Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної

Методичні вказівки до вивчення теоретичного курсу
для студентів першого курсу технічних факультетів

Київ 2013

Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної.: Методичні вказівки до вивчення теоретичного курсу для студентів першого курсу технічних факультетів / Уклад.: О.О.Дем'яненко, Л.А.Репета. – К.: НТУУ «КПІ», 2013.- 92 с.

Гриф надано Методичною радою ФМФ НТУУ «КПІ»
(*Протокол № 5 від 15. 10. 2013*)

Навчальне видання

Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної

Методичні вказівки до вивчення теоретичного курсу
для студентів першого курсу технічних факультетів

Укладачі: *Дем'яненко Ольга Олегівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Репета Леся Анатоліївна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний
редактор *Ю. П. Буценко*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент *Г. М. Кулик*, канд. фіз.-мат. наук, доцент.

За редакцією укладачів
Електронна версія

Київ 2013

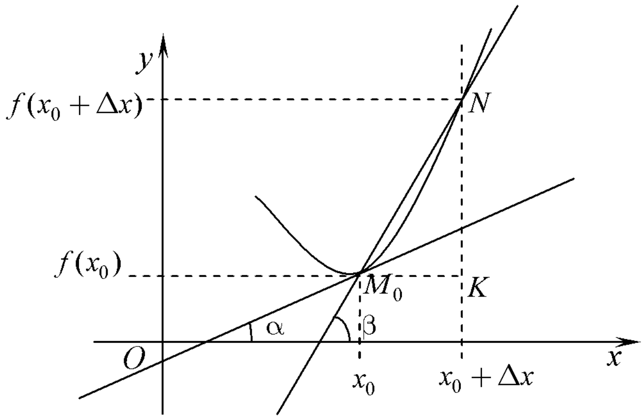
Диференціальне числення функцій однієї змінної

§ 1. Задачі, що приводять до поняття похідної

Задача про дотичну до кривої

Нехай рівняння $y = f(x)$ задає деяку криву.

Січною до кривої називають будь-яку пряму, що сполучає дві довільні точки кривої. *Дотичною* до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, f(x_0))$ називають пряму, яка є граничним положенням січної за умови, що її друга точка $M(x, f(x))$ рухається вздовж кривої до точки $M(x_0, f(x_0))$. Точку $M(x_0, f(x_0))$ називають *точкою дотику*. Виведемо рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$.



Нехай точки $M_0(x_0, f(x_0))$ і $N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ належать кривій. Проведемо через них січну M_0N. Її рівняння

$$Y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}(X - x_0),$$

де $X, Y -$ змінні координати точки січної, а кутовий коефіцієнт дорівнює $k_s = \operatorname{tg}\beta = \dfrac{NK}{KM_0} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Якщо точка $N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ необмежено прямуватиме до точки $M_0(x_0, f(x_0))$ вздовж кривої $y = f(x)$ тобто $\Delta x \to 0$, то кут β прямуватиме до кута α і $\operatorname{tg}\beta \to \operatorname{tg}\alpha$. Це означає, що кутовий коефіцієнт січної прямуватиме до кутового коефіцієнта дотичної $k_s \to k$. Звідси

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Задачу знаходження рівняння дотичної зведено до задачі знаходження останньої границі.

Задача про миттєву швидкість

Нехай матеріальна точка рухається нерівномірно прямолінійно за законом $S = S(t)$. Шлях ΔS, який вона подолає за інтервал часу $[t_0, t_0 + \Delta t]$ визначається так: $\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$. Середньою швидкістю руху за інтервал часу Δt називають відношення

$$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}.$$

Миттєвою швидкістю руху у момент t_0 називають границю цього відношення, якщо $\Delta t \to 0$, тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}.$$

Отже, задачу знаходження миттєвої швидкості зведено до задачі знаходження останньої границі.

До знаходження подібних границь приводять задачі про швидкість хімічної реакції, швидкість зростання популяції, про витрати виробництва і виручку, тощо.

§ 2. Поняття похідної функції у точці

Нехай на деякому числовому проміжку $X = (a, b)$ (скінченному або нескінченному) визначено функцію $y = f(x)$. Нехай точка $x_0 \in X$. Надамо їй довільного приросту $\Delta x \neq 0$ такого, щоб $x_0 + \Delta x \in X$. При цьому функція матиме приріст $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля і позначають

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Похідну позначають ще іншими символами: $y'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$.

У випадку, коли границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ не існує, вважають що функція у точці x_0 не має похідної.

Якщо у кожній точці числового проміжку $X = (a, b)$ функція має похідну, то її позначають $f'(x)$ або y' і вона є функцією від x. При кожному фіксованому значенні x_0 похідна дорівнює деякому числу.

З попередньо розглянутих задач випливає геометричний і фізичний зміст похідної.

З фізичної точки зору, якщо функція $S = S(t)$ задає закон руху матеріальної точки, то похідна $S'(t_0)$ є миттєвою швидкістю в момент часу t_0.

З геометричної точки зору границя відношення

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = \lim_{N \to M_0} \operatorname{tg}\beta$$

визначає кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $(x_0, f(x_0))$. Скористаємось рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Тоді рівняння дотичної матиме вигляд

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \text{ або } y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0),$$

де $y_0 = f(x_0)$, $y'(x_0) = f'(x_0)$, а (x_0, y_0) – координати точки дотику.

Пряму, перпендикулярну до дотичної у точці дотику називають нормаллю до кривої $y = f(x)$. Рівняння нормалі

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Приклад 1. Знайдіть похідну сталої функції $y = c$.

■ Надамо довільному значенню x приріст $\Delta x \neq 0$. Тоді $y(x + \Delta x) = c$. За означенням $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{c - c}{\Delta x} = 0$. Отже, $(c)' = 0$. ■

Приклад 2. Знайдіть похідну функції $y = \sin x$.

■ Надамо довільному значенню x приріст $\Delta x \neq 0$. Тоді $y(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$. За означенням

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x.$$

Отже, $\sin' x = \cos x$. ■

Приклад 3. Знайдіть похідну функції $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$.

■ Надамо довільному значенню x приріст $\Delta x \neq 0$. Тоді $y(x + \Delta x) = a^{x + \Delta x}$. За означенням

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Отже, $(a^x)' = a^x \ln a$. ■

Функцію, яка має у точці x_0 похідну, називають *диференційовною* у цій точці. Якщо функція диференційовна у кожній точці числового проміжку *X*, то вона диференційовна на ньому. Процес знаходження похідної називають диференціюванням.

§ 3. Односторонні та нескінченні похідні

Якщо існують границі

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \text{ і } \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

то їх називають лівою і правою похідними функції $y=f(x)$ у точці x_0 і позначають $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ і $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Якщо існують ліва і права похідні функції $y=f(x)$ у точці x_0, рівні між собою, то існує похідна $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

Приклад 4. З'ясуємо, чи існує похідна функції $y=|x|$ у точці $x=0$.

■ Знайдемо ліву і праву похідні.

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|0+\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|0+\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Оскільки $f'_-(0)\neq f'_+(0)$, то функція $y=|x|$ не має похідної у точці $x=0$. ■

Якщо для деякого значення $x_0\in X$ справджується одна з умов

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=+\infty \text{ або } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\infty,$$

то кажуть, що функція $f(x)$ у точці x_0 має нескінченну додатну або від'ємну похідну. Геометрично це означає, що у точці x_0 графік функції $y=f(x)$ має вертикальну дотичну, рівняння якої $x=x_0$.

Приклад 5. Знайдіть похідну функції $y=\sqrt[3]{x}$ у точці $x=0$.

■ $$y'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}=+\infty.$$

Отже, у точці $x=0$ функція $y=\sqrt[3]{x}$ має нескінченну додатну похідну. ■

§ 4. Зв'язок між диференційовністю та неперервністю функції у точці

Теорема. Якщо функція $y=f(x)$ має у точці x_0 похідну, то вона неперервна у цій точці.

Доведення. Нехай виконується умова теореми, тобто

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Тоді за критерієм існування границі функції у точці:

$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала, коли $\Delta x \to 0$.

Помножимо обидві частини рівності на Δx і перейдемо до границі, коли $\Delta x \to 0$.

Маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} f'(x_0)\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x)\Delta x = 0.$$

Оскільки нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, то функція є неперервною у точці x_0.

Теорему доведено.

Зауваження. Обернене твердження не вірне, тобто неперервна у точці функція не завжди є диференційовною (наприклад, $y = |x|$ у точці $x = 0$).

§5. Правила диференціювання

Теорема. Якщо функції $u(x), v(x)$ мають похідні у точці x, то функції $u(x) \pm v(x), u(x) \cdot v(x), cu(x), \frac{u(x)}{v(x)}$ (за умови, що $v(x) \neq 0$) також мають у ній похідні і справджуються рівності:

1) $\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$;

2) $\left(u(x) \cdot v(x)\right)' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$;

3) $\left(cu(x)\right)' = cu'(x)$;

4) $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$.

Доведення. Надамо змінній x деякого приросту Δx.

1) Розглянемо границю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) - u(x)) \pm (v(x+\Delta x) - v(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x).$$

Тобто

$$\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x).$$

2) Розглянемо границю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x+\Delta x)-u(x))v(x+\Delta x)+u(x)(v(x+\Delta x)-v(x))}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x+\Delta x)-u(x))v(x+\Delta x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)(v(x+\Delta x)-v(x))}{\Delta x}$$

У силу неперервності функцій $u(x)$, $v(x)$ маємо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)=u(x)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)$.

Тоді

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x+\Delta x)-u(x))v(x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=$$

$$=u'(x)\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=u'(x)v(x).$$

Аналогічно $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x)(v(x+\Delta x)-v(x))}{\Delta x}=u(x)v'(x)$. Остаточно маємо

$$\left(u(x)\cdot v(x)\right)'=u'(x)\cdot v(x)+v'(x)\cdot u(x).$$

3) Формула $\left(cu(x)\right)'=cu'(x)$ є наслідком з 2), якщо вважати $c=v(x)$.

4)) Розглянемо границю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)v(x)}{\Delta x}-\dfrac{u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)}{\Delta x}v(x)-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x+\Delta x)}{\Delta x}u(x)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)v(x)}$$

Ураховуючи неперервність функцій $u(x)$, $v(x)$ маємо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)$.

Тоді

$$\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)}{\Delta x}v(x)-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x+\Delta x)}{\Delta x}u(x)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)v(x)}=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}.$$

Тобто $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)=\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$.

Теорему доведено.

Таблиця похідних елементарних функцій

1. $(\text{const})'=0$
2. $(x^n)'=nx^{n-1}$
3. $(\sin x)'=\cos x$
4. $(\cos x)'=-\sin x$
5. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
6. $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
7. $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
8. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
9. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(e^x)'=e^x$
12. $(a^x)'=a^x\ln a$
13. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
14. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
15. $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$
16. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$
17. $(\operatorname{cth} x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
18. $(\operatorname{th} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

§6. Диференціювання складеної та оберненої функцій

Теорема *(про диференціювання складеної функції)* **.** Нехай функція $u=u(x)$ диференційовна у точці x_0, а функція $y=f(u)$ диференційовна у точці $u_0=u(x_0)$. Тоді складена функція $y=f(u(x))$ диференційовна у точці x_0 і її похідну обчислюють за формулою

$$y'(x_0)=f'_u(u)u'_x(x_0).$$

На словах кажуть: похідна від складеної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом u на похідну внутрішньої функції за незалежним аргументом x.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Функція $u=u(x)$ диференційовна у точці x_0. Надамо змінній x_0 приріст $\Delta x\neq 0$. Тоді функція $u=u(x)$ дістане приріст $\Delta u=u(x_0+\Delta x)-u(x_0)$, а функція $y=f(u)$ дістане приріст $\Delta y=f(u_0+\Delta u)-f(u_0)$. Розглянемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ за умови $\Delta u\neq 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\ .$$

Перейдемо до границі
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f_u'(u)u_x'(x).$$
Зауваження. При доведенні враховано, що $u=u(x)$ диференційовна у точці x, а отже, неперервна. Це означає, що нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції і в границі Δx можна замінити на Δu, коли $\Delta x\to 0$.

Теорему доведено.

Теорема *(про диференціювання оберненої функції)*. Нехай функція $x=g(y)$ обернена до функції $y=f(x)$ і функції $f(x), g(y)$ – диференційовні у точках x_0 і $f(x_0)=y_0$ відповідно. Тоді $g'(y)=x_y'=\dfrac{1}{f'(x)}$.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Тоді функція $x=g(y)$ є складеною функцією $x=g(y)=g[f(x)]$. За правилом диференціювання складеної функції маємо
$$1=g'(y)f'(x)\Rightarrow g'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$
Теорему доведено.

Приклад 6. Знайдіть похідні функцій: 1) $y=\cos^2(3-8x)$,

2) $y=\dfrac{x}{\ln 3x}+e^{5x+2}\operatorname{tg}(2x+3x^2)+10$.

■1) Застосуємо правило обчислення похідної складеної функції
$$y'=(\cos^2(3-8x))'=2\cos(3-8x)\sin(3-8x)(-8)=-8\sin 2(3-8x).$$
2) Застосуємо правило обчислення похідної суми, добутку, частки функцій та похідної складеної функції.
$$y'=\left(\frac{x}{\ln 3x}+e^{5x+2}\operatorname{tg}(2x+3x^2)+10\right)'=\left(\frac{x}{\ln 3x}\right)'+\left(e^{5x+2}\operatorname{tg}(2x+3x^2)\right)'+0=$$
$$=\frac{\ln 3x-\frac{x}{3x}3}{(\ln 3x)^2}+5e^{5x+2}\operatorname{tg}(2x+3x^2)+e^{5x+2}\frac{1}{\cos^2((2x+3x^2))}(2+6x)=\frac{\ln 3x-1}{(\ln 3x)^2}+$$
$$+5e^{5x+2}\operatorname{tg}(2x+3x^2)+2\frac{(1+3x)e^{5x+2}}{\cos^2((2x+3x^2))}.■$$

Приклад 7. Знайдіть похідну функції $y=\operatorname{arctg}x$.

■ Функція $y=\operatorname{arctg}x$ монотонна і неперервна на усій числовій осі і є оберненою до функції $x=\operatorname{tg}y,\ y\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, тому

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Отже, $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. ■

§7. Диференціювання функцій, заданих неявно та параметрично. Логарифмічне диференціювання

Якщо функцію $y = f(x)$, похідна якої існує у кожній точці певного інтервалу, задано неявно рівністю $F(x,y)=0$, тоді $y'(x)$ можна знайти з рівняння $\dfrac{d}{dx}F(x,y)=0$ (при цьому похідну шукають, використовуючи правило знаходження похідної складеної функції).

Приклад 8. Знайдіть похідну функції $xy^3 - \sin(x+y) = 0$.

■ Функцію $y = f(x)$ задано неявно. Продиференціюємо обидві частини рівності, пам'ятаючи, що y є функцією:

$$(xy^3 - \sin(x+y))' = 0 \Rightarrow y^3 + x\cdot 3y^2 y' + \cos(x+y)(1+y') = 0.$$

З останньої рівності виразимо $y' = \dfrac{y^3 + \cos(x+y)}{3xy^2 + \cos(x+y)}$.

У випадках степенево-показникової функції $y(x) = [u(x)]^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$ або громіздких алгебраїчних виразах доцільно застосовувати логарифмічне диференціювання.

Приклад 9. Знайдіть похідну функції $y = x^{2^x}$ $(x > 0)$.

■ Запишемо $y(x) = [u(x)]^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$ і прологарифмуємо ліву і праву частини рівності $\ln|y(x)| = v(x)\ln u(x)$. Одержали неявно задану функцію. Знайдемо її похідну $y'(x)$:

$$\frac{1}{y(x)}y'(x) = [v(x)\ln u(x)]', \text{ або } y'(x) = y(x)[v(x)\ln u(x)]'.$$

У нашому випадку $\ln|y(x)| = 2^x \ln x$. Тоді $\dfrac{1}{y(x)}y'(x) = 2^x \ln 2\cdot \ln x + 2^x \dfrac{1}{x}$.

Отже $y'(x) = x^{2^x} 2^x(\ln 2 \cdot \ln x + \dfrac{1}{x})$. ■

Приклад 10. Знайдіть похідну функції $y = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{x^4}\sin x}$, $(x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{N})$.

■ Прологарифмуємо функцію: $\ln|f(x)| = z = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{4}{3}\ln|x| - \ln|\sin x|$,

тоді $\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{2(1+x^2)} - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}$.

З іншої сторони $\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln|y(x)|) = \frac{1}{y(x)}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y(x)}y'(x)$, звідки

$$y'(x) = y(x)\left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{4}{3x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{x^4}\sin x}\left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{4}{3x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{x^4}\sin x}\left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{4}{3x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right). \blacksquare$$

Розглянемо рівняння $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ де $t \in (\alpha, \beta)$.

Якщо функція $\varphi(t)$ монотонна і неперервна на (α, β), причому $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, то ці рівняння на відрізку $[a, b]$ параметрично визначають функцію $y = f(x), y = \psi(\varphi^{-1}(x))$.

Теорема. Нехай функції $\varphi(t), \psi(t)$ диференційовні на інтервалі (α, β), $\varphi'(t) \neq 0$ для $\forall t \in (\alpha, \beta)$, функція $\varphi(t)$ монотонна і неперервна на (α, β), причому $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$. Тоді функція $y = f(x)$ диференційовна на відрізку $[a, b]$ і

$$y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}.$$

Доведення. За умовою теореми $t = \varphi^{-1}(x)$. За правилом диференціювання складеної функції $\frac{dy}{dx} = (\psi(\varphi^{-1}(x)))' = \psi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Теорему доведено.

Зауваження. Похідна параметрично заданої функції є функція також задана параметрично $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y' = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \end{cases}$ $t \in (\alpha, \beta)$.

Приклад 11. Знайдіть похідну функції $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, t \in (0; \frac{\pi}{2}). \end{cases}$

■ $\varphi(t) = a\cos^3 t \Rightarrow \varphi'(t) = 3a\cos^2 t(-\sin t) = -3\cos^2 t\sin t$,

$\psi(t) = a\sin^3 t \Rightarrow \psi'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$. Тоді похідна

$$y' = -\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t} = -\text{tg}\,t\,. \blacksquare$$

§8. Деякі застосування похідної

Приклад 12. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої, заданої рівняннями:

1) $y = e^{1-x^2}$ у точці $x = 1$;

2) $\begin{cases} x = t^2 - 3t + 4, \\ y = t^2 - t + 1 \end{cases}$ у точці $M(2;1)$;

3) $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ у точці $M(1;-1)$.

■ Запишемо рівняння дотичної і нормалі до графіка функції:

$$y_{дот.} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ і } y_{норм.} = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Для випадку 1) $f'(x) = (e^{1-x^2})' = -2xe^{1-x^2} \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = -2$, $f(x_0) = f(1) = 1$. Тому

$$y_{дот.} = 1 - 2(x-1) \Leftrightarrow y_{дот.} = -2x + 3,\ \ y_{норм.} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow y_{норм.} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Для випадку 2) за умовою $x_0 = 2,\ f(x_0) = 1$. Знайдемо значення параметра t, яке відповідає точці $M(2;1)$.

$$\begin{cases} 2 = t^2 - 3t + 4, \\ 1 = t^2 - t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 3t + 2 = 0, \\ t^2 - t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 1.$$

Знайдемо похідну у точці $M(2;1)$: $y' = \dfrac{(t^2 - t + 1)'}{(t^2 - 3t + 4)'} = \dfrac{2t-1}{2t-3} \Rightarrow y'(1) = -1$. Тоді

$$y_{дот.} = 1 - (x-2) \Leftrightarrow y_{дот.} = -x + 3,\ y_{норм.} = 1 + (x-2) \Rightarrow y_{норм.} = x - 1.$$

Для випадку 3) за умовою $x_0 = 1,\ f(x_0) = -1$. Знайдемо похідну у точці $M(1;-1)$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 2xy^2 + 3y^4) = 0 \Rightarrow 2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x+y}{2xy + 6y^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(M) = -\frac{1-1}{-2-6} = 0\text{. Тоді } y_{дот.} = -1 + 0(x-1) \Rightarrow y_{дот.} = -1,$$

$$y_{норм.} = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow (y_{норм.} - f(x_0))f'(x_0) = -(x - x_0) \Rightarrow 0 = -(x-1)$$

або $x = 1$ – рівняння нормалі. ■

Приклад 13. Тіло, маса якого $m=3$ кг, рухається прямолінійно за законом $S(t)=t^2+4t+1$. Знайти його кінетичну енергію через 4 с після початку руху.
■ Кінетичну енергію $E(t)$ тіла маси m, що рухається зі швидкістю $v(t)$ знаходять за формулою $E(t)=\dfrac{mv^2(t)}{2}$. Миттєва швидкість у момент часу t дорівнює $v(t)=S'(t)$. За умовою $S'(t)=2t+4$. Через 4с після початку руху швидкість $v(4)=2\cdot 4+4=12$ м/с.

Тоді шукана кінетична енергія $E=\dfrac{2\cdot 12^2}{2}=144$ Дж. ■

§9. Диференціал функції

Нехай функцію $f(x)$ визначено у точці x і деякому її околі. Нехай функція $f(x)$ диференційовна у точці x. Тоді існує границя

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

З критерію існування границі функції у точці випливає

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала, коли $\Delta x\to 0$.
Помножимо обидві частини рівності на Δx

$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x \Leftrightarrow \Delta f(x)=f'(x)\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0,$$

де $o(\Delta x)$ – нескінченно мала вищого порядку порівняно з Δx.

Якщо, навпаки, у точці x для приросту функції виконується рівність

$$\Delta f(x)=A\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0,$$

де A – стала, то функція $f(x)$ диференційовна у точці x і $A=f'(x)$.

Дійсно,

$$\Delta f(x)=A\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0 \Rightarrow \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x},\ \Delta x\to 0.$$

Перейдемо в останній рівності до границі

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A.$$

Головну, лінійну відносно Δx частину приросту функції $f(x)$ у точці x називають *диференціалом функції* і позначають

$$dy=df(x)=A\cdot\Delta x \text{ або } df(x)=f'(x)\Delta x.$$

Якщо $f(x)=x$, то за означенням, $df(x)=dx=1\cdot\Delta x=\Delta x$.
Тому $dy=f'(x)dx$.

Приклад 14. Знайдіть диференціал функції $y = x^2$.

■ За означенням диференціала $dy = 2xdx$. ■

Розглянемо приріст функції

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x).$$

При достатньо малих Δx функція $\alpha(\Delta x)$ є нескінченно малою. Якщо знехтувати нею, то справджується наближена рівність

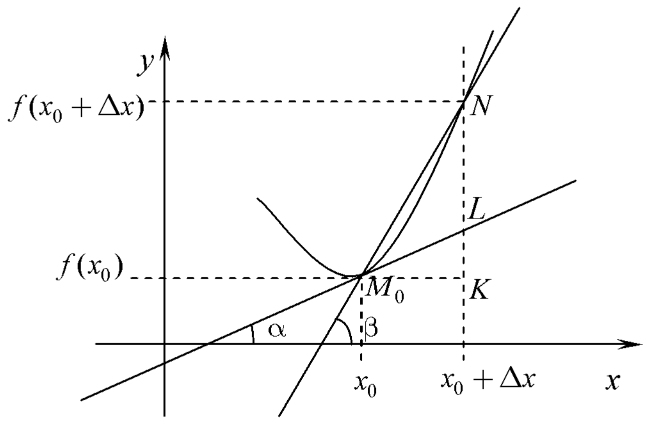
$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \Leftrightarrow f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx,$$

яку називають *формулою наближених обчислень.*

Приклад 15. Знайти наближене значення функції $y = \sqrt{x+1}$ у точці 3,06.

■ З умови задачі $x + \Delta x = 3{,}06$, тому виберемо $x = 3, \Delta x = 0{,}06, f(3) = 2,$ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(3) = \dfrac{1}{4}$. Скориставшись формулою наближених обчислень маємо: $\sqrt{3{,}06+1} \approx 2 + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{6}{100} = 2{,}015$. ■

З'ясуємо геометричний зміст диференціала.



Нехай функція $y = f(x)$ має у точці x_0 похідну $y' = f'(x_0)$. Приріст незалежної змінної $\Delta x = KM_0$, приріст функції $\Delta f(x_0) = NK$, а відрізок $LK = KM_0 \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x$. З урахуванням геометричного змісту похідної $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ маємо $LK = f'(x_0) \cdot \Delta x = df(x_0)$.

Тобто, з геометричної точки зору, диференціал функції є приростом ординати точки, що рухається вздовж дотичної до графіка функції, коли точка M рухається вздовж кривої. Це означає, що при достатньо малих приростах аргументу функція поводить себе як лінійна.

Нехай функції $u(x), v(x)$ – диференційовні. З означення диференціала та правил диференціювання випливають наступні властивості диференціала.

1. $d(cu(x)) = cd(u(x))$, де $c = const$;

2. $d(u(x) \pm v(x)) = d(u(x)) \pm d(v(x))$;

3. $d(u(x)\cdot v(x)) = v(x)d(u(x)) + u(x)d(v(x))$;

4. $d(\frac{u(x)}{v(x)}) = \frac{v(x)d(u(x)) - u(x)d(v(x))}{v^2(x)}$, $v(x) \neq 0$.

Доведемо, наприклад, рівність 3.

■ Нехай $y = uv$. Тоді

$dy = d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = u'vdx + v'udx = vu'dx + uv'dx = vdu + udv$.■

Теорема (про інваріантність форми диференціала). Зовнішній вигляд диференціала функції $dy = f'(x)dx$ зберігається незалежно від того, чи x є функцією чи незалежною змінною.

Доведення. Розглянемо складену функцію $y = f(\varphi(x))$. Позначимо $u = \varphi(x)$, $y = f(u)$, причому функції $\varphi(x), f(u)$ – диференційовні. За правилом диференціювання складеної функції і означенням диференціала

$$dy = f'_x(\varphi(x))dx = f'_u(u)u'_x dx = f'(u)du,$$

де $u = \varphi(x)$. Тобто форма диференціала залишилась незмінною.

Теорему доведено.

§10. Похідні та диференціали вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на деякому числовому проміжку X. Якщо її похідна $f'(x)$ також диференційовна на цьому проміжку, то від неї можна знайти похідну, яку називають другою похідною (похідною другого порядку функції $y = f(x)$) і позначають

$$(f'(x)) = f''(x) = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Аналогічно, якщо друга похідна диференційовна на X, то можна знайти третю похідну $f'''(x) = (f''(x))'$ і так далі.

Взагалі, *похідною n–го порядку* функції $y = f(x)$ називають першу похідну від (n-1) похідної цієї функції:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Функцію, що має похідні до n–го порядку включно, називають n разів диференційовною.

Для n разів диференційованої на деякому числовому проміжку X функції $f(x)$ існує її диференціал $dy = f'(x)dx$, який називають *першим диференціалом* або *диференціалом першого порядку* функції $f(x)$. Приріст аргументу $dx = \Delta x$ є сталою величиною, а сам диференціал dy є функцією змінної x. Диференціал цієї функції називають *диференціалом другого порядку* функції $f(x)$ або *другим диференціалом* і позначають $d^2y = d(dy)$.

Одержимо формулу для знаходження другого диференціала. За означенням

$$d^2y = d(f'(x)dx) = f''(x)dx \cdot dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2.$$

Зауваження. Тут враховано, що $dx = \Delta x$ є сталою величиною, отже, $d(dx) = 0$.

Аналогічно можна означити диференціал третього порядку і вище. Загалом, диференціалом *n–го порядку* функції $y = f(x)$ називають диференціал першого порядку від диференціала (n-1) порядку

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = d(d^{n-1}(f(x))) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

На відміну від диференціала першого порядку диференціали вищих порядків не зберігають властивість інваріантності форми.

Дійсно, якщо $y = f(x(t))$, то

$$d^2y = d(f'(x(t))dx) = d(f'(x))d(x(t)) + f'(x)d(d(x(t))) = f''(x)d(x(t)) \cdot d(x(t)) +$$
$$+ f'(x)d^2(x(t)) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Приклад 16. Знайдіть похідну n–го порядку функцій

1) $y = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

■ Знайдемо кілька похідних заданих функцій і встановимо для них загальну закономірність.

1) $y = \dfrac{1}{x},\ y' = -\dfrac{1}{x^2},\ y'' = -1\cdot(-2)\dfrac{1}{x^3},\ y''' = -1\cdot(-2)(-3)\dfrac{1}{x^4},\ldots$

За індукцією $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

2) $y = \sin x,\ y' = \cos x = \sin(x + \dfrac{\pi}{2}),\ y'' = -\sin x = \sin(x + \dfrac{2\pi}{2}),\ y''' = -\cos x =$

$= \sin(x + \dfrac{3\pi}{2}), y^{IV} = y^{(4)} = \sin x = \sin(x + \dfrac{4\pi}{2})$. За індукцією $y^{(n)} = \sin(x + \dfrac{n\pi}{2})$.

3) Запишемо функцію у вигляді $y = 1 + \dfrac{2}{x^2-1}$, тоді $y^{(n)} = \left(\dfrac{2}{x^2-1}\right)^{(n)}$.

Представимо $\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$ і отримаємо $y^{(n)} = \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{(n)}$.

Знайдемо послідовно першу, другу і третю похідні функції $y = \dfrac{1}{x-1}$:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = -1\cdot(x-1)^{-2};\quad \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = (-1)\cdot(-2)(x-1)^{-3} = (-1)^2\cdot 2!(x-1)^{-3};$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)''' = (-1)^2 \cdot 2!(-3)(x-1)^{-4} = (-1)^3 \cdot 3!(x-1)^{-4}.$$

За індукцією $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$. Аналогічно $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$.

Таким чином

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right). \blacksquare$$

Якщо функції $u(x), v(x)$ – n разів диференційовні на числовому проміжку X, то функції $c \cdot u(x), u(x) \pm v(x)$, також n разів диференційовні на X і справджуються рівності:

1) $(c \cdot u(x))^{(n)} = c \cdot u^{(n)}(x)$;

2) $\left(u(x) \pm v(x)\right)^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x)$;

3) $\left(u(x)v(x)\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x)$, де $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,

причому $u^{(0)}(x) = u(x), v^{(0)}(x) = v(x)$.

Формулу 3) називають *формулою Лейбніца.*

Приклад 17. Знайдіть четверту похідну функції $y = x^{10}e^{3x}$.

■ За формулою Лейбніца

$$y^{(4)} = \left(x^{10}e^{3x}\right)^{(4)} = C_0^4\left(x^{10}\right)^{(4)} e^{3x} + C_1^4\left(x^{10}\right)''' (e^{3x})' + C_2^4\left(x^{10}\right)'' (e^{3x})'' +$$

$$+ C_3^4\left(x^{10}\right)' (e^{3x})''' + C_3^4 x^{10} (e^{3x})^{(4)}.$$

Обчислимо коефіцієнти $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$:

$$C_0^4 = C_4^4 = \frac{4!}{0!4!} = 1 \ (0! = 1), C_1^4 = \frac{4!}{1!3!} = C_3^4 = 4, C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6.$$

Для степеневої функції

$$\left(x^{10}\right)' = 10x^9, \left(x^{10}\right)'' = 90x^8, \left(x^{10}\right)''' = 720x^7, \left(x^{10}\right)^{(4)} = 5040x^6.$$

Для показникової функції

$$\left(e^{3x}\right)' = 3e^{3x}, \left(e^{3x}\right)'' = 9e^{3x}, \left(e^{3x}\right)''' = 27e^{3x}, \left(e^{3x}\right)^{(4)} = 81e^{3x}.$$

Підставимо знайдені значення у формулу

$$y^{(4)} = \left(x^{10}e^{3x}\right)^{(4)} = 5040x^6e^{3x} + 4 \cdot 720 \cdot 3x^7e^{3x} + 6 \cdot 90 \cdot 9x^8e^{3x} + 4 \cdot 10 \cdot 27x^9e^{3x} +$$

$$+ 81x^{10}e^{3x} = (81x^{10} + 1080x^9 + 4860x^8 + 8640x^7 + 5040x^6)e^{3x}. \blacksquare$$

§10. Похідні та диференціали вищих порядків функцій, заданих неявно та параметрично

Для знаходження другої похідної функції $y = f(x)$, заданої неявно рівнянням $F(x,y)=0$ розв'язують відносно y'' рівняння $\dfrac{d^2F(x,y)}{dx^2}=0$.

Приклад 18. Знайдіть другу похідну функції $x^2+y^2=r^2,\ x\ge 0, y\ge 0$.

■ Диференціюємо рівність

$$x^2+y^2-r^2=0 \Rightarrow 2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}.$$

Останню рівність диференціюємо знову

$$y''=-\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{y-x(-x/y)}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{r^2}{y^3}.■$$

У загальному випадку для знаходження похідної *n*– го порядку рівність $F(x,y)=0$ диференціюють *n* разів і розв'язують її відносно $y^{(n)}$.

Для функції *y*, заданої параметрично рівняннями $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ де $t\in(\alpha,\beta)$, де функція $\varphi(t)$ монотонна і неперервна на (α,β), причому $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$ і функції $\varphi(t),\ \psi(t)$– диференційовні на (α,β), перша похідна

$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y'=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \end{cases}$ $t\in(\alpha,\beta)$ теж параметрично задана функція.

Тоді другу похідну знаходять за формулою

$$y''=\frac{\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3},\ t\in(\alpha,\beta),$$

тобто, першу похідну вважають новою функцією і шукають від неї першу похідну. Похідні вищих порядків знаходять аналогічно.

Приклад 19. Знайдіть другу похідну функції $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t,\ t\in(0,\pi). \end{cases}$

■ За правилом знаходження першої похідної $y'=-\dfrac{b\cos t}{a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$. Тоді $y''_{xt}=-\dfrac{b}{a}\left(-\dfrac{1}{\sin^2 t}\right)$, а друга похідна функції $y''=\dfrac{y''_{xt}}{x'_t}=-\dfrac{\dfrac{b}{a\sin^2 t}}{a\sin t}=-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$. ■

§11. Теореми про середнє значення

Теореми про середнє значення функцій є одними з основних у диференціальному численні.

Теорема Ролля. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови:

1) $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$;
2) $f(x)$ – диференційовна на (a,b);
3) $f(a) = f(b)$.

Тоді існує точка $c \in (a,b)$ така, що $f'(c) = 0$.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Можливі два випадки:
1. В середині інтервалу функція не змінюється. Тоді $f(a) = f(b) = f(x)$ для усіх $x \in (a,b)$ і за точку *c* можна вибрати будь-яку точку цього інтервалу.
2. Функція $f(x)$ не є сталою на інтервалі (a,b). Тоді за другою теоремою Вейєрштрасса неперервна на відрізку функція набуває найбільшого значення M і найменшого значення *m*, причому хоча б одне з цих значень функція досягає в інтервалі (a,b).

Припустимо, що $f(c) = m$, $c \in (a,b)$. Покажемо, що $f'(c) = 0$.

За означенням $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$. Розглянемо відношення $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$. При достатньо малих $\Delta x \neq 0$ точка $c + \Delta x$ належить інтервалу (a,b) і , оскільки, $f(c)$ – найменше значення, то $f(c+\Delta x) - f(c) \geq 0$.

Тому при $\Delta x > 0$ $\quad \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$ і

$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0,$$

а при $\Delta x < 0$ $\quad \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$ і

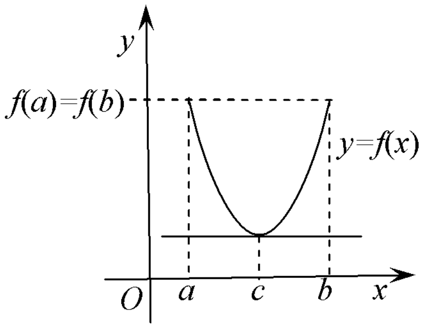
$$f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0.$$

За умовою теореми функція $f(x)$ – диференційовна на (a,b)(а значить і в точці *c*), то $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c) = 0$.

Теорему доведено.

Зауваження. З доведення теореми випливає, що у тих внутрішніх точках інтервалу (a,b), де функція набуває своїх найбільшого та найменшого значень, її похідна дорівнює нулю.

Геометричний зміст теореми Ролля: на лінії $y = f(x)$, де функція $f(x)$ задовольняє умови теореми Ролля, знайдеться точка, у якій дотична паралельна осі абсцис.



На рисунку у точці c функція набуває найменшого значення.

Наслідок. Якщо виконуються перші дві умови теореми Ролля і $f(a) = f(b) = 0$, то між нулями функції знаходиться, принаймні, один нуль похідної.

Приклад 20. Використовуючи теорему Ролля про середнє доведіть, що похідна многочлена $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ має дійсний нуль, який належить інтервалу $(1, 3)$.

■ Знайдемо нулі многочлена: $f(1) = f(3) = 0$. Отже, для $f(x)$ виконуються умови теореми Ролля: функція неперервно диференційовна на $[1, 3)$ і на кінцях сегмента приймає рівні значення. Тоді, згідно з теоремою, існує принаймні одна точка $c \in (1, 3)$: $f'(c) = 0$.

Знайдемо її: $f'(c) = 3c^2 - 12c + 11,\ 3c^2 - 12c + 11 = 0$. Звідси

$$c_{1,2} = \frac{1}{3}(6 \pm \sqrt{36 - 33}) = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2 \pm 0{,}58.$$

Таким чином похідна многочлена $f(x)$ має два дійсних нулі, які належать інтервалу $(1, 3)$. ■

Теорема Лагранжа. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови:

1) $f(x)$ – неперервна на $[a, b]$;
2) $f(x)$ – диференційовна на (a, b).

Тоді існує точка $c \in (a, b)$ така, що $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо допоміжну функцію $F(x) = f(x) - kx$, де $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Функція $F(x)$ задовольняє усі умови теореми Ролля:

1) $F(x)$ – неперервна на $[a, b]$;
2) $F(x)$ – диференційовна на (a, b);
3) $F(a) = F(b)$. Дійсно,

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a},$$
$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}b=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

Тому, за теоремою Ролля існує точка $c\in(a,b)$ така, що $F'(c)=0$.

$F'(x)=f'(x)-k \Rightarrow f'(x)=F'(x)+k$

$f'(c)=0+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Теорему доведено.

Зауваження. 1. Теорема Ролля є частинним випадком теореми Лагранжа. 2. Рівність $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, $c\in(a,b)$ називають формулою Лагранжа. Часто її записують в іншій формі: якщо подати c у вигляді $c=a+\theta(b-a)$, $0<\theta<1$, то

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a).$$

Покладемо $a=x, b=x+\Delta x$, тоді $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$, де $0<\theta<1$. Або , якщо $\xi=x+\theta\Delta x$, то

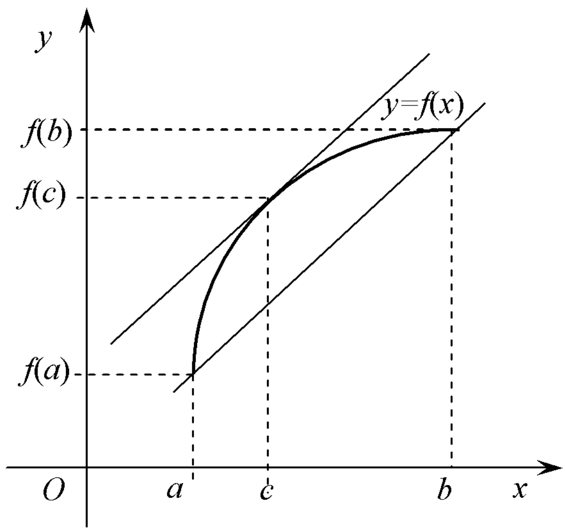
$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x.$$

Останню формулу називають *формулою скінченних приростів.*

Наслідки. 1. Якщо функція $y=f(x)$ задовольняє умови теореми Лагранжа і для усіх $x\in(a,b)$ $f'(x)=0$, то функція $f(x)$ є стала.

2. Якщо функції $f(x), g(x)$ задовольняють умови теореми Лагранжа і $f'(x)-g'(x)=0$ для усіх $x\in(a,b)$, то $f(x)-g(x)=const$.

Геометричний зміст теореми Лагранжа: на лінії $y=f(x)$, де функція $f(x)$ задовольняє умови теореми Лагранжа, знайдеться точка, у якій дотична паралельна хорді, що з'єднує точки $(a,f(a))$ і $(b,f(b))$.



Приклад 21. Доведіть нерівність $|\sin a - \sin b| \le |a - b|$, де $a, b \in R$.

■ Розглянемо функцію $y = \sin x$, яка є неперервною та диференційовною на усій числовій осі, а значить і на будь-якому інтервалі (a,b). Застосуємо теорему Лагранжа:

$$\sin a - \sin b = \cos(c)(a - b),\ c \in (a,b) \ \Rightarrow |\sin a - \sin b| = |\cos c| \cdot |a - b|.$$

Ураховуючи, що $|\cos c| \le 1$ маємо нерівність $|\sin a - \sin b| \le |a - b|$. ■

Зауваження. Якщо $a = 0$, то $|\sin b| \le |b|$.

Теорема Коші. Нехай функції $f(x), g(x)$ задовольняють умови:

1) $f(x), g(x)$ – неперервні на $[a,b]$;
2) $f(x), g(x)$ – диференційовні на (a,b);
3) $g'(x) \ne 0$ для усіх $x \in (a,b)$.

Тоді існує така точка $c \in (a,b)$, що $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x), \text{ де } \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Функція $F(x)$ задовольняє усім умовам теореми Ролля, отже, існує така точка $c \in (a,b)$, що $F'(c) = 0$.

$$F'(c) = f'(c) - \lambda g'(c) \Rightarrow 0 = f'(c) - \lambda g'(c) \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорему доведено.

Зауваження. 1. Різниця $g(b) - g(a) \ne 0$, оскільки в у разі $g(b) = g(a)$ за теоремою Ролля існує точка $c \in (a,b)$, у якій $g'(c) = 0$, що суперечить умові 3).

2. Якщо функція $g(x) = x$ маємо теорему Лагранжа, тобто теорема Коші є узагальненням теореми Лагранжа.

§ 12. Правила Лопіталя розкриття невизначеностей

Досить часто при дослідженні функцій необхідно знаходити границі дробу $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, коли чисельник і знаменник прямують до нуля або до нескінченності при $x \to a$. Знаходження таких границь називають розкриттям невизначеностей.

Теорема. Нехай функції $f(x), g(x)$ задовольняють умови:

1) $f(x), g(x)$ – диференційовні у деякому околі точки *a*, крім, можливо, самої точки, причому $g'(x) \ne 0$ у цьому околі;
2) $f(x), g(x)$ – одночасно нескінченно малі або нескінченно великі у точці *a*;

3) існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K$ (можливо, нескінченна).

Тоді існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причому $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$.

Зауваження. Правила Лопіталя діють і у випадках $a=\pm\infty$, і у випадках односторонніх границь.

Доведення. Розглянемо доведення для випадку, коли $f(x),g(x)$ – одночасно нескінченно малі у точці *a*.

Довизначимо функції $f(x),g(x)$ у точці a значенням $f(a)=g(a)=0$. Тоді функції $f(x),g(x)$ задовольняють умови теореми Коші. Застосуємо цю теорему на проміжку $[a,x]\subset[a,b]$. Існує така точка $c\in(a,x)$, що $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}\Rightarrow\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Тоді $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K$.

Теорему доведено.

Аналогічне доведення і у випадку, коли $f(x),g(x)$ – одночасно нескінченно великі у точці a або, коли $a=\pm\infty$.

Зауваження. 1. У разі, коли для похідних функцій $f'(x),g'(x)$ справджуються умови теореми, правила Лопіталя можна застосовувати повторно

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=K.$$

2. При обчисленні границь за допомогою правила Лопіталя записують лише необхідні перетворення, перевіряючи умови теореми в процесі обчислень.
3. я, перевіряючи умови теореми в процесі обчислень.
3. Невизначеності типу $[0\cdot\infty]$ зводять до вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ за формулами

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{1/g(x)}\ \text{або}\ f(x)g(x)=\frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

4. Для розкриття невизначеностей типів $\left[0^0\right],\left[1^\infty\right],\left[\infty^0\right]$ користуються рівністю

$$\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Процедура зводиться до розкриття невизначеності у показнику степеня експоненти.

Приклад 22. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$.

■ Функції $f(x)=e^{ax}-e^{-2ax}$, $g(x)=\ln(1+x)$ є нескінченно малі при $x\to 0$. Крім цього $f'(x)=ae^{ax}+2ae^{-2ax}$, $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ існують і не обертаються в нуль у довільному околі точки $x=0$, який не містить точку $x=-1$. Разом з тим існує

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}+2ae^{-2ax}}{\dfrac{1}{1+x}}=3a\,.$$

Отже, згідно з правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}+2ae^{-2ax}}{\dfrac{1}{1+x}}=3a\,.\ ■$$

Приклад 23. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{5^x}$.

■ Функції $f(x)=x^3$ і $g(x)=5^x$ є нескінченно великими при $x\to+\infty$. Тричі застосуємо правило Лопіталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{5^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{5^x\ln 5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{5^x(\ln 5)^3}=0\,.■$$

Приклад 24. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^{\ln x}$.

■ Маємо невизначеність типу $\left[0^0\right]$. Запишемо функцію $(x-1)^{\ln x}=e^{\ln x\cdot\ln(x-1)}$ і знайдемо границю

$$\lim_{x\to 1+0}\ln x\cdot\ln(x-1)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 1+0}\frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 1+0}\frac{\left(\ln(x-1)\right)'}{\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'}=\lim_{x\to 1+0}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{x\ln^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1+0}-\frac{\ln^2 x}{x-1}=-\lim_{x\to 1+0}\frac{\left(\ln^2 x\right)'}{\left(x-1\right)'}=-\lim_{x\to 1+0}\frac{2\ln x}{x}=0\,.$$

Тоді $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1+0}e^{\ln x\cdot\ln(x-1)}=e^0=1$.■

§ 13. Формула Тейлора та її застосування

Однією з основних формул математичного аналізу , яка застосовується дуже широко, є формула Тейлора. Вона дає змогу розробити простий аналітичний апарат для обчислення значень функції у вказаній точці, а саме дає можливість подати функцію у вигляді многочлена в околі деякої точки.

Лема 1. Нехай функцію $f(x)$ визначено у точці x_0 та деякому її околі. Нехай $f(x)$ n разів диференційовна у цьому околі. Тоді можна визначити многочлен n –го степеня $P_n(x)$, такий, що $P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)$ для усіх $k=\overline{0,n}$.

Тобто у точці x_0 значення многочлена та його похідних співпадають зі значеннями функції $f(x)$ та її похідних.

Доведення. Запишемо загальний вигляд многочлена n –го степеня

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n.$$

Знайдемо коефіцієнти $a_i, i=\overline{0,n}$.

$P_n(x_0)=f(x_0) \Leftrightarrow a_0+a_1(x_0-x_0)+a_2(x_0-x_0)^2+\ldots+a_n(x_0-x_0)^n=f(x_0)\Rightarrow$
$\Rightarrow a_0=f(x_0)$;

$P_n'(x_0)=f'(x_0) \Leftrightarrow a_1+2a_2(x_0-x_0)+\ldots+na_n(x_0-x_0)^{n-1}=f'(x_0) \Rightarrow a_1=f'(x_0)$;

$P_n''(x_0)=f''(x_0) \Leftrightarrow 2a_2+3\cdot 2(x_0-x_0)+\ldots+n(n-1)a_n(x_0-x_0)^{n-2}=f''(x_0)\Rightarrow$
$\Rightarrow a_2=\dfrac{f''(x_0)}{2!}$.

Через n кроків одержимо $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Отже,

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Лему 1 доведено.

Многочлен $P_n(x)$ називають многочленом Тейлора n –го степеня з центром розкладу у точці x_0.

Лема 2. Нехай функції $\varphi(x),\psi(x)$ визначені у деякому околі точки x_0 і задовольняють умови:

1) функції $\varphi(x),\psi(x)$ – $(n+1)$ раз диференційовні;

2) $\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=\cdots=\varphi^{(n)}(x_0)=0, \quad \psi(x_0)=\psi'(x_0)=\cdots=\psi^{(n)}(x_0)=0$.

Тоді існує точка ξ з околу точки x_0, що $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\dfrac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}$.

Доведення. Розглянемо відрізок $[x,x_0]$ з околу точки x_0 і функції $\varphi(x),\psi(x)$ на ньому. Функції $\varphi(x),\psi(x)$ задовольняють умови теореми Коші, тому

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi'(c_1)}{\psi'(c_1)} \Leftrightarrow \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(c_1)}{\psi'(c_1)} \text{ (оскільки } \varphi(x_0)=\psi(x_0)=0\text{)}.$$

Похідні $\varphi'(x),\psi'(x)$ також задовольняють умови теореми Коші, тому

$$\frac{\varphi'(c_1)-\varphi(x_0)}{\psi'(c_1)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi''(c_2)}{\psi''(c_2)}.$$

Застосовуючи *n* разів теорему Коші одержимо

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(c_1)}{\psi'(c_1)}=\frac{\varphi''(c_2)}{\psi''(c_2)}=\dots=\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}.$$

Лему 2 доведено.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ має у точці x_0 та деякому її околі похідні до $(n+1)$ порядку включно, і нехай точка $x \neq x_0$ належить цьому околу. Тоді між точками x і x_0 знайдеться така точка $\xi \in (x, x_0)$, що

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Цю формулу називають *формулою Тей*лора з центром розкладу у точці x_0. Різницю між функцією і її многочленом Тейлора називають залишковим членом *n* –го порядку і позначають $r_n(x)=f(x)-P_n(x)$.

Доведення. Теорему буде доведено, якщо встановимо рівність

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

З означення $r_n(x)$ випливає, що $r_n(x_0)=r_n{}'(x_0)=\dots=r_n^{(n)}(x_0)=0$.

Виберемо функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ наступним чином: $\varphi(x)=r_n(x)$, $\psi(x)=(x-x_0)^{n+1}$. Застосуємо Лему 2.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^{(n+1)}}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Rightarrow r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}.$$

Теорему доведено.

Залишковий член формули Тейлора $r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ називають *залишковим членом n* –го порядку *у формі Лагранжа*. Точка $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

Якщо в околі точки x_0 похідна $f^{(n+1)}(x)$ обмежена, то залишковий член $r_n(x)$ при $x \to x_0$ є нескінченно малою вищого порядку порівняно з $(x-x_0)^n$ тобто $r_n(x)=o((x-x_0)^n)$, $x \to x_0$. Таке зображення залишкового члена називають зображенням у формі Пеано.

У випадку, коли $x_0=0$ формулу Тейлора називають *формулою Маклорена.*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},\ \xi=\theta x.$$

Скорочений запис формул Тейлора і Маклорена має вигляд

$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x)$ і $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}x^k+r_n(x)$ відповідно.

Одержимо формули Маклорена основних елементарних функцій.

1. Показникова функція $f(x)=e^x$.

Функція $f(x)=e^x$ нескінченно диференційовна на усьому числовому проміжку і її похідні $(e^x)^{(n)}=e^x$. У точці $x=0$ $f^{(n)}(0)=e^0=1$, $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$, $0<\theta<1$. Тому формула Маклорена має вигляд

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

2. ***Функція*** $f(x)=\sin x$.

Функція $f(x)=\sin x$ нескінченно диференційовна на усьому числовому проміжку і її похідні $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$(див. приклад 16) . У точці $x=0$ $f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}, f^{(n+1)}(\theta x)=\sin(\theta x+\frac{(n+1)\pi}{2})$, $0<\theta<1$. Тому формула Маклорена має вигляд

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots+\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{x^n}{n!}+\sin(\theta x+\frac{(n+1)\pi}{2})\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Але

$$(\sin 0)^{(n)}=\begin{cases}(\sin 0)^{(2k)}=0,\\ (\sin 0)^{(2k+1)}=(-1)^k,\end{cases}\ \text{тому}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots+(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\sin(\theta x+\frac{(2k+3)\pi}{2})\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!},\ 0<\theta<1.$$

3. ***Функція*** $f(x)=\cos x$.

Аналогічно функція $f(x)=\cos x$ нескінченно диференційовна на усьому числовому проміжку і її похідні $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$. Формула Маклорена має вигляд

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\cos\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{x^n}{n!}+\cos(\theta x+\frac{(n+1)\pi}{2})\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, $0<\theta<1$, або з урахуванням

$$(\cos 0)^{(n)} = \begin{cases} (\cos 0)^{(2k)} = (-1)^k, \\ (\cos 0)^{(2k+1)} = 0 \end{cases}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cos(\theta x + \frac{(2k+1)\pi}{2}) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ 0 < \theta < 1.$$

4. ***Функція*** $f(x) = \ln(1+x)$.

Функція $f(x) = \ln(1+x)$ нескінченно диференційовна на своїй області визначення $x > -1$. Знайдемо її похідні і обчислимо їх значення у точці $x = 0$.

$$f(0) = 1,\ f'(x) = \frac{1}{1+x}, f'(0) = 1,\ f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = \frac{-1 \cdot (-2)}{(1+x)^3}, f''(0) = 2,\ f^{(4)}(x) = \frac{-1 \cdot (-2) \cdot (-3)}{(1+x)^4}, f^{(4)}(0) = -3!.$$

За індукцією $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n}, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!,$

$$f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+\theta x)^{n+1}},\ 0 < \theta < 1.$$

Тоді формула Маклорена має вигляд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\ 0 < \theta < 1.$$

5. ***Функція*** $f(x) = (1+x)^\alpha$.

Функція $f(x) = (1+x)^\alpha$ нескінченно диференційовна на своїй області визначення . Знайдемо її похідні і обчислимо їх значення у точці $x = 0$.

$f(0) = 1,\ f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, f'(0) = \alpha$,

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, f'(0) = \alpha(\alpha-1)$,

$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}, f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$.

За індукцією

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$,

$f^{(n+1)}(\theta x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1},\ 0 < \theta < 1$.

Формула Маклорена має вигляд

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1},\ 0 < \theta < 1.$$

Формули Маклорена для ***гіперболічних функцій*** $f(x) = \operatorname{sh} x$ і $f(x) = \operatorname{ch} x$ легко дістати з розкладу функції $f(x) = e^x$.

Оскільки $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, то

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} +$$

$$+ \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!} - \frac{e^{-\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{e^{\theta x} - e^{-\theta x}}{(2k+2)!}x^{2k+2}),$$

$0 < \theta < 1$.

Аналогічно для гіперболічного косинуса

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} + 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} +$$

$$+ \dots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} - \frac{e^{-\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{e^{\theta x} + e^{-\theta x}}{(2k+2)!}x^{2k+2},$$

$0 < \theta < 1$.

Користуючись формулою Маклорена можна знаходити наближені значення. Якщо знехтувати залишковим членом у формулі Маклорена , то дістанемо наближену рівність

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

яка замінює функцію многочленом. Точність наближення визначається модулем залишкового члена.

Приклад 25. Обчисліть значення числа e з точністю 0,001.

■ З формули Маклорена для функції $f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \ 0 < \theta < 1,$$

коли $x = 1$ маємо

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}.$$

Оцінимо модуль залишкового члена.

$|r_n(x)| < \dfrac{e}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!}$ для $n = 6$ $|r_n(x)| < \dfrac{3}{7!} < 0{,}001$. Тому достатньо взяти перші 7 доданків у формулі Маклорена, коли $x = 1$, тобто

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2{,}718. \ ■$$

Приклад 26. Обчисліть значення $\sin 9^\circ$ взявши перші два ненульових члени формули Маклорена функції $f(x) = \sin x$. Оцініть абсолютну похибку.

■ Маємо $\sin 9^\circ = \sin\dfrac{9\pi}{180} = \sin\dfrac{\pi}{20}$. Покладемо у формулі

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sin(\theta x + \frac{(2k+3)\pi}{2}) \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}$ значення $x = \frac{\pi}{20}$ і візьмемо перші два ненульових члени

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \sin(\theta x + \frac{4\pi}{2}) \frac{x^4}{4!} = x - \frac{x^3}{3!} + \sin(\theta x) \frac{x^4}{4!}$, де $r_3(x) = \sin(\theta x) \frac{x^4}{4!}$. Модуль залишкового члена

$$| r_3(\frac{\pi}{20}) | = | \sin(\theta \frac{\pi}{20}) \frac{1}{4!} (\frac{\pi}{20})^4 | \approx 0{,}000254 < 0{,}001,$$

тому достатньо взяти значення з точністю до третього знака після коми, тобто

$\sin \frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!} (\frac{\pi}{20})^3 \approx 0{,}157$. ■

Формулу Тейлора також використовують для обчислення границь функцій, які при грубих обчисленнях призводять до невизначеностей.

Приклад 27. Використовуючи формулу Тейлора з залишковим членом у формі Пеано обчисліть границі

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4}{\operatorname{ch} 3x - \cos 3x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 + x^2} \cos x}{2 \sin^4 x}$.

■ Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$. Запишемо для кожної з функцій у знаменнику її формулу Маклорена із залишковим членом у формі Пеано.

$\operatorname{ch} 3x = 1 + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} + o\left((3x)^4\right)$, $\cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} + o\left((3x)^4\right)$, $x \to 0$.

Підставимо одержані розклади в границю:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{\operatorname{ch} 3x - \cos 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{1 + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - 1 + \frac{(3x)^2}{2!} - \frac{(3x)^4}{4!} + o\left((3x)^4\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{2 \frac{(3x)^2}{2!} + o\left((3x)^4\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{9x^2 + o\left((3x)^4\right)} = 0.$$

2) Маємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0} \right]$. Оскільки $\sin^4 x \sim x^4$ при $x \to 0$, то шукана границя рівна $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 + x^2} \cos x}{2(x^4 + o(x^4))}$. Запишемо формулу Тейлора з залишковим членом у формі Пеано, зберігаючи члени з x^4:

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^4+o(x^4),\ \cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4).$$

Тоді

$$1-\sqrt{1+x^2}\cos x=1-\left[1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right]\cdot\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right]=$$

$$=1-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4))-(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+o(x^4))-(-\frac{x^4}{8}+o(x^4))+o(x^4)=$$

$$=1-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)=(-\frac{1}{24}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})x^4+o(x^4)=$$

$$=\frac{1}{3}x^4+o(x^4).$$

Оскільки $o(x^4)\to 0$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{2\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{2x^4+o(x^4)}=\frac{1}{6}.\ \blacksquare$$

§ 14. Дослідження функції за допомогою похідних

Умови монотонності

Нехай функцію $f(x)$ задано на деякій числовій множині X. Функцію $f(x)$ називають зростаючою на множині X, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ і функцію $f(x)$ називають спадною на множині X, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$. У випадку нестрогих нерівностей $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ функцію називають не спадною (не зростаючою). Спадні і зростаючі функції називають монотонними.

Теорема *(достатні умови монотонності)*. Нехай функція $f(x)$ диференційовна на множині X і $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для $\forall x \in X$, то на множині X функція монотонно зростає (монотонно спадає).

Доведення. Доведемо теорему для випадку $f'(x) > 0$ для $\forall x \in X$. Покажемо, що функція $f(x)$ зростає на X.

Розглянемо довільні точки $x_1, x_2 \in X$ такі, що $x_1 < x_2$. Застосуємо до функції $f(x)$ формулу Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \text{ де } \xi \in (x_1;\, x_2).$$

Оскільки, за умовою теореми, $f'(\xi) > 0$ і $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто $f(x_1) < f(x_2)$ і за означенням функція зростає на X.

Теорему доведено.

Випадок $f'(x) < 0$ для $\forall x \in X$ доводять аналогічно.

Теорема *(необхідні умови монотонності)*. Нехай диференційовна на множині X функція $f(x)$ зростає (спадає). Тоді $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для $\forall x \in X$.

Доведення. Нехай $f(x)$ зростає на X. Розглянемо точки $x_1 = x$ і $x_2 = x + \Delta x$ такі, що $x_1, x_2 \in X$. Відношення

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$$

незалежно від знака Δx. Дійсно, якщо $\Delta x > 0$, то $f(x+\Delta x) - f(x) > 0$ і, якщо $\Delta x < 0$, то $f(x+\Delta x) - f(x) < 0$. Тоді границя відношення $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ є величиною невід'ємною, тобто $f'(x) \geq 0$.

Нехай $f(x)$ спадає на X. Тоді відношення

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0$$

незалежно від знака Δx і границя відношення $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$ не додатна, тобто $f'(x) \leq 0$.

Теорему доведено.

З геометричної точки зору, це означає, що дотична до графіка зростаючої функції утворює гострий кут з додатним напрямом осі Ox в усіх точках множини X (або, в окремих точках паралельна осі Ox). А дотична до графіка спадної функції утворює тупий кут з додатним напрямом осі Ox в усіх точках множини X (або, в окремих точках паралельна осі Ox).

Теорема *(критерій сталості функції)*. Функція $f(x)$ є сталою на множині X тоді і тільки тоді, коли її похідна дорівнює нулю в усіх точках цієї множини, $f'(x) = 0 \ \forall x \in X$.

Приклад 28. Знайдіть проміжки монотонності функції $y = \dfrac{x}{x^2+4}$.

■ Знайдемо похідну функції $y' = \left(\dfrac{x}{x^2+4}\right)' = \dfrac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$ і її стаціонарні точки: $y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$. Точки x_1, x_2 розбивають усю числову

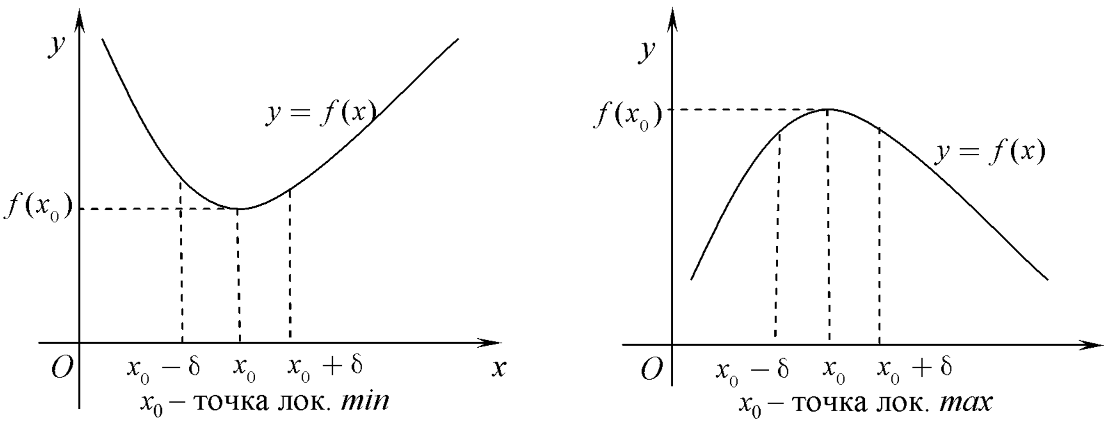
вісь на три проміжки $(-\infty;-2),(-2;2),(2;+\infty)$, на яких функція зростає або спадає. Для дослідження знака похідної на кожному з проміжків достатньо обчислити її значення у будь-якій довільній проміжку.
Наприклад,

$$-3\in(-\infty;-2),\ y'(-3)=\frac{4-9}{9+4}=-\frac{5}{13}<0,$$

тоді для усіх точок цього інтервалу похідна від'ємна, тобто функція спадає для $x\in(-\infty;-2)$. У точці $0\in(-2;2)$ $y'(0)=\frac{4-0}{0+4}=1>0$, отже, для усіх точок $x\in(-2;2)$ похідна додатна і функція тут зростає. У точці $3\in(2;+\infty)$ похідна $y'(3)=\frac{4-9}{9+4}=-\frac{5}{13}<0$ і для усіх точок цього інтервалу похідна від'ємна, тобто функція спадає для $x\in(2;+\infty)$. ■

§ 15. Умови локального екстремуму

Функція $f(x)$ має *строгий локальний максимум* у точці x_0, якщо існує окіл $O(x_0,\delta)$, що для усіх $x\in O(x_0,\delta),\ x\neq x_0$ справджується нерівність $f(x_0)>f(x)$. Функція $f(x)$ має *строгий локальний мінімум* у точці x_0, якщо існує окіл $O(x_0,\delta)$, що для усіх $x\in O(x_0,\delta),\ x\neq x_0$ справджується нерівність $f(x_0)<f(x)$.



Точки локальних максимуму та мінімуму називаютьточками *локального екстремума* функції $f(x)$. Значення функції у цих точках називають *локальними екстремумами*. Часто для скорочення слово "локальний" опускають.

Визначена на відрізку $[a;b]$ функція досягає локальних екстремумів лише у внутрішніх точках $(a;b)$.

Локальні екстремуми не завжди є найбільшим та найменшим значенням функції на відрізку, тобто носять відносний характер.

Теорема Ферма *(необхідна умова екстремуму)*. Нехай точка x_0 є точкою локального екстремума функції $f(x)$. Якщо у цій точці існує похідна $f'(x)$, то вона дорівнює нулю, тобто $f'(x_0)=0$.

Доведення. Нехай x_0 є точкою локального максимуму функції $f(x)$. Тоді існує окіл $O(x_0,\delta)$ такий, що для усіх $x \in O(x_0,\delta)$, $x \neq x_0$ справджується нерівність $f(x_0) > f(x)$, причому якщо $x \in (x_0-\delta; x_0)$, то $f(x)$ зростає і $f'_-(x_0) \geq 0$, а якщо $x \in (x_0; x_0+\delta)$, то $f(x)$ спадає і $f'_+(x_0) \leq 0$. Оскільки функція $f(x)$ диференційовна у точці x_0, то $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$.

Випадок, коли x_0 є точкою локального мінімуму функції $f(x)$ доводять аналогічно.

Теорему доведено.

Геометричний зміст цієї теореми: дотична до графіка диференційовної у точці екстремума функції паралельна до осі Ox.

Зауваження. 1. Теорема задає лише необхідну умову, але не достатню. Наприклад, функція $y=x^3$ диференційовна у точці $x=0$, $y'=3x^2$, $y'(0)=0$, проте точка $x=0$ не є точкою екстремума.

2. Функція $f(x)$ може не бути диференційовною у точці x_0, але мати у ній екстремум. Наприклад, функція $y=|x|$ не диференційовна у точці $x=0$, проте ця точка є точкою її локального мінімуму.

Точки, у яких похідна дорівнює нулю, називають *стаціонарними* точками функції $f(x)$. Стаціонарні точки і точки, у яких не існує похідної, а саму функцію визначено, називають *критичними* точками функції $f(x)$. Точки екстремуму шукають серед критичних точок.

Проміжки монотонності функції $f(x)$ обмежені її критичними точками.

Теорема *(перша достатня умова існування екстремуму)*. Нехай функція $f(x)$ неперервна у деякому околі $O(x_0,\delta)$ точки x_0, диференційовна у ньому, крім, можливо, самої точки x_0. Тоді, якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з плюса на мінус (з мінуса на плюс), то x_0 – точка локального максимуму (локального мінімуму).

Доведення. Нехай виконуються умови теореми і похідна при переході через точку x_0 змінює знак з плюса на мінус, тобто для $x_0-\delta < x < x_0$ похідна $f'(x) > 0$ і для $x_0 < x < x_0+\delta$ похідна $f'(x) < 0$. Застосуємо теорему Лагранжа

$$f(x)-f(x_0) = f'(\xi)(x-x_0).$$

Нехай $x < x_0$, тоді $x < \xi < x_0$ і $f'(\xi) > 0$, добуток $f'(\xi)(x-x_0) < 0$ і ліва частина рівності $f(x)-f(x_0) < 0$.

Якщо $x > x_0$, тоді $x_0 < \xi < x$ і $f'(\xi) < 0$, добуток $f'(\xi)(x - x_0) < 0$ і ліва частина рівності $f(x) - f(x_0) < 0$.

Отже, для усіх $x \in O(x_0, \delta),\ x \neq x_0$ справджується нерівність $f(x) - f(x_0) < 0$, тобто , за означенням, x_0 – точка локального максимуму функції $f(x)$.

Для зміни знака з мінуса на плюс доведення аналогічне.
Теорему доведено.

***Теорема** (друга достатня умова існування екстремуму).* Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 похідні до *n*-го порядку включно і

$$f'(x_0) = f''(x_0) \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тоді, для парного n точка x_0 є точкою строгого локального екстремума. Причому, якщо $f^{(n)}(x_0) < 0$ – точкою максимуму, якщо $f^{(n)}(x_0) > 0$ – точкою мінімуму. У випадку непарного n функція $f(x)$ немає в точці x_0 екстремуму.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Запишемо формулу Тейлора функції $f(x)$ в точці x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n,\ 0 < \theta < 1 \text{ або}$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n,\ 0 < \theta < 1.$$

Похідна $f^{(n)}(x)$ неперервна у точці x_0, отже, існує такий окіл $O(x_0, \delta)$ точки x_0, у якому вона зберігає свій знак. Для $x \in O(x_0, \delta)$ та парного n вираз $(x - x_0)^n > 0$. Якщо похідна $f^{(n)}(x) > 0$, то різниця $f(x) - f(x_0) > 0$. Тоді за означенням точка x_0 є точкою локального мінімуму. Аналогічно, якщо $f^{(n)}(x) < 0$ і n– парне, різниця $f(x) - f(x_0) < 0$. Тобто точка x_0 є точкою локального максимуму.

У разі, коли n– непарне вираз $(x - x_0)^n$ змінює свій знак на інтервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ і $(x_0; x_0 + \delta)$. Тоді і різниця $f(x) - f(x_0)$ також змінює знак, що означає, що у точці x_0 функція $f(x)$ екстремуму не має.
Теорему доведено.

Приклад 29. Знайдіть точки екстремумів функції $y = x^4 + 2x^5$.

■ Будемо шукати точки екстремумів серед стаціонарних точок функції. Для цього знайдемо нулі похідної $y' = 4x^3 + 10x^4 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{2}{5}, x_2 = 0$. Точки x_1, x_2 розбивають усю числову вісь на три проміжки $(-\infty; -\frac{2}{5}), (-\frac{2}{5}; 0)$, $(0; +\infty)$, на яких функція зростає або спадає тобто похідна додатна або від'ємна. При переході через точку $x_1 = -\frac{2}{5}$ похідна змінює знак з "+" на "–", тому за теоремою про першу достатню умову існування екстремуму ця точка є точкою строгого локального максимуму. При переході через точку $x_2 = 0$ похідна змінює знак з "–" на "+", тому точка x_2 є точкою строгого локального мінімуму. Значення функції у точках екстремуму дорівнюють $y_{max} = y(-\frac{2}{5}) = \frac{2^4}{5^5}$, $y_{min} = y(0) = 0$. ■

§ 16. Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді, за другою теоремою Вейєрштрасса про властивості неперервних функцій, вона набуває на цьому відрізку своїх найбільшого та найменшого значень, тобто глобальних максимуму та мінімуму.

Справджується наступне твердження.

Твердження. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і у точках $x_1, x_2, \ldots, x_n,\ x_i \in [a;b], i = \overline{1,n}$ має n локальних екстремумів, то її найбільше значення M дорівнює найбільшому з чисел

$$M = \max_{x \in [a;b]} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots f(x_n)\},$$

а найменше значення m функції $f(x)$ дорівнює найменшому з чисел

$$m = \min_{x \in [a;b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots f(x_n)\}.$$

З твердження випливає алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значень функції, а саме:

1) необхідно обчислити значення функції на кінцях відрізка $[a;b]$, тобто обчислити $f(a), f(b)$;

2) знайти точки екстремумів $x_1, x_2, \ldots, x_n,\ x_i \in [a;b], i = \overline{1,n}$ і обчислити значення функції у цих точках;

3) серед усіх обчислених значень вибрати найбільше та найменше.

Якщо точка екстремуму не потрапляє у відрізок $[a;b]$, то значення функції у ній не обчислюють.

Приклад 30. Знайдіть найбільше та найменше функції $y=\dfrac{x+1}{x^2+8}$ на відрізку $[-5;1]$.

■ Знайдемо значення функції у точках $a=-5$ і $b=1$: $y(-5)=\dfrac{-5+1}{(-5)^2+8}=\dfrac{-4}{33}$,

$y(1)=\dfrac{1+1}{1+8}=\dfrac{2}{9}$. Знайдемо точки екстремумів:

$$y'=\left(\frac{x+1}{x^2+8}\right)'=\frac{x^2+8-2x(x+1)}{(x^2+8)^2}=-\frac{x^2+2x-8}{(x^2+8)^2},$$

$y'=0 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0 \Rightarrow x_1=-4, x_2=2$.

Оскільки точка $x_2=2$ не належить відрізку $[-5;1]$, то обчислимо значення функції лише у точці $x_1=-4$:

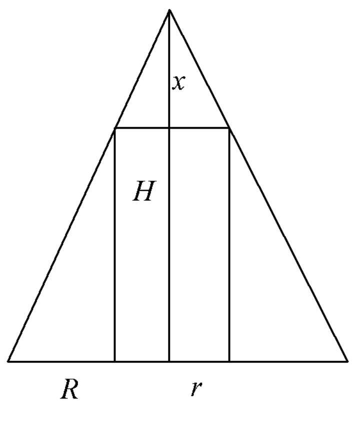
$$y(-4)=\frac{-4+1}{(-4)^2+8}=\frac{-3}{24}=-\frac{1}{8}.$$

Порівнюючи знайдені значення, маємо

$$M=\max_{x\in[-5;1]} f(x)=f(1)=\frac{2}{9},\text{ а } m=\min_{x\in[-5;1]} f(x)=f(-4)=-\frac{1}{8}. \ ■$$

Приклад 31. У конус з висотою H і радіусом основи R вписано циліндр. Знайдіть той, об'єм якого найбільший.

■ Зобразимо розріз конуса з вписаним у нього циліндром. Позначимо через r радіус циліндра, а висота циліндра дорівнюватиме $H-x$. З геометричних міркувань маємо $\dfrac{H}{R}=\dfrac{x}{r} \Rightarrow x=\dfrac{Hr}{R}$. Тоді об'єм циліндра дорівнює $V_ц=\pi r^2(H-\dfrac{Hr}{R})$, $V_ц=\pi r^2 H\dfrac{R-r}{R}$ і є функцією радіуса циліндра.



Знайдемо похідну цієї функції

$V_ц{}'=\dfrac{\pi H}{R}(2Rr-3r^2)$. Похідна дорівнює нулю, коли $r=0$ або $r=\dfrac{2R}{3}$. Перше значення не задовольняє умову задачі.

При переході через точку $r = \dfrac{2R}{3}$ похідна змінює знак з “+” на “–”, тому ця точка є точкою локального максимуму і відповідний найбільший об’єм дорівнює $V_{max} = \dfrac{4\pi HR^2}{27}$. ■

§ 17. Опуклість функції. Точки перегину

Нехай функцію $f(x)$ задано на відрізку $[a;b]$ і вона диференційовна на $(a;b)$. Нехай крива $y = f(x)$ є графіком цієї функції. До графіка такої функції у кожній точці інтервалу $(a;b)$ існує дотична.

Графік функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ називають *опуклим вниз* (*опуклим вгору*), якщо він розміщений не нижче (не вище) довільної дотичної до графіка функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$.

Точку $(x_0, f(x_0))$ називають *точкою перегину графіка функції* $f(x)$, якщо у ній існує дотична до графіка і існує такий окіл точки x_0, у якому по різні сторони від точки x_0 графік опуклий вгору і опуклий вниз.

Функцію $f(x)$ називають *опуклою вгору* (*опуклою вниз*) на інтервалі $(a;b)$, якщо для $\forall\, x_1, x_2 \in (a;b)$ справджуються нерівності

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \qquad \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right).$$

Теорема *(достатня умова опуклості функції)*. Нехай функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a;b)$ і має неперервну другу похідну $f''(x)$. Тоді, якщо $f''(x) > 0\, \forall\, x \in (a;b)$, то функція опукла вниз; якщо $f''(x) < 0\, \forall\, x \in (a;b)$, то функція опукла вгору.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми і $f''(x) < 0\, \forall\, x \in (a;b)$. Покажемо, що функція опукла вгору.

Розглянемо точки $x_1, x_2 \in (a;b)$, $x_1 < x_2$. Позначимо

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x_0 - x_1 = x_2 - x_0 = h$$

і запишемо для функції $f(x)$ формулу Тейлора першого порядку в околі точки x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)(x - x_0)^2}{2!}.$$

Застосуємо її до точок x_1, x_2 з околу точки x_0.

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(\xi_1)(x_1 - x_0)^2}{2!} = f(x_0) + f'(x_0)(-h) + \frac{f''(\xi_1)h^2}{2!}$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{f''(\xi_2)(x_2 - x_0)^2}{2!} = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi_2)h^2}{2!}.$$

Додамо

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f(x_0) + \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2!}h^2 \text{ або}$$

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = f(x_0) + \frac{h^2}{4}(f''(\xi_1) + f''(\xi_2)).$$

З урахуванням $f''(x) < 0 \, \forall x \in (a;b)$ маємо

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

тобто функція опукла вгору.

Випадок, коли $f''(x) > 0 \, \forall x \in (a;b)$ доводять аналогічно.

Теорему доведено.

З цього твердження випливає, що у точці перегину друга похідна функції дорівнює нулю, якщо вона існує. Однак точками перегину кривої $y = f(x)$ можуть бути також і точки, в яких друга похідна $f''(x)$ не існує (наприклад, точка $x = 0$ кривої $f(x) = \sqrt[3]{x}$).

Точки, у яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, називають *критичними точками другого роду* функції $y = f(x)$. Отже, якщо x_0 – абсциса точки перегину, то x_0 є критичною точкою другого роду цієї функції. Обернене твердження невірне.

Теорема *(необхідна умова існування точки перегину)*. Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна на інтервалі $(a;b)$ і точка $x_0 \in (a;b)$ є точкою перегину. Тоді $f''(x_0) = 0$.

Доведення. (*від супротивного*). Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що $f''(x_0) \neq 0$. Тоді у деякому околі точки x_0 друга похідна, як похідна неперервної функції зберігає свій знак. Але це суперечить тому, що x_0 є точкою перегину. Отже, припущення невірне.

Теорему доведено.

Теорема *(достатня умова існування точки перегину)*. Нехай функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a;b)$ і має неперервну другу похідну. Тоді, якщо $f''(x_0)=0$ або не існує і при переході через точку x_0 друга похідна змінює знак, то x_0 є точкою перегину.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо окіл $O(x_0,\delta)$ точки x_0. Нехай у цьому околі $f''(x)<0$ $x\in(x_0-\delta;x_0)$ і $f''(x)>0$ $x\in(x_0;x_0+\delta)$. Тоді на інтервалі $(x_0-\delta;x_0)$ функція опукла вгору, а на інтервалі $(x_0;x_0+\delta)$ вона опукла вниз. Це означає, що точка x_0 є точкою перегину.

Випадок $f''(x)>0$ $x\in(x_0-\delta;x_0)$, $f''(x)<0$ $x\in(x_0;x_0+\delta)$ доводять аналогічно.

Теорему доведено.

Приклад 32. Знайдіть інтервали опуклості і точки перегину кривої $f(x)=3x^4-4x^3+1$.

■ Знайдемо похідні функції і її критичні точки другого роду.

$$f'(x)=12x^3-12x^2,\quad f''(x)=36x^2-24x=36x(x-\frac{2}{3}).$$

Розв'язуємо рівняння $f''(x)=0$, $36x(x-\frac{2}{3})=0$, $x_1=0$; $x_2=\frac{2}{3}$ – критичні точки другого роду. Визначаємо знак другої похідної: якщо $x<0$, то $f''(x)>0$ – крива опукла вниз; якщо $x\in(0;2/3)$, то $f''(x)<0$ – крива опукла вгору; якщо $x>2/3$, то $f''(x)>0$ – крива опукла вниз. При переході через точки $x_1=0$ і $x_2=\frac{2}{3}$ друга похідна змінює знак. Звідси випливає, що точки $(0;f(0))$ та $(2/3;f(2/3))$, тобто $(0;1)$ та $(2/3;11/27)$ є точками перегину даної кривої. ■

Приклад 33. Знайдіть точки перегину графіка функції $y=(x-1)^{1/3}$.

■ Знайдемо похідні функції і її критичні точки другого роду.

$$y'=\left((x-1)^{1/3}\right)'=\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3},\quad y''=-\frac{2}{9}(x-1)^{-5/3}=-\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}.$$

Друга похідна не дорівнює нулю на усій області визначення і не існує у точці $x=1$. Точка $x=1$ є критичною точкою другого роду функції $y=(x-1)^{1/3}$. Для $x<1$ друга похідна $y''=-\dfrac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}>0$, отже, функція опукла вниз. Для

$x > 1$ друга похідна $y'' = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}} < 0$, отже, функція опукла вгору. Точка $(1;0)$ є точкою перегину графіка функції. ■

Зауваження. У точці $x = 1$ функція має нескінченну похідну, а її графік – вертикальну дотичну.

§ 18. Асимптоти графіка функції

Асимптотою кривої $y = f(x)$ називають пряму, до якої необмежено наближається точка кривої при необмеженому віддаленні її від початку координат. Існує три типи асимптот: вертикальні, похилі та горизонтальні.

Пряму $x = a$ називають *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо точка $x = a$ є точкою розриву другого роду цієї функції, тобто хоча б одна з границь

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty \text{ або } \lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty .$$

Пряму $y = kx + b$ називають *похилою* асимптотою графіка функції $y = f(x)$, якщо різниця між ординатами точок кривої і відповідних точок прямої прямує до нуля при необмеженому русі точки вздовж кривої

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0 .$$

Теорема. Для того, щоб пряма $y = kx + b$ була асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to \infty$ необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \ \ (k \neq 0), \ \ \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b .$$

При цьому зауважимо, що потрібно розглядати випадки як $x \to +\infty$ так і $x \to -\infty$.

Доведення *(необхідність).* Нехай пряма $y = kx + b$ є асимптотою графіка функції $y = f(x)$. Тоді, за означенням,

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0 = \lim_{x\to\infty} x(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x})) = \lim_{x\to\infty} x(\frac{f(x)}{x} - k) .$$

Оскільки, $x \neq 0$, то з рівності

$$\lim_{x\to\infty} x(\frac{f(x)}{x} - k) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k .$$

Далі, з рівності

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b.$$

Теорему доведено.

Горизонтальною асимптотою графіка функції $y=f(x)$ при $x\to\pm\infty$ називають пряму $y=b$, коли

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \ \left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=b\right).$$

Зрозуміло, що горизонтальна асимптота є окремим випадком похилої асимптоти ($k=0$).

Загальна схема дослідження функції і побудова графіків

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік, треба:

1) знайти область існування функції;
2) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність; Зауважимо, що графік парної функції симетричний відносно осі ординат, а графік непарної функції симетричний відносно початку координат;
3) знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з осями координат. Знайти точки розриву та встановити їх характер;
4) за першою похідною знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;
5) за другою похідною знайти інтервали опуклості та точки перегину;
6) знайти асимптоти кривої;
7) дослідити поведінку функції в нескінченно віддалених точках;
8) побудувати графік функції з урахуванням результатів попередніх пунктів.

Приклад 34. Дослідіть функцію $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ та побудуйте схематично її графік.

■1) Область існування – вся числова пряма, крім точки $x=1$, тобто $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;\infty)$.

2) Графік функції $y=f(x)$ перетинає вісь ординат (якщо це можливо) в точці $(0;f(0))$. Знаходимо $y(0)=-1$, отже $A(0;-1)$ – точка перетину кривої з віссю Oy. Щоб знайти точки перетину графіка з віссю Ox, потрібно розв'язати рівняння $y=0$, тобто $\dfrac{x^2+1}{x-1}=0$. Це рівняння не має дійсних коренів, тому дана функція не перетинає вісь абсцис.

3) Функція неперіодична. Розглянемо вираз

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{-x-1}=\frac{x^2+1}{-x-1},$$
таким чином, $f(-x)\neq f(x)$ і $f(-x)\neq -f(x)$. Це означає, що дана функція не є ні парною, ні непарною, тобто є функцією загального виду.

4) Функція в точці $x=1$ має розрив другого роду, причому $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty$,
$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty .$$
У інших точках функція неперервна.

5) Знайдемо похідну $y'=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

і розв'яжемо рівняння $y'=0$, тобто $x^2-2x-1=0$, $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=1+\sqrt{2}$ – стаціонарні точки. Крім того, похідна невизначена при $x=1$. Отже, $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=1+\sqrt{2}$, $x_3=1$ – критичні точки або точки можливого екстремуму. Ці точки розбивають числову пряму на чотири інтервали
$$(-\infty;1-\sqrt{2}),\ (1-\sqrt{2};1),\ (1;1+\sqrt{2}), (1+\sqrt{2},\infty).$$
На кожному з цих інтервалів похідна y' має певний знак, який можна встановити за методом інтервалів або обчислити значення похідної в окремих точках (по одній точці з кожного інтервалу). На інтервалах $(-\infty;1-\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2},\infty)$ похідна додатна, отже функція зростає; якщо $x\in(1-\sqrt{2};1)\cup(1;1+\sqrt{2})$, то функція спадає, бо на цих інтервалах похідна від'ємна. При переході через точку $x_1=1-\sqrt{2}$ (рух відбувається зліва направо) похідна змінює знак з плюса на мінус, отже, в цій точці досягається локальний максимум, знайдемо
$$y_{\max}=y(1-\sqrt{2})=\frac{(1-\sqrt{2})^2+1}{1-\sqrt{2}-1}=2-2\sqrt{2}.$$
При переході через точку $x_2=1+\sqrt{2}$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, в цій точці існує локальний мінімум, причому
$$y_{\min}=y(1+\sqrt{2})=\frac{(1+\sqrt{2})^2+1}{1+\sqrt{2}-1}=2+2\sqrt{2}.$$
Точка $x=1$ не є точкою екстремуму (у цій точці функція невизначена).

6) Знайдемо другу похідну $y''=\left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)'=$
$$=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}.$$

На інтервалі $(-\infty;1)$ $y'' < 0$, отже, на цьому інтервалі крива опукла вгору; якщо $x \in (1;\infty)$, то $y'' > 0$ – крива опукла вниз. У точці $x = 1$ функція невизначена, тому ця точка не є точкою перегину.

7) З результатів п.4 випливає, що пряма $x = 1$ – вертикальна асимптота кривої.

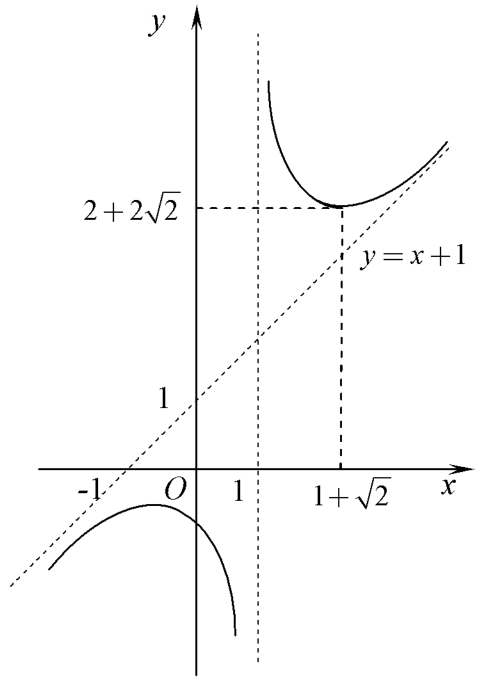
Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{x-1} = -\infty$, то горизонтальні асимптоти відсутні.

Знайдемо границі $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-x} = 1$. Отже, $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$,

тоді $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (\dfrac{x^2+1}{x-1} - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$.

Таким чином, пряма $y = x + 1$ – похила асимптота даної кривої. Інших асимптот немає.

8) Ураховуючи проведені дослідження, будуємо графік.



Інтегральне числення функцій однієї змінної

§ 19. Первісна функції.

Невизначений інтеграл

Означення. Функцію $F(x)$, визначену на інтервалі $(a;b)$, називають *первісною функцією* (або *первісною*) функції $f(x)$ на цьому інтервалі, якщо у будь-якій точці $x \in (a;b)$ функція $F(x)$ диференційовна, причому $F'(x) = f(x)$.

Зауважимо, що інтервал $(a;b)$ може бути і нескінченним.

Приклад 35. 1) Функція $F(x) = \arcsin x$ є первісною для функції $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на $(-1;1)$, оскільки $\forall x \in (-1;1)$ $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) Функція $F(x) = \sqrt{x}$ є первісною для функції $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ на інтервалі $(0;\infty)$, оскільки $\forall x \in (0;\infty)$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3) Функція $F(x) = \sin x$ є первісною для функції $f(x) = \cos x$ на $(-\infty;\infty)$, оскільки $\forall x \in R$ $(\sin x)' = \cos x$.

Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, то $F(x)-$ неперервна на $(a;b)$. Дійсно, оскільки функція $F(x)$ має у кожній точці інтервалу $(a;b)$ похідну, то вона є неперервною на ньому.

За умови, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, функція $F(x)+C$, де $C = const$ також є первісною функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$. Тобто первісна, якщо вона існує, не єдина.

Теорема. Якщо $F_1(x), F_2(x)$ – будь-які дві первісні функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, то скрізь на цьому інтервалі $F_1(x) - F_2(x) = C$, де $C = const$.

Доведення. Нехай $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Обидві функції $F_1(x), F_2(x)$ диференційовані на інтервалі $(a;b)$, тому функція $\Phi(x)$ також диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Причому

$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Звідси випливає, що $\Phi(x) = C = const$.

Теорему доведено.

Наслідок. Якщо $F(x)-$ одна з первісних функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, то будь-яка інша первісна функції $f(x)$ має вигляд: $F(x)+C$, де $C-$ довільна стала.

Означення. Сукупність всіх первісних функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ називають *невизначеним інтегралом* функції $f(x)$ і позначають

$$\int f(x)dx = F(x)+C .$$

Вираз $f(x)dx$ називають *підінтегральним виразом*, функцію $f(x)$ – *підінтегральною функцією*, $C \in R$ – *сталою інтегрування.*

Операцію відшукання первісної для заданої функції називають *інтегруванням* і вона є оберненою до операції диференціювання.

Основні властивості невизначеного інтеграла.

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

Доведення. Продиференцюємо рівність $\int f(x)dx = F(x)+C$:

$d\int f(x)dx = d(F(x)+C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

2. $\int dF(x) = F(x)+C$.

Доведення. Враховуючи, що $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$, маємо

$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C$.

3. $\int(\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x))dx = \alpha_1\int f_1(x)dx + \alpha_2\int f_2(x)dx$,

де $\alpha_1, \alpha_2 = const$ – властивість лінійності.

Доведення. Доведення безпосередньо випливає з властивості лінійності для похідних і з того, що інтегрування та диференціювання взаємно обернені операції.

4. Властивість інваріантності формул інтегрування:

$\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow \int f(u)du = F(u)+C$,

де $u-$ диференційована функція.

Таблиця основних невизначених інтегралів.

Раніше було наведено таблицю похідних, кожна формула якої вказувала на те, що відповідна функція $F(x)$ має похідну рівну $f(x)$, а, отже, за означенням є первісною функції $f(x)$. Це дає змогу скласти таблицю основних невизначених інтегралів.

1. $\int 0dx = C$.
2. $\int 1dx = x+C$.

3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$.

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, x \neq 0$.

5. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, a \in (0;1) \cup (1;\infty)$.

6. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$.

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, x \neq \pi n, n \in Z$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, x \in (-a;a)$, $a \in (0;\infty)$.

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, $a \in (0;\infty)$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$, у випадку знака мінус, $x \in (-\infty;-a) \cup (a;\infty)$, $a \in (0;\infty)$.

14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$, $|x| \neq a$, $a \in (0;\infty)$.

15. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.

16. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.

17. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$, $x \neq 0$.

Зауважимо, що формули 13,14 не мають аналогів в таблиці похідних. Для їх перевірки достатньо продиференціювати праву частину рівності і пересвідчитись, що вона співпадає з підінтегральною функцією зліва.

З диференціального числення відомо, що операція диференціювання не виводить з класу елементарних функцій, тобто похідна будь-якої елементарної функції являє собою також елементарну функцію. З інтегруванням ситуація інша. Існують елементарні функції, інтеграли від яких вже не є функціями елементарними. Про такі функції кажуть, що вони не інтегровані в елементарних функціях. Зважаючи на те, що такі функції не просто реально існують, але й відіграють важливу роль і мають широкі застосування , зокрема, у фізиці, вони докладно вивчені й для їх обчислення складені таблиці та побудовані графіки.

Наведемо приклади функцій, не інтегрованих в елементарних:

1) $\int e^{-x^2}dx$ – інтеграл Пуассона.

2) $\int \cos\left(x^2\right)dx$,

3) $\int \sin\left(x^2\right)dx$, 2),3) – інтеграли Френеля.

4) $\int \frac{dx}{\ln x},\ x\in(0;1)\cup(1;\infty)$ – інтегральний логарифм.

5) $\int \frac{\cos x}{x}dx,\ x\neq 0$ – інтегральний косинус.

6) $\int \frac{\sin x}{x}dx,\ x\neq 0$ – інтегральний синус.

§20. Основні методи інтегрування

1. Метод заміни змінної, або введеня функції під знак диференціалу.

Досить часто введення нової змінної дає можливість звести знаходження даного інтеграла до знаходження табличного інтеграла. Цей метод називають методом заміни змінної і він базується на наступній теоремі.

Теорема. Нехай функція $t=\varphi(x)$ визначена та диференційована на інтервалі (a,b), а $\{t\}$ є множиною її значень. Нехай також для функції $g(t)$, визначеної на множині $\{t\}$, існує первісна $G(t)$, тобто

$$\int g(t)dt = G(t)+C. \tag{1}$$

Тоді скрізь на інтервалі (a,b) для функції $g(\varphi(x))\varphi'(x)$ існує первісна, що рівна $G(\varphi(x))$, тобто

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x))+C \tag{2}$$

Доведення. Використовуючи формулу для диференціала функції ліву частину рівності (1) можна записати у вигляді:

$\int g(t)dt = \int g(\varphi(x))d\varphi(x) = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx$,

а праву:

$G(t)+C = G(\varphi(x))+C$,

звідки і випливає твердження теореми.

Для ефективного застосування наведеної теореми необхідно, щоб у підінтегральній функції був множник, що є похідною внутрішнього аргументу складеної функції, який можна ввести під знак диференціалу, або за рахунок якого можна зробити заміну змінної. У цьому випадку новою змінною позначають внутрішній аргумент складеної функції.

Приклад 36. Знайдіть інтеграли: а) $\int \cos 3x dx$, б) $\int \frac{2xdx}{1+x^2}$, в) $\int e^{\sin x} \cos x dx$.

■ а) 1-й спосіб − внесення під знак диференціалу:

$$\int \cos 3x dx = \left| d(3x) = 3dx \right| = \frac{1}{3}\int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C;$$

2-й спосіб − введення заміни:

$$\int \cos 3x dx = \left| \begin{matrix} 3x = t \\ 3dx = dt\, dt \\ dx = \frac{1}{3} \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

б) 1-й спосіб − внесення під знак диференціалу:

$$\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \left| d\left(1+x^2\right) = 2xdx \right| = \int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \ln\left(1+x^2\right) + C;$$

2-й спосіб − введення заміни:

$$\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \left| \begin{matrix} 1+x^2 = t \\ 2xdx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left(1+x^2\right) + C.$$

в) 1-й спосіб − внесення під знак диференціалу:

$$\int e^{\sin x}\cos x dx = \left| d(\sin x) = \cos x dx \right| = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C;$$

2-й спосіб − введення заміни:

$$\int e^{\sin x}\cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C. \ ■$$

Як наслідок з теореми, можна розглядати таку властивість: якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Приклад 37. Знайдіть інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+4}}$.

$$■ \int \frac{dx}{\sqrt{2x+4}} = \left| d(2x+4) = \frac{1}{2}dx \right| = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+4)}{\sqrt{2x+4}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2x+4} + C =$$

$$= \sqrt{2x+4} + C. \ ■$$

2. ***Метод інтегрування частинами.***

Теорема. Нехай функції $u = u(x), v = v(x)$ диференційовні на інтервалі (a,b) і на інтервалі (a,b) існує первісна функції $u'(x)v(x)$. Тоді для $\forall x \in (a,b)$ існує первісна функції $u(x)v'(x)$, причому справджується рівність:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx, \text{ або}$$

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

яку і називають *формулою інтегрування частинами.*

Доведення. За правилом диференціювання добутку функцій $u = u(x), v = v(x)$

$$\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Проінтегруємо обидві частини рівності і, застосувавши властивості 2), 3) невизначеного інтеграла, отримаємо:

$$\int \left(u(x)v(x)\right)' dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Теорему доведено.

Формула інтегрування частинами дозволяє перейти від інтегралу $\int udv$ до інтегралу $\int vdu$, який , можливо, простіше знаходиться.

Укажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами.

1. Інтеграли вигляду $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)$ – многочлен, k – довільне дійсне число.

У цих інтегралах за u слід взяти множник $P(x)$, а за dv – вираз, що залишився.

2. Інтеграли вигляду $\int P(x)\ln kxdx$, $\int P(x)\arcsin kxdx$, $\int P(x)\arccos kxdx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} kxdx$, де $P(x)$ – многочлен, k – довільне дійсне число.

У цих інтегралах слід взяти $dv = P(x)dx$;

3. Інтеграли вигляду $\int e^{\alpha x}\sin \beta xdx$, $\int e^{\alpha x}\cos \beta xdx$, де α, β – дійсні числа.

Після двократного застосування методу інтегрування частинами одержують лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. З цього рівняння знаходять інтеграл.

Приклад 38. Знайдіть інтеграли 1) $\int (x+3)\cos xdx$;

2) $\int \ln x dx$; 3) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$;

4) $\int x^2 e^{3x} dx$; 5) $\int e^{2x} \cos 3x dx$.

■ 1) $\int (x+3)\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x+3, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{vmatrix} = (x+3)\sin x - \int \sin x dx =$

$= (x+3)\sin x + \cos x + C$.

2) $\int \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$.

3) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x}, v = \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$.

4)

$$\int x^2 e^{3x} dx = \begin{vmatrix} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = e^{3x}dx, v = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \int \frac{2}{3}xe^{3x}dx = \begin{vmatrix} u = \dfrac{2}{3}x, du = \dfrac{2}{3}dx \\ dv = e^{3x}dx, v = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{3}e^{3x} -$$

$$-\frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{9}\int e^{3x}dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C = \frac{e^{3x}}{27}\left(9x^2 - 6x + 2\right) + C.$$

У прикладі 4) формулу інтегрування частинами застосовано двічі.

$$5)\ I = \int e^{2x}\cos 3x dx = \begin{vmatrix} u = e^{2x}, du = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos 3x dx, v = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{3}\sin 3x - \int 2e^{2x}\frac{1}{3}\sin 3x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \dfrac{2}{3}e^{2x}, du = \dfrac{4}{3}e^{2x}dx \\ dv = \sin 3x dx, v = -\dfrac{\cos 3x}{3} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x dx. \blacksquare$$

Порівнюючи між собою початок і кінець цього ланцюга рівностей, отримаємо рівняння відносно шуканого інтеграла I:

$$I = \frac{e^{2x}}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{e^{2x}}{13}\left(3\sin 3x + 2\cos 3x\right) + C.$$

Прийом, застосований у цьому прикладі називають *круговим інтегруванням*.

§ 21. Класи інтегровних функцій. Інтегрування раціональних дробів

Означення. Раціональним дробом $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називають відношення двох алгебраїчних многочленів $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ степенів n і m відповідно.

Означення. Раціональний дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називають *правильним*, якщо порядок многочлена-чисельника $P_n(x)$ менше, ніж порядок многочленна-знаменника $Q_m(x)$.

Теорема. Нехай $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильний раціональний дріб з дійсними коефіцієнтами, знаменник якого має вигляд:

$$Q_m(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots\left(x-a_{n_1}\right)^{\alpha_{n_1}}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\lambda_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot\left(x^2+p_{n_2}x+q_{n_2}\right)^{\lambda_{n_2}}.$$

Тоді цей дріб може бути представлений у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_1^{(2)}}{x-a_2}+\frac{A_2^{(2)}}{(x-a_2)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{A_{\alpha_2}^{(2)}}{(x-a_2)^{\alpha_2}}+\ldots+\frac{A_1^{(n_1)}}{x-a_{n_1}}+\frac{A_2^{(n_1)}}{\left(x-a_{n_1}\right)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_{n_1}}^{(n_1)}}{\left(x-a_{n_1}\right)^{\alpha_{n_1}}}+\ldots+$$

$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{M_{\lambda_1}^{(1)}x+N_{\lambda_1}^{(1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\lambda_1}}+\cdots+\frac{M_1^{(n_2)}x+N_1^{(n_2)}}{x^2+p_{n_2}x+q_{n_2}}+$$

$$+\frac{M_2^{(n_2)}x+N_2^{(n_2)}}{\left(x^2+p_{n_2}x+q_{n_2}\right)^2}+\ldots+\frac{M_{\lambda_{n_2}}^{(n_2)}x+N_{\lambda_{n_2}}^{(n_2)}}{\left(x^2+p_{n_2}x+q_{n_2}\right)^{\lambda_{n_2}}},$$

де $A_1^{(1)},\ldots,A_{\alpha_1}^{(1)},A_1^{(2)},\ldots,A_{\alpha_2}^{(2)},A_1^{(n_1)},\ldots,A_{\alpha_{n_1}}^{(n_1)},\ M_1^{(1)},N_1^{(1)},\ldots,M_{\lambda_{n_2}}^{(n_2)},N_{\lambda_{n_2}}^{n_2}$ – деякі дійсні сталі, серед яких можуть бути і нулі.

У результаті цього розкладу інтегрування раціональних дробів зводиться до інтегрування елементарних дробів розкладу. Елементарні дроби, в свою чергу, можна розділити на чотири типи. Вкажемо ці типи і покажемо, що вони легко інтегруються.

I . $\dfrac{A}{x-a}$. Тоді інтеграл $\int \dfrac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$;

II . $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $n = 2,3,4,\ldots$. Тоді інтеграл

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C, \quad n = 2,3,4,\ldots.$$

III . $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, де $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$. Інтеграл від такого дробу обчислюють за схемою

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{c} x^2+px+q = \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\dfrac{p^2}{4}\right) \\ a = \sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}} \\ t = x+\dfrac{p}{2}, dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{Mt + \left(N - \dfrac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\dfrac{t}{2}\right)}{\left(\dfrac{t}{2}\right)^2+1} = \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) +$$

$$+ \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\dfrac{p}{2}}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}} + C.$$

IV тип : $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda}}$, де $\lambda = 2,3,4,\ldots$. Інтеграл від такого дробу обчислюють за схемою

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda}}dx = \left| \begin{array}{c} a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}, \\ t=x+\frac{p}{2}, dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\left(t^2+a^2\right)^{\lambda}}dt = \frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^{\lambda}} +$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{\lambda}} = \frac{M}{2}\frac{\left(t^2+a^2\right)^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{\lambda}}.$$

Позначимо $K_{\lambda} = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{\lambda}}$.

Інтеграл K_1 є табличним: $\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$. Нехай $\lambda \neq 1$, тоді

$$K_{\lambda} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^{\lambda}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(t^2+a^2\right)-a^2}{\left(t^2+a^2\right)^{\lambda}}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{\lambda-1}} - \frac{1}{2a^2}\int t\frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^{\lambda}} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u=t, du=dt \\ dv=\frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^{\lambda}}, v=\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^{\lambda}} = \frac{\left(t^2+a^2\right)^{1-\lambda}}{1-\lambda} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{a^2}K_{\lambda-1} - \frac{1}{2a^2}\left(\frac{t\left(t^2+a^2\right)^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \int \frac{dt}{(1-\lambda)\left(t^2+a^2\right)^{\lambda-1}} \right) = K_{\lambda-1}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2(1-\lambda)} \right) -$$

$$-\frac{1}{2a^2(1-\lambda)}t\left(t^2+a^2\right)^{1-\lambda}.$$

У результаті отримали рекурентну формулу:

$$K_{\lambda} = K_{\lambda-1}\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{1}{2-2\lambda}\right) - \frac{1}{2a^2(1-\lambda)}\cdot\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{\lambda-1}},$$

яка дозволяє обчислити інтеграл від IV типу елементарних дробів.

Отже, всі чотири типи елементарних дробів інтегровні і це дозволяє сформулювати наступне твердження.

Теорема. Будь-який раціональний дріб є інтегровним в елементарних функціях.

Сформулюємо алгоритм інтегрування раціональних дробів:

1. Перевіряємо, чи є підінтегральний дріб правильним. Якщо він неправильний, подамо його у вигляді суми цілої частини і правильного дробу. Ціла частина дробу легко інтегрується;

2. Розкладаємо знаменник правильного раціонального дробу на множники.

3. Розкладаємо правильний раціональний дріб на суму елементарних дробів.

4. Інтегруємо створену суму.

Для знаходження чисельників елементарних дробів, утворених при розкладі правильного раціонального дробу, застосовують метод невизначених коефіцієнтів або, в деяких часткових випадках, метод викреслювань.

Суть методу невизначених коефіцієнтів полягає у тому, що правильний раціональний дріб з розкладеним на множники знаменником записують у вигляді суми елементарних дробів з невизначеними коефіцієнтами у чисельниках. Далі створену суму зводять до спільного знаменника і прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях змінної у чисельниках початкового та створеного дробів. Утворена система дозволяє знайти невизначені коефіцієнти.

Метод невизначених коефіцієнтів є універсальним, але досить громіздким. Тому, якщо знаменник правильного раціонального дробу має тільки прості дійсні корені доцільно використовувати метод викреслювань.

Тобто, якщо

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_m}{x-a_m},$$

то коефіцієнти $A_i, i=\overline{1,m}$ знаходять за формулою:

$$A_i=\left.\frac{P_n(x)}{(x-a_1)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_m)}\right|_{x=a_i}.$$

Приклад 39. Знайдіть інтеграли: а) $\int\frac{x^5+2x^4-4x^2-2x+13}{x^4-x^2-2x+2}dx$;

б) $\int\frac{4x^2-13x+19}{x^3-6x^2+3x+10}dx$.

■ а) Підінтегральний вираз є неправильним раціональним дробом. Виділимо його цілу і дробову частини, поділивши чисельник на знаменник. Маємо

$$\frac{x^5+2x^4-4x^2-2x+13}{x^4-x^2-2x+2}=x+2+\frac{x^3+9}{x^4-x^2-2x+2}.$$

Тоді

$$\text{I}=\int\frac{x^5+2x^4-4x^2-2x+13}{x^4-x^2-2x+2}dx=\int\left(x+2+\frac{x^3+9}{x^4-x^2-2x+2}\right)dx=$$

$$=\int(x+2)dx+\int\frac{x^3+9}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)})dx.$$

Розкладемо правильний раціональний дріб на суму елементарних дробів методом невизначених коефіцієнтів.

$$\frac{x^3+9}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+2}=$$

$$=\frac{x^3(A+M)+x^2(A+B-2M+N)+x(2B+M-2N)+(-2A+2B+N)}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}.$$

Зважаючи на рівність знаменників першого та останнього дробу в цьому ланцюжку рівностей, прирівнюємо і многочлени в чисельниках. Многочлени рівні між собою, якщо рівні коефіцієнти при однакових степенях x, тому

$$\begin{array}{l} x^3: 1=A+M \\ x^2: 0=A+B-2M+N \\ x^1: 0=2B+M-2N \\ x^0: 9=-2A+2B+N \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \\ M=2 \\ N=3 \end{cases}.$$

Тоді

$$\mathrm{I}=\int(x+2)dx+\int\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{2x+3}{x^2+2x+2}\right)dx=\frac{x^2}{2}+2x-\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+$$

$$+\int\frac{(2x+2)+1}{x^2+2x+2}dx=\frac{x^2}{2}+2x-\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+\int\frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}+\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+\ln\left|x^2+2x+2\right|+\operatorname{arctg}(x+1)+C=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{2}{x-1}+$$

$$+\ln\frac{x^2+2x+2}{|x-1|}+\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

б) $\mathrm{I}=\int\frac{4x^2-13x+19}{x^3-6x^2+3x+10}dx=\int\frac{4x^2-13x+19}{(x-2)(x+1)(x-5)}dx.$

Розкладемо даний правильний раціональний дріб на суму елементарних і знайдемо невизначені коефіцієнти методом викреслювань:

$$\frac{4x^2-13x+19}{(x-2)(x+1)(x-5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-5}.$$

Тоді

$$A=\left.\frac{4x^2-13x+19}{(x+1)(x-5)}\right|_{x=2}=\frac{9}{3(-3)}=-1;$$

$$B=\left.\frac{4x^2-13x+19}{(x-2)(x-5)}\right|_{x=-1}=\frac{36}{-3(-6)}=2;$$

$$C=\left.\frac{4x^2-13x+19}{(x-2)(x+1)}\right|_{x=5}=\frac{54}{3\cdot 6}=3.$$

$$\text{I}=\int\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-5}\right)dx=-\ln|x-2|+2\ln|x+1|+3\ln|x-5|+C=$$

$$\ln\frac{(x+1)^2|x-5|^3}{|x-2|}+C. \ \blacksquare$$

§22. Інтегрування тригонометричних виразів

Розглянемо інтеграл виду $\int R(\sin x,\cos x)dx$, де $R(\sin x,\cos x)$ – раціональна функція аргументів $\sin x,\cos x$. Іноді достатньо виконати деякі перетворення, щоб звести цей інтеграл до табличного.

Існує загальна універсальна підстановка, яка переводить інтеграл від тригонометричного виразу до інтеграла від раціонального дробу, що напевне інтегрується в елементарних функціях. Ця підстановка має вигляд:

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, x\in(-\pi,\pi).$$

Тоді $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x=2\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Приклад 40. Знайдіть $\int\frac{dx}{1+2\sin x}$.

$$\blacksquare\int\frac{dx}{1+2\sin x}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{4t}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{1+t^2+4t}=2\int\frac{dt}{(t+2)^2-3}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+2}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\sqrt{3}}+C. \ \blacksquare$$

У деяких випадках окрім універсальної підстановки можна застосувати інші підстановки, які швидше дають позитивний результат. Розглянемо їх:

1. Функція $R(\sin x,\cos x)$ є непарною відносно $\sin x$, тобто

$$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x).$$

Тоді використовують підстановку $\cos x=t, x\in[0,\pi]$.

2. Функція $R(\sin x,\cos x)$ є непарною відносно $\cos x$, тобто

$$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x).$$

Тоді використовують підстановку $\sin x = t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Функція $R(\sin x, \cos x)$ є парною відносно $\sin x$ та $\cos x$, тобто

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

Тоді використовують підстановку $\operatorname{tg} x = t, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Для цієї підстановки $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Приклад 41. Знайдіть інтеграли а) $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin x}$; б) $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^4 x}$.

■ а) Підінтегральна функція непарна відносно синуса:

$$\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin x} = \left|\cos x = t, -\sin x dx = dt\right| = -\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}(-\sin x)dx =$$

$$-\int \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}(-\sin x)dx = \int \frac{t^2}{t^2-1}dt = \int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$

$$= \cos x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C;$$

б) Підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ та $\cos x$:

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^4 x} = \left|\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array}\right| = \int \frac{\dfrac{t^2}{1+t^2}}{\dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C. \ \blacksquare$$

§23. Інтегрування деяких ірраціональностей

При інтегруванні ірраціональних виразів необхідно підібрати таку заміну, яка дозволить позбутись ірраціональності. Вкажемо деякі основні типи ірраціональностей.

I. Лінійні ірраціональності.

Інтеграл виду $\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{n_1}{m_1}}, (ax+b)^{\frac{n_2}{m_2}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{n_k}{m_k}}\right)dx$, де $R(\bullet)$ – раціональна функція.

Нехай r – найменше спільне кратне (Н.С.К.) чисел $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$. Тоді заміна $ax + b = t^r$ переведе підінтегральну функцію в раціональний дріб.

Приклад 42. Знайдіть інтеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+1}}$.

$$■\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+1}} = \left| \begin{array}{l} 2x+1=t^3 \\ x=\frac{1}{2}\left(t^3-1\right) \\ dx=\frac{1}{2}3t^2dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}\left(t^3-1\right)}{t}\frac{3}{2}t^2dt = \frac{3}{4}\int t\left(t^3-1\right)dt = \frac{3}{4}\int\left(t^4-t\right)dt =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^2}{2}\right)+C = \frac{3}{20}\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^5 - \frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^2 + C\text{. ■}$$

II. Дробово-лінійні ірраціональності.

Інтеграл виду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_1}{m_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_2}{m_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_k}{m_k}} \right)dx$.

У цьому випадку зручно використати заміну $\frac{ax+b}{cx+d}=t^r$, де r – Н.С.К. чисел $\left(m_1, m_2, \ldots, m_k\right)$.

Приклад 43. Знайдіть інтеграл $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$.

$$■ \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1}=t^2, \\ x=\frac{1+t^2}{t^2-1}, \\ dx=\frac{-4tdt}{\left(t^2-1\right)^2} \end{array} \right| = \int \frac{-4t^2dt}{\left(t^2+1\right)\left(t+1\right)\left(t-1\right)} = \int\left(\frac{-2}{t^2+1}-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= -2\operatorname{arctg} t + \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C = -2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \ln\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2 + C\text{. ■}$$

III. Квадратичні ірраціональності.

Інтеграл виду $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ можна знайти за допомогою тригонометричної підстановки. Для цього у квадратному тричлені під коренем виділяють повний квадрат і вводять відповідну заміну:

1) $\int R\left(x, \sqrt{l^2-x^2}\right)dx$, $x = l\sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $\int R\left(x,\sqrt{x^2+l^2}\right)dx$, $x=l\,\mathrm{tg}\,t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\int R\left(x,\sqrt{x^2-l^2}\right)dx$, $x=\frac{l}{\cos t}$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Приклад 44. Знайдіть інтеграл $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$.

■ $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx=\int\sqrt{4-(x+1)^2}\,dx=\begin{vmatrix}x+1=2\sin t\\ dx=2\cos t\,dt\end{vmatrix}=\int\sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos t\,dt=$

$=\int\sqrt{4\cos^2 t}\,2\cos t\,dt=\int 4\cos^2 t\,dt=2\int(1+\cos 2t)dt=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$

$=2\arcsin\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+C$. ■

Інтеграл виду $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, де $P_n(x)$ – многочлен n-го порядку, за формулою Остроградського можна подати у вигляді

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де $Q_{n-1}(x)$ – многочлен $(n-1)$-го порядку з невизначеними коефіцієнтами. Ці коефіцієнти та константу λ шукають методом невизначених коефіцієнтів. Знаходження самого інтегралу зводиться до інтегрування другого доданку в сумі справа.

Приклад 45. Знайдіть інтеграл $\int\frac{4x^2-3x+19}{\sqrt{x^2-2x+10}}dx$.

■ Застосуємо формулу Остроградського:

$$\int\frac{4x^2-3x+19}{\sqrt{x^2-2x+10}}dx=(ax+b)\sqrt{x^2-2x+10}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}.$$

Продиференціюємо обидві частини рівності:

$$\frac{4x^2-3x+19}{\sqrt{x^2-2x+10}}=a\sqrt{x^2-2x+10}+(ax+b)\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+10}}.$$

Домножимо обидві частини рівності на $\sqrt{x^2-2x+10}$:

$$4x^2-3x+19=a\left(x^2-2x+10\right)+(ax+b)(x-1)+\lambda.$$

Розкриємо дужки і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x з обох боків рівності.

$$\begin{aligned} &x^2: 4 = 2a \\ &x: -3 = -3a + b \\ &x: 19 = 10a - b + \lambda \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3. \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Отже,

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 19}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} dx = (2x+3)\sqrt{x^2 - 2x + 10} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} =$$

$$= (2x+3)\sqrt{x^2 - 2x + 10} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 + 1}} =$$

$$= (2x+3)\sqrt{x^2 - 2x + 10} + 2\ln\left|x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 10}\right| + C. \ \blacksquare$$

Інтеграл виду $\int \frac{dx}{(mx+n)^r \sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $r = 1, 2, \ldots$ підстановкою $mx + n = \frac{1}{t}$ зводиться до попереднього випадку, або до табличного інтегралу.

Приклад 46. Знайдіть інтеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}$.

$$\blacksquare \int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = \left| \begin{aligned} x &= \frac{1}{t} \\ dx &= \frac{-dt}{t^2} \end{aligned} \right| = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2}{t^2} + \frac{2}{t} + 1}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{2 + 2t + t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2 + 1}} =$$

$$= -\ln\left|t + 1 + \sqrt{t^2 + 2t + 2}\right| + C = -\ln\left|\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{x}\sqrt{1 + 2x + 2x^2}\right| + C. \ \blacksquare$$

IV. Інтегрування диференціального біному.

Означення. Вираз виду $x^m\left(a + bx^n\right)^p$, де $m, n, p \in Q$; $a, b \in R$ називають *диференціальним біномом*.

Теорема (Чебишова). Інтеграли від диференціального бінома $x^m\left(a + bx^n\right)^p$ виражаються через елементарні функції у трьох випадках:

1) якщо $p \in Z$, то застосовують підстановку $x = t^r$, де r – найменше спільне кратне знаменників дробів m, n;
2) якщо $p \notin Z, \frac{m+1}{n} \in Z$, то застосовують підстановку $a + bx^n = t^r$, де r – знаменник дробу p;

3) якщо $p \notin Z, \frac{m+1}{n} \notin Z, \frac{m+1}{n} + p \in Z$, то застосовують підстановку

$$\frac{a+bx^n}{x^n} = t^r,$$

де r – знаменник дробу p.

Якщо жодний із вказаних випадків не виконується, то інтеграл від диференціального біному не виражається через елементарні функції.

Приклад 47. Знайдіть інтеграли а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

■ а) $$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1}dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{-1}dx = \left| \begin{array}{c} p=-1 \in Z \\ x=t^4, t=\sqrt[4]{x} \\ dx = 4t^3dt \end{array} \right| = \int t^2(t+1)^{-1}4t^3dt = \int \frac{4t^5}{t+1}dt =$$

$$= 4\int\left(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 4\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C =$$

$$\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - x + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - 2\sqrt{x} + 4x^{\frac{1}{4}} - 4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + C.$$

б)

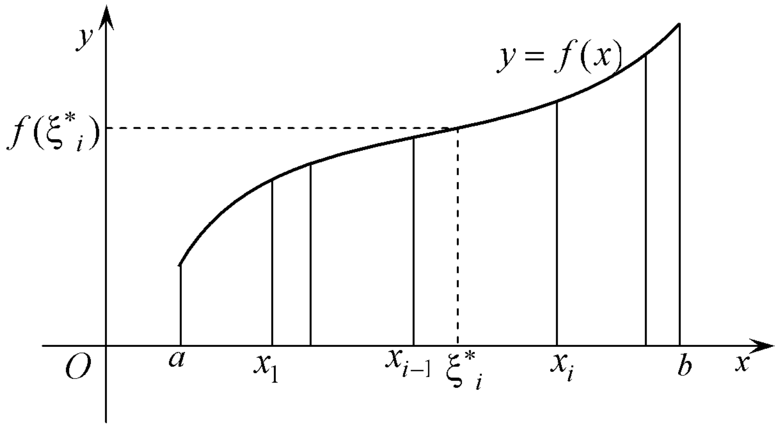
$$\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}} = \int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \left| \begin{array}{c} m=-11, n=4, p=-\frac{1}{2} \\ \frac{m+1}{n}+p=-3 \in Z \Rightarrow \\ \frac{1+x^4}{x^4} = t^2, x = \left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{4}} \\ dx = -\frac{1}{4}\left(t^2-1\right)^{-\frac{5}{4}} \cdot 2tdt \end{array} \right| =$$

$$= \int\left(t^2-1\right)^{\frac{11}{4}}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{4}\right)\left(t^2-1\right)^{-\frac{5}{4}} \cdot 2tdt = -\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^2dt = -\frac{1}{2}\int\left(t^4-2t^2+1\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t\right) + C = \frac{-1}{10}\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{1}{2}} + C. ■$$

§24. Визначений інтеграл Рімана

Розглянемо функцію $y = f(x)$ визначену в кожній точці відрізка $[a,b]$. Розіб'ємо довільним чином відрізок $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Розглянемо відрізок $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$. Позначимо $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $i = \overline{1,n}$. Серед внутрішніх точок елемента розбиття $[x_{i-1}, x_i]$ довільно оберемо точку ξ_i^* та розглянемо добуток $f(\xi_i^*) \cdot \Delta x_i$. Далі утворимо суму $\sigma(\xi_i^*, \Delta x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*) \cdot \Delta x_i$, яку називають *інтегральною* .



Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум, за умови, що $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a,b]$, ні від вибору точок ξ_i^* всередині елемента розбиття , то цю границю називають *визначеним інтегралом Рімана* функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначають:

$$\lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sigma(\xi_i^*, \Delta x_i) = \int_a^b f(x)dx .$$

Означення. Функцію $y = f(x)$, для якої на відрізку $[a,b]$ існує визначений інтеграл Рімана, називають *інтегрованою* на відрізку $[a,b]$ за Ріманом.

Число a називають *нижньою межею*, а b – *верхньою межею* інтегрування.

Теорема. (Необхідна умова інтегровності). Якщо функція $y = f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Протилежне твердження невірне – не всяка обмежена функція буде інтегрованою. Так, наприклад, обмежена функція Діріхле

$$D(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\ 0, x\in R\setminus Q\end{cases}$$

не інтегровна на відрізку $[0,1]$.

Сформулюємо достатню умову інтегровності.

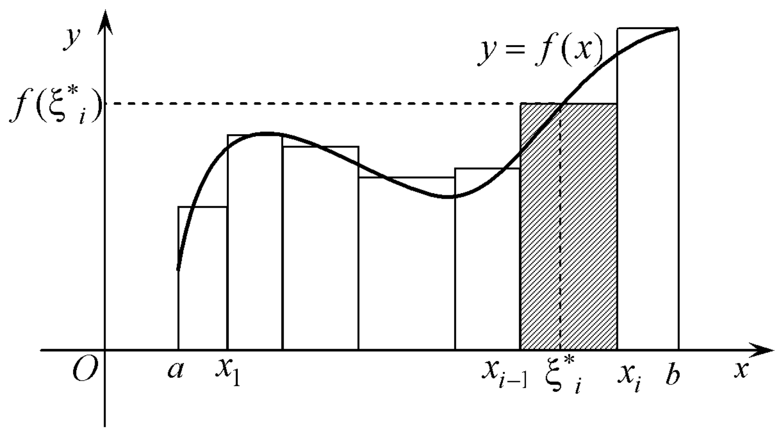
Теорема. (Коші). Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то вона інтегровна за Ріманом на цьому відрізку.

Зауваження. Вимогу неперервності на відрізку $[a,b]$ можна замінити вимогою обмеженості на цьому відрізку і неперервності за виключенням скінченної кількості точок.

З'ясуємо геометричний та фізичний зміст визначеного інтеграла Рімана.

Означення. Плоску фігуру, яка обмежена відрізком осі Ox, вертикальними прямими $x=a$, $x=b$ та графіком функції $y=f(x)$, за умови, що $f(x)\geq 0, x\in[a,b]$, називають *криволінійною трапецією.*

Розглянемо криволінійну трапецію $D=\{x\in[a,b], 0\leq y\leq f(x)\}$ з розбиттям основи $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$.



На елементі розбиття $[x_{i-1},x_i]$ побудовано прямокутник з основою Δx_i та висотою $f(\xi_i^*)$. Площа цього прямокутника рівна добутку $f(\xi_i^*)\Delta x_i$. Тоді інтегральна сума $\sigma(\xi_i^*,\Delta x_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)\Delta x_i$ рівна площі ступінчатої фігури і наближено рівна площі криволінійної трапеції. Наближення тим точніше, чим менше основи прямокутників Δx_i. Тобто, границя інтегральних сум, при умові, що $\max_i \Delta x_i \to 0$, з одного боку рівна площі криволінійної трапеції, а з іншого боку рівна визначеному інтегралу Рімана від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Тобто з геометричної точки зору визначений інтеграл задає площу криволінійної трапеції.

Розглянемо таку фізичну задачу: нехай матеріальна точка M переміщується під дією напрямленої вздовж осі Ox сили $\vec{F}$. Нехай значення сили залежить від абсциси точки M, тобто $\vec{F} = \vec{F}(x)$. Знайдемо роботу A сили $\vec{F}$ по переміщенню точки M вздовж осі Ox.

Для цього відрізок $[a,b]$ розіб'ємо на n частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Сила, що діє вздовж відрізка розбиття $[x_{i-1}, x_i]$ змінюється від точки x_{i-1} до точки x_i. Якщо точки розташовані близько одна до одної, ця зміна є незначною, тому силу на цьому відрізку можна вважати сталою і рівною $\vec{F}(\xi_i^*)$, де $\xi_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ та обрана довільно. Тоді, робота, що виконується на цьому відрізку дорівнює $A_i = \vec{F}(\xi_i^*) \cdot \Delta x_i$, а вся робота $A \approx \sum_{i=1}^{n} A_i$. Це наближення буде тим точнішим, чим менше буде $\max_i \Delta x_i$, тобто

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i=\overline{1,n}}} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\xi_i^*) \cdot \Delta x_i = \int_a^b F(x) dx .$$

Отже, фізичний зміст визначеного інтеграла – це робота змінної сили $\vec{F}$, величина якої є неперервна функція $F = F(x)$, що діє на відрізку $[a,b]$ і дорівнює визначеному інтегралу Рімана $\int_a^b F(x) dx$.

§25. Формула Ньютона-Лейбниця

Розглянемо функцію $y = f(x)$, що є інтегровною на $[a,b]$.

Теорема. (Ньютона). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $F(x)$ одна з її первісних на відрізку $[a,b]$, тобто $F'(x) = f(x)$, то виконується формула Ньютона-Лейбниця :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Доведення. Задамо розбиття відрізка $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Розглянемо різницю

$$F(b)-F(a)=F(x_n)-F(x_0)=\left(F(x_n)-F(x_{n-1})\right)+\left(F(x_{n-1})-F(x_{n-2})\right)+\ldots+$$
$$+\left(F(x_2)-F(x_1)\right)+\left(F(x_1)-F(x_0)\right).$$

За теоремою Лагранжа різницю в кожній дужці можна представити у вигляді

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'\left(\xi_i^*\right)\cdot(x_i-x_{i-1})=f\left(\xi_i^*\right)\cdot\Delta x_i\text{, де }\ \xi_i^*\in(x_{i-1},x_i),$$

тоді

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i^*\right)\Delta x_i .$$

За умовою теореми функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, а отже інтегровна, тому існує скінчена границя інтегральних сум, рівна визначеному інтегралу. Виконуючи граничний перехід в останній рівності, отримаємо:

$$F(b)-F(a)=\lim_{\max\limits_i \Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i^*\right)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx .$$

Теорему доведено.

Формула Ньютона-Лейбниця пов’язує між собою поняття невизначеного інтеграла як сукупності первісних та визначеного інтеграла Рімана і вказує зручний спосіб обчислення визначеного інтеграла.

Приклад 48. Обчисліть інтеграли а) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin xdx$; б) $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$; в) $\int_e^{e^2}\frac{\ln xdx}{x}$.

■ а) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\cos\frac{\pi}{3}+\cos 0=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$;

б) $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}$;

в) $\int_e^{e^2}\frac{\ln xdx}{x}=\int_e^{e^2}\ln xd(\ln x)=\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_e^{e^2}=\frac{1}{2}\left(\left(\ln e^2\right)^2-(\ln e)^2\right)=\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{2}$. ■

§26. Основні властивості визначеного інтеграла Рімана

1. *Властивість лінійності.* Для $\forall \alpha, \beta \in R$ і інтегрованих на $[a,b]$ функцій $f(x), g(x)$ виконується рівність:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

2. *Властивість адитивності.* Для $\forall c \in [a,b]$ та інтегрованої на $[a,b]$ функції $f(x)$ виконується рівність:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

3. *Властивість нормованості.*

$$\int_a^b dx = b - a,\ b \ge a.$$

4. *Властивість орієнтованості.*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Властивості 1) – 4) безпосередньо випливають з того, як вводиться визначений інтеграл.

5. ***Теорема*** (про середнє значення). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то існує така $c \in [a,b]$, що $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Доведення. За формулою Ньютона-Лейбниця $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, де $F'(x) = f(x)$. Тоді за теоремою Лагранжа $\exists c \in [a;b]$:

$F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a)$.

Теорему доведено.

6. ***Теорема*** (про збереження знаку підінтегральної функції).

Якщо $f(x) \ge 0,\ x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

Доведення. За теоремою про середнє значення $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, де $c \in [a,b]$. За умовою теореми $f(x) \ge 0, x \in [a,b]$, отже $f(c) \ge 0, \forall c \in [a,b]$ і $b-a \ge 0$, як довжина відрізка, тому $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

Теорему доведено.

7. ***Теорема*** (про монотонність визначеного інтеграла).

Якщо на відрізку $[a,b]$ $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Доведення. За умовою $f(x) \le g(x)$, тому $g(x) - f(x) \ge 0, \forall x \in [a,b]$, але тоді $\int_a^b (g(x) - f(x))dx \ge 0$.

За властивістю лінійності

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx.$$

Теорему доведено.

8) ***Теорема*** (про оцінку визначеного інтегралу). Якщо m,M – відповідно найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на $[a,b]$і $a \le b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Доведення. За умовою $\forall x \in [a,b] : m \le f(x) \le M$. Проінтегруємо цю рівність на $[a,b]$:

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx.$$

Застосовуючи до лівої та правої частин нерівності послідовно властивості лінійності та нормованості одержимо твердження теорми:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Теорему доведено.

9) ***Теорема*** (про оцінку модуля визначеного інтегралу). Для інтегровної на $[a,b]$ функції $f(x)$ виконується нерівність:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Доведення. До очевидної нерівності $-\left|f(x)\right| \le f(x) \le \left|f(x)\right|$ застосуємо властивість 7) і одержимо твердження теореми:

$$-\int_a^b \left|f(x)\right|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \left|f(x)\right|dx \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b \left|f(x)\right|dx.$$

Теорему доведено.

10) ***Теорема*** (Барроу). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то функція $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ є диференційовною у будь-якій точці $x \in [a,b]$ і

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

Доведення. Нехай $x \in [a;b]$. Надамо аргументу x приріст $\Delta x \ne 0$ і такий, що $(x + \Delta x) \in [a,b]$. Тоді

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt -$$

$$-\int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

За теоремою про середнє значення

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x, \text{ де } \xi \in [x, x + \Delta x].$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $(x + \Delta x) \to x, \xi \to x$ і, завдяки неперервності функції $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$, $f(\xi) \to f(x)$. Тоді за означенням похідної

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

Теорему доведено.

Тобто, інтеграл $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на $[a,b]$, тоді виконується рівність $\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$, що вказує зв'язок між невизначеним інтегралом та визначеним інтегралом Рімана зі змінною верхньою межею.

§27. Обчислення визначеного інтеграла

Один з методів обчислення визначеного інтеграла – безпосереднє застосування формули Ньютона-Лейбниця. Його зручно застосовувати, коли первісна для підінтегральної функції знаходиться зведенням інтеграла до табличного, або внесенням під знак диференціала. Розглянемо випадки, коли для знаходження первісної необхідно вводити заміну змінної або застосовувати формулу інтегрування частинами.

I. Метод заміни змінної під знаком визначеного інтеграла.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, а функція $x = \varphi(t)$ неперервно-диференційовна на відрізку $[t_1,t_2]$, причому відрізок $[a,b]$ – множина значень функції $x = \varphi(t)$ і $\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b$, то виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

яку називають *формулою заміни змінних у визначеному інтегралі.*

Доведення. Нехай $F(x)$ є первісною для функції $y = f(x)$ на $[a,b]$. Оскільки за умовою $\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b$, то за формулою Ньютона-Лейбніца маємо:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} dF(\varphi(t)) = \int_{t_1}^{t_2} F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Теорему доведено.

Зауваження1. При обчисленні визначеного інтеграла за допомогою формули заміни змінної необхідно міняти межі інтегрування.

Зауваження2. Немає потреби повертатись до старої змінної.

Приклад 49. Обчисліть інтеграли а) $\int_0^{16} x\sqrt{x^2+9}dx$; б) $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

в) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

■а) $\int_0^{16} x\sqrt{x^2+9}\,dx = \left| \begin{array}{c} x^2+9=t,\ xdx=\frac{1}{2}dt, \\ x_1=0,\ t_1=9 \\ x_2=16,\ t_2=25 \end{array} \right| = \int_9^{25} \sqrt{t}\,\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_9^{25} = \frac{1}{3}\left(25^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{98}{3}$;

б) $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{array}{c} x=2\sin t,\ dx=2\cos t dt \\ x_1=0,\ t_1=0 \\ x_2=2,\ \ t_2=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}2\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^2 t}{2\cos t}2\cos t dt =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt = 2\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi;$$

в) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \left| \begin{array}{c} 1+x=t^2,\ dx=2tdt \\ x_1=3,\ \ t_1=2 \\ x_2=8,\ \ t_2=3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t^2-1}{t}2tdt = 2\int_2^3 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3 = \frac{32}{3}$. ■

II. Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Теорема. Якщо функції $u=u(x), v=v(x)$ неперервні та диференційовані на $[a,b]$, то виконується рівність:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Доведення. На відрізку $[a,b]$ справджується рівність $(uv)' = u'v+uv'$, тобто функція uv є первісною для функції $u'v+uv'$. Тоді за формулою Ньютона-Лейбниця

$$\int_a^b (u'v+uv')dx = uv\Big|_a^b \quad \Rightarrow \quad \int_a^b (u'v+uv')dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b \quad \Rightarrow \quad \int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Теорему доведено.

Приклад 50. Обчисліть інтеграли а) $\int\limits_1^2 (x+1)e^x dx$; б) $\int\limits_1^e \ln x dx$; в) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

■ а) $\int\limits_1^2 (x+1)e^x dx = \left| \begin{matrix} u = x+1,\ du = dx \\ dv = e^x dx,\ v = e^x \end{matrix} \right| = (x+1)e^x \Big|_1^2 - \int\limits_1^2 e^x dx = 3e^2 - 2e - e^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e$;

б) $\int\limits_1^e \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x,\ du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx,\ v = x \end{matrix} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int\limits_1^e dx = e \ln e - \ln 1 - x \Big|_1^e = 1$;

в) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} u = x,\ du = dx \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x},\ v = \operatorname{tg} x \end{matrix} \right| = x \operatorname{tg} x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx = \frac{\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \ln|\cos x| \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$

$= \frac{\pi}{3}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) - \ln\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{18}\sqrt{3}\pi + \ln\frac{1}{\sqrt{3}}$. ■

Зауваження. Інтегруванням частинами можна одержати формулу Валіса:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2\cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)} \cdot \frac{\pi}{2}, & n = 2k, \\ \frac{2\cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k}{1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}, & n = 2k+1, \end{cases} \text{, при } k = 0,1,2,\ldots$$

Приклад 51. Обчисліть інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$.

■ За формулою Валіса $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5} = \frac{8}{15}$.

§28. Інтегрування періодичних функцій.

Інтегрування парних та непарних функцій по симетричному проміжку

Розглянемо періодичну, з періодом T функцію $y = f(x)$. Така функція задовольняє рівність:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx,\ \forall a \in R.$$

Для доведення цієї рівності достатньо згадати, що визначений інтеграл рівний площі відповідної криволінійної трапеції. Для періодичної з періодом T функції справедливо наступне: $f(x) = f(x+T)$, а отже, площі криволінійних трапецій з основами $[0,T]$ та $[a,a+T]$, обмежені графіком функції $y = f(x)$ рівні між собою.

Розглянемо функцію $y = f(x)$ неперервну на симетричному відносно початку координат проміжку $[-a,a], a \in (0,\infty)$. Доведемо, що

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & f(-x) = f(x), \\ 0, & f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Доведення. З властивості адитивності визначеного інтеграла випливає, що

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

Розглянемо інтеграл

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \begin{vmatrix} x = -t \\ dx = -dt \end{vmatrix} = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx,$$

тоді

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a \big(f(-x) + f(x)\big)dx = \mathrm{I}.$$

Якщо $f(x)$ – функція парна, тобто $f(-x) = f(x)$, то $\mathrm{I}=2\int_0^a f(x)dx$, якщо $f(x)$ – непарна, тобто $f(-x) = -f(x)$, то $\mathrm{I}=0$.

§29. Невласні інтеграли першого та другого роду

Означення визначеного інтеграла Рімана як границі інтегральних сум проводилося за умови, що проміжок інтегрування $[a,b]$ скінченний та функція $y = f(x)$ на цьому проміжку неперервна, або має скінченну кількість точок розриву першого роду. Розглянемо випадки, коли ці умови порушено.

Нехай неперервну функцію $y=f(x)$ визначено на проміжку $[a;\infty)$. Тоді функція $y=f(x)$ буде неперервною на будь-якому відрізку $[a,A]$, де $A\in(a,\infty)$, $A>a$. Відповідно визначений інтеграл Рімана $\int\limits_a^A f(x)dx$ існує.

Означення. Інтеграл

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$$

називають *невласним інтегралом першого роду.*

Якщо границя $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$ не існує або нескінченна, інтеграл називають *розбіжним*; якщо границя існує, то інтеграл називають *збіжним* і геометрично він задає площу нескінченної криволінійної трапеції, що не має правої межі.

Аналогічним чином визначається невласний інтеграл першого роду з нескінченною нижньою межею: $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx=\lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_A^a f(x)dx$.

Невласний інтеграл першого роду з обома нескінченними межами інтегрування визначають як суму інтегралів:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int\limits_c^{\infty} f(x)dx=\lim_{B\to-\infty}\int\limits_B^c f(x)dx+\lim_{A\to\infty}\int\limits_c^A f(x)dx,$$

де c – довільна точка інтервалу $(-\infty;+\infty)$. Цей інтеграл є збіжним лише у випадку, коли збігаються обидва інтеграли у правій частині рівності незалежно один від одного. Зауважимо, що збіжність і значення інтеграла не залежать від вибору точки c.

Приклад 52. Обчисліть невласний інтеграл $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$ або встановіть його розбіжність.

■ $$\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{A\to\infty}\int\limits_e^A\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=\lim_{A\to\infty}\left.\frac{-1}{\ln x}\right|_e^A=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{-1}{\ln A}+\frac{1}{\ln e}\right)=1.$$ ■

Отже, інтеграл збіжний.

Означення. *Головним значенням* невласного інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ називають границю виду

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx=V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Може бути так, що невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ не існує, а головне його значення існує. У цьому випадку невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ збігається в сенсі головного значення.

Приклад 53. Дослідіть на збіжність $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+1}}$ та знайдіть його головне значення.

$$■ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{d\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}} + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{d\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_{B}^{0} \frac{d\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}} + \lim_{A\to\infty} \int\limits_{0}^{A} \frac{d\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$\lim_{B\to-\infty} 2\sqrt{x^2+1}\Bigg|_{B}^{0} + \lim_{A\to\infty} 2\sqrt{x^2+1}\Bigg|_{0}^{A} = \lim_{B\to-\infty}\left(2-2\sqrt{B^2+1}\right) + \lim_{A\to\infty}\left(2\sqrt{A^2+1}-2\right) = \infty -$$

інтеграл розбіжний.

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} \frac{d\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{A\to\infty}\left(2\sqrt{A^2+1} - 2\sqrt{(-A)^2+1}\right) = 0 \; -$$

інтеграл збіжний в сенсі головного значення. ■

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a,b)$ і має в точці $x = b$ точку розриву другого роду.

Означення. Інтеграл виду

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Називають *невласним інтегралом другого роду.*

Якщо границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ існує і є скінченною, то інтеграл називають *збіжним*, в іншому випадку – *розбіжним*. Геометрично збіжний невласний інтеграл другого роду задає площу нескінченної криволінійної трапеції, що необмежена зверху.

Аналогічно, якщо функція має розрив другого роду в точці $x = a$, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Якщо функція $y = f(x)$ має точку розриву другого роду у внутрішній точці c відрізка $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx .$$

Для збіжності інтеграла повинні існувати обидві границі, коли ε_1 та ε_2 прямують до нуля незалежно одне від одного.

Означення. Невласний інтеграл другого роду *збігається в сенсі головного значення* , якщо існує границя

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right) = V.p.\int_a^b f(x)dx .$$

Подібно до невласного інтеграла першого роду, невласний інтеграл другого роду може бути розбіжним, але збігатись в сенсі головного значення.

Приклад 54. Обчисліть інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$, або встановіть його розбіжність.

■ У точці $x = 2$ підінтегральна функція $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ має точку розриву другого роду, в усіх інших точках проміжку $[1,2)$ є неперервною. За означенням

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| \Bigg|_1^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\ln\left|\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right| \right) = \infty ,$$

тобто інтеграл розбіжний. ■

§30. Ознаки збіжності невласних інтегралів

Іноді немає потреби обчислювати невласний інтеграл, а достатньо з'ясувати чи збіжний інтеграл, чи розбіжний. У таких випадках застосовують до дослідження ознаки збіжності невласних інтегралів.

Розглянемо невід'ємні функції $f(x), g(x)$ визначені на проміжку $[a,\infty)$.

Теорема (ознака порівняння). Якщо на проміжку $[a,\infty)$ неперервні функції $f(x)$ та $g(x)$ задовольняють умову $0 \le f(x) \le g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^\infty g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^\infty f(x)dx$, а з розбіжності інтеграла $\int_a^\infty f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^\infty g(x)dx$.

Теорема (гранична ознака порівняння). Нехай на проміжку $[a,\infty)$ визначено дві неперервні додатні функції $f(x)$ та $g(x)$. Нехай також існує скінченна границя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0.$$

Тоді невласні інтеграли першого роду $\int_a^\infty f(x)dx$ та $\int_a^\infty g(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Застосування цих ознак вимагає вміння підібрати функцію, з якою можна порівнювати задану функцію. Досить часто за таку функцію вибирають степеневу: $g(x)=x^{-\alpha}$.

Розглянемо докладно поведінку інтеграла $\int_a^\infty\frac{dx}{x^\alpha}, a\in(0,\infty)$, який в подальшому будемо використовувати для порівняння.

1. Якщо $\alpha=1$, то

$$\int_a^\infty\frac{dx}{x}=\lim_{A\to\infty}\int_a^A\frac{dx}{x}=\lim_{A\to\infty}\ln|x|=\infty.$$

2. Якщо $\alpha<1$, то

$$\int_a^\infty\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{A\to\infty}\int_a^A\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{A\to\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Bigg|_a^A=\frac{1}{1-\alpha}(\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A^{\alpha-1}}-\frac{1}{a^{\alpha-1}})=\infty.$$

3. Якщо $\alpha>1$, то

$$\int_a^\infty\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{A\to\infty}\int_a^A\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{A\to\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Bigg|_a^A=\frac{1}{1-\alpha}(\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A^{\alpha-1}}-\frac{1}{a^{\alpha-1}})=\frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}.$$

Тобто при $\alpha\in(-\infty,1]$ інтеграл розбіжний, а при $\alpha\in(1,\infty)$ інтеграл збіжний.

Приклад 55. Дослідіть на збіжність інтеграли а) $\int_1^\infty\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\cos^2 x}$;

б) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x}}{x^4+2x^2+1}dx$.

■ а) Оберемо для порівняння функцію $g(x)=\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$, інтеграл від якої $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{2\sqrt[3]{x}}$ є розбіжним ($\alpha=\frac{1}{3}$). Для $x\ge 1$ виконується нерівність $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\cos^2 x}\ge\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$.

Тоді за ознакою порівняння інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\cos^2 x}$ також розбіжний.

б) Оберемо для порівняння функцію $g(x)=\frac{1}{x^{7/2}}$, інтеграл від якої $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{7/2}}$ – збіжний ($\alpha=\frac{7}{2}$). За граничною ознакою порівняння

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x}}{x^4+2x^2+1}\cdot x^{\frac{7}{2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^{\frac{23}{2}}+x^{\frac{21}{2}}+x^4}}{x^4+2x^2+1}=1,$$

а отже досліджуваний інтеграл також збіжний. ■

Означення. Невласний інтеграл першого роду $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ називають *абсолютно збіжним*, якщо збіжним є інтеграл $\int\limits_a^{\infty}|f(x)|dx$.

З абсолютної збіжності випливає збіжність інтеграла.

Приклад 56. Дослідіть на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\cos\sqrt[3]{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$.

■ Для $\forall x\ge 1$ справджується оцінка:

$$\left|\frac{\cos\sqrt[3]{x}}{1+x\sqrt{x}}\right|=\frac{\left|\cos\sqrt[3]{x}\right|}{1+x\sqrt{x}}\le\frac{1}{x^{3/2}}.$$

Інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ – збіжний. За ознакою порівняння інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\left|\frac{\cos\sqrt[3]{x}}{1+x\sqrt{x}}\right|dx$ – збіжний, тоді інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\cos\sqrt[3]{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$ – абсолютно збіжний, а отже збіжний.

Для невласних інтегралів другого роду можна сформулювати аналогічні твердження.

***Теорема** (ознака порівняння).* Нехай у лівому (правому) околі точки b (точки a) визначено дві невід'ємні функції $f(x)$ та $g(x)$, причому $0 \le f(x) \le g(x)$. Тоді із збіжності невласного інтеграла $\int_a^b g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, а з розбіжності інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^b g(x)dx$.

***Теорема** (гранична ознака порівняння).* Нехай на проміжку $[a,b)$ визначено дві невід'ємні функції $f(x)$ та $g(x)$, причому такі, що мають у точці $x=b$ точку розриву другого роду. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \ne 0$, то невласні інтеграли другого роду $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx$ або збігаються, або розбігаються одночасно.

Для порівняння зручно використовувати функцію $g(x) = \dfrac{1}{(x-b)^\alpha}$, інтеграл від якої $\int_a^b \dfrac{dx}{(x-b)^\alpha}$ збігається при $\alpha \in (-\infty,1)$ і розбігається при $\alpha \in [1,\infty)$.

§30. Застосування визначеного інтеграла Рімана

І.Площа плоскої фігури.

Площу криволінійної трапеції, що лежить над віссю Ox знаходять за формулою $S = \int_a^b f(x)dx$.

Якщо трапеція обмежена віссю Ox, прямими $x=a, x=b$ та від'ємною функцією $y=f(x)$, то її площу обчислюють за формулою

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Загалом обидва варіанти можна об'єднати формулою $S=\int_a^b |f(x)|dx$.

Якщо плоска фігура обмежена прямими $x=a, x=b$ та функціями $y_1=f_1(x), y_2=f_2(x)$ і для них виконується нерівність $f_2(x)\geq f_1(x),\ x\in[a,b]$, то її площу знаходять за формулою $S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$.

У випадку, коли знак нерівності $f_2(x)\geq f_1(x)$ змінюється на відрізку $[a,b]$, відрізок розбивають на частини, на кожній з яких знак сталий. Далі застосовують до кожної з частин відповідну формулу.

Нехай трапеція обмежена лінією, що задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases},\ t\in[\alpha,\beta].$$

Функції $x(t), y(t)$ неперервні та існує неперервна похідна $x'(t), t\in[\alpha,\beta]$. Нехай також $x(\alpha)=a, x(\beta)=b$. Тоді площу такої криволінійної трапеції шукають за формулою

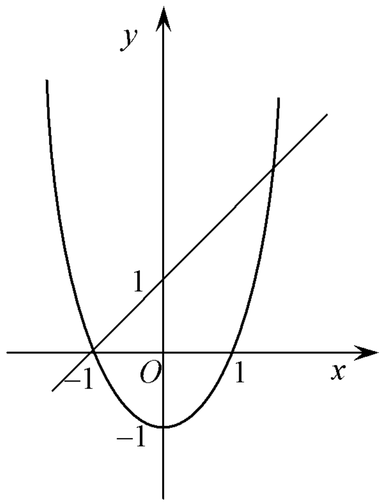
$$S=\left|\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt\right|.$$

Приклад 57. Обчисліть площі фігур, що обмежені лініями:

а) $y=x^2-1, y=x+1$;

б) тією частиною астроїди $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$, що лежить у першій чверті та осями координат.

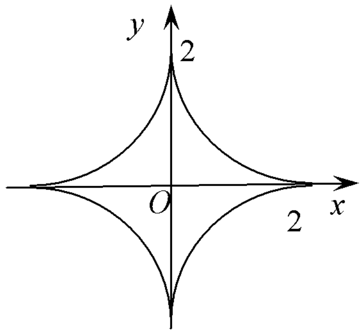
■а) Знайдемо точки перетину параболи $y=x^2-1$ та прямої $y=x+1$: $x^2-1=x+1 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\left[\begin{matrix}-1 \\ 2\end{matrix}\right.$.



Для $x \in [-1,2]$ виконується: $x^2 - 1 \le x + 1$, тому

$$S = \int_{-1}^{2} \left(x + 1 - x^2 + 1 \right) dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2 \right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Bigg|_{-1}^{2} = \frac{9}{2} \text{(кв.од.)}.$$

б) Змінна x змінюється в межах відрізка $[0,2]$. Відповідно t змінюється від $t = \frac{\pi}{2}$ до $t = 0$.



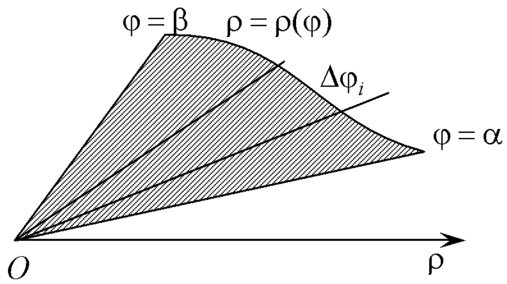
Тоді площа дорівнює

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 2\sin^3 t \cdot \left(2\cos^3 t \right)' dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^3 t \cdot 6\cos^2 t \cdot \sin t dt = 12 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt =$$

$$= 12 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4 t - \sin^6 t \right) dt = 12 \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{2 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) = \frac{3}{8} \pi .$$

При обчисленні інтеграла використано формули Валіса.

Розглянемо випадок, коли плоску фігуру задано в полярній системі координат і вона обмежена двома променями, що розташовані під кутами α та β до полярної осі відповідно та кривою $\rho = \rho(\varphi)$.



Таку плоску фігуру називають *криволінійним сектором.*
Розіб'ємо цей криволінійний сектор довільним чином на n частин променями $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$. Кути між цими променями позначимо $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \ldots, \Delta\varphi_n$. Розглянемо круговий сектор, що містить кут $\Delta\varphi_i$ та обмежений колом радіусу $\rho(\phi_i), \phi_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, точка ϕ_i обирається довільно. Площа цього кругового сектора

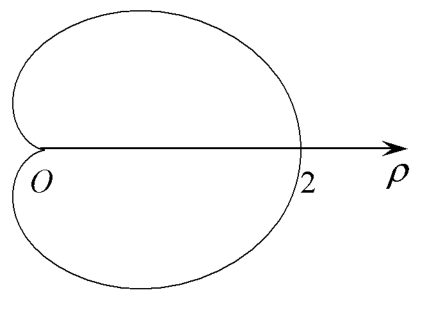
$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\rho^2(\phi_i)\Delta\varphi_i.$$

Побудувавши такі кругові сектори по всіх елементах розбиття, одержимо фігуру, площа якої близька до площі криволінійного сектора і рівна $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Спрямувавши $\max_i \Delta\varphi_i \to 0$, будемо наближати фігуру з площею S_n до криволінійного сектора і площу його задано як границю S_n, при умові, що ця границя не залежить ні від способу розбиття, ні від способу обрання точок $\phi_i, i = \overline{1.n}$:

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta\varphi_i \to 0 \\ i}} S_n = \lim_{\substack{\max \Delta\varphi_i \to 0 \\ i}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho^2(\phi_i)\Delta\varphi_i \Rightarrow S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Приклад 58. Обчисліть площу, що обмежена кардіоїдою $\rho = 1 + \cos\varphi$.



■ Фігура симетрична відносно полярної осі, тому

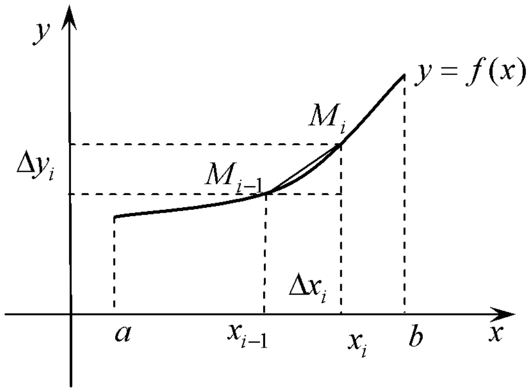
$$S = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2}. \ \blacksquare$$

II. Довжина дуги плоскої кривої.

Розглянемо неперервну криву $AB: y = f(x), x \in [a,b]$. Задамо довільне розбиття відрізка $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Цьому розбиттю на кривій відповідають точки $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$. Проведемо хорди $M_0M_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$, що послідовно з'єднують ці точки. Довжини хорд позначимо через $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$ відповідно. У результаті отримаємо ламану $M_0M_1\ldots M_n$, довжина якої $L_n = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \ldots + \Delta l_n$. Довжину окремої ланки ламаної можна знайти за теоремою Піфагора: $\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. За теоремою Лагранжа $\Delta y_i = f'(c_i)\Delta x_i$, де $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ і обирається довільно, тому

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i)\Delta x_i)^2} = \Delta x_i\sqrt{1+(f'(c_i))^2}.$$



Тоді довжина ламаної $L_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\,\Delta x_i$. Спрямуємо $\max\limits_i \Delta l_i \to 0$. Тоді ламана буде наближатися до дуги AB. Відповідно довжина ламаної наближається до довжини дуги. Рівність буде тим точніша, чим більше точок узято на дузі AB. Тобто

$$L = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ i=\overline{1,n}}} L_n = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ i=\overline{1,n}}} \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\sqrt{1+(f'(c_i))^2}.$$

Остаточно маємо: $L=\int\limits_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

Якщо криву AB задано параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t\in[t_1,t_2],$$

де $x(t), y(t)$ – неперервні функції з неперервними похідними і $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$, то довжину кривої AB шукають за формулою:

$$L=\int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

У випадку, коли криву AB задано в полярній системі координат:

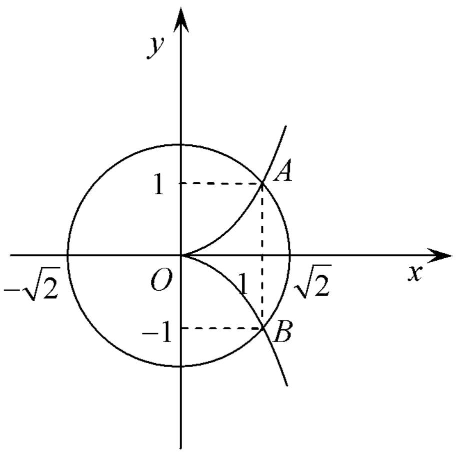
$\rho=\rho(\varphi), \varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$, де

$\rho(\varphi)$ – неперервна разом зі своєю похідною функція, то довжину кривої AB шукають за формулою:

$$L=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi)+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi.$$

Приклад 59. Знайдіть довжину дуги кривої $y^2=x^3$, що обмежена колом $x^2+y^2=2$.

■ Зробимо рисунок. Крива $AB: y^2=x^3$ симетрична відносно осі Ox, тому достат-



ньо знайти довжину половини дуги і подвоїти результат.

Знайдемо точки перетину кривої $y^2=x^3$ (або $y=\pm x^{3/2}$) з колом $x^2+y^2=2$:

$$\begin{cases} y^2 = x^3, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = y^2, \\ x^3 + x^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = y^2, \\ (x-1)(x^2+2x+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 = y^2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1,1), B(1,-1).$$

За формулою обчислення довжини кривої, заданої явним рівнянням маємо:

$$L = 2\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'\right)^2} dx = 2\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^1 = \frac{16}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right). \ ■$$

Приклад 60. Знайдіть довжину першої арки циклоїди
$$\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}.$$

■ За умовою розглядається перша арка циклоїди, тому $t \in [0, 2\pi]$.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left((t - \sin t)'\right)^2 + \left((1 - \cos t)'\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot 2\sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4\cos\frac{t}{2} \Bigg|_0^{2\pi} = 8. \ ■$$

Приклад 61. Знайдіть довжину першого витка спіралі Архімеда $\rho = \varphi$.

■ За умовою задачі кут φ змінюється в межах $\varphi \in [0, 2\pi]$. Довжину дуги шукаємо за формулою $L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi$.

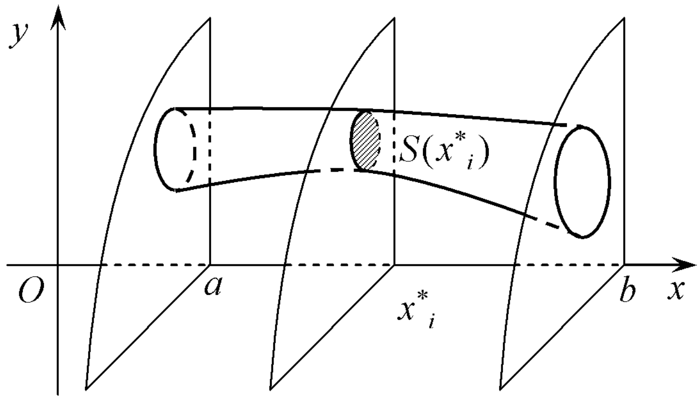
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi^2 + 1}} d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + 1}} =$$

$$= \varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} \Bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi + \ln\left|\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}\right| \Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} + \ln\left|\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}\right|\right) \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \ln\left|2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right|\right). \ ■$$

III. Обчислення об'ємів тіл.

Нехай необхідно знайти об'єм V тіла, розташованого між паралельними площинами $x=a, x=b$. Нехай його перерізи площинами $x=x_i,\ x\in[a,b]$, перпендикулярними до осі Ox мають площі $S(x), x\in[a,b]$.

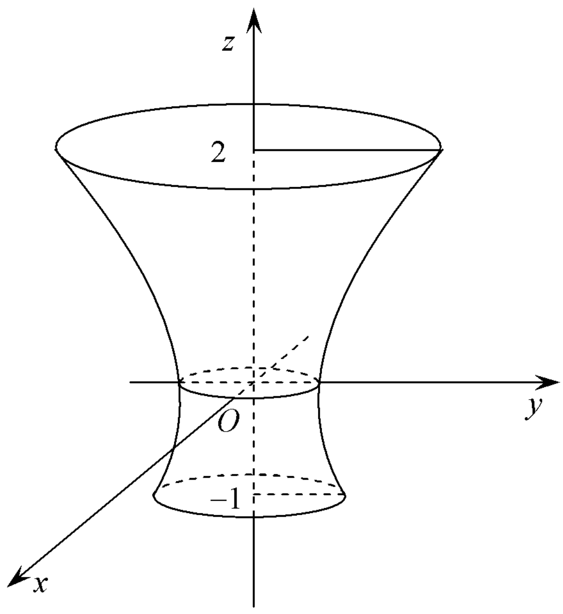


Задамо довільне розбиття відрізка $[a,b]$ точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Якщо відстані $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$ достатньо малі, то можна вважати, що об'єм, що міститься між двома перерізами близький до об'єму циліндра $V_i=S\left(x_i^*\right)\Delta x_i$, де $x_i^*\in\left[x_{i-1},x_i\right]$. Відповідно, об'єм усього тіла буде рівний:

$$V=\lim_{\substack{\max\Delta x_i^*\to 0\\ i=\overline{1,n}}}\sum_{i=1}^{n}S\left(x_i^*\right)\Delta x_i=\int_a^b S(x)dx.$$

Приклад 62. *З*найдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}-z^2=1$, $z=-1, z=2$.

■ Задане тіло обмежене площинами $z=-1, z=2$ та частиною однопорожнинно-



го гіперболоїда $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-z^2=1$, що лежить між цими площинами. Перерізи тіла, перпендикулярні до осі Oz є еліпсами $\frac{x^2}{25\left(1+z^2\right)}+\frac{y^2}{16\left(1+z^2\right)}=1$ з півосями $a=5\sqrt{1+z^2}$ та $b=4\sqrt{1+z^2}$. Площі еліпсів знайдемо за формулою $S=\pi ab$. Тобто $S=20\left(1+z^2\right)=S(z)$. Тоді шуканий об'єм

$$V=\int_{-1}^{2}20\left(1+z^2\right)dz=20\left(z+\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=20\cdot 6=120\,(\text{куб.од.}).\ \blacksquare$$

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену лінією $y=f(x)$, $f(x)\geq 0$, віссю Ox та прямими $x=a, x=b$, що обертається навколо осі Ox. У результаті обертання утворюється об'ємне тіло, яке називають *тілом обертання.* Перерізами цього тіла площинами, перпендикулярними до осі Ox є круги з радіусами $y=f(x)$ і площами $S=\pi y^2$. За формулою $V=\int_a^b S(x)dx$ маємо

$$V_{Ox}=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Якщо ця ж трапеція обертається навколо осі Oy, то об'єм відповідного тіла обертання можна обчислити за формулою:

$$V_{Oy}=2\pi\int_a^b x\left|f(x)\right|dx,\quad a\geq 0.$$

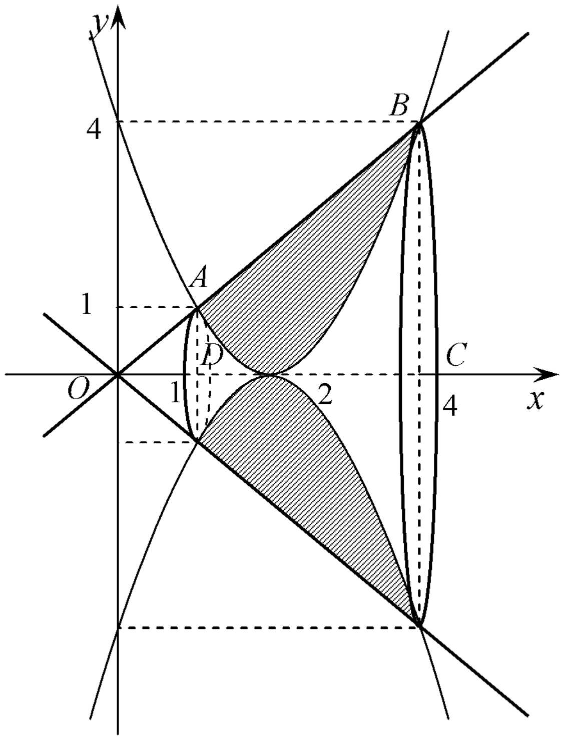
Приклад 63. Знайдіть об'єм фігур обертання, що утворюються обертанням плоскої фігури навколо осей Ox, Oy відповідно, якщо фігура обмежена такими лініями: $y=(x-2)^2$ та $y-x=0$.

■ Зобразимо фігуру, що утворена обертанням криволінійної трапеції навколо осі Ox.

Об'єм фігури обертання можна розглядати як різницю об'ємів V_1-V_2. Об'єм V_1 утворюється обертанням трапеції $ABCD$, а об'єм V_2 обертанням криволінійної трапеції, що обмежена основою DC, бічними сторонами AD, BC і частиною параболи $y=(x-2)^2$. Координати точок перетину прямої $y-x=0$ та параболи $y=(x-2)^2$: $A(1,1)$ та $B(4,4)$.

Тоді

$$V_{Ox} = \pi\int_1^4 x^2dx - \pi\int_1^4 (x-2)^4dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{(x-2)^5}{5}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{27}{5}\pi \text{ (куб.од.)};$$



$$V_{Oy} = 2\pi\int_1^4 x\cdot xdx - 2\pi\int_1^4 x(x-2)^2dx = 2\pi\int_1^4 \left(-x^3 + 5x - 4x\right)dx = \frac{73}{2}\pi \text{ (куб.од.)}. \blacksquare$$

Розглянемо в полярній системі координат криволінійний сектор, обмежений променями $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ та кривою $\rho = \rho(\varphi)$. У результаті його обертання навколо полярної осі утворюється тіло, об'єм якого обчислюють за формулою:

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

Приклад 64. Обчисліть об'єм, що утворюється в процесі обертання навколо полярної осі верхньої половини кардіоїди $\rho = 2(1+\cos\varphi)$.

■ Вздовж верхньої половини кардіоїди $\rho = 2(1+\cos\varphi)$ кут φ змінюється у межах $[0,\pi]$, тому

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_0^\pi 2^3(1+\cos\varphi)^3\cdot\sin\varphi d\varphi = -\frac{16}{3}\pi\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3 d(1+\cos\varphi) =$$

$$=-\frac{16}{3}\pi\frac{(1+\cos\varphi)^4}{4}\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{4}{3}\pi\left(0-2^4\right)=\frac{64}{3}\pi \text{ (куб.од.).} \ \blacksquare$$

VI. Обчислення площ поверхонь обертання. Деякі застосування визначеного інтеграла в механіці та фізиці.

1. Нехай навколо осі Ox обертається дуга AB деякої плоскої кривої. В процесі обертання утворюється поверхня, площу Q_{Ox} якої можна обчислити застосовуючи наступні формули:

а) у випадку, коли криву AB задано функцією $y=f(x), x\in[a,b]$,

$$Q_{Ox}=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx;$$

б) якщо дугу AB задано параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, t\in[t_1,t_2], \qquad \text{то} \quad Q_{Ox}=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt;$$

в) якщо дугу AB задано в полярних координатах $\rho=\rho(\varphi), \varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$, то

$$Q_{Ox}=2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi.$$

2. Моменти та центри мас плоских кривих.

Нехай дугу AB задано функцією $y=f(x), x\in[a,b]$ і густина розподілу мас вздовж дуги $\mu=\mu(x)$. Наведемо формули обчислення

а) статичних моментів цієї дуги відносно координатних осей Ox та Oy:

$$M_{Ox}=\int_a^b \mu(x)f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx, \quad M_{Oy}=\int_a^b \mu(x)x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx;$$

б) моментів інерції дуги AB відносно осей Ox та Oy:

$$I_{Ox}=\int_a^b \mu(x)f^2(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx, \quad I_{Oy}=\int_a^b \mu(x)x^2\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx;$$

в) координат центра мас дуги AB:

$$x_c=\frac{M_{Oy}}{m}, y_c=\frac{M_{Ox}}{m}, \text{ де } m \text{ -- маса дуги, } m=\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

3.Моменти та центри мас плоскої фігури.

Нехай задано плоску область (пластину) D, що має форму криволінійної трапеції, обмеженої функцією $y=f(x)$, прямими $x=a, x=b$ та віссю Ox. Нехай густина розподілу мас вздовж цієї пластини є величина стала $\mu=const$. Тоді координати центра мас пластини D обчислюють за формулами:

$$x_c = \frac{M_{Oy}}{m}, y_c = \frac{M_{Ox}}{m}, \text{ де } M_{Oy} = \mu\int_a^b xf(x)dx,\ M_{Ox} = \frac{\mu}{2}\int_a^b f^2(x)dx \ -$$

статичні моменти пластини D відносно осей Ox, Oy,

$$m = \mu\int_a^b f(x)dx \text{ – маса пластини } D.$$

4. Теореми Паппа – Гульдена.

Теорема 1. Площа поверхні обертання кривої AB навколо осі l, яка не перетинає криву, рівна добутку довжини дуги AB та довжини кола, яке описує центр мас дуги при обертанні навколо осі l.

Теорема 2. Об'єм, що утворюється при обертанні плоскої області D навколо осі l, яка лежить в одній площині з областю D, рівна добутку площі області D та довжини кола, яке описує центр мас області D при обертанні навколо осі l.

5. Робота, що виконується змінною силою.

Нехай матеріальна точка M рухається вздовж осі Ox під дією змінної сили $\overline{F} = \overline{F}(x)$.

Тоді роботу, що виконується цією силою по переміщенню матеріальної точки M вздовж осі Ox з точки $x = a$ в точку $x = b$ $(a<b)$ знаходять за формулою

$$A = \int_a^b \overline{F}(x)dx.$$

6. Шлях, що пройдений матеріальною точкою.

Нехай матеріальна точка рухається зі змінною швидкістю $v = v(t)$ прямолінійно. Тоді шлях, що пройдений матеріальною точкою від моменту часу $t = t_1$ до моменту часу $t = t_2$ обчислюють за формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

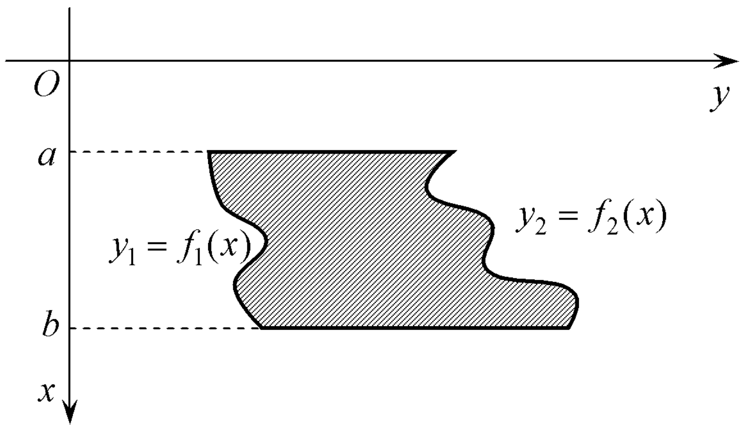
7. Тиск рідини на вертикальну пластину.

Якщо у рідину занурено плоску пластину в горизонтальному положенні, то тиск рідини на таку пластину за законом Паскаля обчислюється за формулою:

$$P = \mu \cdot S \cdot h \cdot g,$$

де μ – густина рідини, S – площа плоскої пластини, h – глибина занурення, g – прискорення вільного падіння.

Розглянемо випадок, коли у рідину з густиною μ вертикально занурено плоску пластину. Задамо систему координат так, щоб вісь Oy була розташована горизонтально на поверхні рідини, вісь Ox перпендикулярно до поверхні рідини і напрямлена в сторону зростання глибини занурення. Нехай занурена вертикально в рідину плоска пластина обмежена горизонтальними лініями



$x = a$ та $x = b$ $(a<b)$ та кривими $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$.

Тоді тиск рідини на таку пластину обчислюють за формулою:

$$P = g\mu\int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)x\,dx.$$

Список рекомендованої літератури

Підручники і посібники

1. *Дубовик В. П.* Вища математика: навч. посіб./ В. П. Дубовик, І. І. Юрик.—К.: А. С. К., 2006.—647с.—ISBN 966-539-320-0.
2. *Овчинников П. П.* Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2/ П. П. Овчинников.—К.: Техніка, 2000.—792 с.—ISBN 966-575-153-0.
3. *Письменный Д.* Конспект лекций по высшей математике. Полный курс/Д. Письменный.—М.: *Айрис-Пресс*, 2008.—608 с.—ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.

Шипачев В. С. Курс высшей математики / В. С. Шипачев.—М.: Оникс, 2009.—608 с.—ISBN 978-5-488-02067-2.