda y.$$

Система рівнянь для знаходження стаціонарних точок має вигляд

$$\begin{cases} -8 + 2\lambda x = 0, \\ -6 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи будуть значення:
$\lambda_1 = 1$, $x_1 = 4$, $y_1 = 3$ і $\lambda_2 = -1$, $x_2 = -4$, $y_2 = -3$.

Знаходимо другі частинні похідні і вираз для другого диференціала:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda; \quad d^2F = 2\lambda\left(dx^2 + dy^2\right).$$

Оскільки $d^2F > 0$ при $\lambda_1 = 1$, $x_1 = 4$, $y_1 = 3$, то функція $F(x, y)$ у цій точці має умовний мінімум.

Якщо $\lambda_2 = -1$, $x_2 = -4$, $y_2 = -3$, то $d^2F < 0$ і функція $F(x, y)$ у цьому випадку має умовний максимум.

Отже,

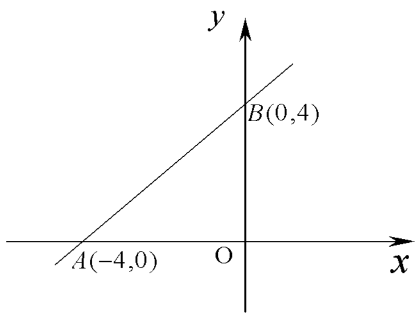
$$z_{\max} = \max f(x, y) = f(-4, -3) = 59;$$

$$z_{\min} = \min f(x, y) = f(4, 3) = -41.$$

Функція багатьох змінних, диференційовна в обмеженій замкненій області, досягає найбільшого (найменшого) значення або в стаціонарних точках, або в точках межі області.

Приклад 3. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 3x$ в замкненій області D: $x \le 0$, $y \ge 0$, $y \le x + 4$.

Розв'язання. Область D є трикутник, утворений координатними осями і прямою $y = x + 4$. Щоб розв'язати задачу, достатньо знайти стаціонарні точки в області D і дослідити поведінку функції на межі області.



Знаходимо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x.$$

З системи рівнянь $\begin{cases} 2x + y + 3 = 0, \\ 2y + x = 0 \end{cases}$ знаходимо стаціонарну точку $M_1(-2; 1)$, яка належить області D. У точці $M_1(-2; 1)$ значення функції $z = f(-2; 1) = -3$.

Розглянемо поведінку функції на межі області.

На осі Ox ($y = 0$) функція $z = f(x, 0)$ є функцією змінної x:

$$z = f(x, 0) = x^2 + 3x .$$

Знайдемо стаціонарну точку цієї функції. Шукаємо похідну функції однієї змінної і прирівнюємо її до нуля:
$z' = 2x + 3$, $z' = 0$ при $x = -1{,}5$. Маємо точку $M_2(-1{,}5; 0)$, яка належить області D. У цій точці функція набуває значення
$z = f(-1{,}5; 0) = -2{,}25$.

На кінцях відрізку OA функція набуває значення:
$z = f(-4; 0) = 4$, $z = f(0; 0) = 0$.

На осі Oy ($x = 0$) функція $z = f(0, y)$ є функцією змінної y:

$$z = f(0, y) = y^2 .$$

Ця функція має стаціонарну точку $O(0; 0)$ і набуває в ній значення $z = f(0; 0) = 0$.У точці B $z = f(0; 4) = 16$.

На прямій $y = x + 4$ функція $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 3x$ є функцією однієї змінної x:

$$z = 3x^2 + 15x + 16 .$$

Дослідження цієї функції на відрізку AB проводять за тією самою схемою, що і на відрізку OA, а саме:

$$z' = 6x + 15, \quad z' = 0 \ \Rightarrow x = -2{,}5, \quad y = 1{,}5 .$$

Отримана точка $M_3(-2{,}5; 1{,}5) \in D$, тому знаходимо значення функції z у цій точці:

$$z = f(-2{,}5; 1{,}5) = -2{,}75 .$$

Порівнюючи значення функції в точках $O(0; 0)$, $A(-4; 0)$, $B(0; 4)$, $M_1(-2; 1)$, $M_2(-1{,}5; 0)$, $M_3(-2{,}5; 1{,}5)$, робимо висновок, що функція

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 3x$$

досягає найменшого значення у стаціонарній точці $M_1(-2; 1)$, причому $z_{найм} = f(-2; 1) = -3$, і найбільшого значення у точці $B(0; 4)$, причому $z_{найб} = f(0; 4) = 16$.

Задачі для самостійної роботи.
Дослідити на екстремум функції

1. $z = x^2 - 2y^3 - 2x + 6y$. **2.** $z = 6x^2 - 7xy + 2y^2 + 6x - 3y$.

3. $z = 2x^3 - 36xy + 2y^3 - 69x - 54y$. **4.** $z = e^{x/2}(x + y^2)$.

Знайти умовний екстремум функцій

5. $z = 8 - 2x - 4y$ за умови $x^2 + 2y^2 - 12 = 0$.

6. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ за умови $x + y = 2$. **7.** $z = xy$ за умови $x^2 + y^2 = 2$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y$ в області $D: x \ge 0, y \le 0, x - y \le 3$.

9. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 - 3xy + y^3$ в області $D: 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2$.

Що повинен знати та вміти студент. Знаходити локальний та умовний екстремуми функції багатьох змінних, найбільше та найменше значення функції в заданій області.

ТЕМА 9. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

§ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Рівняння, що містять невідому функцію, її аргумент і похідні, називають ***диференціальними***. Це означення у загальному вигляді математично можна записати так

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 .$$

Найвищий порядок похідної, що містить диференціальне рівняння, називають ***порядком диференціального рівняння***.

Диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння, яке пов’язує невідому функцію, її аргумент і похідну y' і має загальний вигляд:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{або} \quad y' = f(x, y) .$$

Знаходження невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називають розв'язуванням або інтегруванням цього рівняння.

Розв'язком диференціального рівняння n-го порядку на деякому інтервалі (a,b) називають диференційовну на цьому інтервалі функцію $y=\varphi(x)$, яка при підстановці її в рівняння перетворює це рівняння в тотожність.

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку $y'=f(x,y)$ в області D називають таку функцію $y=\varphi(x,C)$, що задовольняє умови:

1) вона є розв'язком рівняння для всіх значень сталої C з деякої множини;
2) для довільної точки $(x_0;y_0)\in D$ можна знайти таке значення $C=C_0$, що функція $y=\varphi(x,C_0)$ задовольняє початкову умову: $\varphi(x_0,C_0)=y_0$.

Частинним розв'язком диференціального рівняння $y'=f(x,y)$ називають функцію $y=\varphi(x,C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку $y=\varphi(x,C)$ при певному значенні сталої $C=C_0$.

Якщо загальний розв'язок задано неявно, тобто у вигляді $\Phi(x,y,C)=0$, його називають ***загальним інтегралом*** диференціального рівняння. Рівність $\Phi(x,y,C_0)=0$ називають ***частинним інтегралом*** диференціального рівняння.

Задачу знаходження розв'язку $y=\varphi(x)$ диференціального рівняння першого порядку, який задовольняє початкову умову $y(x_0)=y_0$ або

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0; \\ y\big|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$$

називають ***задачею Коші***.

Для диференціального рівняння другого порядку задачу Коші записують у вигляді:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'') = 0; \\ y\big|_{x=x_0} = y_0; \\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0. \end{cases}$$

У дослідженнях різних життєвих та економічних проблем найчастіше використовують диференціальні рівняння першого та другого порядків певних типів та відповідні їм задачі Коші.

Приклад 1. У сприятливих для розмноження умовах перебуває деяка кількість N_0 бактерій. Відомо, що швидкість розмноження бактерій пропорційна їх кількості. Знайти залежність збільшення кількості бактерій з плином часу.

Розв'язання. Позначимо через $N(t)$ кількість бактерій в момент часу t. За умовою $N(0) = N_0$. Швидкість розмноження бактерій є похідна від функції $N(t)$, звідки маємо рівняння

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t),$$

де $k = \text{const} > 0$ – коефіцієнт пропорційності, що залежить від виду бактерій та умов розмноження.

Одержане рівняння є диференціальним рівнянням розмноження бактерій, яке широко використовують в екологічних задачах. Його розв'язком буде функція $N(t) = N_0 e^{kt}$.

Приклад 2. Економісти встановили, що швидкість зростання інвестованого капіталу в будь-який момент часу t пропорційна розміру капіталу з коефіцієнтом пропорційності, що дорівнює узгодженому відсотку R неперервного зростання капіталу. Знайти закон зростання інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової (якщо $t = 0$) інвестиції K_0.

Розв'язання. Позначимо $K(t)$ – розмір інвестованого капіталу в момент t. Тоді $\dfrac{dK(t)}{dt}$ – швидкість зміни величини інвестиції. За умовою задачі маємо

$$\begin{cases} \dfrac{dK(t)}{dt} = RK(t); \\ K(t)\big|_{t=0} = K_0. \end{cases}$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння буде функція

$$K(t) = e^{Rt+c} = e^c e^{Rt}.$$

Скористаємось початковою умовою: при $t = 0$ маємо

$$K_0 = K(0) = e^c.$$

Отже, розв'язком задачі Коші буде функція

$$K(t) = K_0 e^{Rt}.$$

Це означає, що за умов задачі інвестиції з часом зростають за експоненціальним законом.

§ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$y' = p(x)g(y),$$

де $p(x), g(y)$ – неперервні функції, називають рівнянням з відокремлюваними змінними. Запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = p(x)g(y)$$

і відокремимо змінні, вважаючи, що $g(y) \neq 0$ в області, яка розглядається. Дістанемо рівняння $\dfrac{dy}{g(y)} = p(x)dx$.

Проінтегрувавши обидві частини рівняння, одержимо:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x)dx \quad \text{або} \quad G(y) = P(x) + C,$$

де $G(y)$ – деяка первісна функції $\dfrac{1}{g(y)}$, а $P(x)$ – первісна функції $p(x)$. Таким чином, знайдено загальний інтеграл рівняння.

Такі рівняння можна записати також у вигляді

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 .$$

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} y'\sin x = y\ln y; \\ y\big|_{x=\pi/2} = e. \end{cases}$$

Розв'язання. Відокремимо змінні, вважаючи, що вираз $y\ln y\sin x \neq 0$: $\quad \dfrac{dy}{y\ln y} = \dfrac{dx}{\sin x}$.

Інтегруємо рівність

$$\int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{dx}{\sin x}; \ \int \frac{d(\ln y)}{\ln y} = \int \frac{dx}{\sin x}; \quad \ln|\ln y| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln C ,$$

звідки $\ln y = C\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ – загальний інтеграл рівняння.

Знайдемо значення довільної сталої C, за якого виконуються початкові умови: $\ln e = C\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow C = 1$.

Розв'язок задачі Коші має вигляд

$$\ln y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \text{ або } y = e^{\operatorname{tg}(x/2)} .$$

Задачі для самостійної роботи.

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $y' = \dfrac{x}{y}$. **2.** $y^2 y' + x^2 = 1$. **3.** $(x+1)y' + xy = 0$.

4. $(1+y^2)xdx+(1+x^2)dy=0$. **5.** $y'+\dfrac{x\sin x}{y\cos y}=0$.

6. $ye^{2x}dx=(1+e^{2x})dy$. **7.** $(1+x^2)dy+y\sqrt{1+x^2}dx-xydx=0$.

Знайти частинні розв'язки, що задовольняють початкові умови:

8. $(xy^2+x)dy+(x^2y-y)dx=0,\ y(1)=1$. **9.** $y'\operatorname{tg}x=y,\ y(\pi/2)=1$.

§ 3. ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Функцію $f(x,y)$ називають ***однорідною*** виміру m, якщо виконується умова $f(tx,ty)=t^m f(x,y)$ $\left(t\neq 0\right)$.

Наприклад,

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2x^2-y^2}\ -$$

однорідна функція нульового виміру, оскільки

$$f(tx,ty)=\frac{(tx)^2+(ty)^2}{2(tx)^2-(ty)^2}=f(x,y)=\frac{t^2(x^2+y^2)}{t^2(2x^2-y^2)}=t^0 f(x,y).$$

Функція $f(x,y)=e^{xy}$ не є однорідною.

Однорідним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння, яке можна звести до вигляду $y'=f(x,y)$,

де функція $f(x,y)$ однорідна функція нульового виміру.

Диференціальне рівняння $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

буде однорідним, якщо функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ будуть однорідними функціями одного виміру.

Однорідне диференціальне рівняння першого порядку підстановкою $u = \frac{y}{x}$ можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y .$$

Розв'язання. Виконаємо заміну змінної за формулою

$$y = ux, \quad y' = u'x + u .$$

Маємо рівняння $y' = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}$ або $u'x + u = \sqrt{1 - u^2} + u$, звідки $xu' = \sqrt{1 - u^2}$. Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{dx}{x}, \quad \arcsin u = \ln|x| + \ln C .$$

Повертаючись до шуканої функції y, одержуємо $\arcsin \frac{y}{x} = \ln C|x|$.

Зауваження. Розв'язуючи рівняння ми ділили обидві частини на $x\sqrt{1 - u^2}$. Очевидно, що $x = 0$ не є розв'язком рівняння. Якщо $1 - u^2 = 0$ отримаємо розв'язок $u = \pm 1$ або $y = \pm x$, який також є розв'язком рівняння. Звідси остаточна відповідь:

$$\arcsin \frac{y}{x} = \ln C|x| \ , \ y = \pm x .$$

Задачі для самостійної роботи.

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. **2.** $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$. **3.** $y' = \frac{x - y}{x + y}$. **4.** $x^2 dy + y^2 dx = xydy$ **.**

5. $xy' = y + x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$. **6.** $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$. **7.** $3x^4y^2dy = (4x^6 - y^6)dx$.

Знайти частинні розв'язки, що задовольняють початкові умови:

8. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x},\ y(1) = 1$. **9.** $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx = xdy,\ y(1) = 0$.

§ 4. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Диференціальне рівняння називають ***лінійним*** диференціальним рівнянням першого порядку, якщо воно лінійне відносно невідомої функції y та її похідної y' .

Лінійне рівняння має вигляд

$$y' + p(x)y = q(x),$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – задані та неперервні на деякому інтервалі (a,b) функції.

Диференціальне рівняння вигляду $y' + p(x)y = 0$ називають ***лінійним однорідним*** рівнянням і воно є рівнянням з відокремлюваними змінними, тобто $\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx$.

Інтегруючи це рівняння, одержуємо $\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C$, де C – довільна додатна стала.

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

де C – стала довільного знака.

Загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння

$$y' + p(x)y = q(x)$$

будемо шукати ***методом варіації довільної сталої*** (методом Лагранжа).

Вважатимемо, що C є функція від x, тобто $C = C(x)$ і

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Звідси отримуємо $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - Ce^{-\int p(x)dx}p(x)$.

Підставимо вирази для y і y' в рівняння $y' + p(x)y = q(x)$.Маємо

$$C'(x)e^{-P(x)} - Ce^{-P(x)}p(x) + p(x)C(x)e^{-P(x)} = q(x),$$

тобто $$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Отже, $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1$ і загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння $y' + p(x)y = q(x)$ має вигляд

$$y = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку однорідне лінійне рівняння $y' + 2xy = 0$, відокремивши змінні

$$\frac{dy}{y} = -2xdx, \quad \Rightarrow \ln|y| = -x^2 + \ln C \;\Rightarrow y = Ce^{-x^2}.$$

Застосуємо метод варіації довільної сталої.

$$y = C(x)e^{-x^2}, \quad y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}.$$

Підставимо вирази для y і y' в рівняння $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}.$$

Звідси $C'(x) = 2x$, $C(x) = x^2 + C_1$ (C_1 – довільна стала).

Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$y = C(x)e^{-x^2} = (x^2 + C_1)e^{-x^2}.$$

Задачі для самостійної роботи.

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $y' = 3\dfrac{y}{x} + x$ **. 2.** $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1$ **. 3.** $(1 + x^2)y' = 2xy + (1 + x^2)^2$ **.**

4. $y' + 2xy = e^{3x}$ **. 5.** $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$ **. 6.** $xy' = y + x^2\cos x$ **.**

7. $(x + y^3)y' = y$ **.**

Знайти частинні розв'язки, що задовольняють початкові умови:

8. $y' - 2y = e^x - x,\ y(0) = 1/4$ **. 9.** $y' = \dfrac{y}{2y\ln y - x + y},\ y(1) = 1$ **.**

§ 5. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ

Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

де $n \neq 0$ та $n \neq 1$ називають ***рівнянням Бернуллі***. Його зводять до лінійного рівняння підстановкою $z = y^{-n+1}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y' + \dfrac{2x}{x^2 + 1}y = -y^2$.

Розв'язання. Зведемо дане рівняння до лінійного підстановкою $z = y^{-1}$.

Тоді $y = \dfrac{1}{z}$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{z^2}\dfrac{dz}{dx}$ і рівняння має вигляд

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}+\frac{2x}{x^2+1}\frac{1}{z}=-\frac{1}{z^2}$$

або $\quad \dfrac{dz}{dx}-\dfrac{2x}{x^2+1}z=1$.

Отримали лінійне рівняння першого порядку, розв'язок якого має вигляд

$$z=(\operatorname{arctg} x+C_1)(x^2+1) \quad \text{або} \quad y=\frac{1}{(\operatorname{arctg} x+C_1)(x^2+1)}.$$

Це рівняння, крім загального розв'язку, має ще особливий розв'язок $y=0$.

Задачі для самостійної роботи.
Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку

1. $y'+4xy=2xe^{-x^2}\sqrt{y}$ **. 2.** $y'-y\operatorname{ctg} x=\dfrac{y^3}{\sin x}$**.**

3. $3y^2y'-y^3=\sin x$ **. 4.** $dy=(y^2e^x-y)dx$ **. 5.** $y'x^3\sin y+2y=xy'$ **.**

Що повинен знати та вміти студент. Вміти знаходити загальний розв'язок та розв'язок задачі Коші диференціальних рівнянь першого порядку.

§ 6. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Диференціальне рівняння другого порядку називають ***лінійним***, якщо воно має вигляд

$$y''+py'+qy=f(x),$$

де p, q – сталі числа. Воно містить невідому функцію y та її похідні y', y'' лише у першому степені. Якщо $f(x)=0$, то рівняння називають ***однорідним***.

Якщо y_1 – частинний розв'язок однорідного рівняння, то C_1y_1 – також розв'язок цього рівняння. Якщо y_1, y_2 – частинні, лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння, то їх лінійна комбінація $C_1y_1+C_2y_2$ також буде розв'язком цього рівняння.

Систему функцій y_1, y_2 називають ***лінійно незалежною*** на проміжку (a,b), якщо тотожність $\alpha y_1+\beta y_2=0$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\alpha=\beta=0$.

Загальний розв'язок рівняння $y''+py'+qy=0$ має вигляд

$$y_{з.о.}=C_1y_1+C_2y_2,$$

де y_1, y_2 – лінійно незалежні розв'язки рівняння, а C_1 і C_2 – довільні сталі.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y''+py'+qy=f(x)$ складається з загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і деякого частинного розв'язку $\tilde{y}$ лінійного неоднорідного рівняння, тобто

$$y=y_{з.о.}+\tilde{y}.$$

Розглянемо однорідне рівняння $y''+py'+qy=0$, розв'язок якого будемо шукати у вигляді функції $y=e^{\lambda x}$. Продиференціюємо двічі цю функцію: $y'=\lambda e^{\lambda x}$, $y''=\lambda^2e^{\lambda x}$ і підставимо отримані вирази у рівняння

$$\lambda^2e^{\lambda x}+p\lambda e^{\lambda x}+qe^{\lambda x}=0.$$

Враховуючи, що $e^{\lambda x}\neq 0$, отримаємо еквівалентне рівняння

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,$$

яке називають ***характеристичним рівнянням*** лінійного однорідного диференціального рівняння

$$y'' + py' + qy = 0 .$$

Отже, функція $y = e^{\lambda x}$ тоді і тільки тоді буде розв'язком рівняння $y'' + py' + qy = 0$, коли λ є коренем характеристичного рівняння.

Зауважимо, що характеристичне рівняння отримують заміною y'' на λ^2, y' на λ, y на 1.

У процесі розв'язку характеристичного рівняння можуть виникнути такі три випадки:

1) дискримінант $D > 0$, тоді існують два дійсні, різні корені рівняння λ_1 і λ_2. При цьому загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} ;$$

2) дискримінант $D = 0$, тоді існують два дійсні, рівні корені рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. При цьому загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} ;.$$

3) дискримінант $D < 0$, тоді існують комплексні корені рівняння $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ і $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. При цьому загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y_{з.о.} = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) .$$

Приклад 1. Знайти загальні розв'язки рівнянь:

а) $y'' - 3y' + 2y = 0$; б) $y'' - 2y' + y = 0$;

в) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Розв'язання. Для рівняння а) запишемо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ коренями якого будуть числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = 2$. Тому загальний розв'язок має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Для рівняння б) характеристичним рівнянням буде рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ з коренями $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Загальний розв'язок має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1 e^x + C_2 x e^x = e^x (C_1 + x C_2).$$

Для рівняння в) характеристичним рівнянням буде рівняння $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$, яке має корені $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. Тому загальним розв'язком рівняння буде функція

$$y_{з.о.} = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

У випадку неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами частинний розв'язок можна шукати методом підбору, якщо права частина має спеціальний вигляд. Якщо права частина $f(x)$ неоднорідного лінійного рівняння має вигляд $f(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$, де $P_m(x)$ – многочлен $m-$ го степеня, то його частинний розв'язок шукають у вигляді $\tilde{y} = x^r Q_m(x) e^{\alpha x}$, де $Q_m(x)$ – многочлен m–го степеня, коефіцієнти якого можна знайти методом невизначених коефіцієнтів, $r-$ кратність кореня $\lambda = \alpha$ характеристичного рівняння.

Якщо $f(x) = e^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, де $P_l(x)$ і $Q_m(x)$ є многочленами відповідно степенів l і m, то частинний розв'язок шукають у вигляді

$$\tilde{y} = x^r e^{\alpha x}(\tilde{P}_n(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_n(x)\sin\beta x),$$

де $n = \max\{l, m\}$, $P_n(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени n–го степеня з невизначеними коефіцієнтами; r – кратність кореня $\lambda = \alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння. Якщо $\lambda = \alpha \pm i\beta$ не є коренями характеристичного рівняння, то $r = 0$. Очевидно, що можливими значеннями r є 0, 1, 2.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ має корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = 2$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді добутку многочлена другого степеня на e^{3x}. У даному випадку $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$.

Щоб знайти коефіцієнти A, B, C, знаходимо y', y''

$\tilde{y}' = (2Ax + B)e^{3x} + 3(Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$,

$\tilde{y}'' = 2Ae^{3x} + 3(2A + B)e^{3x} + 3(2Ax + B)e^{3x} + +9(Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$,

і підставляємо в рівняння $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$:

$2(Ax^2 + Bx + C)e^{3x} - 9\ (Ax^2 + Bx + C)e^{3x} - 3(2Ax + B)e^{3x} + +2Ae^{3x} +$
$3(2A + B)e^{3x} + +9(Ax^2 + Bx + C)e^{3x} + +3(2Ax + B)e^{3x} = (x^2 + x)e^{3x}$;

$$2(Ax^2 + Bx + C) + 2A + 3(2Ax + B) \equiv x^2 + x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при рівних степенях x, знайдемо невідомі A, B, C

$$\begin{array}{c|lcl} x^2 & 2A = 1, & & A = 1/2, \\ x & 2b + 6A = 1, & \Rightarrow & B = -1, \\ x^0 & 2C + 2A + 3B = 0 & & C = 1. \end{array}$$

Шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$\tilde{y} = (\frac{1}{2}x^2 - x + 1)e^{3x} .$$

Загальний розв’язок даного диференціального рівняння запишемо у вигляді

$$y = y_{з.о.} + \tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{2x} + (\frac{1}{2}x^2 - x + 1)e^{3x} .$$

Приклад 3. Розв’язати рівняння $y'' + 9y = 6\cos 3x$.

Розв’язання. Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 9 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x .$$

Числа $\lambda = \pm 3i$ є простими коренями характеристичного рівняння,тому частинний розв’язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = x(A\cos 3x + B\sin 3x) .$$

Тоді

$$\tilde{y}' = A\cos 3x + B\sin 3x + x(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x),$$

$$\tilde{y}'' = 2(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) + x(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x).$$

Після підстановки $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в рівняння, одержимо

$$-6A\sin 3x + 6B\cos 3x = 6\cos 3x .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 3x$ і $\cos 3x$ знаходимо $A = 0$, $B = 1$. Таким чином $\tilde{y} = x\sin 3x$.

Загальний розв’язок диференціального рівняння записується у вигляді

$$y = y_{з.о.} + \tilde{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x\sin 3x .$$

Приклад 4. Вказати вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y'' - 2y' + y = e^x(2x+1)$.

Розв'язання. $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, де $\alpha = 1-$ корінь характеристичного рівняння кратності 2. Тому

$$\tilde{y} = x^2 e^x (Ax + B).$$

Якщо функцію $f(x)$ не можна подати у вигляді $e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$, то знаходячи частинний розв'я-зок користуються ***методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа)***. Він полягає у тому, що для відповідного однорідного рівняння записують загальний розв'язок $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, але $C_1(x)$ і $C_2(x)$ розглядають як функції від змінної *x*. Ці функції визначають з системи

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = \pm i$, тому загальним розв'язком буде

$$y_{з.о.} = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \ y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x.$$

Складемо систему і розв'яжемо її

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2' \cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}, \\ C_2' = \sin x. \end{cases}$$

Інтегруючи, дістанемо $C_2 = \int \sin x dx = -\cos x + \tilde{C}_2$;

$$C_1 = \int \frac{-\sin^2 x dx}{\cos x} = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{dx}{\cos x} + \int \cos x dx =$$

$$= -\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \sin x + \tilde{C}_1,$$

де $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ – довільні сталі. Підставимо знайдені функції у загальний розв'язок

$$y = \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x - \cos x \, \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Приклад 6. Корпорація вважає, що її прибуток $P(t)$ від реалізації деякої продукції як функції часу задається диференціальним рівнянням

$$\frac{dP}{dt} = t(60 - P), \quad 0 \le t \le 30,$$

де t – вимірюють у днях; P – вимірюють у тисячах у.о. Знайти $P(t)$, якщо $P(0) = 0$. Який прибуток одержить корпорація

наприкінці місяця $(t = 30)$?

Розв'язання. Задане диференціальне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Тому маємо

$$\frac{dP}{60 - P} = tdt$$

або

$$-\ln|60 - P| = \frac{t^2}{2} + C_1; \quad \ln|60 - P| = -\frac{t^2}{2} - C_1; \quad 60 - P = Ce^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Одержуємо функцію $P(t) = 60 - Ce^{-\frac{t^2}{2}}$. З умови $P(0) = 0$ знаходимо $C = 60$.

Отже, прибуток корпорації визначається функцією

$$P(t) = 60(1 - Ce^{-\frac{t^2}{2}}).$$

Наприкінці місяця корпорація буде мати прибуток $P(30) \approx 60$ тис. у.о.

Приклад *7*. Функцію прибутку задано диференціальним рівнянням $R(t) = I(t) + S(t)$, де $I(t) = \frac{1}{2}R'(t) -$ інвестиції, $S(t) = 2t$ – функція споживання. Знайти $R(t)$, якщо $R(0) = 2$.

Розв'язання. Задане в умові рівняння $R(t) = \frac{1}{2}R'(t) + 2t$ або $R'(t) - 2R(t) = -4t$ є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку, тому розв'язок шукатимемо у вигляді

$$R(t) = u(t)v(t), \quad R'(t) = u'(t)v(t) + v'(t)u(t).$$

Маємо $u'(t)v(t) + u(t)\left(v'(t) - 2v(t)\right) = -4t$.

Знаходимо функцію $v(t)$ як частковий розв'язок рівняння

$$v'(t) - 2v(t) = 0; \quad \frac{dv}{dt} = 2v; \quad \frac{dv}{v} = 2dt; \quad \ln|v| = 2t; \quad v = e^{2t}.$$

Підставимо знайдену функцію $v = e^{2t}$ у рівняння

$$u'(t)v(t) + u(t)\left(v'(t) - 2v(t)\right) = -4t.$$

Маємо

$$u'(t)\ e^{2t} = -4t; \quad \frac{du}{dt} = -4te^{-2t}; \quad u = \int -4te^{-2t}dt = 2te^{-2t} + e^{-2t} + C.$$

Тоді функція $R(t) = e^{2t}\left(2te^{-2t} + e^{-2t} + C\right) = 2t + 1 + Ce^{2t}$.

З умови $R(0) = 2$ знаходимо, що $C = 1$, тобто функцію прибутку описує формула $R(t) = 2t + 1 + e^{2t}$.

Задачі для самостійної роботи.

Записати загальний розв'язок рівняння

1. $y'' - 8y' + 15y = 0$ **. 2.** $y'' + 10y' + 25y = 0$ **. 3.** $y'' - 4y' + 29y = 0$ **.**

Знайти частинні розв’язки рівнянь

4. $y'' - 5y' + 4y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$.

5. $y'' - 2y' + y = 0,\ y(2) = 1, y'(2) = -2$.

Розв’язати задачу Коші для

6. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x},\quad y(0) = 3,\ y'(0) = 8$.

7. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2$.

8. $y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x,\ y(0) = -2,\ y'(0) = -2$.

9. $y'' + y = 4e^x,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -3$.

Що повинен знати та вміти студент. Знаходити частинний та загальний розв’язки лінійних однорідних та неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами у випадках спеціальної правої частини і неспеціальної правої частини.

ТЕМА 10. ЧИСЛОВІ РЯДИ

§ 1. ЧИСЛОВІ РЯДИ. ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ З ДОДАТНИМИ ЧЛЕНАМИ

Нехай $\{a_n, n \in N\}$ – нескінченна числова послідовність. Вираз $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають ***числовим рядом***, а числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – членами цього ряду. Відповідно, член a_n називають ***загальним (n–им) членом*** ряду. Суму перших n членів ряду $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ називають ***частинною*** сумою ряду.

Якщо послідовність частинних сум ряду є збіжною, тобто існує $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд називають ***збіжним***, а число S називають ***сумою*** ряду. Якщо границя послідовності частинних сум $\lim_{n\to\infty} S_n$ є нескінченною або не існує, то ряд називають ***розбіжним***.

Необхідна ознака збіжності ряду. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то його n–ий член прямує до нуля, тобто $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Приклад 1. Довести збіжність рядів і знайти їх суми:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$.

Розв'язання. Для ряду а) загальний член має вигляд $a_n = bq^{n-1}$. Сам ряд є сумою членів геометричної прогресії з першим членом прогресії b і знаменником q. У випадку, коли $|q| \geq 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$ буде розбіжним, бо не виконується необхідна ознака збіжності ряду:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} bq^{n-1} = \begin{cases} b, & |q| = 1, \\ \infty, & |q| > 1. \end{cases}$$

У випадку, коли $|q| < 1$, ряд є сумою членів нескінченно спадної геометричної прогресії і його суму обчислюють за формулою

$$S = \frac{b}{1-q}.$$

Для випадку б) загальний член ряду $\frac{1}{n^2+3n+2}$ можна записати у вигляді

$$a_n = \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Тоді частинна сума ряду S_n має вигляд

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{n+2}.$$

Звідси границя послідовності частинних сум

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) = 1 = S.$$

Отже, за означенням ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ збіжний і його сума дорівнює одиниці.

У випадку в) загальний член ряду подамо у вигляді

$$a_n = \frac{1+2^n}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Тоді частинна сума

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + \left(\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + 2.$$

Кожна з дужок є сумою перших n членів нескінченно спадної геометричної прогресії, яку можна обчислити за формулою

$$S_n = \frac{a_1(1-q^{n-1})}{1-q}.$$

Тому

$$S_n = 2 + \frac{\frac{1}{3}(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n)}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{2}{3}(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n)}{1-\frac{2}{3}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

Звідси $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right)=\frac{9}{2}$.

Отже, ряд збіжний і його сума дорівнює $\frac{9}{2}$.

Приклад 2. Використовуючи необхідну ознаку збіжності ряду, встановити розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n$.

Розв'язання. За необхідною ознакою збіжності знайдемо границю n – го члена

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+3}\right)^n = e^{-2} \neq 0,$$

а це означає, що ряд розбігається.

Якщо усі члени ряду – невід'ємні числа, то числовий ряд називають ***знакододатним***. Для дослідження поведінки знакододатних рядів користуються ознаками порівняння та достатніми ознаками збіжності.

Перша ознака порівняння. Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ два знакододатних ряди, причому для всіх $n \in N$ виконується нерівність $a_n \le b_n$. Тоді:

1) якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то збігається і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний, то і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – розбіжний.

Друга ознака порівняння. Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ два знакододатних ряди. Якщо існує скінченна відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$, то ряди збігаються або розбігаються одночасно.

Для порівняння зручно використовувати такі ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$ – геометричний ряд, що збігається коли $|q|<1$ і розбігається коли $|q|\ge 1$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ – узагальнений гармонічний ряд, що збігається коли $\alpha>1$ і розбігається коли $\alpha\le 1$. Якщо $\alpha=1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ називають ***гармонічним***.

Ознака Даламбера. Якщо для знакододатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, то

1) при $q<1$ ряд збігається;
2) при $q>1$ ряд розбігається.

Коли $q=1$ поведінка ряду залишається нез'ясованою.

Ознака Коші. Якщо для знакододатнього ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}=q$, то

1) при $q<1$ ряд збігається;
2) при $q>1$ ряд розбігається.

Коли $q=1$ поведінка ряду залишається нез'ясованою.

Інтегральна ознака Коші. Нехай члени знакододатного ряду такі, що $a_1\ge a_2\ge a_3\ge\ldots$; $f(x)$ – така неперервна незростаюча функція, що $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2,\ldots,$ $f(n)=a_n,\ldots$ Тоді зі збіжності невласного інтеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а з розбіжності інтеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3n+1)2^n}$.

Розв'язання. Порівняємо загальний член даного ряду із загальним членом збіжного геометричного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3 \cdot 2^n}$. Враховуючи, що $\frac{n}{(3n+1)2^n} < \frac{1}{3 \cdot 2^n}$ для будь-якого $n \in N$, за першою ознакою порівняння досліджуваний ряд також збіжний.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{9n^2+1}+n}$.

Розв'язання. Порівняємо загальний член даного ряду із загальним членом гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, що розбігається. Знаходимо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{1}{\sqrt{9n^2+1}+n}\right)}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{9n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{9n^2+1}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{9+1/n^2}+1} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

За другою ознакою порівняння досліджуваний ряд розбіжний.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n-1)!}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаку Даламбера. Маємо

$$a_n = \frac{3^n}{(2n-1)!}; \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(2n+1)!}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(2n-1)!}{(2n+1)!\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n(2n+1)}=0<1.$$

Отже, за ознакою Даламбера ряд збігається.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{n^2}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаку Коші. Тут $a_n=\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{2n+2}\right)^{n}=e^{-3/2}<1\ \Rightarrow \text{ряд збіжний.}$$

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$. Для $\forall x\geq 2$ вона незростає, неперервна і така, що $f(n)=a_n$. Дослідимо на збіжність невласний інтеграл

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{A\to\infty}\int_2^{A}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{A\to\infty}\int_2^{A}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^A\right)=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln A}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Із збіжності невласного інтеграла випливає збіжність досліджуваного ряду.

Задачі для самостійної роботи.

Дослідити на збіжність ряди:

1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$. **2.** $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$.

3. $\frac{1}{2}+\frac{3!}{2\cdot 4}+\frac{5!}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{7!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\ldots.$

4. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\ldots.$

5. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+4)}+\ldots.$

6. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots.$

7. $\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^9}{27}+\ldots\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}+\ldots.$

8. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\frac{1}{4\ln^2 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}+\ldots.$

9. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\ldots.$

Знайти суму ряду:

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$. **11.** $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\ldots.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Що повинен знати та вміти студент. Знати необхідну ознаку збіжності числових рядів, достатні ознаки збіжності числових рядів з додатними членами; вміти використовувати їх при дослідженні числових рядів.

§ 2. ЗНАКОЗМІННІ ЧИСЛОВІ РЯДИ

Числовий ряд, який містить члени з різними знаками, називають ***знакозмінним***.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбігається, а сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають ***умовно збіжним***.

Знакозмінний ряд, у якого кожні два сусідні члени мають протилежні знаки, називають ***знакопереміжним***. Для дослідження збіжності знакопереміжних рядів застосовують ***ознаку Лейбніца***. Якщо члени ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots, \quad a_n > 0, \ \forall n \in N,$$

взяті за абсолютною величиною, монотонно спадають, тобто

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ є збіжним.

Отже, досліджуючи на збіжність знакозмінні ряди, спочатку розглядають ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ із абсолютних величин членів самого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Для дослідження його поведінки можна застосовувати всі ознаки збіжності знакододатного ряду. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно. У протилежному випадку для знакопереміжних рядів застосовують ознаку Лейбніца. У випадку виконання умов цієї ознаки маємо умовну збіжність, а при їх порушенні – розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{3^n}$.

Розв'язання. Розглянемо ряд з абсолютних величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{n+1}{3^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}.$$

Усі члени одержаного ряду додатні. Дослідимо його за ознакою Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3^{n+1}}\frac{3^n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{3}<1,$$

отже, ряд збіжний. А це означає, що досліджуваний ряд абсолютно збіжний.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Розв'язання. Розглянемо ряд з абсолютних величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Це є гармонічний ряд, який розбігається. Застосуємо ознаку Лейбніца.

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>...>\frac{1}{n}>... \text{ і } \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Отже, умови ознаки Лейбніца виконуються, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ умовно збіжний.

Розмежування рядів на абсолютно та умовно збіжні є істотним. Абсолютно збіжні ряди мають переставну властивість: будь-який ряд, утворений за допомогою перестановки членів абсолютно збіжного ряду, також абсолютно збіжний і має ту саму суму, що і заданий ряд.

Умовно збіжні ряди перестановної властивості не мають: від перестановки їх членів може змінитися сума ряду і навіть утворитися розбіжний ряд.

Якщо суму знакопереміжного ряду замінити його n–ою частинною сумою, то тоді допущена похибка не перевищить за абсолютною величиною першого відкинутого члена.

Задачі для самостійної роботи.

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-1}$. **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5n-2}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$. **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{2^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n^2}}{n!}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$.

Що повинен знати та вміти студент. Досліджувати ряди з довільними членами на абсолютну та умовну збіжність.

ТЕМА 11. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Нехай задано послідовність функцій $\{u_n(x)\}\Big|_{n=1}^{\infty}$, визначену на числовій множині $\mathrm{X}\subset\mathrm{R}$. Вираз вигляду

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

називають ***функціональним рядом***. Для кожного фіксованого значення $x_0\in\mathrm{X}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ стає числовим. Якщо при цьому він збігається до числа $S(x_0)$, то ряд вважають ***збіжним у точці*** x_0, а саму точку x_0 називають ***точкою збіжності*** ряду. Множину, у кажній точці якої збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називають його ***областю збіжності***. Функцію $S(x)$ визначену на множині X називають ***сумою функціонального ряду*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Для знаходження області збіжності функціонального ряду користуються ознаками Даламбера або Коші.

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Розв'язання. Функції $u_n(x) = \ln^n x$, $n \in N$ визначені на множині $\mathrm{X} = (0, +\infty)$. При фіксованому x ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$ є числовою геометричною прогресією з $q = \ln x$. Він збігається при $|q| = |\ln x| < 1$. Розв'яжемо цю нерівність.

$$|\ln x| < 1 \Leftrightarrow \quad -1 < \ln x < 1 \Leftrightarrow \quad e^{-1} < x < e .$$

Таким чином, областю збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$ є множина $D = (e^{-1}, e)$.

На кінцях інтервалу збіжності необхідні додаткові дослідження.

Розглянемо $x = e$. Тоді $\ln^n e = 1$. Оскільки $\lim_{n \to \infty} u_n(e) \neq 0$ ряд у точці $x = e$ розбіжний.

Розглянемо $x = e^{-1}$. Тоді $u_n(e^{-1}) = \ln^n(e^{-1}) = (-1)^n$. Оскільки не існує границі $\lim_{n \to \infty} u_n(e^{-1})$ ряд у точці $x = e^{-1}$ також розбіжний.

Остаточно маємо $D = (e^{-1}, e)$ – область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Функціональний ряд

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

де $c_0, c_1, \ldots, c_n$ – дійсні числа називають ***степеневим*** . Основна властивість степеневого ряду полягає у такому твердженні.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд збігається при $x = x_0$, то він збігається (причому абсолютно) при будь-якому значенні x, що задовольняє нерівність

$$|x - a| < |x_0 - a|.$$

Наслідком цієї властивості є факт існування для будь-якого степеневого ряду інтервалу збіжності $|x - a| < R$ із центром у точці a, всередині якого степеневий ряд абсолютно збіжний і поза яким він розбіжний. На кінцях інтервалу збіжності у точках $x = a \pm R$ степеневі ряди або збігаються, або розбігаються, тобто необхідне додаткове дослідження.

Число R називають ***радіусом збіжності*** степеневого ряду. Якщо $R = 0$, то степеневий ряд збігається лише у точці $x = a$; якщо $R = \infty$, то ряд збігається на усій числовій осі. Знайти радіус збіжності можна, наприклад, за однією з формул:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|; \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Якщо $x_0 = 0$, то степеневий ряд набуває вигляду

$$c_0 + c_1x + c_2x + \ldots + c_nx + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_nx^n.$$

Приклад 2. Знайти області збіжності рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n(x-2)^{2n}}{n}.$$

Розв'язання. Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ коефіцієнти

$$c_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{і} \quad c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Знаходимо радіус збіжності даного ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}\right|=1.$$

Отже, ряд збігається на проміжку $(-1,1)$. Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності. При $x=1$ ряд має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ і до нього можна застосувати першу порівняльну ознаку.

Для кожного $n\in N$ виконується нерівність $\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}$.

Оскільки, числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збіжний, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ також збіжний.

У точці $x=-1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ є числовим знакопереміжним рядом.

Ряд, складений з абсолютних величин його членів має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ і є збіжним, а отже, знакопереміжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ абсолютно збіжний.

Тому інтервалом збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ є множина $D=[-1,1]$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n(x-2)^{2n}}{n}$ заміною $(x-2)^2=y$, $y\ge 0$ зводять до степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n y^n}{n}$ з коефіцієнтами $c_n=\frac{9^n}{n}$ і радіусом збіжності $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{9^n}}=\frac{1}{9}$.

Це означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n y^n}{n}$ збігається в інтервалі $0 \le y < \frac{1}{9}$. Дослідимо поведінку цього ряду у точці $y = \frac{1}{9}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n}\left(\frac{1}{9}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є гармонічним рядом, який розбігається. Тому інтервалом збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n y^n}{n}$ є множина $D = [0, \frac{1}{9})$. Повертаючись до змінної x, маємо

$$0 \le (x-2)^2 < \frac{1}{9} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3} < x - 2 < \frac{1}{3}.$$

Звідки інтервалом збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n (x-2)^{2n}}{n}$ є множина $D = (5/3, 7/3)$.

Ряди, що отримано почленним диференціюванням чи інтегруванням степеневого ряду, мають той самий інтервал збіжності, що і сам ряд, і їх сума всередині інтервалу збіжності дорівнює відповідно похідній чи інтегралу від суми початкового ряду.

Таким чином, якщо $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$, то

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-x_0)^{n-1} \quad \text{і} \quad \int_{x_0}^{x} S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n (x-x_0)^{n+1}}{n},$$

де $-R < x - x_0 < R$.

Приклад 3. Знайти інтервал збіжності та суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n+1}$.

Розв'язання. Для цього ряду $c_n = \frac{n}{n+1}$, а радіус збіжності

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right|=1.$$

У точках $x=\pm1$ (кінцях інтервалу) не виконується необхідна умова збіжності ряду і тому ряд розбігається. Отже, інтервалом збіжності даного ряду є $(-1,1)$.

Позначимо через $S(x)$ суму степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n+1}$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)-1}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{n+1})x^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Перший ряд – це сума нескінченно спадної геометричної прогресії і $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, $|x|<1$.

Для знаходження суми другого ряду застосуємо почленне диференціювання в інтервалі збіжності.

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

Звідси

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x\frac{dx}{1-x}+C=-\ln(1-x)+C.$$

Якщо $x=0$ маємо $0=-\ln 1+C\Rightarrow C=0$.

Отже, сума ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n+1}$ дорівнює

$$S(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x)\quad \text{для}\quad |x|<1.$$

Приклад 4. Знайти суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$.

Розв'язання. Інтервалом збіжності цього ряду є множина $D=(-1,1)$. Позначимо через $S(x)$ суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$.

Тоді $\dfrac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

Всередині інтервалу збіжності для кожного $x\in[-\rho,\rho]$, $0<\rho<1$ можна записати:

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\int_0^x t^{n-1}dt\right)=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}.$$

Тобто $\displaystyle\int_0^x \frac{S(t)}{t}dt=\frac{x}{1-x}$.

Продиференціюємо обидві частини рівності:

$$\frac{S(x)}{x}=\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow S(x)=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Звідси сума ряду дорівнює $\dfrac{x}{(1-x)^2}$.

Розглянемо обернену задачу: задану функцію записати у вигляді степеневого ряду.

Будь-яку функцію нескінченне число разів диференційовну в інтервалі $|x-x_0|<r$ можна розкласти в цьому інтервалі у збіж-ний ***степеневий ряд Тейлора***

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

якщо у цьому інтервалі виконується умова

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0,$$

де $R_n(x)$ – залишковий член формули Тейлора (або ***остача ряду***), $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

Коли $x_0 = 0$ маємо ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Приклад 5. Розкласти функцію $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ у степеневий ряд Маклорена.

Розв'язання. Розкладемо дріб $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ на суму елементарних дробів, застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{x-2} + \frac{1}{1-x}.$$

Розглянемо кожен доданок окремо.

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{2(\frac{x}{2}-1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}.$$

За умови $|x| < 2$ множник $\frac{1}{1-x/2}$ можна розглядати як суму нескінченно спадної геометричної прогресії з $b_1 = 1$ і $q = \frac{x}{2}$. Тому

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{2}\right)^n + \ldots\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Аналогічно дріб $\frac{1}{1-x}$ є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії з $b_1 = 1$ і $q = x$ за умови $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n .$$

Отже,

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{1-x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\cdot 2^n-1)x^n}{2^n} .$$

Вказана рівність виконується в інтервалі збіжності знайденого ряду, тобто на множині $D=(-1,1)$.

Розклад функцій у степеневі ряди дозволяє обчислювати наближено значення функцій в заданій точці, вважаючи його приблизно рівним сумі n перших членів відповідного степеневого ряду. Для оцінки похибки знакосталого ряду, ряд, складений з відкинутих членів порівнюють з рядом збіжної геометричної прогресії. Якщо ж ряд знакопереміжний, то абсолютна величина похибки не перевищує модуля першого відкинутого члену ряду, тобто $|c_{n+1}|$.

Приклад 6. Обчислити $\sqrt{e}$ з точністю $\alpha=0{,}00001$.

Розв'язання. Використовуючи розклад у ряд функції e^x

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

маємо $$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{1!\cdot 2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\frac{1}{3!\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n!\cdot 2^n}+\ldots$$

Похибку цього обчислення визначимо із суми

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\frac{x^{n+3}}{(n+3)!}+\ldots=$$

$$=\frac{x^n}{n!}\left[\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)(n+2)}+\frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right]$$

або $R_n < \dfrac{x^n}{n!}\left[\dfrac{x}{n+1}+\dfrac{x^2}{(n+2)^2}+\dfrac{x^3}{(n+3)^3}+\dots\right].$

Вираз у квадратних дужках є нескінченно спадною геометричною прогресією, сума якої дорівнює $\dfrac{x/(n+1)}{1-x/(n+1)}$.

Тому $R_n < \dfrac{x^n}{n!}\,\dfrac{x/(n+1)}{1-x/(n+1)}$,

тобто $R_n < \dfrac{x^n}{n!}\,\dfrac{x}{n+1-x}$.

Для цього випадку

$$R_n < \frac{(1/2)^n}{n!}\,\frac{1/2}{n+1-1/2} = \frac{1}{n!2^n}\,\frac{1}{2n+1}.$$

Підбираючи n, отримаємо необхідну точність. Наприклад, для $n=5$ $R_5 < \dfrac{1}{120\cdot 32}\,\dfrac{1}{10+1} = \dfrac{1}{42240}$.

Коли $n=6$ $R_6 < \dfrac{1}{720\cdot 64}\,\dfrac{1}{13} < \dfrac{1}{100000}$.

Тобто достатньо взяти суму перших 6 членів, щоб отримати значення $\sqrt{e}$ з точністю $\alpha = 0{,}00001$.

$$\sqrt{e} \approx 1+\frac{1}{1!\cdot 2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\frac{1}{3!\cdot 2^3}+\frac{1}{4!\cdot 2^4}+\frac{1}{5!\cdot 2^5}+\frac{1}{6!\cdot 2^6} \approx 1{,}648719.$$

***Приклад** 7*. Обчислити $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e}}$ з точністю $\alpha = 0{,}00001$.

Розв'язання. Викорисовуючи розклад у ряд функції e^x, маємо

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}} = e^{-1/5} = 1-\frac{1}{1!\cdot 5}+\frac{1}{2!\cdot 5^2}-\frac{1}{3!\cdot 5^3}+\dots$$

Скористаємося наближеною рівністю

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}} \approx 1-\frac{1}{1!\cdot 5}+\frac{1}{2!\cdot 5^2}-\frac{1}{3!\cdot 5^3}+\frac{1}{4!\cdot 5^4} \approx 0{,}81873.$$

Беремо п'ять доданків, тому що знакопереміжний ряд задовольняє умови ознаки Лейбніця і абсолютна величина похибки не перевищує модуля першого відкинутого члену.

Перший з відкинутих членів $\dfrac{1}{5!\cdot 5^5} < 0,00001$.

Задачі для самостійної роботи.

Знайти області збіжності рядів.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{x^n}$. **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!(x+3)^n}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^n x}{n}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n^2}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n x^n$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^{2n}2^n}{n}$.

Розкласти за степенями $(x-x_0)$ у ряд Тейлора функції

8. $f(x)=\dfrac{1}{1-x},\ x_0=2$. **9.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3},\ x_0=-2$.

10. $f(x)=\sin(x^2+4x),\ x_0=-2$. **11.** $f(x)=\ln(5x+3),\ x_0=1$.

12. Обчислити $\sqrt[4]{90}$ з точністю $\alpha=0,001$.

13. Обчислити $\sin\dfrac{\pi}{5}$ з точністю $\alpha=0,001$.

14. Обчислити e^{-1} з точністю $\alpha=0,001$.

Що повинен знати та вміти студент. Вміти знаходити радіус та інтервал збіжності степеневих рядів; розкладати основні елементарні функції в ряд Тейлора та Маклорена та використовувати степеневі ряди для наближених обчислень.

ТЕМА 12. РЯДИ ФУР'Є

Ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right),\quad \text{де}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx\,; \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx\,;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \;\; (n = 1, 2, \ldots),$$

називають ***тригонометричним рядом Фур'є*** функції $f(x)$ на проміжку $[-l, l]$, а числа a_n, b_n – ***коефіцієнтами ряду Фур'є***.

Якщо функція $f(x)$, яку задано на проміжку $[-l,l]$, кусково-неперервна (або кусково-монотонна) і обмежена, то її тригонометричний ряд Фур'є збігається у всіх точках проміжку $[-l,l]$.

Якщо $S(x)$ – сума ряду Фур'є, то в усіх точках неперервності функції $f(x)$

$$S(x) = f(x)\,,$$

а в усіх точках розриву

$$S(x) = \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))\,.$$

Крім того,

$$S(l) = S(-l) = \frac{1}{2}(f(l-0) + f(l+0))\,.$$

Сформульовані умови часто називають ***умовами Діріхле***.

Якщо функцію $f(x)$ задано на довільному проміжку $[a,b]$ довжиною $2l$, то в формули для коефіцієнтів ряду Фур'є замість $f(x)$ підставляють значення $2l$ – періодичного продовження її на всю числову вісь, тобто функцію $f^*(x)$ таку, що $f^*(x+2l) = f^*(x)$, $f^*(x) = f(x)$, коли $x \in [a,b]$.

Якщо функція $f(x)$ парна, то коефіцієнти Фур'є знаходять за формулами:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx\,; \quad a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx\,;$$

$b_n = 0 \;\; (n = 1, 2, \ldots)$,

а відповідний ряд називають ***рядом Фур'є за косинусами***.

Якщо функція $f(x)$ непарна, то коефіцієнти Фур'є знаходять за формулами:

$$a_0 = a_n = 0\,;\;\; b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx$$

і відповідний ряд називають ***рядом Фур'є за синусами***.

У випадку, коли функцію $f(x)$ визначено на проміжку $[-\pi, \pi]$ і вона задовольняє на ньому умови Діріхле, тригонометричний ряд Фур'є набуває вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,,$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,;\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx\,;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx\;\; (n = 1, 2, \ldots).$$

Якщо при цьому функція парна, то коефіцієнти знаходять за формулами:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx\,;\;\; a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx\,;\;\; b_n = 0\,.$$

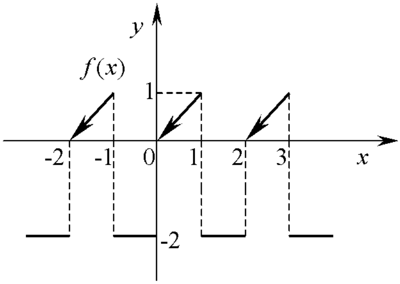
Якщо функція непарна, то $a_0 = a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx\,.$$

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом $T = 2$, що задається умовою

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -1 \le x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Графік даної функції має вигляд



Знаходимо коефіцієнти ряду Фур'є за формулами:

$$a_0 = \int_{-1}^{0} -2dx + \int_{0}^{1} xdx = -\frac{3}{2};$$

$$a_n = \int_{-1}^{0} -2\cos\pi nx dx + \int_{0}^{1} x\cos\pi nx dx =$$

$$= -2\frac{\sin\pi nx}{\pi n}\Big|_{-1}^{0} + x\frac{\sin\pi nx}{\pi n}\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\frac{\sin\pi nx}{\pi n}dx = \frac{\cos\pi nx}{(\pi n)^2}\Big|_{0}^{1} =$$

$$= \frac{\cos\pi n - 1}{(\pi n)^2} = \frac{(-1)^n - 1}{(\pi n)^2}.$$

Для знаходження другого інтеграла використано формулу інтегрування частинами. Також враховано, що $\sin\pi n = 0$, $\cos\pi n = (-1)^n, n \in Z$.

Аналогічно знаходимо коефіцієнти b_n:

$$b_n = \int_{-1}^{0} -2\sin\pi nx dx + \int_{0}^{1} x\sin\pi nx dx = 2\frac{\cos\pi nx}{\pi n}\Big|_{-1}^{0} -$$

$$-\frac{x\cos\pi nx}{\pi n}\Big|_{0}^{1} + \int_{0}^{1}\frac{\cos\pi nx}{\pi n}dx = \frac{2}{\pi n}\left(1 - \cos\pi n\right) - \frac{1}{\pi n}\cos\pi n +$$

$$+\frac{\sin\pi nx}{(\pi n)^2}\Big|_{0}^{1} = \frac{2 - 3\cdot(-1)^n}{\pi n}.$$

Таким чином, розклад функції $f(x)$ у ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=-\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{(\pi n)^2}\cos\pi nx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-3\cdot(-1)^n}{\pi n}\sin\pi nx\,,$$

якщо $x\neq k,\ k\in Z$.

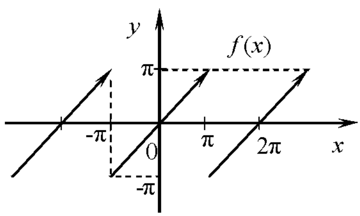
Зазначимо, що в точках розриву вигляду $x=2k,\ k\in Z$ сума ряду $S(x)=\dfrac{0-2}{2}=-1$, а в точках $x=2k+1,\ \ k\in Z$

$$S(x)=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2}.$$

В усіх інших точках $S(x)=f(x)$.

Приклад 2. Розкласти в ряд Фур'є 2π -періодичну функцію $f(x)=x$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

Розв'язання. Графік даної функції зображено на рисунку.



Задана функція непарна і 2π -періодична, тому $a_0=a_n=0$;

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=$$

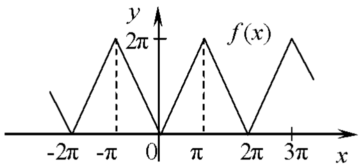
$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\Bigg|_0^{\pi}\right)=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}.$$

Отже,

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}\sin nx, & x\neq(2k+1)\pi,\ k\in Z,\\ 0, & x=(2k+1)\pi,\ k\in Z.\end{cases}$$

Приклад 3. Розкласти в ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=2x$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Розв'язання. Ряд Фур'є за косинусами можна записати для парної функції, тому продовжимо нашу функцію парним чином на відрізок. $[-\pi,0]$ Тобто графік функції буде симетричним відносно осі Oy. У результаті отримаємо 2π –періодичну функцію.



У цьому випадку коефіцієнти Фур'є мають вигляд:

$$b_n=0, \qquad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2xdx=\frac{2}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x\cos nxdx=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{x\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right)=$$

$$=\frac{4\cos nx}{\pi n^2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^2}.$$

Отже, $\quad f(x)=\dfrac{2}{\pi}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4((-1)^n-1)}{\pi n^2}\cos nx, \quad x\in R.$

Задачі для самостійної роботи.

1. Розвинути у ряд Фур'є 2π – періодичну функцію, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$

$$f(x)=\begin{cases}7x-1, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвинути у ряд Фур'є по косинусах функцію $f(x)=4-3x$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

3. Розвинути у ряд Фур'є $2l$–періодичну функцію $f(x) = 1 - |x|$, задану на інтервалі $l = 3$.

Що повинен знати та вміти студент. Вміти знаходити коефіцієнти Фур'є для $2l$–періодичних та 2π – періодичних функцій та зображати їх у вигляді тригонометричного ряду Фур'є.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Барковський В. В., Барковська Н. В.* Математика для економістів. Вища математика. – К.: Національна академія управління, 1997. – 384 с.
2. *Боярский А. К.* Математика для економистов. – М.: Высш. шк., 1961. – 264 с.
3. *Крамер Н. Ш.* Высшая математика для економистов.– М.: Юнити,1998. – 380 с.
4. *Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемнык Ю. Н.* Математические методы в економике. – М.: ДИС, 1998. – 240 с.
5. *Карасев Е. И., Аксютина З. И., Савельева Т. И.* Курс высшей математики для економических вузов: В 2 ч. М.: Высш. шк., 1982.
6. *Краас В. М.* Высшая математика для економических специальностей. – М.: Высш. шк., 1997. – 256 с.
7. *Методичні* вказівки до виконання типової розрахункової роботи «Елементи лінійної, векторної алгебри та аналі-тичної геометрії»/ Уклад.: З. П. Ординська, Л. А. Репета, О. О. Дем'яненко—К.: ІВЦ "Видавництво «Політехс-ніка»", 2003.—Ч. І.—68 с.
8. *Методичні* вказівки до виконання типової розрахункової роботи «Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних»/ Уклад.: О. В. Іванов, З. П. Ординська, Л. А. Репета, О. О. Дем'яненко—К.: ІВЦ "Видавництво «Політехніка»", 2002.—Ч. ІІ.—84 с.
9. *Методичні* вказівки до виконання типової розрахункової роботи «Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Ряди.»/ Уклад.: О. В. Іванов, З. П. Ординська, Л. А. Репета, О. О. Дем'яненко—К.: ІВЦ "Видавництво «Політехніка»", 2002.—Ч. ІІІ.—140 с.

ЗМІСТ