

Міністерство освіти і науки, молоді і спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

**Інтегральнечислення функцій багатьох змінних.
Елементи теорії поля.
Диференціальні рівняння.**

Дидактичні матеріали до короткочасних контрольних робіт
з математичного аналізу
для студентів першого курсу технічних факультетів

Київ 2011

Інтегральне числення функцій багатьох змінних. Елементи теорії поля. Диференціальні рівняння:
Дидактичні матеріали до короткочасних контрольних робіт з математичного аналізу для студентів
першого курсу технічних факультетів / Уклад.: О.О.Дем'яненко, Л.А.Репета. – К.: НТУУ «КПІ»,
2011.- 36 с.

*Гриф надано Методичною радою ФМФ НТУУ «КПІ»
(Протокол № 8 від 27.10.2011)*

Навчальне видання

**Інтегральне числення функцій багатьох змінних.
Елементи теорії поля.
Диференціальні рівняння.**

**Дидактичні матеріали до короткочасних контрольних робіт
з математичного аналізу
для студентів першого курсу технічних факультетів**

Укладачі: *Дем'яненко Ольга Олегівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.*
Репета Леся Анатоліївна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний
редактор *Ю. П. Буценко, канд. фіз.-мат. наук, доц.*

Рецензент *O. I. Макаренко, канд. фіз.-мат. наук, професор.*

*За редакцією укладачів
Електронна версія*

Київ 2011

Зміст

Загальні положення	3
KKP 1-1. Обчислення подвійних інтегралів.....	4
KKP 1-2. Застосування подвійних інтегралів	6
KKP 1-3. Застосування потрійних інтегралів до обчислення об'ємів тіл	8
KKP 1-4. Застосування криволінійних інтегралів 1-го та 2-го роду	10
KKP 1-5. Застосування поверхневого інтеграла 1-го роду	13
KKP 1-6. Скалярні та векторні поля	15
KKP 1-7. Формула Стокса	17
KKP 2-1. Диференціальні рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними	19
KKP 2-2. Однорідні та лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку	21
KKP 2-3. Диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння Бернуллі. Рівняння в повних диференціалах	23
KKP 2-4. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку	25
KKP 2-5. Лінійні однорідні рівняння вищих порядків.....	28
KKP 2-6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків	30
KKP 2-7. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коєфіцієнтами	33
Список рекомендованої літератури.....	36

Загальні положення.

Дидактичні матеріали складаються з 14 комплектів варіантів короткочасних контрольних робіт за двома розділами: „Інтегральне числення функцій багатьох змінних. Елементи теорії поля. Диференціальні рівняння”. До кожного комплекту варіантів додається відповіді та короткий коментар, що містить рекомендації щодо розв’язання задач контрольної роботи та часу її виконання. Короткочасні контрольні роботи виконують студентами першого курсу технічних спеціальностей в другому семестрі.

ККР 1-1.

Тема : Обчислення подвійних інтегралів.

Контрольна робота містить дві задачі і розрахована на 15 хвилин.

У першій задачі необхідно розставити межі інтегрування в повторному інтегралі для області, яку задано у декартовій системі координат. Приблизний час виконання 5 хвилин.

У другій задачі після переходу у полярну систему координат необхідно обчислити подвійний інтеграл. Приблизний час виконання 10 хвилин.

Відповіді:

№ варі-анта	Завдання 1	Завдання 2
1	$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} f(x, y) dy$	$\frac{\pi}{4}(\operatorname{ctg} r - \operatorname{ctg} R)$
2	$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$	$\frac{4}{3}$
3	$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$	$-\frac{\pi}{2} \ln \cos R $
4	$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{-\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy$	$\frac{\pi}{4} \sin R^2$
5	$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x, y) dy$	$\frac{\pi}{3}(e^8 - 1)$
6	$\int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^x f(x, y) dy$	$\frac{\pi}{4}(1 - \cos R^2)$
7	$\int_0^{\pi/4} dx \int_{\arcsin x}^{\arccos x} f(x, y) dy$	$\frac{\pi}{3}(2^{3/2} - 1)$
8	$\int_0^1 dx \int_x^{e^x} f(x, y) dy$	$\frac{\pi}{4}(\cos 1 - \cos 10)$
9	$\int_{-1}^0 dx \int_{-2-x}^{x^3} f(x, y) dy$	$\pi(1 - e^{-2})$
10	$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-x} f(x, y) dy$	$-\frac{\pi}{2} \ln \cos R $

<p>B – 1</p> <p>1. Розставте межі інтегрування</p> $\iint_D f(x, y) dx dy, \text{ якщо}$ <p>$D: y = x^2, y = 2 - x^2, x \geq 0.$</p> <p>2. Обчисліть подвійний інтеграл</p> $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2} \sin^2 \sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ якщо}$ <p>$D: y = -\sqrt{R^2 - x^2}, y = -\sqrt{r^2 - x^2},$ $y \leq 0, y \geq x, r < R.$</p>	<p>KKP I–1</p> <p>1. Розставте межі інтегрування</p> $\iint_D f(x, y) dx dy, \text{ якщо}$ <p>$D: y \geq x^2, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2.$</p> <p>2. Обчисліть подвійний інтеграл</p> $\iint_D \frac{xy dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ якщо}$ <p>$D: y \geq 0, x \geq 0, y = \sqrt{4 - x^2}.$</p>	<p>B – 2</p> <p>KKP I–1</p>
<p>B – 3</p> <p>1. Розставте межі інтегрування</p> $\iint_D f(x, y) dx dy, \text{ якщо}$ <p>$D: y \leq x, x^2 + y^2 = 2, y \geq 0.$</p> <p>2. Обчисліть подвійний інтеграл</p> $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ctg} \sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ якщо}$ <p>$D: y = \sqrt{R^2 - x^2}, y \geq 0, x \leq 0.$</p>	<p>KKP I–1</p> <p>1. Розставте межі інтегрування</p> $\iint_D f(x, y) dx dy, \text{ якщо}$ <p>$D: x = 2 - \sqrt{4 - y^2}, x = \sqrt{4 - y^2}, x = 0,$ $y \leq 0.$</p> <p>2. Обчисліть подвійний інтеграл</p> $\iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy, \text{ якщо}$ <p>$D: y = -\sqrt{R^2 - x^2}, y \leq 0, x \leq 0.$</p>	<p>B – 4</p> <p>KKP I–1</p>
<p>B – 5</p> <p>1. Розставте межі інтегрування</p> $\iint_D f(x, y) dx dy, \text{ якщо}$ <p>$D: x = y^2, x + y = 2, x = 0.$</p> <p>2. Обчисліть подвійний інтеграл</p> $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} e^{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} dx dy, \text{ якщо}$ <p>$D: y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0.$</p>	<p>KKP I–1</p> <p>1. Розставте межі інтегрування</p> $\iint_D f(x, y) dx dy, \text{ якщо}$ <p>$D: x = -\sqrt{2 - y^2}, y \leq x.$</p> <p>2. Обчисліть подвійний інтеграл</p> $\iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy, \text{ якщо}$ <p>$D: y = \sqrt{R^2 - x^2}, y \geq 0, x \leq 0.$</p>	<p>B – 6</p> <p>KKP I–1</p>
<p>B – 7</p> <p>1. Розставте межі інтегрування</p> $\iint_D f(x, y) dx dy, \text{ якщо}$ <p>$D: x = \sin y, x = \cos y, x = 0.$</p> <p>2. Обчисліть подвійний інтеграл</p> $\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy, \text{ якщо}$ <p>$D: y = \sqrt{1-x^2}, y = 0.$</p>	<p>KKP I–1</p> <p>1. Розставте межі інтегрування</p> $\iint_D f(x, y) dx dy, \text{ якщо}$ <p>$D: y = x, x = \ln y, x = 0, x = 1.$</p> <p>2. Обчисліть подвійний інтеграл</p> $\iint_D \sin(1+x^2+y^2) dx dy, \text{ якщо}$ <p>$D: y = \sqrt{9-x^2}, y \geq 0, x \geq 0.$</p>	<p>B – 8</p> <p>KKP I–1</p>

<p>B – 9</p> <p>1. Розставте межі інтегрування</p> $\iint_D f(x, y) dx dy, \text{ якщо}$ <p>$D: x + y = -2, y = x^3, x = 0.$</p> <p>2. Обчисліть подвійний інтеграл</p> $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \text{ якщо } D: x^2 + y^2 = 2.$	<p>KKP I–1</p> <p>1. Розставте межі інтегрування</p> $\iint_D f(x, y) dx dy, \text{ якщо}$ <p>$D: y = -\sqrt{2 - x^2}, y \leq -x, x \geq 0.$</p> <p>2. Обчисліть подвійний інтеграл</p> $\iint_D \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \text{ якщо}$ <p>$D: y = -\sqrt{R^2 - x^2}, \quad y \leq 0, x \geq 0.$</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

KKP 1-2.

Тема : Застосування подвійних інтегралів.

Робота складається з двох завдань і розрахована на 15 хвилин.

У першому завданні необхідно знайти площину плоскої пластини і обчислити відповідний подвійний інтеграл у декартовій системі координат. Приближний час виконання 5 хвилин.

У другому завданні необхідно знайти масу пластини з відомою густиноро. При обчисленні відповідного подвійного інтеграла необхідно перейти до узагальненої полярної системи координат. Приблизний час виконання 10 хвилин.

Відповіді :

Номер варіанта	1	2	3	4	5
Завдання 1	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5
Завдання 2	216	$\frac{128}{105}$	$5 \cdot 2^9$	$\frac{3^5}{2^5} \ln 6$	$\frac{1}{2}$
Номер варіанта	6	7	8	9	10
Завдання 1	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5
Завдання 2	20π	$\frac{64}{3}$	$\frac{4}{3} \ln 5$	$\frac{162}{105} = \frac{54}{35}$	$8 \ln 3$

<p>B – 1 ККР I–2 1. Знайдіть плошу фігури, обмеженої лініями $y = 1 - x^2$, $x + y = -1$. 2. Знайдіть масу пластинки D з густиною</p> $\mu = \frac{27y}{x^2}, D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 2,$ $y = 0, y = \frac{4}{3}x.$	<p>B – 2 ККР I–2 1. Знайдіть плошу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 1$, $y = x + 1$. 2. Знайдіть масу пластинки D з густиною</p> $\mu = x^2 y^3, D: \frac{x^2}{16} + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0.$
<p>B – 3 ККР I–2 1. Знайдіть плошу фігури, обмеженої лініями $y = 2 - x^2$, $y = -x$. 2. Знайдіть масу пластинки D з густиною</p> $\mu = 2xy^7, D: \frac{x^2}{100} + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0.$	<p>B – 4 ККР I–2 1. Знайдіть плошу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2$, $y = x$. 2. Знайдіть масу пластинки D з густиною</p> $\mu = \frac{3y}{x^3}, D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 36,$ $y \geq 0, y \leq \frac{3x}{2}.$
<p>B – 5 ККР I–2 1. Знайдіть плошу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2x - 1$, $y = 1 - x$. Знайдіть масу пластинки D з густиною</p> $\mu = xy, D: x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, x \geq 0, y \geq 0.$	<p>B – 6 ККР I–2 1. Знайдіть плошу фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$, $y = -x$. 2. Знайдіть масу пластинки D з густиною $\mu = x^4, D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} \leq 1$.</p>
<p>B – 7 ККР I–2 1. Знайдіть плошу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$. 2. Знайдіть масу пластинки D з густиною</p> $\mu = x^5 y, D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0.$	<p>B – 8 ККР I–2 1. Знайдіть плошу фігури, обмеженої лініями $y = 1 - x^2 + 2x$, $y = 1 - x$. 2. Знайдіть масу пластинки D з густиною $\mu = \frac{3}{x^2}, D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 25, y \geq 0, y \leq \frac{2x}{3}.$ </p>

<p>В – 9</p> <p>1. Знайдіть площину фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2x - 1$, $y = x + 1$.</p> <p>2. Знайдіть масу пластинки D з густинною</p> $\mu = 3x^2y^3, D: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0.$	<p>ККР I–2</p> <p>1. Знайдіть площину фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 4x + 3$, $y = x + 3$.</p> <p>2. Знайдіть масу пластинки D з густинною $\mu = \frac{y}{x^3}$, $D: x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$,</p> $x^2 + \frac{y^2}{16} = 9, y \geq 0, y \leq x.$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

KKP 1-3.

Тема : Застосування потрійних інтегралів до обчислення об'ємів тіл.

Робота складається з трьох задач і розрахована на 15-20 хвилин. В усіх задачах необхідно обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями, використовуючи потрійний інтеграл. Обчислювати інтеграл, що виникає в першій задачі зручно в декартовій системі координат, а в другій та третьій задачах – перейти до циліндричної та сферичної відповідно.

Відповіді:

Номер варіанта	Завдання 1	Завдання 2	Завдання 3
1	$\frac{121}{60}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{3})$
2	$\frac{27}{20}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
3	2	5π	$\frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{3})$
4	$\frac{49}{36}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
5	$\frac{11}{30}$	π	$\pi\sqrt{2}/3$
6		$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$
7	$\frac{13}{20}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$

8	$\frac{19}{12}$	$\frac{7\pi}{16}$	$\frac{\pi}{3}(2 + \sqrt{3})$
9	$\frac{32}{9}$	$\frac{27\pi}{16}$	$\frac{\pi}{3}$
10	$\frac{33}{20}$	π	$\pi\sqrt{2}/3$

B – 1	KKP I–3	B – 2	KKP I–3
Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями:			Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями:
1. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1, z = 0,$ $x + y + z = 4.$			1. $x = \sqrt{y}, x = 0, y = 1, z = 0, x + y + z = 3.$
2. $z = 1, z = x^2 + y^2 + 3, x^2 + y^2 = 1,$ $y \geq 0.$			2. $z = 5 - x^2 - y^2, z = 1, y \geq x, y \leq x\sqrt{3}.$
3. $z^2 = 3(x^2 + y^2), z \geq 0,$ $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$			3. $z^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2), z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1.$
B – 3	KKP I–3	B – 4	KKP I–3
Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями:			Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями:
1. $y = 0, z = 0, x = 1, x = 2, x + 2y + z = 4.$			1. $x = 0, z = 0, y = 1, y = 3, 2x + y + 3z = 6.$
2. $z = 5 - x^2 - y^2, z = x^2 + y^2 - 1,$ $x^2 + y^2 = 1$			2. $z = x^2 + y^2 - 1, z = 5, y \geq x/\sqrt{3}, y \leq x.$
3. $z^2 = 3(x^2 + y^2), z \leq 0,$ $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$			3. $z^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2), z \leq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1.$
B – 5	KKP I–3	B – 6	KKP I–3
Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями:			Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями:
1. $y = x^2, y = \sqrt{x}, z = 0, x + y + z = 2.$			1. $y = \sqrt{x}, y = 1, x = 0, z = 0, x + y + z = 4.$
2. $z = x^2 + y^2 - 5, z = -1, y \geq 0, y \leq x.$			2. $z = 1, z = x^2 + y^2 - 3, x^2 + y^2 = 1, y \geq 0.$
3. $z \geq 0, z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$			3. $z \geq -\sqrt{3(x^2 + y^2)}, z \leq 0,$ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$

<p>В – 7</p> <p>Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $z = 0, y = 0, x = \sqrt{y}, x + y + z = 3.$ 2. $z = 5 - x^2 - y^2, z = 1, y \geq x,$ $y \leq x/\sqrt{3}.$ 3. $z^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2), z \geq 0,$ $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$ 	<p>KKP I–3</p> <p>Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $y = 0, z = 0, x = 1, x = 2, x + 2y + z = 4.$ 2. $z = 9 - x^2 - y^2, z = x^2 + y^2 + 1,$ $x^2 + y^2 = 1.$ 3. $z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2)}, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$
<p>В – 9</p> <p>Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $x = 0, z = 0, y = 2, y = 4,$ $2x + y + 3z = 6.$ 2. $z = x^2 + y^2 + 1, z = 10, y \geq x/\sqrt{3},$ $y \leq x.$ 3. $z \leq \sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2)} z \geq 0,$ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$ 	<p>KKP I–3</p> <p>Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $y = \sqrt{x-1}, y = 1, y = 0, x = 0,$ $x + 2y + 2z = 4.$ 2. $z = -1 - x^2 - y^2, z = -5, y \geq x, x \geq 0.$ 3. $z \leq 0, z \geq -\sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$

KKP-1-4.

Тема : Застосування криволінійних інтегралів 1-го та 2-го роду.

Контрольна робота складається з двох задач і розрахована на 15-20 хвилин.

У першій задачі необхідно знайти масу кривої з відомою густинорою, використовуючи криволінійний інтеграл 1-го роду. При цьому крива може бути задана як явно так і параметрично у декартовій системі або в полярній системі координат. Приблизний час виконання 7-10 хвилин.

У другій задачі необхідно знайти роботу сили по переміщенню матеріальної точки вздовж заданої кривої, використовуючи криволінійний інтеграл 2-го роду. В усіх варіантах крива – частина просторового параметрично заданого кола. Приблизний час виконання 8-10 хвилин.

Відповіді:

№ варі-анта	Завдання 1	Завдання 2
1	$\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$	$\frac{27\pi}{4} - 12$
2	$\ln \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{184}{15}$
3	$\frac{2}{3}((2 + 4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2})$	$-\frac{\pi + 1}{2}$
4	4	$-\frac{105}{2}$
5	$\frac{43}{3} + \ln \frac{6}{5}$	-6π
6	$8\sqrt{2}\pi^3$	$\frac{32}{3} - \frac{\pi}{18}$
7	$\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{10}{3}$
8	$\frac{56}{3}$	12,5
9	$\frac{11}{4}$	25
10	$\frac{20\sqrt{2}}{81}$	2π

B – 1	KKP I–4	B – 2	KKP I–4
<p>1. Знайдіть масу кривої $L : \rho = 8 \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/3$ з густиною $\mu = \sin^2 \varphi$.</p> <p>2. Знайдіть роботу сили $\vec{F} = (4, 3x, 3xz)$ при переміщенні вздовж кривої MN : $x = 3 \cos \varphi, y = 3 \sin \varphi, z = 3$ від точки $M(3; 0; 3)$ до точки $M(0; 3; 3)$.</p>		<p>1. Знайдіть масу кривої $L : y = \ln \sin x, \pi/3 \leq x \leq \pi/2$ з густиною $\mu = \cos x$.</p> <p>2. Знайдіть роботу сили $\vec{F} = (-x^2 y^2; 4; x)$ при переміщенні вздовж кривої MN : $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 4$ від точки $M(2; 0; 4)$ до точки $M(0; 2; 4)$.</p>	

<p>B – 3 ККР I–4</p> <p>1. Знайдіть масу кривої $L: x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густинou $\mu = 2t$.</p> <p>2. Знайдіть роботу сили $\vec{F} = (x + y; -x; 6)$ при переміщенні вздовж кривої MN: $x = \cos \varphi, y = \sin \varphi, z = 2$ від точки $M(1; 0; 2)$ до точки $M(0; 1; 2)$.</p>	<p>B – 4 ККР I–4</p> <p>1. Знайдіть масу кривої $L: \rho = 8(1 - \cos \varphi), -\pi/3 \leq \varphi \leq 0$ з густинou $\mu = \cos \varphi / 2$.</p> <p>2. Знайдіть роботу сили $\vec{F} = (x; -2x^2; y)$ при переміщенні вздовж кривої $MN: x = 3 \cos t, y = 4 \sin t, z = 2$, від точки $M(3; 0; 2)$ до точки $N(0; 4; 2)$.</p>
<p>B – 5 ККР I–4</p> <p>1. Знайдіть масу кривої $L: y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \leq x \leq 4$ з густинou $\mu = x^2$.</p> <p>2. Знайдіть роботу сили $\vec{F} = (y; -2x; x^2)$ при переміщенні вздовж кривої $MN: x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 2$, від точки $M(2; 0; 2)$ до точки $N(-2; 0; 2)$.</p>	<p>B – 6 ККР I–4</p> <p>1. Знайдіть масу кривої $L: x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 3t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густинou $\mu = z^2(x^2 + y^2)^{-1}$.</p> <p>2. Знайдіть роботу сили $\vec{F} = (-2z; -x; x^2)$ при переміщенні вздовж кривої $MN: x = (\cos t)/3, y = (\sin t)/3, z = 8$, від точки $M(1/3; 0; 8)$ до точки $N(-1/3; 0; 8)$.</p>
<p>B – 7 ККР I–4</p> <p>1. Знайдіть масу кривої $L: \rho = 2 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/3$ з густинou $\mu = \cos^2 \varphi$.</p> <p>Знайдіть роботу сили $\vec{F} = (x^2; yz; 2z)$ при переміщенні вздовж кривої $MN: x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 3$ від точки $M(2; 0; 3)$ до точки $N(0; 2; 3)$.</p>	<p>B – 8 ККР I–4</p> <p>1. Знайдіть масу кривої $L: y = e^x + e, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$ з густинou $\mu = e^{2x}$.</p> <p>2. Знайдіть роботу сили $\vec{F} = (x; -z^2; y)$ при переміщенні вздовж кривої $MN: x = \cos t, y = 3 \sin t, z = 2$, від точки $M(0; 3; 2)$ до точки $N(-1; 0; 2)$.</p>
<p>B – 9 ККР I–4</p> <p>1. Знайдіть масу кривої L: $x = t, y = \frac{3}{\sqrt{2}}t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$ з густинou $\mu = x + 2z$.</p> <p>2. Знайдіть роботу сили $\vec{F} = (x; -z^2; y)$ при переміщенні вздовж кривої $MN: x = 2 \cos t, y = 3 \sin t, z = -3$, від точки $M(2; 0; -3)$ до точки $N(0; 3; -3)$.</p>	<p>B – 10 ККР I–4</p> <p>1. Знайдіть масу кривої L: $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq 7/9$ з густинou $\mu = x$.</p> <p>2. Знайдіть роботу сили $\vec{F} = (-y; x; 3z^2)$ при переміщенні вздовж кривої $MN: x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 5$ від точки $M(2; 0; 5)$ до точки $N(0; 2; 5)$.</p>

KKP-1-5.

Тема : Застосування поверхневого інтеграла 1-го роду.

Контрольна робота складається з двох задач і розрахована на 20 хвилин.

У першій задачі пропонується знайти масу частини поверхні при відомій поверхневій густині з використанням поверхневого інтеграла 1-го роду. В усіх варіантах відповідний подвійний інтеграл зручно обчислювати в полярній системі координат. Приблизний час виконання 10 хвилин.

У другій задачі необхідно обчислити запропонований поверхневий інтеграл 1-го роду по частині площини. Приблизний час виконання 10 хвилин.

Відповіді:

Номер варіанта	1	2	3	4	5
Завдання 1	$\frac{\pi R^4}{6}$	$\frac{\pi R^3}{4}$	$8\sqrt{2}\pi$	$\sqrt{2}\pi$	$\frac{\pi R^3}{2}$
Завдання 2	$18\sqrt{14}$	$\frac{\sqrt{14}}{288}$	$18\sqrt{14}$	$\frac{\sqrt{11}}{324}$	$12\sqrt{61}$

Номер варіанта	6	7	8	9	10
Завдання 1	$\frac{\pi a^3}{4}$	$\sqrt{2}\pi R^4$	$2R^3$	$\frac{\pi R^3}{24}$	$\frac{2\sqrt{2}\pi R^3}{3}$
Завдання 2	$\frac{\sqrt{3}}{24}$	$\frac{\sqrt{29}}{6}$	$\frac{\sqrt{26}}{288}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{\sqrt{46}}{96}$

B – 1	KKP I–5	B – 2	KKP I–5
<p>1. Знайдіть масу частини поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, розташованої у першому октанті, якщо її поверхнева густина $\mu = z^2$.</p> <p>2. Обчисліть інтеграл $\iint_S (z + 3x + 2y) dS$, якщо $S: 2x + 3y + z = 1$, перший октант.</p>		<p>1. Знайдіть масу частини поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, що лежить всередині поверхні $x^2 + y^2 = Rx$ ($z > 0$), якщо її поверхнева густина $\mu = z$.</p> <p>2. Обчисліть інтеграл $\iint_S x^2 dS$, якщо $S: 2x + 3y + z = 1$, перший октант.</p>	

KKP-1-6.

Тема : Скалярні та векторні поля.

Робота складається з двох задач і розрахована на 10 хвилин.

У першій задачі необхідно перевірити чи потенціальне векторне поле і знайти його потенціал. Приблизний час виконання 5 хвилин.

У другій задачі необхідно знайти похідну за напрямом для скалярного поля. Приблизний час виконання 5 хвилин.

Відповіді :

№ варіанта	Завдання 1	Завдання 2
1	$u = x^3 + xy^2 + yz + z^3 + c$	9
2	$u = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + c$	$-\frac{26}{5}$
3	$u = x^4 + y^4 + z^4 + xyz + c$	$\frac{29}{3}$
4	$u = x^3 - y^3 - z^3 + xy^2z^3 + c$	$\frac{26}{3}$
5	$u = x^2y + xy^2z^2 + c$	$-\frac{6}{\sqrt{13}}$
6	$u = -x + 2y + 3z + x^2yz^2 + c$	$\frac{5}{\sqrt{3}}$
7	$u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = xy + 2xz + 3yz + c$	$\frac{10}{\sqrt{3}}$
8	$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + z - 3y + c$	$-\frac{4}{\sqrt{2}}$
9	$u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + z^2) + xy + 3y - xz + c$	$-\frac{13}{\sqrt{43}}$
10	$u = x^2 + y^2 + 2yz - xz^3 + c$	2

<p>В – 1</p> <p>1. Доведіть потенціальність поля $\vec{F} = (3x^2 + y^2; 2xy + z; y + 3z^2)$ та знайдіть його потенціал.</p> <p>2. Знайдіть градієнт скалярного поля $u = y^2 + 4xy^2 - 3x/y + xyz^3$ в точці M та похідну за напрямом вектора \overrightarrow{MN} в точці M, якщо $M(2;1;0), N(-1;5;0)$.</p>	<p>ККР I–6</p>	<p>В – 2</p> <p>1. Доведіть потенціальність поля $\vec{F} = (2x + y + z; x + 2y + z; x + y + 2z)$ та знайдіть його потенціал.</p> <p>2. Знайдіть градієнт скалярного поля $u = x^3y - 3x^2y^2 + xy^3 + xyz^2 - 7$ в точці M та похідну за напрямом вектора \overrightarrow{MN} в точці M, якщо $M(1;2;0), N(4;6;0)$.</p>	<p>ККР I–6</p>
<p>В – 3</p> <p>1. Доведіть потенціальність поля $\vec{F} = (4x^3 + yz; 4y^3 + xz; xy + 4z^3)$ та знайдіть його потенціал.</p> <p>2. Знайдіть градієнт скалярного поля $u = xy + xz + yz$ в точці M та похідну за напрямом вектора \overrightarrow{MN} в точці M, якщо $M(2;3;4), N(3;5;6)$</p>	<p>ККР I–6</p>	<p>В – 4</p> <p>1. Доведіть потенціальність поля $\vec{F} = (3x^2 + y^2z^3; -3y^2 + 2xyz^3; 3z^2(xy^2 - 1))$ та знайдіть його потенціал.</p> <p>2. Знайдіть градієнт скалярного поля $u = xy^2 + z^2 - xyz$ в точці M та похідну за напрямом вектора \overrightarrow{MN} в точці M, якщо $M(1;2;2), N(3;3;4)$.</p>	<p>ККР I–6</p>
<p>В – 5</p> <p>1. Доведіть потенціальність поля $\vec{F} = (y^2z^2 + 2xy; x^2 + 2xyz^2; 2xzy^2)$ та знайдіть його потенціал.</p> <p>2. Знайдіть градієнт скалярного поля $u = xy(z - x - y)$ в точці M та похідну за напрямом вектора \overrightarrow{MN} в точці M, якщо $M(1;2;1), N(3;2;4)$</p>	<p>ККР I–6</p>	<p>В – 6</p> <p>1. Доведіть потенціальність поля $\vec{F} = (2xyz^2 - 1; x^2z^2 + 2; 2x^2yz + 3)$ та знайдіть його потенціал.</p> <p>2. Знайдіть градієнт скалярного поля $u = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy + zy^2$ в точці M та похідну за напрямом вектора \overrightarrow{MN} в точці M, якщо $M(1;1;1), N(5;5;5)$.</p>	<p>ККР I–6</p>
<p>В – 7</p> <p>1. Доведіть потенціальність поля $\vec{F} = (x + y + 2z; x + y + 3z; 2x + 3y + z)$ та знайдіть його потенціал.</p> <p>2. Знайдіть градієнт скалярного поля $u = 2y^2 + z^2 - xy - yz$ в точці M та похідну за напрямом вектора \overrightarrow{MN} в точці M, якщо $M(1;0;3), N(2;-1;4)$.</p>	<p>ККР I–6</p>	<p>В – 8</p> <p>1. Доведіть потенціальність поля $\vec{F} = (2x + 2; 2y - 3; 2z + 4)$ та знайдіть його потенціал.</p> <p>2. Знайдіть градієнт скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ в точці M та похідну за напрямом вектора \overrightarrow{MN} в точці M, якщо $M(-1;2;1), N(3;1;2)$.</p>	<p>ККР I–6</p>

<p>B – 9</p> <p>1. Доведіть потенціальність поля $\vec{F} = (x + y - z, x - y + z, z + y - x)$ та знайдіть його потенціал.</p> <p>2. Знайдіть градієнт скалярного поля $u = x^3 + y^3 - 3xz + 4yz$ в точці M та похідну за напрямом вектора \overrightarrow{MN} в точці M, якщо $M(2;1;0), N(-1;4;5).$</p>	<p>ККР I–6</p>	<p>B – 10</p> <p>1. Доведіть потенціальність поля $\vec{F} = (2x - z^3, 2y + 2z, 2y - 3xz^2)$ та знайдіть його потенціал.</p> <p>2. Знайдіть градієнт скалярного поля $u = z^2 + 4 \sin x \sin y$ в точці M та похідну за напрямом вектора \overrightarrow{MN} в точці M, якщо $M(\pi/2; \pi/2; 1), N(\pi/2; \pi/2; 2).$</p>	<p>ККР I–6</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------

KKP-1-7.

Тема : Формула Стокса.

Контрольна робота містить 10 варіантів з одним завданням і розрахована на 10 хвилин.

У завданні необхідно за формулою Стокса знайти циркуляцію векторного поля вздовж замкненого контура L . У всіх завданнях контур L - просторова плоска крива.

Bідповіді:

№ варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 задача	-4π	-4π	1	$-\pi$	1	π	$-\pi$	10	9π	-4π

<p>B – 1</p> <p>1. Знайдіть циркуляцію векторного поля $\vec{F} = (x, -z, y)$ вздовж контура</p> $L : \begin{cases} z = x^2 + y^2 - 17, \\ x^2 + y^2 = 16. \end{cases}$ <p>Обхід контура за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з початку координат.</p>	<p>KKP I–7</p> <p>1. Знайдіть циркуляцію векторного поля $\vec{F} = (y, 1, z)$ вздовж контура</p> $L : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8, z > 0. \end{cases}$ <p>Обхід контура за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з початку координат.</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

KKP-2-1.

Тема : Диференціальні рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними.

Контрольна робота містить 10 варіантів з двох завдань і розрахована на 10-15 хвилин.

У першому завданні необхідно знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Приблизний час виконання 5 хвилин.

У другому завданні необхідно розв'язати задачу Коші. Приблизний час виконання 7-10 хвилин.

Відповіді:

№ варіанта	1 задача	2 задача
1	$y = C\sqrt{1+x^2}$	$\ln y = \sqrt{\left \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right }$
2	$y = \frac{C}{\cos x} - 1$	$\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x = 1$
3	$4y = (\cos x + C)^2$	$y = 3\arcsin x - \frac{3\pi}{2}$
4	$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = C$	$-\frac{1}{y} = x + \ln x - 2$
5	$y = C \sin x$	$y = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + 2$
6	$x = \ln \frac{C}{1-e^y}$	$y = \ln \sqrt{ x^2 + 4x + 2 }$
7	$y - 1 = Cxy$	$y + \sqrt{y^2 - 1} = x^2$
8	$\frac{e^x}{(x+1)^2} = \frac{C}{\sqrt[3]{y^3 - 1}}$	$3(y^3 - 4) = x^3 - 9$
9	$y = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C$	$3(y^3 + 1) = x^2 - 1$
10	$y = \frac{1}{C\sqrt{1+e^{2x}}}$	$y = \ln x - 6\sqrt{x} + 3x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}$

<p>B – 1</p> <p>1. Знайдіть загальний розв’язок рівняння $(1+x^2)dy - xydx = 0$</p> <p>2. Знайдіть розв’язок задачі Коші $y'\sin x = y\ln y, y(\pi/2) = e$</p>	<p>KKP 2–1</p> <p>1. Знайдіть загальний розв’язок рівняння $\cos x \frac{dy}{dx} = y \sin x + \sin x$.</p> <p>2. Знайдіть розв’язок задачі Коші $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, y(0) = 1$.</p>
<p>B – 3</p> <p>1. Знайдіть загальний розв’язок рівняння $\sin x dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$.</p> <p>2. Знайдіть розв’язок задачі Коші $\sqrt{1-x^2} dy - 3dx = 0, y(1) = 0$.</p>	<p>KKP 2–1</p> <p>1. Знайдіть загальний розв’язок рівняння $\operatorname{tg} x \sin^2 y dx - \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0$.</p> <p>2. Знайдіть розв’язок задачі Коші $(xy^2 + y^2)dx - xdy = 0, y(1) = 1$.</p>
<p>B – 5</p> <p>1. Знайдіть загальний розв’язок рівняння $\operatorname{tg} x dy - y dx = 0$.</p> <p>2. Знайдіть розв’язок задачі Коші $\cos^3 x dx - \sin^2 x dy = 0, y(\pi/2) = 0$.</p>	<p>KKP 2–1</p> <p>1. Знайдіть загальний розв’язок рівняння $e^y (y' + 1) = 1$.</p> <p>2. Знайдіть розв’язок задачі Коші $(x+2)dx - (x^2 + 4x + 2)dy = 0, y(-1) = 0$.</p>
<p>B – 7</p> <p>1. Знайдіть загальний розв’язок рівняння $x dy + y dx = y^2 dx$.</p> <p>2. Знайдіть розв’язок задачі Коші $x dy = 2\sqrt{y^2 - 1} dx, y(1) = 1$.</p>	<p>KKP 2–1</p> <p>1. Знайдіть загальний розв’язок рівняння $(x-1)(y^3 - 1) + (x+1)y^2 \frac{dy}{dx} = 0$.</p> <p>2. Знайдіть розв’язок задачі Коші $\left(y - \frac{4}{y^2}\right) = y' \left(x - \frac{9}{x^2}\right), y(0) = 1$.</p>
<p>B – 9</p> <p>1. Знайдіть загальний розв’язок рівняння $(x^2 + 1)dy - x^4 dx = 0$.</p> <p>2. Знайдіть розв’язок задачі Коші $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0, y(2) = 0$.</p>	<p>KKP 2–1</p> <p>1. Знайдіть загальний розв’язок рівняння $ye^{2x} dx + (1 + e^{2x})dy = 0$.</p> <p>2. Знайдіть розв’язок задачі Коші $x dy - (1 - \sqrt{x})^3 dx = 0, y(1) = -3$.</p>

KKP-2-2.

Тема : Однорідні та лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

Контрольна робота з 10 варіантів містить три завдання. Робота розрахована на 25-35 хвилин.

У першому завданні необхідно знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл однорідного диференціального рівняння. Приблизний час виконання 5-7 хвилин.

У другому завданні необхідно знайти загальний розв'язок лінійного рівняння першого порядку. Приблизний час виконання 5-8 хвилин.

Третє завдання – текстова задача. Студенту необхідно скласти диференціальне рівняння першого порядку (лінійне або однорідне) і розв'язати його. Приблизний час виконання 15-20 хвилин.

Відповіді :

№ варі- анта	1 задача	2 задача	3 задача
1	$\frac{y+x}{(y-x)^2} = Cx$	$y = x^3 - x + Cx^2$	$2\sqrt{\frac{y}{x}} = C \pm \ln x $
2	$2\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln \frac{C}{x^2}$	$y = -x^2 - x + Cx^4$	$y = Cx - \ln x - 1$
3	$\ln \left \frac{2y^2 + 4x^2}{x^2} \right + \sqrt{2} \arctg \frac{2}{x\sqrt{2}} = \ln \frac{C}{x}$	$y = x \sin x + 1 + C \sin x$	$\begin{cases} x^2 = C^2 - 2Cy \\ 1 = C^2 x^2 - 2Cy \end{cases}$
4	$6\frac{y^2}{x^2} - 1 = \left(\frac{C}{x}\right)^6$	$y = x^2 (\sin x + C)$	$y + x = C\sqrt{x}$
5	$\arctg \frac{y}{x} = \ln x + C$	$y = Ce^{2x} - \frac{1}{3e^x}$	$y^2 + x^2 = Cx$
6	$y^2 + x^2 = Cx$	$y = Cx^3 + x^2 + 2x - 1$	$x = Cy + \frac{b^2}{y}$
7	$\sin \frac{y}{x} = \frac{C}{x}$	$y = x^2 - 1 + C\sqrt{x^2 - 1}$	$xy = C$
8	$\frac{y^2}{x^2 + \sqrt{y^2 + x^2}} = \frac{C}{x}$	$y = \frac{C}{x} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$	$x = Cy - y^2$

9	$\ln Cx = -e^{-\frac{y}{x}}$	$y = \left(\frac{x^2}{2} - x + C \right) e^{-\frac{x^2}{2}}$	$y^2 + x^2 = Cx$
10	$\frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} - 1 = \ln Cx$	$y = \left(\frac{x^2}{2} + C \right) e^{-x^2}$	$y = \frac{C}{x}$

В – 1 Розв'яжіть рівняння 1. $(2x + y)dy - (x + 2y)dx = 0$. 2. $xy' - 2y = x^3 + x$. 3. Знайдіть лінію, для якої квадрат довжини відрізка, що відтинає дотична на осі Oy , дорівнює добутку координат точки дотику.	KKP 2–2	В – 2 Розв'яжіть рівняння 1. $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$. 2. $xy' - 4y = 2x^2 - 3x$. 3. Знайдіть лінію, для якої ордината точки перетину будь-якої дотичної з віссю Oy дорівнює натуральному логарифму абсциси точки дотику.	KKP 2–2
В – 3 Розв'яжіть рівняння 1. $(4xy + x^2)dy - 2y^2dx = 0$. 2. $y'\sin x - y\cos x = \sin^2 x - \cos x$. 3. Знайдіть лінію, для якої довжина радіус-вектора будь-якої точки дотику дорівнює довжині відрізка, що відділяє дотичну на осі Oy .	KKP 2–2	В – 4 Розв'яжіть рівняння 1. $2xydy - (x^2 - 4y^2)dx = 0$. 2. $xy' - 2y = x^2 \cos x$. 3. Знайдіть лінію, для якої відрізок, що відтинає будь-яка дотична на осі Oy , дорівнює півсумі координат точки дотику.	KKP 2–2
В – 5 Розв'яжіть рівняння 1. $(x^2 + y^2 + xy)dx - x^2 dy = 0$. 2. $y' - 2y = e^{-x}$. 3. Знайдіть лінію, для якої будь-яка дотична перетинається з віссю Oy в точці, що рівновіддалена від точки дотику та від початку координат.	KKP 2–2	В – 6 Розв'яжіть рівняння 1. $2xydy + (x^2 - y^2)dx = 0$. 2. $xy' - 3y = 3 - 4x - x^2$. 3. Знайдіть лінію, для якої площа трикутника утвореного віссю Ox , дотичною та радіус-вектором точки дотику дорівнює b^2 ($b = const$).	KKP 2–2

<p>B – 7</p> <p>Розв'яжіть рівняння</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $x dy - \left(y - x \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right) dx = 0.$ 2. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x.$ 3. Знайдіть лінію, для якої відрізок, що відтинає будь-яка дотична на осі Oy вдвічі більший, ніж абсциса точки дотику. 	<p>KKP 2–2</p>	<p>B – 8</p> <p>Розв'яжіть рівняння</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $y dx - \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dy = 0.$ 2. $xy' + y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$ 3. Знайдіть лінію, для якої відрізок, що відтинає дотична на осі Ox, дорівнює квадрату ординати точки дотику. 	<p>KKP 2–2</p>
<p>B – 9</p> <p>Розв'яжіть рівняння</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $(xy' - y) \ln \frac{y}{x} = x.$ 2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$ 3. Знайдіть лінію, для якої трикутник, що утворений дотичною, віссю Oy та радіус-вектором точки дотику є рівнобедреним. 	<p>KKP 2–2</p>	<p>B – 10</p> <p>Розв'яжіть рівняння</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y.$ 2. $y' + xy = (x-1) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$ 3. Знайдіть лінію, для якої відстань від т. $(0,0)$ до довільної дотичної дорівнює абсцисі точки дотику. 	<p>KKP 2–2</p>

KKP-2-3.

Тема : Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі. Рівняння в повних диференціалах.

Контрольна робота з 10 варіантів містить два завдання. Робота розрахована на 10-15 хвилин.

У першому завданні необхідно знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл рівняння Бернуллі. Приблизний час виконання 10 хвилин.

У другому завданні необхідно знайти загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах. Приблизний час виконання 5 хвилин.

Відповіді :

№ варіанта	1 задача	2 задача
1	$y(Ce^{-\frac{x^2}{2}} - 1) = 1$	$\frac{x^3}{3} + xy - y^2 = C$

2	$y = \sqrt{x - 1 + Ce^{-x}}$	$xe^y - y^2 = C$
3	$y \left(Cx - \frac{x}{2} \ln^2 x \right) = 1$	$-\frac{x^3}{3} + y \sin x + \frac{y^2}{2} = C$
4	$y = \frac{1}{x^2 + Cx}$	$\sin(x + y) - x \cos(x + y) = C$
5	$y = \left(\frac{2}{5} (1 - x^2) + \frac{C}{\sqrt[4]{1-x^2}} \right)^{-1}$	$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$
6	$y = \left(x - \frac{1}{2} + Ce^{2x} \right)^{\frac{1}{2}}$	$x^4 + y^4 + 6x^2y^2 = C$
7	$y = \left(x^2 + \frac{1}{2} + Ce^{2x^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$	$-x^3 + xy - 2y^2 = C$
8	$y = \frac{1}{C \cos x - x \cos x}$	$xy - \frac{y^4}{4} = C$
9	$y = \frac{(\operatorname{tg} x + C)^2}{x^2}$	$-\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C - x$
10	$y = \left(Cx^2 - \frac{x}{2} \right)^2$	$\frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3} + x - \frac{1}{2} y^2 = C$

B – 1 Розв'яжіть рівняння 1. $y' - xy = xy^2$. 2. $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$.	KKP 2–3	B – 2 Розв'яжіть рівняння 1. $2y' + y = \frac{x}{y}$. 2. $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$.	KKP 2–3
B – 3 Розв'яжіть рівняння 1. $xy' + y = y^2 x \ln x$. 2. $(\sin x + y)dy + (y \cos x - x^2)dx = 0$.	KKP 2–3	B – 4 Розв'яжіть рівняння 1. $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$. 2. $x \sin(x + y)(dx + dy) + \cos(x + y)dy = 0$.	KKP 2–3

<p>B – 5 Розв'яжіть рівняння</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $y' - \frac{xy}{2(1-x^2)} = xy^2$. 2. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$. 	<p>KKP 2–3</p>	<p>B – 6 Розв'яжіть рівняння</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $y' + y = xy^3$. 2. $(x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0$. 	<p>KKP 2–3</p>
<p>B – 7 Розв'яжіть рівняння</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $y' + 2xy = 2x^3y^3$. 2. $y' = \frac{y - 3x^2}{4y - x}$. 	<p>KKP 2–3</p>	<p>B – 8 Розв'яжіть рівняння</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$. 2. $(y^3 - x)dy = ydx$. 	<p>KKP 2–3</p>
<p>B – 9 Розв'яжіть рівняння</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{x \cos^2 x}$. 2. $\frac{x dy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx$. 	<p>KKP 2–3</p>	<p>B – 10 Розв'яжіть рівняння</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$. 2. $(1 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)ydy = 0$. 	<p>KKP 2–3</p>

KKP– 2-4.

Тема: Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку.

Десять варіантів контрольної роботи складаються з трьох рівнянь другого або третього порядків різних типів, що допускають зниження порядку. Робота розрахована на 20-25 хвилин.

Перше рівняння типу $y^{(n)} = f(x)$. Приблизний час виконання завдання 5 хвилин. Друге рівняння типу $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$. Приблизний час виконання завдання 5-8 хвилин. Третє рівняння типу $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Приблизний час виконання завдання 10-12 хвилин.

Відповіді :

№ вар-п.	1 задача	2 задача	3 задача
1	$y = -x \sin x - 2 \cos x + C_1 x + C_2$	$y = e^x(x-1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$	$\begin{cases} y = C \\ x = C_1 \ln C_2(y - C_1) \end{cases}$
2	$y = \frac{x^4}{24} + \frac{\sin 2x}{8} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$	$y = C_1 x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + C_2$	$\begin{cases} y = C \\ \ln C_1 y - 1 = C_1 x + C_2 \end{cases}$
3	$y = x e^x - 2 e^x + C_1 x + C_2$	$y = \frac{1}{3} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_3$	$\begin{cases} y = C \\ 2 \frac{\sqrt[3]{y^2}}{3} C_1 x + C_2 \end{cases}$
4	$y = 1/60 x^5 + 3 \cos x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$	$y = C_2 - x + \sin 2x(C_1 - 1/2)$	$\begin{cases} y = C \\ 1 = (C_1 x + C_2)(1 - y) \end{cases}$
5	$y = -\frac{x}{4} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2$	$y = -\frac{x^2}{2C_2} - \frac{x \ln x - C_1^{-1} }{C_1^2} + \frac{x}{C_1^2} + \frac{\ln x - C_1 - 1 }{C_1^3} - \frac{C_2}{C_1} x + C_3$	$\frac{4}{3} \sqrt{(\sqrt{y} + C_1)^3} - 4C_1 \sqrt{(\sqrt{y} + C_1)} = C_2$
6	$y = -x \ln x + x + C_1 x^2 + \cos 3x/27 + C_2 x + C_3$	$y = x e^{Cx_1}/C_1 - e^{Cx_1}/C_1^2 + C_2$	$\sqrt{(C_1 y)^2 - 1} = C_2 \pm x$
7	$y = x \cos 2x/4 - \sin 2x/4 + C_1 x + C_2$	$y = 1/x - C_1 \ln x + C_2$	$\sqrt{1 + 2C_1 y^2} = 2C_1 \cdot (C_2 \pm x)$
8	$y = 2x e^{-x} + 3e^{-x} + C_1 x + C_2$	$y = C_1 x \ln x - C_1 x + C_2$	$2\sqrt{C_1 y - 1} = C_1 (C_2 \pm x)$
9	$y = 1/120 x^6 + 1/27 \cos 3x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$	$y = 1/4(2C_1 x - C_1 \sin 2x) + \cos x + C_2$	$\begin{cases} y = C \\ -4e^{-y/4+C_1} = x + C_2 \end{cases}$

10	$y = \ln x + \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$	$y = C_1xe^x - C_1e^x + C_2$	$y = C_2e^{C_1x}$
----	---------------------------------------------	------------------------------	-------------------

B – 1	KKP 2–4	B – 2	KKP 2–4
Розв'яжіть рівняння		Розв'яжіть рівняння	
1. $y'' = x \sin x$.		1. $y''' = x - \cos 2x$.	
2. $xy'' - y' = x^2 e^x$.		2. $y'' x \ln x = 3y'$.	
3. $y' \left(1 + (y')^2\right) = 3y^2$.		3. $yy'' - y'(1 + y') = 0$.	
B – 3	KKP 2–4	B – 4	KKP 2–4
Розв'яжіть рівняння		Розв'яжіть рівняння	
1. $y'' = xe^x$.		1. $y''' = x^2 + 3\sin x$.	
2. $y'' = y'x^{-1} + x$.		2. $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$.	
3. $(y')^2 + 2yy'' = 0$.		3. $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.	
B – 5	KKP 2–4	B – 6	KKP 2–4
Розв'яжіть рівняння		Розв'яжіть рівняння	
1. $y'' = -xe^{2x}$.		1. $y''' = x^{-2} + \sin 3x$.	
2. $x^2 y''' = (y'')^2$.		2. $y'' = y'x^{-1} \left(1 + \ln y'x^{-1}\right)$.	
3. $4\sqrt{y}y'' = 1$.		3. $yy'' + (y')^2 = 1$.	
B – 7	KKP 2–4	B – 8	KKP 2–4
Розв'яжіть рівняння		Розв'яжіть рівняння	
1. $y'' = -x \cos 2x$.		1. $y'' = 2xe^{-x}$.	
2. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.		2. $y'' x \ln x = y'$.	
3. $y^3 y'' = -1$.		3. $1 + (y')^2 = 2yy''$.	
B – 9	KKP 2–4	B – 10	KKP 2–4
Розв'яжіть рівняння		Розв'яжіть рівняння	
1. $y''' = x^3 + \sin 3x$.		1. $y''' = \frac{2}{x^3} - \cos x$.	
2. $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \cos x$.		2. $xy'' = xy' + y'$.	
3. $4y'' = (y')^2$.		3. $yy'' = (y')^2$.	

KKP-2-5

Тема: Лінійні однорідні рівняння вищих порядків.

Контрольна робота складається з трьох лінійних однорідних рівняння другого порядку. Для перших двох рівняннях треба знайти загальний розв'язок, а в третьому прикладі - розв'язати задачу Коші. Робота розрахована на 15 хвилин.

У першому рівнянні корені характеристичного рівняння прості дійсні, або кратні дійсні. Приблизний час виконання завдання 3 хвилини.

У другому рівнянні корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені. Приблизний час виконання завдання 5 хвилин.

Третє рівняння має прості дійсні, або кратні дійсні корені характеристичного рівняння. Для нього необхідно знайти розв'язок задачі Коші. Приблизний час виконання завдання 7 хвилин.

Відповіді :

№ варіанта	1 задача	2 задача	3 задача
1	$y = C_1 e^{8x} + C_2 e^{2x}$	$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$	$y_{Kouii} = e^{5x} (2x + 1)$
2	$y = e^{4x} (C_1 + C_2 x)$	$y = e^{\frac{-x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$	$y_{Kouii} = e^{2x} + e^{4x}$
3	$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$	$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$	$y_{Kouii} = e^{6x} (x + 1)$
4	$y = e^{5x} (C_1 + C_2 x)$	$y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$	$y_{Kouii} = e^{-3x} + 4e^x$
5	$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$	$y = e^{-3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$	$y_{Kouii} = e^{3x} (x + 1)$
6	$y = e^{3x} (C_1 + C_2 x)$	$y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$	$y_{Kouii} = e^{-3x} + e^{5x}$
7	$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$	$y = e^{3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$	$y_{Kouii} = e^{-4x} (x + 1)$
8	$y = e^{6x} (C_1 + C_2 x)$	$y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$	$y_{Kouii} = e^{-x} + e^{4x}$

9	$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$	$y = e^{-3x} (C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x)$	$y_{Kouai} = e^{-2x} (3x + 1)$
10	$y = e^{2x} (C_1 + C_2 x)$	$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$	$y_{Kouai} = e^{-3x} (1 + 4x)$

B – 1 Розв'яжіть рівняння 1. $y'' - 10y' + 16y = 0$. 2. $y'' + 2y' + 5y = 0$. 3. Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' - 10y' + 25y = 0$ $y(0) = 1, y'(0) = 7$.	KKP 2–5	B – 2 Розв'яжіть рівняння 1. $y'' - 8y' + 16y = 0$. 2. $y'' + y' + y = 0$. 3. Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' - 6y' + 8y = 0$ $y(0) = 2, y'(0) = 6$.	KKP 2–5
B – 3 Розв'яжіть рівняння 1. $y'' - 2y' - 15y = 0$. 2. $y'' - 2y' + 5y = 0$. 3. Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' - 12y' + 36y = 0$ $y(0) = 1, y'(0) = 7$.	KKP 2–5	B – 4 Розв'яжіть рівняння 1. $y'' - 10y' + 25y = 0$. 2. $y'' + 4y' + 5y = 0$. 3. Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' + 2y' - 3y = 0$ $y(0) = 5, y'(0) = 1$.	KKP 2–5
B – 5 Розв'яжіть рівняння 1. $y'' - 7y' + 12y = 0$. 2. $y'' + 6y' + 10y = 0$. 3. Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' - 6y' + 9y = 0$ $y(0) = 1, y'(0) = 4$.	KKP 2–5	B – 6 Розв'яжіть рівняння 1. $y'' - 6y' + 9y = 0$. 2. $y'' - 4y' + 5y = 0$. 3. Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' - 2y' - 15y = 0$ $y(0) = y'(0) = 2$.	KKP 2–5
B – 7 Розв'яжіть рівняння 1. $y'' - 3y' + 2y = 0$. 2. $y'' - 6y' + 10y = 0$. 3. Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' + 8y' + 16y = 0$ $y(0) = 1, y'(0) = 5$.	KKP 2–5	B – 8 Розв'яжіть рівняння 1. $y'' - 12y' + 36y = 0$. 2. $y'' + 2y' + 2y = 0$. 3. Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' - 3y' - 4y = 0$ $y(0) = 2, y'(0) = 3$.	KKP 2–5

<p>В – 9</p> <p>Розв'яжіть рівняння</p> <p>1. $y'' - 5y' + 6y = 0$.</p> <p>2. $y'' + 6y' + 12y = 0$.</p> <p>3. Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' + 4y' + 4y = 0$ $y(0) = y'(0) = 1$.</p>	<p>ККР 2–5</p>	<p>В – 10</p> <p>Розв'яжіть рівняння</p> <p>1. $y'' - 4y' + 4y = 0$.</p> <p>2. $y'' - 2y' + 2y = 0$.</p> <p>3. Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' + 6y' + 9y = 0$ $y(0) = y'(0) = 1$.</p>	<p>ККР 2–5</p>

ККР-2-6.

Тема : Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків.

Робота складається з трьох задач і розрахована на 30-40 хвилин.

У першій задачі пропонується записати частинний розв'язок для лінійного неоднорідного рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною. Необхідно записати цей розв'язок з невідомими коефіцієнтами. В усіх варіантах розглядається випадок з резонансом. Приблизний час виконання 5 хвилин.

У другій задачі необхідно знайти розв'язок задачі Коші для лінійного неоднорідного рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною (випадок без резонансу). Приблизний час виконання 10-15 хвилин.

У третьій задачі необхідно знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння другого порядку з правою частиною не спеціального вигляду, застосовуючи метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Приблизний час виконання 15-20 хвилин.

У першому завданні можна запропонувати знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння. У цьому випадку приблизний час виконання 15-20 хвилин.

Відповіді :

№ вар.	1 задача	2 задача	3 задача
1	$y_{ч.н.} = x(A \cos 3x + B \sin 3x)$	$y_{Kouai} = \frac{11}{8}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{-2x} - \frac{1}{4}\cos 2x$	$y_{з.н.} = -\ln(1 + e^x) + A + \ln e^x/(1 + e^x) $

2	$y_{u.H.} = Ax^2e^x$	$y_{Kouai} = \cos 2x - \frac{2}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x$	$y_{3.H.} = (B-x)e^{-x} + xe^{-x}(\ln x + A)$
3	$y_{u.H.} = e^x x^2 (Ax^2 + Bx + C)$	$y_{Kouai} = e^{3x} + x^2$	$y_{3.H.} = \cos x \times \\ \times (A - \sin x) + \\ + \sin x \times \\ \times (B - \cos x - \ln x/2)$
4	$y_{u.H.} = e^{2x} x^2 (Ax + B)$	$y_{Kouai} = e^x (x+1) + e^{2x}$	$y_{3.H.} = B \sin x - 2 + \\ + \cos x \times \\ \times (\ln \operatorname{ctg}^2(x/2) + A)$
5	$y_{u.H.} = e^{2x} x (Ax + B)$	$y_{Kouai} = e^{2x} (x+1) + 2e^x$	$y_{3.H.} = e^{2x} \sin x \times \\ \times (x+B) + \\ + (A - \ln \cos x) \times \\ \times e^{2x} \cos x$
6	$y_{u.H.} = e^x x (Ax^2 + Bx + C)$	$y_{Kouai} = 2\cos x + \sin x + \\ + 2e^x (x-1)$	$y_{3.H.} = A + Be^x - \\ - \cos e^x$
7	$y_{u.H.} = e^{-x} x (A \cos x + B \sin x)$	$y_{Kouai} = \cos x + 2\sin x + \\ + e^x (2-x)$	$y_{3.H.} = A - \ln(e^x + 1) + \\ + e^x \left(\ln \frac{e^x}{e^x + 1} + B \right)$
8	$y_{u.H.} = x (A \cos 3x + B \sin 3x)$	$y_{Kouai} = 1 + e^{-2x} - \cos x + \\ + 2\sin x$	$y_{3.H.} = e^{-2x} (Ax + B) + \\ + e^{-2x} x^2 (1/2 \ln x - 3/4)$
9	$y_{u.H.} = x (A \cos 2x + B \sin 2x)$	$y_{Kouai} = 2\cos x + 2\sin x - \\ - \cos 2x$	$y_{3.H.} = \cos x (A - x) + \\ + \sin x (\ln \sin x + B)$
10	$y_{u.H.} = e^{5x} (Ax^2 + Bx + C)x$	$y_{Kouai} = 10\cos x - 6\sin x + \\ + 5x^2 - 10$	$y_{3.H.} = \left(B - \ln \sqrt{x^2 + 1} \right) \times \\ \times e^x + (A + \arctg x)xe^x$

В – 1	KKP 2–6	В – 2	KKP 2–6
<p>1. Знайдіть загальний вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння</p> $y'' + 9y = 12 \sin 3x.$ <p>2. Знайдіть розв'язок задачі Коші</p> $y'' - 4y = 2 \cos 2x, y(0) = 1,$ $y'(0) = 3.$ <p>3. Знайдіть загальний розв'язок рівняння</p> $y'' - y' = \frac{e^x}{1+e^x}.$	<p>1. Знайдіть загальний вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння</p> $y'' - y = 3e^x.$ <p>2. Знайдіть розв'язок задачі Коші</p> $y'' + 4y = \sin x, y(0) = 1, y'(0) = 1.$ <p>3. Знайдіть загальний розв'язок рівняння</p> $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$		
В – 3	KKP 2–6	В – 4	KKP 2–6
<p>1. Знайдіть загальний вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння</p> $y'' - 2y' + y = (3x^2 + 7)e^x.$ <p>2. Знайдіть розв'язок задачі Коші</p> $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2$ $y(0) = 1, y'(0) = 3.$ <p>3. Знайдіть загальний розв'язок рівняння</p> $y'' + y = \operatorname{ctg} x.$	<p>1. Знайдіть загальний вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння</p> $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}x.$ <p>2. Знайдіть розв'язок задачі Коші</p> $y'' - y = 3e^{2x}, y(0) = 2, y'(0) = 4.$ <p>3. Знайдіть загальний розв'язок рівняння</p> $y'' + y = \frac{2}{\sin^2 x}.$		
В – 5	KKP 2–6	В – 6	KKP 2–6
<p>1. Знайдіть загальний вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння</p> $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}(3x + 4).$ <p>2. Знайдіть розв'язок задачі Коші</p> $y'' - 4y' + 4y = 2e^x, y(0) = 3, y'(0) = 5.$ <p>3. Знайдіть загальний розв'язок рівняння</p> $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$	<p>1. Знайдіть загальний вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння</p> $y'' - 3y' + 2y = e^x(x^2 + 2x - 2).$ <p>2. Знайдіть розв'язок задачі Коші</p> $y'' + y = 4xe^x, y(0) = 0, y'(0) = 1.$ <p>3. Знайдіть загальний розв'язок рівняння</p> $y'' - y' = e^{2x} \operatorname{cose} e^x.$		

B – 7	KKP 2–6	B – 8	KKP 2–6
<p>1. Знайдіть загальний вигляд частинного розв’язку неоднорідного рівняння</p> $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} \cos x.$ <p>2. Знайдіть розв’язок задачі Коші</p> $y'' + y = 2(1-x)e^x, y(0) = 3, y'(0) = 3.$ <p>3. Знайдіть загальний розв’язок рівняння</p> $y'' - y' = \frac{e^x}{1+e^x}.$		<p>1. Знайдіть загальний вигляд частинного розв’язку неоднорідного рівняння</p> $y'' + 9y = 3\sin 3x.$ <p>2. Знайдіть розв’язок задачі Коші</p> $y'' + 2y' = 5\cos x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$ <p>3. Знайдіть загальний розв’язок рівняння</p> $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x.$	
B – 9	KKP 2–6	B – 10	KKP 2–6
<p>1. Знайдіть загальний вигляд частинного розв’язку неоднорідного рівняння</p> $y'' + 4y = 5\cos 2x.$ <p>2. Знайдіть розв’язок задачі Коші</p> $y'' + y = 3\cos 2x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$ <p>3. Знайдіть загальний розв’язок рівняння</p> $y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$		<p>1. Знайдіть загальний вигляд частинного розв’язку неоднорідного рівняння</p> $y'' - 5y' = (x^2 - 1)e^{5x}.$ <p>2. Знайдіть розв’язок задачі Коші</p> $y'' + y = 5x^2, y(0) = 0, y'(0) = 6.$ <p>3. Знайдіть загальний розв’язок рівняння</p> $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}.$	

KKP-2-7

Тема: Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

У кожному з десяти варіантів контрольної роботи міститься лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь.

У пункті а) необхідно розв’язати запропоновану систему методом виключень. Застосування методу зводить систему до лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною без резонансу. Корені характеристичного рівняння прості і дійсні. Приблизний час виконання цього завдання 15-20 хвилин.

У пункті б) необхідно розв'язати однорідну систему, що відповідає за-
пропонованій і розв'язати її матричним методом. Власні числа матриці сис-
теми дійсні та різні. Приблизний час виконання 5 хвилин.

Загалом робота розрахована на 20-25 хвилин.

Відповіді:

№ варіанта	Пункт а)	Пункт б)
1	$\begin{cases} x = e^t(C_1 + t + 1) - C_2 e^{-t} - t^2 - 2 \\ y = e^t(C_1 + t) + C_2 e^{-t} - 2t \end{cases}$	$\lambda_{1,2} = \pm 1,$ $\bar{x} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{3t} + 3t^2 + 2t \\ y = 2C_1 - C_2 e^{3t} + 6t^2 - 2t - 2 \end{cases}$	$\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \bar{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{cases} x = 0,5C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} - 2 \sin t - \cos t \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + 3 \cos t + \sin t \end{cases}$	$\lambda = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},$ $\bar{x} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{cases} x = 1,5C_1 e^{2t} + C_2 e^t - 2 \sin t + \cos t \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + 2 \cos t = 2 \sin t \end{cases}$	$\lambda = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$ $\bar{x} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{cases} x = 2C_1 e^{4t} - C_2 e^t + 3e^{5t} \\ y = C_1 e^{4t} + C_2 e^t + e^{5t} \end{cases}$	$\lambda = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix},$ $\bar{x} = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
6	$\begin{cases} x = -C_1 e^{3t} + e^t(C_2 - 3 \cos t - \sin t) \\ y = C_1 e^{3t} + e^t(C_2 + 3 \cos t + \sin t) \end{cases}$	$\lambda = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{x} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{cases} x = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} - \cos t + 3 \sin t \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + 2 \cos t - \sin t \end{cases}$	$\lambda = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},$ $\bar{x} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^t + \frac{5}{8} + \frac{2}{3}te^t + \frac{1}{2}t \\ y = 2C_1 e^{4t} - C_2 e^t - \frac{3}{4} - \frac{1}{3}e^t - \frac{2}{3}te^t \end{cases}$	$\lambda = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix},$

		$\bar{x} = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t} - \frac{2}{3} e^t \\ y = C_1 e^{4t} - \frac{3}{2} C_2 e^{-t} + \frac{1}{3} e^t \end{cases}$	$\lambda = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix},$ $\bar{x} = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$
10	$\begin{cases} x = 3C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t} - 0,4(\cos t + \sin t) \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} = 0.4 \sin t \end{cases}$	$\lambda = \pm 2,$ $\bar{x} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

B – 1 Розв'яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом $\begin{cases} x' = y + 2e^t \\ y' = x + t^2. \end{cases}$	KKP 2–7	B – 2 Розв'яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -2x + y + 18t. \end{cases}$	KKP 2–7
B – 3 Розв'яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом $\begin{cases} x' = y - 5 \cos t \\ y' = 2x + y. \end{cases}$	KKP 2–7	B – 4 Розв'яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом $\begin{cases} x' = 4x - 3y + \sin t \\ y' = -y + 2x - 2 \cos t. \end{cases}$	KKP 2–7
B – 5 Розв'яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом	KKP 2–7	B – 6 Розв'яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом	KKP 2–7

$\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t} \\ y' = x + 2y. \end{cases}$	$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$
B – 7 Розв’яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x - 5 \sin t. \end{cases}$	B – 8 Розв’яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом $\begin{cases} x' = 2x + y + e^t \\ y' = 2x + 3y + 2t. \end{cases}$
B – 9 Розв’яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом $\begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = 3x + y + 2e^t. \end{cases}$	B – 10 Розв’яжіть а) неоднорідну систему методом виключень; б) відповідну однорідну систему матричним методом $\begin{cases} x' = x + 3y + 2 \sin t \\ y' = x - y. \end{cases}$

Список рекомендованої літератури

Підручники і посібники

1. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб./ В. П. Дубовик, І. І. Юрік.—К.: А. С. К., 2006.—647с.—ISBN 966-539-320-0.
2. Овчинников П. П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2/ П. П. Овчинников.—К.: Техніка, 2000.—792 с.—ISBN 966-575-153-0.
3. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс/Д. Письменный.—М.: Айрис-Пресс, 2008.—608 с.—ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.
4. Шипачев В. С. Курс высшей математики / В. С. Шипачев.—М.: Оникс, 2009.—608 с.—ISBN 978-5-488-02067-2.