Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України НТУУ «КПІ»

Деякі розділи елементарної математики

Методичні вказівки

до виконання типової розрахункової роботи

з математичного аналізу

для студентів першого курсу

фізико математичного факультету

Рекомендовано Методичною радою фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»

Київ

НТУУ «КПІ»

2014

Деякі розділи елементарної математики: Метод. вказівки до викон. типової розрахунк. роб. з мат. аналізу для студ. 1 курсу фіз.-мат. ф-ту/ Уклад.: В.В.Дрозд. – К.: НТУУ КПІ», 2014

Гриф надано Методичною радою

фізико-матичного

факультету НТУУ «КПІ»

(Протокол № від 2014 р.)

Навчальне видання

Деякі розділи елементарної математики

Методичні вказівки

до виконання типової розрахункової роботи

з математичного аналізу

для студентів першого курсу

фізико математичного факультету

Укладачі: Дрозд Вячеслав Володимирович

Віповідальний редактор: : Вірченко Ніна Опанасівна

Рецензент: Авраменко Людмила Григорівна

Передмова

Останнім часом КРЗЗ-0 (контрольні роботи по перевірці залишку знань з елементарної математики у тих, хто щойно вступив до нашого університету), які проводяться на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ «КПІ» кожен рік, показують низький рівень цих знань. Студенти фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ» не є виключенням. Вони погано володіють навичками побудови графіків елементарних функцій, тотожних перетворень алгебраїчних, тригонометричних, логарифмічних виразів, розв'язання рівнянь та нерівностей тощо. Це значно ускладнює засвоєння студентами першого року навчання усіх розділів курсу математичного аналізу. У зв'язку з такою об'єктивною реальністю на фізико-математичному факультеті НТУУ «КПІ» традиційно у першому семестрі частина оглядових лекцій курсу математичного аналізу присвячується найбільш важливим розділам елементарної математики. Паралельно з цим на практичних заняттях першого місяця навчання студентами відпрацьовуються основні навички розв'язання рівнянь, доведення нерівностей, побудови графіків тощо. Як показує багаторічна практика викладання в НТУУ «КПІ» багатьох математичних дисциплін, однією з найважливіших форм учбового процесу є типовий розрахунок. Ці методичні вказівки містять умови задач для самостійної роботи студентів, а також довідковий матеріал та приклади розв'язання типових задач. Наведений список літератури допоможе студентам поглибити та систематизувати свої знання з елементарної математики.

Розділ 1. Довідковий матеріал

1. Множина натуральних чисел

Множину всіх натуральних чисел позначають: $N=\{1,2,3, \ldots ,n, \ldots\}$.
Натуральне число називається простим, якщо воно ділитсья тільки на 1 і саме на себе. Натуральне число називається складеним , якщо воно має більше як два дільники. Одиниця не відноситься ні до простих, ні до складених чисел.

Кожне натуральне число, відмінне від 1, можна єдиним способом розкласти на прості множники, тобто подати у вигляді

$$a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n},$$

де $p_1, p_2, \ldots p_n$ - прості, а $n, k_1, k_2, \ldots, k_n$ - натуральні числа. Такий запис називається *канонічним розкладом* числа a .

Деякі ознаки подільності натуральних чисел:

- число ділиться на 3, якщо сума його цифр ділиться на 3;
- число ділиться на 4, якщо дві останні цифри є нулі, або виражають число, що ділиться на 4;
- число ділиться на 5, якщо остання цифра 0 або 5;
- число ділиться на 8, якщо останні три цифри є нулі, або виражають число, що ділиться на8;
- число ділиться на 9, якщо сума його цифр ділиться на 9.

Спільним дільником кількох натуральних чисел називається число, на яке ділиться без остачі кожне з цих чисел. Найбільший з усіх спільних дільників кількох чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається їх *найбільшим спільним дільником* і позначається НСД($a_1, a_2, \ldots, a_n$).

Спільним кратним кількох натуральних чисел називається число, яке ділиться без остачі на кожне з цих чисел. Найменше із спільних кратних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається їх *найменшим спільним кратним* і позначається НСК ($a_1, a_2, \ldots, a_n$).

2. Дійсні числа. Представлення дійсних чисел десятковими дробами

Множина цілих чисел містить всі цілі додатні, цілі від'ємні числа і нуль:

$$Z=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}.$$

Множину раціональних чисел Q складають числа виду $\frac{p}{q}$, де $p \in Z, q \in N$;

$$Q = \left\{\frac{p}{q} | p \in Z, \ \ q \in N\right\},$$

Числа, які не можна представити у вигляді $\frac{p}{q}$, де $p \in Z$, а $q \in N$, називаються ірраціональними. Множина всіх дійсних чисел **R** є об'єднанням множини раціональних та ірраціональних чисел.

Дійсні числа зображуються десятковими дробами.

Десятковий дріб $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$- це скорочений запис дійсного числа у десятковій позиційній системі числення:

$$a_0, a_1a_2 \dots a_n \dots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

де a_0 - ціле число (ціла частина дробу), $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ - цифри десяткової системи числення ($0 \le a_i \le 9$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$). *Десятковий дріб* називається *скінченим* , якщо, починаючи з деякого місця, всі його цифри дорівнюють нулю, і нескінченним у протилежному випадку.

Нескінченний *десятковий дріб* називається *періодичним* з періодом $b_1b_2 \dots b_m$, якщо після деякого десяткового розряду група цифр $b_1b_2 \dots b_m$ повторюєтсья безліч разів. Його записують у вигляді:

$$a_0, a_1a_2 \dots a_k(b_1b_2 \dots b_m),$$

де k – число цифр після після десяткової коми до першого періоду, m – довжина періоду.

Будь яке раціональне число можна подати у вигляді скінченного десяткового або періодичного дробу.

Перехід від періодичного до мішаного дробу здійснюється за формулою

$$a_0, a_1a_2 \dots a_k(b_1b_2 \dots b_m) = a_0 \frac{a_1a_2 \dots a_k b_1 \dots b_m - a_1a_2 \dots a_k}{\underbrace{9..9}_{m}\underbrace{0\dots0}_{k}}.$$

Ірраціональні числа, і тільки вони, зображуються нескінченними неперіодичними десятковими дробами.

Цілою частиною дійсного числа x називається найбільше ціле число, яке не перевищує x .

Позначається $[x]$, читається " антьє ікс" (від франц. Entier- цілий).

Дробовою частиною числа x називається різниця між числом та його цілою частиною .

Позначається $\{x\} = x - [x]$.

Основні властивості цілої та дробової частин числа *x:*

1. $[x] \le x < [x] + 1$;
2. $[x + n] = [x] + n$; $x \in R, n \in Z$.
3. $[x] + [y] \le [x + y]$;
4. $\{x\} + \{y\} \ge \{x + y\}$;
5. $[x + y] = [x] + [y] + [\{x\} + \{y\}]$;
6. $\{x + y\} = \{x\} + \{y\} - [\{x\} + \{y\}]$;

3. Абсолютна величина числа

Абсолютною величиною або модулем дійсного числа x називається саме число x , якщо $x \ge 0$, і число $-x$, якщо $x < 0$:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Основні властивості абсолютної величини:

а) $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

б) $|-x| = |x|$;

в) $-|x| \leq x \leq |x|$;

г) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, де $a \geq 0$;

д) $|x| \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq a; \\ x \leq -a; \end{array}\right.$

е) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

є) $|x - y| \geq |x| - |y|$;

ж) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

з) $|x|^2 = x^2$;

і) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$.

4. Дії над нерівностями

Число *a* більше від числа *b* ($a>b$), якщо різниця $a-b$ - додатнє число. Число *a* менше від числа *b* ($a < b$), якщо різниця $a - b$ - від'ємне число.

Для будь-яких дійсних чисел справджується одне і тільки одне із співвідношень: $a < b$, $a = b$ чи $a>b$.

Властивості нерівностей:

1. Якщо $a>b$, то $b< a$.

2. Якщо $a>b$ і $b> c$, то $a>c$.

3. Нерівності $a < b$ і $b< c$ можна об'єднати у подвійну нерівність $a<b<c$.

4. Якщо $a>b$, то для довільного c : $a + c > b + c$.

5. Якщо $a>b$ і $c > 0$, то $ac > bc$,
якщо $a>b$ і $c < 0$, то $ac < bc$.

6. Якщо $a>b$ і $c > d$, то $a+c > b+d$.

7. Якщо $a>b$ і $c < d$, то $a-c > b-d$.

8. Якщо $a>b$, $c > d$ і a, b, c, d - додатні числа, то при почленному множенні знак нерівності не
змінюється: $ac > bd$;
якщо $a>b$ і $c > d$, причому $a > 0$, $d > 0$, то $ac > bd$;
якщо $a>b$ і $c > d$, причому $a < 0$, $d < 0$, то $ac < bd$;

9. Якщо $a>b>0$ або $0>a>b$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

10. Якщо $a>b\geq 0$, то $a^2>b^2$;

якщо $0\geq a>b$, то $a^2<b^2$;

якщо $a>b\geq 0$, то $a^n>b^n$, $n\in N$;

якщо $a>b$, то $a^{2n+1}>b^{2n+1}$, $n\in N$.

11. Якщо $a>b\geq 0$, то $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}>\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$, $\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}$;

якщо $a>b$, то $\sqrt[2n+1]{a}>\sqrt[2n+1]{b}$, $n\in N$.

12. Якщо $0<a<x<b$, то $a<|x|<b$;

якщо $a<x<b<0$, то $-b<|x|<-a$;

якщо $a<x<b$, $a<0$, $b>0$, то $0\leq|x|<c$, де $c-$ більше з чисел $|a|$ і $|b|$.

5. Числові проміжки

Числова вісь – нескінченна пряма, на якій вибрано початок відліку О, додатній напрям і одиницю масштабу. Кожному дійсному числу ставиться у відповідність одна і тільки одна точка числової осі: числу нуль відповідає точка О, числу $x>0$ відповідає точка A, відкладена від точки O у додатному напрямку, така, що $OA=x$, числу $x<0$ - точка B, відкладена від точки O у протилежному напрямку, така, що $OB=-x$. Навпаки, кожна точка числової осі є зображенням одного і тільки одного дійсного числа. Отже, між множиною дійсних чисел і точками числової осі існує взаємно однозначна відповідність.

Позначення числових множин:

$R=(-\infty;\infty)-$ множина всіх дійсних чисел (вся числова пряма);

$\emptyset-$ порожня множина;

$[a;b]=\{x\in R: a\leq x\leq b\}-$ відрізок (замкнений проміжок);

$(a;b)=\{x\in R: a<x<b\}-$ інтервал (відкритий проміжок);

$[a;b)=\{x\in R: a\leq x<b\}$; $(a;b]=\{x\in R: a<x\leq b\}-$ півінтервали;

$(a;+\infty)=\{x\in R: x>a\}$;

$[a;+\infty)=\{x\in R: x\geq a\}$;

$(-\infty;b)=\{x\in R: x<b\}$;

$(-\infty;b]=\{x\in R: x\leq b\}$.

6. Доведення нерівностей.

При доведенні алгебраїчних нерівностей найчастіше використовуються методи: рівносильних перетворень даної нерівності до очевидної (тотожно істинної); поступової заміни даної нерівності іншими доти, поки не дістанемо тотожно рівної нерівності, після чого доведення проводиться у зворотному напрямі; використання властивостей елементарних функцій, зокрема монотонності степеневої функції; математичної індукції, якщо нерівність доводиться на множині натуральних чисел; доведення від супротивного; диференціального числення і т.п.

Вкажемо деякі спеціальні нерівності, які часто використовуються при доведенні інших нерівностей.

а) Нерівність Коші встановлює співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним невід'ємних чисел

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},\ a_1 \geq 0, \ldots,\ a_n \geq 0,$$

рівність виконується лише за умови $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Зокрема, для $n = 2$:

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2},\ \ a_1 \geq 0, \ldots,\ a_n \geq 0.$$

б) Нерівності $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, якщо $ab>0$ та $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leq -2$, якщо $ab<0$.

Зокрема, $a+\frac{1}{a} \geq 2$, якщо $a>0$ та , $a+\frac{1}{a} \leq -2$, якщо $a<0$.

в) Нерівність Бернуллі

$(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x$, де $x \geq -1,\ 0<\alpha<1$;

$(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$, де $x \geq -1, \alpha \leq 0$ або $\alpha \geq 1$.

Зокрема, $(1+x)^{n} \leq 1+nx$, де $x \geq -1,\ n \in \mathrm{N}$.

г) Нерівність Коші-Буняковського

$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1 b_1+a_2 b_2+\ \ldots.+a_n b_n)^2$,

де $a_1, a_2, \ldots, a_n,\ b_1, b_2, \ldots, b_n$ – довільні дійсні числа.

Рівність виконується, коли $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

Зокрема, $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) \geq (a_1 b_1+a_2 b_2)^2$.

д) Нерівність Ієнсена

$\frac{a^n+b^n}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^2, a \geq 0,\ b \geq 0, n \in N$.

7. Рівняння з одним невідомим
Цілі раціональні рівняння

Рівняння вигляду $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$,
Де $a_i \in R$, $i = \overline{0,n}$, $a_n \neq 0$, а x - невідоме , називається **цілим раціональним рівнянням.**

Зауважимо, що рівняння (1):

а) має не більше n коренів;

б) має хоча б один дійсний корінь, якщо $n = 2k - 1, k \in N$;

в) може не мати дійсних коренів, якщо $n = 2k, k \in N$.

У загальному випадку при розв'язанні рівняння (1) використовують різноманітні методи (виділення повного квадрата, групування, підстановки та ін…), а також властивості многочлена

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$.

Мають місце наступні **твердження**:

1. Якщо рівняння(1) $a_i \in Z$, $i = \overline{o,n}, a_n \neq 0$) має раціональний коінь $p\backslash q$, то p є дільником числа a_0, а q — —дільником числа a_n . Зокрема, його цілим коренем можуть бути тільки дільники числа a_0.
2. Якщо рівняння (1) має корінь x=a, то многочлен $P_n(x)$ можна розкласти на множники : $P_n(x) = (x - a)P_{n-1}(x)$, де $P_{n-1}(x) -$ деякий многочлен степеня n-1.
3. Якщо на кінцях деякого відрізка $[a; b]$ значення многочлена $P_n(x)$ мають різні знаки, то на інтервалі $(a; b)$ існує принаймні один корінь цього многочлена.

8. Тотожні перетворення раціональних та ірраціональних алгебраїчних виразів

а). Дії над степенями $(p, q \in Q, a > 0, b > 0)$:

$a^0 = 1;\ a^1 = a;\ a^p a^q = a^{p+q};$

$a^p : a^q = a^{p-q};\ (ab)^p = a^p b^p;$

$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p};\ (a^p)^q = a^{pq}.$

б). Дії над арифметичними коренями $(n, k \in N, n \geq 2, k \geq 2, a \geq 0, b \geq 0)$:

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b};\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b \neq 0);$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k};\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a;\ \sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k};$

$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}\ (0 \leq a < b);\ \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|;$

$\sqrt{a^2} = |a|;\ \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$.

Зауваження. Якщо $n = 2k, k \in N, ab \geq 0$, то:

$$\sqrt[2k]{ab} = \begin{cases} \sqrt[2k]{a}\sqrt[2k]{b}, \text{ якщо } a \geq 0, b \geq 0; \\ \sqrt[2k]{-a}, \sqrt[2k]{-b}, \text{ якщо } a \leq 0, b \leq 0. \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \frac{\sqrt[2k]{a}}{\sqrt[2k]{b}}, \text{якщо } a \geq 0, b > 0; \\ \frac{\sqrt[2k]{-a}}{\sqrt[2k]{-b}}, \text{якщо } a \leq 0, b < 0. \end{cases}$$

в). Формули скороченого множення ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}$):

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3b^2a \pm b^3$;

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Зауваження 1. При перетвореннях ірраціональних виразів часто користуються формулами:

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}), a \geq 0, b \geq 0;$$

$$a \pm b = (\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right).$$

Зауваження 2. При спрощенні виразу вигляду $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$ зручно (коли це можливо) представити $a + b\sqrt{c}$ у вигляді квадрата деякого двочлена.

9.Функції та їх графіки

При розв'язуванні рівнянь, нерівностей та їх систем в багатьох випадках доцільно користуватися графічними методами, поєднуючи їх із формальними прийомами ров'язання. Графічна ілюстрація часто допомагає уникнути численних переборів, що виникають в процесі розв'язування задач параметрами. При цьому потрібно вміти мислити одночасно аналітично і геометрично : вміти будуваи графіки аналітичних залежностей, а будь-яку властивість рафіка описати алгебраїчними умовами.

Докладніше функції та їх графіки розглядатимуться при вивчені теми « Похідна та її застосування» . У роботі наведені лише деякі основні поняття та відомості, необхідні при графічній ілюстрації роз'язання алгебраїчних рівнянь, нерівностей та їх систем.

а). Деякі поняття

Розглянемо множити $X\ i\ Y$, елементами яких можуть бути довільні об'єкти. Припустимо, що кожному елементу x множини X за деяким законом ставиться у відповідність один елемент множини Y, який позначимо $y = f(x)$. Тоді f називається функцією з X в Y (або відображенням множини X в Y) . Таким чином, якщо задано відображення f множини X в Y, то часто кажуть, що на множині X визначена функція φ, яка набуває значення y=$f(x)$ із множини Y.

Множину X називають областю визначення функції (позначають $D(f)$), а множину $\{f(x); x \in X\}$ – множиною значень функції (позначають $\mathrm{E}(f)$).
Змінну величину x називають назалежною змінною або аргументом.
Якщо функція дійсного аргументу задана аналітично, тобто формулою (однією або кількома), то її областю визначення є область допустимих значень (ОДЗ) змінної x, тобто множина тих значень x, при яких y= $f(x) \in R.$
Нехай $\mathrm{D}(\varphi)$ симетрична відносно початку координат. Якщо для кожного $x \in D(f)$:
а) $f(x) = f(-x)$, то функція φ називається парною;
б) $f(-x) = -f(x)$, то множина φ називається непарою;

Графіком функції y= $f(x)$ у прямокутній системі координат XOY називається множина точок площини з координатами ординат, а непарної – відносно початку координат.

Якщо залежність між x та y задається у неявному вигляді (у вигляді рівнянь, нерівностей), о множину точок на площині, що задовольняють цю залежність, називають геометричним образом залежності. Наприклад, геометричним образом ріняння $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$ є коло радіуса |R| з центром у точці $C(x_0,y_0)$.

б). Елементарні перетворення графіків функцій

Вважаючи відомим графік функції y= $f(x)$, розглянемо геометричні перетворення, за допомогою яких можна дістати рафіки нових функцій.

1. **Графік функції** y = - $f(x)$ симетричний графіку функції y = f(x) відносно осі абсцис.
2. **Графік функції** y = $f(-x)$ симетричний графіку функції y = $f(x)$ відносно осі ординат.
3. **Графік функції** $y = -f(-x)$ симетричний графіку функції $y = f(x)$ відносно початку координат (або симетричний графіку $y = f(-x)$ відносно осі OX).
4. **Графік функції** $y = f(x - a)$ можна дістати із графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням (зсувом) його уздовж осі OX на |a| праворуч, якщо a > 0, і ліворуч, якщо a<0. Це перетворення можна здійснити паралельним перенесенням осі ординат уздовж осі OX на величину $-a$.
5. **Графік функції** $y = f(x) + b$ можна дістати із графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням (зсувом) його уздовж осі ординат на |b| одиниць вгору, якщо b>0, і вниз, якщо b<0. Це перетворення рівносильне перенесенню осі OX на величину –b.
6. **Графік функції** $y = kf(x)$ можна дістати із графіка функції $y = f(x)$ розтягом або стисканням його по осі ординат пропорційно коефіцієнту k (якщо k > 1, то графік розтягується в k раз, якщо 0<k<1, то графік стискується в $\frac{1}{k}$ раз). Абсциси точок при цьому залишаються незмінними. Якщо k<0 , то спочатку будуємо графік функції $y = |k|f(x)$, а потім відображаємо симетрично осі OX.

7. **Графік функції** $y = f(kx)$ можна дістати із графіка функції $y = f(x)$ за допомогою стискання або розтягу його по осі абсцис пропорційно коефіцієнту k (якщо k>1, то графік стискується в k раз, якщо 0<k<1, то графік розтягується в $\frac{1}{k}$ раз). Ординати точок при цьому залишаються незмінними. Якщо k<0 , то спочатку будуємо графік функції $y = f(|k|x)$, а потім відображаємо його симетрично осі OY.

8. **Графік функції** $y = |f(x)|$ можна дістати із графіка функції $y = f(x)$,враховуючи,що

$$|f(x)| = \begin{bmatrix} f(x), \text{при } f(x) \geq 0, \\ f(x), \text{при } f(x) < 0. \end{bmatrix}$$

Тобто симетрично відображаємо відносно осі OX ті частини графіка $y = f(x)$, які лежать нижче від осі OX, а всі частини, які лежать вище на осі OX залишаємо без зміни.

9.Графік функції $y = f(|x|)$можна дістати із графіка функції $y = f(x)$, враховуючи, що

$$f(|x|) = \begin{bmatrix} f(x), \text{при } x \geq 0, \\ f(x), \text{при } x < 0. \end{bmatrix}$$

Функція $f(|x|)$ парна, тому для x < 0 іі графік є симетричним відображенням відносно осі OY побудованої частини графіка для

10.Графік функції $y = |f(|x|)|$ можна дістати із графіка функції $y = f(|x|)$, залишивши без зміни всі його частини, які лежать вище і на осі OX, а частини , що лежать нижче від осі OX, симетрично від образити відносно цієї осі

11. Геометричний образ залежності $|y| = f(x)$ при $y \geq 0$ збігається з тими частинами графіка функції $y = f(x)$, які лежать вище і на осі OX ($f(x) \geq 0$), а при y<0 є їх симетричним відображенням відносно осі OX.

12. Геометричний образ залежності $|y| - |f(x)|$при $y \geq 0$ збігається із графіком функції
$y = |f(x)|$ a при $y < 0$ є його симетричним відображенням осі OX.

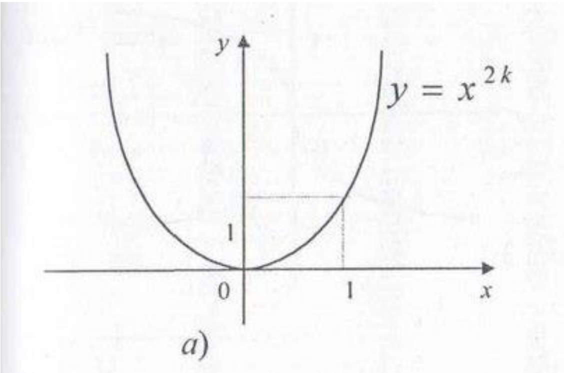
13. Геометричний образ залежності $|y| = f(|x|)$ при
$y \geq 0$ збігається з тими частинами графіка функції $y = f(|x|)$, які лежать вище від осі OX, а при y < 0 є їх симетричним відображенням відносно осі OX.

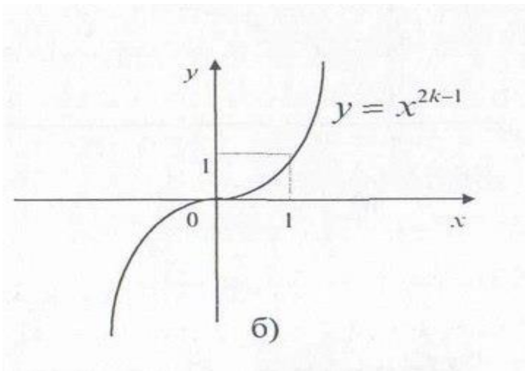
14. Геометричний образ залежності |y| = |f(|x|) при y ≥ 0 збігається із графіком функції y= |f(|x|)| , а при y < 0 є його симетричним відображення відносно осі OX.

10. Степенева функція

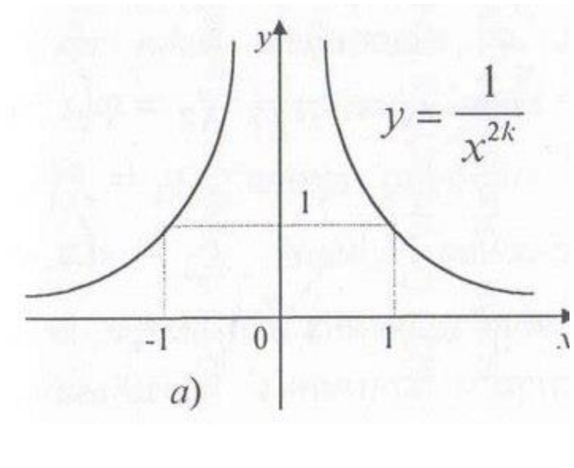
Степеневою функцією називається функція $y = x^a$,де x - незалежна змінна,а a – показник степеня, $a \in R$

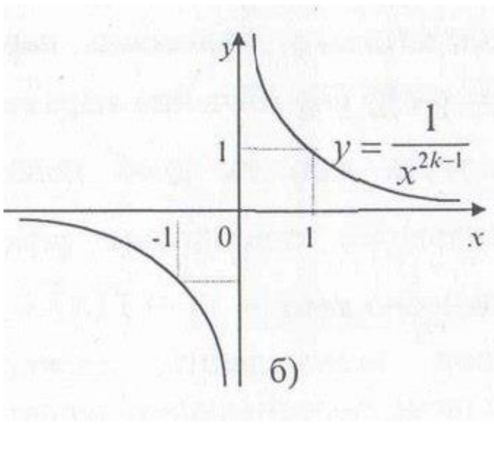
1.Степенева функція з натуральним показником $y = x^n, n \in N$.Для парних і непарних n графік функції $y = x^2$ має вигляд:



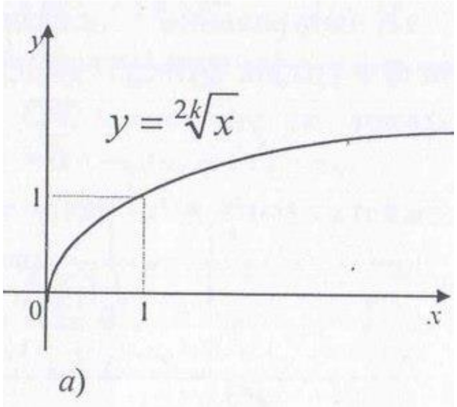


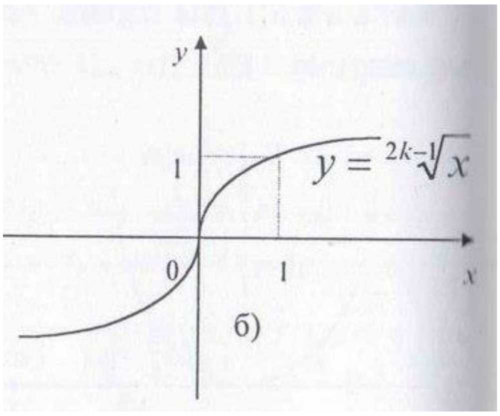
2. Степенева функція з цілим від`ємним показником степеня $y = \frac{1}{x^n}, n \in N$.Для парни хы непарних n графік функції $y = \frac{1}{x^n}$ має вигляд:





3.Степенева функція з дробовим показником степеня $y=\sqrt[n]{x}, n\in N, n>1$.Для парних і непарних n графік функції $y=\sqrt[n]{x}$ має вигляд:





11. Тригонометрія

а). Означення тригонометричних функцій довільного кута

Нехай у прямокутній системі координат XOY довільна точка M, відмінна від початку координат, має координати (x,y), її радіус-вектор $\overline{OM}$ утворює з додатним напрямом осі OX кут α і має довжину $|\overline{OM}|=r,\ r=\sqrt{x^2+y^2}$ (рис.1).

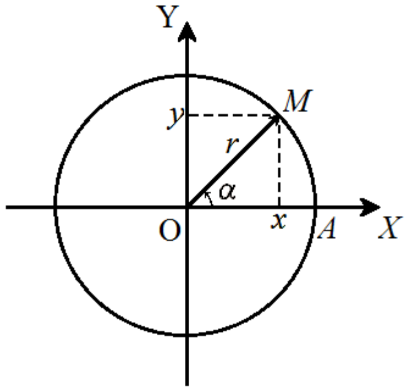


Рис. 1

Синусом довільного кута α називається відношення ординати кінця рухомого радіуса-вектора $\overline{OM}$, що утворює кут α з віссю абсцис, до довжини цього радіуса:

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}.$$

Косинусом довільного кута α називається відношення абсциси кінця рухомого радіуса-вектора $\overline{OM}$, що утворює кут α з віссю абсцис, до довжини цього радіуса:

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}.$$

Тангенсом кута α, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$, називається відношення синуса кута α до косинуса цього кута (або відношення ординати до абсциси кінця рухомого радіуса-вектора $\overline{OM}$, що утворює кут α з віссю абсцис):

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{або} \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \ x \neq 0.$$

Котангенсом кута α, $\alpha \neq \pi n, n \in Z$ називається відношення косинуса кута α до синуса цього кута (або відношення абсциси до ординати кінця рухомого радіуса-вектора $\overline{OM}$, що утворює кут а з віссю абсцис):

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{або} \quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{y}, \ y \neq 0.$$

Розглядаються також тригонометричні функції кута ***секанс*** і ***косеканс***:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{r}{x}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z, \quad x \neq 0;$$
$$\mathrm{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{r}{y}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z, \quad y \neq 0$$

Значення тригонометричних функцій кута α залежать лише від його величини і не залежать від довжини r рухомого радіуса-вектора $\overline{OM}$, що утворює кут α з віссю абсцис, тому можна прийняти $r = 1$. Якщо кінець M радіуса-вектора лежить на одиничному колі, то значення тригонометричних функцій відповідно дорівнюють

$$\sin\alpha = y, \ \cos\alpha = x, \ \mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x} \ (x \neq 0), \ \mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{y} \ (y \neq x).$$

Аргументом тригонометричних функцій вважається не тільки кут, а й дуга одиничного кола.

Віссю тангенсів називається дотична до одиничного кола в кінці $A(1;0)$ горизонтального діаметра, яка має напрям осі ординат.

Тангенс кута $\alpha \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right)$ дорівнює ординаті відповідної точки C осі тангенсів.

Віссю котангенсів називається дотична до одиничного кола в кінці $B(0;1)$ вертикального діаметра, яка має напрям осі абсцис.

Котангенс кута $\alpha\left(\alpha \neq \pi n, n \in Z\right)$ дорівнює абсцисі відповідної точки C осі

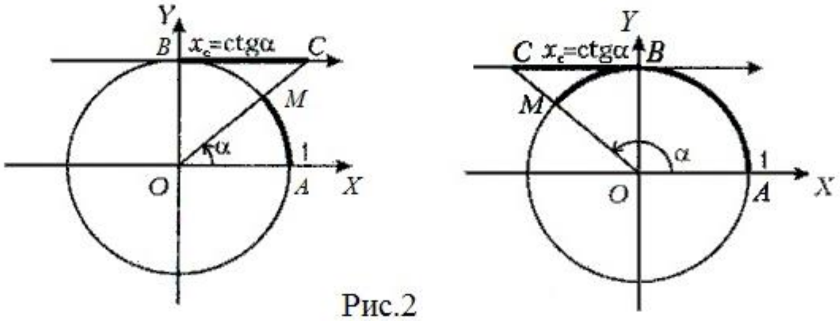


Рис.2

котангенсів (рис. 2).

б). Знаки тригонометричних функцій

Тригонометричні функції кутів, що закінчуються в різних чвертях координатної площини, вказані на рис.3.

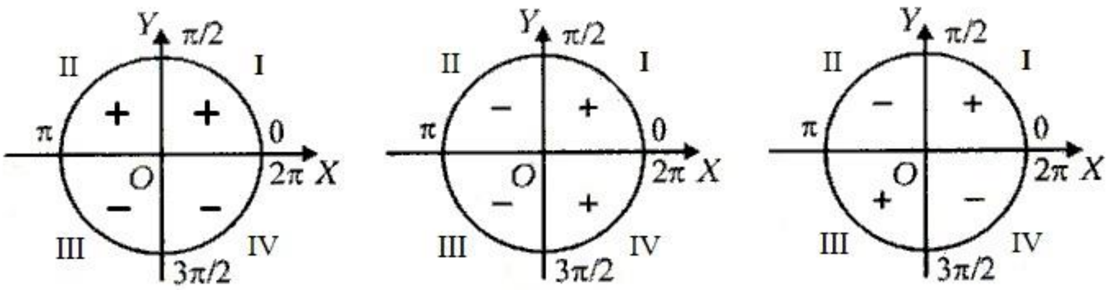


Рис.3

в). Значення тригонометричних функцій деяких кутів

α, рад / $f(\alpha)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує	0
$\mathrm{ctg}\alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не існує	0	не існує

г). Формули зведення

$f(\alpha)$ \ α	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$

Правило. Якщо кути мають вигляд $-\alpha,\ \pi\pm\alpha,$, то функції зберігають найменування; для кутів $\frac{\pi}{2}\pm\alpha,\ \ \frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ функції змінюють найменування на споріднене (спорідненими є функції синус і косинус, тангенс і котангенс, секанс і косеканс); знак функції визначається знаком лівої частини, якщо вважати кут α гострим.

д). Парність та непарність тригонометричних функцій

Функції $\cos\alpha$ і $\sec\alpha$ — парні, функції $\sin\alpha, \mathrm{cosec}\alpha, \mathrm{tg}\alpha$ та $\mathrm{ctg}\alpha$ — непарні, тобто

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\quad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\qquad \mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha,$$
$$\sec(-\alpha)=\sec\alpha,\quad \mathrm{cosec}(-\alpha)=-\mathrm{cosec}\alpha,\quad \mathrm{ctg}(-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$$

е). Періодичність тригонометричних функцій

Функції $\cos\alpha, \sin\alpha, \sec\alpha, \mathrm{cosec}\alpha$ мають найменший додатний (основний) період $T=2\pi$, функції $\mathrm{tg}\alpha$ та $\mathrm{ctg}\alpha$ мають найменший додатний період $T=\pi$, тобто

$$\cos(\alpha+2\pi n)=\cos\alpha,\qquad \sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(\alpha+\pi n)=\mathrm{tg}\alpha,\qquad \mathrm{ctg}(\alpha+\pi n)=\mathrm{ctg}\alpha,\quad n\in Z.$$

Функції $\cos(\omega\alpha+\varphi)$ і $\sin(\omega\alpha+\varphi)$ мають період $T=\dfrac{2\pi}{\varpi}$ функції $\mathrm{tg}(\omega\alpha+\varphi)$ і $\mathrm{ctg}(\omega\alpha+\varphi)$ мають період $T=\dfrac{\pi}{\varpi}$.

Найменший додатний період суми періодичних функцій $f_1(x)+f_2(x)++\ldots+f_n(x)$ дорівнює найменшому спільному кратному періодів доданків, якщо вони сумірні.

<u>**Зауваження.**</u> Значення тригонометричних функцій від кутів $\pm\alpha+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z,$ зводяться до значень тригонометричних функцій від кута α згідно з формулами зведення, парністю та періодичністю.

є). Основні формули тригонометрії

Основні тригонометричні тотожності:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1; \qquad (1)$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z; \qquad (2)$$

$$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha,}\ \ \alpha\neq\pi n,\ \ n\in Z; \qquad (3)$$

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1,\ \ \alpha\neq\frac{\pi n}{2},\ \ n\in Z; \qquad (4)$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ \ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z; \qquad (5)$$

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\ \ \alpha\neq\pi n,\ \ n\in Z. \qquad (6)$$

Теореми додавання:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta; \qquad (7)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta; \qquad (8)$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}, \ \ \alpha, \beta, \alpha \pm \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ \ n \in Z; \qquad (9)$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}, \quad \alpha, \beta, \alpha \pm \beta \neq \pi n, \ \ n \in Z. \qquad (10)$$

Тригонометричні функції подвійного і

потрійного аргументів:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad (11)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha; \qquad (12)$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, n, k \in Z; \qquad (13)$$

$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z; \qquad (14)$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \qquad (15)$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha; \qquad (16)$$

$$tg 3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z; \qquad (17)$$

$$ctg 3\alpha = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1 - 3ctg^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{3}, n \in Z. \qquad (18)$$

Формули половинного аргументу

(для синуса та косинуса – формули пониження степеня):

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}; \tag{19}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}; \tag{20}$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \quad \alpha\neq\pi(2n+1),\, n\in Z; \tag{21}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \quad \alpha\neq\pi(2n+1),\, n\in Z; \tag{22}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha\neq\pi n,\, n\in Z; \tag{22'}$$

$$ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}, \quad \alpha\neq 2\pi n,\, n\in Z; \tag{23}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}, \alpha\neq\pi n,\, n\in Z; \tag{24}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}, \quad \alpha\neq 2\pi n,\, n\in Z. \tag{24'}$$

Формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{25}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}; \tag{26}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{27}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}; \tag{28}$$

$$tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\, n\in Z; \tag{29}$$

$$ctg\,\alpha \pm ctg\,\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n,\ n \in Z. \tag{30}$$

Формули перетворення добутку

тригонометричних функцій у суму:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha - \beta\right) - \cos\left(\alpha + \beta\right)\right); \tag{31}$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)); \tag{32}$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)). \tag{33}$$

Заміна тригонометричних функцій через тангенс

їх половинного аргументу (універсальна заміна):

$$\sin\alpha = \frac{2tg\,\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\,\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1),\ n \in Z; \tag{34}$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - tg^2\,\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\,\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1),\ n \in Z; \tag{35}$$

$$tg\,\alpha = \frac{2tg\,\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\,\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1),\ n \in Z; \tag{36}$$

$$ctg\,\alpha = \frac{1 - tg^2 \frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi n, n \in Z. \tag{37}$$

ж). Тригонометричні функції числового аргументу

Між множиною дійсних чисел R та множиною всіх кутів(дуг), що вимірюються у радіанах, існує взаємно однозначна відповідність. Якщо вважати аргументом тригонометричної функції не кут(дугу), а число, що виражає його величину у радіанах, то матимемо відповідну тригонометричну функцію числового аргументу. Для тригонометричних функцій силового аргументу виконуються всі співвідношення між тригонометричними функціями кута.

з). Властивості і графіки тригонометричних функцій

1. **Функція** $y = \sin x$:

область визначення R, множина значень [-1,1];

непарна(графік симетричний відносно початку координат);

періодична, найменший додатній період Т=2π;

зростає при $2\pi n - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$;

спадає при $2\pi n + \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$;

$\sin x = 0$ при x=πn, $n \in Z$;

мінімальні значення $\sin x = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$;

максимальні значення $\sin x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$;

$\sin x > 0$ при $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n), \sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in Z$;

неперервна і диференційовна при всіх х, $(\sin x)' = \cos x.$

Графіком функції $y = \sin x$ є синусоїда (рис.4).

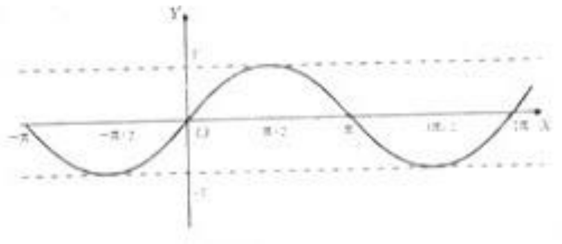


Рис.4

2. Функція $y = \cos x$ **:**

область визначення R, множина значень [-1,1];

парна(графік симетричний відносно осі OY);

періодична, найменший додатний період T=2π;

зростає при $2\pi n + \pi < x < 2\pi + 2\pi n,$ спадає при $2\pi n < x < \pi + 2\pi n, n \in Z;$

$\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

мінімальні значення $\cos x = -1$ при $x = \pi + 2\pi n, n \in Z,$

максимальні значення $\cos x = 1$ при $x = 2\pi n, n \in Z,$

$\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z,$

$\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z,$

Неперервна і диференційовна при всіх х, $(\cos x)' = -\sin x.$

Графіком функції $y = \cos x$ є косинусоїда (рис.5).

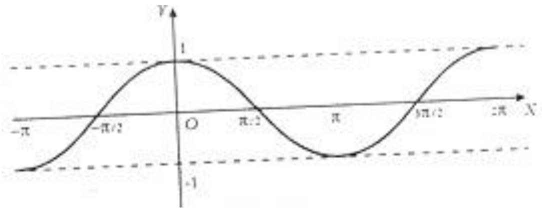


Рис.5

3. **Функція** $y = tgx$:

область визначення R, крім значень $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z,$ де графік має розрив, множина значень R;

непарна(графік симетричний відносно початку координат);

періодична, найменший додатний період $T = \pi$;

зростає на кожному із проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z;$

$tgx = 0$ при $x = \pi n, n \in Z;$

$tgx > 0$ при $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, tgx < 0$ при $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi n, n \in Z;$

Неперервна і диференційовна в області визначення, $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Графіком функції $y = tgx$ є тангенсоїда (рис.6).

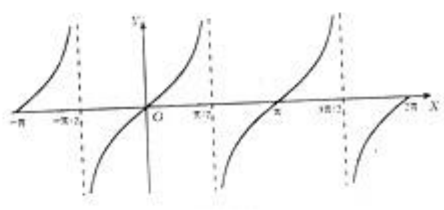


Рис.6

4. **Функція** $y = ctgx$:

область визначення R, крім значень $x = \pi n, n \in Z,$ де графік має розрив, множина значень R;

непарна(графік симетричний відносно початку координат);

періодична, найменший додатний період $T = \pi;$

спадає на кожному із проміжків $(\pi n; \pi + \pi n), n \in Z;$

$ctgx = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

$ctgx > 0$ при $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $ctgx < 0$ при $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in Z;$

Неперервна і диференційовна в області визначення, $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

Графіком функції $y = ctgx$ є котангенсоїда (рис.7).

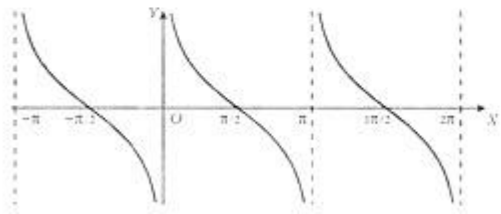


Рис.7

и). Розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь

I. $\sin x = m.$

1. при $|m| > 1$ $\sin x = m \Leftrightarrow x \in \varnothing;$

2. при $|m| \leq 1$ $\sin x = m \Leftrightarrow x \in (-1)^n \arcsin m + \pi n, n \in Z.$

Зокрема:

3. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in Z;$

4. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$

5. $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$

II. $\cos x = m.$

1. при $|m| > 1$ $\cos x = m \Leftrightarrow x \in \emptyset;$
2. при $|m| \le 1$ $\cos x = m \Leftrightarrow x = \pm \arccos m + 2\pi n, n \in Z.$

Зокрема:

3. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

4. $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in Z;$

5. $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$

III. $tgx = m, ctgx = m.$

При $m \in R$

1. $tgx = m \Leftrightarrow x = arctgm + \pi n, n \in Z;$

2. $ctgx = m \Leftrightarrow x = arcctgm + \pi n, n \in Z;$

Зокрема;

3. $tgx = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in Z;$

4. $ctgx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

і). Розв’язання найпростіших тригонометричних нерівностей

При розв’язанні тригонометричних нерівностей зручно користуватись одиничним колом або графіком відповідної функції. Нагадаємо, що на колі зростання кута здійснюється проти руху годинникової стрілки. Розв’язки нерівності знаходимо на проміжку, довжина якого дорівнює періоду функції, а тоді їх періодично продовжуємо.

1. $\sin x \ge a$ (рис.8): якщо $a < -1,$ то $x \in (-\infty; +\infty);$

якщо $-1 \le a \le 1,$ то $\arcsin a + 2\pi n \le x \le \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z;$ (38)

якщо $a > 1,$ то нерівність розв'язків не має.

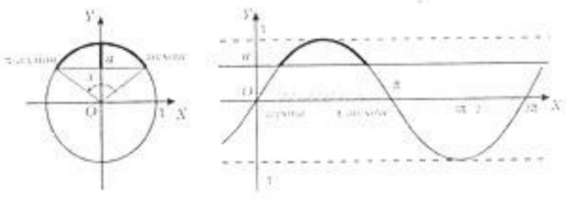


Рис.8

2. $\sin x \le a$ (рис.9): якщо $a < -1,$ то нерівність розв'язків не має;

якщо $-1 \le a \le 1,$ то $\pi - \arcsin a + 2\pi n \le x \le 2\pi + \arcsin a + 2\pi n, n \in Z;$ (39)

якщо $a > 1,$ то $x \in (-\infty; +\infty).$

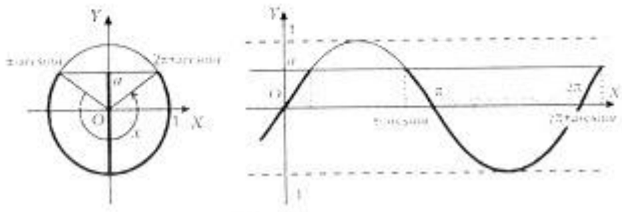


Рис.9

3. $\cos x \ge a$ (рис.10): якщо $a < -1,$ то $x \in (-\infty; +\infty);$

якщо $-1 \le a \le 1,$ то $-\arccos a + 2\pi n \le x \le \arccos a + 2\pi n, n \in Z;$ (40)

якщо $a > 1,$ то нерівність розв'язків не має.

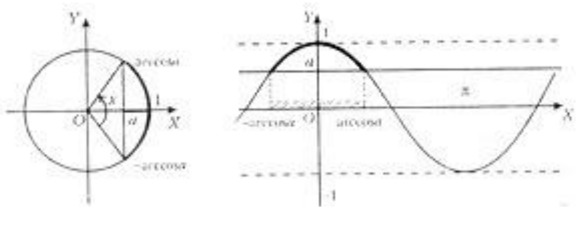


Рис.10

4. $\cos x \le a$ (рис.11): якщо $a < -1,$ то розв'язків немає;

якщо $-1 \le a \le 1,$ то $\arccos a + 2\pi n \le x \le 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in Z;$ (41)

якщо $a > 1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

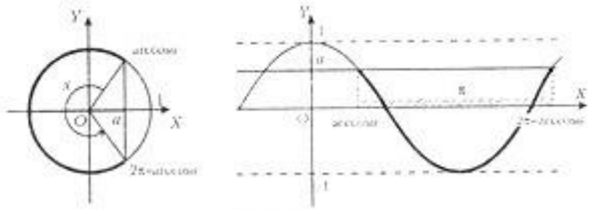


Рис.11

5. $tgx \geq a, a \in R$ (рис.12): $arctga + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$ (42)

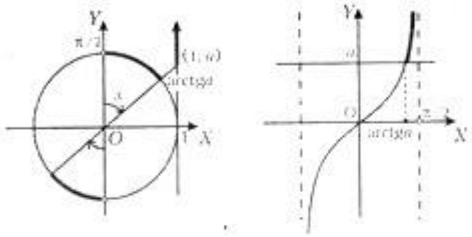


Рис.12

6. $tgx \leq a, a \in R$ (рис.13): $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq arctga + \pi n, n \in Z.$ (43)

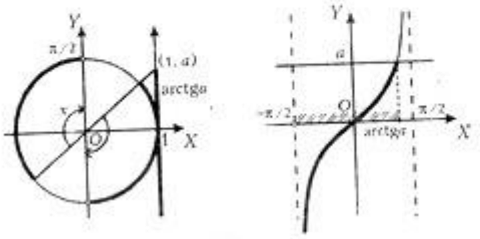


Рис.13

7. $ctgx \geq a, a \in R$ (рис.14): $\pi n < x \leq arcctga + \pi n, n \in Z.$ (44)

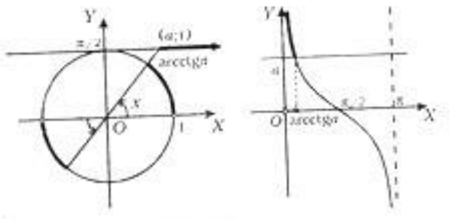


Рис.14

8. $ctgx \le a, a \in R$ (рис.15): $arcctga + \pi n \le x < \pi + \pi n, n \in Z$. (45)

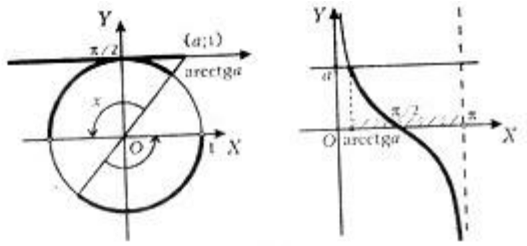


Рис.15

к).Обернені тригонометричні функції

Для тригонометричних функцій існують однозначні обернені функції, якщо кожну з них розглядати на певному проміжку, де вона монотонна.

1.Функція *y=arcsinx*.

Арксинус – функція, обернена до синуса на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

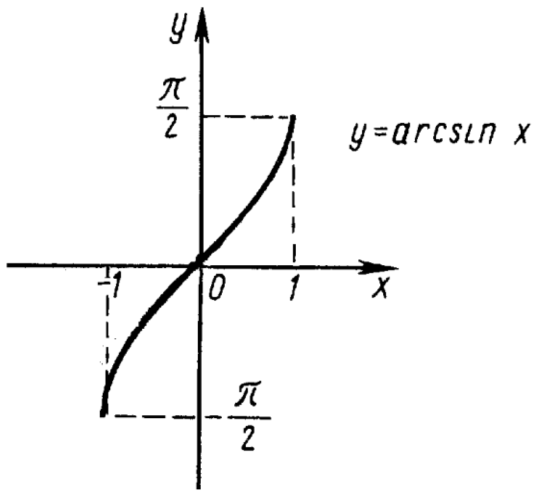
Властивості:

Область визначення $[-1:1]$;

Множина значень $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

Непарна, *arcsin(-x)= -arcsinx* (графік симетричний відносно початку координат);

Зростає,приймаючи найменше значення $-\frac{\pi}{2}$ при *x*=-1,та найбільше значення $\frac{\pi}{2}$ при *x*=1;



Arcsin0=0;

Arcsinx>0 при $x \in (0:1]$, Arcsinx<0 при $x \in [-1;0)$

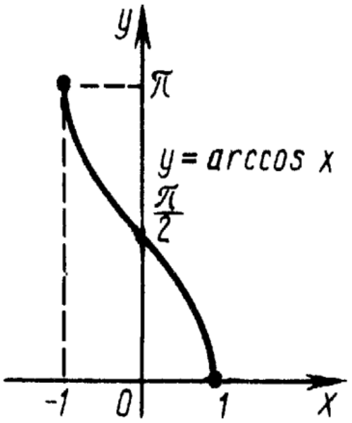
Неперервна і диференційована при всіх $x \in (-1;1)$, (Arcsinx)`= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Графік функції ***y=arcsinx.*** Дістаємо симетричним відображенням синусоїди,взятої на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, відносно прямої *y=x*

2.Функція *y=arccosx.*

Арккосинус – функція,Обернена до косинуса на проміжку $[0;\pi]$

Властивості:



Область визначення $[-1:1]$;

Множина значень $[0;\pi]$;

Ні парна,ні непарна,при чому *arccos(-x)=*

= π *-arccosx* ;

спадає,приймаючи найбільше значення π при *x*=-1,та найменше значення 0 при *x*=1;

Arccos0=$\frac{\pi}{2}$;

Arccosx>0 для всіх $x \in [-1;1)$

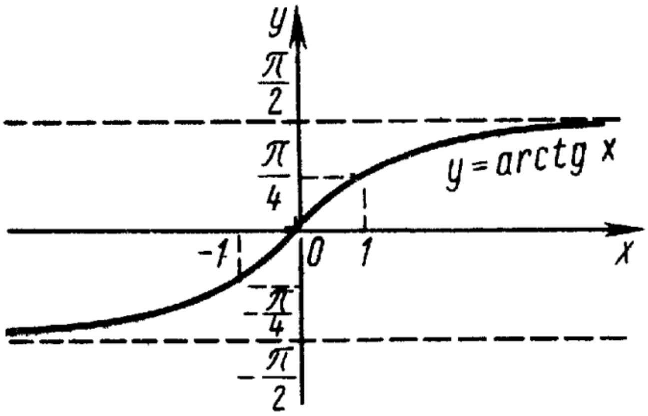
Неперервна і диференційована при всіх $x \in (-1;1)$, (Arcscosx)\`=$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Графік функції ***y=arccosx.*** Дістаємо симетричним відображенням косинусоїди,взятої на відрізку $[0;\pi]$, відносно прямої *y=x*

3.Функція *y=arctgx.*

Арктангенс – функція,обернена до тангенса на проміжку $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$;

Властивості:



Область визначення **R**;

Множина значень $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$;

непарна,при чому *arctg(-x)=*

= *-arctgx* ; (графік симетричний відносно початку координат);

Зростає на всій області визначення;

Arctg0=0;

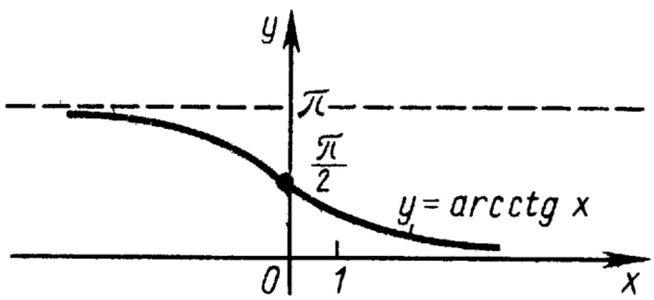
Arctgx>0 для всіх $x \in (0,+\infty)$ Arcsinx<0 при $x \in (-\infty;0)$

Неперервна і диференційована при всіх $x \in R$, (Arctgx)`= $\frac{1}{1+x^2}$

Графік функції ***y=arctgx.*** Дістаємо симетричним відображенням тангенсоїди,взятої на інтервалі $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, відносно прямої *y=x*

4.Функція *y=arcctgx.*

Арккатангенс – функція,обернена до тангенса на проміжку $(0;\pi)$;



Властивості:

Область визначення **R**;

Множина значень $(0;\pi)$;

Ні парна,ні непарна,при чому *arcctg(-x)=*

= π *-arcctgx* ;

спадає на всій області визначення;

Arcctg0= $\frac{\pi}{2}$;

Arctgx>0 для всіх $x \in R$

Неперервна і диференційована для всіх $x \in R$, (Arctgx)`= $-\frac{1}{1+x^2}$

Графік функції ***y=arcctgx.*** Дістаємо симетричним відображенням котангенсоїди,взятої на інтервалі $(0;\pi)$, відносно прямої *y=x*

12. Показникова та логарифмічна функції

а). Показникова функція та її властивості

1. Функція, задана рівняння (формулою) вигляду $y = a^x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називається показниковою функцією: $y = f(x) = a^x$, $(a > 0$ і $a \neq 1)$
2. Основні властивості показнкової функції:

а) область визначення: D(f)=R;

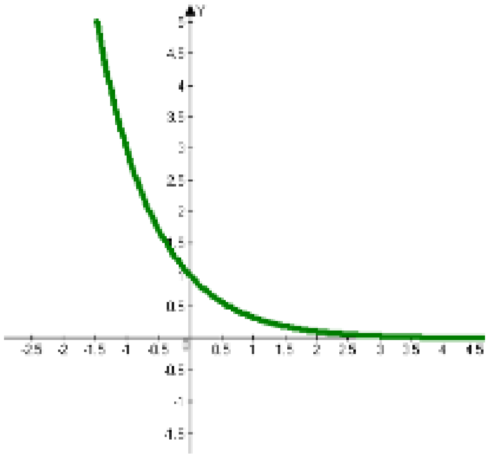
б) множина значень: E(f)=R_+

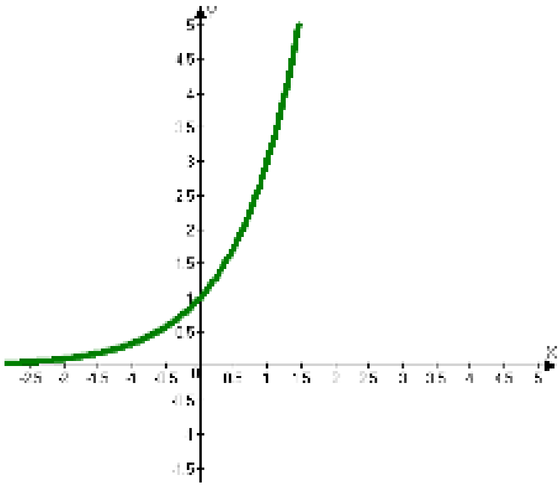
в) $f(0) = a^0 = 1$

г)

при $0 < a < 1$ функція спадна:

$$x_1 < x_2 \iff a^{x_1} > a^{x_2}$$





при $a > 1$ функція зростаюча:

$$x_1 < x_2 \iff a^{x_1} < a^{x_2}$$

б). Логарифмічна функція та її властивості

1. Функція, задана рівняння (формулою) вигляду $y = \log_a x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називається логарифмічною функцією: $y = f(x) = \log_a x$, ($a > 0$ і $a \neq 1, x > 0$)

2. Основні властивості логарифмічної функції:

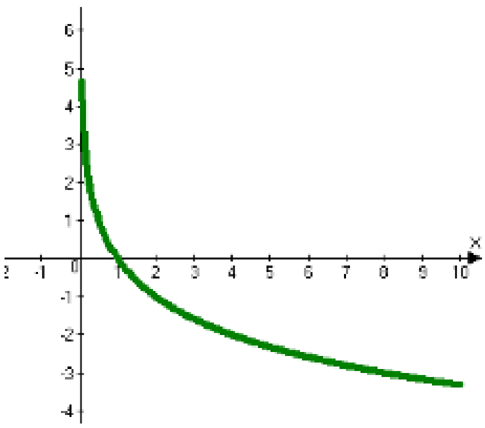
а) область визначення: D(f)= R_+;

б) множина значень: E(f)=R

в) $f(0) = \log_a 1$ =0

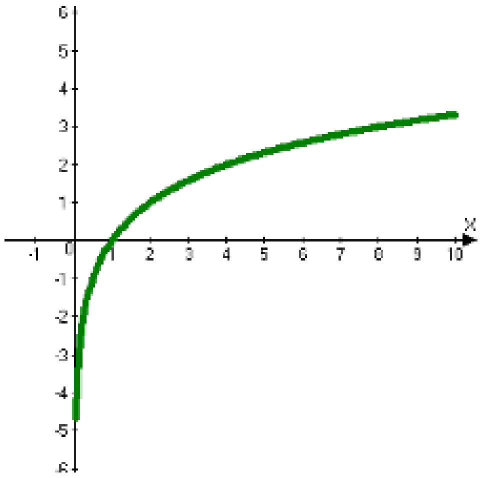
г) при $0 < a < 1$ функція спадна:

$$0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$



при $a > 1$ функція зростаюча:

$$0 < x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 < \log_a x_2$$



в). Логарифми та їх властивості

1. Логарифмом додатного числа М за основою a , де $a>0$ і $a \neq 1$, називається показник степеня, до якого потрібно піднести a, щоб дістати число М, тобто

$$\log_a \mathrm{M} = b, \qquad \text{якщо } a^b = M$$

З цього означення логарифма випливає тотожність

$$a^{\log_a M} = M, (a > 0, a \neq 1, M > 0) ,$$

яке називається основною логарифмічною тотожністю.

$$\text{зокрема,} \log_a a = 1, \qquad \log_a 1 = 0$$

2. Правила логарифмування та потенціювання алгебраїчних виразів:

а) логарифм добутку:

$$\log_a \mathrm{AB} = \log_a \mathrm{A} + \log_a \mathrm{B}$$

б) логарифм частки:

$$\log_a \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \log_a \mathrm{A} - \log_a \mathrm{B}$$

в) логарифм степеня:

$$\log_a \mathrm{A}^n = n \log_a A$$

г) логарифм кореня:

$$\log_a \sqrt[k]{A} = \frac{1}{k}\log_a A, \quad (A > 0, \qquad k \ni N, k \geq 2)$$

Застосовані в зворотньому напрямку ці формули називаються формулами потенціювання.

д) розширення формул логарифмування на множину від'ємних чисел:

$$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |x|, (xy > 0)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|, \qquad (xy > 0)$$

$$\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|, \qquad (|x| > 0 < n \in N)$$

$$\log_a \sqrt[2n]{x^{2k}} = \frac{k}{n}\log_a |x|, \quad (n, k \ni N)$$

3. Формула переходу від однієї основи до іншої:

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}, \quad (a > 0, a \neq 1, M > 0, b > 0, b \neq 1\ )$$

13. Арифметична та геометрична прогресії

13.1 . Арифметична прогресія

а) Поняття арифметичної прогресії. Послідовність $\{a_n\}$ називається арифметичною прогресією, якщо кожний член прогресії, починаючи з другого, дорівнює попередньому, складеним з одним і тим самим числом, яке називається різницею прогресії:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Позначають арифметичну прогресію так:

$$a_1, a_2, a_3, .\ .\ ., a_n, a_{n+1}, \ldots \quad \text{де,}$$

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_n - a_{n-1} = \cdots = d, n \in N$$

б) Загальний (n-й) член арифметичної прогресії:

$a_n = a_1 + d(n-1)$

в) Властивості членів арифметичної прогресії:

1. $a_n = \frac{a_{n+k}+a_{n-k}}{2}$ $(n, k \in N, k < n)$
2. $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \cdots = a_n + a_1 = 2a_1 + d(n-1)$

г) Формули суми n перших членів арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\, n\,, \quad S_n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2}\, n$$

13.2. Геометрична прогресія

а) Поняття геометричної прогресії. Послідовність $\{b_n\}$ називається геометричної прогресією, якщо перший член прогресії відмінний від одиниці, а кожний член прогресії, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне і те саме число, яке називається знаменником прогресії:

$$b_{n+1} = b_n * q, n \in N, b_1 \neq 0, q \neq 0$$

Позначають геометричну прогресію так:

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots,$$

де $b_2 * b_1 = b_3 * b_2 = b_4 * b_3 = \cdots = b_n * b_{n-1} = \cdots = q, (n \in N)$

б) Загальний (n-й) член геометричної прогресії:

$$b_n = b_1 * q^{n-1}$$

в) Властивості членів геометричної прогресії:

1) $b_n^2 = b_{n-k} * b_{n+k}$, $(n, k \in N, k < n)$

2) $b_1 * b_n = b_2 * b_{n-1} = \cdots = b_n * b_1 = b_1 * q^{n-1}$

г) Формули суми n перших членів геометричної прогресії :

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{2}\ , S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{2}, (q \neq 1)$$

д) Добуток nперших членів геометричної прогресії:

$$|P_n| = \sqrt{|b_1 * b|^n}, |P_n| = \sqrt{|b_1^2 * q^{n-1}|^n}$$

де $P_n = b_1 * b_2 * ... * b_n$

е) Сума членів нескінченної геометричної прогресії:

$$S = \frac{b_1}{1-q}, (|q| < 1)$$

За означенням:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}, (|q| < 1)$$

14. Похідна та її застосування

14.1. Поняття похідної

Похідною неперервної функції $y = f(x)$ в точці її визначення x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Якщо ця границя існує, то функція $y = f(x)$ в точці x_0 називається **диференційованою**.

Необхідна умова диференційованості функції $y = f(x)$ в точці x_0 є її **непевність в цій точці**.

14.2. Геометричний зміст похідної

Похідна $f'(x_0)$ дорівнює **кутовому коефіцієнту** дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці диференціювання $(x_0, f(x_0))$: $k = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$, де α – кут нахилу дотичної до графіка функції, проведеної в точці дотику.

14.3. Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

14.4. Механічний зміст похідної

Якщо $S = f(t)$ – рівняння прямолінійного руху матеріальної точки (твердого тіла), то швидкість цього руху в момент часу t дорівнює похідній від шляху за часом в даний момент часу, тобто

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t) = S'(t).$$

14.5. Похідні від деяких основних елементарних функцій

а) $C' = 0$, де С – стала;

б) $x' = 1$, де x – аргумент;

в) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}, \alpha \in R$;

г) $(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0;\ \ (e^x)' = e^x$;

д) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1;\ (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

е) $(\sin x)' = \cos x$; є) $(\cos x)' = -\sin x$;

ж) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; з) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

14.6. Основні правила диференціювання

а) $(f_1(x) \pm f_2(x))' = f_1'(x) \pm f_2'(x)$;

б) $(f_1(x) \cdot f_2(x))' = f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x)$,

(зокрема якщо $k \in R,\ \ k \neq 0$, то $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$);

в) $\left(\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)=\dfrac{f_1'(x)\cdot f_2(x)-f_1(x)\cdot f_2'(x)}{f_2^2(x)}, \quad (f_2(x)\neq 0)$;

г) $(f(\varphi))'=f'(u)\cdot\varphi'(x), \quad u=\varphi(x)$.

14.7. Критерій сталості функції

Для того, щоб функція $y=f(x)$ була сталою на проміжку $(a;b)$, необхідно та достатньо, щоб в кожній точці цього проміжку похідна функції $f'(x)\equiv 0$.

14.8. Монотонність функції

Якщо $f'(x)$ в кожній точці проміжку $(a;b)$ додатна, то функція $y=f(x)$ на цьому проміжку зростає.

Якщо похідна $f'(x)$ в кожній точці проміжку $(a;b)$ від'ємна, то функція $y=f(x)$ на цьому проміжку спадає.

14.9. Екстремуми функції $y=f(x)$

а) Точка $x_0\in D(f)$ називається точкою **максимуму (мінімуму)** функції $y=f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, в якому для всіх x виконується нерівність

$$f(x)<f(x_0) \quad (f(x)>f(x_0)).$$

Значення функції в точці x_0 $f(x_0)$ називається **максимумом (мінімумом)** даної функції.

б) **Необхідна умова екстремуму функції (теорема Ферма)**

Якщо неперервна функція $y=f(x)$ в точці x_0 має екстремум, то її похідна $f'(x)$ в цій точці дорівнює нулю або не існує.

Точки, в яких похідна $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує називаються **критичними точками** функції $y=f(x)$. Зокрема, якщо $f'(x)=0$, то точка x_0 називається **стаціонарною** точкою функції $y=f(x)$.

в) **Достатня умова екстремуму функції**

Якщо при переході через критичну точку x_0 функції $y = f(x)$ похідна цієї функції змінює знак з “+” на “-”, то функція в цій точці має **максимум**; якщо похідна змінює знак з “-” на “+”, то функція в цій точці має **мінімум**. Якщо похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 не змінює знака, то в точці x_0 функція екстремуму не має.

14.10. **Найбільше та найменше значення неперервної функції на відрізку**

Для того, щоб знайти найменше m на найбільше M значення неперервної функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$, треба знайти всі критичні точки цієї функції, які належать відрізку, обчислити значення даної функції на кінцях відрізка та в критичних точках. Після чого вибрати з цих значень найменше m та найбільше M .

15. Інтеграл

15.1. Функція $F(x)$ називається **первісною** функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо $F(x)$ диференційована на $(a;b)$ і справджується рівність:

$$F'(x) = f(x),\ x \in (a;b).$$

15.2. Невизначеним інтегралом функції $f(x)$ називається сукупність усіх первісних $F(x) + C$ заданої функції.

Аналітичний запис: $\int f(x)dx = F(x) + C$,

де C – стала інтегрування.

15.3. Таблиця основних невизначених інтегралів $(p \neq -1, a > 0, a \neq 1, k \neq 0)$

1. $\int x^p dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$;

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$; $\int \cos kx dx = \dfrac{1}{k}\sin kx + C$;

4. $\int e^x dx = e^x + C$; 7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

$\int e^{kx} dx = \dfrac{1}{k} e^{kx} + C$; 8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

$\int \sin kx dx = -\dfrac{1}{k}\cos kx + C$;

15.4. Визначений інтеграл

Визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ при $\lambda = \max\limits_{i} \Delta x_i \to 0$, якщо остання існує і не залежить ні від способу розбиття відрізка на частини, ні від вибору точок $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$.

Математичний запис:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

де $\lambda = \max\limits_{i} \Delta x_i$.

15.5. Обчислення визначеного інтеграла

Формула Ньютона-Лейбніца:

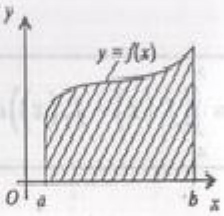
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ або } \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b ,$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$.

15.6. Обчислення площ плоских фігур (див. малюнок 2.6).

2.6. Обчислення площ плоских фігур

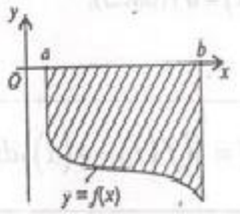
а) Площа криволінійної трапеції, зображеної на рис. 1 $\left(f\left(x\right)\geq 0\right)$:



$$\boxed{s=\int_a^b f\left(x\right)dx}$$

Рис.1

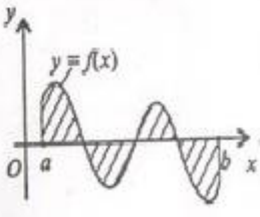
б) Площа криволінійної трапеції, зображеної на рис. 2 $\left(f\left(x\right)\leq 0\right)$:



$$\boxed{S=-\int_a^b f\left(x\right)dx}$$

Рис.2

в) Площа фігури, зображеної на рис.3:



$$\boxed{S=\int_a^b \left|f\left(x\right)\right|dx}$$

Рис.3

г) Площа фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$ (рис.4):

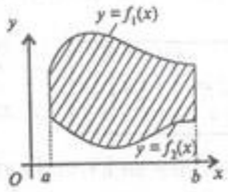


Рис.4

$$\boxed{S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx}$$

д) Площа фігури обмеженої кривими $y = f(x)$ і $y = g(x)$ (a, b – корені рівняння $f(x) - g(x) = 0$) (рис.5):

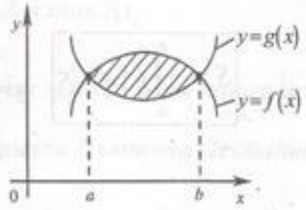


Рис.5

$$\boxed{S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx}$$

Розділ 2. Розв’язання прикладів

<u>*Приклад1*:</u> Обчислити $\cos(arctg\frac{1}{5} - arcsin\frac{1}{3})$. Позначимо $\alpha = arctg\frac{1}{5}$,

$\beta = arctg\frac{1}{5}$. Зауважимо, що $\alpha\epsilon(0;\frac{\pi}{2})$, $\beta\epsilon(0;\frac{\pi}{2})$. Таким чином, нам треба обчислити вираз $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. За означенням $\sin\beta = \frac{1}{3}$. З формули $(\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2 =$1 випливає, що

$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. За означенням $ctg\alpha = \frac{1}{5}$. З формули

$1 + (ctg\,\alpha)^2 = \frac{1}{(\sin\alpha)^2}$ випливає, що $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{25}}} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$,

$\cos\alpha = \sqrt{1 - (\sin\alpha)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{26}} = \sqrt{\frac{1}{26}}$. Отже $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{\sqrt{26}}\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{5}{\sqrt{26}}\frac{1}{3}$

Відповідь: $\frac{2\sqrt{2}+5}{3\sqrt{26}}$

Приклад2: В яких межах змінюється величина А, якщо |у+3|<1, $x^2 < 4$,

$A = |x|y$?

Нерівність |у+3|<1 рівносильна подвійній нерівності -1<у+3<1, або -4<у<-2

Нерівність $x^2 < 4$ еквівалентна нерівності |х|<2

Запишемо , в яких межах змінюються величини |х| та (-у):

$\begin{cases} 0 \le |x| < 2 \\ 2 < -y < 4 \end{cases}$ $\Rightarrow 0 \le -|x|y < 8$, тому що усі частини нерівностей - невід'ємні.

Таким чином -8<у|х|≤ 0

Відповідь: -8<А≤ 0

Приклад3: Розкласти на множники многочлен $x^3 - 2x^2 - 11x + 12$

Легко побачити, що $x_1 = 1$ є коренем цього многочлена. Розділимо наш многочлен на двочлен (х-1):

$$\frac{x^3 - x^2 - 11x + 12}{x - 1} = x^2 - x - 12$$

Таким чином $x^3 - 2x^2 - 11x + 12$=(х-1)($x^2 - x - 12$). Корені многочлена $x^2 - x - 12$ є числа -3, 4 . Таким чином $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$

Відповідь: (х-1)(х+3)(х-4)

Приклад4: Знайти $\log_{30} 6$, якщо $lg5 = a, lg3 = b$.

За формулою $\log_m n = \frac{lgn}{lgm}$ маємо $\log_{30} 6 = \frac{lg6}{lg30}$. Але lg6=lg3+lg2=b+lg$\frac{10}{5}$=b+lg10-lg5=b+1-a, lg30=lg10+lg3=1+b

Таким чином $\frac{lg6}{lg30} = \frac{b+1-a}{1+b}$

Відповідь: $\frac{lg6}{lg30} = \frac{b+1-a}{1+b}$

<u>Приклад5</u>: Обчислити arcos(sin 13)

Оскільки $4\,\pi < 13 < 4.5\pi$, то кут 13 радіан знаходиться в першій чверті. Таким чином, за формулою зведення sin13=cos($4.5\,\pi - 13$)

Отже, arcos(sin13)=arcos(cos($4.5\,\pi - 13$))=$4.5\,\pi - 13$, тому що

0<$4.5\,\pi - 13 < 0.5\pi$.

Відповідь: 4,5 $\pi - 13$

<u>Приклад6</u>: Знайти множину значень E(f) функції f(x)=3sin(2cosx)

Оскільки -1$\leq cosx \leq 1,$то $-2 \leq 2cosx \leq 2$. Проміжок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$є підмножиною множини [-2;2]. Але на проміжку $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ функція $\sin t$ приймає усі значення з проміжку [-1;1].Отже -1$\leq \sin(2cosx) \leq 1$

Таким чином -3$\leq 3\sin(2cosx) \leq 3$

Відповідь: E(f)=[-3;3]

<u>Приклад7</u>: Скільки розв'язків має рівняння |cos x| +ctg$710°$ $\log_3 \sin 162° = 0$?

Оскільки кут $710°$ знаходиться в четвертій чверті, то ctg$710°$<0. Оскільки 0<sin $162° < 1$, то $\log_3 \sin 162° < 0$. Отже ctg $710°$ $\log_3 \sin 162° > 0$. Оскільки |cos x|≥ 0, то права частина рівняння приймає тільки додатні значення. Таким чином, розв'язків не має.

Відповідь: жодного

Прикла8: Розв'язати нерівність: $\sqrt{x^2-7x+6}\log_{\cos x}(|2x+6|+2)<0$

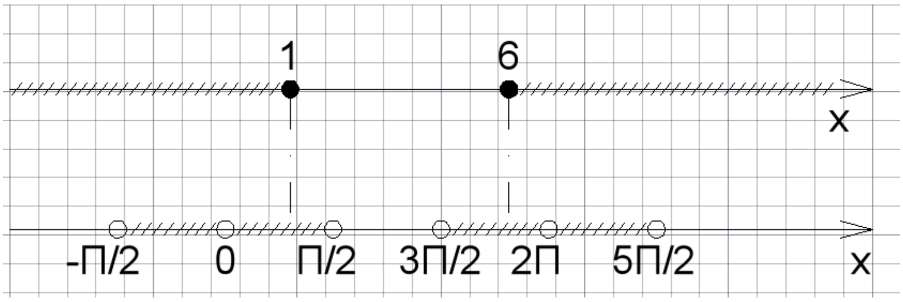
Оскільки |2x+6|+2≥ 2, то $\log_{\cos x}(|2x+6|+2)<0$ для всіх допустимих x. Для всіх допустимих x $\sqrt{x^2-7x+6}\geq 0$. Отже для всіх допустимих x права частина нашої нерівності приймає тільки недодатні значення. Знайдемо область визначення нерівності і виключимо ті значення x, для яких

$x^2-7x+6=0$. Останнє рівняння має корені $x_1=1,\ x_2=6$

Розв'яжемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2-7x+6\geq 0 \\ 0<\cos x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\,\epsilon\,(-\infty;1]\cup[6;+\infty) \\ x\,\epsilon\,(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;2\pi n)\cup(2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n) \end{cases}$$

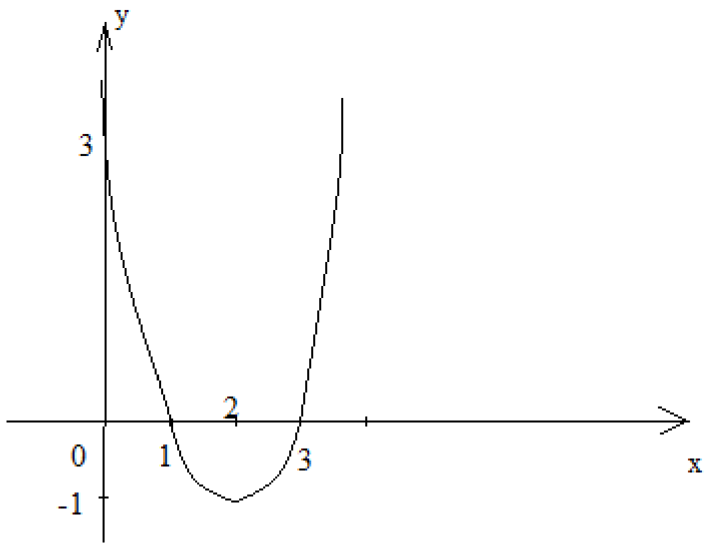
Знайдемо перетин цих множин графічно:



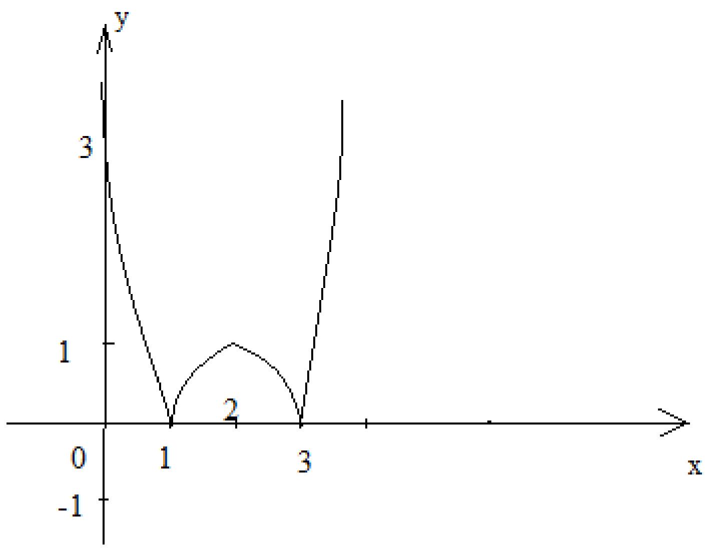
Відповідь: $x\,\epsilon\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\cup(0;1)\cup(6;2\pi)\cup\left(2\pi;\frac{5\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;2\pi n\right)\cup\left(2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),n\,\epsilon\,Z,n\neq 0{,}1$

Приклад9: При яких значеннях параметра а рівняння $|x^2-4|x|+3|=a+1$ має три розв'язки.

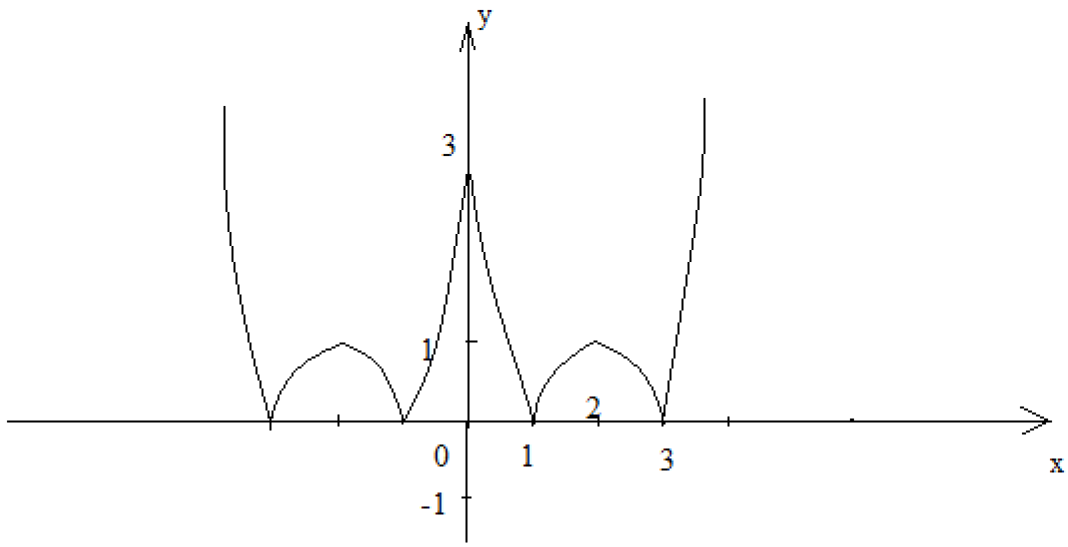
Намалюємо графік функції $y=x^2-4x+3$



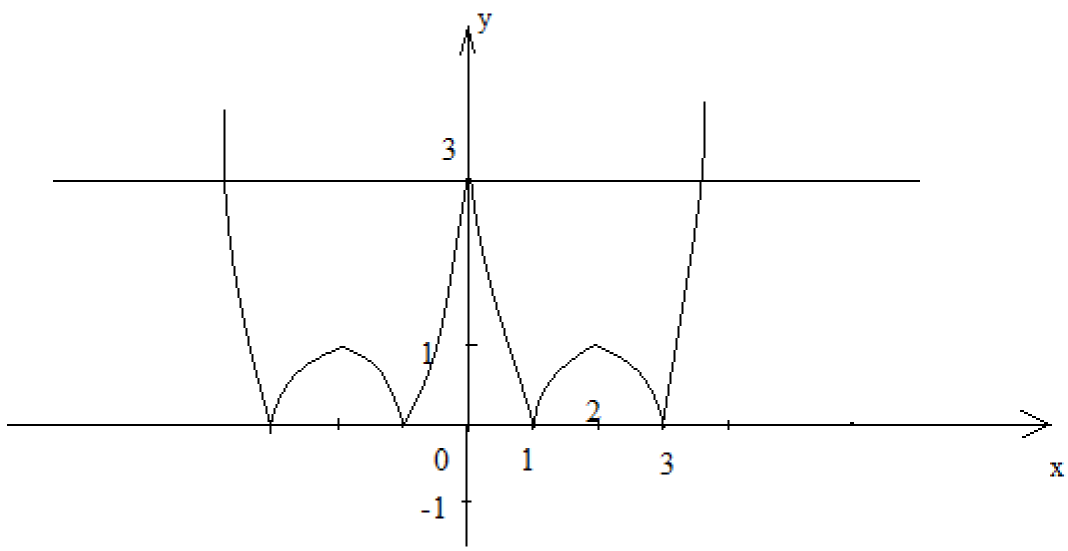
Відобразимо нижню частину графіка симетрично відносно осі X, одержимо графік функції $y = |x^2 - 4x + 3|$



Оскільки $x^2 = |x|^2$, то $|x^2 - 4|x| + 3| = \big||x^2| - 4|x| + 3\big|$, тобто графік функції y=$|x^2 - 4|x| + 3|$ одержується з попереднього відображення лівої частини останнього графіка і симетричним відображенням правої частини відносно осі Oy:



Оскільки графік функції y=a+1 є горизонтальна пряма, то як випливає з малюнка



Функції $y = |x^2 - 4|x| + 3|$ та y=a+1 мають три спільні точки (розв'язки нашого рівняння) тільки при умові a+1=3.

Відповідь: a=2

Приклад 10: Спростити вираз $5a\sqrt{\frac{b^3}{|a|}} + 3\sqrt{-ab^3}$.

Перший додаток існує, коли а $\neq 0, b \geq 0$. Таким чином, щоб існував другий додаток, необхідно, щоб виконувалась нерівність $a < 0$. Після цих міркувань ми можемо внести в першому доданку множник під знак кореня:

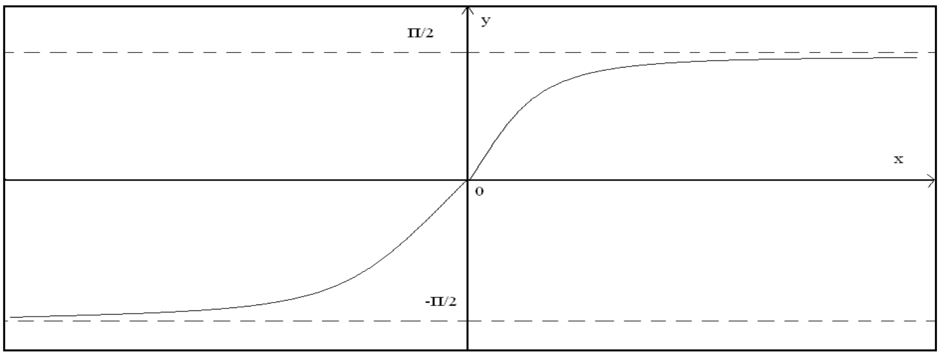
$$5a\sqrt{\frac{b^3}{|a|}} + 3\sqrt{-ab^3} = -5\sqrt{\frac{b^3}{|a|}a^2} + 3\sqrt{-ab^3} = -5\sqrt{b^3(-a)} + 3\sqrt{-ab^3} = -2\sqrt{-ab^3}$$, оскільки

$$|a| = -a.$$

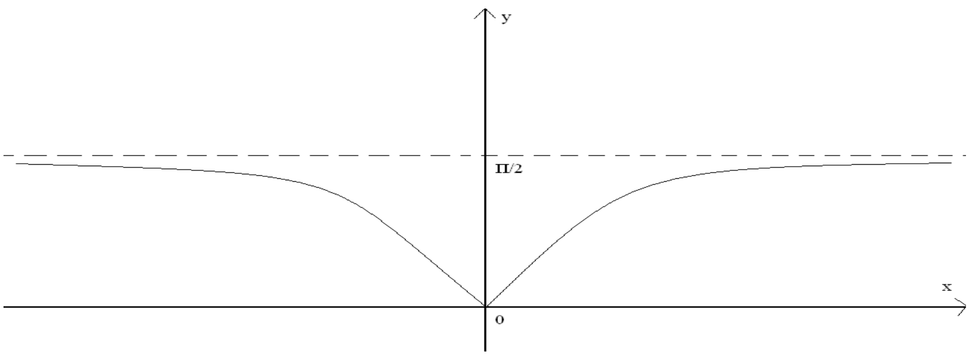
Відповідь: $-2\sqrt{-ab^3}$.

Приклад 11: Намалювати графік функції $|y| = \frac{\pi}{4} - |arctgx|$.

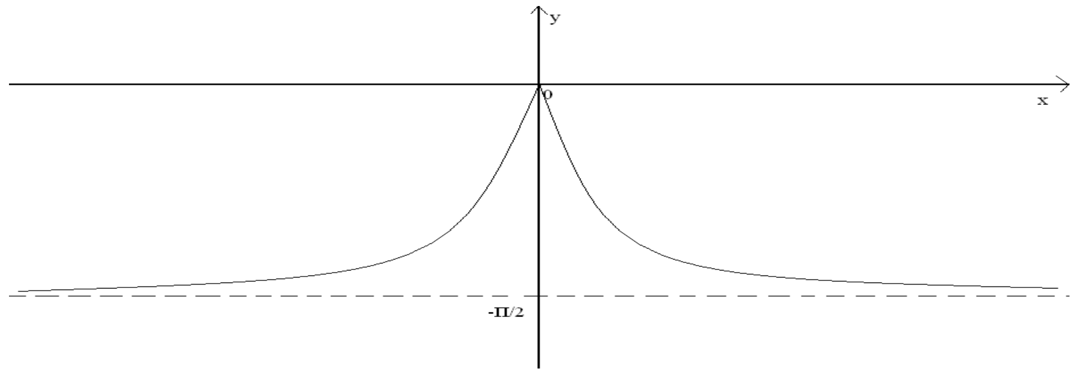
Намалюємо графік функції *y=arctgx*.



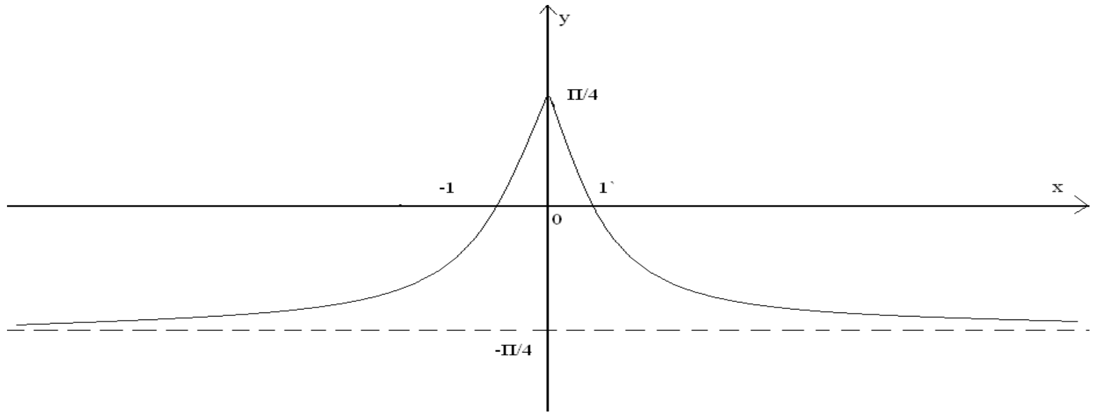
Відобразимо нижню частину графіка симетрично відносно осі Ох, одержимо графік функції $y = |arctgx|$:



Відобразимо графік симетрично відносно осі Ох, одержимо графік функції $y = -|arctgx|$:

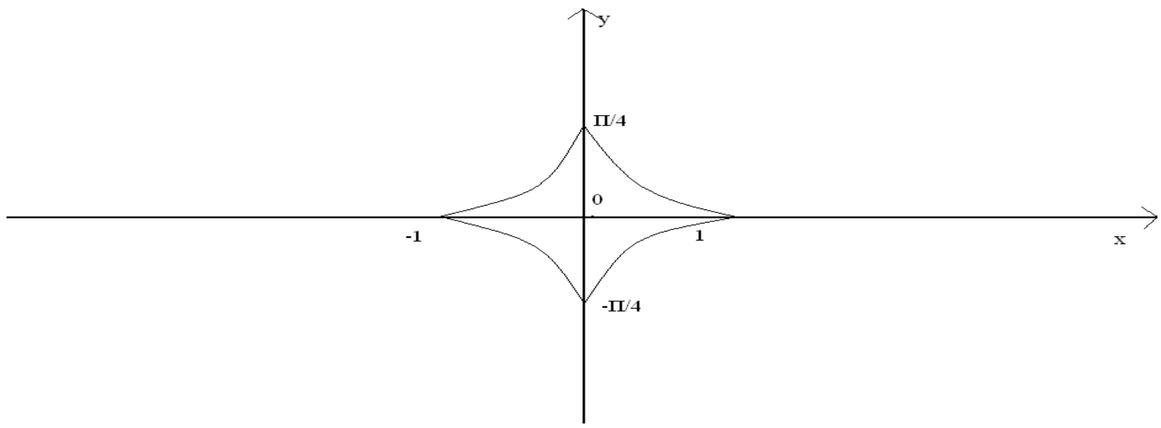


Зробимо паралельний переніс графіка вздовж осі Оу вгору на $\frac{\pi}{4}$, одержимо графік функції $y = \frac{\pi}{4} - |arctgx|$:



Якщо ми відкинемо нижню частину графіка, верхню частино відобразимо симетрично відносно осі Ох, одержимо графік нашої функції.

Відповідь:

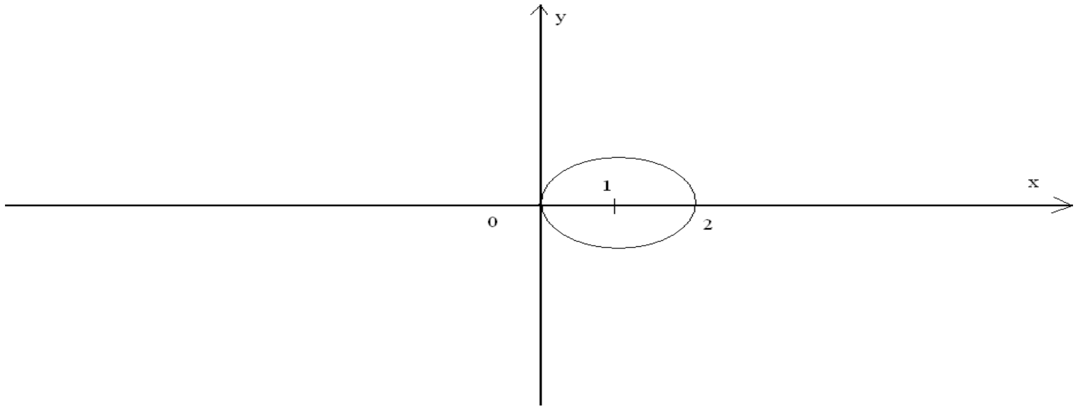


<u>Приклад 12</u>: Намалювати множину А\В, де А = $\{(x;y)|x^2+y^2<2x\}$,

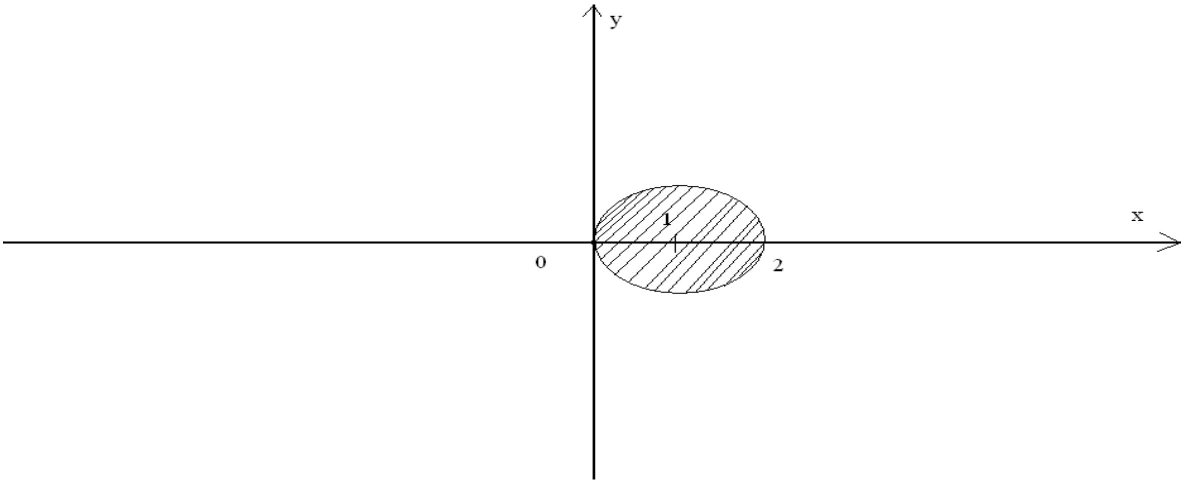
В = $\{(x;y)||y|>|x|\}$.

Намалюємо криву $x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 - 2x = 0$. Додамо до лівої та правої частин одиницю, одержимо $(x - 2x + 1) + y^2 = 1, (x - 1)^2 + y^2 = 1$

Одержимо рівняння кола



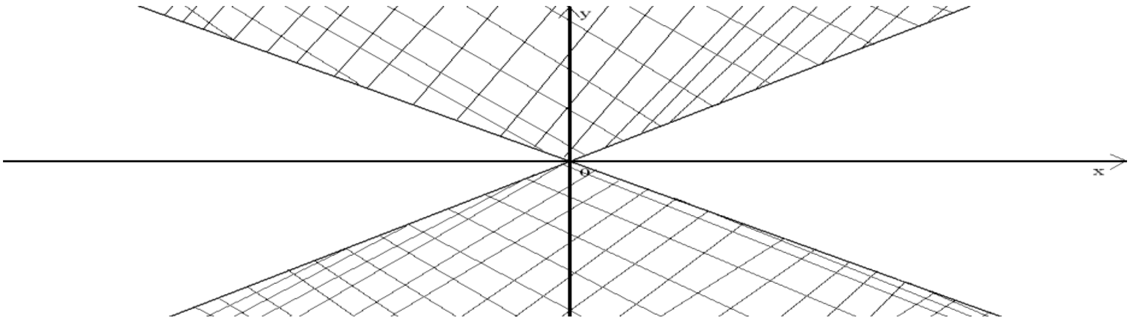
Неважко пересвідчитись, що точки площини, координати яких задовольняють нерівності $(x - 1)^2 + y^2 < 1$ утворюють заштриховану множину



Щоб намалювати множину точок, які задовольняють нерівність $|y| > |x|$ розглянемо чотири випадки:

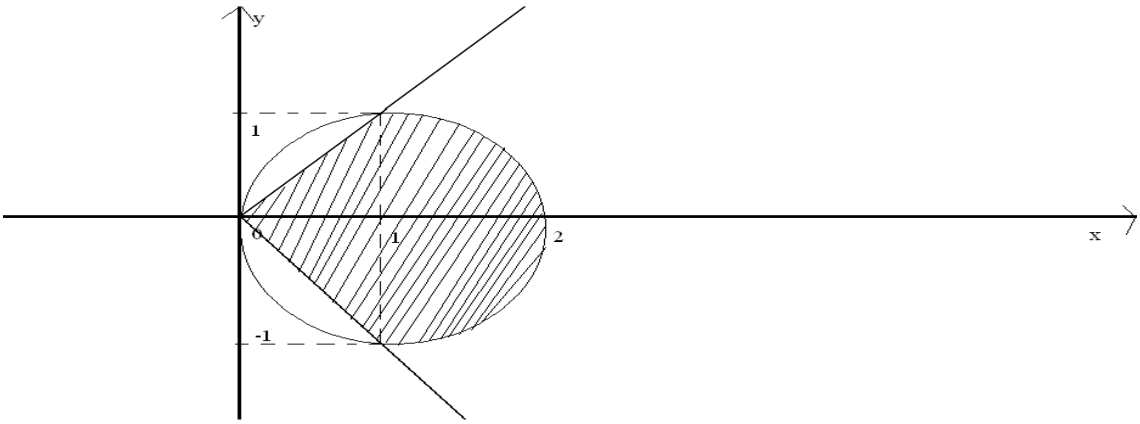
1) При x>0, y>0 маємо y>x,
2) При x<0, y>0 маємо y>-x,
3) При x<0, y<0 маємо y<x,
4) При x>0, y<0 маємо y<-x.

Остаточно отримаємо множину, зображену на малюнку



Отримані заштриховані множини є наші множини A та B. Таким чином, множина A\B має вигляд:

Відповідь:



<u>*Приклад 13*</u>: Довести нерівність $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$, якщо a>0, b>0, c>0.

Оскільки $\frac{1}{2}(x+y)\geq\sqrt{xy}$ при $x\geq 0, y\geq 0$, то мають місце нерівності:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right)\geq c,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\geq a,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\right)\geq b.$$

Додамо ці нерівності, одержимо нерівність, яку треба довести.

Відповідь: нерівність доведено.

Розділ 3. Завдання до типового розрахунку

Варіант №1

1.Обчислити:

$$\sin\left(arctg\frac{1}{3}-arccos\frac{1}{4}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина А, якщо $|x-3|<2$, $y^2>25$, $A=\left|\frac{x}{y}\right|$?

3. Розкласти на множники многочлен: $4x^3+6x-10$.

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c*, якщо $a=\log_{15}30$, $b=\lg 3$, $c=\lg 5$.

5. Обчислити: $\arcsin(\sin 3)$.

6. Знайти множину значень *E(f)* функції $f(x)=3\sin(2x)$.

7. Скільки розв'язків має рівняння $\log_2|x|=1-x^2$?

8. Розв'язати нерівність: [illegible].

9. Знайти всі значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння $|x^2+6x+5|=a+1$ має два розв'язки.

10.Спростити вираз: $\sqrt[8]{\frac{b^{16}}{-a^7}}+\frac{\sqrt[3]{|a|b^6}}{a}$.

11.Намалювати графік: $y=\operatorname{arctg}|x+1|$

12.Намалювати Множину

B\A

A={ (x;y)| $x^2+y^2\le 1$ }

B={ (x;y)| $x^2+y^2\le 2(x-y)$ }

13.Довести нерівність:

$$a+b+c\le\sqrt{3},$$

якщо $a^2+b^2+c^2=1, a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0.$

Варіант №2

1. Обчислити:

$$ctg\left(arcsin\frac{1}{3}-arccos\frac{1}{4}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина A, якщо $|x+3|<2$, $y^2<25$, $A=\left|\frac{y}{x}\right|$?

3. Розкласти на множники многочлен: $x^3+6x-20$.

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c*, якщо $a=\log_{18}30$, $b=\lg 2$, $c=\lg 3$.

5. Обчислити: $\arccos(3)$.

6. Знайти множину значень *E(f)* функції $f(x)=4\sin 3x$ [illegible].

7. Скільки розв’язків має рівняння $x^2+1=\log_{0,5}$ [illegible]?

8. Розв’язати нерівність: $\sqrt{2x}$ [illegible].

9. Знайти всі значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння $x^2-2|x|+2=a$ має два розв’язки.

10.Спростити вираз: $7\sqrt[4]{|a|b^3}+5a\sqrt[4]{\frac{b^3}{a^3}}$.

11. Намалювати графік: $y=|\arcsin(1-x)|$

12. Намалювати Множину

A∆B

A={ (x;y)| $x^2+y^2\leq 2(x+y)$ }

B={ (x;y)| $x^2+y^2\leq 1$ }

13. Довести нерівність

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9,$$

якщо $\begin{cases} x+y=1 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$

Варіант №3

1. Обчислити:

$$\cos\left(arctg\frac{1}{3} - arctg\frac{1}{4}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина А, якщо $|x-3|<2$, $x^2>4$, $A=\frac{2y}{|x|}$?

3. Розкласти на множники многочлен: x^3+3x^2+9x-1.

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c*, якщо $a=\log_{14}40$, $b=\lg 2$, $c=\lg 7$.

5. Обчислити: $\arcsin(\sin 6)$.

6. Знайти множину значень *E(f)* функції $f(x)=3^{x+|x|}$.

7. Скільки розв'язків має рівняння $2^{-x}=arctg\,x$?

8. Розв'язати нерівність: $\sqrt{1-2x-x^2}\,(tg\,x-1)\geq 0$.

9. Знайти всі значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння $x^2-7|x|+10=a$ має два розв'язки.

10. Спростити вираз: $\sqrt[4]{\frac{y^2}{|x|}}+\frac{5\sqrt[4]{x^3y^2}}{x}$.

11. Намалювати графік: $y=\arcsin(2|x|)$

12. Намалювати Множину

A\B

$A=\{ (x;y)|\ x^2+y^2\leq -2x \}$

$B=\{ (x;y)|\ x^2+y^2\leq -2y \}$

13. Довести нерівність

$$5x^2-6xy+5y^2 \geq 0\,;\ x,y \in R.$$

Варіант №4

1. Обчислити:

$$\sin\left(arccos\frac{1}{3} - arccos\frac{1}{5}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина А, якщо $|y+3|<2$, $x^2<4$, $A=\left|\frac{x}{3y}\right|$?

3. Розкласти на множники многочлен: $10-6x-4x^3$.

4. Виразити число a через числа b та c, якщо $a=\log_{30}45$, $b=\lg 3$, $c=\lg 5$.

5. Обчислити: $\arccos(\cos 10)$.

6. Знайти множину значень *E(f)* функції $f(x)=3\cos 2x-4\sin 2x+1$.

7. Скільки розв'язків має рівняння $x^2+tg\left(3\sin\frac{7\pi}{8}\right)x+4=0$?

8. Розв'язати нерівність: $\sqrt{5x-4-x^2}(3\sin x-1)\geq 0$.

9. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $|x+1|+|x-1|=a$ має два розв'язки.

10. Спростити вираз: $6\sqrt[4]{x^3y^2}-x\sqrt[4]{\frac{y^2}{|x|}}$.

11. Намалювати графік: $y=|\mathrm{arctg}|x||$

12. Намалювати Множину

$A\cap B$

$A=\{(x;y)|\ x^2+y^2\leq 2x\}$

$B=\{(x;y)|\ x^2+y^2\leq 2y\}$

13. Довести нерівність

$$\sqrt{1+x}\leq 1+\frac{x}{2};\ \ x\geq -1.$$

Варіант №5

1. Обчислити:

$$tg\left(arcsin\frac{5}{9}+arccos\frac{4}{7}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина А, якщо $|x+1|>3$, $y^2<9$, $A=\left|\frac{y}{x}\right|$?

3. Розкласти на множники многочлен: x^3+3x^2+3x+2.

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c*, якщо $a=\log_{63}7($, $b=\lg 3$, $c=\lg 7$.

5. Обчислити: $\arcsin(\ldots)$.

6. Знайти множину значень *E(f)* функції $f(x)=\sqrt{1-\log_3(\ldots)}$.

7. Скільки розв'язків має рівняння $\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right| = x^2-6x+1$?

8. Розв'язати нерівність: $\sqrt{3-5x-2x^2}\,(2\cos x-\sqrt{3})\ge 0$.

9. Знайти всі значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння $\left|x^2-6|x|+8\right|=a+1$ має два розв'язки.

10. Спростити вираз: $3\sqrt[8]{\frac{b^4}{|a|^7}}+5\frac{\sqrt[8]{-ab^4}}{a}$.

11. Намалювати графік: $y=-3^{|x-1|}$

12. Намалювати Множину

$A\Delta B$

$A=\{(x;y)|\ x^2+y^2\le 1\}$

$B=\{(x;y)|\ x^2+y^2\le 2x\}$

13. Довести нерівність

$$x^6-x^5+x^4+x^2-x+1>0;\quad x\epsilon R.$$

Варіант №6

1. Обчислити:

$$tg\left(arcsin\frac{1}{3}-arccos\frac{1}{4}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина А, якщо $|x-3|>4$, $y^2<4$, $A=\left|\frac{2y}{x}\right|$?

3. Розкласти на множники многочлен: x^3-2x-4.

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c*, якщо $a=\log_2 7($, $b=\lg 5$, $c=\lg 7$.

5. Обчислити: $\arccos(\ldots)$.

6. Знайти множину значень *E(f)* функції $f(x)=3^{3\sin x-4\cos x}$.

7. Скільки розв'язків має рівняння [illegible]?

8. Розв'язати нерівність: $\sqrt{4-x^2}\cdot(ctg$ [illegible]$)$.

9. Знайти всі значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння $|x-8|x|+7|=a+2$ має два розв'язки.

10. Спростити вираз: $4a\sqrt[6]{\frac{b^2}{|a|^5}}+\sqrt[6]{-ab^2}$.

11. Намалювати графік: $y=|arcctg(|x|-1)|$ [illegible]

12. Намалювати Множину

A∩B

A={ (x;y)| $x^2+y^2 \le 1$ }

B={ (x;y)| $x^2+y^2 \le 2y$ }

13. Довести нерівність

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \ge \sqrt{ab}+\sqrt{bc}$$

$$a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0, d \ge 0.$$

Варіант №7

1. Обчислити:

$$\sin\left(arctg\frac{1}{2}-arctg\frac{1}{3}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина A, якщо [illegible]?

3. Розкласти на множники многочлен x^3+3x^2+x-5

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c*, якщо [illegible]

5. Обчислити $\arcsin($[illegible]$)$

6. Знайти множину значень $E(f)$ функції [illegible]

7. Скільки розв'язків має рівняння $\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right| = x^2 - 2x + 2$?

8. Розв'язати нерівність $\sqrt{\sin 2x}\,(x^2-3x+2) \geq 0$

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a,* при кожному з яких рівняння має два розв'язки $|x^2-3x| = a+1$

10. Спростити вираз: $8\sqrt[4]{\frac{y^2}{x^3}} + \frac{2\sqrt[4]{|x|y^2}}{x}$.

11. Намалювати графік: $|y| = x^2 + 2|x| - 3$

12. Намалювати Множину

A\B

A={ (x;y)| $x^2+y^2 \leq 2$ }

B={ (x;y)| |x+y|+|x-y|≤ 2 }

13. Довести нерівність

$$2x^2 - xy + 5y^2 - 2x + 2 > 0$$

$$x, y \in R$$

Варіант №8

1. Обчислити:

$$\cos\left(arcsin\frac{1}{2} + arcsin\frac{1}{3}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина A, якщо $|y+1| \leq 5,\ |x^2-1| \leq 6,\ A = \left|y+\frac{1}{2}\right|$?

3. Розкласти на множники многочлен x^3+3x^2-8x-3

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c*, якщо [illegible]

5. Обчислити $\arccos(\cos 6)$

6. Знайти множину значень $E(f)$ функції $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$.

7. Скільки розв'язків має рівняння [illegible]?

8. Розв'язати нерівність [illegible]

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a,* при кожному з яких рівняння має два розв'язки $||x-2|-1|=a+3$

10. Спростити вираз: $x\sqrt[8]{\frac{y^4}{|x|}}+5\sqrt[8]{x^7y^4}$.

11. Намалювати графік: $y=|\lg(|x|+2)|$

12. Намалювати Множину

A\B

A={ (x;y)| $x^2+y^2\leq 1$ }

B={ (x;y)| $|x+y|\leq 1$ }

13. Довести нерівність

$$(a+b)(a+c)(b+c)\geq 8abc,$$

$$a,b,c\geq 0.$$

Варіант №9

1. Обчислити:

$$\sin\left(arctg\,\frac{1}{3}-arctg\,\frac{1}{5}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина A, якщо [illegible]?

3. Розкласти на множники многочлен x^3-x^2-7x+1!

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c*, якщо [illegible]

5. Обчислити $\arcsin 1(7)$

6. Знайти множину значень $E(f)$ функції $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$

7. Скільки розв’язків має рівняння $arctg\,x=2^x$?

8. Розв’язати нерівність $\frac{x^2-5x+4}{\sqrt{ctg\,2x}}\leq 0$

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a,* при кожному з яких рівняння має два розв’язки $|x^2-2|x||=a+3$

10. Спростити вираз: $2\sqrt[6]{\frac{-n^2}{m}}+\frac{\sqrt[6]{|n|m^5n^2}}{m}$.

11. Намалювати графік: $y=-|\lg|x||$

12. Намалювати Множину

A∩B

A={ (x;y)| |xy|≥ 1 }

B={ (x;y)| |x+y|+|x-y| ≤ 4

13. Довести нерівність

$$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b)\geq 0$$

$$a>0, b>0, c>0.$$

Варіант №10

1. Обчислити:

$$\cos\left(arctg\,\frac{1}{2}-arctg\,\frac{1}{3}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина A, якщо $|y|+3=2x^2-9,\ A=\frac{1}{x}$?

3. Розкласти на множники многочлен x^3+3x^2+7x+5

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c*, якщо [illegible]

5. Обчислити $\arccos$ [illegible]

6. Знайти множину значень $E(f)$ функції $f(x)=$ [illegible]

7. Скільки розв'язків має рівняння $|x-1| = \log_2 \sin\frac{\pi}{9}$?

8. Розв'язати нерівність $\sqrt{tg\frac{x}{2}}\,(2x^2-7x+4)\ge 0$

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a,* при кожному з яких рівняння має два розв'язки $|x-1|+|x-2|=a$ [illegible]

10. Спростити вираз: $6\sqrt[6]{m^4 n}\, n \sqrt[6]{\frac{n^4}{|m|^5}}$.

11. Намалювати графік: $y=|\arccos|2-x||$

12. Намалювати Множину

A\B

A={ (x;y)| $x^2+y^2 \le 1$ }

B={ (x;y)| $|x| \le |y|$ }

13. Довести нерівність

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \ge 2\,; \quad a \epsilon R$$

Варіант №11

1. Обчислити:

$$tg\left(arcsin\frac{1}{4}+arccos\frac{1}{3}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина A, якщо [illegible]?

3. Розкласти на множники многочлен x^3-5x^2+4x+1[illegible]

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c*, якщо [illegible]

5. Обчислити $\arcsin(8)$.

6. Знайти множину значень $E(f)$ функції $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|+x}$.

7. Скільки розв'язків має рівняння $\arcsin x = x^3$?

8. Розв'язати нерівність $\sqrt{5x-4-x^2}\cdot \log$ [illegible]

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a,* при кожному з яких рівняння має два розв'язки

$x^2-6|x|+8=a$

10. Спростити вираз: $3\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^7}}+\frac{\sqrt[8]{|a|b^2}}{a}$.

11. Намалювати графік: $y=\left|\lg(3-|x|)\right|$

12. Намалювати Множину

A∩B

A={ (x;y)| |xy|≤ 1 }

B={ (x;y)| |x|+|y| ≤ 4 }

13. Довести нерівність

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$$

$$a>0, b>0, c>0.$$

Варіант №12

1. Обчислити:

$$\sin\left(arctg\,\frac{1}{2}+arctg\,\frac{1}{3}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина А, якщо $|x-1| \le 2$, $y^2 \le 9$, $A = \frac{1}{|x|+1}$?

3. Розкласти на множники многочлен $x^3 + x + 10$

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c*, якщо [illegible]

5. Обчислити $\arccos$ [illegible]

6. Знайти множину значень $E(f)$ функції $f(x) =$ [illegible]

7. Скільки розв'язків має рівняння [illegible]?

8. Розв'язати нерівність [illegible]

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a,* при кожному з яких рівняння має два розв'язки

$||x+1|-2| = a+5$

10. Спростити вираз: $4\sqrt[8]{a^5b^2} + a\sqrt[8]{\frac{b^2}{|a|^3}}$.

11. Намалювати графік: $|y| = \sin|x|$

12. Намалювати Множину

A\B

A={ (x;y)| $x^2+y^2 \le 1$ }

B={ (x;y)| $|x|+|y| \le 1$ }

13. Довести нерівність

$$a^4 + b^4 \ge \frac{1}{8},$$

якщо $a + b = 1$

Вариант №13

1. Обчислити:

$ctg\left(arcsin\frac{2}{7}+arccos\frac{3}{4}\right)$

2. В яких межах змінюється величина A , якщо [illegible]?

3. Розкласти на множники многочлен $20-6x-x^3$.

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c*, якщо [illegible]

5. Обчислити $\arcsin(\sin 5)$.

6. Знайти множину значень E(f) функції $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos^4 x-1}$.

7. Скільки розв'язків має рівняння $\arccos x = x$?

8. Розв'язати нерівність [illegible].

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння $|x+1|-|x-2|=a+3$ має два розв'язки.

10. Спростити вираз: $\sqrt[6]{\frac{-b^4}{a^3}}+\frac{2\sqrt[4]{|a^3b^4|}}{a}$.

11. Намалювати графік: $y=\left|x^2+2|x|-3\right|$

12. Намалювати Множину

A\B

A={ (x;y)| |x|+|y|≤ 2 }

B={ (x;y)| $x^2+y^2\le 2$ }

13. Довести нерівність

$$x^2+y^2\geq\frac{1}{20},$$

якщо $2x+4y=1$

Вариант №14

1. Обчислити:

$\cos\left(arctg\,\frac{1}{2} + arctg\,\frac{1}{3}\right)$

2. В яких межах змінюється величина A , якщо $|y+1| \le 3,\ x^2 \le 1,\ A = \frac{1}{|xy|}$

3. Розкласти на множники многочлен $x^3+4x^2+1x+12$.

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c*, якщо $a = \log_5 3$, $b = \log_5 6$, $c = \log_5 8$ ...

5. Обчислити $\arccos(1(5))$.

6. Знайти множину значень E(f) функції $f(x)=6^{\cos^4 x+1}$.

7. Скільки розв’язків має рівняння $|2x+1| \cdot \log_5(6x^2 - 7x + 1) = 0$

8. Розв’язати нерівність $(x-3)\sqrt{2x-1} \cdot \log_{\cos^2 x}\left(\frac{1}{x^2}\right) \ge 0$

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння $|1+|x-2|| = a$ має два розв’язки.

10. Спростити вираз: $a^3\sqrt{\frac{b^6}{|a|^7}} + 2\sqrt[8]{-a^6 b}$

11. Намалювати графік: $y=|\cos|x|-x|$

12. Намалювати Множину

$A \cap B$

$A=\{ (x;y) \mid x^2+y^2 \le 4 \}$

$B=\{ (x;y) \mid |xy| \le 1 \}$

13. Довести нерівність

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c} \ge 3$$

якщо $a, b, c > 0$

Вариант № 15

1. Обчислити:

$$ctg\left(arctg\frac{1}{7}+arctg\frac{1}{8}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина А , якщо [illegible]

3. Розкласти на множники многочлен $13-9x-3x^2-x^3$.

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c*, якщо [illegible]

5. Обчислити $\arcsin(\sin 4)$

6. Знайти множину значень E(f) функції $f(x)=\sqrt{1-4\sin x}$.

7. Скільки розв’язків має рівняння $1-x^2=\sqrt{|x|}$?

8. Розв’язати нерівність [illegible]

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння $|x^2-5x+6|=a+2$ має два розв’язки.

10. Спростити вираз: $4a\sqrt[6]{\frac{b^2}{|a|^3}}+\sqrt[6]{-a^3b^2}$.

11. Намалювати графік: $y=\arccos(2-|x|)$

12. Намалювати Множину

A∆B

A={ (x;y)| |x|+|y|≤ 4 }

B={ (x;y)| |x+y|+|x-y|≤ 6}

13. Довести нерівність

$$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$$

$$a, b, c \in R$$

Вариант № 16

1. Обчислити:

$$\cos\left(artg\frac{1}{3} - arctg\frac{1}{4}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина A ,якщо [illegible]

3. Розкласти на множники многочлен x^3+2x^2+2x+1

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c* , якщо [illegible]

5. Обчислити $\arccos(\sin 4)$.

6. Знайти множину значень E(f) функції [illegible].

7. Скільки розв’язків має рівняння [illegible]

8. Розв’язати нерівність [illegible]

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння $|1-|x-3||=a+5$ має два розв’язки.

10. Спростити вираз: $3\sqrt[8]{a^7b^2}+a\sqrt{\frac{b^2}{|a|}}$.

11. Намалювати графік: $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-|x+5|}$

12. Намалювати Множину

A\B

A={ (x;y)| |x|+|y|≤ 2 }

B={ (x;y)| |x+y|+|x-y|≤ 2}

13. Довести нерівність

$$x^2 + 10y^2 + z^2 + 6xy + 2y + 2z + 7 > 0$$

$x, y, z \in R$

Вариант № 17

1. Обчислити:

$\cos\left(arccos\frac{1}{4} - arcsin\frac{1}{5}\right)$

2. В яких межах змінюється величина А ,якщо [illegible]

3. Розкласти на множники многочлен $x^3 - x^2 + 3x + 5$

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c*, якщо [illegible]

5. Обчислити $\arcsin($[illegible]$)$.

6. Знайти множину значень E(f) функції [illegible]

7. Скільки розв'язків має рівняння $\log_2 x = 3^{-x}$?

8. Розв'язати нерівність [illegible]

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння $|x^2 - 4x + 3| = a + 1$. має два розв'язки.

10. Спростити вираз: $x\sqrt[6]{\frac{y^4}{-x^3}} + 3\sqrt[3]{|x^3 y^4|}$.

11. Намалювати графік: $y = -2^{|x-1|}$

12. Намалювати Множину

A\B

A={ (x;y)| |x+y|+|x-y|≤ 2}

B={ (x;y)| |x|+|y|≤ 1 }

13. Довести нерівність

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10 > 0$$

$x \epsilon R$

Вариант № 18

1. Обчислити:

$$\sin\left(arctg\frac{1}{3}-arctg\frac{1}{5}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина A , якщо $|y|\le 2-3x^2-1$, $A=\frac{1}{|x|+y^2}$

3. Розкласти на множники многочлен $x^3+13x+34$

4. Виразити число *a* через числа *b* та *c*,

5. Обчислити $\arccos(10)$

6. Знайти множину значень E(f) функції $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{4\cos 3x\sin x}$.

7. Скільки розв’язків має рівняння $ctg\,x=\arcsin\frac{x}{\pi}$

8. Розв’язати нерівність $\sqrt{3-2x-x^2}$

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння $||x-4|-2|=a$ має два розв’язки.

10. Спростити вираз: $3\sqrt[3]{x^5y^6}+x\sqrt[3]{\frac{y^6}{|x|^3}}$.

11. Намалювати графік: $y=|arctg(2-|x|)|$

12. Намалювати Множину

AΔB

A={ (x;y)| |x+y|+|x-y|≤ 8}

B={ (x;y)| $x^2+y^2\le 25$ }

13. Довести нерівність

Дано : $a+b+c=1$.

$$\text{Довести}: a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$$

Варіант №19

1. Обчислити:

$ctg(arcsin\frac{2}{7}+arccos\frac{3}{4})$

2. В яких межах змінюється величина А, якщо $|x+2|>1$, $y^2<1$, $A=\frac{y}{|x|}$?

3. Розкласти на множники многочлен x^3-x^2-x-2.

4. Виразити число a через числа b та c, якщо $a=\log_{24}25$, $b=\lg 4$, $c=\lg 3$.

5. Обчислити $\arcsin(\cos 5)$.

6. Знайти множину значень $E(f)$ функції $f(x)=3^{\log_3(4\sin 5x)}$.

7. Скільки розвязків має рівняння [illegible].

8. Розв’язати нерівність [illegible].

9. Знайти всі дійсні значення параметра a, при кожному з яких рівняння

$\left||x|^2-4\right|=a+4$ має два розв’язки.

10. Спростити вираз: $\frac{\sqrt[6]{a^5b^4}}{a}+2\sqrt[6]{\frac{b^4}{|a|}}$.

11. Намалювати графік: $y=\sqrt{|x-3|-2}$

12. Намалювати Множину

$A\Delta B$

$A=\{(x;y)|\ |x|+|y|\leq 4\}$

$B=\{(x;y)|\ \ x^2+y^2\leq 9\}$

13. Довести нерівність

$$3xy - x^2 - y < 7,$$

якщо $5x + 2y = 10$

Варіант №20

1. Обчислити:

$tg(arcsin\frac{5}{9} + arccos\frac{4}{7})$.

2. В яких межах змінюється величина A, якщо $|y+3|>5$, $x^2>25$, $A=\frac{1}{|xy|}$?

3. Розкласти на множники многочлен $30+8x-3x^2-x^3$.

4. Виразити число a через числа b та c, якщо $a=\log_{70}2$, $b=\lg 7$, $c=\lg 5$.

5. Обчислити $\arccos(\sin 5)$.

6. Знайти множину значень $E(f)$ функції $f(x)=5^{|x|-x}$.

7. Скільки розвязків має рівняння $tg\,x=\arcsin x$?

8. Розв’язати нерівність $\sqrt{2x-x^2}\cdot\lg_{[illegible]}(\sqrt{x+1}-3)$ [illegible].

9. Знайти всі дійсні значення параметра a, при кожному з яких рівняння

$||x+3|-1|=a+2$ має два розв’язки.

10. Спростити вираз: $5m\sqrt[6]{\frac{n^2}{-m}}+\sqrt[6]{|n|^5m^2}$.

11. Намалювати графік:

$$y = \frac{(x^2 - 2|x| + 1)^3}{|x| - 1}$$

12. Намалювати Множину

A\B

A={ (x;y)| |x+y|+|x-y|≤ 2}

B={ (x;y)| $x^2+y^2 \le 1$ }

13. Довести нерівність

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$$

$$\text{якщо } \begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+1\ge 0 \\ 4b+1\ge 0 \\ 4c+1\ge 0 \end{cases}$$

Варіант №21

1. Обчислити:

$$ctg\left(arctg\frac{1}{7}+arctg\frac{1}{8}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина A, якщо $|3x-1|<7$, $y^2<36$, $A=|2x-y|$?

3. Розкласти на множники многочлен $10-x-x^3$.

4. Виразити число a через числа b та c, якщо $a=\log_{25}12$, $b=\lg 9$, $c=\lg 2$.

5. Обчислити $\arcsin(\cos 12)$.

6. Знайти множину значень $E(f)$ функції $f(x)=4^{x-x^2}$.

7. Скільки розвязків має рівняння [illegible] ?

8. Розв’язати нерівність [illegible].

9. Знайти всі дійсні значення параметра a, при кожному з яких рівняння

$|x+1|+|x-2|=a+3$ має два розв’язки.

10. Спростити вираз: $7\sqrt[8]{-m^5n^4}+mn\sqrt[8]{\frac{n^4}{|m|^3}}$.

11. Намалювати графік:

$$y=\frac{|x|-2}{|x|-3}$$

12. Намалювати Множину

A∩B

A={ (x;y)| |2x+y|+|2x-y|≤ 4 }

B={ (x;y)| $x^2+y^2\le 4$ }

13. Довести нерівність

$$\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}}\ge 2\ ;\quad a\epsilon R$$

Варіант №22

1. Обчислити:

$$\cos\left(arccos\frac{1}{4}-arsin\frac{1}{5}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина А, якщо $|3y+2|<5$, $x^2<64$, $A=2x+3y$?

3. Розкласти на множники многочлен $4+2x-x^3$.

4. Виразити число a через числа b та c, якщо $a=\log_{36}42$, $b=\lg 6$, $c=\lg 7$.

5. Обчислити $\arccos(\sin 12)$.

6. Знайти множину значень $E(f)$ функції $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{|x|+x}$.

7. Скільки розвязків має рівняння $\log_2(x-1)=\arccos x$?

8. Розв’язати нерівність [illegible].

9. Знайти всі дійсні значення параметра a, при кожному з яких рівняння

$||x-7|-2|=a+1$ має два розв’язки.

10. Спростити вираз: $6\sqrt[6]{x^5y^4}+x\sqrt[6]{\frac{y^4}{|x|}}$.

11. Намалювати графік:

$$y = \left|\frac{x}{x-4}\right|$$

12. Намалювати Множину

A\B

A={ (x;y)| $x^2+y^2 \le 2y$ }

B={ (x;y)| $|2x+y|+|2x-y| \le 4$ }

13. Довести нерівність

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right) \geq 8$$

$$a > 0, b > 0, c > 0.$$

Варіант №23

1. Обчислити:

$$\cos\left(arctg\,\frac{1}{3} - arctg\,\frac{1}{4}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина А, якщо $|5x+1|<6$, $y^2<16$, $A=3y-x$?

3. Розкласти на множники многочлен $4x^3+x+5$.

4. Виразити число a через числа b та c, якщо $a=\log_{12}18$, $b=\lg 6$, $c=\lg 9$.

5. Обчислити $\arcsin(\cos 16)$.

6. Знайти множину значень $E(f)$ функції $f(x)=2^{\sqrt{x-x^2}}$

7. Скільки розвязків має рівняння [illegible] ?

8. Розв’язати нерівність [illegible].

9. Знайти всі дійсні значення параметра a, при кожному з яких рівняння

$\left|x^2-4x-5\right|=a+7$ має два розв’язки

10. Спростити вираз: $\sqrt[4]{\frac{b^4}{a^5}}+\frac{\sqrt[6]{|a|b^4}}{a}$.

11. Намалювати графік:

$$y=\frac{x^2-2x-3}{|x-3|}$$

12. Намалювати Множину

$A\cup B$

A={ (x;y)| |2x-y|+|2x+y|≤ 4 }

B={ (x;y)| $x^2+y^2\le 2x+3$ }

13. Довести нерівність

$$\frac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

$a > 0, b > 0$

Варіант №24

1. Обчислити:

$$\sin\left(arctg\frac{1}{2}-arctg\frac{1}{3}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина А, якщо $|5y+2|<7$, $x^2>9$, $A=|y|+\frac{1}{x}$?

3. Розкласти на множники многочлен $x^3+4x^2+12x+10$.

4. Виразити число a через числа b та c, якщо $a=\log_{30}5$, $b=\lg 6$, $c=\lg 3$.

5. Обчислити $\arccos(\sin 16)$.

6. Знайти множину значень $E(f)$ функції $f(x)=4\sin 3x+[illegible]\cos 3x-[illegible]$.

7. Скільки розвязків має рівняння $\sin\pi x=2x-x^2-2$?

8. Розв'язати нерівність $(x+1)\sqrt{4-x}$ [illegible].

9. Знайти всі дійсні значення параметра a, при кожному з яких рівняння $|3+|x-2||=a+1$ має два розв'язки.

10. Спростити вираз: $8\sqrt[3]{|a|b^2}+a\sqrt[8]{\frac{b^2}{a^7}}$.

11. Намалювати графік:

$$y=\frac{|x^2-2|x|-3|}{x^2-2|x|-3}$$

12. Намалювати Множину

A∆B

A={ (x;y)| |x|+|y|≤ 2 }

B={ (x;y)| |2x+y|+|2x-y|≤ 4 }

13. Довести нерівність

$$\frac{a^4+b^4}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^4$$

Варіант № 25

1. Обчислити:

$$tg\left(arcsin\frac{1}{3} - arccos\frac{1}{4}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина А, якщо $|3-2x|<1$, $y^2<4$, $A=2y-x$?

3. Розкласти на множники многочлен $x^3+x^2+8x-10$

4. Виразити число *a* через *b* та *c*, якщо [illegible]

5. Обчислити arcsin(cos9).

6. Знайти множину значень E(f) функції $f(x)=17\cos(3\sin^4 x)$.

7. Скільки розв’язків має рівняння [illegible]

8. Розв’язати нерівність [illegible]

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння $|x+5|\ |x-3|=a+1$ має два розв’язки.

10. Спростити вираз: $\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^3}}+\frac{\sqrt[6]{|x|^3y^2}}{x}$.

11. Намалювати графік:

$$y = \sqrt[3]{|x+1|-1}$$

12. Намалювати Множину

$A \cap B$

$A=\{ (x;y) \mid |x+2y|+|x-2y| \le 16 \}$

$B=\{ (x;y) \mid |x|+|y| \le 8\}$

13. Довести нерівність

$$(1+a+a^2)^2 \le 3(1+a^2+a^4)$$

$$a \ge 0$$

Варіант № 26

1. Обчислити:

$$tg(arcsin\frac{1}{4}+arccos\frac{1}{3})$$

2. В яких межах змінюється величина А, якщо |3-y|<4, x^2>1, $A=\left|\frac{y}{x}\right|$?

3. Розкласти на множники многочлен $x^3+2x^2-3x-10$.

4. Виразити число *a* через *b* та *c*, якщо [illegible]

5. Обчислити arccos(sin9).

6. Знайти множину значень E(f) функції $f(x)=\sqrt[4]{1+5\sin x}$.

7. Скільки розв'язків має рівняння $\sqrt[3]{x}=arcc$ [illegible]

8. Розв'язати нерівність [illegible]

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння (|x|+1)(|x|-3)=*a*+4 має два розв'язки.

10. Спростити вираз: $\sqrt[8]{m^3n^6}+2n\sqrt[8]{\frac{n^6}{|m|^5}}$.

11. Намалювати графік:

$$y=||x-1|-2|$$

12. Намалювати Множину

A$\cup$B

A={ (x;y)| |x+2y|+|x-2y|≤ 8}

B={ (x;y)| |2x+y|+|2x-y|≤ 8}

13. Довести нерівність

$$\sqrt{\frac{b^2}{a}}+\sqrt{\frac{a^2}{b}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$a > 0, b > 0$

Варіант № 27

1. Обчислити:

$$ctg\left(arcsin\frac{1}{3} - arccos\frac{1}{4}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина A, якщо $|5-2x|<1$, $y^2>49$, $A=\frac{2x}{|y|}$?

3. Розкласти на множники многочлен x^3+3x^2+4x+2.

4. Виразити число *a* через *b* та *c*, якщо [illegible]

5. Обчислити arcsin(cos7).

6. Знайти множину значень E(f) функції $f(x)=\log_2(x^2+2x+2)$.

7. Скільки розв’язків має рівняння [illegible]

8. Розв’язати нерівність [illegible]

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння $\log_2|x|=a+3$ має два розв’язки.

10. Спростити вираз: $3x\sqrt[8]{\frac{y^4}{x^7}}+\sqrt[8]{|x|y^4}$.

11. Намалювати графік:

$$y=\sqrt{1-sin2x}$$

12. Намалювати Множину

A\B

$A=\{ (x;y) \mid \ |x+2y|+|x-2y|\leq 16 \}$

$B=\{ (x;y) \mid \ x^2+y^2\leq 8|x| \}$

13. Довести нерівність

$$\frac{a+b}{2} * \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^4+b^4}{2}$$

Варіант № 28

1. Обчислити:

$$\cos\left(arctg\frac{1}{3} - arctg\frac{1}{4}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина A, якщо $|3-y|<1$, $x^2<64$, $A=2x-3y$?

3. Розкласти на множники многочлен x^3+5x^2+9x+5.

4. Виразити число *a* через *b* та *c*, якщо [illegible]

5. Обчислити arccos(sin7).

6. Знайти множину значень E(f) функції $f(x)=5^{\log_5(2\cos 2x)}$.

7. Скільки розв'язків має рівняння $x^4+1=\log_{0,2}|x|$?

8. Розв'язати нерівність $\sin x \log_2(2x-x^2)<0$

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння $|\log_3 x|=a-5$ має два розв'язки.

10. Спростити вираз: $5\sqrt[5]{\frac{b^2}{a^5}}+\frac{\sqrt[6]{|a|b^2}}{a}$.

11. Намалювати графік:

$$y=\sqrt{\frac{1-cos2x}{1+cos2x}}$$

12. Намалювати Множину

A∆B

A={ (x;y)| |2x+y|+|2x-y|≤8 }

B={ (x;y)| $x^2+y^2\leq 4|x|$}

13. Довести нерівність

$$\sqrt{a^2+b^2} \geq (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+\sqrt{2ab}$$

$$a, b \geq 0.$$

Варіант № 29

1. Обчислити:

$\sin\left(arctg\frac{1}{3}-arctg\frac{1}{5}\right)$

2. В яких межах змінюється величина А, якщо $|3-2x|<5$, $y^2>4$, $A=2x+\frac{1}{y}$?

3. Розкласти на множники многочлен $5-x-3x^2-x^3$.

4. Виразити число *a* через *b* та *c*, якщо [illegible]

5. Обчислити arcsin (cos14).

6. Знайти множину значень E(f) функції $f(x)=(3)^{1+\cos x}$.

7. Скільки розв'язків має рівняння $|x|$ [illegible]

8. Розв'язати нерівність [illegible]

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння $|\log_3|x||=a$ має два розв'язки.

10. Спростити вираз: $4\sqrt[8]{|a|^3b^2}+a\sqrt[8]{\frac{b^2}{a^5}}$.

11. Намалювати графік:

$$y=\sqrt{\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}$$

12. Намалювати Множину

$A \cap B$

$A=\{ (x;y) \mid \ |x+2y|+|x-2y| \le 8 \}$

$B=\{ (x;y) \mid |x+2y| \le 4 \}$

13. Довести нерівність

$$\frac{2a^2 - a + 1}{2a^2 + a + 1} > \frac{1}{3}$$

Варіант № 30

1. Обчислити:

$$\sin\left(arctg\frac{1}{3} - arccos\frac{1}{4}\right)$$

2. В яких межах змінюється величина А, якщо $|5-y|<16$, $x^2<25$, $A=|x|+|y|$?

3. Розкласти на множники многочлен x^3+x^2-2.

4. Виразити число *a* через *b* та *c*, якщо $a=\log_{30}8,\ b=\lg 5,\ c=\lg 2$

5. Обчислити arccos (sin 14).

6. Знайти множину значень E(f) функції $f(x)=\sqrt[4]{1-\log_{3}(2-5\sin x)}$

7. Скільки розв’язків має рівняння $\frac{1}{|x|}=10-x^2$?

8. Розв’язати нерівність $\frac{4+3x-x^2}{\sqrt{\sin x}}>0$

9. Знайти всі дійсні значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння $|\,4 - |3-x|\,|=a$ має два розв’язки.

10. Спростити вираз: $a\sqrt{\frac{b^4}{a^5}}+3\sqrt[3]{|a|b^4}$.

11. Намалювати графік:

$$y = \sqrt{\log_3 \cos x}$$

12. Намалювати Множину

A\B

A={ (x;y)| |2x+y|+|2x-y|≤16}

B={ (x;y)| |xy|≤ 16 }

13. Довести нерівність

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\geq 0$$

$x \neq o, y \neq 0$

Список літератури

1. Скороход А.В. Вибрані питання елементарної математики. Київ. 1982.
2. Ясінський В.В. Математика. Київ. 2006.
3. Сканави М.И. Сборник задач по математике. Киев. 1997.
4. Моденов П.С. Экзаменационные задачи по математике. М. 1969.
5. Виленкин Н.Я., Шварцбурд С.И. Математикческий анализ. М., 1969.
6. Лозанский Э.Д. Математика. Киев. 1976.
7. Кущенко В.С. Сборник конкурсных задач по математике. СПб. 1964.
8. Антонов С.П. Сборник задач по элементарной математике. М. 1960.
9. Баховский Е.Б. Задачи по элементарной математике. М. 1969.
10. Дорофеев Г.В. Пособие по математике. М. 1976.
11. Горнштейн П.И. Задачи с параметрами. Киев. 1992.

Зміст