Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Елементи теорії поля. Диференціальні рівняння

Методичні вказівки до виконання короткочасних контрольних робіт
з математичного аналізу
для студентів першого курсу технічних факультетів

Київ 2012

Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Елементи теорії поля. Диференціальні рівняння: Методичні вказівки до виконання короткочасних контрольних робіт з математичного аналізу для студентів першого курсу технічних факультетів / Уклад.: О.О.Дем'яненко, Л.А.Репета. – К.: НТУУ «КПІ», 2012.- 68 с.

Гриф надано Методичною радою ФМФ НТУУ «КПІ»
(*Протокол № 5 від 24.05.2012*)

Навчальне видання

Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Елементи теорії поля. Диференціальні рівняння.

Методичні вказівки до виконання короткочасних контрольних робіт
з математичного аналізу
для студентів першого курсу технічних факультетів

Укладачі: *Дем'яненко Ольга Олегівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Репета Леся Анатоліївна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *Ю. П. Буценко*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент *О. І. Макаренко*, канд. фіз.-мат. наук, професор.

За редакцією укладачів
Електронна версія

Київ 2012

Зміст

Загальні положення.

Методичні вказівки складаються з 19 комплектів варіантів короткочасних контрольних робіт за розділами: „ Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Елементи теорії поля. Диференціальні рівняння”. До кожного комплекту варіантів додаються короткий коментар, що містить рекомендації щодо розв'язання задач контрольної роботи та часу її виконання, приклади розв'язування запропонованих задач та відповіді до кожного з варіантів. Короткочасні контрольні роботи виконують студентами першого курсу технічних спеціальностей у першому та другому семестрах.

<u>ККР-1-1</u>

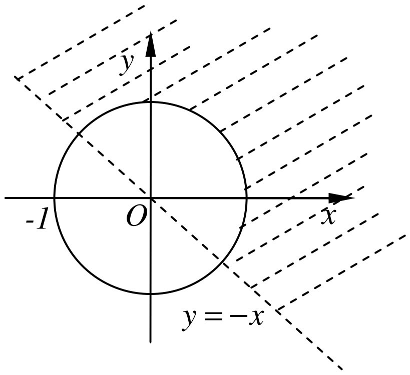
Тема*: *Область визначення функції багатьох змінних.

Контрольна робота розрахована на 5-7 хвилин і містить одну задачу: знайти область визначення функції двох змінних. Відповідь необхідно подати графічно.

Приклад. Знайдіть і зобразіть на координатній площині область визначення функції $z=\sqrt{\log_{a^2}(x^2+y^2)}+\ln(x+y)$, $a^2>1$.

Розв'язання. Областю визначення функції є множина точок площини, для яких визначено вираз $\sqrt{\log_{a^2}(x^2+y^2)}+\ln(x+y)$, тобто

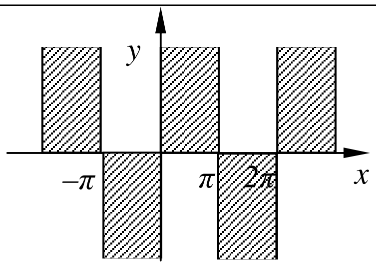
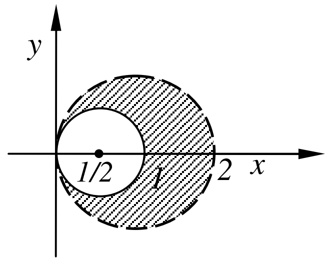
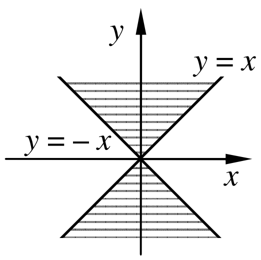
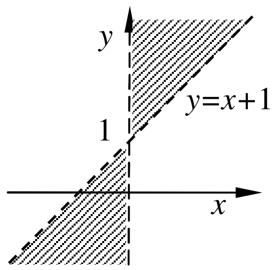
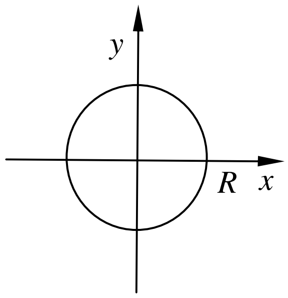
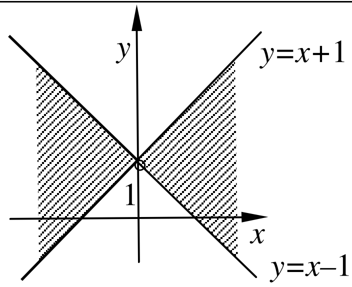
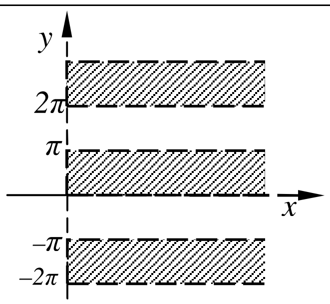
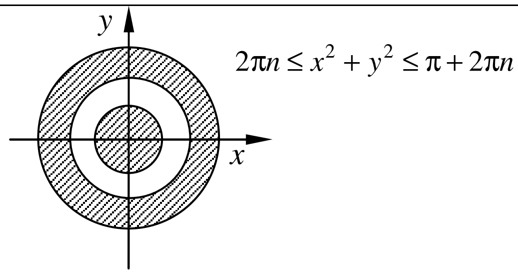
$$\begin{cases}\log_{a^2}(x^2+y^2)\ge 0\\ x+y>0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2\ge 1\\ y>-x.\end{cases}$$

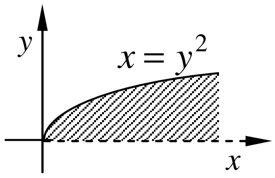
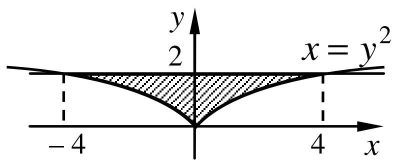


В-1 ККР 1-1 Знайдіть і зобразить на координатній площині область визначення функції $z=\sqrt{y\sin x}$.	В-2 ККР 1-1 Знайдіть і зобразить на координатній площині область визначення функції $z=\sqrt{y^2-x^2}$.
В-3 ККР 1-1 Знайдіть і зобразить на координатній площині область визначення функції $z=\sqrt{(x^2+y^2-R^2)\ln\frac{R^2}{x^2+y^2}}$.	В-4 ККР 1-1 Знайдіть і зобразить на координатній площині область визначення функції $z=\ln x-x\ln\sin y$.
В-5 ККР 1-1 Знайдіть і зобразить на координатній площині область визначення функції $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.	В-6 ККР 1-1 Знайдіть і зобразить на координатній площині область визначення функції $z=\ln(x\ln(y-x))$.

В-7 ККР 1-1 Знайдіть і зобразить на координатній площині область визначення функції $z = \arcsin\dfrac{y-1}{x}$.	В-8 ККР 1-1 Знайдіть і зобразить на координатній площині область визначення функції $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.
В-9 ККР 1-1 Знайдіть і зобразить на координатній площині область визначення функції $z = \sqrt{x - y^2} + \ln xy$.	В-10 ККР 1-1 Знайдіть і зобразить на координатній площині область визначення функції $z = \arccos\dfrac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$.

***Відповіді*:**

1		**5**	
2		**6**	
3		**7**	
4		**8**	

<table>
<tr>
<td>9</td>
<td>
</td>
<td>10</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

<u>ККР-1-2</u>

Тема*: *Диференціювання функцій багатьох змінних.

Контрольна робота розрахована на 20 хвилин і містить три задачі.

У першій задачі необхідно знайти частинні похідні функції трьох змінних і обчислити перший диференціал у вказаній точці. Приблизний час виконання 5 хвилин.

У другій задачі пропонується обчислити значення похідної складеної функції у вказаній точці. Приблизний час виконання 5 хвилин.

У третій задачі необхідно знайти частинні похідні другого порядку і довести вказані рівності. Приблизний час виконання 10 хвилин.

Приклад 1-2-1. Обчисліть повний диференціал функції $u = \arcsin(x\sqrt{y}) - yz^2$ у точці $M(0;4;1)$.

Розв'язання. Повний диференціал функції знаходять за формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz .$$

Знайдемо частинні похідні і обчислимо їх значення у точці *M*.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left.\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-x^2 y}}\right|_M = 2,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \left.\left(\frac{x}{2\sqrt{y}\sqrt{1-x^2 y}} - z^2\right)\right|_M = -1,\ \frac{\partial u}{\partial z} = -2yz\Big|_M = -8 .$$

Тоді $du(M) = 2dx - dy - 8dz$.

Приклад 1-2-2. Обчисліть значення похідної $\frac{du}{dt}$ складеної функції $u = x^y$ у точці $M(e;0)$, якщо $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

Розв'язання. Для знаходження похідної складеної функції використаємо формулу $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

Знайдемо відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1};\ \frac{\partial u}{\partial y} = \ln|x|\,x^y;\ \frac{dx}{dt} = e^t;\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}.$$

У точці M параметр $t=1$. Обчислимо значення похідної $\frac{du}{dt}$ за умови

$$\begin{cases} x=e^t, \\ y=\ln t \\ t=1. \end{cases} \Rightarrow \frac{du}{dt}(M)=0\cdot e^{-1}e+\ln e\cdot e^0\cdot 1=1.$$

Приклад 1-2-3. Доведіть, що функція $z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Розв'язання. Знайдемо відповідні частинні похідні функції.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}+\sqrt{x}\cos\frac{y}{x}(-\frac{y}{x^2})=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x}\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x})=-\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}\frac{1}{x}=-\frac{1}{x\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}.$$

Підставимо в рівняння знайдені похідні

$$x(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x})+y\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}=-\frac{1}{2}(-\frac{1}{x\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x})\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}}{2}\sin\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{x}}{2}\sin\frac{y}{x}$. Отже, функція задовольняє рівняння.

В-1 ККР 1-2	В-2 ККР 1-2
1. Обчисліть повний диференціал функції $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ у точці $M(0;-1;1)$. **2.** Обчисліть значення похідної $\frac{du}{dt}$ складеної функції $u=e^{y-2x}$ у точці $M(0;0)$, якщо $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=t^3. \end{cases}$ **3.** Доведіть, що функція $z=\sin(x-y)+\ln(x+y)$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.	**1.** Обчисліть повний диференціал функції $u=\mathrm{arctg}(xy^2+z)$ у точці $M(2;1;0)$. **2.** Обчисліть значення похідної $\frac{du}{dt}$ складеної функції $u=-\ln(e^x+e^{-y})$ у точці $M(1;-1)$, якщо $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3. \end{cases}$ **3.** Доведіть, що функція $z=e^{-x}(x-y)$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y})$.

В-3 ККР 1-2

1. Обчисліть повний диференціал функції $u=\ln\cos(x^2y^2+z)$ у точці $M(0;0;\dfrac{\pi}{4})$.

2. Обчисліть значення похідної $\dfrac{du}{dt}$ складеної функції $u=\arcsin(\dfrac{x}{y})$ у точці $M(0;-1)$, якщо $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos t. \end{cases}$

3. Доведіть, що функція $z=4e^{-2y}+(2x+4y-3)e^{-y}-x-1$ задовольняє рівняння $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2=z+x+3(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2$.

В-4 ККР 1-2

1. Обчисліть повний диференціал функції $u=\ln(\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{y}-z)$ у точці $M(1;1;1)$.

2. Обчисліть значення похідної $\dfrac{du}{dt}$ складеної функції $u=\sqrt{x+y^2+3}$ у точці $M(0;1)$, якщо $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=t^2. \end{cases}$

3. Доведіть, що функція $z=\mathrm{tg}(xy)+e^{x/y}$ задовольняє рівняння $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

В-5 ККР 1-2

1. Обчисліть повний диференціал функції $u=\sqrt{z}x^y$ у точці $M(1;2;4)$.

2. Обчисліть значення похідної $\dfrac{du}{dt}$ складеної функції $u=\dfrac{x^2}{y+1}$ у точці $M(1;0)$, якщо $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=\mathrm{arctg}\, t. \end{cases}$

3. Доведіть, що функція $z=\ln(x+e^{-y})$ задовольняє рівняння $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

В-6 ККР 1-2

1. Обчисліть повний диференціал функції $u=\mathrm{arctg}\dfrac{xz}{y^2}$ у точці $M(2;1;1)$.

2. Обчисліть значення похідної $\dfrac{du}{dt}$ складеної функції $u=x^2e^y$ у точці $M(-1;0)$, якщо $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t. \end{cases}$

3. Доведіть, що функція $z=y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ задовольняє рівняння $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

В-7 ККР 1-2

1. Обчисліть повний диференціал функції $u=\ln(x^3+\sqrt[3]{y}-z)$ у точці $M(2;1;8)$.

2. Обчисліть значення похідної $\dfrac{du}{dt}$

В-8 ККР 1-2

1. Обчисліть повний диференціал функції $u=\sqrt{z}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ у точці $M(4;1;4)$.

2. Обчисліть значення похідної $\dfrac{du}{dt}$

складеної функції $u = \mathrm{arctg}(xy)$ у точці $M(3;1)$, якщо $\begin{cases} x = t+3, \\ y = e^t. \end{cases}$ **3.** Доведіть, що функція $z = \sin^2(x-2y)$ задовольняє рівняння $4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.	складеної функції $u = \arcsin\frac{2x}{y}$ у точці $M(0;-1)$, якщо $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t. \end{cases}$ **3.** Доведіть, що функція $z = e^{-x-3y}\sin(x+3y)$ задовольняє рівняння $9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
В-9 ККР 1-2 **1.** Обчисліть повний диференціал функції $u = \sqrt{z}\sin(\frac{x}{y})$ у точці $M(2;0;4)$. **2.** Обчисліть значення похідної $\frac{du}{dt}$ складеної функції $u = \sqrt{x^2+y^2+3}$ у точці $M(0;1)$, якщо $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{cases}$ **3.** Доведіть, що функція $z = xe^{y/x})$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (\frac{y}{x})^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.	В-10 ККР 1-2 **1.** Обчисліть повний диференціал функції $u = \frac{\sin(x-y)}{z}$ у точці $M(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3};\sqrt{3})$. **2.** Обчисліть значення похідної $\frac{du}{dt}$ складеної функції $u = \frac{y^2}{x}$ у точці $M(1;1)$, якщо $\begin{cases} x = 1-2t, \\ y = 1+\mathrm{arctg}\, t. \end{cases}$ **3.** Доведіть, що функція $z = \ln(x^2-y^2)$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

***Відповіді*:**

№ вар.	Завдання 1	Завдання 2
1	$du = dy + dz$	–2
2	$du = \frac{1}{5}(dx + 4dy + dz)$	5/2
3	$du = -dz$	1
4	$du = \frac{1}{5}dx + \frac{1}{4}dy - dz$	5/4
5	$du = 4dx + \frac{1}{4}dz$	–5

6	$du = \frac{1}{5}(dx - 4dy + 2dz)$	-1
7	$du = 12dx + \frac{1}{3}dy - dz$	$2/5$
8	$du = \frac{1}{6}dx + \frac{1}{3}dy + \frac{\ln 3}{4}dz$	2
9	$du = dy$	$3/2$
10	$du = \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy - \frac{1}{6}dz$	4

ККР-1-3

Тема*: *Дотична площина і нормаль до поверхні.

Контрольна робота розрахована на 5-7 хвилин і містить одну задачу: скласти рівняння дотичної площини і нормальної прямої до поверхні, заданої неявним рівнянням в указаній точці.

Приклад. Скласти рівняння дотичної площини і нормальної прямої у точці $M(3;2;12)$ до поверхні $x^2 - y^2 + 5x - 4y - z = 0$.

Розв'язання. Поверхню задано рівнянням $F(x;y;z) = 0$, тому рівняння дотичної площини у точці $M(x_0;y_0;z_0)$ знайдемо за формулою

$$F'_x(M)(x - x_0) + F'_y(M)(y - y_0) + F'_z(M)(z - z_0) = 0,$$

а рівняння нормальної прямої за формулою

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M)}.$$

Отже, $F'_x(M) = (2x - 5)\big|_M = 11$, $F'_y(M) = (-2y - 4)\big|_M = -8$, $F'_z(M) = -1$.

Підставимо одержані похідні у формули:

$11(x-3) - 9(y-2) - 1(z-12) = 0$ або $11x - 8y - z - 5 = 0$ – рівняння дотичної площини; рівняння нормальної прямої: $\frac{x-3}{11} = \frac{y-2}{-9} = \frac{z-12}{-1}$.

В-1 ККР 1-3	В-2 ККР 1-3
Скласти рівняння дотичної площини і нормальної прямої до поверхні $x^2 - xy + y^2 - z = 0$ у точці $M(2;1;3)$.	Скласти рівняння дотичної площини і нормальної прямої до поверхні $x\sin y - z = 0$ у точці $M(2;\frac{\pi}{6};1)$.

В-3 КПР 1-3 Скласти рівняння дотичної площини і нормальної прямої до поверхні $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - z = 0$ у точці $M(3;4;\frac{1}{5})$.	В-4 ККР 1-3 Скласти рівняння дотичної площини і нормальної прямої до поверхні $\ln(\sqrt{x} - y) - z = 0$ у точці $M(4;1;0)$.
В-5 ККР 1-3 Скласти рівняння дотичної площини і нормальної прямої до поверхні $x^2 e^y - z = 0$ у точці $M(1;1;e)$.	В-6 ККР 1-3 Скласти рівняння дотичної площини і нормальної прямої до поверхні $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - z = 0$ у точці $M(1;1;\frac{\pi}{4})$.
В-7 ККР 1-3 Скласти рівняння дотичної площини і нормальної прямої до поверхні $e^{xy} - z = 0$ у точці $M(1;1;e)$.	В-8 ККР 1-3 Скласти рівняння дотичної площини і нормальної прямої до поверхні $3x^2 - 2y^2 + xy - z = 0$ у точці $M(-1;3;-18)$.
В-9 ККР 1-3 Скласти рівняння дотичної площини і нормальної прямої до поверхні $\frac{xy}{x^2-y^2} - z = 0$ у точці $M(2;1;\frac{2}{3})$.	В-10 ККР 1-3 Скласти рівняння дотичної площини і нормальної прямої до поверхні $y^x - z = 0$ у точці $M(2;1;1)$.

***Відповіді*:**

№ вар.	Завдання 1	Завдання 2
1	$3x - z - 3 = 0$	$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-3}{-1}$
2	$\frac{1}{2}x + \sqrt{3}y - z - \sqrt{3}\frac{\pi}{6} = 0$	$\frac{x-2}{1/2} = \frac{y-\pi/6}{\sqrt{3}} = \frac{z-1}{-1}$
3	$3x + 4y - 5z - 24 = 0$	$\frac{5x-15}{3} = \frac{5y-20}{4} = \frac{5z-1}{-5}$
4	$x - 4y - 4z = 0$	$\frac{4x-16}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}$
5	$2ex + ey - z - 2e = 0$	$\frac{x-1}{2e} = \frac{y-1}{e} = \frac{z-e}{-1}$
6	$2x - 2y + 4z - \pi = 0$	$\frac{2x-2}{-1} = \frac{2y-1}{1} = \frac{z-\pi/4}{-1}$
7	$ex + ey - z - e = 0$	$\frac{x-1}{e} = \frac{y-1}{e} = \frac{z-e}{-1}$

8	$3x+13y+z-18=0$	$\frac{x+1}{-3}=\frac{y-3}{-13}=\frac{z+18}{-1}$
9	$-4x+4y-9z+10=0$	$\frac{9x-18}{-4}=\frac{9y-9}{4}=\frac{3z-3}{-3}$
10	$y-z=0$	$\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$

ККР-1-4

Тема*: *Локальний екстремум функції двох змінних.

Контрольна робота розрахована на 15 хвилин і містить одну задачу: знайти стаціонарні точки функції і дослідити їх на екстремум .

Приклад. Знайдіть екстремуми функції $z = x^3 + y^3 - 3xy + 11$.

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки з умови рівності нулю частинних похідних першого порядку.

$$z'_x = 3x^2 - 3y,\ z'_y = 3y^2 - 3x;\ \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y, \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x = x^4. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи будуть дві точки $M_1(0;0)$ і $M_2(1;1)$. З'ясуємо, чи є вони екстремумами, користуючись критерієм Сильвестра. Для цього обчислимо значення визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

у стаціонарних точках.

Маємо $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -3$.

У точці $M_1(0;0)$ $\Delta(M_1) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$, отже ця точка не є точкою локального екстремума.

У точці $M_2(1;1)$ $\Delta(M_1) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$, тобто $M_2(1;1)$ є точкою локального екстремума, а саме точкою локального мінімуму $z(1;1) = z_{min} = 10$ (враховано $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_2) = 6 > 0$).

В-1 КKР 1-4 Знайдіть екстремуми функції $z=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-4\ln x-36\ln y$.	В-2 КKР 1-4 Знайдіть екстремуми функції $z=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
В-3 КKР 1-4 Знайдіть екстремуми функції $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.	В-4 КKР 1-4 Знайдіть екстремуми функції $z=x^3+y^3+3xy$.
В-5 КKР 1-4 Знайдіть екстремуми функції $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$.	В-6 КKР 1-4 Знайдіть екстремуми функції $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$
В-7 КKР 1-4 Знайдіть екстремуми функції $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$.	В-8 КKР 1-4 Знайдіть екстремуми функції $z=x^3+8y^3-6xy+1$
В-9 КKР 1-4 Знайдіть екстремуми функції $z=xy(12-x-y)$.	В-10 КKР 1-4 Знайдіть екстремуми функції $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$.

***Відповіді*:**

№ вар.	Відповідь
1	$z_{min}=z(2;6)=20-4\ln 2-36\ln 6$
2	$M(1;1)$ – стаціонарна точка
3	$M_1(1;2)$, $M_2(-1;-2)$, $M_3(2;1)$, $M_4(-2;-1)$ – стаціонарні точки, $z_{min}=z(2;1)=-28$, $z_{max}=z(-2;-1)=28$
4	$M_1(0;0)$, $M_2(-1;-1)$ – стаціонарні точки, $z_{max}=z(-1;-1)=1$
5	$z_{min}=z(5;2)=30$
6	$M_1(0;0)$, $M_2(-5/3;0)$, $M_3(-1;2)$, $M_4(-1;-2)$ – стаціонарні точки, $z_{min}=z(2;1)=-28$, $z_{max}=z(-2;-1)=28$
7	$z_{min}=z(4;4)=12$
8	$M_1(0;0)$, $M_2(1;1/2)$ – стаціонарні точки, $z_{min}=z(1;1/2)=0$
9	$M_1(0;0)$, $M_2(4;4)$ – стаціонарні точки, $z_{max}=z(4;4)=64$
10	$z_{max}=z(4;4)=15$

ККР-1-5

Тема*: *Умовний екстремум функції двох змінних.

Контрольна робота розрахована на 30 хвилин і містить дві задачі.

У першій задачі за допомогою функції Лагранжа необхідно знайти екстремум функції $z = z(x;y)$, якщо змінні задовольняють умову $\varphi(x;y) = 0$. Приблизний час виконання 15 хвилин.

У другій задачі запропоновано знайти найбільше та найменше значення функції в замкненій області. На межах області доцільно звести функцію $z = z(x;y)$ прямою підстановкою до функції однієї змінної. Приблизний час розв'язання цієї задачі 15 хвилин.

Приклад. За допомогою функції Лагранжа знайти екстремум функції $z = 20 - 5x - 12y$, якщо змінні задовольняють умову $x^2 + y^2 = 4$.

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа

$$L(x;y;\lambda) = 20 - 5x - 12y + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

З умови рівності нулю її частинних похідних та рівняння зв'язку знайдемо стаціонарні точки.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -5 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -12 + 2\lambda y, \quad x^2 + y^2 = 4; \qquad \begin{cases} -5 + 2\lambda x = 0, \\ -12 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2\lambda}, \\ y = \dfrac{12}{2\lambda}, \\ \dfrac{5^2}{(2\lambda)^2} + \dfrac{12^2}{(2\lambda)^2} = 4. \end{cases}$$

Розв'язками останньої системи будуть дві точки $M_1(\frac{10}{13};\frac{24}{13};\frac{13}{4})$ і $M_2(-\frac{10}{13};-\frac{24}{13};-\frac{13}{4})$ – стаціонарні точки функції. Дослідимо, чи є вони точками екстремума і якого саме за допомогою другого диференціала.

Знайдемо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda, \ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 0, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda.$$

Запишемо другий диференціал функції Лагранжа

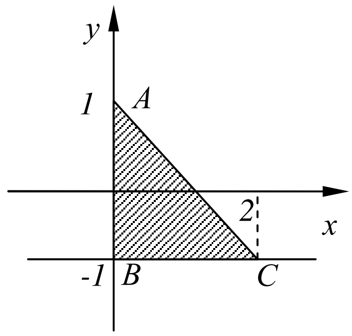
$$d^2 z = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

У точці $M_1(\frac{10}{13};\frac{24}{13};\frac{13}{4})$ маємо $d^2 z(M_1) = \frac{13}{2}(dx^2 + dy^2) > 0$. Оскільки $d^2 z(M_1) > 0$, точка $M_1(\frac{10}{13};\frac{24}{13};\frac{13}{4})$ є точкою умовного мінімуму і значення функції $z(\frac{10}{13};\frac{24}{13})=6$.

У точці $M_2(-\frac{10}{13};-\frac{24}{13};-\frac{13}{4})$ маємо $d^2z(M_2)=-\frac{13}{2}(dx^2+dy^2)<0$. Оскільки $d^2z(M_2)<0$, точка $M_2(-\frac{10}{13};-\frac{24}{13};-\frac{13}{4})$ є точкою умовного максимуму і значення функції $z(-\frac{10}{13};-\frac{24}{13})=46$.

Приклад. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z=x^2+3y^2+x-y$ в області D, обмеженій лініями $x=0, y=-1, x+y=1$.

Розв'язання. Область D – трикутник ABC. Знайдемо стаціонарні точки функції $z'_x=2x+1,\ z'_y=6y-1 \Rightarrow$



$$\begin{cases}2x+1=0,\\ 6y-1=0\end{cases} \Rightarrow M(-\frac{1}{2};\frac{1}{6}).$$

Точка $M(-\frac{1}{2};\frac{1}{6})$ стаціонарна точка, яка не належить області D. Тому найбільше та найменше значення функція набуває у точках межі області.

На відрізку $[AB]$ $x=0, y\in[-1;1]$ функція $z=3y^2-y$ є функцією змінної y. Стаціонарну точку цієї функції знаходимо з умови $z'=0$, де $z'=6y-1 \quad \Rightarrow M_1(0;1/6)\in D$. Знайдемо значення функції $z(M_1)=z(0;1/6)=-1/12$.

На кінцях відрізка $[AB]$: $z(A)=z(0;1)=2,\ z(B)=z(0;-1)=4$.

На відрізку $[BC]$ $y=-1, x\in[0;2]$ функція $z=x^2+x+4$ є функцією змінної x. Її стаціонарна точка $M_2(-\frac{1}{2};-1)$ знайдена з умови $z'=2x+1,\ z'=0$ не належить заданій області, тому обчислимо значення функції лише у точці C: $z(C)=z(2;-1)=10$.

На відрізку $[AC]$ $y=1-x,\ x\in[0;2]$ функція має вигляд $z=x^2+3(1-x)^2+x-(1-x)$ або $z=4x^2-4x+2$. Стаціонарна точка цієї функції $M_3(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ (з умови $8x-4=0$). Значення функції у ній $z(M_3)=z(\frac{1}{2};\frac{1}{2})=1.$

Серед усіх обчислених значень вибираємо найбільше та найменше:

$z_{найб.}=z(2;-1)=10,\ z_{найм.}=z(0;\frac{1}{6})=-\frac{1}{12}$.

В-1 КKP 1-5 1. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y - 4)$, якщо змінні задовольняють умову $x^2 + y^2 = 1$. 2. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = xy(1 - x - y)$ в області D, обмеженій лініями $x = 1, y = 0, x + y = 2$.	В-2 КKP 1-5 1. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = (x - 2)^2 - 2y^2$, якщо змінні задовольняють умову $x^2 + y^2 = 4$. 2. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в області D, обмеженій лініями $x = 0, y = 0, x + y = 3$.
В-3 КKP 1-5 1. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$, якщо змінні задовольняють умову $x^2 + 2y = 0$. 2. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в області D, обмеженій лініями $x = 0, y = 0, x + y + 3 = 0$.	В-4 КKP 1-5 1. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = x^2 + y^2$, якщо змінні задовольняють умову $xy = 2$. 2. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 y(4 - x - y)$ в області D, обмежeній лініями $x = 0, y = 0, x + y = 8$.
В-5 КKP 1-5 1. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = 16 - 10x - 24y$, якщо змінні задовольняють умову $x^2 + y^2 = 169$. 2. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2$ в області D, обмеженій лініями $x = 1, y = 0, 3x + 2y = 4$.	В-6 КKP 1-5 1. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = 3x + 4y$, якщо змінні задовольняють умову $9x^2 + 4y^2 = 1$. 2. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2$ в області D, обмеженій лініями $x = 0, y = 0, x + y = 4$.
В-7 КKP 1-5 1. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = x^2 + y^2$, якщо змінні задовольняють умову $xy - 1 = 0$. 2. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2y^2 + 1$ в області D, обмеженій лініями $x = 0, y = 0, x + y = 3$.	В-8 КKP 1-5 1. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = 8 - 2x - 4y$, якщо змінні задовольняють умову $x^2 + y^2 = 125$. 2. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = xy^2$ в області D, обмеженій лініями $x = -1, y = -1, x + 2y = 1$.

В-9 ККР 1-5	В-10 ККР 1-5
1. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = 2x + y$, якщо змінні задовольняють умову $x^2 + y^2 = 1$. 2. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = 3 - 2x^2 - y^2 - xy$ в області D, обмеженій лініями $x = y, y = 0, x = 1$.	1. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, якщо змінні задовольняють умову $x + y + 3 = 0$. 2. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$ в області D, обмеженій лініями $x = 0, y = 0, x + y + 2 = 0$.

***Відповіді*:**

№ вар.	Завдання 1	Завдання 2
1	$z_{ум.min}(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}) = -1 - \sqrt{2}$ $z_{ум.max}(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 - \sqrt{2}$	$z_{найб.} = z(1;0) = z(2;0) = 0,$ $z_{найм.} = z(1;1) = -1$
2	$z_{ум.min}(\frac{2}{3};\frac{4\sqrt{2}}{3}) =$ $= z_{ум.min}(\frac{2}{3};-\frac{4\sqrt{2}}{3}) = -\frac{16}{5}$ $z_{ум.max}(-2;0) = 16$	$z_{найб.} = z(0;3) = z(3;0) = 6,$ $z_{найм.} = z(\frac{3}{2};\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$
3	$z_{ум.max}(2;-2) = 8$	$z_{найб.} = z(0;-3) = z(-3;0) = 6,$ $z_{найм.} = z(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$
4	$z_{ум.min}(\sqrt{2};\sqrt{2}) =$ $= z_{ум.min}(-\sqrt{2};-\sqrt{2}) = 4$	$z_{найб.} = z(2;1) = 4,$ $z_{найм.} = z(\frac{16}{3};\frac{8}{3}) = -\frac{16384}{27}$
5	$z_{ум.min}(5;12) = -322$ $z_{ум.max}(-5;-12) = 354$	$z_{найб.} = z(\frac{4}{3};0) = \frac{16}{9},$ $z_{найм.} = z(1;0) = 1$
6	$z_{ум.min}(-\frac{\sqrt{2}}{6};-\frac{\sqrt{2}}{4}) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ $z_{ум.max}(\frac{\sqrt{2}}{6};\frac{\sqrt{2}}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$	$z_{найб.} = z(4;0) = z(0;4) = 16,$ $z_{найм.} = z(0;0) = 0$

7	$z_{ум.min}(1;1)=2$ $z_{ум.min}(-1;-1)=2$	$z_{найб.}=z(0;3)=19,$ $z_{найм.}=z(0;0)=1$
8	$z_{ум.min}(10;5)=-32$ $z_{ум.max}(-10;-5)=48$	$z_{найб.}=z(3;-1)=3,$ $z_{найм.}=z(-1;-1)=z(-1;1)=-1$
9	$z_{ум.min}(\frac{2\sqrt{5}}{5};\frac{\sqrt{5}}{5})=-\sqrt{5}$ $z_{ум.max}(-\frac{2\sqrt{5}}{5};-\frac{\sqrt{5}}{5})=\sqrt{5}$	$z_{найб.}=z(0;0)=3,$ $z_{найм.}=z(1;1)=-1$
10	$z_{ум.min}(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2})=-\frac{9}{2}$	$z_{найм.}=z(-2;0)=z(0;-2)=-4,$ $z_{найб.}=z(0;0)=0$

ККР 2-1.

Тема : ***Обчислення подвійних інтегралів***.

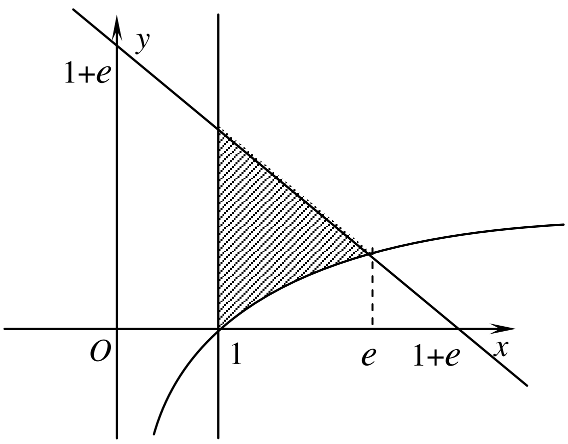
Контрольна робота містить дві задачі і розрахована на 15 хвилин.

У першій задачі необхідно розставити межі інтегрування в повторному інтегралі для області, яку задано у декартовій системі координат. Приблизний час виконання 5 хвилин.

У другій задачі після переходу у полярну систему координат необхідно обчислити подвійний інтеграл. Приблизний час виконання 10 хвилин.

Приклад 2-1-1. Розставте межі інтегрування у повторному інтегралі, що відповідає подвійному $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$, якщо область $D: x+y=1+e,\ x=1,$ $y=\ln x$.

Розв'язання. Зобразимо область інтегрування *D*.



Цю область задає система нерівностей

$$\begin{cases} 1 \le x \le e, \\ \ln x \le y \le 1 + e - x. \end{cases}$$

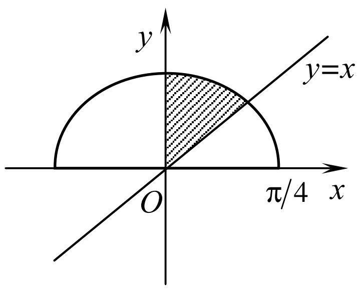
Геометрично це означає, що будь-яка вертикальна пряма, що проходить через точки відрізка $[1;e]$ вісі Ox в напрямку зростання змінної y, спочатку перетинає криву $y = \ln x$ (лінію входу в область D), а потім пряму $y = 1 + e - x$ (лінію виходу з області D). Тому внутрішній інтеграл, залежний від змінної y має нижньою межею функцію $y = \ln x$ і верхньою межею функцію $y = 1 + e - x$. Зовнішній інтеграл, залежний від змінної x, має нижньою межею значення $x = 1$ і верхньою межею. Отже,

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_1^e dx \int_{\ln x}^{1+e-x} f(x;y)dy.$$

Приклад 2-1-2. Обчисліть подвійний інтеграл

$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}$, якщо область $D: x \ge 0, y \ge x,\ y = \sqrt{\frac{\pi^2}{16} - x^2}$.

Розв'язання. Зобразимо область інтегрування D.



Рівняння $y = \sqrt{\frac{\pi^2}{16} - x^2}$ задає верхню частину кола, нерівність $x \ge 0-$ праву півплощину, нерівність $y \ge x-$ півплощину, розташовану над прямою $y = x$. Враховуючи форму області інтегрування перейдемо до полярної системи координат

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} |I| = \rho.$$

В області інтегрування змінна ρ (відстань від початку координат) змінюється від $\rho = 0$ до кола, яке задано рівнянням $\rho = \frac{\pi}{4}$. Кут φ набуває значень від $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$. Отже,

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/4} \frac{\rho d\rho}{\rho\cos^2\rho} = \varphi\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{tg}\rho\Big|_0^{\pi/4} = \pi/4.$$

В – 1 КРР 2–1 **1.** Розставте межі інтегрування $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, якщо $D: y=x^2,\ y=2-x^2,\ x\ge 0$. **2.** Обчисліть подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}$, якщо $D: y=-\sqrt{R^2-x^2},\ y=-\sqrt{r^2-x^2},$ $y\le 0, y\ge x,\ r<R$.	В – 2 ККР 2–1 **1.** Розставте межі інтегрування $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, якщо $D: y\ge x^2,\ x\ge 0,\ x^2+y^2\le 2$. **2.** Обчисліть подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{xydxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, якщо $D: y\ge 0,\ x\ge 0,\ y=\sqrt{4-x^2}$.
В – 3 ККР 2–1 **1.** Розставте межі інтегрування $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, якщо $D: y\le x,\ x^2+y^2=2,\ y\ge 0$. **2.** Обчисліть подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{ctg}\sqrt{x^2+y^2}}$, якщо $D: y=\sqrt{R^2-x^2},\ y\ge 0,\ x\le 0$.	В – 4 ККР 2–1 **1.** Розставте межі інтегрування $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, якщо $D: x=2-\sqrt{4-y^2},\ x=\sqrt{4-y^2},\ x=0,$ $y\le 0$. **2.** Обчисліть подвійний інтеграл $\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)dxdy$, якщо $D: y=-\sqrt{R^2-x^2},\quad y\le 0,\ x\le 0$.
В – 5 ККР 2–1 **1.** Розставте межі інтегрування $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, якщо $D: x=y^2,\ x+y=2,\ x=0$. **2.** Обчисліть подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}e^{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dxdy$, якщо $D: y=\sqrt{4-x^2},\ y=0$.	В – 6 ККР 2–1 **1.** Розставте межі інтегрування $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, якщо $D: x=-\sqrt{2-y^2},\ y\le x$. **2.** Обчисліть подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sin(x^2+y^2)dxdy$, якщо $D: y=\sqrt{R^2-x^2},\quad y\ge 0,\ x\le 0$.
В – 7 ККР 2–1 **1.** Розставте межі інтегрування $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, якщо $D: x=\sin y,\ x=\cos y,\ x=0$. **2.** Обчисліть подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$, якщо $D: y=\sqrt{1-x^2},\ y=0$.	В – 8 ККР 2–1 **1.** Розставте межі інтегрування $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, якщо $D: y=x,\ x=\ln y,\ x=0,\ x=1$. **2.** Обчисліть подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sin(1+x^2+y^2)dxdy$, якщо $D: y=\sqrt{9-x^2},\quad y\ge 0,\ x\ge 0$.

В – 9 ККР 2–1	В – 10 ККР 2–1
1. Розставте межі інтегрування $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, якщо $D: x+y=-2,\ y=x^3,\ x=0$. **2.** Обчисліть подвійний інтеграл $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$, якщо $D: x^2+y^2=2$.	**1.** Розставте межі інтегрування $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, якщо $D: y=-\sqrt{2-x^2},\ y\le -x, x\ge 0$. **2.** Обчисліть подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, якщо $D: y=-\sqrt{R^2-x^2},\quad y\le 0,\ x\ge 0$.

Відповіді:

№ варіанта	Завдання 1	Завдання 2
1	$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)dy$	$\frac{\pi}{4}(\operatorname{ctg} r - \operatorname{ctg} R)$
2	$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$	$\frac{4}{3}$
3	$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$	$-\frac{\pi}{2}\ln\lvert\cos R\rvert$
4	$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy$	$\frac{\pi}{4}\sin R^2$
5	$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x,y)dy$	$\frac{\pi}{3}(e^8-1)$
6	$\int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{x} f(x,y)dy$	$\frac{\pi}{4}(1-\cos R^2)$
7	$\int_0^{\pi/4} dx \int_{\arcsin x}^{\arccos x} f(x,y)dy$	$\frac{\pi}{3}(2^{3/2}-1)$
8	$\int_0^1 dx \int_x^{e^x} f(x,y)dy$	$\frac{\pi}{4}(\cos 1-\cos 10)$

9	$\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-2-x}^{x^3} f(x,y)dy$	$\pi(1-e^{-2})$
10	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{-x} f(x,y)dy$	$-\frac{\pi}{2}\ln\lvert\cos R\rvert$

ККР 2-2.

Тема : ***Застосування подвійних інтегралів.***

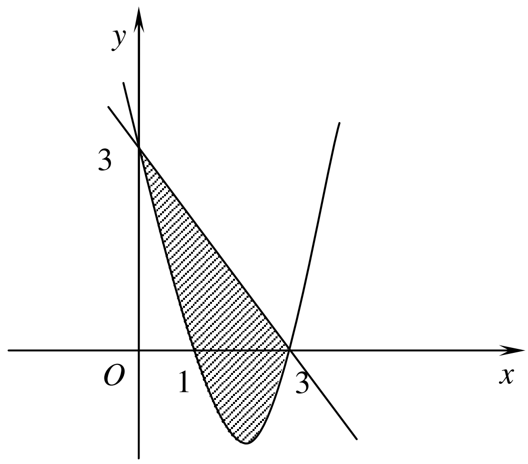
Робота складається з двох завдань і розрахована на 15 хвилин.

У першому завданні необхідно знайти площу плоскої пластини і обчислити відповідний подвійний інтеграл у декартовій системі координат. Приблизний час виконання 5 хвилин.

У другому завданні необхідно знайти масу пластини з відомою густиною. При обчисленні відповідного подвійного інтеграла необхідно перейти до узагальненої полярної системи координат. Приблизний час виконання 10 хвилин.

Приклад 2-2-1. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 4x + 3,\ x + y = 3$.

Розв'язання. Зобразимо фігуру, площу якої треба обчислити.



Знайдемо координати точок перетину кривих.

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3, \\ y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - x = x^2 - 4x + 3, \\ y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0, \\ y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow A(0;3),\ B(3;0).$$

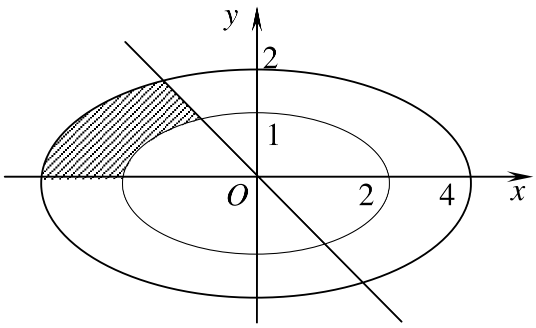
За формулою $S = \iint\limits_D dxdy$ обчислимо площу фігури.

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^3 dx\int\limits_{x^2-4x+3}^{3-x}dy=\int\limits_0^3(y)\Big|_{x^2-4x+3}^{3-x}dx=\int\limits_0^3(-x^2+3x)dx=(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2})\Big|_0^3=$$

$$=-9+\frac{27}{2}=4{,}5\,(\text{кв. од.})$$

Приклад 2-2-2. Знайдіть масу пластинки D з густиною $\mu=x^2y$, якщо $D: y\geq 0, 4y\geq -\sqrt{3}x, \frac{x^2}{4}+y^2=1, \frac{x^2}{4}+y^2=4$.

Розв'язання. Масу пластинки знайдемо за формулою $m=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy$. У нашому випадку $m=\iint\limits_D x^2ydxdy$.



Зобразимо область D і, зважаючи на форму області, перейдемо до узагальненої полярної системи координат:

$$\begin{cases} x=2\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \end{cases} \quad dxdy=2\rho d\rho d\varphi.$$

У полярних координатах область інтегрування визначає система нерівностей $\begin{cases} \frac{2\pi}{3}\leq\varphi\leq\pi, \\ 1\leq\rho\leq 2, \end{cases}$ одержана підстановкою правих частин рівнянь системи в умови, що задають область D.

Таким чином

$$m=\iint\limits_D x^2ydxdy=\int\limits_{2\pi/3}^{\pi}d\varphi\int\limits_1^2 4\rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho\sin\varphi\cdot 2\rho d\rho=\int\limits_{2\pi/3}^{\pi}-\cos^2\varphi d(\cos\varphi)\int\limits_1^2 8\rho^4 d\rho=$$

$$=-\frac{\cos^3\varphi}{3}\Bigg|_{2\pi/3}^{\pi}8\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_1^2=-\frac{18}{5}(-1+\frac{1}{8})(32-1)=\frac{217}{35}.$$

В – 1 КҚР 2–2 **1.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y=1-x^2,\ x+y=-1$. **2.** Знайдіть масу пластинки D з густиною $\mu=\dfrac{27y}{x^2},\ D:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1,\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=2,$ $y\geq 0,\ y\leq\dfrac{4}{3}x$.	В – 2 КҚР 2–2 **1.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2-1,\ y=x+1$. **2.** Знайдіть масу пластинки D з густиною $\mu=x^2y^3,\ D:\dfrac{x^2}{16}+y^2=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0$.
В – 3 КҚР 2–2 **1.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y=2-x^2,\ y=-x$. **2.** Знайдіть масу пластинки D з густиною $\mu=2xy^7,\ D:\dfrac{x^2}{100}+y^2=4,\ x\geq 0,\ y\geq 0$.	В – 4 КҚР 2–2 **1.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2-2,\ y=x$. **2.** Знайдіть масу пластинки D з густиною $\mu=\dfrac{3y}{x^3},\ D:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1, \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=36,$ $y\geq 0,\ y\leq\dfrac{3x}{2}$.
В – 5 КҚР 2–2 **1.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2-2x-1,\ y=1-x$. Знайдіть масу пластинки D з густиною $\mu=xy,\ D:x^2+\dfrac{y^2}{4}=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0$.	В – 6 КҚР 2–2 **1.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y=2x-x^2,\ y=-x$. **2.** Знайдіть масу пластинки D з густиною $\mu=x^4,\ D:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}\leq 1$.
В – 7 КҚР 2–2 **1.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2+2x,\ y=x+2$. **2.** Знайдіть масу пластинки D з густиною $\mu=x^5y,\ D:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0$.	В – 8 КҚР 2–2 **1.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y=1-x^2+2x,\ y=1-x$. **2.** Знайдіть масу пластинки D з густиною $\mu=\dfrac{3}{x^2},\ D:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1,$ $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=25,\ y\geq 0,\ y\leq\dfrac{2x}{3}$.

В – 9 ККР 2–2	В – 10 ККР 2–2
1. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2x - 1,\ y = x + 1$. **2.** Знайдіть масу пластинки D з густиною $\mu = 3x^2 y^3,\ D: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1,\ x \geq 0, y \geq 0$.	**1.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 4x + 3,\ y = x + 3$. **2.** Знайдіть масу пластинки D з густиною $\mu = \frac{y}{x^3},\ D: x^2 + \frac{y^2}{16} = 1,$ $x^2 + \frac{y^2}{16} = 9, y \geq 0, y \leq x.$

Відповіді :

Номер варіанта	1	2	3	4	5
Завдання 1	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5
Завдання 2	18ln2	$\frac{128}{105}$	$5 \cdot 2^9$	$\frac{3^5}{2^5}\ln 6$	$\frac{1}{2}$
Номер варіанта	6	7	8	9	10
Завдання 1	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5
Завдання 2	20π	$\frac{64}{3}$	$\frac{4}{3}\ln 5$	$\frac{162}{105} = \frac{54}{35}$	$8\ln 3$

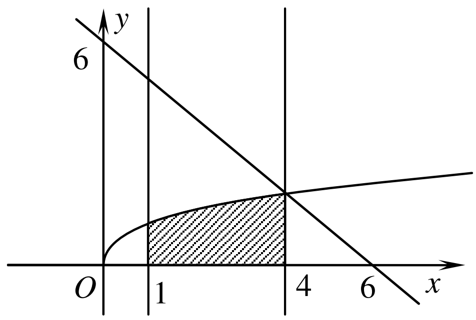
ККР 2-3.

Тема : Застосування потрійних інтегралів до обчислення об'ємів тіл.

Робота складається з трьох задач і розрахована на 15-20 хвилин. В усіх задачах необхідно обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями, використовуючи потрійний інтеграл. Обчислювати інтеграл, що виникає в першій задачі зручно в декартовій системі координат, а в другій та третій задачах – перейти до циліндричної та сферичної відповідно.

Приклад 1-3-1. Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y = \sqrt{x},\ x = 1,\ x = 4,\ x + y + 3z = 6,\ z = 0$.

Розв'язання. У задачі треба знайти об'єм циліндричного тіла з основою у площині XOY, що має форму області D, твірними, паралельними осі Oz, обмеженого зверху площиною $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{z}{2}=1$. Обчислимо об'єм за формулою $V=\iiint\limits_V dxdydz$.



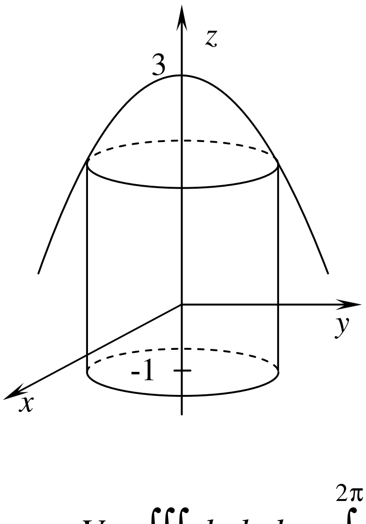
$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int_1^4 dx\int_0^{\sqrt{x}} dy\int_0^{\frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{z}{2}=1} dz=\int_1^4 dx\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{3}(6-x-y)dy=$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^4 dx(6y-xy-\frac{y^2}{2})\Big|_0^{\sqrt{x}}=\frac{1}{3}\int_1^4(6\sqrt{x}-x\sqrt{x}-\frac{x}{2})dx=\frac{1}{3}(6\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{x^2}{4})\Big|_1^4=$$

$=3{,}65$ (куб. од.)

Приклад 2-3-2. Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=1,\ z=3-x^2-y^2,\ z=-1$.

Розв'язання. У задачі треба знайти об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=1$, параболоїдом $z=3-x^2-y^2$ та площиною $z=-1$.



Тому при обчисленні об'єму зручно перейти у полярну систему координат. У цьому випадку рівняння циліндра набуває вигляду $\rho=1$, рівняння параболоїда – $z=3-\rho^2$. Кут φ змінюється від нуля до 2π, полярний радіус від нуля до 1, апліката z – від площини $z=-1$ до параболоїда $z=3-\rho^2$.

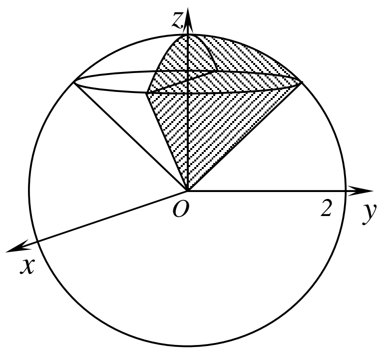
$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_{-1}^{3-\rho^2}dz=2\pi\int_0^1\rho d\rho\int_{-1}^{3-\rho^2}dz=2\pi\int_0^1\rho(3-\rho^2+1)d\rho=$$

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho d\rho\int\limits_{-1}^{3-\rho^2}dz=2\pi\int\limits_0^1\rho d\rho\int\limits_{-1}^{3-\rho^2}dz=2\pi\int\limits_0^1\rho(3-\rho^2+1)d\rho=$$

$$=2\pi\int\limits_0^1\rho(4-\rho^2)d\rho==2\pi(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4})\Big|_0^1=\frac{7}{2}\pi\,(\text{куб. од.})$$

Приклад 2-3-3. Знайдіть об’єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2\le 4$, $x\ge 0$.

Розв’язання. Необхідно знайти об’єм тіла, обмеженого конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$, сферою $x^2+y^2+z^2\le 4$ та площиною $x=0$.



Тому при обчисленні зручно перейти до сферичної системи координат

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\iiint\limits_V r^2\sin\theta drd\theta d\varphi=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/4}\sin\theta d\theta\int\limits_0^2 r^2dr=$$

$$=\varphi\Big|_0^{\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/4}\frac{r^3}{3}\Big|_0^2=\pi(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{8}{3}=\frac{4}{3}\pi(2-\sqrt{2})\ (\text{куб. од.})$$

В – 1 КҚР 2–3	В – 2 КҚР 2–3
Знайдіть об’єм тіла, обмеженого поверхнями: 1. $y=\sqrt{x}, y=0, x=1, z=0,$ $x+y+z=4$. 2. $z=1, z=x^2+y^2+3, x^2+y^2=1,$ $y\ge 0$. 3. $z^2=3\left(x^2+y^2\right), z\ge 0,$ $x^2+y^2+z^2=1$.	Знайдіть об’єм тіла, обмеженого поверхнями: 1. $x=\sqrt{y}, x=0, y=1, z=0,\ x+y+z=3$. 2. $z=5-x^2-y^2, z=1, y\ge x, y\le x\sqrt{3}$. 3. $z^2=\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right), z\ge 0, x^2+y^2+z^2=1$.

В – 3 КKP 2–3 Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями: 1. $y=0, z=0, x=1, x=2, x+2y+z=4$. 2. $z=5-x^2-y^2, z=x^2+y^2-1,$ $x^2+y^2=1$ 3. $z^2=3\left(x^2+y^2\right), z\le 0,$ $x^2+y^2+z^2=1$.	В – 4 КKP 2–3 Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями: 1. $x=0, z=0, y=1, y=3, 2x+y+3z=6$. 2. $z=x^2+y^2-1, z=5, y\ge x/\sqrt{3}, y\le x$. 3. $z^2=\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right), z\le 0, x^2+y^2+z^2=1$.
В – 5 КKP 2–3 Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями: 1. $y=x^2, y=\sqrt{x}, z=0, x+y+z=2$. 2. $z=x^2+y^2-5, z=-1, y\ge 0, y\le x$. 3. $z\ge 0, z\le\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2+z^2\le 1$.	В – 6 КKP 2–3 Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями: 1. $y=\sqrt{x}, y=1, x=0, z=0, x+y+z=4$. 2. $z=1, z=x^2+y^2-3, x^2+y^2=1, y\ge 0$. 3. $z\ge-\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}, z\le 0,$ $x^2+y^2+z^2\le 1$.
В – 7 КKP 2–3 Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями: 1. $z=0, y=0, x=\sqrt{y}, x+y+z=3$. 2. $z=5-x^2-y^2, z=1, y\ge x,$ $y\le x/\sqrt{3}$. 3. $z^2=\left(x^2+y^2\right)/3, z\ge 0,$ $x^2+y^2+z^2=1$.	В – 8 КKP 2–3 Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями: 1. $y=0, z=0, x=1, x=2, x+2y+z=4$. 2. $z=9-x^2-y^2,\ z=x^2+y^2+1,$ $x^2+y^2=1$. 3. $z\le\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}, z\ge 0, x^2+y^2+z^2\le 1$.
В – 9 КKP 2–3 Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями: 1. $x=0, z=0, y=2, y=4,$ $2x+y+3z=6$. 2. $z=x^2+y^2+1, z=10, y\ge x/\sqrt{3},$ $y\le x$. 3. $z\le\sqrt{\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)},\ z\ge 0,$ $x^2+y^2+z^2\le 1$.	В – 10 КKP 2–3 Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями: 1. $y=\sqrt{x-1}, y=1, z=0, x=0,$ $x+2y+2z=4$. 2. $z=-1-x^2-y^2,\ z=-5, y\ge x, x\ge 0$. 3. $z\le 0, z\ge-\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2+z^2\le 1$.

***Відповіді*:**

Номер варіанта	Завдання 1	Завдання 2	Завдання 3
1	$121/60$	$5\pi/4$	$\frac{\pi}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$
2	$27/20$	$\pi/3$	$\pi/3$
3	2	5π	$\frac{\pi}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$
4	$49/36$	$3\pi/4$	$\pi/3$
5	$11/30$	π	$\pi\sqrt{2}/3$
6	$91/60$	$7\pi/4$	$\pi/\sqrt{3}$
7	$13/20$	$\pi/3$	$\pi/3$
8	$19/12$	7π	$\frac{\pi}{3}\left(2+\sqrt{3}\right)$
9	$32/9$	$27\pi/16$	$\pi/3$
10	$33/20$	π	$\pi\sqrt{2}/3$

ККР-2-4.

Тема : Застосування криволінійних інтегралів 1-го та 2-го роду.

Контрольна робота складається з двох задач і розрахована на 15-20 хвилин.

У першій задачі необхідно знайти масу кривої з відомою густиною, використовуючи криволінійний інтеграл 1-го роду. При цьому крива може бути задана як явно так і параметрично у декартовій системі або в полярній системі координат. Приблизний час виконання 7-10 хвилин.

У другій задачі необхідно знайти роботу сили по переміщенню матеріальної точки вздовж заданої кривої, використовуючи криволінійний інтеграл 2-го роду. В усіх варіантах крива – частина просторового параметрично заданого кола. Приблизний час виконання 8-10 хвилин.

Приклад 2-4-1. Знайдіть масу кривої $L:\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t,\ t\in[0;1], \\ z = bt, \end{cases}$ якщо її густина $\mu = x^2 + y^2 + z^2$.

Розв'язання. Масу кривої можна обчислити за однією з формул $m = \int\limits_L \mu dl = \int\limits_a^b \mu(x;y)\sqrt{1+(y')^2}dx$, якщо криву задано явно рівнянням $y = y(x),\ x\in[a;b]$,

$m = \int\limits_L \mu dl = \int\limits_\alpha^\beta \mu(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}dt$, якщо криву задано параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t),\ t\in[\alpha;\beta] \\ x = z(t), \end{cases}$,

$m = \int\limits_L \mu dl = \int\limits_a^b \mu(\rho;\varphi)\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\varphi$, якщо криву задано в полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi), \varphi\in[\alpha;\beta]$.

Оскільки у прикладі криву задано параметричними рівняннями, то маса дорівнює

$$m = \int\limits_0^1 (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2)\sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}(a^2t + b^2\frac{t^3}{3})\Big|_0^1 = \sqrt{a^2+b^2}(a^2 + \frac{b^2}{3}).$$

Приклад 2-4-2. Знайдіть роботу сили $\vec{F} = (-x; y; 2x^3)$, що виконується при переміщенні точки вздовж кривої MN : $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 3$ від точки $M(-2;0;3)$ до точки $N(0;-2;3)$.

Розв'язання. Обчислимо роботу сили за формулою

$$A = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Дуга MN є четвертою частиною кола радіуса 2, розташованого у площині $z = 3$ і відповідає зміні параметра $t\in[\pi;\frac{3\pi}{2}]$. Знайдемо диференціали змінних

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -2\sin t dt, \\ dy = 2\cos t dt, \\ dz = 0. \end{cases} \quad \vec{F} = (-x; y; 2x^3) = (-2\cos t, 2\sin t, 18).$$

$$A=\int_{\pi}^{3\pi/2}((-2\cos t)(-2\sin t)+2\sin t\cdot 2\cos t+18\cdot 0)dt=\int_{\pi}^{3\pi/2}8\cos t\sin t dt=$$

$$=4\int_{\pi}^{3\pi/2}\sin 2t dt=-2\cos 2t\Big|_{\pi}^{3\pi/2}=4.$$

В – 1 КKР 2–4 **1.** Знайдіть масу кривої $L:\rho=8\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le\pi/3$ з густиною $\mu=\sin^2\varphi$. **2.** Знайдіть роботу сили $\vec{F}=(4,3x,3xz)$ при переміщенні вздовж кривої MN : $x=3\cos\varphi,\ y=3\sin\varphi,\ z=3$ від точки $M(3;0;3)$ до точки $M(0;3;3)$.	В – 2 КKР 2–4 **1.** Знайдіть масу кривої $L: y=\ln\sin x,\ \pi/3\le x\le\pi/2$ з густиною $\mu=\cos x$. **2.** Знайдіть роботу сили $\vec{F}=(-x^2y^2;4;x)$ при переміщенні вздовж кривої MN : $x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=4$ від точки $M(2;0;4)$ до точки $M(0;2;4)$.
В – 3 КKР 2–4 **1.** Знайдіть масу кривої $L: x=t\cos t,\ \ y=t\sin t,\ z=t,\ 0\le t\le 2\pi$ з густиною $\mu=2t$. **2.** Знайдіть роботу сили $\vec{F}=(x+y;-x;6)$ при переміщенні вздовж кривої MN : $x=\cos\varphi,\ y=\sin\varphi,\ z=2$ від точки $M(1;0;2)$ до точки $M(0;1;2)$.	В – 4 КKР 2–4 **1.** Знайдіть масу кривої $L:\rho=8(1-\cos\varphi),\quad -\pi/3\le\varphi\le 0$ з густиною $\mu=\cos\varphi/2$. **2.** Знайдіть роботу сили $\vec{F}=(x;-2x^2;y)$ при переміщенні вздовж кривої $MN: x=3\cos t, y=4\sin t, z=2$, від точки $M(3;0;2)$ до точки $N(0;4;2)$.
В – 5 КKР 2–4 **1.** Знайдіть масу кривої $L: y=1-\ln(x^2-1),\ 3\le x\le 4$ з густиною $\mu=x^2$. **2.** Знайдіть роботу сили $\vec{F}=(y;-2x;x^2)$ при переміщенні вздовж кривої $MN: x=2\cos t, y=2\sin t, z=2$, від точки $M(2;0;2)$ до точки $N(-2;0;2)$.	В – 6 КKР 2–4 **1.** Знайдіть масу кривої $L: x=3\cos t,\ \ y=3\sin t,\ z=3t$, $0\le t\le 2\pi$ з густиною $\mu=z^2(x^2+y^2)^{-1}$. **2.** Знайдіть роботу сили $\vec{F}=(-2z;-x;x^2)$ при переміщенні вздовж кривої $MN: x=(\cos t)/3, y=(\sin t)/3, z=8$, від точки $M(1/3;0;8)$ до точки $N(-1/3;0;8)$.

В – 7 КKР 2–4	В – 8 КKР 2–4
1. Знайдіть масу кривої $L:\rho=2\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le\pi/3$ з густиною $\mu=\cos^2\varphi$. **2.** Знайдіть роботу сили $\vec{F}=(x^2;yz;2z)$ при переміщенні вздовж кривої $MN: x=2\cos t, y=2\sin t, z=3$ від точки $M(2;0;3)$ до точки $N(0;2;3)$.	**1.** Знайдіть масу кривої $L: y=e^x+e,\ \ln\sqrt{3}\le x\le \ln\sqrt{15}$ з густиною $\mu=e^{2x}$. **2.** Знайдіть роботу сили $\vec{F}=(x;-z^2;y)$ при переміщенні вздовж кривої $MN: x=\cos t, y=3\sin t, z=2,$ від точки $M(0;3;2)$ до точки $N(-1;0;2)$.
В – 9 КKР 2–4	В – 10 КKР 2–4
1. Знайдіть масу кривої L: $x=t, y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}t^2, z=t^3, 0\le t\le 1$ з густиною $\mu=x+2z$. **2.** Знайдіть роботу сили $\vec{F}=(x;-z^2;y)$ при переміщенні вздовж кривої $MN: x=2\cos t, y=3\sin t, z=-3,$ від точки $M(2;0;-3)$ до точки $N(0;3;-3)$.	**1.** Знайдіть масу кривої L: $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x, 0\le x\le 7/9$ з густиною $\mu=x$. **2.** Знайдіть роботу сили $\vec{F}=(-y;x;3z^2)$ при переміщенні вздовж кривої $MN: x=2\cos t,$ $y=2\sin t,\ z=5$ від точки $M(2;0;5)$ до точки $N(0;2;5)$.

***Відповіді*:**

№ варіанта	Завдання 1	Завдання 2
1	$\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$	$\dfrac{27\pi}{4}-12$
2	$\ln\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$\dfrac{184}{15}$
3	$\dfrac{2}{3}((2+4\pi^2)^{3/2}-2^{3/2})$	$-\dfrac{\pi+1}{2}$
4	4	$-\dfrac{105}{2}$
5	$\dfrac{43}{3}+\ln\dfrac{6}{5}$	-6π
6	$8\sqrt{2}\pi^3$	$\dfrac{32}{3}-\dfrac{\pi}{18}$
7	$\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	$\dfrac{10}{3}$

8	$\frac{56}{3}$	12,5
9	$\frac{11}{4}$	25
10	$\frac{20\sqrt{2}}{81}$	2π

ККР-2-5.

Тема : Застосування поверхневого інтеграла 1-го роду.

Контрольна робота складається з двох задач і розрахована на 20 хвилин.

У першій задачі пропонується знайти масу частини поверхні при відомій поверхневій густині з використанням поверхневого інтеграла 1-го роду. В усіх варіантах відповідний подвійний інтеграл зручно обчислювати в полярній системі координат. Приблизний час виконання 10 хвилин.

У другій задачі необхідно обчислити запропонований поверхневий інтеграл 1-го роду по частині площини. Приблизний час виконання 10 хвилин.

Приклад 2-5-1. Знайдіть масу частини поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z\le 5$, $y\ge 0$, $x\ge y$, якщо поверхнева густина $\mu = x^2+y^2$.

Розв'язання. Обчислимо масу поверхні σ за формулою

$$m=\iint\limits_{\sigma}\mu(x;y;z)d\sigma=\iint\limits_{D_{xoy}}\mu(x;y;z)\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy.$$

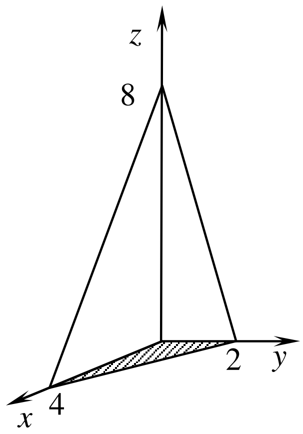
За умовою поверхня σ є частиною конуса. Його проекцією у площину XOY є сектор круга радіуса 5, який відповідає зміні кута $\varphi\in[0;\frac{\pi}{4}]$. Тому подвійний інтеграл зручно обчислювати в полярній системі координат.

$$m=\iint\limits_{D_{xoy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_{D_{xoy}}\sqrt{2}(x^2+y^2)dxdy=\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/4}d\varphi\int\limits_0^5\rho^2\rho d\rho=\sqrt{2}\frac{\pi}{4}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^5=\sqrt{2}\pi\frac{625}{16}.$$

Приклад 2-5-2. Обчисліть інтеграл $\iint\limits_{\sigma}(2x+4y+z)d\sigma$, якщо $\sigma: \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{8}=1$ розташована у першому октанті.

Розв'язання. Поверхня σ – частина площини, розташована у першому октанті.



Запишемо її рівняння у вигляді $z = 8 - 4y - 2x$ і знайдемо диференціал $d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy = \sqrt{1 + (-2)^2 + (-4)^2}\,dxdy = \sqrt{21}dxdy$.

Тоді

$$\iint_{\sigma}(2x + 4y + z)d\sigma = \iint_{D_{xoy}}(2x + 4y + 8 - 4y - 2x)\sqrt{21}dxdy = 8\sqrt{21}\iint_{D_{xoy}} dxdy =$$

$$= 8\sqrt{21}S_{\triangle ABO} = 8\sqrt{21}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2 = 32\sqrt{21}.$$

В – 1 ККР 2–5 **1.** Знайдіть масу частини поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, розташованої у першому октанті, якщо її поверхнева густина $\mu = z^2$. **2.** Обчисліть інтеграл $\iint_S (z + 3x + 2y)dS$, якщо $S: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1,$ перший октант.	В – 2 ККР 2–5 **1.** Знайдіть масу частини поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, що лежить всередині поверхні $x^2 + y^2 = Rx\ (z > 0)$, якщо її поверхнева густина $\mu = z$. **2.** Обчисліть інтеграл $\iint_S x^2 dS$, якщо $S: 2x + 3y + z = 1,$ перший октант.
В – 3 ККР 2–5 **1.** Знайдіть масу частини поверхні $\sqrt{x^2 + y^2} = z,\ z \le 2$, якщо її поверхнева густина $\mu = x^2 + y^2$. **2.** Обчисліть інтеграл $\iint_S (z + 2x + 3y)dS$, якщо	В – 4 ККР 2–5 **1.** Знайдіть масу частини однорідної поверхні $\sqrt{x^2 + y^2} = z,\ z \le 1$. **2.** Обчисліть інтеграл $\iint_S y^2 dS$, якщо $S: x + 3y + z = 1,$ перший октант.

$S:\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{6}=1,$ перший октант.	
В – 5 КKP 2–5 **1.** Знайдіть масу частини поверхні $x^2+y^2+z^2=R^2$, вирізаної циліндром $x^2+y^2=Ry$, якщо її поверхнева густина $\mu=\|z\|$. **2.** Обчисліть інтеграл $\iint\limits_S (6x+4y+3z)dS$, якщо $S:\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1,$ перший октант.	В – 6 КKP 2–5 **1.** Знайдіть масу частини поверхні $x^2+y^2+z^2=a^2$, розташованої у першому октанті, якщо її поверхнева густина $\mu=z$. **2.** Обчисліть інтеграл $\iint\limits_S xydS$, якщо $S: x+y+z=1,$ перший октант.
В – 7 КKP 2–5 **1.** Знайдіть масу частини поверхні $\sqrt{x^2+y^2}=z,\ z\le R$, якщо її поверхнева густина $\mu=x^2+y^2+z^2$. **2.** Обчисліть інтеграл $\iint\limits_S (2x+3y+4z)dS$, якщо $S: x+\dfrac{3y}{2}+2z=1,$ перший октант.	В – 8 КKP 2–5 **1.** Знайдіть масу частини поверхні $x^2+y^2+z^2=R^2$, вирізаної циліндром $(x^2+y^2)^2=R^2(x^2-y^2)$, якщо її поверхнева густина $\mu=\|z\|$. **2.** Обчисліть інтеграл $\iint\limits_S zdS$, якщо $S: x+3y+4z=1,$ перший октант.
В – 9 КKP 2–5 **1.** Знайдіть масу частини поверхні $x^2+y^2+z^2=R^2$, якщо $y\ge x, y\le\sqrt{3}x,\quad z\ge 0$, а поверхнева густина $\mu=z$. **2.** Обчисліть інтеграл $\iint\limits_S (4x+3y+12z)dS$, якщо $S:\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+z=1,$ перший октант.	В – 10 КKP 2–5 **1.** Знайдіть масу частини поверхні $x^2+y^2=z^2, 0\le z\le R$, якщо її поверхнева густина $\mu=\sqrt{x^2+y^2}$. **2.** Обчисліть інтеграл $\iint\limits_S xydS$, якщо $S: x+2y+\dfrac{z}{3}=1,$ перший октант.

***Відповіді*:**

Номер варіанта	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**
Завдання 1	$\dfrac{\pi R^4}{6}$	$\dfrac{\pi R^3}{4}$	$8\sqrt{2}\pi$	$\sqrt{2}\pi$	$\dfrac{\pi R^3}{2}$
Завдання 2	$18\sqrt{14}$	$\dfrac{\sqrt{14}}{288}$	$18\sqrt{14}$	$\dfrac{\sqrt{11}}{324}$	$12\sqrt{61}$

Номер варіанта	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
Завдання 1	$\frac{\pi a^3}{4}$	$\sqrt{2}\pi R^4$	$2R^3$	$\frac{\pi R^3}{24}$	$\frac{2\sqrt{2}\pi R^3}{3}$
Завдання 2	$\frac{\sqrt{3}}{24}$	$\frac{\sqrt{29}}{6}$	$\frac{\sqrt{26}}{288}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{\sqrt{46}}{96}$

ККР-2-6.

Тема : ***Скалярні та векторні поля.***

Робота складається з двох задач і розрахована на 15 хвилин.

У першій задачі необхідно перевірити чи потенціальне векторне поле і знайти його потенціал. Приблизний час виконання 5 хвилин.

У другій задачі необхідно знайти градієнт і похідну за напрямом для скалярного поля. Приблизний час виконання 10 хвилин.

Приклад 2-6-1. Доведіть, що поле $\vec{F} = (3x + y + z; x + 4y + z; x + y + 5z)$ потенціальне і знайдіть його потенціал.

Розв'язання. Векторне поле потенціальне, якщо його ротор дорівнює нулю. Обчислимо ротор поля $\vec{F}$:

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x + y + z & x + 4y + z & x + y + 5z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial(x + y + 5z)}{\partial y} - \frac{\partial(x + 4y + z)}{\partial z}\right) +$$

$$+\vec{j}\left(\frac{\partial(3x + y + z)}{\partial z} - \frac{\partial(x + y + 5z)}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial(x + 4y + z)}{\partial x} - \frac{\partial(3x + y + z)}{\partial y}\right) = 0.$$

Отже, поле потенціальне. Знайдемо його потенціал за формулою

$$U(x; y; z) = \int_{x_0}^{x} P(t; y_0; z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x; t; z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x; y; t)dt .$$

$$U(x; y; z) = \int_{x_0}^{x} (3t + y_0 + z_0)dt + \int_{y_0}^{y} (x + 4t + z_0)dt + \int_{z_0}^{z} (x + y + 5t)dt =$$

$$= (3\frac{t^2}{2} + (y_0 + z_0)t)\Big|_{x_0}^{x} + ((x + z_0)t + 2t^2)\Big|_{y_0}^{y} + ((x + y)t + 5\frac{t^2}{2})\Big|_{z_0}^{z} = \frac{3x^2}{2} - \frac{3x_0{}^2}{2} +$$

$$+ y_0x + z_0x - y_0x_0 - z_0x_0 + xy + z_0y - xy_0 - zy_0 + 2y^2 - 2y_0{}^2 + xz + yz - z_0x - z_0y +$$

$$+\frac{5z^2}{2} - \frac{5z_0{}^2}{2} = \frac{3x^2}{2} + 2y^2 + \frac{5z^2}{2} + xy + xz + yz + C.$$

Потенціал поля дорівнює

$$U(x;y;z)=\frac{3x^2}{2}+2y^2+\frac{5z^2}{2}+xy+xz+yz+C.$$

Приклад 2-6-2. Знайдіть у точці $M(1;2;2)$ градієнт скалярного поля $u=3(x^2+y^2+z^2)+x+y+z$ та похідну за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо $N(-1;3;4)$

Розв'язання. За формулою знаходження градієнта

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}(M)=\frac{\partial u}{\partial x}(M)\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}(M)\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}(M)\vec{k}$$

маємо

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}(M)=(6x+1)\vec{i}+(6y+1)\vec{j}+(6z+1)\vec{k}\Big|_M=7\vec{i}+13\vec{j}+13\vec{k}\,.$$

Знайдемо вектор $\overrightarrow{MN}=(-1-1;3-2;4-2)=(-2;1;2)$ і нормуємо його

$$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{4+1+4}=3,\ \overrightarrow{MN}^0=\vec{e}=(-\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}).$$

Тоді похідну за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$ обчислимо за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{MN}}\Big|_M=\langle\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}\big|_M,\vec{e}\rangle$$

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{MN}}\Big|_M=7\cdot(-\frac{2}{3})+13\cdot\frac{1}{3}+13\cdot\frac{2}{3}=\frac{25}{3}.$$

В – 1 КKР 2–6 **1.** Доведіть потенціальність поля $\vec{F}=\left(3x^2+y^2;2xy+z;y+3z^2\right)$ та знайдіть його потенціал. **2.** Знайдіть градієнт скалярного поля $u=y^2+4xy^2-3x/y+xyz^3$ в точці M та похідну за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$ в точці M, якщо $M(2;1;0),N(-1;5;0)$.	В – 2 КKР 2–6 **1.** Доведіть потенціальність поля $\vec{F}=(2x+y+z;x+2y+z;x+y+2z)$ та знайдіть його потенціал. **2.** Знайдіть градієнт скалярного поля $u=x^3y-3x^2y^2+xy^3+xyz^2-7$ в точці M та похідну за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$ в точці M, якщо $M(1;2;0),N(4;6;0)$.
В – 3 КKР 2–6 **1.** Доведіть потенціальність поля $\overline{F}=\left(4x^3+yz;4y^3+xz;xy+4z^3\right)$ та знайдіть його потенціал. **2.** Знайдіть градієнт скалярного поля $u=xy+xz+yz$ в точці M та	В – 4 КKР 2–6 **1.** Доведіть потенціальність поля $\vec{F}=\left(3x^2+y^2z^3;-3y^2+2xyz^3;3z^2\left(xy^2-1\right)\right)$ та знайдіть його потенціал. **2.** Знайдіть градієнт скалярного поля $u=xy^2+z^2-xyz$ в точці M та похідну за

похідну за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$ в точці M, якщо $M(2;3;4), N(3;5;6)$	напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$ в точці M, якщо $M(1;2;2), N(3;3;4)$.
В – 5 ККР 2–6 **1.** Доведіть потенціальність поля $\vec{F}=\left(y^2z^2+2xy; x^2+2xyz^2; 2xzy^2\right)$ та знайдіть його потенціал. **2.** Знайдіть градієнт скалярного поля $u=xy(z-x-y)$ в точці M та похідну за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$ в точці M, якщо $M(1;2;1), N(3;2;4)$	В – 6 ККР 2–6 **1.** Доведіть потенціальність поля $\vec{F}=\left(2xyz^2-1; x^2z^2+2; 2x^2yz+3\right)$ та знайдіть його потенціал. **2.** Знайдіть градієнт скалярного поля $u=x^4+y^4-x^2-2xy+zy^2$ в точці M та похідну за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$ в точці M, якщо $M(1;1;1), N(5;5;5)$.
В – 7 ККР 2–6 **1.** Доведіть потенціальність поля $\vec{F}=(x+y+2z; x+y+3z; 2x+3y+z)$ та знайдіть його потенціал. **2.** Знайдіть градієнт скалярного поля $u=2y^2+z^2-xy-yz$ в точці M та похідну за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$ в точці M, якщо $M(1;0;3), N(2;-1;4)$.	В – 8 ККР 2–6 **1.** Доведіть потенціальність поля $\vec{F}=(2x+2; 2y-3; 2z+4)$ та знайдіть його потенціал. **2.** Знайдіть градієнт скалярного поля $u=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$ в точці M та похідну за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$ в точці M, якщо $M(-1;2;1), N(3;1;2)$.
В – 9 ККР 2–6 **1.** Доведіть потенціальність поля $\vec{F}=(x+y-z; x-y+z; z+y-x)$ та знайдіть його потенціал. **2.** Знайдіть градієнт скалярного поля $u=x^3+y^3-3xz+4yz$ в точці M та похідну за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$ в точці M, якщо $M(2;1;0), N(-1;4;5)$.	В – 10 ККР 2–6 **1.** Доведіть потенціальність поля $\vec{F}=\left(2x-z^3; 2y+2z; 2y-3xz^2\right)$ та знайдіть його потенціал. **2.** Знайдіть градієнт скалярного поля $u=z^2+4\sin x\sin y$ в точці M та похідну за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$ в точці M, якщо $M(\pi/2;\pi/2;1), N(\pi/2;\pi/2;2)$.

Відповіді :

№ варіанта	Завдання 1	Завдання 2	
1	$u=x^3+xy^2+yz+z^3+c$	$(1;24;0)$	$93/5$
2	$u=x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+c$	$(-10;1;0)$	$-26/5$

3	$u = x^4 + y^4 + z^4 + xyz + c$	$(7;6;5)$	$29/3$
4	$u = x^3 - y^3 - z^3 + xy^2z^3 + c$	$(0;2;2)$	2
5	$u = x^2y + xy^2z^2 + c$	$(-6;-4;2)$	$-6/\sqrt{13}$
6	$u = -x + 2y + 3z + x^2yz^2 + c$	$(0;4;1)$	$5/\sqrt{3}$
7	$u = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + xy + +2xz + 3yz + c$	$(0;-4;6)$	$10/\sqrt{3}$
8	$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + z - 3y + c$	$(0;8;-4)$	$-4/\sqrt{2}$
9	$u = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2 + z^2\right) + xy + 3y - -xz + c$	$(12;3;-2)$	$-37/\sqrt{43}$
10	$u = x^2 + y^2 + 2yz - xz^3 + c$	$(0;0;2)$	2

<u>ККР-2-7.</u>

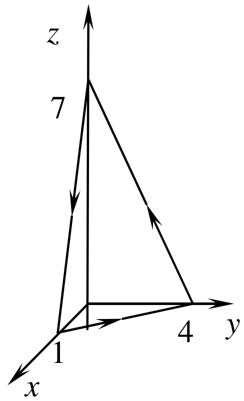
Тема : Формула Стокса.

Контрольна робота містить 10 варіантів з одним завданням і розрахована на 10 хвилин.

У завданні необхідно за формулою Стокса знайти циркуляцію векторного поля вздовж замкненого контура L. У всіх завданнях контур L– просторова плоска крива.

Приклад 1-7-1. Знайдіть циркуляцію векторного поля $\vec{F} = (x^2 + 4; x - y; 1 + 5z)$ вздовж ламаної $ABCA$, якщо $A(1;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;7)$.

Розв'язання. За означенням циркуляція векторного поля Ц=$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$.



З умови задачі Ц= $\oint\limits_{ABCA} (x^2+4)dx + (x-y)dy + (5z+1)dz$.

Застосуємо формулу Стокса:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

За поверхню σ, напнуту на контур L, візьмемо площину $z = 7 - 7x - \frac{7}{4}y$, тоді

$$Ц= \oint\limits_{ABCA} (x^2+4)dx + (x-y)dy + (5z+1)dz =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial(5z+1)}{\partial y} - \frac{\partial(x-y)}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial(x^2+4)}{\partial z} - \frac{\partial(5z+1)}{\partial x}\right)dxdz +$$

$$+\left(\frac{\partial(x-y)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2+4)}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_{\sigma} dxdy = \iint\limits_{D_{xoy}} dxdy = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4 = 2.$$

В – 1 КРР 2–7 **1.** Знайдіть циркуляцію векторного поля $\vec{F} = (y, -x, 3z)$ вздовж контура $L: \begin{cases} z = x^2 + y^2 - 17, \\ x^2 + y^2 = 16. \end{cases}$ Обхід контура за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з початку координат.	В – 2 ККР 2–7 **1.** Знайдіть циркуляцію векторного поля $\vec{F} = (y, 1, z)$ вздовж контура $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8,\ z > 0. \end{cases}$ Обхід контура за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з початку координат.
В – 3 ККР 2–7 **1.** Знайдіть циркуляцію векторного поля $\vec{F} = (x-2, x+y, -2z)$ вздовж контура $L = ABCA$, де $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$. Обхід контура за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з початку координат.	В – 4 ККР 2–7 **1.** Знайдіть циркуляцію векторного поля $\vec{F} = (xy, yz, xz)$ вздовж контура $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$ Обхід контура за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з початку координат.

В – 5 КкР 2–7 1. Знайдіть циркуляцію векторного поля $\vec{F}=(x+5, x-2y, -3z)$ вздовж контура $L=ABCA,$ де $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;6)$. Обхід контура за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з початку координат.	В – 6 КкР 2–7 1. Знайдіть циркуляцію векторного поля $\vec{F}=(-y, z, 1)$ вздовж контура $L:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^2+y^2+z^2=5,\ z>0. \end{cases}$ Обхід контура за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з початку координат.
В – 7 КкР 2–7 **1.** Знайдіть циркуляцію векторного поля $\vec{F}=(y, z, x)$ вздовж контура $L:\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x^2+y^2+z^2=2. \end{cases}$ Обхід контура за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з початку координат.	В – 8 КкР 2–7 **1.** Знайдіть циркуляцію векторного поля $\vec{F}=(x+2, x+3y+z, 5z+y)$ вздовж контура $L=ABCA,$ де $A(5;0;0), B(0;4;0), C(0;0;3)$. Обхід контура за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з початку координат.
В – 9 КкР 2–7 **1.** Знайдіть циркуляцію векторного поля $\vec{F}=(z, -x, y)$ вздовж контура $L:\begin{cases} z=x^2+y^2-10, \\ x^2+y^2=9. \end{cases}$ Обхід контура за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з початку координат.	В – 10 КкР 2–7 **1.** Знайдіть циркуляцію векторного поля $\vec{F}=(y, -x, z)$ вздовж контура $L:\begin{cases} x^2+y^2=z^2,\ z>0, \\ x^2+y^2+z^2=4. \end{cases}$ Обхід контура за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з початку координат.

***Відповіді*:**

№ варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 задача	-32π	-4π	1	$-\pi$	1	π	$-\pi$	10	9π	-4π

<u>ККР-3-1.</u>

Тема : Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

Контрольна робота містить 10 варіантів з двох завдань і розрахована на 10-15 хвилин.

У першому завданні необхідно знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Приблизний час виконання 5 хвилин.

У другому завданні необхідно розв'язати задачу Коші. Приблизний час виконання 7-10 хвилин.

Приклад 3-1-1. Знайдіть загальний розв'язок рівняння $x^2dy-(2xy+3y)dx=0$.

Розв'язання. Диференціальним рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними називають рівняння виду

$$y'=f(x)g(x)$$

або

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0.$$

Отже, рівняння $x^2dy-y(2x+3)dx=0$ є рівнянням 1-го порядку з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні

$$\frac{dy}{y}=\frac{(2x+3)dx}{x^2}$$

і проінтегруємо обидві частини останньої рівності:

$$\ln|y|=\ln C+2\ln|x|-\frac{3}{x} \Rightarrow \ln y=\ln C\left(x^2\cdot e^{-3/x}\right) \Rightarrow y=Cx^2e^{-3/x} \text{ –}$$

це і є загальний розв'язок даного рівняння.

Приклад 3-1-2. Знайдіть розв'язок задачі Коші $xy'-y\ln y=0$, якщо $y(1)=e$.

Розв'язання. Маємо рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними $y'=\dfrac{y\ln y}{x}$.

Відокремимо змінні:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\ln y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{d(\ln y)}{\ln y}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\ln y|=\ln Cx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y=Cx \Rightarrow \; y=e^{Cx}.$$

Загальний розв'язок рівняння $y=e^{Cx}$. Для знаходження розв'язку задачі Коші підставимо початкову умову у загальний розв'язок і знайдемо відповідне значення константи C: $e = e^{C\cdot 1} \Rightarrow C = 1$. Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд: $y = e^x$.

В – 1 КKР 3–1 **1.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $\left(1+x^2\right)dy - xydx = 0$ **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'\sin x = y\ln y$, $y(\pi/2) = e$	В – 2 КKР 3–1 **1.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $\cos x\dfrac{dy}{dx} = y\sin x + \sin x$. **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$.
В – 3 КKР 3–1 **1.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $\sin xdx + \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = 0$. **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $\sqrt{1-x^2}dy - 3dx = 0$, $y(1) = 0$.	В – 4 КKР 3–1 **1.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $\operatorname{tg} x\sin^2 ydx - \cos^2 x\operatorname{ctg} ydy = 0$. **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $\left(xy^2 + y^2\right)dx - xdy = 0$, $y(1) = 1$.
В – 5 КKР 3–1 **1.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $\operatorname{tg} xdy - ydx = 0$. **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $\cos^3 xdx - \sin^2 xdy = 0$, $y(\pi/2) = 0$.	В – 6 КKР 3–1 **1.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $e^y\left(y'+1\right) = 1$. **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $(x+2)dx - \left(x^2+4x+2\right)dy = 0$, $y(-1) = 0$.
В – 7 КKР 3–1 **1.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $xdy + ydx = y^2dx$. **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $xdy = 2\sqrt{y^2-1}dx$, $y(1) = 1$.	В – 8 КKР 3–1 **1.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $(x-1)\left(y^3-1\right) + (x+1)y^2\dfrac{dy}{dx} = 0$. **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $\left(y - \dfrac{4}{y^2}\right) = y'\left(x - \dfrac{9}{x^2}\right)$, $y(0) = 1$.
В – 9 КKР 3–1 **1.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $\left(x^2+1\right)dy - x^4dx = 0$.	В – 10 КKР 3–1 **1.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $ye^{2x}dx + \left(1+e^{2x}\right)dy = 0$.

2. Знайдіть розв'язок задачі Коші $\left(xy^2+x\right)dx+\left(y-x^2y\right)dy=0$, $y(2)=0$.	**2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $xdy-\left(1-\sqrt{x}\right)^3dx=0$, $y(1)=-3$.

***Відповіді*:**

№ варіанта	1 задача	2 задача
1	$y=C\sqrt{1+x^2}$	$\ln y=\sqrt{\left\lvert \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert}$
2	$y=\frac{C}{\cos x}-1$	$\operatorname{arctg} y-\operatorname{arctg} x=1$
3	$4y=\left(\cos x+C\right)^2$	$y=3\arcsin x-\frac{3\pi}{2}$
4	$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=C$	$-\frac{1}{y}=x+\ln\lvert x\rvert-2$
5	$y=C\sin x$	$y=-\frac{1}{\sin x}-\sin x+2$
6	$x=\ln\frac{C}{1-e^y}$	$y=\ln\sqrt{\lvert x^2+4x+2\rvert}$
7	$y-1=Cxy$	$y+\sqrt{y^2-1}=x^2$
8	$\frac{e^x}{(x+1)^2}=\frac{C}{\sqrt[3]{y^3-1}}$	$3\left(y^3-4\right)=x^3-9$
9	$y=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg} x+C$	$3\left(y^3+1\right)=x^2-1$
10	$y=\frac{1}{C\sqrt{1+e^{2x}}}$	$y=\ln\lvert x\rvert-6\sqrt{x}+3x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}$

ККР-3-2.

Тема : Однорідні та лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

Контрольна робота з 10 варіантів містить три завдання. Робота розрахована на 25-35 хвилин.

У першому завданні необхідно знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл однорідного диференціального рівняння. Приблизний час виконання 5-7 хвилин.

У другому завданні необхідно знайти загальний розв’язок лінійного рівняння першого порядку. Приблизний час виконання 5-8 хвилин.

Третє завдання – текстова задача. Студенту необхідно скласти диференціальне рівняння першого порядку (лінійне або однорідне) і розв’язати його. Приблизний час виконання 15-20 хвилин.

Приклад 3-2-1. Розв’яжіть рівняння $xy' - y = \sqrt{y^2 - x^2}$.

Розв’язання. Диференціальне рівняння 1-го порядку називають однорідним, якщо його можна представити у вигляді: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Розв’язок такого рівняння шукають за допомогою підстановки: $y(x) = z(x)x$, де $z(x)$– деяка нова невідома функція.

Запишемо дане рівняння у вигляді: $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}$. Воно є однорідним, тому введемо заміну: $y = zx, y' = z'x + z$. Після підстановки отримаємо: $z'x + z = z + \sqrt{z^2 - 1} \Rightarrow z' = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{x}$ – рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’яжемо його.

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left|z + \sqrt{z^2-1}\right| = \ln Cx \Rightarrow \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} = Cx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$$

Отримали загальний інтеграл рівняння.

Приклад 3-2-2. Розв’яжіть рівняння $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$.

Розв’язання. Дане рівняння є лінійним, тобто виду $y' + P(x)y = Q(x)$, тому введемо заміну: $y = u(x)v(x) = uv$, де $u = u(x), v = v(x)$ – деякі невідомі функції.

$$u'v + uv' - \frac{2xuv}{1+x^2} = 1 + x^2 \Rightarrow u'v + u\left(v' - \frac{2xv}{1+x^2}\right) = 1 + x^2.$$

Підберемо функцію $v = v(x)$ так, щоб вона задовольняла рівняння

$$v' - \frac{2xv}{1+x^2} = 0.$$

$$v' - \frac{2xv}{1+x^2} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} \Rightarrow \ln|v| = \ln\left(1+x^2\right) \Rightarrow v = 1 + x^2.$$

Підставимо знайдену функцію $v(x)$ в рівняння $u'v+u\left(v'-\frac{2xv}{1+x^2}\right)=1+x^2$:

$$u'\left(1+x^2\right)=1+x^2 \Rightarrow du=dx \Rightarrow u=x+C.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y=\left(1+x^2\right)(x+C)$.

Приклад 3-2-3. Нехай у довільній точці деякої кривої M_0 проведено дотичну та нормаль. Знайдіть рівняння всіх кривих, у яких ордината точки перетину нормалі з віссю Oy рівна подвоєній абсцисі точки дотику.

Розв'язання. Нехай крива, яку треба знайти задається рівнянням $y=y(x)$.Нехай точка M_0 має координати $(x_0;y_0)$, тоді x_0 – абсциса точки дотику. Рівняння нормалі, що проходить через точку M_0 має вигляд:

$$y=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)+y_0.$$

Знайдемо ординату точки перетину нормалі з віссю Oy. Для цього покладемо $x=0 \Rightarrow y=\frac{x_0}{y'(x_0)}+y_0$. Тоді за умовою $\frac{x_0}{y'(x_0)}+y_0=2x_0$.

Точка M_0 – довільна точка кривої, отже для будь-яка точка кривої задовольняє рівняння $\frac{x}{y'}+y=2x$, яке є однорідним рівнянням 1-го порядку. Розв'яжемо його за допомогою підстановки: $y=z(x)x \Rightarrow$

$$z'x+z=\frac{x}{2x-zx} \Rightarrow z'x=\frac{1}{2-z}-z \Rightarrow \frac{z-2}{z^2-2z+1}dz=\frac{-dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{(z-2)dz}{z^2-2z+1}=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z-1|+\frac{1}{z-1}=\ln\frac{C}{x} \Rightarrow \frac{1}{z-1}=\ln\frac{C}{x(z-1)},$$

$C=const$. Повертаючись до функції $y(x)$, отримаємо: $\frac{x}{y-x}=\ln\frac{C}{y-x}$, що і є розв'язком задчі.

В – 1 ККР 3–2	В – 2 ККР 3–2
Розв'яжіть рівняння **1.** $(2x+y)dy-(x+2y)dx=0$. **2.** $xy'-2y=x^3+x$. **3.** Знайдіть лінію, для якої квадрат довжини відрізка, що відтинає дотична на осі Oy, дорівнює добутку	Розв'яжіть рівняння **1.** $\left(2\sqrt{xy}-y\right)dx+xdy=0$. **2.** $xy'-4y=2x^2-3x$. **3.** Знайдіть лінію, для якої ордината точки перетину будь-якої дотичної з віссю Oy дорівнює натуральному

координат точки дотику.	логарифму абсциси точки дотику.
В – 3 ККР 3–2 Розв’яжіть рівняння **1.** $\left(4xy+x^2\right)dy-2y^2dx=0$. **2.** $y'\sin x-y\cos x=\sin^2 x-\cos x$. **3.** Знайдіть лінію, для якої дов радірадіус-вектора будь-якої точки дот дорівнює довжині відрізка, що відт дотична на осі Oy.	В – 4 ККР 3–2 Розв’яжіть рівняння **1.** $2xydy-\left(x^2-4y^2\right)dx=0$. **2.** $xy'-2y=x^2\cos x$. **3.** Знайдіть лінію, для якої відрізок, що відтинає будь-яка дотична на осі Oy, дорівнює півсумі координат точки дотику.
В – 5 ККР 3–2 Розв’яжіть рівняння **1.** $\left(x^2+y^2+xy\right)dx-x^2dy=0$. **2.** $y'-2y=e^{-x}$. **3.** Знайдіть лінію, для якої будь-яка дотична перетинається з віссю Oy в точці, що рівновіддалена від точки дотику та від початку координат.	В – 6 ККР 3–2 Розв’яжіть рівняння **1.** $2xydy+\left(x^2-y^2\right)dx=0$. **2.** $xy'-3y=3-4x-x^2$. **3.** Знайдіть лінію, для якої площа трикутника утвореного віссю Ox, дотичною та радіус-вектором точки дотику дорівнює b^2 $\left(b=const\right)$.
В – 7 ККР 3–2 Розв’яжіть рівняння **1.** $xdy-\left(y-x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}\right)dx=0$. **2.** $\left(x^2-1\right)y'-xy=x^3-x$. **3.** Знайдіть лінію, для якої відрізок, що відтинає будь-яка дотична на осі Oy вдвічі більший, ніж абсциса точки дотику.	В – 8 ККР 3–2 Розв’яжіть рівняння **1.** $ydx-\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)dy=0$. **2.** $xy'+y=x^2e^{\frac{1}{x}}$. **3.** Знайдіть лінію, для якої відрізок, що відтинає дотична на осі Ox, дорівнює квадрату ординати точки дотику.
В – 9 ККР 3–2 Розв’яжіть рівняння **1.** $\left(xy'-y\right)\ln\dfrac{y}{x}=x$. **2.** $y'+2xy=xe^{-x^2}$. **3.** Знайдіть лінію, для якої трикутник, що утворений дотичною, віссю Oy та радіус-вектором точки дотику є рівнобедреним.	В – 10 ККР 3–2 Розв’яжіть рівняння **1.** $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y$. **2.** $y'+xy=\left(x-1\right)\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. **3.** Знайдіть лінію, для якої відстань від т. $\left(0,0\right)$ до довільної дотичної дорівнює абсцисі точки дотику.

Відповіді :

№ варіан-та	1 задача	2 задача	3 задача
1	$\frac{y+x}{(y-x)^2}=Cx$	$y=x^3-x+Cx^2$	$2\sqrt{\frac{y}{x}}=C\pm\ln\lvert x\rvert$
2	$2\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln\frac{C}{x^2}$	$y=-x^2-x+Cx^4$	$y=Cx-\ln x-1$
3	$\ln\left\lvert\frac{2y^2+4x^2}{x^2}\right\rvert+\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{2}{x\sqrt{2}}=$ $=\ln\frac{C}{x}$	$y=x\sin x+1+C\sin x$	$\left[\begin{array}{l}x^2=C^2-2Cy\\1=C^2x^2-2Cy\end{array}\right.$
4	$6\frac{y^2}{x^2}-1=\left(\frac{C}{x}\right)^6$	$y=x^2(\sin x+C)$	$y+x=C\sqrt{x}$
5	$\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$	$y=Ce^{2x}-\frac{1}{3e^x}$	$y^2+x^2=Cx$
6	$y^2+x^2=Cx$	$y=Cx^3+x^2+2x-1$	$x=Cy+\frac{b^2}{y}$
7	$\sin\frac{y}{x}=\frac{C}{x}$	$y=x^2-1+C\sqrt{x^2-1}$	$xy=C$
8	$\frac{y^2}{x^2+\sqrt{y^2+x^2}}=\frac{C}{x}$	$y=\frac{C}{x}-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$	$x=Cy-y^2$
9	$\ln Cx=-e^{-\frac{y}{x}}$	$y=\left(\frac{x^2}{2}-x+C\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$	$y^2+x^2=Cx$
10	$\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}-1=\ln Cx$	$y=\left(\frac{x^2}{2}+C\right)e^{-x^2}$	$y=\frac{C}{x}$

ККР-3-3.

Тема : Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі. Рівняння в повних диференціалах.

Контрольна робота з 10 варіантів містить два завдання. Робота розрахована на 10-15 хвилин.

У першому завданні необхідно знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл рівняння Бернуллі. Приблизний час виконання 10 хвилин.

У другому завданні необхідно знайти загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах. Приблизний час виконання 5 хвилин.

Приклад 3-3-2. Розв'яжіть рівняння $y'\cos x - y\sin x = y^4$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням Бернуллі виду $y' + P(x)y = Q(x)\cdot y^{\alpha}$.

Заміною $y^{1-\alpha}(x) = z(x)$ рівняння Бернуллі зводемо до лінійного.

У нашому випадку $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = y^4\cos x,\ \alpha = 4$, тобто заміна: $y^{-3}(x) = z(x)$, тоді $y(x) = z^{-\frac{1}{3}}(x) = z^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{3}z^{-\frac{4}{3}}z'$.

Після підстановки в рівняння одержимо:

$$-\frac{1}{3}z^{-\frac{4}{3}}z' - z^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{tg}\,x = z^{-\frac{4}{3}}\frac{1}{\cos x} \Rightarrow z' + 3z\,\mathrm{tg}\,x = -\frac{3}{\cos x}.$$

Це лінійне рівняння, яке розв'яжемо підстановкою $z = uv, z' = u'v + uv'$:

$$u'v + uv' + 3uv\,\mathrm{tg}\,x = -\frac{3}{\cos x},$$

$$u'v + u\left(v' + 3v\,\mathrm{tg}\,x\right) = -\frac{3}{\cos x},$$

$$v' + 3v\,\mathrm{tg}\,x = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -3\,\mathrm{tg}\,x dx \Rightarrow \ln|v| = -3\ln C\cos x \Rightarrow v = (\cos x)^{-3},$$

$$u'\cdot\cos^{-3}x = -\frac{3}{\cos x} \Rightarrow u' = -3\cos^2 x \Rightarrow u = -\frac{3}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C.$$

Тоді

$$z = \frac{1}{\cos^3 x}\left(C - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\sin 2x\right), \text{ звідки } y = z^{-\frac{1}{3}};\ y = \cos x\sqrt[3]{\frac{4}{C - 6x - 3\cos 2x}}.$$

Приклад 3-3-2. Розв'яжіть рівняння

$$\left(e^y + 2x\sqrt{x^2+1}\right)dx + \left(xe^y + \arcsin\frac{y}{8}\right)dy = 0.$$

Розв'язання. Рівняння виду $M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$, для якого виконується співвідношення $M'_y = N'_x$, називають рівнянням в повних дифернціалах. Розв'язок рівняння шукають у вигляді:

$$\int_{x_0}^{x} M(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt = const.$$

Впевнимось, що дане рівняння дійсно є рівнянням в повних диференціалах:

$$M'_y = \left(e^y + 2x\sqrt{x^2+1}\right)'_y = e^y, N'_x = \left(xe^y + \arcsin\frac{y}{8}\right)'_x = e^y \Rightarrow M'_y = N'_x.$$

Знайдемо відповідний інтеграл:

$$\int_{x_0}^{x}\left(e^{y_0} + 2t\sqrt{t^2+1}\right)dt + \int_{y_0}^{y}\left(xe^t + \arcsin\frac{t}{8}\right)dt = \left(te^{y_0} + \frac{2}{3}\left(t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{x_0}^{x} +$$

$$+\left(xe^t + \frac{1}{8\sqrt{1-\left(\frac{t}{8}\right)^2}}\right)\Bigg|_{y_0}^{y} = \frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + xe^y + \frac{1}{\sqrt{64-y^2}} + C_1.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + xe^y + \frac{1}{\sqrt{64-y^2}} = C$$

В – 1 КKР 3–3 Розв'яжіть рівняння **1.** $y' - xy = xy^2$. **2.** $\left(x^2+y\right)dx + (x-2y)dy = 0$.	В – 2 КKР 3–3 Розв'яжіть рівняння **1.** $2y' + y = \frac{x}{y}$. **2.** $e^y dx + \left(xe^y - 2y\right)dy = 0$.
В – 3 КKР 3–3 Розв'яжіть рівняння **1.** $xy' + y = y^2 x\ln x$. **2.** $(\sin x + y)dy + (y\cos x - x^2)dx = 0.$	В – 4 КKР 3–3 Розв'яжіть рівняння **1.** $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$. **2.** $x\sin(x+y)(dx+dy) +$ $+\cos(x+y)dy = 0$.
В – 5 КKР 3–3 Розв'яжіть рівняння	В – 6 КKР 3–3 Розв'яжіть рівняння **1.** $y' + y = xy^3$.

1. $y' - \frac{xy}{2\left(1-x^2\right)} = xy^2$. **2.** $(3x^2+6xy^2)dx +$ $+(6x^2y+4y^3)dy = 0.$	**2.** $\left(x^3+3xy^2\right)dx + \left(y^3+3x^2y\right)dy = 0$.
В – 7 ККР 3–3 Розв’яжіть рівняння **1.** $y' + 2xy = 2x^3y^3$. **2.** $y' = \frac{y-3x^2}{4y-x}$.	В – 8 ККР 3–3 Розв’яжіть рівняння **1.** $y' - y\,\mathrm{tg}\,x + y^2\cos x = 0$. **2.** $\left(y^3 - x\right)dy = ydx$.
В – 9 ККР 3–3 Розв’яжіть рівняння **1.** $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{x\cos^2 x}$. **2.** $\frac{xdy}{x^2+y^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx$.	В – 10 ККР 3–3 Розв’яжіть рівняння **1.** $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$. **2.** $\left(1 + x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx +$ $+\left(\sqrt{x^2+y^2} - 1\right)ydy = 0$.

Відповіді :

№ варіанта	1 задача	2 задача
1	$y(Ce^{-\frac{x^2}{2}} - 1) = 1$	$\frac{x^3}{3} + xy - y^2 = C$
2	$y = \sqrt{x - 1 + Ce^{-x}}$	$xe^y - y^2 = C$
3	$y\left(Cx - \frac{x}{2}\ln^2 x\right) = 1$	$-\frac{x^3}{3} + y\sin x + \frac{y^2}{2} = C$
4	$y = \frac{1}{x^2 + Cx}$	$\sin\left(x+y\right) - x\cos\left(x+y\right) = C$
5	$y = \left(\frac{2}{5}\left(1-x^2\right) + \frac{C}{\sqrt[4]{1-x^2}}\right)^{-1}$	$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$
6	$y = \left(x - \frac{1}{2} + Ce^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$x^4 + y^4 + 6x^2y^2 = C$
7	$y = \left(x^2 + \frac{1}{2} + Ce^{2x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$-x^3 + xy - 2y^2 = C$

8	$y=\dfrac{1}{C\cos x - x\cos x}$	$xy-\dfrac{y^4}{4}=C$
9	$y=\dfrac{\left(\operatorname{tg}x+C\right)^2}{x^2}$	$-\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=C-x$
10	$y=\left(Cx^2-\dfrac{x}{2}\right)^2$	$\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}+x-\dfrac{1}{2}y^2=C$

<u>ККР– 3-4.</u>

Тема: Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку.

Десять варіантів контрольної роботи складаються з трьох рівнянь другого або третього порядків різних типів, що допускають зниження порядку. Робота розрахована на 20-25 хвилин.

Перше рівняння типу $y^{(n)}=f\left(x\right)$. Приблизний час виконання завдання 5 хвилин. Друге рівняння типу $F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)}\right)=0$. Приблизний час виконання завдання 5-8 хвилин. Третє рівняння типу $F\left(y,y',...,y^{(n)}\right)=0$. Приблизний час виконання завдання 10-12 хвилин.

Приклад 3-4-1. Розв'яжіть рівняння $y'''=x^3+4\sin 3x$.

Розв'язання. Дане рівняння є диференціальним рівнянням третього порядку, що допускає зниження порядку типу $y^{(n)}=f\left(x\right)$. Для знаходження його розв'язку інтегруємо рівняння тричі:

$$y''=\int y'''(x)dx=\int\left(x^3+4\sin 3x\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}\cos 3x+C_1,$$

$$y'=\int y''(x)dx=\int\left(\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}\cos 3x+C_1\right)dx=\frac{x^5}{20}-\frac{4}{9}\sin 3x+C_1x+C_2,$$

$$y=\int y'(x)dx=\int\left(\frac{x^5}{20}-\frac{4}{9}\sin 3x+C_1x+C_2\right)dx=\frac{x^6}{120}+\frac{4}{27}\cos 3x+C_1x^2+C_2x+C_3.$$

Приклад 3-4-2. Розв'яжіть рівняння $y''+y'=x+2$.

Розв'язання. Дане рівняння є диференціальним рівнянням 2-го порядку, що допускає зниження порядку типу $F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)}\right)=0$. Заміною

$y'(x) = p(x)$, $y''(x) = p'(x)$ рівняння зводять до лінійного рівняння 1-го порядку:

$$p' + p = x + 2$$

$$p = uv,\ p' = u'v + uv' \Rightarrow u'v + u(v' + v) = x + 2 \Rightarrow v' + v = 0, \int \frac{dv}{v} = -\int dx,\ v = e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'e^{-x} = x + 2,\ u' = e^{x}(x+2), u = \int e^{x}(x+2)dx = e^{x}(x+2) - e^{x} + C_1 \Rightarrow$$

$$p(x) = e^{-x}\left(e^{x}(x+1) + C_1\right),\ p(x) = x + 1 + C_1 e^{-x} \Rightarrow y = \int p(x)dx,$$

$$y = \frac{x^2}{2} + x - C_1 x + C_2 .$$

Приклад 3-4-3. Розв’яжіть рівняння $y'' = y' + (y')^2$.

Розв’язання. Дане рівняння є диференціальним рівнянням 2-го порядку, що допускає зниження порядку типу $F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$. Заміною $y' = p(y)$, $y'' = p'p$ його зводять до диференціального рівняння 1-го порядку:

$$p'p = p + p^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = 0 \\ p' = 1 + p \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y' = 0 \\ \dfrac{dp}{dy} = 1 + p \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = const \\ \dfrac{dp}{p+1} = dy \end{array}\right.$$

Проінтегруємо друге рівняння:

$$\ln|p + 1| = y + C_1 .$$

Повертаючись до заміни, одержимо диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними:

$$1 + y' = e^{y + C_1} \Rightarrow y' = e^{C_1}e^{y} - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{C_1}e^{y} - 1 \Rightarrow \int \frac{dy}{e^{C_1}e^{y} - 1} = \int dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|e^{y + C_1}\right| = y + x + C_2 .$$

Тоді загальний розв’язок рівняння має вигляд:

$$\left[\begin{array}{l} y = C, C = const, \\ \ln\left|e^{y + C_1} - 1\right| = y + x + C_2 . \end{array}\right.$$

В – 1 ККР 3–4	В – 2 ККР 3–4
Розв’яжіть рівняння	Розв’яжіть рівняння
1. $y'' = x\sin x$.	**1.** $y''' = x - \cos 2x$.
2. $xy'' - y' = x^2 e^{x}$.	**2.** $y''x\ln x = 3y'$.
3. $y'\left(1 + (y')^2\right) = 3y^2$.	**3.** $yy'' - y'(1 + y') = 0$.

В – 3 КKР 3–4 Розв'яжіть рівняння **1.** $y'' = xe^{x}$. **2.** $y'' = y'x^{-1} + x$. **3.** $(y')^2 + 2yy'' = 0$.	В – 4 КKР 3–4 Розв'яжіть рівняння **1.** $y''' = x^2 + 3\sin x$. **2.** $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$. **3.** $y'' + \dfrac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.
В – 5 КKР 3–4 Розв'яжіть рівняння **1.** $y'' = -xe^{2x}$. **2.** $x^2 y''' = (y'')^2$. **3.** $4\sqrt{y}\,y'' = 1$.	В – 6 КKР 3-4 Розв'яжіть рівняння **1.** $y''' = x^{-2} + \sin 3x$. **2.** $y'' = y'x^{-1}\left(1 + \ln y'x^{-1}\right)$. **3.** $yy'' + (y')^2 = 1$.
В – 7 КKР 3–4 Розв'яжіть рівняння **1.** $y'' = -x\cos 2x$. **2.** $x^3 y'' + x^2 y' = 1$. **3.** $y^3 y'' = -1$.	В – 8 КKР 3–4 Розв'яжіть рівняння **1.** $y'' = 2xe^{-x}$. **2.** $y'' x\ln x = y'$. **3.** $1 + (y')^2 = 2yy''$.
В – 9 КKР 3–4 Розв'яжіть рівняння **1.** $y''' = x^3 + \sin 3x$. **2.** $y'' - 2y'\operatorname{ctg} x = \cos x$. **3.** $4y'' = (y')^2$.	В – 10 КKР 3–4 Розв'яжіть рівняння **1.** $y''' = \dfrac{2}{x^3} - \cos x$. **2.** $xy'' = xy' + y'$. **3.** $yy'' = (y')^2$.

Відповіді **:**

№ вар	1 задача	2 задача	3 задача
1	$y = -x\sin x -$ $-2\cos x +$ $+C_1 x + C_2$	$y = e^x(x-1) + C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2$	$\left[\begin{array}{l} y = C \\ x = C_1 \ln C_2 (y - C_1) \end{array}\right.$
2	$y = \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{\sin 2x}{8} +$ $+C_1 x^2 + C_2 x + C_3$	$y = C_1 x(\ln^3 x - 3\ln^2 x +$ $+6\ln x - 6) + C_2$	$\left[\begin{array}{l} y = C \\ \ln\lvert C_1 y - 1\rvert = C_1 x + C_2 \end{array}\right.$

3	$y = xe^x - 2e^x + $ $+ C_1x + C_2$	$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_3$	$\left[\begin{array}{l} y = C \\ 2\frac{\sqrt[3]{y^2}}{3} C_1x + C_2 \end{array}\right.$
4	$y = 1/60\,x^5 + 3\cos x + $ $+ C_1x^2 + C_2x + C_3$	$y = C_2 - x + \sin 2x\left(C_1 - 1/2\right)$	$\left[\begin{array}{c} y = C \\ 1 = (C_1x + C_2)(1 - y) \end{array}\right.$
5	$y = -\frac{x}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + $ $+ C_1x + C_2$	$y = -\frac{x^2}{2C_2} - \frac{x\ln\left|x - C_1^{-1}\right|}{C_1^2} + $ $+ \frac{x}{C_1^2} + \frac{\ln\left|x - C_1 - 1\right|}{C_1^3} - $ $- \frac{C_2}{C_1}x + C_3$	$\frac{4}{3}\sqrt{\left(\sqrt{y} + C_1\right)^3} - $ $-4C_1\sqrt{\left(\sqrt{y} + C_1\right)} = C_2$
6	$y = -x\ln x + x + $ $+ C_1x^2 + \cos 3x/27 + $ $+ C_2x + C_3$	$y = xe^{Cx_1}/C_1 - e^{C_1x}/C_1^2 + C_2$	$\sqrt{\left(C_1y\right)^2 - 1} = C_2 \pm x$
7	$y = x\cos 2x/4 - $ $-\sin 2x/4 + C_1x + C_2$	$y = 1/x - C_1\ln\left\|x\right\| + C_2$	$\sqrt{1 + 2C_1y^2} = $ $= 2C_1 \cdot \left(C_2 \pm x\right)$
8	$y = 2xe^{-x} + 3e^{-x} + $ $+ C_1x + C_2$	$y = C_1x\ln x - C_1x + C_2$	$2\sqrt{C_1y - 1} = $ $= C_1\left(C_2 \pm x\right)$
9	$y = 1/120\,x^6 + $ $+ 1/27\cos 3x + $ $+ C_1x^2 + C_2x + C_3$	$y = 1/4(2C_1x - C_1\sin 2x) + $ $+ \cos x + C_2$	$\left[\begin{array}{l} y = C \\ -4e^{-y/4 + C_1} = x + C_2 \end{array}\right.$
10	$y = \ln\left|x\right| + \sin x + $ $+ C_1x^2 + C_2x + C_3$	$y = C_1xe^x - C_1e^x + C_2$	$y = C_2e^{C_1x}$

<u>ККР-3-5</u>

Тема: Лінійні однорідні рівняння вищих порядків.

Контрольна робота складається з трьох лінійних однорідних рівняння другого порядку. Для перших двох рівняннях треба знайти загальний розв'язок, а в третьому прикладі - розв'язати задачу Коші. Робота розрахована на 15 хвилин.

У першому рівнянні корені характеристичного рівняння прості дійсні, або кратні дійсні. Приблизний час виконання завдання 3 хвилини.

У другому рівнянні корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені. Приблизний час виконання завдання 5 хвилин.

Третє рівняння має прості дійсні, або кратні дійсні корені характеристичного рівняння. Для нього необхідно знайти розв'язок задачі Коші. Приблизний час виконання завдання 7 хвилин.

Приклад 3-5-1. Розв'яжіть рівняння: а) $y''' + 5y'' + 3y' - 9y = 0$,
б) $y''' + y'' + y' = 0$.

Розв'язання. а) Дане рівняння є лінійним однорідним рівнянням 3-го порядку. Запишемо характеристичне рівняння, що відповідає даному і розв'яжемо його:

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_{2,3} = -3 \end{array} \right. .$$

Усі корені характеристичного рівняння дійсні, причому корінь $\lambda = -3$ – кратності два. Отже загальний розв'язок даного однорідного рівняння має вигляд: $y_{з.о.} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} + C_3 x e^{-3x}$.

б) Це також лінійне однорідне рівняння 3-го порядку. Але його характеристичне рівняння $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$ має один дійсний корінь $\lambda_1 = 0$ та комплексно-спряжену пару коренів $\lambda_{2,3} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$, тому загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$y_{з.о.} = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x = C_1 +$$
$$+ e^{-\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

Приклад 3-5-2. Знайдіть розв'язок задачі Коші:

$$y''' + 2y'' + y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = -3.$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння: $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow$
$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_{2,3} = -1 \end{array} \right. .$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y_{з.о.} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$.

Для знаходження розв'язку задачі Коші диференціюємо загальний розв'язок двічі:

$$y_{з.о.}(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x},$$
$$y'_{з.о.}(x) = -C_2 e^{-x} + C_3 \left(e^{-x} - x e^{-x} \right),$$

$$y''_{з.о.}(x) = C_2 e^{-x} + C_3\left(-2e^{-x} + xe^{-x}\right).$$

і підставимо в ці рівності початкові умови. Одержимо систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_2 + C_3 = 2 \\ C_2 - 2C_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1. \\ C_3 = 1 \end{cases}$$

Отже, розв’язок задачі Коші має вигляд: $y_{Коші} = 1 - e^{-x} + xe^{-x}$.

В – 1 ККР 3–5 Розв’яжіть рівняння **1.** $y'' - 10y' + 16y = 0$. **2.** $y'' + 2y' + 5y = 0$. **3.** Знайдіть розв’язок задачі Коші $y'' - 10y' + 25y = 0$ $y(0) = 1, y'(0) = 7.$	В – 2 ККР 3–5 Розв’яжіть рівняння **1.** $y'' - 8y' + 16y = 0$. **2.** $y'' + y' + y = 0$. **3.** Знайдіть розв’язок задачі Коші $y'' - 6y' + 8y = 0$ $y(0) = 2, y'(0) = 6.$
В – 3 ККР 3–5 Розв’яжіть рівняння **1.** $y'' - 2y' - 15y = 0$. **2.** $y'' - 2y' + 5y = 0$. **3.** Знайдіть розв’язок задачі Коші $y'' - 12y' + 36y = 0$ $y(0) = 1, y'(0) = 7.$	В – 4 ККР 3–5 Розв’яжіть рівняння **1.** $y'' - 10y' + 25y = 0$. **2.** $y'' + 4y' + 5y = 0$. **3.** Знайдіть розв’язок задачі Коші $y'' + 2y' - 3y = 0$ $y(0) = 5, y'(0) = 1.$
В – 5 ККР 3–5 Розв’яжіть рівняння **1.** $y'' - 7y' + 12y = 0$. **2.** $y'' + 6y' + 10y = 0$. **3.** Знайдіть розв’язок задачі Коші $y'' - 6y' + 9y = 0$ $y(0) = 1, y'(0) = 4.$	В – 6 ККР 3–5 Розв’яжіть рівняння **1.** $y'' - 6y' + 9y = 0$. **2.** $y'' - 4y' + 5y = 0$. **3.** Знайдіть розв’язок задачі Коші $y'' - 2y' - 15y = 0$ $y(0) = y'(0) = 2.$
В – 7 ККР 3–5 Розв’яжіть рівняння **1.** $y'' - 3y' + 2y = 0$. **2.** $y'' - 6y' + 10y = 0$. **3.** Знайдіть розв’язок задачі Коші $y'' + 8y' + 16y = 0$ $y(0) = 1, y'(0) = 5.$	В – 8 ККР 3–5 Розв’яжіть рівняння **1.** $y'' - 12y' + 36y = 0$. **2.** $y'' + 2y' + 2y = 0$. **3.** Знайдіть розв’язок задачі Коші $y'' - 3y' - 4y = 0$ $y(0) = 2, y'(0) = 3.$

В – 9 ККР 3–5	В – 10 ККР 3–5
Розв'яжіть рівняння **1.** $y''-5y'+6y=0$. **2.** $y''+6y'+12y=0$. **3.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $y''+4y'+4y=0$ $y(0)=y'(0)=1$.	Розв'яжіть рівняння **1.** $y''-4y'+4y=0$. **2.** $y''-2y'+2y=0$. **3.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $y''+6y'+9y=0$ $y(0)=y'(0)=1$.

Відповіді **:**

№ варіан-та	1 задача	2 задача	3 задача
1	$y=C_1e^{8x}+C_2e^{2x}$	$y=e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$	$y_{Коші}=e^{5x}\left(2x+1\right)$
2	$y=e^{4x}\left(C_1+C_2x\right)$	$y=e^{\frac{-x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$	$y_{Коші}=e^{2x}+e^{4x}$
3	$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$	$y=e^{x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$	$y_{Коші}=e^{6x}\left(x+1\right)$
4	$y=e^{5x}\left(C_1+C_2x\right)$	$y=e^{-2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$	$y_{Коші}=e^{-3x}+4e^{x}$
5	$y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$	$y=e^{-3x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$	$y_{Коші}=e^{3x}\left(x+1\right)$
6	$y=e^{3x}\left(C_1+C_2x\right)$	$y=e^{2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$	$y_{Коші}=e^{-3x}+e^{5x}$
7	$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$	$y=e^{3x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$	$y_{Коші}=e^{-4x}\left(x+1\right)$
8	$y=e^{6x}\left(C_1+C_2x\right)$	$y=e^{-x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$	$y_{Коші}=e^{-x}+e^{4x}$
9	$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$	$y=e^{-3x}\left(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x\right)$	$y_{Коші}=e^{-2x}\left(3x+1\right)$
10	$y=e^{2x}\left(C_1+C_2x\right)$	$y=e^{x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$	$y_{Коші}=e^{-3x}(1+4x)$

<u>ККР-3-6.</u>

Тема : Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків.

Робота складається з трьох задач і розрахована на 30-40 хвилин.

У першій задачі пропонується записати частинний розв'язок для лінійного неоднорідного рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною. Необхідно записати цей розв'язок з невідомими коефіцієнтами. В усіх варіантах розглядається випадок з резонансом. Приблизний час виконання 5 хвилин.

У другій задачі необхідно знайти розв'язок задачі Коші для лінійного неоднорідного рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною (випадок без резонансу). Приблизний час виконання 10-15 хвилин.

У третій задачі необхідно знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння другого порядку з правою частиною не спеціального вигляду, застосовуючи метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Приблизний час виконання 15-20 хвилин.

У першому завданні можна запропонувати знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння. У цьому випадку приблизний час виконання 15-20 хвилин.

Приклад 3-6-1. Знайдіть розв'язок задачі Коші:

а) $y'' - 7y' + 12y = e^{3x}(x+1), y(0) = 2, y'(0) = 5$,

б) $y'' - 25y = 26\cos x, y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Розв'язання. а) Дане рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням 2-го порядку зі спеціальною правою частиною. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння: $y'' - 7y' + 12y = 0$.

Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \left[\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}\right. \Rightarrow y_{з.о.} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння, з огляду на праву частину рівняння, має вигляд: $y_{ч.н.} = xe^{3x}(ax+b)$, де a, b – невідомі коефіцієнти. Для їх знаходження підставимо $y_{ч.н.}$ в рівняння:

$$y'_{ч.н.} = e^{3x}\left(3ax^2 + (3b+2a)x + b\right),\ y''_{ч.н.} = e^{3x}\left(9ax^2 + (9b+12a)x + 6b + 2a\right) \Rightarrow$$

$$e^{3x}\left(9ax^2 + (9b+12a)x + 2a + 6b\right) - 7e^{3x}\left(3ax^2 + (3b+2a)x + b\right) +$$

$$+12e^{3x}\left(ax^2 + bx\right) = e^{3x}(x+1) \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \quad y_{ч.н.} = xe^{3x}\left(-\frac{1}{2}x - 2\right).$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння є сумою загального розв'язку однорідного рівняння та часткового розв'язку неоднорідного рівняння, тобто $y_{з.н.} = C_1 e^{4x} + e^{3x}\left(C_2 - \dfrac{x^2}{2} - 2x\right)$.

Для знаходження розв'язку задачі Коші диференціюємо загальний розв'язок: $y'_{з.н.} = 4C_1e^{4x} + e^{3x}\left(3C_2 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - x - 2\right)$і підставимо в дві останні рівності початкові умови. Одержимо систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 4C_1 + 3C_2 - 2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y_{Коші} = 4e^{4x} + e^{3x}\left(-\frac{3}{2}x^2 - 7x + 1\right).$$

б) Дане рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням 2-го порядку зі спеціальною правою частиною. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння: $y'' - 25y = 0$. Розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 25 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 5.$$

Тоді $y_{з.о.} = C_1e^{5x} + C_2e^{-5x}$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді: $y_{ч.н.} = a\cos x + b\sin x$, тоді $y'_{ч.н.} = -a\sin x + b\cos x, y''_{ч.н.} = -a\cos x - b\sin x$. Підставляючи ці співвідношеня в рівняння, отримаємо систему, з якої знайдемо коефіцієнти a, b.

$$-a\cos x - b\sin x - 25(a\cos x + b\sin x) = 26\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -26a\cos x - 26b\sin x = 26\cos x \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Тоді загальний розв'язок має вигляд: $y_{з.н.} = C_1e^{5x} + C_2e^{-5x} - \cos x$.

Розв'яжемо задачу Коші:

$$y'_{з.н.} = 5C_1e^{5x} - 5C_2e^{-5x} + \sin x \Rightarrow \begin{cases} y_{з.н.}(0) = C_1 + C_2 - 1 = 1 \\ y'_{з.н.}(0) = 5C_1 - 5C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y_{Коші} = e^{5x} + e^{-5x} - \cos x.$$

Приклад 3-6-2. Знайдіть загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням 2-го порядку. Права частина рівняння не є функцією спеціального вигляду, тому для знаходження розв'язку застосуємо метод Лагранжа. Розв'яжемо спочатку відповідне однорідне рівняння:

$$y'' + 4y = 0, \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i \Rightarrow y_{з.о.} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

За методом Лагранжа, загальний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді: $y_{з.н.} = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$, де невідомі функції $C_1(x), C_2(x)$ знайдемо з системи:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ C_1'(x)(-2\sin 2x) + C_2'(x)(2\cos 2x) = \dfrac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Систему розв'яжемо методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\cos 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} 2x,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\operatorname{tg} 2x}{2} \Rightarrow C_1(x) = -\int \frac{\operatorname{tg} 2x}{2} dx = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + A,$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2(x) = \int \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2} + B.$$

Отже, $$y_{з.н.} = \left(\frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + A\right)\cos 2x + \left(\frac{x}{2} + B\right)\sin 2x.$$

В – 1 КKР 3–6 **1.** Знайдіть загальний вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y'' + 9y = 12\sin 3x$. **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' - 4y = 2\cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$. **3.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $y'' - y' = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.	В – 2 КKР 3–6 **1.** Знайдіть загальний вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y'' - y = 3e^x$. **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' + 4y = \sin x,\ y(0) = 1, y'(0) = 1$. **3.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.
В – 3 КKР 3–6 **1.** Знайдіть загальний вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y'' - 2y' + y = (3x^2 + 7)e^x$. **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші	В – 4 КKР 3– 6 **1.** Знайдіть загальний вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}x$. **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' - y = 3e^{2x},\ y(0) = 2, y'(0) = 4$. **3.** Знайдіть загальний розв'язок

$$y''-6y'+9y=9x^2-12x+2$$ $$y(0)=1, y'(0)=3.$$ **3.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $$y''+y=\operatorname{ctg} x.$$	рівняння $$y''+y=\frac{2}{\sin^2 x}.$$
В – 5 ККР 3–6 **1.** Знайдіть загальний вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння $$y''-5y'+6y=e^{2x}(3x+4).$$ **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $$y''-4y'+4y=2e^x,\ y(0)=3, y'(0)=5.$$ **3.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $$y''-4y'+5y=\frac{e^{2x}}{\cos x}.$$	В –6 ККР 3–6 **1.** Знайдіть загальний вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння $$y''-3y'+2y=e^x\left(x^2+2x-2\right).$$ **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $$y''+y=4xe^x,\ y(0)=0, y'(0)=1.$$ **3.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $$y''-y'=e^{2x}\cos e^x.$$
В – 7 ККР 3–6 1. Знайдіть загальний вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння $$y''+2y'+2y=3e^{-x}\cos x.$$ **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $$y''+y=2(1-x)e^x,\ y(0)=3, y'(0)=3.$$ **3.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $$y''-y'=\frac{e^x}{1+e^x}.$$	В – 8 ККР 3–6 1. Знайдіть загальний вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння $$y''+9y=3\sin 3x.$$ **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $$y''+2y'=5\cos x,\ y(0)=1, y'(0)=0.$$ **3.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $$y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x.$$
В – 9 ККР 3–6 **1.** Знайдіть загальний вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння $$y''+4y=5\cos 2x.$$ **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $$y''+y=3\cos 2x, y(0)=1, y'(0)=2.$$ **3.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $$y''+y=\frac{1}{\sin x}.$$	В – 10 ККР 3–6 **1.** Знайдіть загальний вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння $$y''-5y'=\left(x^2-1\right)e^{5x}.$$ **2.** Знайдіть розв'язок задачі Коші $$y''+y=5x^2,\ y(0)=0, y'(0)=6.$$ **3.** Знайдіть загальний розв'язок рівняння $$y''-2y'+y=\frac{e^x}{x^2+1}.$$

Відповіді **:**

№ вар.	1 задача	2 задача	3 задача
1	$y_{ч.н.}=x(A\cos 3x+$ $+B\sin 3x)$	$y_{Коші}=\frac{11}{8}e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}-$ $-\frac{1}{4}\cos 2x$	$y_{з.н.}=-\ln\left(1+e^{x}\right)+$ $+A+\ln\left\|e^{x}/(1+e^{x})\right\|$
2	$y_{ч.н.}=Ax^{2}e^{x}$	$y_{Коші}=\cos 2x-$ $-\frac{2}{3}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin x$	$y_{з.н.}=\left(B-x\right)e^{-x}+$ $+xe^{-x}\left(\ln\|x\|+A\right)$
3	$y_{ч.н.}=e^{x}x^{2}(Ax^{2}+Bx+$ $+C)$	$y_{Коші}=e^{3x}+x^{2}$	$y_{з.н.}=\cos x\times$ $\times\left(A-\sin x\right)+$ $+\sin x\times$ $\times\left(B-\cos x-\ln\|x/2\|\right)$
4	$y_{ч.н.}=e^{2x}x^{2}\left(Ax+B\right)$	$y_{Коші}=e^{x}\left(x+1\right)+e^{2x}$	$y_{з.н.}=B\sin x-2+$ $+\cos x\times$ $\times\left(\ln\mathrm{ctg}^{2}(x/2)+A\right)$
5	$y_{ч.н.}=e^{2x}x\left(Ax+B\right)$	$y_{Коші}=e^{2x}\left(x+1\right)+2e^{x}$	$y_{з.н.}=e^{2x}\sin x\times$ $\times\left(x+B\right)+$ $+\left(A-\ln\|\cos x\|\right)\times$ $\times e^{2x}\cos x$
6	$y_{ч.н.}=e^{x}x\left(Ax^{2}+Bx+C\right)$	$y_{Коші}=2\cos x+\sin x+$ $+2e^{x}\left(x-1\right)$	$y_{з.н.}=A+Be^{x}-$ $-\cos e^{x}$
7	$y_{ч.н.}=e^{-x}x(A\cos x+$ $+B\sin x)$	$y_{Коші}=\cos x+2\sin x+$ $+e^{x}\left(2-x\right)$	$y_{з.н.}=A-\ln\left(e^{x}+1\right)+$ $+e^{x}\left(\ln\frac{e^{x}}{e^{x}+1}+B\right)$
8	$y_{ч.н.}=x(A\cos 3x+$ $+B\sin 3x)$	$y_{Коші}=1+e^{-2x}-\cos x+$ $+2\sin x$	$y_{з.н.}=e^{-2x}\left(Ax+B\right)+$ $+e^{-2x}x^{2}\left(1/2\ln\|x\|-3/4\right)$
9	$y_{ч.н.}=x(A\cos 2x+$ $+B\sin 2x)$	$y_{Коші}=2\cos x+2\sin x-$ $-\cos 2x$	$y_{з.н.}=\cos x\left(A-x\right)+$ $+\sin x\left(\ln\|\sin x\|+B\right)$

10	$y_{ч.н.} = e^{5x}\left(Ax^2 + Bx + C\right)x$	$y_{Коші} = 10\cos x - 6\sin x +$ $+5x^2 - 10$	$y_{з.н.} = \left(B - \ln\sqrt{x^2+1}\right)\times$ $\times e^x + \left(A + \operatorname{arctg} x\right)xe^x$

ККР-3-7

Тема: Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

У кожному з десяти варіантів контрольної роботи міститься лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь.

У пункті а) необхідно розв'язати запропоновану систему методом виключень. Застосування методу зводить систему до лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною без резонансу. Корені характеристичного рівняння прості і дійсні. Приблизний час виконання цього завдання 15-20 хвилин.

У пункті б) необхідно розв'язати однорідну систему, що відповідає запропонованій і розв'язати її матричним методом. Власні числа матриці системи дійсні та різні. Приблизний час виконання 5 хвилин.

Загалом робота розрахована на 20-25 хвилин.

Приклад 3-7-1. Розв'яжіть
а) неоднорідну систему методом виключень,
б) відповідну однорідну систему матричним методом:

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 52\sin 2t, \\ y' = x + 4y + 26\sin 2t + 26\cos 2t. \end{cases}$$

Розв'язання. а) З другого рівняння системи виразимо x:

$$x = y' - 4y - 26\sin 2t - 26\cos 2t.$$

Диференціюємо друге рівняння системи: $y'' = x' + 4y' + 52\cos 2t - 52\sin 2t$ та підставимо в нього x' та x:

$$y'' = \left(\left(y' - 4y - 26\sin 2t - 26\cos 2t\right) - 2y + 52\sin 2t\right) + 4y' + 52\cos 2t - 52\sin 2t,$$

$$y'' - 5y' + 6y = 26\cos 2t - 26\sin 2t$$

Отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі спеціальною правою частиною. Розв'яжемо його. Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\right. \Rightarrow y_{з.о.} = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t};$$

$y_{ч.н.} = A\cos 2t + B\sin 2t,\ y'_{ч.н.} = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t,\ y''_{ч.н.} = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t$.

Підставимо ці співвідношення в рівняння і методом невизначених коефіцієнтів знайдемо константи: $A = -\dfrac{13}{8}, B = -\dfrac{39}{8}$.

Тоді,

$$y(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{2t}-\frac{13}{8}\cos 2t-\frac{39}{8}\sin 2t.$$

Для знаходження функції $x(t)$ продиференціюємо знайдену функцію $y(t)$:

$y'(t)=3C_1e^{3t}+2C_2e^{2t}+\frac{13}{4}\sin 2t-\frac{39}{4}\cos 2t.$

Підставимо $y(t)$ та $y'(t)$ у рівняння

$$x=y'-4y-26\sin 2t-26\cos 2t,$$

звідки і отримаємо функцію $x(t)$.

Отже, розв’язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} x(t)=-C_1e^{3t}-2C_2e^{2t}-\frac{117}{4}\cos 2t-\frac{13}{4}\sin 2t \\ y(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{2t}-\frac{13}{8}\cos 2t-\frac{39}{8}\sin 2t \end{cases}.$$

б) Відповідна однорідна система має вигляд: $\begin{cases} x'=x-2y \\ y'=x+4y \end{cases}.$

Запишемо її у матричному вигляді:

$$\vec{X}'=A\vec{X},$$

де $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ – матриця системи, $\vec{X}=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$ – невідомий розв’язок системи.

Знайдемо розв’язки характеристичного рівняння системи:

$\det(A-\lambda E)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda^2-5\lambda+6=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\left[\begin{matrix}3\\ 2\end{matrix}\right.$ – обидва корені прості, дійсні, тому частинні розв’язки системи мають вигляд:

$$\vec{X}_1=\vec{a}e^{3t},\ \vec{X}_2\vec{b}e^{2t},$$

де $\vec{a},\vec{b}$ – власні вектори матриці A. Загальний розв’язок буде лінійною комбінацією її частинних розв’язків. Знайдемо власні вектори матриці A:

1) $\lambda_1=3$:

$(A-3E)\vec{a}=0,\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{a}=0\Rightarrow -a_1=a_2\Rightarrow\vec{a}=s_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix},s_1\in R,$

2) $\lambda_2=2$:

$(A-2E)\vec{b}=0,\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{b}=0\Rightarrow b_1=-2b_2\Rightarrow\vec{b}=s_2\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix},s_2\in R.$

Зважаючи на те, що добуток довільних дійсних констант рівний деякому дійсному числу, запишемо загальний розв’язок однорідної системи:

$$\vec{X} = C_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}e^{3t} + C_2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}e^{2t},\ C_1, C_2 \in R,$$

або в координатній формі:

$$\begin{cases} x(t) = -C_1e^{3t} - 2C_2e^{2t} \\ y(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{2t} \end{cases}.$$

В – 1 КKР 3–7 Розв'яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом $\begin{cases} x' = y + 2e^t \\ y' = x + t^2. \end{cases}$	В – 2 КKР 3–7 Розв'яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -2x + y + 18t. \end{cases}$
В – 3 КKР 3–7 Розв'яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом $\begin{cases} x' = y - 5\cos t \\ y' = 2x + y. \end{cases}$	В – 4 КKР 3–7 Розв'яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом $\begin{cases} x' = 4x - 3y + \sin t \\ y' = -y + 2x - 2\cos t. \end{cases}$
В – 5 КKР 3–7 Розв'яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t} \\ y' = x + 2y. \end{cases}$	В – 6 КKР 3–7 Розв'яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2y - x - 5e^t\sin t. \end{cases}$
В – 7 КKР 3–7 Розв'яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом	В – 8 КKР 3–7 Розв'яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом

$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x - 5\sin t. \end{cases}$	$\begin{cases} x' = 2x + y + e^t \\ y' = 2x + 3y + 2t. \end{cases}$
В – 9 ККР 3–7 Розв'яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом $\begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = 3x + y + 2e^t. \end{cases}$	В – 10 ККР 3–7 Розв'яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом $\begin{cases} x' = x + 3y + 2\sin t \\ y' = x - y. \end{cases}$

Відповіді:

№ варіан-та	Пункт а)	Пункт б)
1	$\begin{cases} x = e^t\left(C_1 + t + 1\right) - C_2e^{-t} - t^2 - 2 \\ y = e^t\left(C_1 + t\right) + C_2e^{-t} - 2t \end{cases}$	$\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\overline{x} = C_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{cases} x = C_1 + C_2e^{3t} + 3t^2 + 2t \\ y = 2C_1 - C_2e^{3t} + 6t^2 - 2t - 2 \end{cases}$	$\lambda = \left[\begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}\right.$, $\overline{x} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{cases} x = 0{,}5C_1e^{2t} - C_2e^{-t} - 2\sin t - \cos t \\ y = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} + 3\cos t + \sin t \end{cases}$	$\lambda = \left[\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}\right.$, $\overline{x} = C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{cases} x = 1{,}5C_1e^{2t} + C_2e^t - 2\sin t + \cos t \\ y = C_1e^{2t} + C_2e^t + 2\cos t = 2\sin t \end{cases}$	$\lambda = \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right.$, $\overline{x} = C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{cases} x = 2C_1e^{4t} - C_2e^t + 3e^{5t} \\ y = C_1e^{4t} + C_2e^t + e^{5t} \end{cases}$	$\lambda = \left[\begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}\right.$, $\overline{x} = C_1e^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
6	$\begin{cases} x = -C_1e^{3t} + e^t\left(C_2 - 3\cos t - \sin t\right) \\ y = C_1e^{3t} + e^t\left(C_2 + 3\cos t + \sin t\right) \end{cases}$	$\lambda = \left[\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}\right.$, $\overline{x} = C_1e^{3t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{cases} x = 2C_1e^{2t} - C_2e^{-t} - \cos t + 3\sin t \\ y = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} + 2\cos t - \sin t \end{cases}$	$\lambda = \left[\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}\right.$,

		$\overline{x}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$
8	$\begin{cases}x=C_1e^{4t}+C_2e^{t}+5/8+2/3\,te^{t}+1/2\,t\\ y=2C_1e^{4t}-C_2e^{t}-3/4-1/3\,e^{t}-2/3\,te^{t}\end{cases}$	$\lambda=\left[\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right.,\ \overline{x}=C_1e^{4t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+C_2e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
9	$\begin{cases}x=C_1e^{4t}+C_2e^{-t}-2/3\,e^{t}\\ y=C_1e^{4t}-3/2\,C_2e^{-t}+1/3\,e^{t}\end{cases}$	$\lambda=\left[\begin{matrix}4\\-1\end{matrix}\right.,$ $\overline{x}=C_1e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-3/2\end{pmatrix}$
10	$\begin{cases}x=3C_1e^{2t}-C_2e^{-2t}-0,4(\cos t+\sin t)\\ y=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}=0.4\sin t\end{cases}$	$\lambda=\pm2,$ $\overline{x}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Список рекомендованої літератури

Підручники і посібники

1. *Дубовик В. П.* Вища математика: навч. посіб./ В. П. Дубовик, І. І. Юрик.—К.: А. С. К., 2006.—647с.—ISBN 966-539-320-0.
2. *Овчинников П. П.* Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2/ П. П. Овчинников.—К.: Техніка, 2000.—792 с.—ISBN 966-575-153-0.
3. *Письменный Д.* Конспект лекций по высшей математике. Полный курс/Д. Письменный.—М.: *Айрис-Пресс*, 2008.—608 с.—ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.
4. *Шипачев В. С.* Курс высшей математики / В. С. Шипачев.—М.: Оникс, 2009.—608 с.—ISBN 978-5-488-02067-2.