

Лінії і поверхні 1-го і 2-го порядків.

1. Вступ.
2. Рівняння прямої на площині.
3. Рівняння площини.
4. Рівняння прямої в просторі.
5. Криві 2-го порядку.
6. Поверхні 2-го порядку.

1. Вступ.

Перед тим, як розглянути питання лекції, згадаємо деякі питання з векторної алгебри:

1) Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ є рівність

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \quad (1)$$

2) Необхідною і достатньою умовою колінеарності векторів $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ (колінеарні-лежать на одній прямій або на паралельних прямих), є пропорційність їх координат

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \quad (2)$$

Вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ компланарні тоді і тільки тоді їхній мішаний добуток дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

$F(x, y) = 0$ – загальне рівняння лінії на площині XOY . Якщо це рівняння 1-го ступеня відносно x та y , то це лінія 2-го порядку.

2. Рівняння прямої на площині

1. Нехай пряма задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ і перпендикуляром до неї $\vec{n} = (A; B)$.

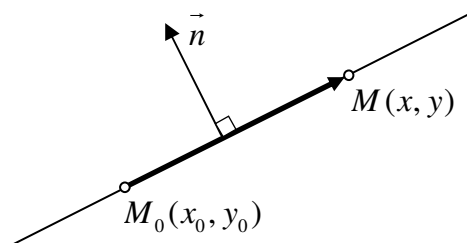


Рис. 1

Для того, щоб записати рівняння прямої, треба задати довільну точку $M(x, y)$. Для чого вона потрібна?

Ми знаємо, що пряма нескінченна і якраз довільна точка $M(x, y)$, (яка "бігає" по прямій), надасть нам інформацію про всю цю пряму.

Введемо вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$. Вектори \vec{n} і $\overline{M_0M}$ перпендикулярні, тоді їх скалярний добуток дорівнює нулю (формула (1)).

$$\begin{aligned} A(x - x_0) + B(y - y_0) &= 0 \\ Ax + By + C &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

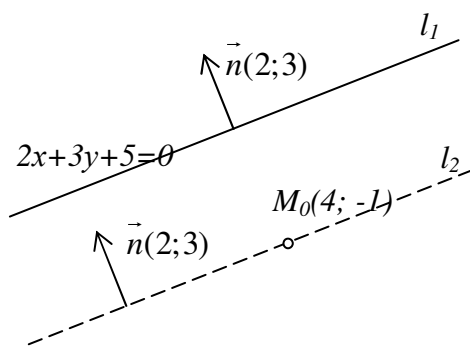
де $C = -Ax_0 - By_0$

Рівняння (4) – загальне рівняння прямої на площині.

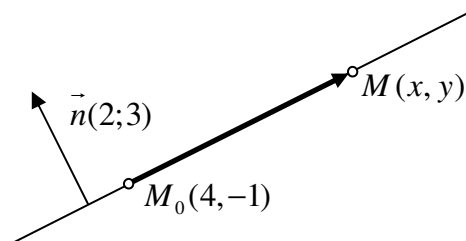
Якщо нам зададуть рівняння прямої в вигляді (4), то ми завжди можемо записати координати вектора $\vec{n} = (A, B)$. Вектор \vec{n} називають нормальним вектором.

Приклад 1. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(4; -1)$, паралельно до прямої $2x + 3y + 5 = 0$.

Зробимо малюнок.



З рівняння прямої $l_1 : 2x + 3y + 5 = 0$ знайдемо вектор нормалі $\vec{n}(2; 3)$. Вектор нормалі можна паралельно перенести в будь-яке місце на площині. Перенесемо його до прямої l_2 . Маємо малюнок, аналогічний рис.1.



$$\overline{M_0M} = (x - 4; y + 1)$$

$$\vec{n} \perp \overline{M_0M} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$$

$$\Rightarrow 2(x - 4) + 3(y + 1) = 0 \quad \text{рівняння прямої } l_2$$

$$2x + 3y - 5 = 0$$

При розв'язанні задач бажано не підставляти задані координати точки і вектора нормалі в готове рівняння (4), а піти по шляху виводу цього рівняння.

2. Нехай пряма задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ та напрямним вектором $\vec{S} = (m, n)$.

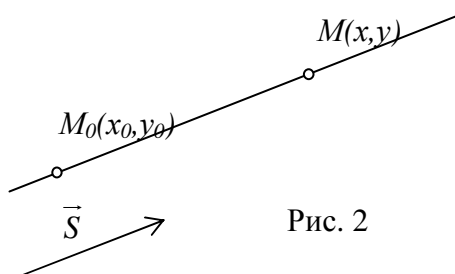


Рис. 2

Знаходимо довільну точку $M(x, y)$, (без неї ніяк) і введемо вектор.

$$\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$$

Вектори \vec{S} і $\overline{M_0M}$ колінеарні.

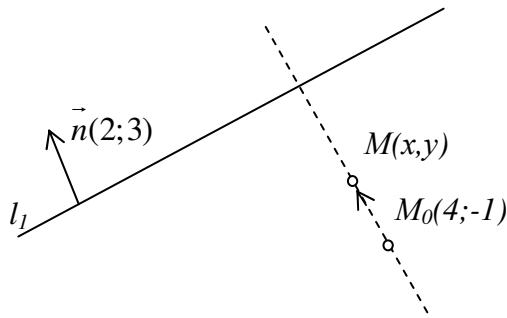
Використаємо умову колінеарності двох векторів (формула (2)).

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad (5)$$

Рівняння (5) називається канонічним рівнянням прямої.

Приклад 2. Записати рівняння прямої l_2 , яка проходить через точку $M_0(4; -1)$ перпендикулярно до прямої $l_1: 2x + 3y + 5 = 0$.

Зробимо малюнок:



З рівняння прямої l_1 знайдемо вектор нормалі $\vec{n}(2;3)$. На прямій l_2 поставимо точку $M(x,y)$ $\overrightarrow{M_0M} = (x-4, y+1)$. $\overrightarrow{M_0M}$ і \vec{n} колінеарні,

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{3} \quad \text{канонічне рівняння}$$

$$3(x-4) = 2(y+1)$$

$$3x - 12 - 2y = 0 \quad \text{загальне рівняння } l_2$$

$$3x - 2y - 14 = 0$$

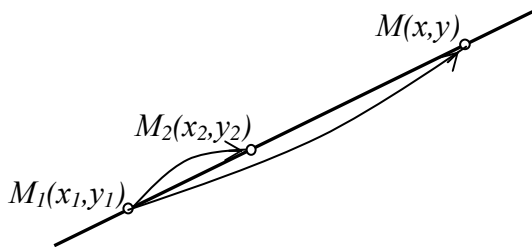
3. Розглянемо рівняння (5) і прирівняємо їх до t (t -параметр):

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = t \\ \frac{y-y_0}{n} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases} \quad (6)$$

Рівняння (6) – параметричне рівняння прямої

4. Нехай пряма задана двома точками $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$

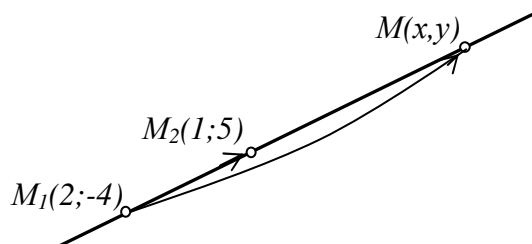


Задаємо довільну точку $M(x; y)$ і побудуємо два вектори $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_1, y-y_1)$ і $\overrightarrow{M_0M} = (x_2-x_1, y_2-y_1)$. Ці вектори колінеарні, тому

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad (7)$$

Рівняння (7) – рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

Приклад 2. Записати рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(2; -4)$, $M_2(1; 5)$,



$$\overrightarrow{M_1M} = (x-2; y+4);$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1-2; 5-(-4)) = (-1; 9);$$

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{9}.$$

5. Рівняння прямої у відрізках.

Розглянемо загальне рівняння прямої (4):

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow Ax + By = -C$$

Поділимо ліву і праву частину рівняння на $-C$.

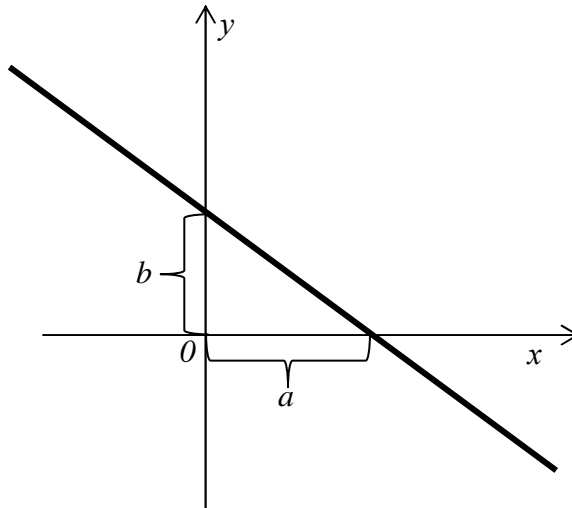
$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1 \quad \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

Позначимо $-\frac{C}{A} = a$ $-\frac{C}{B} = b$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (8)$$

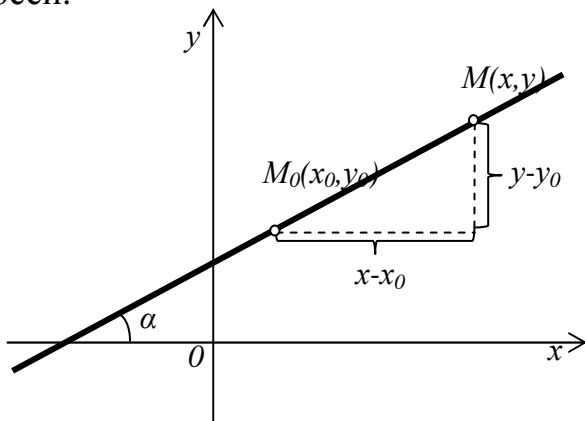
Рівняння (8) – рівняння прямої у відрізках.

a, b – величини відрізків, які відтинаються прямою від координатних осей.



6. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

a, b – величини відрізків, які відтинаються прямою від координатних осей.



$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \operatorname{tg} \alpha$$

Позначимо $K = \operatorname{tg} \alpha$
тоді $y - y_0 = K(x - x_0)$ (9)

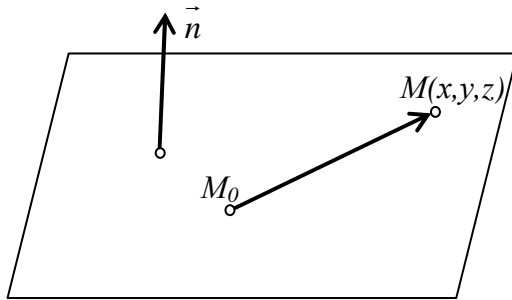
Рівняння (9) – рівняння прямої, яка проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт.

Рівняння (9) можна записати в вигляді

$$y = Kx + b \quad (10)$$

3. Рівняння площини.

1. Нехай площина задана точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і нормальним вектором $\vec{n} = (A, B, C)$



Введемо точку $M(x, y, z)$

Знайдемо вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$$\vec{n} \perp \overline{M_0M} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$$

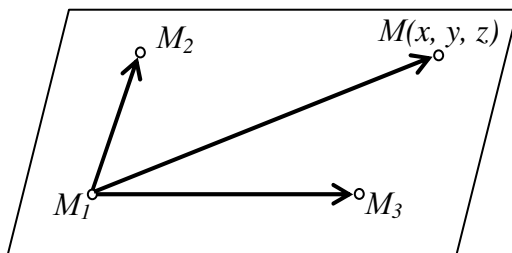
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Розкриємо дужки і приведемо подібні, отримаємо

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (11)$$

Рівняння (11) – це загальне рівняння площини.

2. Нехай площина задана трьома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.



Вводимо точку $M(x, y, z)$ і маємо три вектори:

$$\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$$

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

$$\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$$

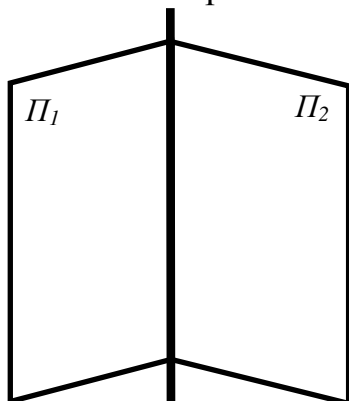
Ці вектори компланарні, тому (ф.3)

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

Обчисливши цей визначник, прийдемо до рівняння (11).

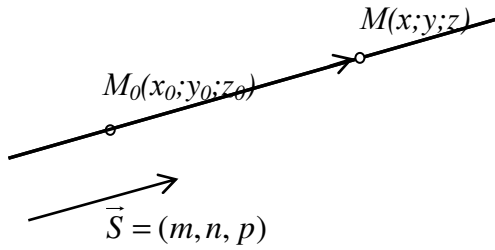
4. Рівняння прямої в просторі.

1. Загальне рівняння прямої, як лінія перетину двох площин



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\Pi_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\Pi_2) \end{cases} \quad (13)$$

2) Канонічне рівняння прямої в просторі:

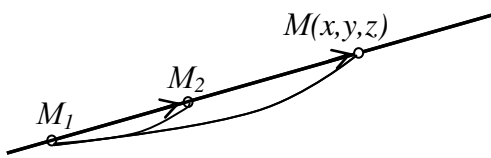


$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \quad (14)$$

3) Параметричне рівняння прямої в просторі:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad \begin{array}{l} t - \text{параметр} \\ t \in (-\infty; \infty) \end{array} \quad (15)$$

4) Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$

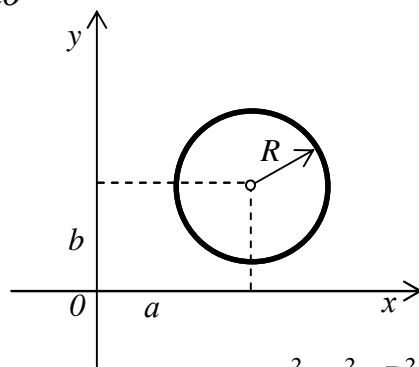


$\overline{M_1M}$ колінеарний $\overline{M_1M_2}$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (16)$$

5. Криві 2-го порядку

1) Коло

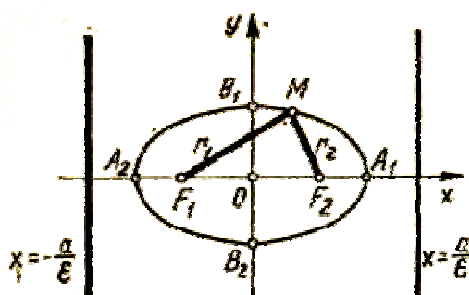


Колом називають множину точок, відстані яких від заданої точки (центра кола) є величина стала.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$x^2 + y^2 = R^2$ – коло з центром в точці (0; 0)

2) Еліпс



Еліпсом називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини, які називаються фокусами, є величина стала і більша від відстані між фокусами

Канонічне рівняння еліпса:

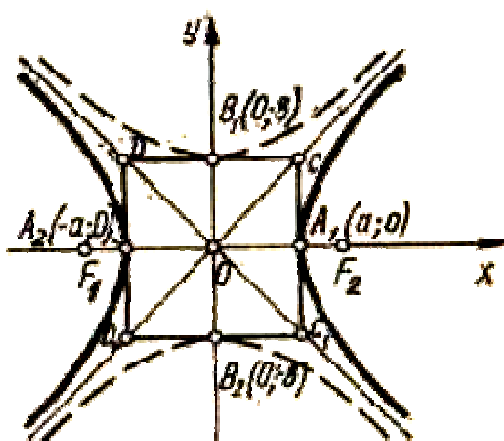
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (17)$$

$F_1(-C;0)$, $F_2(C;0)$ – координати фокусів;

$$a^2 - c^2 = b^2$$

3) Гіпербола

Гіперболою називається множина всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала і менша відстані між фокусами.



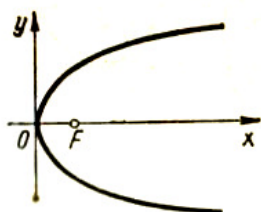
Канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (18)$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

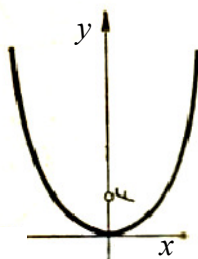
4) Парабола

Параболою називається множина всіх точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від даної точки, яка називається фокусом, і від даної прямої, яка називається директрисою і не проходить через фокус.



Канонічне рівняння параболи:

$$y^2 = 2px \quad (19)$$



$$y^2 = 2py$$

Загальні рівняння:

Коло $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Еліпс $ax^2+by^2+cx^2+dy+f=0$

Гіпербола $ax^2-by^2+cx+dy+f=0$

Парабола $ay^2+by+c=x$ або $ax^2+bx^2+c=y$

Приклад 2. Задане рівняння еліпса $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$. Знайти його центр і півосі.

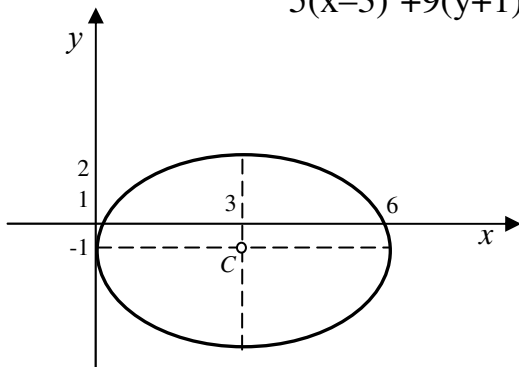
Розв'язання: Виділимо повні квадрати відносно x та y :

$$5x^2-30x+9y^2+18y+9=0;$$

$$5(x^2-6x+9-9)+9(y^2+2y+1)=0;$$

$$5(x-3)^2-45+9(y+1)^2=0;$$

$$5(x-3)^2+9(y+1)^2=45; /45$$

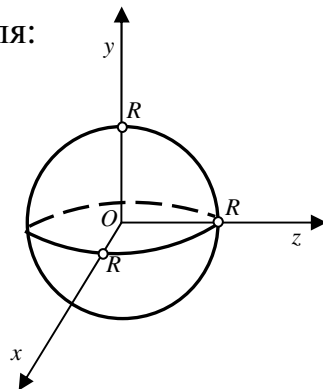


$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1 - \text{канонічне рівняння еліпса}$$

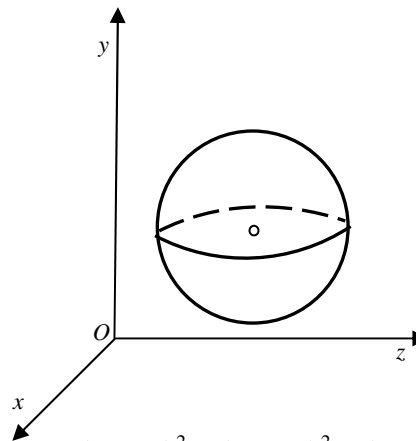
центр $C(3; -1)$, півосі $a=3, b=\sqrt{5}$

До **поверхонь 2-го порядку** належать: куля, еліпсоїд, циліндри 2-го порядку, конуси 2-го порядку, однопорожнинний гіперболоїд, двопорожнинний гіперболоїд, еліптичний параболоїд, гіперболічний параболоїд.

1) Куля:

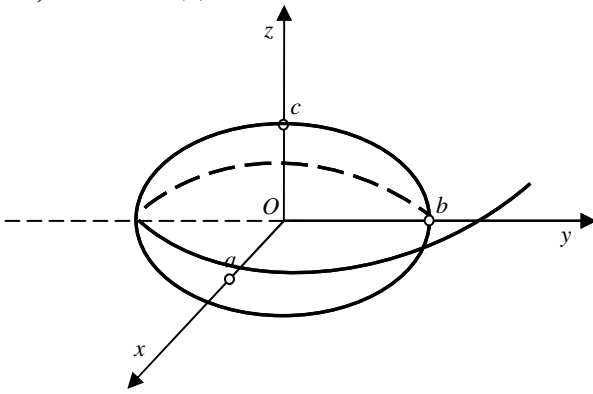


$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

2) Еліпсоїд:

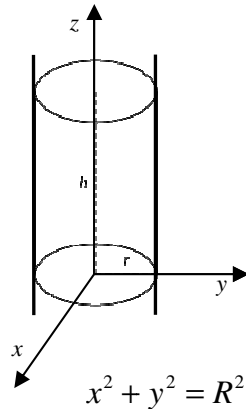


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

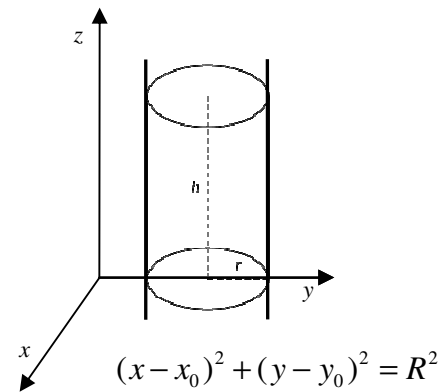
або

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

3) Круговий циліндр:



$$x^2 + y^2 = R^2$$

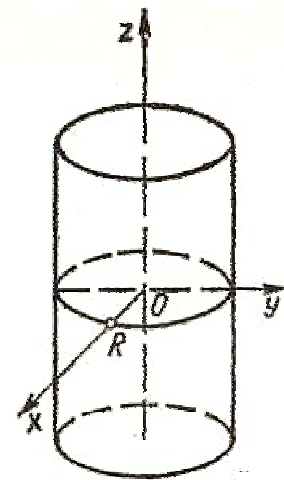


$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

Круговий циліндр з твірною $\parallel OC$ і OZ

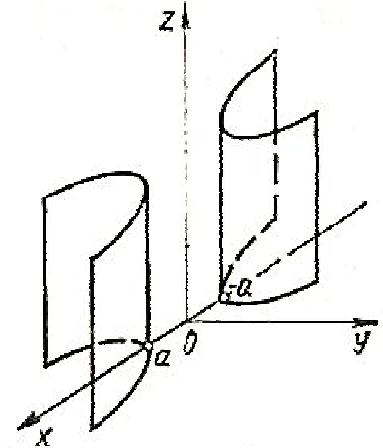
4) Еліптичний циліндр з твірною $\parallel OZ$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



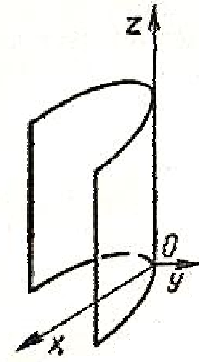
5) Гіперболічний циліндр з твірною $\parallel OZ$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



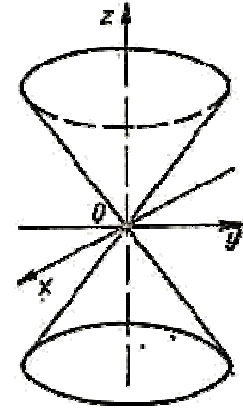
6) Параболічний циліндр:

$$y^2 = 2px$$



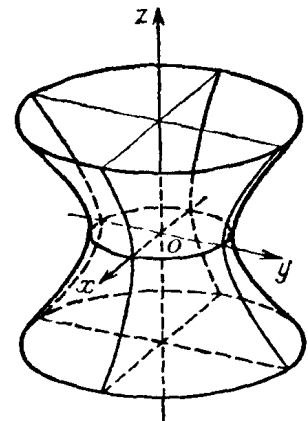
7) Конус 2-го порядку:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



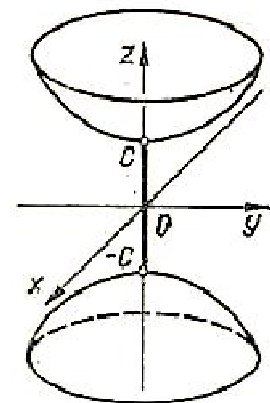
8) Однопорожнинний гіперболоїд з віссю OZ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



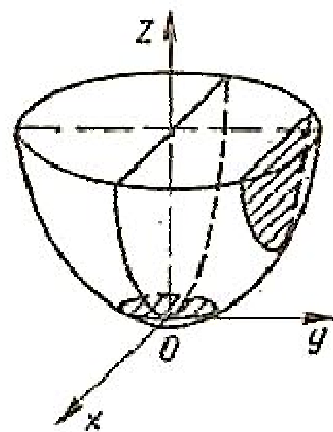
9) Двопорожнинний гіперболоїд з віссю OZ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



10) Еліптичний параболоїд з віссю OZ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$



11) Гіперболічний параболоїд з віссю OZ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

