Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
„Київський політехнічний інститут”

# Диференціальне числення функцій однієї змінної

Методичні вказівки
до проведення модульної контрольної роботи
для студентів технічних факультетів 1-го курсу

*Рекомендовано Методичною радою ФМФ НТУУ „КПІ”*

Київ
НТУУ „КПІ”
2012

Диференціальне числення функцій однієї змінної : методичні вказівки до проведення модульної контрольної роботи для студентів технічних факультетів 1-го курсу / Уклад: О.О.Дем'яненко, Г.Д.Нефьодова – К.: НТУУ "КПІ", 2012. - 27 с.

*Гриф надано Методичною радою ФМФ НТУУ"КПІ"*
*(Протокол № від )*

Навчальне видання

**Диференціальне числення функцій однієї змінної**

Методичні вказівки
до проведення модульної контрольної роботи
для студентів технічних факультетів 1-го курсу

Укладачі: *Дем'яненко Ольга Олегівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.,*
*Нефьодова Галина Дмитрівна, канд. фіз.-мат. наук.*

Відповідальний
редактор *Ю.П.Буценко, канд.фіз.-мат.наук, доц.*

Рецензент *Г.М.Кулик, канд.фіз.-мат.наук, доц.*

*За редакцією укладачів.*
*Електронна версія.*

Київ 2012

## Вступ.

Курс вищої математики в технічному вузі є необхідним базовим курсом для подальшого вивчення спеціальних дисциплін. За рейтинговою системою оцінювання (РСО) при вивченні цього курсу передбачено проведення модульних контрольних робіт (МКР). Однією з таких робіт є МКР-1, тобто модульна контрольна робота за темою „Диференціальне числення функцій однієї змінної". Дане навчальне видання містить 30 варіантів контрольної роботи. Сама робота розрахована на 90 хвилин і проводиться в кожній академічній групі на практичному занятті після вивчення вказаної теми.

Структура кожного варіанту наступна:
1-й приклад: знаходження границі;
2-й приклад: порівняння двох нескінченно малих функцій, чи дослідження функції на неперервність;
3-й приклад: знаходження першої похідної функції заданої параметрично, або неявно, або складеної та знаходження похідної вищого порядку;
4-й приклад: задача на знаходження дотичної та нормалі до графіка функції;
5-й приклад: повне дослідження функції та побудова графіка.

Варіанти скомпоновані так, що кожна десятка послідовних варіантів може використовуватись як окремий пакет варіантів, при цьому всі пакети подібні. Тобто, варіант №1 подібний до варіантів №11 та №21, варіант №2 подібний до варіантів №12 та №22, тощо.

В даних методичних вказівках також наведені відповіді до задач з усіх варіантів контрольної роботи та розв'язання типових завдань.

## Оцінювання виконаних контрольних робіт.

За кожний приклад студенту нараховується відповідна кількість балів в межах запропонованої норми, що залежить від того, яку частину прикладу він розв'язав правильно. Остаточна оцінка складається з суми балів, нарахованих за кожний приклад. Запропонована нижче шкала норм оцінок вказує вартість кожного приклада МКР у відсотках по відношенню до максимальної кількості балів, що відводиться цій МКР за рейтинговою системою оцінювання.

Шкала норм оцінок.

1 приклад.......................................................................10 %
2 приклад.......................................................................10 %
3 приклад.......................................................................25%
з них, а)...............................................................10%
б)..............................................................15%
4 приклад.........................................................................20%
5 приклад............................................................................35%
з них, дослідження без застосування першої похідної, знаходження асимптот.................10%
дослідження із застосуванням першої похідної........................................................10%
дослідження із застосуванням другої похідної........................................................10%
побудова графіка...........................................5%

## Приклади розв'язання типових задач.

**Приклад 1.** Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+4}-2}{\ln(3-x)}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Пряма підстановка замість $x$ числа 2 дає невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-2x+4}-2}{\ln(3-x)}=\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+4}}}{-\dfrac{1}{3-x}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-3)}{\sqrt{x^2-2x+4}}=-\frac{1}{2}.$$

**Приклад 2.** Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(e^x-e\right)^4}{\left(1-\sin^2\dfrac{\pi x}{2}\right)^2}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Пряма підстановка дає невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Введемо заміну: $x-1=t, x=t+1, t\to 0$. Тоді $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(e^x-e\right)^4}{\left(1-\sin^2\dfrac{\pi x}{2}\right)^2}=$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\left(e^{t+1}-e\right)^4}{\left(1-\sin^2\dfrac{\pi t+\pi}{2}\right)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{e^4\left(e^t-1\right)^4}{\cos^4\left(\dfrac{\pi t}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{e^4\left(e^t-1\right)^4}{\sin^4\dfrac{\pi t}{2}}=$$

$$=\left|\begin{matrix} e^t-1\sim t, t\to 0 \\ \sin\frac{\pi t}{2}\sim\frac{\pi t}{2}, t\to 0\end{matrix}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{e^4t^4}{\left(\frac{\pi t}{2}\right)^4}=\frac{16e^4}{\pi^4}.$$

**Приклад 3.** Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=\sqrt{x-1}-2$ та $\beta(x)=\ln(x-4)$ при $x\to 5$.

*Розв'язання.* Нагадаємо, при порівнянні двох нескінченно малих функцій $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, при $x\to a$, необхідно знайти $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$. Якщо $c=0$, функція $\alpha(x)$ - вищого порядку малості, ніж $\beta(x)$; якщо $c=\infty$, функція $\alpha(x)$ - нижчого порядку малості, ніж $\beta(x)$; якщо $c=const$, $c\neq 0$, функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ - одного порядку малості, причому, якщо $c=1$, функції еквівалентні. Отже,

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{\ln(x-4)}=\left|\begin{matrix} x-5=t \\ x=t+5 \\ t\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t+4}-2}{\ln(t+1)}=\left|\begin{matrix}\ln(t+1)\sim t \\ t\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t+4-4}{t\left(\sqrt{t+4}+2\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{t+4}+2}=\frac{1}{4}$$ то

бто функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ одного порядку малості, $\alpha(x)\sim\frac{1}{4}\beta(x), x\to 5$.

**Приклад 4.** Дослідіть на неперервність функцію $y=\dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

*Розв'язання.* Функція неперервна в усіх точках, окрім точки $x=0$. Для дослідження поведінки функції в околі точки $x=0$ знайдемо відповідні односторонні границі:

$$\lim_{x\to 0-}\frac{2}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\left|\begin{matrix} x\to 0- \\ \frac{1}{x}\to-\infty \\ 2^{\frac{1}{x}}\to 0\end{matrix}\right|=\frac{2}{1+0}=2;\quad \lim_{x\to 0+}\frac{2}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\left|\begin{matrix} x\to 0+ \\ \frac{1}{x}\to\infty \\ 2^{\frac{1}{x}}\to\infty\end{matrix}\right|=\left(\frac{2}{\infty}\right)=0.$$

Односторонні границі рівні різним константам, отже $x=0$ - точка розриву 1-го роду, розрив типу стрибок.

**Приклад 5.** Знайдіть похідну $y'(x)$, якщо

1) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}(x+27)^4}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$; 2) $\sin(x+y)=\dfrac{y}{x}$; 3) $\begin{cases} x=t^3+3t \\ y=2t^2+t\end{cases}$.

*Розв'язання.*

1) Застосуємо до цієї функції логарифмічне диференціювання:

$$\ln y=\ln\left((x-1)^{\frac{1}{2}}(x+27)^4(2x+3)^{-\frac{2}{3}}\right);$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x-1)+4\ln(x+27)-\frac{2}{3}\ln(2x+3);$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2(x-1)}+\frac{4}{x+27}-\frac{2\cdot 2}{3(2x+3)};$$

$$y' = \frac{\sqrt{x-1}\left(x+27^4\right)}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}\left(\frac{1}{2(x-1)} + \frac{4}{x+27} - \frac{4}{3(2x+3)}\right).$$

2) Функція задана неявно. Продиференцюємо рівність, застосовуючи теорему про диференціювання складеної функції:

$\cos(x+y)\cdot(1+y') = \dfrac{y'x-y}{x^2}$;

$x^2\cos(x+y) + x^2 y'\cos(x+y) = y'x - y$;

$y'\left(x^2\cos(x+y) - x\right) = -y - x^2\cos(x+y)$;

$y' = \dfrac{x^2\cos(x+y)+y}{x - x^2\cos(x+y)}$.

3) Функція задана параметрично. В цьому випадку

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \qquad (1)$$

Тобто, $y'(x) = \dfrac{\left(2t^2+t\right)'}{\left(t^3+3t\right)'} = \dfrac{4t+1}{3t^2+3}$ - теж функція, що задана параметрично, тому

$$y'(x): \begin{cases} x(t) = t^3+3t \\ y'(t) = \dfrac{4t+1}{3t^2+3} \end{cases}.$$

**Приклад 6.** Знайдіть похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо

1) $y = x\arcsin\sqrt{1-x^2}$, $x\in(0;1)$;  2) $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\sqrt[3]{t} \end{cases}, t\in[0;\infty)$.

*Розв'язання.*

1)Друга похідна $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ є похідною від першої похідної, тому продиференцюємо функцію двічі, використовуючи правила диференціювання добутку, частки та складеної функції. Врахуємо при цьому також, що за умови $x\in(0;1)$,

$$y'(x) = \left(x\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)' = \arcsin\sqrt{1-x^2} + x\frac{-2x}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}\cdot 2\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\sqrt{1-x^2} -$$

$$-\frac{x^2}{|x|\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$y''(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}\cdot 2\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2} - x\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}} - \frac{1-x^2+x^2}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\left(1-x^2\right)-1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{x^2-2}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

2)Знайдемо спочатку першу похідну, використовуючи формулу (1):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{6}}.$$

Перша похідна є параметрично заданою функцією:

$$\frac{dy}{dx}:\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{3}t^{-\frac{1}{6}} \end{cases} \qquad (2)$$

Друга похідна є похідною від першої похідної, тому для її знаходження застосуємо формулу (1) до параметричної функції, що задана системою (2):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{6}}\right)'}{\left(\sqrt{t}\right)'}=\frac{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{6}\right)t^{-\frac{7}{6}}}{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}=-\frac{2}{9}t^{-\frac{4}{6}}=\frac{-2}{9\sqrt[3]{t^2}}.$$

**Приклад 7.** Знайдіть похідну $y^{(n)}(x)$, якщо $y(x)=\ln(x+1)$.

<u>*Розв'язання.*</u> Знайдемо послідовно декілька похідних від функції $y(x)$:

$y'(x)=\dfrac{1}{x+1}=(x+1)^{-1}$;

$y''(x)=-1(x+1)^{-2}$;

$y'''(x)=(-1)(-2)(x+1)^{-3}=2!(x+1)^{-3}$;

$y^{(4)}(x)=-3\cdot 2!(x+1)^{-4}=-3!(x+1)^{-4}$;

За допомогою метода математичної індукції можна довести, що

$y^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n}, n\in N, n\neq 1$.

**Приклад 8.** Знайдіть похідну $y^{(5)}(x)$, якщо $y(x)=\cos 3x\left(x^3+3x^2-x+10\right)$.

<u>*Розв'язання.*</u>Скористаємось формулою Лейбниця: $(u\cdot v)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$.

В нашому випадку $n=5$, тобто

$(u\cdot v)^5=C_5^0uv^{(5)}+C_5^1u'v^{(4)}+C_5^2u''v^{(3)}+C_5^3u^{(3)}v''+C_5^4u^{(4)}v'+C_5^5u^{(5)}v$.

Покладемо $u=\cos 3x, v=x^3+3x^2-x+10$. Функція $v=v(x)$ є многочлен 3-го порядку, тому всі її похідні, починаючи з 4-ї, будуть рівні нулю. Знайдемо всі похідні функцій $u$ та $v$, що потрібні за формулою:

$u^{(2)}=-3^2\cos 3x, u^{(3)}=3^3\sin 3x, u^{(4)}=3^4\cos 3x, u^{(5)}=-3^5\sin 3x, v'=3x^2+6x-1, v''=6x+6, v'''=6$

$\left(\cos 3x\left(x^3+3x^2-x+10\right)\right)^{(5)}=C_5^2\left(-3^2\right)\cos 3x\cdot 6+C_5^3 3^3\sin 3x(6x+6)+C_5^4 3^4\cos 3x\left(3x^2+6x-1+\right)$

$+C_5^5\left(-3^5\right)\sin 3x\left(x^3+3x^2-x+10\right)=\dfrac{5!}{2!3!}(-9)\cos 3x\cdot 6+\dfrac{5!}{3!2!}27\sin 3x(6x+6)\dfrac{5!}{4!1!}81\cos 3x\times$

$\times\left(3x^2+6x-1\right)-24\sin 3x\left(x^3+3x^2-x+10\right)=13\left(9x^2+18x-7\right)\cos 3x-8\left(13x^3+9x^2-23x+10\right)\times$
$\times\sin 3x$.

**Приклад 9.** Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t^2} \\ y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{2}{t} \end{cases}$

В точці, що відповідає значенню параметра $t_0=2$.

*Розв'язання.* Нагадаємо, що дотична до кривої $y=f(x)$ в точці $M(x_0;y_0)$ задається рівнянням: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$, нормаль, відповідно, рівнянням: $y=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+y_0$. З умови задачі випливає, що значенню параметра $t_0=2$ відповідає точка $M(x_0;y_0)$, де $x_0=x(t_0)=\dfrac{3}{4}, y_0=y(t_0)=\dfrac{11}{8}$. Похідна $f'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=$ $=\dfrac{2t+3}{t+2}$, $f'(x_0)=f'(x)\big|_{t_0=2}=\dfrac{7}{4}$. Тоді рівняння дотичної має вигляд:
$y=\dfrac{7}{4}\left(x-\dfrac{3}{4}\right)+\dfrac{11}{8}, y=\dfrac{7}{4}x+\dfrac{1}{16}, 28x-16y+1=0$. Рівняння нормалі, відповідно:
$y=-\dfrac{4}{7}\left(x-\dfrac{3}{4}\right)+\dfrac{11}{8}, y=-\dfrac{4}{7}x+\dfrac{101}{56}, 32x+56y-101=0$.

**Приклад 10.** Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $y(x)=x^2-4x+3$, які проходять через точку $M_1(1;0)$. Складіть також рівняння дотичної, що проходить через точку $M_2(3;-1)$.

*Розв'язання.* Прямою підстановкою легко перевірити, що точка $M_1$ належить кривій і може розглядатись як точка дотику з координатами $x_o=1, y_0=0$. Тоді $y'(x)=2x-4, y'(x_0)=-2$. Отже рівняння дотичної має вигляд:
$y=-2(x-1)+0, y=-2x+2$, а рівняння нормалі: $y=\dfrac{1}{2}(x-1)+0, y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.
Точка $M_2$ не лежить на кривій. Через цю точку можна провести дві дотичні до кривої $y(x)$. Нехай одна з точок дотику цих дотичних буде точка $M_0(x_0;y_0)$, де $y_0=x_0^2-4x_0+3$. Тоді рівняння відповідної дотичної має вигляд:

$$y=(2x_0-4)(x-x_0)+x_0^2-4x_0+3 \qquad (3)$$

Точка $M_2(3;-1)$ належить цій дотичній, тому координати точки $M_2$ задовольняють рівність (3):

$$-1=(2x_0-4)(3-x_0)+x_0^2-4x_0+3 \Rightarrow x_0^2-6x_0+8=0 \Rightarrow x_0=\left[\begin{array}{l}2\\4\end{array}\right..$$

Підставляючи в рівність (3) значення $x_0$, отримаємо рівняння двох дотичних:

$$\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=4x-13\end{array}\right..$$

**Приклад 11.** Знайдіть рівняння дотичних до кривої $y(x)=x^2-6x+8$, одна з яких паралельна прямій $l:4x+y=2$, а друга перпендикулярна.

*Розв'язання.* Кутовий коефіцієнт прямої $l:y=-4x+2$ рівний $k=-4$. Кутовий коефіцієнт паралельної дотичної також повинен бути рівний -4, тому $y'(x_1)=2x_1-6=-4 \Rightarrow x_1=1$, де $x_1$ - абсциса точки дотику. Якщо $x_1=1$, то $y_1=3$ і рівняння паралельної дотичної має вигляд:

$$y=-4(x-1)+3, y=-4x+7, 4x+y-7=0.$$

Кутовий коефіцієнт перпендикулярної дотичної $y'(x_2)$, де $x_2$ - абсциса точки дотику, такий, що виконується рівність:

$-4\cdot y'(x_2)=-1 \Rightarrow y'(x_2)=\dfrac{1}{4} \Rightarrow 2x_2-6=\dfrac{1}{4} \Rightarrow x_2=\dfrac{25}{8}, y_2=-\dfrac{63}{64}$. Тоді рівняння дотичної має вигляд: $y=\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{25}{8}\right)-\dfrac{63}{64}, 16x-64y-113=0$.

**Приклад 12.** Проведіть повне дослідження функції $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$ та побудуйте її графік.

*Розв'язання.*

Область визначення даної функції: $x\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3};\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};\infty)$. Функція непарна, тому достатньо побудувати графік функції для $x\in[0;\infty)$ і відобразити побудовану лінію симетрично відносно початку координат. При цьому точка $(0;0)$ належить кривій. Оскільки $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}+} y(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to\sqrt{3}-} y(x)=\infty$, то при $x=\sqrt{3}$, відповідно і при $x=-\sqrt{3}$ функція має вертикальні асимптоти.

Для знаходження похилої асимптоти $y=kx+b$ обчислимо коефіцієнти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=-1, b=\lim_{x\to\pm\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{3-x^2}=0.$$

Отже, $y=-x$ - похила асимптота.

Знайдемо похідну $y'(x)=\dfrac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}$. Похідна додатня, а функція відповідно зростаюча при $x\in(-3;3)$ і похідна від'ємна, а функція відповідно спадна при $x\in(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$. Тоді точки $x=\pm3$ є точками екстремума, а саме: $y_{\max}=y(3)=-4{,}5$, $y_{\min}=y(-3)=4{,}5$.

Знайдемо другу похідну: $y''(x)=\dfrac{2x(3x^2+27)}{(3-x^2)^3}$. Друга похідна додатня, а отже функція опукла вниз при $x\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(0;\sqrt{3})$ і від'ємна, а отже функція опукла вгору при $x\in(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};\infty)$. Точка $(0;0)$ є точкою перегину.

Залишається намалювати графік.

МА МКР-1

Варіант №1

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)tg\,\dfrac{x}{2}$.

2.Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=2(e^{\pi x}-1)$ та $\beta(x)=3(\sqrt[3]{1+x}-1)$, при $x\to 0$.

3.Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $\cos xy = x$, б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=t-arctgt \end{cases}$.

4. Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $\begin{cases} x=2t \\ y=3t^2-5t \end{cases}$ в точці, що відповідає значенню параметра $t=1$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=2x-2+\dfrac{1}{x+1}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №2

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$.

2.Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=\ln(tgx)$ та $\beta(x)=\cos 2x$, при $x\to\frac{\pi}{4}$

.

3.Знайдіть похідні: а) $y'(x)$ ,якщо $\begin{cases}x=t^2+2t\\ y=t^3+t\end{cases}$, $t\geq 0$ ,б) $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $y=x\cdot arctg\,\sqrt{x^2-1}$.

4. Складіть рівняння дотичної та нормалі до еліпса $x^2+4y^2=20$ в його точці з абсцисою $x=4$ та додатньою ординатою.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=\frac{x^2}{x+1}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №3

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x^2-\pi^2}{\sin x}$.

2.Порівняте нескінченно малі функції $\alpha(x)=1+\cos\pi x$ та $\beta(x)=tg^2\pi x$, при $x\to 1$

.

3.Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $x-y=\arcsin x-\arcsin y$,

б) $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases}x=t\sin t\\ y=t\cos t\end{cases}$, $t\in(0,\pi)$.

4. Складіть рівняння дотичної та нормалі до гіперболи $2x^2-9y^2=9$ в її точці з абсцисою $x=3$ та додатньою ординатою.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=x^2\ln x$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №4

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$.

2.Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x)=\ln(\sin 3x)$ та $\beta(x)=(6x-\pi)^2$, при $x\to\frac{\pi}{6}$.

3.Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $\begin{cases}x=t\ln t\\ y=\dfrac{\ln t}{t}\end{cases}$, $t\geq 1$; б) $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $y=\ln^3(1-x)$.

4. Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $\begin{cases}x=1-t^2\\ y=1-t^3\end{cases}$ в точці, що відповідає параметру $t=2$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=\dfrac{x}{\ln x}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №5

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$.

2.Порівняйте нескінченно малі $\alpha(x)=2^{\sin^2 x}-1$ та $\beta(x)=tg(\cos x-1)$, при $x\to 2\pi$.

3.Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=5y$; б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases}x=te^t\\ y=e^{2t}\end{cases}$.

4. Складіть рівняння дотичної до гіперболи $y=\dfrac{x-4}{x-2}$ в точці її перетину з віссю $OX$ .

5.Проведіть повне дослідження функції $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №6

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+2}{3x^2+x+1}\right)^{2x}$.

2.Порівняйте нескінченно малі $\alpha(x)=(x-2\pi)^2$ та $\beta(x)=tg(\cos x-1)$, при $x\to 2\pi$.

3.Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $\begin{cases}x=e^t\\ y=\arcsin t\end{cases}$, $|t|\leq 1$ ;б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ,якщо $y=\arcsin\sqrt{1-e^{4x}}$.

4. Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $\begin{cases}x=t^2-1\\ y=t^2+t-3\end{cases}$ в точці $(3,-1)$ .

5.Проведіть повне дослідження функції $y=x\ln^2 x$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №7

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$.

2.Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=\sqrt{x^2-3x+3}-1$ та $\beta(x)=\sin\pi x$, при $x\to 1$.

3.Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $arctg(x+y)=xy$;

б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ,якщо $\begin{cases}x=\cos 2t\\ y=\sin 2t+2\cos 2t\end{cases}$, $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Складіть рівняння нормалі до лінії $y=2-\sqrt{x}$ в точці її перетину з прямою $y=x$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=x^2-4\ln(x+1)$ та побудуйте її графік

MA МКР-1

## Варіант №8

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2+x-6}$.

2.Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=1-\cos x\sqrt{\cos 2x}$ та $\beta(x)=x^2$, при $x\to 0$.

3.Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $\begin{cases} x=\arcsin(t^2-1) \\ y=\arccos 2t \end{cases}, |t|\le\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$,якщо $y=\ln tg\left(\dfrac{3x}{2}\right)$.

4. Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=x^3+4x^2-1$ в її точці з абсцисою $x=1$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=x+2arctgx$ та побудуйте її графік.

MA МКР-1

## Варіант №9

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)tg\,\dfrac{\pi x}{2}$.

2.Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=\sin 5(x+\pi)$ та $\beta(x)=e^{5x}-1$, при $x\to 0$.

3.Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $arcctg\left(\dfrac{y}{x}\right)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\sqrt[3]{t} \end{cases}$.

4. Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ в точці її перетину з віссю $OX$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=x^2+\dfrac{16}{x}$ та побудуйте її графік.

MA МКР-1

## Варіант №10

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+x-1}{4x^2-3x}\right)^{7x}$.

2.Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ та $\beta=\log_5(x+1)$, при $x\to 0$.

3.Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$, $t\in R$, $a=const$;

б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $y=x\cdot 2^{x^2+2}$.

4. Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\ln x+3$ в її точці з абсцисою $x=1$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=xe^{2x}+1$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №11

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$.

2.Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=\sin 5x^2$ та $\beta(x)=x-\sqrt{x}$, при $x\to0$.

3.Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $y=4+x\cdot e^y$; б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\ln\left(1-t^2\right) \end{cases}$, $t\in(-1{,}1)$.

4. Складіть рівняння дотичної та нормалі до гіперболи $y=\dfrac{x-2}{x-4}$ в точці її перетину з віссю $OX$ .

5.Проведіть повне дослідження функції $y=\dfrac{-x^3}{1-x^2}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №12

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\log_2 x}$.

2.Порівняйте нескінченно малі $\alpha=\sqrt{x^2-x+1}-1$ та $\beta=x^3+x^2-5x+3$, при $x\to1$.

3.Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $e^{x+y}\cdot\sin x=\cos y$; б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$.

4.В яких точках лінії $y=x^3+x-2$ дотична до неї паралельна прямій $y=4x-1$?

5.Проведіть повне дослідження функції $y=\dfrac{x^2-4}{x+1}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №13

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2^x-2}{\log_5 x}$.

2.Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=x^3-\pi^3$ та $\beta(x)=\sin^2 5x$, при $x\to\pi$ .

3.Знайдіть похідні: а) $y'(x)$ ,якщо $\begin{cases} x=arctgt \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$, $t\in R$ ;б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ,якщо $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

4. Складіть рівняння дотичної та нормалі до еліпса $3x^2+4y^2=7$ в його точці з абсцисою $x=1$ та від'ємною ординатою.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=x^2\cdot e^{-x}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №14

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

2.Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=1-\cos 7x$ та $\beta(x)=e^{\sin 2x}-1$, при $x\to 0$.

3.Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $2x\ln y=y$; б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$.

4.Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=4x-\dfrac{2}{x+3}$ в її точці з абсцисою $x=-2$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №15

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x^2+3}{6x^2-4}\right)^{2x+5}$.

2.Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=\sin^3\sqrt{x}$ та $\beta(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$, при $x\to 0$.

3.Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos 2t\end{cases}, |t|<\dfrac{\pi}{2}$; б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $y=\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

4.Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $\begin{cases}x=2-t^3\\ y=2-t^2\end{cases}$ в точці, що відповідає значенню параметра $t=-1$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=x\cdot e^{-x}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №16

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 1}\cos\dfrac{\pi x}{2}\Big/\left(1-\sqrt{x}\right)$.

2. Дослідити функцію $y=\ln\dfrac{x-3}{x}$ на неперервність.

3.Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $x-y=tg(xy)$; б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$.

4.В якій точці кривої $y=2x^2$ дотична паралельна до прямої $4x-3y+2=0$?

5.Проведіть повне дослідження функції $y=(x+1)^2(x-2)$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №17

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+7}{3x+11}\right)^{3x+2}$.

2. Дослідіть функцію $y = x + arctg\,\frac{x}{x-1}$ на неперервність.

3. Знайдіть похідні: а) $y'(x)$,якщо $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$, $t \in (0,\infty)$; б) $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $y = arctg\,\frac{1-x}{1+x}$.

4.Складіть рівняння дотичної та нормалі до гіперболи $4x^2 - 3y^2 = 1$ в її точці з абсцисою $x = -1$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y = \sqrt[3]{x^2} - x$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №18

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3x}}$.

2. Дослідіть функцію $y = 2 - x\cdot\sin\frac{1}{x}$ на неперервність.

3. Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $\sin(x+y) = xy$; б) $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t + 2\sin t \end{cases}$.

4.Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $\begin{cases} x = 3e^t \\ y = -2e^{-t} \end{cases}$ в точці, що відповідає параметру $t = 0$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y = (2x-1)e^{2(1-x)}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №19

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln\left(9-2x^2\right)}{\sin 2\pi x}$.

2. Дослідіть функцію $y = \arcsin\frac{x^2}{x+2}$ на неперервність.

3. Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$; б) $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $y = 2^{\ln^2 x}$.

4.Складіть рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ в точках його перетину з віссю $OX$ .

5.Проведіть повне дослідження функції $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №20

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ .

2. Дослідіть функцію $y=\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$ на неперервність.

3. Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $x^2+y^2=\ln(xy)$; б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x=e^t \\ y=e^{2t}\sin t \end{cases}$.

4.Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $\begin{cases} x=2e^t \\ y=e^{-t} \end{cases}$ в точці, що відповідає параметру $t=0$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=e^{-x^2}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №21

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2}{3x^2-2}\right)^{6x^3}$ .

2. Дослідіть функцію $y=\dfrac{1}{1+5^{tgx}}$ на неперервність.

3. Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $y=\sqrt[5]{\dfrac{x(x^2+2)}{x-5}}$; б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $y=e^{\sqrt{x}}$.

4.Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos 2t \end{cases}$ в точці, що відповідає параметру $t=\dfrac{\pi}{6}$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=xe^{\frac{1}{x}}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №22

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. Дослідіть функцію $y=2^{\frac{-1}{x^2}}$ на неперервність.

3. Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $y=(\sin x)^x$; б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x=5^t+1 \\ y=10^t-4 \end{cases}$.

4.Складіть рівняння нормалі до кривої $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$ в її точці з абсцисою $x=3$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=arctg\dfrac{1}{x}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №23

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x^3-\pi^3}{\sin 3x}$.

2. Дослідіть функцію $y=\frac{3^x+1}{3^x-9}$ на неперервність.

3. Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $y=(\ln x)^{x^2}$; б) $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $y=\sqrt{4-x^2}$.

4.Складіть рівняння дотичної до кривої $y=x^3+3x^2-5$, що перпендикулярна до прямої $2x-6y+1=0$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №24

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 3x\right)^{\frac{1}{4x}}$.

2. Дослідіть функцію $y=\frac{x}{3^x-1}$ на неперервність.

3. Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $y=arctg\sqrt{x^3-1}$; б) $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\arccos t \end{cases}$.

4.Складіть рівняння дотичних до кривої $y=x-\frac{1}{x}$ в точках її перетину з віссю абсцис.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=\frac{\ln x}{x}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №25

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5^x-5}{\ln x}$.

2. Дослідіть функцію $y=\frac{|2x-5|}{2x-5}$ на неперервність.

3. Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $y=\frac{x^2}{1-\cos 2x}$; б) $\frac{d^ny}{dx^n}$, якщо $y=xe^x$.

4.Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $\begin{cases} x=2\ln ctgt+1 \\ y=tgt+ctgt \end{cases}$ в точці, що відповідає параметру $t=\frac{\pi}{4}$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=\frac{e^{x+2}}{x+2}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №26

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{e^{3x^2}-1}$.

2. Дослідіть функцію $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$ на неперервність.

3. Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{\cos x}}$; б) $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, якщо $y=x\ln x$.

4.Складіть рівняння дотичних до еліпса $\dfrac{x^2}{30}+\dfrac{y^2}{24}=1$, що паралельні прямій $y=2x-3$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=e^{2x-x^2}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №27

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(7^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

2. Дослідіть функцію $y=\dfrac{1}{x^2-16}$ на неперервність.

3. Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $y=\arcsin^3 x^2$; б) $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, якщо $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

4.Складіть рівняння дотичних до кривої $y=x^3$, що паралельні прямій $3x-y+5=0$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=x^2e^{\frac{2}{x}}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №28

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$.

2. Дослідіть функцію $y=e^{\frac{1}{\sin x}}$ на неперервність.

3. Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $y=\dfrac{\cos 2x}{e^{4x}}$;б) $y^{(4)}(x)$, якщо $y=\left(x^3+2x^2+x+5\right)\ln x$.

4.Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $y^2=x^3$ в точці $M(4,8)$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=(x-2)e^{-\frac{1}{x}}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №29

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^4\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$.

2. Дослідіть функцію $y=(x+1)arctg\dfrac{1}{x}$ на неперервність.

3. Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $y=\frac{3\sqrt{t}+1}{t^2-1}, t\in(0,\infty)$; б) $y^{(3)}(x)$, якщо $y=e^{2x}\left(x^3+x^2+x+6\right)$.

4. Складіть рівняння дотичної до параболи $y=\frac{1}{2}x^2-3x-6$, що перпендикулярна до прямої $x+5y-10=0$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=\frac{2x+1}{x^2}$ та побудуйте її графік.

МА МКР-1

Варіант №30

1.Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^4+7}{4x^4-3}\right)^{5x^4}$.

2. Дослідіть функцію $y=2^{\frac{x}{4-x^2}}$ на неперервність.

3. Знайдіть похідні: а) $y'(x)$, якщо $y=\sqrt{\arcsin(2x^2+4)}$; б) $y^{(4)}(x)$, якщо $y=\sin 2x\left(x^2-x+6\right)$.

4. Складіть рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$, що перпендикулярні до прямої $y=-\frac{1}{2}x+1$.

5.Проведіть повне дослідження функції $y=\frac{x^2-x-6}{x-2}$ та побудуйте її графік.

**Відповіді.**

*Варіант 1.*

№1:-1; №2: одного порядку малості ($2\pi$); №3: а) $-\frac{1+y\sin xy}{x\sin xy}$; б) $\frac{t^2+1}{4t}$;

№4: дот.: $x-2y-6=0$, норм.: $2x+y-2=0$; №5: $y_{\max}=y\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $y_{\min}=y\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, асимптоти: $x=-1$, $y=2x-2$.

*Варіант 2.*

№1: 2; №2: одного порядку малості $(-1)$; №3: а) $\frac{3t^2+1}{2t+2}$; б) $\frac{-1}{x\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$;

№4: дот.: $x-y-3=0$, норм.: $x+y-5=0$; №5: $y_{\max}=y(-2)$, $y_{\min}=y(0)=0$, асимптоти: $x=-1, y=x-1$.

*Варіант 3.*

№1: $-2\pi$; №2: одного порядку малості $\left(\frac{\pi}{2}\right)$; №3: а) $\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\cdot\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-y^2}}$;

б) $-\dfrac{t^2+2}{(\sin t + t\cos t)^3}$; №4: дот.: $2x-3y-3=0$; норм.: $3x+2y-11=0$; №5: $x\in(0;\infty), (1;0)$ -т.перетину з віссю $Ox$, $y_{\min}=y\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=-\dfrac{1}{2e}$, в $x=e^{-\frac{3}{2}}$ - т. перегин., асимптот немає, $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)=0$.

*Варіант 4.*

№1: $\infty$; №2: одного порядку малості $\left(-\dfrac{1}{8}\right)$; №3: а) $\dfrac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)}$;

б) $\dfrac{3\ln(1-x)\cdot(2-\ln(1-x))}{(x-1)^2}$; №4: дот.: $3x-y+2=0$; норм.: $x+3y+24=0$; №5: $x\in(0;\infty)$, $y_{\min}=y(e)=e$, $x=1$ - асимптота, $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)=0$, $x\in(0;1)\cup(e^2;\infty)$ - опукла вгору, $x\in(1;e^2)$ - опукла вниз, в $x=1, x=e^2$ - т. перегину.

*Варіант 5.*

№1: $\dfrac{1}{2}$; №2: одного порядку малості $(-2\ln 2)$; №3: а) $\dfrac{x+ye^{-\frac{y}{x}}}{5x^2+xe^{-\frac{y}{x}}}$; б) $\dfrac{2t}{(1+t)^3}$;

№4: $x-2y-4=0$; №5: $x\in(0;\infty)$, екстремумів немає, функція зростаюча, $x=e^{\frac{3}{2}}$ -

т. перегину, $x=0, y=x$ - асимптоти.

*Варіант 6.*

№1: $e^{-\frac{4}{3}}$; №2: одного порядку малості $(-2)$; №3: а) $\dfrac{1}{e^t\sqrt{1-t^2}}$; б) $\dfrac{-4e^{2x}}{\left(1-e^{4x}\right)^{\frac{3}{2}}}$;

№4: дот.: $3x-4y-13=0$, норм.: $4x+3y-9=0$; №5: $x\in(0;\infty), y\in(0;\infty), (1;0)$ - т.перетину з віссю $Ox$, $y_{\max}=y\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\dfrac{4}{e^2}$, $y_{\min}=y(1)=0$, в $x=\dfrac{1}{e}$ - т. перегину, асимптот немає, $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)=0$.

*Варіант 7.*

№1: -3; №2: одного порядку малості $\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)$; №3: а) $\dfrac{y+y(x+y)^2-1}{1-x-x(x+y)^2}$; б) $\dfrac{-1}{\sin^3 2t}$;

№4: $2x-y-1=0$; №5: $x\in(-1;\infty), (0;0)$ -т., що належить графіку, $y_{\min}=y(1)$, функція опукла вниз, $x=-1$ - асимптота.

*Варіант 8.*

№1: 1; №2: одного порядку малості $\left(\dfrac{3}{2}\right)$; №3: а) $-\dfrac{\sqrt{2t^2-t^4}}{t\sqrt{1-4t^2}}$; б) $-\dfrac{9\cos 3x}{\sin^2 3x}$;

№4: дот.: $5x+y+3=0$, норм.: $x-5y+11=0$; №5: функція неперервна, зростаюча, екстремумів немає, $(0;0)$-т. перегину; $y=x+\pi, y=x-\pi$ - асимптоти.

*Варіант 9.*

№1: $-\frac{2}{\pi}$; №2: одного порядку малості $(-1)$; №3: а) $\frac{y-x}{y+x}$; б) $-\frac{2}{9\sqrt[3]{t^2}}$; №4: дот.: $x-2y-1=0$; норм,: $2x+y-2=0$; №5: $x\neq 0, \left(-\sqrt[3]{16};0\right)$ - т. перегину, $y_{\min}=y(2)=12$, $x=0$ - асимптота.

*Варіант 10.*

№1: $e^7$; №2: одного порядку малості $\left(\frac{\pi \ln 5}{2}\right)$; №3: а) $\frac{\sin t}{1-\cos t}$;

б) $x\cdot 2^{x^2+1}\ln 4\left(3+x^2\ln 4\right)$; №4: дот.: $y-x-2=0$, норм.: $x+y-4=0$; №5: $(0;1)$- т.перетину з віссю $Oy$, $y_{\min}=y\left(-\frac{1}{2}\right)$, в $x=-1$ - т. перегину, асимптот немає.

*Варіант 11.*

№1: $-\frac{8}{3\sqrt{2}}$; №2: $\alpha(x)$ - вищого порядку малості $(0)$; №3: а) $\frac{e^y}{1-xe^y}$; б) $-\frac{2}{1-t^2}$;

№4: дот.: $x+2y-2=0$; норм.: $2x-y-4=0$; №5; функція непарна, $(0;0)$-т., що належить графіку, $y_{\max}=y\left(-\sqrt{3}\right)$, $y_{\min}=y\left(\sqrt{3}\right)$; $x=1, x=-1$ - гор.асимптоти; $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$-ф. опукла вгору, $x\in(-1;0)\cup(1;\infty)$-ф. опукла вниз, $y=x$ - асимптота.

*Варіант 12.*

№1: $-\ln 2$; №2: $\beta(x)$ вищого порядку малості $(-\infty)$; №3: а) $\frac{-e^{x+y}(\cos x+\sin x)}{\sin xe^{x+y}+\sin y}$;

б) $-\frac{2}{e^t(\sin t+\cos t)^3}$; №4: $A(1;0), B(-1;-4)$; №5: функція зростаюча при $x\in R$, $(2;0),(-2;0)$-т. перетину з віссю $Ox$, $x=-1$, $y=x-1$ - асимптоти; при $x\in(-\infty;-1)$ ф. опукла вниз, при $x\in(-1;\infty)$ опукла вгору.

*Варіант 13.*

№1: $\ln 4\cdot\ln 5$; №2: $\beta(x)$ вищого порядку малості $(\infty)$; №3: а) $2t$; б) $\frac{-x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$;

№4: дот.: $3x-4y-7=0$, норм.: $4x+3y-1=0$; №5: $y\in(0;\infty),(0;0)$-т., що належить графіку; $y_{\min}=y(0)=0$, $y_{\max}=y(2)=\frac{4}{e^2}$, $x=2+\sqrt{2}, x=2-\sqrt{2}$ - т. перегину, $y=0$ - асимптота.

*Варіант 14.*

№1: $\frac{3}{2}$; №2: $\alpha(x)$ вищого порядку малості $(0)$; №3: а) $\frac{2y\ln y}{y-2x}$; б) $\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$;
№4: дот.: $6x-y+2=0$, норм.: $x+6y+62=0$; №5: функція непарна, $(0;0)$-т., що належить графіку, $y_{\max}=y\left(-\sqrt{3}\right)$, $y_{\min}=y\left(\sqrt{3}\right)$, при $x\in(-3;-1)\cup(0;1)\cup(3;\infty)$-ф. опукла вгору, при $x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup(-1;0)\cup(1;3)$-ф. опукла вниз; $x=\pm1$-асимптоти.

*Варіант 15.*

№1: $e^{\frac{7}{3}}$; №2: $\alpha(x)$ вищого порядку малості $(0)$; №3: а) $-4\sin t$; б) $-4\frac{3x^4+1}{\left(1-x^4\right)^2}$;
№4: дот.: $2x+3y-9=0$, норм.: $3x-2y-7=0$; №5: $(0;0)$-т.,що належить графіку,
$y_{\max}=y(1)=\frac{1}{e}$, $\left(2;\frac{2}{e^2}\right)$ - т. перегину, $y=0$ - асимптота при $x\to\infty$.

*Варіант 16.*

№1: $\pi$; №2: $x=0, x=3$ - т. розриву 2-го роду, $\lim\limits_{x\to0-}y(x)=\infty, \lim\limits_{x\to3+}y(x)=-\infty$;
№3: а) $\frac{-y+\cos^2(xy)}{x+\cos^2(xy)}$; б) $\frac{-1}{a(1-\cos t)^2}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$; №4: $A\left(\frac{1}{3};\frac{2}{9}\right)$;
№5: $(-1;0),(2;0)$ - т.перетину з віссю $Ox$; при $x=0$ т. перегину; асимптот немає.

*Варіант 17.*

№1: $e^{-4}$; №2: $x=1$ - т. розриву 1-го роду, $\lim\limits_{x\to1-}y(x)=1-\frac{\pi}{2}, \lim\limits_{x\to1+}y(x)=1+\frac{\pi}{2}$;
№3: а) $\frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$; б) $\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$; №4: дот.: $4x+3y+1=0$, норм.: $3x-4y+7=0$;
№5: $(0;0),(1;0)$ - т. перетину з осями; $y_{\min}=y(0)=0$, $y_{\max}=y\left(\frac{8}{27}\right)=\frac{4}{27}$,
функція опукла вгору, асимптот немає.

*Варіант 18.*

№1: $\sqrt[3]{e}$; №2: $x=0$ - т. усувного розриву, $\lim\limits_{x\to0}y(x)=2$; №3: а) $-\frac{y-\cos(x+y)}{\cos(x+y)-x}$;

б) $-\dfrac{\cos t+2}{\sin^3 t}$;№4: дот.: $2x-3y-12=0$, норм.: $3x+2y-5=0$; №5: $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$-т. перет.
з віссю $Ox$ , $y_{\max}=y(1)=1$; при $x\in\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$ ф. опукла вгору, при $x\in\left(\dfrac{3}{2};\infty\right)$ ф. опукла вниз, $y\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{2}{e}$ - т. перегину; $y=0$ - асимптота при $x\to\infty$ .

*Варіант 19.*
№1: $-\dfrac{4}{\pi}$; №2: функція неперервна при $x\in[-1;2]$; №3: а) $\dfrac{t}{2}$ ,
б) $\dfrac{2^{\ln^2 x}\cdot\ln 4}{x^2}\left(\ln 4\cdot\ln^2 x-\ln x+1\right)$; №4: $y=2x+2,\ y=-2x+6$; №5: $x\in(0;\infty),(1;0)$ -т. перетину з віссю $Ox$ ; $y_{\max}=y\left(e^2\right)=\dfrac{2}{e}$, при $x=e^{\frac{8}{3}}$ - т. перегину, $y=0$ - асимптота при $x\to\infty$ .

*Варіант 20.*
№1: -2; №2: $x=0$- т. усувного розриву, $\lim\limits_{x\to 0}y(x)=\dfrac{1}{2}$; $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ -т. розриву 2-го роду;№3: а)$\dfrac{y\left(1-2x^2\right)}{x\left(2y^2-1\right)}$; б) $\sin t+3\cos t$; №4:дот.:$x+2y-4=0$, норм.:$2x-y-3=0$; №5: функція парна, $y\in(0;\infty)$, $(0;1)$ - т. перетину з віссю $Oy$ ,
$y_{\max}=y(0)=1$; при $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ - т. перегину.

*Варіант 21.*
№1: $\infty$; №2: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ - т.розриву 1-го роду, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}y(x)=0,\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}y(x)=1$;
№3:а) $\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x^2+2}-\dfrac{1}{x-5}\right)\sqrt[5]{\dfrac{x\left(x^2+2\right)}{x-5}}$ , б) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}$; №4: дот.:$4x+2y-3=0$,
норм.: $2x-4y+1=0$; №5: $x\in R\backslash\{0\}$ ; $x=0$-верт.асимптота, $\lim\limits_{x\to 0-}y=0,\ \lim\limits_{x\to 0+}y=\infty$;
при $x\in(-\infty;0)\cup(1;\infty)$ ф. зростає, при $x\in(0;1)$ ф. спадає, $y_{\min}=y(1)=e$,
при $x\in(-\infty;-1)\cup(0;\infty)$ ф. опукла вниз, при $x\in(-1;0)$ ф. опукла вгору, $\left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$-
т. перегину; $y=x+1$ - асимптота, $\lim\limits_{x\to 0-}y(x)=0$ .

*Варіант 22.*

№1: $e^{-\frac{1}{2}}$; №2: $x=0$ - т. усувного розриву, $\lim\limits_{x\to 0} y(x)=0$; №3: а $(\sin x)^x(\ln\sin x + xctgx)$;

б) $\frac{\ln 2\cdot\ln 10}{\ln 5}\left(\frac{2}{5}\right)^t$; №4: $27x-3y-79=0$; №5: функція спадна, $x\neq 0$, $x=0$ - асимптота, $\lim\limits_{x\to 0-} y(x)=-\frac{\pi}{2}, \lim\limits_{x\to 0+} y(x)=\frac{\pi}{2}$; екстремумів немає; $x\in(-\infty;0)$ - ф. опукла вгору, $x\in(0;\infty)$ - ф. опукла вниз; $y=0$ - асимптота при $x\to\pm\infty$.

*Варіант 23.*

№1: $-\pi^2$; №2: $x=2$ - т. розриву 2-го роду, $\lim\limits_{x\to 2-} y(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to 2+} y(x)=\infty$

№3: а) $(\ln x)^{x^2}\cdot\left(2x\ln(\ln x)+\frac{x}{\ln x}\right)$;

б) $-\frac{4}{\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; №4: $3x+y+6=0$; №5: $(-2;0)$, $y_{\max}=y(-1), y_{\min}=y(2)$, $x=-\frac{2}{5}$ - т. перегину, $x=0, y=x+3$ - асимптоти, $\lim\limits_{x\to 0-} y(x)=0$.

*Варіант 24.*

№1: 1; №2: $x=0$- т.усувного розриву, $\lim\limits_{x\to 0} y(x)=\frac{1}{\ln 3}$; №3:а) $\frac{3}{2x\sqrt{x^3-1}}$;б) $\frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}$;

№4: $y=2x-2$, $y=2x+2$; №5: $x\in(0;\infty)$, $y_{\max}=y(e)=\frac{1}{e}$, при $x=e^{\frac{3}{2}}$ - т. перегину;

$y=0, x=0$-асимптоти.

*Варіант 25.*

№1: $5\ln 5$; №2: $x=\frac{5}{2}$ - т. розриву 1-го роду; №3: а) $\frac{2x(1-\cos 2x-x\sin 2x)}{(1-\cos 2x)^2}$; б) $e^x(n+x)$; №4: дот.: $y=2$, норм.: $x=1$; №5: $x\in R\setminus\{-2\}$, $x=-2$ - верт.ас.; $\left(0;\frac{e^2}{2}\right)$-т.перетину з віссю $Oy$; $y_{\min}=y(-1)=e$,при $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)$ ф. спадає, при $x\in(-1;\infty)$ ф. зростає; $y=0$ - асимптота при $x\to-\infty$.

*Варіант 26.*

№1: $\frac{32}{3}$; №2: $x=-1$ - т.усувного розриву, $\lim\limits_{x\to -1} y(x)=\frac{1}{3}$; №3: а) $\frac{2\cos x+(x+1)\sin x}{2(\cos)^{\frac{3}{2}}}$;

б) $(-1)^n 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)x^{-(n-1)}$; №4: $2x-y+12=0, 2x-y-12=0$; №5: $(0;1), y\in(0;\infty)$, $y_{\max}=y(1)=e$, при $x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}, x=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ - т.перегину, $y=0$ - асимптота при $x\to\pm\infty$.

*Варіант 27.*

№1: $\ln 7$; №2: $x=-4, x=4$ - т. розриву 2-го роду, $\lim\limits_{x\to -4-} y=\infty, \lim\limits_{x\to -4+} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 4-} y=-\infty, \lim\limits_{x\to 4+} y=\infty$; №3: а) $\frac{6x\arcsin^2 x^2}{\sqrt{1-x^4}}$; б) $\frac{(-1)^n}{2}n!\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$;

№4: $3x-y-2=0, 3x-y+2=0$; №5: $x\in R\setminus\{0\}$, $x=0$-ас., $\lim\limits_{x\to 0+} y=\infty$; $\lim\limits_{x\to 0-} y=0$; $y\in(0;\infty)$, $y_{\min}=y(1)=e^2$, ф.опукла вниз.

*Варіант 28.*

№1: $\frac{1}{8}$; №2: $x=\pi n, n\in Z$ - т. розриву 2-го роду; №3: а) $\frac{-2\sin 2x-\cos 2x}{e^{4x}}$,

б) $y^{(4)}=\frac{6}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{30}{x^4}$; №4: дот.: $3x-y-4=0$, норм.: $x+3y-28=0$; №5: $(2;0)$ - т.перетину з віссю $Ox$; $y_{\max}=y(-2)=-4\sqrt{e}, y_{\min}=y(1)=-\frac{1}{e}$, при $x=\frac{2}{5}$ - т.перегину,

$x=0, y=x-3$ -асимптоти, $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)=0$.

*Варіант 29.*

№1: $e^3$; №2: $x=0$ - т.розриву 1-го роду; №3: а) $-\frac{9t^2+4t\sqrt{t}+3}{2\sqrt{t}(t^2-1)^2}$,

б) $y^{(3)}=e^{2x}(8x^3+44x^2+68x+78)$; №4: $5x-y-38=0$, $M(8;2)$ - т. дотику; №5:

$x\in R\setminus\{0\}$, $x=0$ - асимптота; $\left(-\frac{1}{2};0\right)$-т. перетину з віссю $Ox$; $y_{\min}=y(-1)=-1$;

$\left(-\frac{3}{2};-\frac{8}{3}\right)$ - т. перегину; $y=0$ - асимптота при $x\to\pm\infty$.

*Варіант 30.*

№1: $e^{\frac{25}{2}}$; №2: $x=-2, x=2$ -т. розриву 2-го роду;

№3: а) $\frac{2x}{\sqrt{\arcsin\left(2x^2+4\right)\cdot\left(1-\left(2x^2+4\right)^2\right)}}$ ,б) $y^{(4)}=-8\sin 2x\left(2x^2-2x+15\right)-32\cos 2x(2x-1)$;

№4: $2x-y+1=0, 2x-y-1=0$; №5: $x\in R\backslash\{2\}$, $(3;0),(-2;0)$ -т. перетину з віссю $Ox$

;

$x=2$ - верт.асимптота; ф. зростає; при $x\in(-\infty;-2)$ ф. опукла вниз, при $x\in(-2;\infty)$ ф. опукла вгору; $y=x+1$ - асимптота.