

Інститут математики НАН України  
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка  
Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова  
Національний технічний університет України «КПІ»

ШІСТНАДЦЯТА  
МІЖНАРОДНА  
НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ  
ІМЕНІ АКАДЕМІКА  
МИХАЙЛА КРАВЧУКА

*14–15 травня 2015 р., Київ*

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ  
II

**Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз**

Київ — 2015

**Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Ukraine  
Taras Shevchenko National University of Kyiv  
National Pedagogical Drahomanov University  
National Technical University of Ukraine «KPI»**

**SIXTEENTH  
INTERNATIONAL  
SCIENTIFIC  
MYKHAILO KRAVCHUK  
CONFERENCE**

*14–15 May, 2015, Kyiv*

**CONFERENCE MATERIALS  
II**

**Algebra. Geometry. Analysis**

**Kyiv — 2015**

Институт математики НАН Украины  
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка  
Национальный педагогический университет им. М. Драгоманова  
Национальный технический университет Украины «КПИ»

ШЕСТНАДЦАТАЯ  
МЕЖДУНАРОДНАЯ  
НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА  
МИХАИЛА КРАВЧУКА

*14–15 мая 2015 г., Киев*

МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ  
II

**Алгебра. Геометрия. Математический анализ**

Киев — 2015

**УДК 512/514+517+519.6(06)**  
**ББК 22.14/6я43+22.19я43**  
**A45**

Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 14–15 травня, 2015 р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — К.: НТУУ «КПІ», 2015. — 216 с. — Укр., англ., рос.

Sixteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, May 14–15, 2015, Kyiv: Conference materials. Vol. 2. Algebra. Geometry. Analysis. — К.: NTUU «KPI», 2015. — 216 p.

Шестнадцатая международная научная конференция им. акад. Михаила Кравчука, 14–15 мая, 2015, Киев: Материалы конф. Т. 2. Алгебра. Геометрия. Математический анализ. — К.: НТУУ «КПИ», 2015. — 216 с.

**ISBN 978-617-7021-28-4**

**ISBN 978-617-7021-28-4**

©Автори

©НТУУ «КПІ», 2015



Академік Всеукраїнської академії наук  
Academician of All-Ukrainian Academy of Sciences

Академик Всеукраинской академии наук

*Михайло Кравчук*

*Mychailo Kravchuk*

*Михаил Кравчук*

1892–1942

## **XVI Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука**

### ***Програмний комітет***

Акад. НАН України *М. Згуровський* (Україна)  
Проф. *Н. Вірченко* (Україна)  
(співголови)  
Доц. *В. Гайдей* (Україна)  
(заступник голови)  
Акад. НАН України *Ю. Якименко* (Україна)  
Акад. НАН України *М. Льченко* (Україна)  
Проф. *В. Ванін* (Україна)  
Акад. НАН України *А. Самойленко* (Україна)  
Акад. НАН України *Я. Яцків* (Україна)  
Акад. НАН України *М. Перестюк* (Україна)  
Проф. *М. Городній* (Україна)  
Проф. *М. Працьовитий* (Україна)  
Проф. *І. Парасюк* (Україна)  
Чл.-кор. НАН України *М. Горбачук* (Україна)  
Проф. *Р. Андрушків* (США)

### ***Організаційний комітет***

Акад. НАН України *М. Згуровський* (Україна)  
Проф. *Н. Вірченко* (Україна)  
(співголови)  
Доц. *В. Гайдей* (Україна)  
(заступник голови)  
Проф. *О. Клесов* (Україна)  
Проф. *С. Івасишен* (Україна)  
Доц. *М. Дудкін* (Україна)  
Проф. *О. Іванов* (Україна)  
Доц. *І. Алексєєва* (Україна)  
Доц. *О. Диховичний* (Україна)  
Доц. *Н. Коновалова* (Україна)  
Доц. *Л. Федорова* (Україна)

## Sixteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference

### *Programme Committee*

Acad. NASU *M. Zgurovsky* (Ukraine)  
Prof. *N. Virchenko* (Ukraine)  
(Co-Chairs)  
Ass. Prof. *V. Haidey* (Ukraine) (Deputy Chair)  
Acad. NASU *Yu. Yakymenko* (Ukraine)  
Acad. NASU *M. Ilchenko* (Ukraine)  
Prof. *V. Vanin* (Ukraine)  
Acad. NASU *A. Samoilenko* (Ukraine)  
Acad. NASU *Ya. Yatskiv* (Ukraine)  
Acad. NASU *M. Perestiuk* (Ukraine)  
Prof. *M. Horodniy* (Ukraine)  
Prof. *M. Pratsiovytyi* (Ukraine)  
Prof. *I. Parasiuk* (Ukraine)  
Corr. Member NASU *M. Horbachuk* (Ukraine)  
Prof. *R. Andrushkiw* (USA)

### *Organizing Committee*

Acad. NASU *M. Zgurovsky* (Ukraine)  
Prof. *N. Virchenko* (Ukraine)  
(Co-Chairs)  
Ass. Prof. *V. Haidey* (Ukraine) (Deputy Chair)  
Prof. *O. Klesov* (Ukraine)  
Prof. *S. Ivashyshen* (Ukraine)  
Ass. Prof. *M. Dudkin* (Ukraine)  
Prof. *O. Ivanov* (Ukraine)  
Ass. Prof. *I. Alyeksyeyeva* (Ukraine)  
Ass. Prof. *O. Dykhovychnyi* (Ukraine)  
Ass. Prof. *N. Konovalova* (Ukraine)  
Ass. Prof. *L. Fedorova* (Ukraine)

## **XVI Международная научная конференция им. акад. Михаила Кравчука**

### ***Программный комитет***

Акад. НАН Украины *М. Згуровский* (Украина)  
Проф. *Н. Вирченко* (Украина)  
(сопредседатели)  
Доц. *В. Гайдей* (Украина)  
(заместитель председателя)  
Акад. НАН Украины *Ю. Якименко* (Украина)  
Акад. НАН Украины *М. Ильченко* (Украина)  
Проф. *В. Ванин* (Украина)  
Акад. НАН Украины *А. Самойленко* (Украина)  
Акад. НАН Украины *Я. Яцкив* (Украина)  
Акад. НАН Украины *Н. Перестюк* (Украина)  
Проф. *Н. Городний* (Украина)  
Проф. *Н. Працевитый* (Украина)  
Проф. *И. Парасюк* (Украина)  
Чл.-кор. НАН Украины *М. Горбачук* (Украина)  
Проф. *Р. Андрушків* (США)

### ***Организационный комитет***

Акад. НАН Украины *М. Згуровский* (Украина)  
Проф. *Н. Вирченко* (Украина)  
(сопредседатели)  
Доц. *В. Гайдей* (Украина)  
(заместитель председателя)  
Проф. *О. Клесов* (Украина)  
Проф. *С. Ивасиен* (Украина)  
Доц. *Н. Дудкин* (Украина)  
Проф. *А. Иванов* (Украина)  
Доц. *И. Алексеева* (Украина)  
Доц. *А. Дыховичный* (Украина)  
Доц. *Н. Коновалова* (Украина)  
Доц. *Л. Федорова* (Украина)

## УКРАЇНСЬКИЙ ВЧЕНИЙ СВІТОВОЇ СЛАВИ

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942) — найвизначніший український математик ХХ сторіччя, всесвітньо відомий вчений, громадський діяч, академік Всеукраїнської академії наук.

«... Майже жодне явище у створенні математичної науки в Україні не сталося без його участі,... ані закладалися **перші** українські школи в місті і по селах, **перші** курси, **перші українські університети** (народний і державний),..., ані утворювалася математична термінологія або наукова мова... — нічого цього не робилося без **найактивнішої участі Михайла Кравчука**» (так писалося в характеристиці на нього, надісланій до Всеукраїнської академії наук 1929 р. у зв'язку з висуненням його кандидатури в дійсні члени академії).

Наукові праці М. Кравчука з різних галузей математики (вищої алгебри та математичного аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії імовірностей та математичної статистики тощо) увійшли до скарбниці **світової Науки**. За його ідеями й відкриттями виразно проступала перспектива поглибленого розвитку й використання їх.

Вже давно існують на сторінках наукових досліджень і **многочлени Кравчука**, і **моменти Кравчука**, і **формули Кравчука**, і **осцилятори Кравчука**, а завдяки пошукам І. Качановського виявилось, що М. Кравчук стояв біля витоків **винаходу першого у світі електронного комп'ютера!**

Увесь свій короткий вік М. Кравчук працював невпинно й творчо на благо **Науки**, на благо **Освіти рідного народу**.

**«Моя любов — Україна і математика»** — таким було його життєве кредо.

Він справжній поет формул, математика для нього — це творчість, натхнення і радість. Він педагог за покликанням. Його лекції — це і сила, й безмірна глибочинь, і краса математичної думки. На його лекції ходили як на свято.

М. Кравчук викладав математичні предмети і в Київському університеті, і у політехнічному, авіаційному, архітектурному, ветеринарно-зоотехнічному, сільськогосподарському інститутах Києва. Він відкрив талант і дав путівку у світ відкриттів видатним конструкторам **Сергію Корольову** і **Архипу Люльці**.

Пам'ять про М. Кравчука живе у **серцях київських політехніків**, де він викладав вищу математику з 1921 р. і завідував кафедрою вищої математики (1934–1938 рр). КПП від 1992 р. вже провів 13 Міжнародних наукових конференцій ім. акад. М. Кравчука. Видано його «Науково-популярні праці», «Вибрані математичні праці», книгу «Розвиток математичних ідей Михайла Кравчука», відкрито **пам'ятник** М. Кравчуку (2003 р.), створено фільм «Голгофа академіка Кравчука» (2004 р.), названо його ім'ям одну з київських **вулиць** (2009 р.)

Життя цього видатного вченого-математика спалахнуло як блискучий болід і після арешту й засуду в терорному 1938 році приречено було згоріти через кілька літ у суворих колимських таборах.

Ім'я М. Кравчука повернулось в український науковий пантеон і є зразком для наслідування та продовження його досліджень у працях сучасних і прийдешніх науковців в **Україні й далеко поза Україною**.

## OUTSTANDING UKRAINIAN MATHEMATICIAN ACADEMICIAN M. KRAVCHUK (1892–1942)

*Mykhailo Kravchuk* made significant contributions to numerous branches of mathematics and the development of **mathematical education**. In 1929 Kravchuk was elected a full member of All-Ukrainian Academy of Sciences.

Kravchuk was the author of more than 180 scientific works, including 10 monographs, in a number of branches of mathematics (algebra and number theory, theory of functions of real and complex variable, theory of differential and integral equations, mathematical statistics and probability theory, history of mathematics, Ukrainian mathematical terminology etc.)

Let us point some fundamental lines of his research:

— investigations in the theory of permutation matrices, quadratic and bilinear forms, theory of algebraic and transcendental equations;

— the creation and mathematical proof of the general method of moments and its application to the approximate solution of ordinary linear differential equations, integral equations, equations of mathematical physics;

— introduction and use of polynomials associated with the binomial distribution, now known in the world mathematical literature as **Kravchuk's polynomials**;

— analysis of complex questions in philosophy, the history of mathematics and techniques.

Mykhailo Kravchuk never learned about the role that his sci. works played in the inventions of the first electronic computer. American scientist **John Atanasoff** (1903–1995) took a great interest in Kravchuk's sci. works when he investigated the problem of **making electronic computer**.

His selfless efforts for the sake of the **development of science in Ukraine**, extraordinary **talent as teacher and reputation among students and scientific community** could not go unnoticed by authority.

**In 1938** Kravchuk was arrested and accused of involvement in a host of typical counterrevolutionary activities — changes that were common in those years in USSR. In the same year he was sentenced to 20 years of confinement and 5 years of exile and transported to concentration camps in **Kolyma**. There in consequence of cold, undernourishment and illnesses he **was died in March 9, 1942**.

He was **rehabilitated** by soviet regime only **in 1956**. But only in 1992, almost 100 years after his birth, M. Kravchuk was readmitted to membership in **the National Academy of Sciences of Ukraine**. The same year his name was entered in the International Calendar of Scientists by UNESCO. The **First Kravchuk International Conference** was held at Kyiv Polytechnic Institute "KPI" in 1992. Since that time there were 13 such **conferences, three books** of M. Kravchuk's works were **published** in Kyiv:

"Popular scientific works" (2000).

"Selected mathematical works" (2002).

"Development of the Mathematical ideas of Mykhailo Kravchuk (Krawtchouk)".

On the 20<sup>th</sup> of May 2003 the NTUU "KPI" unveiled **a statue of M. Kravchuk**.

# EXPONENTIAL SUMS WITH THE BINOMIAL IN THE EXPONENT OVER THE RING OF GAUSSIAN INTEGERS

L. V. Balyas

*I. I. Mechnikov Odessa National University, Odessa, Ukraine*

balyas@ukr.net

Let

$$G := \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}, i^2 \in \mathbb{C}, i^2 = -1\}$$

be the ring of Gaussian integers and let  $f(x) = ax^n + bx$  be a polynomial of a special form with integer coefficients. For the designation of the Gaussian integers we shall use lower Greek letters  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ .

We call two Gaussian numbers  $\alpha$  and  $\beta$  associated, if  $\alpha = \varepsilon\beta$ , where  $\varepsilon \in \{1, -1, i, -i\}$ .

Let  $G_{p^m}$  (respectively,  $G_{p^m}^*$ ) denote the complete (respectively, reduced) system of residues modulo  $p^m$  in  $G$ , and  $\hat{G}_{p^m}^*$  denote the multiplicative group of characters of the group  $G_{p^m}^*$  with  $|G_{p^m}^*| = p^m - 1$ .

As usual  $\gcd(a, b)$  or  $(a, b)$  stands for the greatest common divisor of  $a$  and  $b$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ . For  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $\nu_p(a)$  stands that  $p^{\nu_p(a)} \mid a$ ,  $p^{\nu_p(a)+1}$  does not divide  $a$ .

We also define a norm from  $\mathbb{Q}(i)$  into  $\mathbb{Q}$ :  $N(z) = z \cdot \bar{z} = |z|^2$  with  $z \in G$  and  $\bar{z}$  as a complex conjugate of  $z$ .

The writing  $\sum_{(l)}$  (respectively,  $\sum_{(l)^*}$ ) means the summation over the complete (respectively, reduced) system of residues modulo  $l$  in  $G$ .

Finally, we put  $e_{p^m} := e^{\frac{\pi i \operatorname{Sp} z}{p^m}}$ , where  $\operatorname{Sp} z = z + \bar{z}$  is a trace from  $\mathbb{Q}(i)$  into  $\mathbb{Q}$  with  $z \in G$ .

The aim of the work is the construction of the estimates for the exponential sums of the form

$$S_1 = S(ax^n + bx, \chi(x), p^m) = \sum_{x \in G_{p^m}} \chi(x) e_{p^m}(ax^n + bx), \quad (1)$$

where  $\chi$  is a character modulo  $p^m$ ,  $p$  is a prime rational number,  $p \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $(a, p) = (b, p) = (n, p) = 1$ ,  $n \geq 2$ ,  $m \geq 2$ ; and

$$S_2 = S(ax^n + bx, \chi(N(x), p^m)) = \sum_{x \in G_{p^m}} \chi(N(x)) e_{p^m}(ax^n + bx), \quad (2)$$

where  $\chi$  is a character modulo  $p^m$ ,  $p$  is a prime number,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $(a, p) = (b, p) = (n, p) = 1$ ,  $n \geq 2$ ,  $m \geq 2$ .

We recall that in the ring of Gaussian integers a prime rational number  $p, p \equiv 3 \pmod{4}$  is still prime. The prime number  $p \equiv 1 \pmod{4}$  can be factorized in the following way:  $p = \rho \cdot \bar{\rho}$ , where  $\rho \neq \bar{\rho}$ ,  $\rho$  and  $\bar{\rho}$  are distinct prime Gaussian integers in  $G$ ,  $\bar{\rho}$  is a complex conjugate of  $\rho$ . The prime number 2 is ramified in  $G$ : we mean that  $2 = -i(1+i)^2$  with  $(1+i)$  as a prime «even» gaussian number.

For  $p \equiv 3 \pmod{4}$  we put

$$U_m := \{1 + pu : u \in G_{p^{m-1}}\}, U_m \in G_{p^m}^*.$$

Then for every nontrivial character  $\chi \in \hat{G}_{p^m}^*$  we have

$$\chi(1 + pu) = e_{p^{m-1}}(\lambda f(u)), \quad (3)$$

where  $\lambda = \lambda(\chi) \in G_{p^{m-1}}$  and  $f(u) = u + a_2 u^2 + \dots + a_{N-1} u^{N-1}$  is a polynomial with coefficients  $a_k$ , which satisfy the condition

$$\nu_p(a_k) \geq k - \nu_p(k) - 1, k = 1, 2, 3, \dots$$

It is also known that the residue system [4] modulo  $p^m, p \equiv 1 \pmod{4}$  can be described in the form

$$x = g^{l_1} \bar{\rho}^{m-l_1} + g^{l_2} \rho^{m-l_2}, 0 \leq l_1, l_2 \leq (p-1)p^{m-1} - 1, \quad (4)$$

where  $g$  is a primitive root modulo  $p^m$  such that  $g^{p-1} = 1 + pH, (H, p) = 1, H \in \mathbb{Z}$ .

Hence

$$\begin{aligned} N(x) &= x \cdot \bar{x} = \\ &= g^{2l_1} p^m + g^{2l_2} p^m + g^{l_1+l_2} \bar{\rho}^{2m} + g^{l_1+l_2} \rho^{2m} \equiv g^{l_1+l_2} \text{Sp}(\rho^{2m}) \pmod{p^m} \end{aligned} \quad (5)$$

Using the analogue (3) of Postnikov's lemma about characters modulo  $p^m$  for the case  $p \equiv 3 \pmod{4}$  [3], the representations (4) and (5), lemmas with the estimates for exponential sums of special form over the ring of the Gaussian integers [4] and a basic knowledge of the theory of congruences modulo prime number, we get the following results for the sums (1) and (2):

$$|S_1| \leq \begin{cases} 0, & \text{if } \nu_p(a_1) < \alpha \\ 2^{\frac{m-2}{2}} (n-1, p-1) N(p)^{\frac{m+\alpha}{2}}, & \text{if } \nu_p(a_1) \geq \alpha, \alpha < n-2 \end{cases} \quad (6)$$

where  $\alpha = \nu_p(n-1) \geq 0, a_1 = nau_j^n + bu_j$  with  $u_j$  as a solution of the congruence  $nau^n + bu \equiv 0 \pmod{p}$ ; and

$$|S_2| \leq (n-1, p-1)^2 p^m, \quad (7)$$

where  $(n-1, p-1)$  is the number of the solutions of the binomial congruence

$$A^m \equiv B \pmod{p}.$$

The solution of the problems, connected with the distribution of solutions of congruences of special form on short multidimensional intervals, often leads to the use of the estimates of exponential sums.

So, the estimates (6) and (7) can be applied to the problem of the distribution of the solutions of the congruence

$$y^k \equiv \alpha x^n + \beta x \pmod{\gamma},$$

where  $\alpha, \beta, \gamma$  are the gaussian integers [1].

The rational case of the sum (1) was investigated in [2].

#### References

1. Balyas L. Twisted exponential sums over the ring of Gaussian integers / L. Balyas, P. Varbanets // *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.* — 2013. — V. 40. — P. 95—103.
2. Cochrane T. Bound for certain exponential sums / T. Cochrane, Z. Zheng // *Asian Journal of Mathematics.* — 2000. — V. 4 (4). — P. 757—774.
3. Postnikov A. G. On sum of characters modulo of power prime // *Izv. Akad. Nauk USSR, Ser. Math.* — 1955. — V. 19 (1). — P. 11—16 (in Russian).
4. Varbanets S. General Kloosterman sums over ring of gaussian integers // *Ukr. Math. J.* — 2007. — V. 59 (9). — P. 1179—2000.

# GENERALISED LANDAU PROBLEM

V. E. Breide

*I. I. Mechnikov Odessa National University, Odessa, Ukraine*

[sygrlinn@yahoo.com](mailto:sygrlinn@yahoo.com)

**Introduction.** E. Landau ([4], pp. 641—669) indicated the asymptotic formulae for the number  $N_r(x)$  of positive numbers  $n \leq x$  of which prime divisor belongs by one progression  $p \equiv l_i \pmod{q}, i = 1, \dots, r$  with fixed positive number  $q > 1$ :

$$N_r(x) = \frac{c_0(r)x}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x \log \log x}}\right)$$

For research of similar problem in the ring of Gaussian integers we will generalize the Landau's result in present paper.

**Auxiliary results.** Let  $r \left(\leq \frac{1}{2}\right)$  be a positive number. We define the contour  $C(x_0, r)$  by starting from the circle  $\{s \mid |s - x_0| = r\}$ , removing the point  $s = x_0$ , and proceeding on the remaining portion of the circle in the anticlockwise direction. Let  $C_0 = C(1, r)$  and  $C_1 = C(b_1, r)$  if  $x_0 = b_1$ , where  $b_1 \left(b_1 < \frac{1}{\log x}\right)$  is an exceptional zero for  $Z_0(s, \chi)$  with an exceptional real character  $\chi$  modulo  $\gamma$  (if such zero exists). Let also  $L^-, L^+$  be defined as the intervals on real straightlines

$$\begin{aligned} L^- &= \left[ (x_0 - r)e^{-i\pi}, \left(x_0 - \frac{1}{\log x}\right)e^{-i\pi} \right] \\ L_+ &= \left[ \left(x_0 - \frac{1}{\log x}\right)e^{i\pi}, (x_0 - r)e^{i\pi} \right] \end{aligned} \tag{1}$$

Let  $C_0^*$  (or  $C_1^*$ ) be the contour going along  $L^-$  starting from  $(x_0 - r)e^{i\pi}$ , then on  $C\left(1, \frac{1}{\log x}\right)$  (or  $C\left(b, \frac{1}{\log x}\right)$ ), and, finally, on  $L^+$ , with  $x_0 = 1$  or  $b$ .

Consider the Hecke zeta-function  $Z_m(s)$  defined for  $\operatorname{Re} s > 1$  by the following series

$$\begin{aligned} Z_m(s) &= \sum_{0 \neq \omega \in G} e^{4mi \arg \omega} N(\omega)^{-s} \\ Z_m(s, \chi) &= \sum_{0 \neq \omega \in G} e^{4mi \arg \omega} N(\omega)^{-s} \chi(\omega) \end{aligned}$$

where  $\chi(\omega)$  is a group character on  $G_\gamma^*$ .

This function we will call  $Z$ -function Hecke of first or second genus.

It well-known that  $Z_m(s)$  and  $Z_m(s, \chi)$  are the entire functions if  $m \neq 0$  or  $\chi$  is nonprincipal character modulo  $\gamma$ . For  $m = 0, \chi = \chi_0$  the Hecke Zeta-functions are holomorphic functions on whole complex plane except point  $s = 1$  where  $Z_0(s)$  and  $Z_0(s, \chi_0)$  have a simple pole with residue  $\pi$  (or  $\pi \prod_{p|\gamma} (1 - N(p)^{-1})$  respectively).

**Lemma 1.1** *Let  $\chi$  be a character of the group  $G_\gamma^*$  and let  $Z_m(s, \chi)$  be any Hecke zeta-function. Then there is an absolute positive constant  $c$  such that in the region*

$$\operatorname{Re} s > 1 - c \left( \log \left( N(\gamma) (t^2 + m^2 + 3) \right) \right)^{\frac{2}{3}} \left( \log \log \left( N(\gamma) (t^2 + m^2 + 3) \right) \right)^{-1} > \frac{3}{4} \quad (2)$$

there is no zero of  $Z_m(s, \chi)$  in the case of complex  $\chi$  or  $m \neq 0$ . For at most one real  $\chi_1, \chi_1 \neq \chi_0$ , and  $m = 0$  there may be in (7) a simple zero  $(1 - b_1)$  of  $Z_m(s, \chi_1)$ ; and moreover  $b_1 > c(\varepsilon)(N(\gamma))^{-\varepsilon}, \varepsilon > 0$  be an arbitrary positive number.

Next, for  $m = 0$  we have

$$Z_0(s) = 4\zeta(s)L(s, \chi_4) = \frac{\pi}{s-1} + \pi \left( E + \frac{L'(1, \chi_4)}{L(1, \chi_4)} \right) + a_1(s-1) + a_2(s-1)^2 + \dots,$$

$a_i, a'_i, i = 1, 2, \dots$  are the computable constants.

Further, let  $\chi_0$  be the principal character modulo  $\gamma$  of the group  $G_\gamma^*$ . Then at a point  $s = 1$  it is easy to obtain that

$$\begin{aligned} Z_0(s, \chi) &= Z_\emptyset(s, \chi_0) = 4\zeta(s) \prod_{p|\gamma} (1 - N(p)^{-s}) L(s, \chi_4) = \\ &= \frac{\pi \tilde{\varphi}(\gamma)}{N(\gamma)} \times \frac{1}{s-1} + \frac{\pi \tilde{\varphi}(\gamma)}{N(\gamma)} \sum_{p|\gamma} \frac{\log N(p)}{N(p) - 1} + \frac{\tilde{\varphi}(\gamma)}{N(\gamma)} (\pi E + 4L'(1, \chi_4)) + a'_1(s-1) + \\ &+ a_2'(s-1)^2 + \dots = \frac{\pi \tilde{\varphi}(\gamma)}{N(\gamma)} \times \frac{1}{s-1} + b_{0,\gamma}(\chi_0) + a'_1(s-1) + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

where

$$b_{0,\gamma}(\chi_0) = \frac{\pi \tilde{\varphi}(\gamma)}{N(\gamma)} \left[ E + \frac{L'(1, \chi_4)}{L(1, \chi_4)} + \sum_{p|\gamma} \frac{\log N(p)}{N(p) - 1} \right], \quad (4)$$

$L(s, \chi_4)$  is L-function of Dirichlet with the non-principal character mod 4;  $E$  is the Euler's constant.

Let  $C(a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  be the circle  $|s - a| = \frac{1}{\log x}$ , and let  $L^-(a_1, a_2)$  and

$L^+(a_1, a_2)$ ,

$0 < a_2 < a_1$ , be defined as the intervals on straightlines

$$\begin{aligned} L^-(a_1, a_2) &= \left[ (1 - a_1)e^{-i\pi}, (1 - a_2)e^{-i\pi} \right] \\ L^+(a_1, a_2) &= \left[ (1 - a_1)e^{i\pi}, (1 - a_2)e^{i\pi} \right] \end{aligned}$$

We denote

$$D(b) = L^-\left(\alpha(0), b - \frac{1}{\log x}\right) \cup C(b) \cup L^+\left(\alpha(0), b - \frac{1}{\log x}\right)$$

where

$$1 < \alpha_1 < b \leq 1, \alpha(t) := 1 - \frac{c}{10} \log(|t| + 30)^{-\frac{2}{3}} (\log \log(|t| + 30))^{-\frac{1}{3}}$$

with  $c$  from Lemma 2.

**Lemma 2.2** *Let  $a \in \mathbb{C}$ ,  $b \in (0, 1]$ . Then for  $x \rightarrow \infty$*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{D(b)} x^{(s-b)} (s-b)^a ds = \\ &= \frac{\Gamma(a+1) \sin \pi a}{(\log x)^{a+1} \pi} + O\left(\exp\left(-c(\log x)^{\frac{3}{5}}\right) (\log \log x)^{\frac{1}{5}}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

with an absolute constant  $A > 0$ .

**Main results.** Consider the class  $\mathcal{M}_{a,b,c}$  of multiplicative function over  $\mathbb{G}$  under conditions:

$$f(p) = a, f(p^2) = bN(p) + c, f(p^k) \ll N(p)^k, k = 3, 4, \dots$$

Let us hold fix 1 the Gaussian integers  $\delta_1, \dots, \delta_l$  such that  $\delta_i \not\equiv \delta_j \pmod{\gamma}, (\delta_i, \gamma) = 1, i, j = 1, \dots, l; i \neq j$ .

We put

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{if for every } p, p|\omega \text{ follows } p \equiv \delta_i \pmod{\gamma} \text{ with some } i, 1 \leq i \leq l; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

We will build an asymptotic formula for the sum

$$\sum_{N(\omega) \leq x} z^{\nu(\omega)} f(\omega) \theta(\omega), z \in \mathbb{C}$$

Our goal is to prove the next theorem.

**Theorem 1.3** *In notation above, when  $x \rightarrow \infty$ , the following asymptotic formulae takes place:*

$$\sum_{N(\omega) \leq x} z^{\nu(\omega)} f(\omega) \theta(\omega) = A_0(z) x (\log x)^{-\frac{(a+b)z}{\tilde{\varphi}(\gamma)}} + A_1(z) x^{1-\beta_1} (\log x)^{-\frac{az}{\tilde{\varphi}(\gamma)}} + \\ + A_2(z) x^{\frac{1+\beta_1}{2}} (\log x)^{-\frac{bz}{\tilde{\varphi}(\gamma)}} + O\left(x \exp\left(-c(\log x)^{-\frac{1}{3}}\right) (\log \log x)^{-\frac{1}{3}}\right)$$

where  $A_0(z), A_1(z), A_2(z)$  — calculated and bounded functions of variable  $z, |z| \leq 2$ ;  $\beta_1$  — is an exceptional zero of the Dirichlet's L-function  $Z(s, \chi)$  with an exceptional character  $\chi_1 \pmod{\gamma}$  (if such zero exist);  $\tilde{\varphi}(\gamma)$  is the Euler function over the ring of the Gaussian integers;  $c > 0$  — is an absolute constant.

In case if  $f(\omega) \equiv 1$  we have the next generalization of the Landau's theorem.

**Theorem 2.4** *Let  $x$  is a real number,  $\gamma$  is an integer Gaussian number,*

$$N(\gamma) \ll \exp\left(c \frac{(\log x)^{\frac{2}{3}}}{(\log \log x)^{\frac{1}{3}}}\right). \text{ Then, for any set of the integer Gaussian numbers}$$

$\delta_1, \dots, \delta_l$  the next asymptotic formulae is right:

$$N_l(x; \delta_1, \dots, \delta_l; \gamma) = A_0(z) \frac{x}{(\log x)^{1-d_1}} + A_1(z) \frac{x^{1-\beta_1}}{(\log x)^{1-d_2}} + \\ + A_2(z) \frac{x^{\frac{1+\beta_1}{2}}}{(\log x)^{1-d_3}} + O\left(x e^{-c(\log x)^{-\frac{1}{3}}} (\log \log x)^{-\frac{1}{3}}\right)$$

where  $N_l(x; \delta_1, \dots, \delta_l; \gamma)$  denotes the number of Gaussian integers  $\omega, N(\gamma) \leq x$ , of which every prime divisor belongs by one progression  $p \equiv \delta_i \pmod{\gamma}, i = 1, \dots, r$

**Conclusion.** The method of provements in the Theorem 1 and 2 may be applied in case of the ring of the integer rational numbers, that's why the results of Landau [4] and Lewin and Falleib [5] hold for the growing difference  $q$  in progression.

### References

1. De Koninck J.-M. and Katai I. Arithmetic functions and their coprimality, 2010.
2. Fogels E., On the zeros of Hecke's L-function, II, Acta Arithmetica, VII (1962), 136—147.
3. E. Hecke, Uber eine neue Art von Zetafunktionen, Math. Zeit. 6 (1920), 1151. Landau E., Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd II, Teubner, Leipzig, 1909
4. Levin B. V. and Fainleib, Applications of some integral equations to problems in number theory, Uspekhi Mat. Nauk. 22 (3) 135 (1976), 119—198 (in Russian), Russian Math. Surveys, 22 (3) (1967), 119—204 (in English).
5. Kaufman R.M., An estimate of Hecke's L-functions of the Gaussian field on the line  $\text{Re } s = \sigma$ , DAN Belorus. SSR, 22 (1978), 25—82. (Russian)
6. Kowalski E. and Iwaniec H., Analytic number theory, American Mathematical Society, 2004
7. Prachar K., Distribution of prime numbers, Addition I of M. Barban and A. Vinogradov to Russian translate, M. 1967, 511 pp.

## VARIANTS OF A COMMUTATIVE BAND

O. O. Desiateryk

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

[narenai@yandex.ru](mailto:narenai@yandex.ru)

Let  $S$  be a semigroup and  $a \in S$ . For  $x, y \in S$  let  $x *_a y = xay$ , then  $*_a$  is an associative binary operation on  $S$ . Semigroup  $(S, *_a)$  is called *the variant* of  $S$ .

Commutative band  $S$  is a lower semilattice with respect to the partial order  $a \leq b \Leftrightarrow ab = a$ .

Variants of semilattices are already studied in [2].

As the interval  $S_{[0,a]}$  of commutative band with zero we denote the set

$$S_{[0,a]} = \{x \in S \mid x \cdot a = a \cdot x = x\}.$$

Commutative band is called locally finite, if all its intervals are finite.

**Theorem 1.** Two variants  $(S, *_a)$  and  $(S, *_b)$  of a locally finite commutative band  $S$  with zero are isomorphic if and only if there exist an isomorphism from the interval  $S_{[0,a]}$  to the interval  $S_{[0,b]}$ , which saves the weights of all elements.

**Corollary 1.** All variants of a set  $N$  with usual order are pairwise non-isomorphic.

Let  $(N, |)$  — is a set of natural numbers with operation  $x * y = GCD(x, y)$ . For each  $n \in N$  define multiset

$$pow(n) = \left\{ k_p \mid p - \text{prime}, k_p > 0, p^{k_p} \mid n, \text{ and } p^{k_p+1} \nmid n \right\}.$$

**Corollary 2.** Variants  $((N, |), *_a)$  and  $((N, |), *_b)$  are isomorphic if and only if sets  $pow(a)$  and  $pow(b)$  for this numbers are coincide.

### References

1. Clifford A. H., Preston G. B. The algebraic theory of semigroups. V.1 — American Mathematical Society, 190 Hope St., Providence, Rhode Island, 1961.
2. Ganyushkin O. G., Desiateryk O. O. Variants of semilattice // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics and Mathematics. — 2013. — **4**. — P. 12—16.

**FUNCTIONS ON 2-TORUS WHOSE KRONROD — REEB  
GRAPH IS A TREE**

**Bohdan Feshchenko**

*Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

[fb@imath.kiev.ua](mailto:fb@imath.kiev.ua)

Let  $M$  be a smooth compact surface,  $X \subset M$  be a closed (possibly empty) subset, and  $\mathcal{D}(M, X)$  be the group of diffeomorphisms of  $M$  fixed on some neighborhood of  $X$ . Then  $\mathcal{D}(M, X)$  acts from the right on  $C^\infty(M)$  by following rule

$$\gamma : C^\infty(M) \times \mathcal{D}(M, X) \rightarrow C^\infty(M), \gamma(f, h) = f \circ h.$$

Given  $f \in C^\infty(M)$  let

$$\mathcal{S}(f, X) = \{h \in \mathcal{D}(M, X) \mid f \circ h = f\},$$

$$\mathcal{O}(f, X) = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}(M, X)\}$$

be respectively the stabilizer and the orbit of  $f$  under the action  $\gamma$ . We will endow the spaces  $\mathcal{D}(M, X)$  and  $C^\infty(M)$ . Let also

$$\mathcal{S}'(f, X) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, X),$$

where  $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$  is the identity component of  $\mathcal{D}(M, X)$ .

Let  $G, H$  and  $Q$  be groups, and let  $\text{Map}(G, H)$  be a set of all maps from  $G$  to  $H$ , not necessary homomorphisms. The group

$$G \wr_Q H := \text{Map}(Q, G) \rtimes H$$

is the Cartesian product  $\text{Map}(Q, G) \times H$  with the multiplication

$$(\alpha_1, h_1) \cdot (\alpha_2, h_2) = ((\alpha_1 \circ h_2) \cdot \alpha_2, h_1 h_2),$$

for

$$(\alpha_1, h_1), (\alpha_2, h_2) \in \text{Map}(Q, G) \rtimes H.$$

The group  $G \wr_Q H$  is called wreath product of  $G$  and  $H$  over  $Q$ .

**Theorem. 1** *Let  $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$  be a Morse function on 2-torus  $T^2$  such that its Kronrod — Reeb graph  $\Gamma(f)$  is a tree. Then there exist numbers  $n, m \in \mathbb{Z}_+$ , a critical level  $V$  of  $f$  such that the complement of  $V$  in  $T^2$  is a union of 2-disks  $\{D_i\}$ , and there is an isomorphism*

$$\pi_1 \mathcal{O}(f) \cong \prod_i \pi_0 \mathcal{S}'(f|_{D_i}, \partial D_i) \wr_{\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m} \mathbb{Z}^2$$

# ENUMERATION OF 2-COLOR CHORD DIAGRAMS OF MAXIMAL GENUS UNDER ROTATION AND REFLECTION

O. A. Kadubovs'kyi, L. V. Voschana

*Donbas State Teachers' Training University, Slovyans'k, Ukraine,*

[kadubovs@ukr.net](mailto:kadubovs@ukr.net), [voschanaya\\_lina@mail.ru](mailto:voschanaya_lina@mail.ru)

In this paper we determine the number of nonequivalent 2-color chord diagrams (of order  $n$ ) with one black and one white cycle (2-color chord diagrams of maximal genus) under the action of dihedral group (of order  $2n$ ).

**Definition 1.** A configuration (graph) on a plane that consists of a circle and  $n$  chords that connects  $2n$  different points on it is called a chord diagram of order  $n$ , or, briefly, an  $n$ -diagram. An  $n$ -diagram whose arcs of the circle are colored in two colors (black and white) so that any two neighboring arcs have different colors is called a 2-color chord diagram [e. g., 2].

All 2-color diagrams are constructed on a unit circle (in  $\mathbb{R}^2$ ) with fixed clockwise enumeration of  $2n$  points on it, which are the vertices of a regular  $2n$ -polygon.

**Definition 2.** A 2-color chord diagram that does not contain chords that connect points with numbers of the same parity is called an  $O$ -diagram.

A sequence of chords and black (white) arcs that form a homeomorphic image of the oriented circle is called a  $b$ -cycle ( $w$ -cycle) of a 2-color chord diagram with given direction on the circle (see, e.g., [2]).

Denote the set of all  $O$ -diagram with  $n$  chords that have one black and one white cycles by  $\mathfrak{S}_{n;1,1}^O$ .

**Definition 3.** A signed permutation is a permutation of  $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$  where each element has an additional «+» or «-» sign.

Recall that symmetric group  $S_m$  is the set of all permutations of  $[m]$ , together with the usual function composition  $\circ$ , applied from right to left. The **hyperoctahedral group**  $S_m^\pm$  is the set of all signed permutations of  $m$  elements, together with the usual function composition  $\circ$ , applied from right to left [e.g., 4].

**Definition 4** [e.g., 1, 3]. Given a signed permutation  $\pi$  in  $S_m^\pm$ , transform it into an unsigned permutation  $\pi'$  in  $S_{2m}$  by mapping  $\pi_i$  onto the sequence  $(2\pi_i - 1, 2\pi_i)$  if  $\pi_i > 0$ , or  $(2|\pi_i|, 2|\pi_i| - 1)$  if  $\pi_i < 0$ , for  $1 \leq i \leq m$ .

The **breakpoint graph** of  $\pi$  is the undirected bicoloured graph  $BG(\pi)$  with ordered vertex set  $(\pi'_0 = 0, \pi'_1, \dots, \pi'_{2m}, \pi'_{2m+1} = 2m + 1)$  and whose edge set is the union of the following two perfect matchings of  $V(BG(\pi))$ :

black edges  $\delta_B(\pi) = \{ \{ \pi'_{2i}, \pi'_{2i+1} \} \mid 0 \leq i \leq m \}$ ;

grey edges  $\delta_G = \{ \{ 2i, 2i - 1 \} \mid 0 \leq i \leq m \}$ .

**Definition 5.** The *Hultman number*  $S_H(2m;1)$  counts the number of permutations in  $S_{2m}$  whose breakpoint graph decomposes into 1 (one) cycles. The *signed Hultman number*  $S_H^\pm(m;1)$  counts the number of permutations in  $S_m^\pm$  whose breakpoint graph decomposes into 1 (one) cycles [3].

**Lemma 1.** For  $n = 2m + 1$  the number of symmetric diagrams (relatively fixed axis of symmetry) from the set  $\mathfrak{S}_{n;1,1}^O$  is equal to the *signed Hultman number*  $S_H^\pm(m;1)$ .

**Theorem 1.** For  $n = 2m + 1$  the number of the nonequivalent diagrams from the set  $\mathfrak{S}_{n;1,1}^O$  under the action of the dihedral group can be calculated by the relation

$$P^{**}(n) = \frac{1}{2} \left( P^*(n) + S_H^\pm(m;1) \right),$$

where  $P^*(n)$  is the number of the nonequivalent diagrams from the set  $\mathfrak{S}_{n;1,1}^O$  under the action of the cyclic group and may be calculated by the relation (it was established in [2])

$$P^*(n) = \frac{1}{n} \left( P(n) + \sum_{i|n, i \neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \phi^*\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \cdot P(i) \right),$$

where  $P(n) = \frac{2(n-1)!}{n+1} = \frac{(2m)!}{m+1} = |\mathfrak{S}_{n;1,1}^O|$  is the *Hultman number*  $S_H(2m;1)$ ;

$\phi(q) = |\{1 \leq h < q \mid \gcd(h, q) = 1\}|$  is the Euler totient function;

$\phi^*(q) = |\{1 \leq h < q \mid \gcd(h, q) = 1 = \gcd(h+1, q)\}|$ .

**Remark 1.** The explicit formula for  $S_H^\pm(m;1)$  (for  $SPMT(m+1)$  in original terms of the author's) has been derived by Hanlon, Stanley and Stembridge [4] (sequence **A001171** in [5]).

### References

1. Bafna V., Pevzner P. A. Genome Rearrangements and Sorting by Reversals // SIAM Journal on Computing. — 1996. — Vol. 25, Issue 2. — P. 272—289.
2. Kadubovs'kyj O. A class of chord diagrams of maximal genus // Visnyk. Seriya: Fizyko-Matematychni Nauky. Kyïvs'kyj Universytet Imeni Tarasa Shevchenka. — 2006. — No 1. — P. 17—27 (in Ukrainian).
3. Grusea S., Labarre A. The distribution of cycles in breakpoint graphs of signed permutations // Discrete Applied Mathematics. — 2013. — Vol. 161, Issues 10—11. — P. 1448—1466.
4. Hanlon P. J., Stanley R. P., Stembridge J. R.. Some combinatorial aspects of the spectra of normally distributed random matrices // Contemporary Mathematics. — 1992. — **138**. — P. 151—174.
5. The OEIS Foundation Inc., «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences», published electronically at <http://oeis.org>.

# MÖBIUS INVARIANTS OF RATIONAL $\mathbb{C}P^1$ MAPPINGS

**N. Kononenko, V. Lychagin**

*Department of Mathematics, ONAFT, Odessa, Ukraine*

*Department of Mathematics, University of Tromsø, Norway*

[kononenko@ukr.net](mailto:kononenko@ukr.net), [valentin.lychagin@uit.no](mailto:valentin.lychagin@uit.no)

We consider equivalence of rational mappings  $f : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  under conjugations by Möbius transformations of  $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$  :

$$f \mapsto A \circ f \circ A^{-1},$$

$A \in \mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$ , and their invariants.

Jet  $J^k$  be the spaces of  $k$ -jets of local conformal transformations of  $\mathbb{C}P^1$ . The above action of the Möbius groupe  $G = \mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$  can be prolonged to  $G$ -action on spaces  $k$ -jets  $J^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$

These spaces are algebraic manifolds,  $G$  — is an algebraic group and the above actions are algebraic.

Rational  $G$  — invariants functions on  $J^k$  will be called Möbius invariants on order  $\leq k$ . If  $J$  is a Möbius invariant of order  $\leq k$  and  $f$  is a (local) conformal mapping then by value  $J$  at  $f$  we mean the restriction of  $J$  on the graph of  $k$ -jet  $j_k(f) \subset J^k$ .

Let  $F_k$  be the field of Möbius invariants of order  $< k$ . Then projections  $J^{k+1} \rightarrow J^k$  induce embeddings  $F_k \hookrightarrow F^{k+1}$ . Let  $F = \lim F_k$  be the field of all Möbius invariant. The Rosenlich theorem (see, [1]) shows that fields  $\overrightarrow{F_k}$  separate regular  $G$  — orbits is  $J^k$ , and the Lie-Tresse theorem (see, [2]) shows that the field  $F$  is generated by a finite number of basic invariants and invariant derivations.

In our case the first non trivial Möbius invariants are of order 2 and in the canonical coordinates  $(z, w, w_1, w_2, \dots)$  in  $J^k$  they are generated by a single invariant

$$J_2 = \frac{1}{w_1^3} (zw_2 - ww_2 + 2w_1 + 2w_1^2)^2.$$

In the order two there is also  $G$  — invariant derivation

$$\nabla = \frac{(z - w)(zw_2 - ww_2 + 2w_1 + 2w_1^2)}{w_1^2} \frac{d}{dz}$$

and  $G$  — invariant coframe

$$\omega = \frac{w_1^2}{(z - w)(zw_2 - ww_2 + 2w_1 + 2w_1^2)} dz.$$

Computing codimensions of regular orbits and using the Lie-Tresse theorem give us the following result.

**Theorem 1.1** *The field  $F$  of Möbius invariants of local conformal mappings of  $\mathbb{C}P^1$  is generated by invariant  $J_2$  and invariant derivation  $\nabla$ . This field separates regular orbits.*

**Remark.**

(1) Any (local) conformal map  $f : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  defines the set of functions  $J_k(f)$ ,  $k \geq 3$ , where  $J_k = \nabla^{k-2}(J_2)$ , and differential 1-form  $\omega(f)$  on  $\Omega^1(\mathbb{C}P^1)$  invariantly connected with  $f$ .

(2) Invariant  $J_2$  identically equals zero on (and only on) elements of  $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$ .

(3) Differential form  $\omega(f)$  has poles in two types of points: (i) fixed points of  $f$ , and (2) points, where mapping  $f$  could be approximated by elements of  $\mathbb{P}SL_2$  up to 3-rd order.

Applying theorem 1 to rational mappings  $f : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  we get the following construction.

Thus, let  $f : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  be a rational mapping and let  $J_2(f)$ ,  $J_3(f)$  be values of Möbius invariants of order 2 and order 3 at  $f$ .

Then  $J_2(f)$  and  $J_3(f)$  are rational functions of  $\mathbb{C}P^1$ .

Let  $J_2(f) = \frac{P_1}{Q_1}$  and  $J_3(f) = \frac{P_2}{Q_2}$  were  $P_i$ ,  $Q_i$  are relatively prime

homogeneous polynomials. Then resultant of polynomials  $P_1 - uQ_1$  and  $P_2 - vQ_2$  gives us 3-rd order differential equation

$$\zeta_f = \{R_f(J_2, J_3) = 0\} \subset J^3.$$

Remark that  $\zeta_f$  is algebraic subvariety of  $J^3$ .

By the construction this equation has rational solution  $f$  and is also invariant under the Möbius transformations.

Considering equation  $\zeta_f$  locally we see that the solution space of  $\zeta_f$  has dimension  $\leq 3$ , and on the other hand mappings  $gfg^{-1}$ ,  $g \in \mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$ , are solutions too. It is easy to check that centralizer of  $f$  in the Möbius group  $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$  is discrete. Therefore the orbit  $G(j_3(f)) \subset \zeta_f$  is connected 4-dimensional submanifold and therefore the orbit coincide with component of  $\zeta_f$  which contains  $j_3(f)$ . Denote this component by  $\zeta_f^\circ$  and call it *constutive equation* for  $f$ .

**Example 2** *Let's consider the Joukowski mapping  $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ . Then  $R_f(u, v) = -4u + 3v - 9$  and the constutive equation for the Joukowski map has the form:*

$$(w - z)^2(3w_1w_3 - 4w_2^2) - 2(w - z)w_1(w_1 + 1) + w_1^2(w_1 - 2)(2w_1 - 1) = 0.$$

By the construction the constutive equation has only rational solutions, they are images of the rational mapping  $f$  under action of the Möbius group.

In other words polynomials  $R_f(u, v)$ , or more precisely, constitutive equation  $\zeta_f^\circ$  defines  $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$  — orbit of rational mapping  $f$ .

**Theorem 2.3** *Two rational mappings  $f, g : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  are  $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$ -equivalent if and only if their constative equations coincide.*

### References

1. Rosenlicht M. A remark on quotient spaces // An. Acad. Brasil Ciênc. — 1963. — **35**. — P. 487—489.
2. Kruglikov B., Lychagin V. Global Lie-Tresse theorem // arXiv:1111.5480 [math.DG]. — 2013. — 48 p.

## ON RIGID DERIVATIONS IN RINGS

M. P. Lukashenko, O. D. Artemovych

*PreCarpathian National University of Vasyl Stefanyk, Ivano-Frankivsk, Ukraine*  
[bilochka.90@mail.ru](mailto:bilochka.90@mail.ru), [artemovych@hotmail.com](mailto:artemovych@hotmail.com)

Throughout, let  $R$  be an associative ring with 1 and  $DerR$  the set of all derivations of  $R$ . A map  $\delta : R \rightarrow R$  is called a *derivation* of  $R$  if  $\delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y)$  and  $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$  for any  $x, y \in R$ .

**Proposition 1.1** *Let  $R$  be a ring. Then the following conditions hold:*

- 1) if  $d$  is a nonzero derivation of a commutative ring  $R$ , then  $ad(a) \neq 0$  for some  $a \in R$ ,
- 2) there exists an element  $a \in R$  and a nonzero derivation  $d \in DerR$  such that  $ad(a) \neq 0$ .

We say that  $R$  is a  *$d$ -rigid ring* (or a *derivation  $d$  is rigid*), where  $d \in DerR$ , if for any  $a \in R$  it holds  $d(a) = 0$  or  $ad(a) \neq 0$ . Clearly, the zero derivation  $0_R$  of  $R$  is rigid. Every derivation of an integral domain is rigid.

**Corollary.2** *Let  $R$  be a semiprime ring with the derivation  $d$  and  $a \in R$ . If  $ad(R)^n = 0$ , where  $n$  is a fixed integer, then  $d = 0_R$ .*

**Proposition 2.3** *Let  $R$  be a 2-torsion-free semiprime ring. Then all derivations of  $R$  are rigid if and only if  $R$  is reduced (that is without nonzero nilpotent elements).*

Recall [1] that a ring  $R$  is called *differentially trivial* if  $DerR = \{0_R\}$ . Commutative Artinian rings with derivations to be rigid are characterized in the following

**Theorem.4** *Let  $R$  be a commutative Artinian ring. Then one of the following holds:*

- 1)  $R$  has a non-rigid derivation,
- 2)  $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$  is a ring direct sum of rings  $R_1, \dots, R_n$  every of which is a field or a differentially trivial  $v$ -ring.

### References

1. Artemovych O. D. Differentially trivial and rigid rings of finite rank // Periodica Mathematica Hungarica. — 1998. — **36** (1—2), P. 1—16. DOI 10.1023/A:1004648818462

# LOGARITHMETICS OF QUANTUM PHYSICS

E. A. Machusky

NTUU «Kyiv Polytecnic Institute», Kyiv, Ukraine

sivera@ukr.net

The basic equation of quantum physics is the black body irradiation equation:

$$\begin{aligned} &(\text{Wavelength unit}) * (\text{Temperature unit}) = (\text{Wien displacement number}) = \\ &= (\text{Planck unit})/(\text{Boltzmann unit}) * (\text{Speed of light unit})/(x\text{-root number}), \\ &L * T = dW = (h * c) / (k * x), \end{aligned}$$

where x is the root of transcendental equation

$$x * e^x / ((e^x - 1) - 5) = 0, \quad x = 4.96511423174...$$

The equation may be true only if L, T, h, k, c are the constants or the medians of the quasi-harmonic functions.

Standard physical model is based on the constant conception but Heisenberg uncertainty principle and Schrödinger wave equation give us the arguments to the priority of quasi-harmonic conception.

Let us try to find the quasi-harmonic link of natural set numbers and the transcendental numbers pi and e. Harmonic number of inverse natural set is:

$$\begin{aligned} \text{Alpha1} = A1 &= 1/137 = 0.007299270072992700729927... = \\ &= 729927/10^8 + 729927/10^{16} + 729927/10^{24}... \end{aligned}$$

Number 1 is the quantum of the natural set:

$$1 = (10^8 - 1)/10^8 + (10^8 - 1)/10^{16} + (10^8 - 1)/10^{24}...$$

$$1 = ((100 - 1) * (100 + 1) + 100^2 + 1) / (2 * 100^2),$$

$$1 = [(100^2 - 1) * (100^2 + 1)] / 10^8 + [(100^2 - 1) * (100^2 + 1)] / 10^{16} + ...$$

$$1 = 99 * 101 * 73 * 137 / 10^8 + 99 * 101 * 73 * 137 / 10^{16} + 99 * 101 * 73 * 137 / 10^{24} + ...$$

$$1 = [(99 * 101) + (73 * 137)] / (2 * 10^4) = [(99 * 101) * (73 * 137) + 1] / (10^4 * 10^4).$$

Then the prime alphabet of the inverse natural harmonic calculation system is {1, 2, 3, 5, 11, 101, 73, 137}.

The third power of the binary calculation system infinite number:

$$(1.111111111111...) ^ 3 = 1.37174211248285322... =$$

$$= [137 + 0 * (137 - 100)] / 10^2 + [137 + 1 * (137 - 100)] / 10^5 + [137 + 2 * (137 - 100)] / 10^8 + ...$$

The prime alphabet is infinite {1, 2, 3, 5, 7, 11, 17...}.

$$(1.111111111111...) ^ 3 = (1000/729) ^ 3 = [10^3] / [9^3] = [(2^3) * (5^3)] / [3^(2*3)].$$

$$1/100 / (1.111111111111...) ^ 3 = 0.00729000000... = \text{AlphaS} = \text{AS}.$$

The prime alphabet is {1, 2, 3, 5}. The key number is 729 = 3^6.

Let us now try to establish the algebraic link between the numbers pi, e, 137, 100 and the natural set. 12-digit median number of pi...e is:

$$[\text{sqrt}((\text{pi}^2 + \text{e}^2) / 2) + (\text{pi} + \text{e}) / 2 + \text{sqrt}(\text{pi} * \text{e}) + 2 * \text{pi} * \text{e} / (\text{pi} + \text{e})] / 4 =$$

$$= 2.9261098 + 1.618 * 10^{-8}, \text{ where } 1.618 \text{ is "golden ratio".}$$

$$1/100 / (1.111111111111...) ^ 3 = 0.00729000000... = \text{AlphaS} = \text{AS}.$$

$$(\text{pi} * \text{e} / 100) ^ 2 = 0.00729270605... = \text{Alpha0} = \text{A0}.$$

$$1/137 = 0.00729927007... = \text{Alpha1} = \text{A1}.$$

$$1/[\ln(\text{pi}) + 59 * \ln(10)] = 0.00729941657... = \text{AlphaL} = \text{AL}.$$

The geometric link between the numbers AS, A0, A1, AL and the natural set:  
 $137=11^2+4^2$ ,  $137=n^0+2^3+2^7$ .

$$1/137=1/(11^2+4^2).$$

$$A(n/2)=1/[(11*(1+n/2*(\sqrt{AL/A0}-1)))^2+(4*(1+n/2*(\sqrt{AL/AS}-1)))^2].$$

It is 137-ellipse  $n/2$  alpha-equation.

$$A(n^2)=1/[(11*(1+n^2*(\sqrt{AL/A0}-1)))^2+(4*(1+n^2*(\sqrt{AL/A0}-1)))^2].$$

It is 137-ellipse  $n^2$  alpha-equation.

If  $n=0$ ,  $A(n/2)=A(n^2)=1/137=A1$ . If  $n=\infty$ ,  $A(n/2)=A(2*n)=0$ .

The algebraic link between  $\pi$ ,  $e$ , AS, A0, A1, AL and the natural set:

$$hS=2*\pi*[1+2/100*(e+AS*(1+\sqrt{2*\pi*e/100}))]=6.62606935922\dots$$

It is circled Euler-spiral AS-equation.

$$h0=2*\pi*[1+2/100*(e+A0*(1+\sqrt{2*\pi*e/100}))]=6.62606983982\dots$$

It is circled Euler-spiral A0-equation.

$$h1=2*\pi*[1+2/100*(e+A1*(1+\sqrt{2*\pi*e/100}))]=6.62607100554\dots$$

It is circled Euler-spiral A1-equation.

$$hL=2*\pi*[1+2/100*(e+AL*(1+\sqrt{2*\pi*e/100}))]=6.62607103155\dots$$

It is circled Euler-spiral AL-equation.

Using 12-digit display arithmetic calculator we can obtain incorrect values:

$$\sqrt{(hS^2+hL^2)/2}=6.62607019537=(\text{Square root mean}).$$

$$(hS+hL)/2=6.62607019535=(\text{Arithmetical mean}).$$

$$\sqrt{hS*hL}=6.62607019537=(\text{Geometrical mean}).$$

$$2*hS*hL/(hS+hL)=6.62607019540=(\text{Harmonic mean}).$$

Mean harmonic cannot be more than mean geometrical.

Mean geometrical cannot be more than mean arithmetical.

Root mean square cannot be less than any mean!

It is a result of "golden ratio"  $\pi\dots e$  median bifurcation.

All the above calculated h-numbers lie inside the experimental uncertainty of finest Planck constant measurement set:

$$h=6.6260745(19) \quad \text{by X-ray crystal density method,}$$

$$h=6.6260724(57) \quad \text{by Magnetic resonance method.}$$

$$h=6.62606957(29) \quad \text{CODATA-2010 recommended value.}$$

$$h=6.62606889(23) \quad \text{by Watt balance method.}$$

$$h=6.6260678(27) \quad \text{by Josephson method.}$$

$$h=6.6260657(88) \quad \text{by Faraday method.}$$

Then we can suppose zero-Planck number is

$$h(A0)=6.62606983982$$

and the rest Planck numbers are the result of dispersion of normal digital distribution defined by Gauss information entropy argument  $\sqrt{2*\pi*e}$ .

We can suppose that the rest constants of standard physical model are the medians of quasi-harmonic functions caused by rotation of pulsing alpha-ellipse inside the spherical space restricted by the Planck number information entropy and write down the next equation:

$$h(A1)-h(A0)=[(4*\pi*10^{-7})*[2*e/(\pi+e)]]$$

Magnetic permeability of vacuum in SI measurement system ( $4\pi \cdot 10^{-7}$ ) is the part of  $h(A1)-h(A0)$  finite difference.

Speed of light unit is the root of transcendental equation:

$$c = [hN + 4\pi \cdot c \cdot 10^{-18}]^{64} \cdot [10^7] = 299792457.867\dots$$

where  $hN = \text{Integer}[h(AC) \cdot 10^8] / (2\pi) = 1.05456978$ . CODATA conventional value of  $c$  is 299792458 with uncertainty about 3 per billion,  $AC = 0.00722249247$  corresponds to the coupling number of decimal and dozen calculation systems from the 137-ellipse equation.

Impedance of free space is  $4\pi \cdot c = 376.730313\dots$  as a part of speed of light equation. CODATA current value is 376.730313461... with proposed uncertainty depending upon the fine structure constant [1].

Fine structure constant is the  $\pi$ -dependent number:

$$FSC = 1/\sqrt{\pi^2 + 137^2} = 0.00729735168.$$

CODATA  $h$ -dependent value is 0.0072973525698(24).

Elementary charge is the  $h$ -dependent unit:

$$q = \sqrt{FSC \cdot hM / (2\pi \cdot c)} = 1.60217657\dots,$$

where  $hM$  is the median of  $h_0$  and  $h_1$ . CODATA value of  $q$  is 1.602176565(35).

Avogadro number is the median of quasi-harmonic function:

$$NA = 100 \cdot \left\{ \sqrt{8\pi \cdot e / (8\pi \cdot e + 137^2)} / [1 + 2 \cdot AM / 1000] - [0 \dots 1 / 10^7] \right\},$$

where  $AM = \text{med}[A_0 \dots A_1]$ .

$$NA = 6.02214128.$$

CODATA conventional value is 6.02214129(27).

Kelvin number:

$$K = e + AT + NA / 1000 = 2.73159999405, \text{ (CODATA value is 2.7316),}$$

where  $AT = 0.00727602431$  is the median of medians  $[(A_0 \dots A_1) \dots (A_0 \dots A_L)]$ .

Microwave background radiation temperature is the median of quasi-harmonic function  $T_{mbr} = e + AT - NA / 1000 = 2.7255\dots$  Last experimental value is 2.7255... with dispersion about 0.006.

Stefan-Boltzmann unit is:

$$kS = \cos(12 - AS/10) - \sin(12 - AS/10) = 1.38065060066.$$

CODATA proposed value is 1.3806505, [1].

Boltzmann number corresponds to the speed of light alpha-unit  $AC$ :

$$k = \cos(12 - AC/10) - \sin(12 - AC/10) = 1.3806484\dots$$

CODATA value is 1.3806488(13).

Newton gravitation unit is:

$$G = hM \cdot \text{med}\{(1 + AM) \dots 5/x\},$$

where  $x = 4.96511423174$  is a parameter of black body irradiation equation.

$G = 6.67352\dots$  CODATA value is 6.67384(80).

The decimal orders of physical constants depend upon measuring system units orders of distance, time, mass.

**Conclusion:**

All the quantum physical units are the medians of quasi-harmonic wave functions. The basic parameters of wave functions are the numbers  $\pi$ ,  $e$  and 137.

Electric charge is a surface density of gravitation field.

Mass is a volume density of gravitation field.

**Reference**

1. Proposed redefinition of SI base units // Wikipedia.

# SEMI-PARALLEL SPACE-LIKE SUBMANIFOLDS WITH MAXIMAL PRINCIPAL NORMAL SUBSPACE IN PSEUDO-EUCLIDEAN SPACE

E. Safiulina

*University of Applied Sciences, Tallinn, Estonia*

[mterekhova@yandex.ru](mailto:mterekhova@yandex.ru)

A submanifold  $M^m$  in  $N_s^n(c)$  is called *semiparallel* if  $\bar{R}(X; Y)h = 0$  (this is the integrability condition of the system  $\bar{\nabla}h = 0$  which characterizes a parallel submanifold). Here  $\bar{R}$  is the curvature operator of the van der Waerden-Bortolotti connection  $\bar{\nabla}$  ( $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$ ) and  $h$  is the second fundamental form. To formulate the main result, we recall that the linear span of all  $h(X, X)$  in a given point  $x \in M^m$  for arbitrary  $X \in T_x M^m$  is called the *principal (first) normal subspace*  $N_x M^m$  of the submanifold  $M^m$  at  $x$ , and its dimension is denoted by  $n_1$ . Semiparallel submanifolds with maximal principal normal subspace in Euclidean is done by Ü. Lumiste [1]. We are trying to describe a semiparallel space-like submanifolds in  $E_s^n$  with maximal value of  $n_1$ , bearing in mind that every semiparallel surface is a 2nd order envelope of the parallel ones (according to the result [2]).

Let  $\{x; e_I\}$ , ( $I = 1, 2, \dots, n$ ) be the moving frame in  $E_s^n$  adapted to the space-like submanifold  $M^m$  in  $E_s^n$ , i.e. let  $x \in M^m$  and  $e_i \in T_x M^m$ ,  $e_\alpha \in T_x^\perp M^m$ , where  $i, j = 1, \dots, m$ ;  $\alpha, \beta = m + 1, \dots, n$ . The frame vectors belonging to the normal space  $T_x^\perp M^m = N_x M^m \oplus N_x^\perp M^m$  can be taken so that  $e_a \in N_x M^m$ ;  $e_\xi \in N_x^\perp M^m$ , where  $a = m + 1, \dots, m + n_1$ ;  $\xi = m + n_1 + 1, \dots, n$ . Denoting scalar composition of the frame vectors  $e_I$  and  $e_J$ , as usually,  $\langle e_I, e_J \rangle = g_{IJ}$ , one has  $g_{i\alpha} = 0$  and it can be taken  $g_{ij} = \delta_{ij}$ ; moreover let denote  $\langle e_\alpha, e_\alpha \rangle = \varepsilon_\alpha$  and  $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = g_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha \neq \beta$ . In the derivation formulae

$$dx = e_I \omega^I, de_I = e_J \omega_J^I, d\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, d\omega_J^I = \omega_K^I \wedge \omega_J^K$$

(where the point  $x$  is identified with its radius-vector) there hold  $\omega^\alpha = 0$  and

$$\omega_i^j = -\omega_j^i, g_{\alpha\beta} \omega_i^\beta + \omega_\alpha^i = 0, dg_{\alpha\beta} = g_{\gamma\beta} \omega_\alpha^\gamma + g_{\alpha\gamma} \omega_\beta^\gamma. \quad (1)$$

The equations  $\omega^\alpha = 0$  lead to  $\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j$ ,  $h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$ . Let  $h_{ij}^\alpha$  denote the covariant derivative of  $h_{ij}^\alpha$  defined by

$$\bar{\nabla} h_{ij}^\alpha \left( \equiv dh_{ij}^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha \right) = h_{ijk}^\alpha \omega^k, h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha. \quad (2)$$

The relationship

$$\bar{\nabla} h_{ijk}^\alpha \wedge \omega^k = \bar{\Omega} \circ h_{ij}^\alpha, \quad (3)$$

where

$$\bar{\Omega} \circ h_{ij}^\alpha = -h_{kj}^\alpha \Omega_i^k - h_{ik}^\alpha \Omega_j^k + h_{ij}^\beta \Omega_\beta^\alpha, \quad (4)$$

can be obtained from the previous by exterior differentiation. In the last formulae

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = -g_{\alpha\beta} \omega_i^\alpha \wedge \omega_j^\beta, \quad (5)$$

$$\Omega_\beta^\alpha = d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha = -\sum_i g_{\alpha\gamma} \omega_i^\gamma \wedge \omega_i^\beta \quad (6)$$

are the curvature 2-forms of the Levi-Civita connection  $\nabla$  and the normal connection  $\nabla^\perp$ , respectively. Together they represent the curvature 2-forms of the van der Waerden-Bortolotti connection  $\bar{\nabla}$ . Remark here, that  $\Omega_i^j = -\Omega_j^i$  and that exterior differentiation leads from (1) to the following relationships

$$g_{\gamma\beta}\Omega_\alpha^\beta + g_{\alpha\gamma}\Omega_\beta^\gamma = 0.$$

Due to (2) and (3) the parallelity and semiparallelity conditions are, respectively (see [3]),

$$dh_{ij}^\alpha - h_{kj}^\alpha\omega_i^k - h_{ik}^\alpha\omega_j^k + h_{ij}^\beta\omega_\beta^\alpha = 0, \quad (7)$$

$$h_{kj}^\alpha\Omega_i^k + h_{ik}^\alpha\Omega_j^k - h_{ij}^\beta\Omega_\beta^\alpha = 0. \quad (8)$$

By means of the vector components (8) can be written as

$$\langle h_{i[k}, h_{l]p} \rangle h_{pj} + \langle h_{j[k}, h_{l]p} \rangle h_{ip} - \langle h_{ij}, h_{p[k} \rangle h_{l]p} = 0 \quad (9)$$

(summing by  $p = 1, \dots, m$ ). The assumption of the principal normal subcase with the maximal possible dimension  $\frac{1}{2}m(m+1)$  at arbitrary point means that vectors  $h_{ij}$  are linearly independent at every point  $x$  of  $M^m$ .

Let  $a$  and  $b$  be two different values from  $\{1, \dots, m\}$ ,  $m \geq 2$ . Taking in (9)  $i = j = k = a$ ,  $l = b$ , we obtain for coefficients of linearly independent vectors  $h_{aa}, h_{ab}, h_{bb}$ :

$$\langle h_{aa}, h_{ab} \rangle = 0, \langle h_{aa}, h_{aa} \rangle + 2\langle h_{ab}, h_{ab} \rangle - 3\langle h_{aa}, h_{bb} \rangle = 0.$$

Similarly  $i = k = a, j = l = b$  give

$$2\langle h_{ab}, h_{ab} \rangle - \langle h_{aa}, h_{bb} \rangle = 0,$$

thus

$$2\langle h_{aa}, h_{bb} \rangle = \langle h_{aa}, h_{aa} \rangle, \quad 4\langle h_{ab}, h_{ab} \rangle = \langle h_{aa}, h_{aa} \rangle.$$

Denoting  $\langle h_{ab}, h_{ab} \rangle = K$  we have

$$\langle h_{aa}, h_{aa} \rangle = 4K, \langle h_{aa}, h_{bb} \rangle = 2K.$$

If  $m \geq 3$  and  $c \neq a$ , the same procedure gives  $\langle h_{ab}, h_{bc} \rangle = \langle h_{ab}, h_{ac} \rangle = 0$ ; if  $m \geq 4$  and  $a, b, c, d$  are four different values, then  $\langle h_{ab}, h_{cd} \rangle = 0$ .

All this gives that if  $K > 0$  then the metric of the principal normal subspace is regular positively definite; if  $K < 0$ , then the metric of  $N_x M^m$  is regular negatively definite; at last, if  $K = 0$ , then the metric is completely vanishing.

It is known that if the metric of the principal normal subspace has the maximal dimension and is regular ( $K > 0$  and  $K < 0$ ), then the corresponding semiparallel  $M^m$  is either a Veronese submanifold  $V^m$  immersed into an  $(n-1)$ -dimensional sphere  $S_{n-1}(2K(m+1)m^{-1})$ ,  $n = \frac{1}{2}m(m+3)$ , i.e. an orbit of a  $n_1$ -parametric Lie subgroup of rotation of  $E_s^{m+n_1}$ , ( $s = 0$  or  $s = n_1$ ) around the center of this  $(n-1)$ -sphere or a second order envelope of a family of congruent Veronese  $V^m$ .

In case  $m = 2$  it was shown in [4]. Existence of semiparallel submanifolds  $M^m$  as a 2nd order envelopes of a such parallel submanifolds in  $N_s^n(c)$ ,  $n > \frac{1}{2}m(m+3)$ , is affirmatively shown by Lumiste in [5] and in [6]. In case of  $V^2$  in  $E^6$  is shown (see [7]) that there are exist semiparallel, but not parallel 2nd order envelope of a

family  $V^2$ . The question on existence of 2nd order envelopes of two-dimensional Veronese submanifolds in  $E_s^6$ , ( $s$  is either 0, or 3, or 4) and in  $E_s^7$ , ( $s$  is either 0, or 3, or 4, or 5) with some arbitrariness is solved by Lumiste in [8].

It remains to consider the case with completely vanishing metric of the principal normal subspace. Here we start with the corresponding parallel submanifolds  $M^m$ .

**Proposition 1.** *A parallel space-like  $M^m$  in pseudo-Euclidean space  $E_s^n$  with principal normal subspace of completely vanishing metric is either a submanifold in  $E_{0,n_1}^{m+n_1}$  with  $m$  families of parabola generators and can be represented by the equation*

$$x = \frac{1}{2} h_{ii}(u^i)^2 + h_{ij}u^i u^j + h_{0i}u^i, \quad (10)$$

( $i; j = 1, \dots, m; i \neq j$ ) all coefficients here are some constant vectors, or an open part of such a submanifold.

*Proof.* Due to [3] for parallel  $M^m$  one has

$$\nabla h_{ij} = - \sum_{k=1}^m e_k \langle h_{ij}, h_{kl} \rangle \omega^l$$

and so  $\nabla h_{ij} = 0$ , if  $N_x M^m$  has completely vanishing metric. Due to (5) one has  $\Omega_i^j = 0$ , i.e.  $M^m$  is locally Euclidean. Thus every point  $x \in M^m$  has a neighborhood  $U$ , on which there is a parallel field of tangent orthogonal frames. For this field  $de_i = 0$ , so  $\omega_i^j = 0$  and  $\nabla h_{ij} = 0$  reduces to  $dh_{ij} = 0$ , but  $d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i$  reduces to  $d\omega^i = 0$ . Hence on this  $U$  it can be made

$$\omega^i = du^i, h_{ij} = \text{const.}$$

Now the derivation formulae are

$$dx = e_i \omega^i, de_i = h_{ij} \omega^j, dh_{ij} = 0$$

and for the principal and the second derivatives of  $x$  one has

$$x_{u^i} = e_i, x_{u^i u^i} = h_{ii}, x_{u^i u^j} = h_{ij}$$

whereas all third derivatives are zero. Thus the geodesic lines are parabolas and the considered parallel space-like submanifold  $M^m$  can be represented by the equation (10).

Using the result that every semiparallel submanifold is a second order envelope of parallel submanifolds, can be formulated the next statement.

**Proposition 2.** *A semiparallel space-like  $M^m$  in  $E_s^n$  with the principal normal subcase of the maximal possible dimension  $\frac{1}{2}m(m+1)$  is either*

1) *a Veronese submanifold  $V^m$  in  $E_s^{m+n_1}$ , ( $s = 0$  or  $s = n_1$ ), or*

2) *a submanifold in  $E_{0,n_1}^{m+n_1}$  with  $m$  families of parabola generators; it can be represented by the equation*

$$x = \frac{1}{2} h_{ii}(u^i)^2 + h_{ij}u^i u^j + h_{0i}u^i,$$

( $i; j = 1, \dots, m; i \neq j$ ) all coefficients here are some constant vectors, or

3) *a 2nd order envelopes of submanifolds from above.*

## References

1. Lumiste, Ü. *Semi-symmetric submanifolds with maximal first normal space*, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, 1989, **38**, 453—457.
2. Lumiste, Ü. *Semi-symmetric submanifold as the second order envelope of symmetric submanifolds*, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, 1990, **39**, 1—8.
3. Lumiste, Ü. Submanifolds with parallel fundamental form, Chapter 7 in *Handbook of Differential Geometry*, vol. (Dillen, F.J.E. and Verstraelen L.C.A., eds.), Elsevier Sc. B. V., Amsterdam, 2000, 779—864.
4. Safiulina, E. *Parallel and semiparallel space-like surfaces in pseudo-Euclidean spaces*, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, 2001, **50**, 16—33.
5. Lumiste, Ü. *Second order envelopes of  $m$ -dimensional Veronese submanifolds*, *Acta Comment. Univ. Tartuensis*, 1991, **930**, 35—46.
6. Lumiste, Ü. *Symmetric orbits of orthogonal Veronese actions and their second order envelopes*, *Results in Mathematics*, 1995, **27**, 284—301.
7. Riives, K. *Second order envelope of congruent Veronese surfaces in  $E^6$* , *Acta Comment. Univ. Tartuensis*, 1991, **930**, 47—52.
8. Lumiste, Ü. *Isometric semiparallel immersions of two-dimensional Riemannian manifolds into pseudo-Euclidean spaces*. In *New Development in Differential Geometry* (Szenthe, J., ed.). Kluwer Ac.Publ., Dordrecht, 1999, 243—264.

# DISTRIBUTION OF THE WEIGHTS OF THE KLOOSTERMAN CODE

T. V. Tran

*I. I. Mechnikov Odessa National University, Odessa, Ukraine*

[ttvinhcntt@yahoo.com.vn](mailto:ttvinhcntt@yahoo.com.vn)

Let  $\mathbb{F}_q$  be the field with  $q = p^m$  elements and let  $\theta$  be a primitive element of  $\mathbb{F}_q$  over  $\mathbb{F}_p$ . Let  $m_i(x)$  denotes the minimal polynomial of  $\theta^i$  over  $\mathbb{F}_p$ .

**Definition 1.1** *The simplex code  $S(\theta)$  is the dual of the cyclic code over  $\mathbb{F}_q$  of length  $n = q - 1$  generated by minimal polynomial  $m_1(x) \in \mathbb{F}_p[x]$  for the primitive element  $\theta$ .*

**Definition 2.2** *The Melas  $M(\theta)$  code is the cyclic code  $[n, 2m]$  over  $\mathbb{F}_p$  generated by  $m_1(x)m_{-1}(x)$ .*

The code  $M(\theta)$  has a parity matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \theta & \theta^2 & \dots & \theta^{q-2} \\ 1 & \theta^{-1} & \theta^{-2} & \dots & \theta^{-(q-2)} \end{pmatrix}$$

considered as a matrix over  $\mathbb{F}_p$ .

**Definition 3.3** *Let  $C$  be a code over  $\mathbb{F}_q$  of length  $n$ . Then*

$$C|_{\mathbb{F}_q} := C \cap \mathbb{F}_p^n$$

is called the subfield of  $C$  (or restriction of  $C$  to  $\mathbb{F}_p$ ).

$C|_{\mathbb{F}_q}$  is a code over  $\mathbb{F}_p$ . Its minimal distance cannot be better than the minimal distance of  $C$ .

Consider the trace mapping  $\text{Tr} : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_p^n$  such that for  $\alpha \in \mathbb{F}_q$  we have

$$\text{Tr}(\alpha) := (\text{tr}(\alpha), \text{tr}(\alpha\theta), \dots, \text{tr}(\alpha\theta^{n-1})),$$

where  $\text{tr}(\beta) = \beta + \beta^p + \beta^{p^2} + \dots + \beta^{p^{m-1}} \in \mathbb{F}_p$ .

If  $C$  is a code over  $\mathbb{F}_q$  then

$$\text{Tr}(C) := \{ \text{tr}(c) \mid c \in C \} \subset \mathbb{F}_p^n$$

is called the trace code of  $C$ .

Delsarte proved that for a code  $C$  over  $\mathbb{F}_q$  the following equation

$$(C|_{\mathbb{F}_p})^\perp = \text{Tr}(C^\perp)$$

holds.

This Delsarte statement is often used for study the dual codes.

From Definition 2 it follows that the Melas code may be defined as a restriction of a cyclic code over  $\mathbb{F}_q$  on  $\mathbb{F}_p$  with two zeros  $\theta$  and  $\theta^{-1}$ . Thus by Delsarte theorem, we conclude that the dual of Melas code  $M(\theta)$  is the direct sum (as vectorial subspace) of two simplex code  $S(\theta)$  and  $S(\theta^{-1})$ , i.e.

$$M(\theta)^\perp = \left\{ \text{tr}(\alpha x_1 + \beta x_1^{-1}), \dots, \text{tr}(\alpha x_n + \beta x_n^{-1}) \mid \alpha, \beta \in F_q \right\}.$$

(here we fixed some sorting of non-zero element from  $\mathbb{F}_q$ ).

Obviously, that  $M(\theta)^\perp$  contains  $q^2$  codewords. The code  $M(\theta)^\perp$  we will call the Kloosterman code over  $\mathbb{F}_p$ .

The weights of dual code of  $M(\theta)$  and other codes gives for  $q = 2$  using properties of the Kloosterman sums over a finite fields of characteristic 2. J. Wolfmann determined the weight distribution of  $M(\theta)^\perp$  for  $p = 3$ . G. van der Geer, R. Schoof and M. van der Vlugt derived a formula for the frequencies of the weights in ternary Melas codes.

Our aim is to investigate the distribution of weights for the  $p$ -ary dual Melas codes, where  $p$  is a prime number,  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , and  $m = 2$ , i.e.  $n = p^m - 1 = p^2 - 1$ .

We will be use the following notations:

$\mathbb{Z}, G$  the ring of rational integers and Gaussian integers, respectively;

$\mathbb{Z}_p, G_p$  the classes of residues in  $\mathbb{Z}$  (respectively, in  $G$ ) modulo  $p$ ;

$\mathbb{Z}_p^*, G_p^*$  the classes of reduced residues in  $\mathbb{Z}_p$  (respectively, in  $G_p$ );

$\text{wt}(a)$  the Hamming weight of vector  $a \in \mathbb{F}_q^n$ ;

$G^\perp$  the dual code of  $C$ ;

$x^{-1}$  denotes a multiple inverse to  $x \in G_p^*$  modulo  $p$ , i. e.

$$x \cdot x^{-1} \equiv 1 \pmod{p};$$

“ $\ll$ ”, “ $O$ ” be the equivalent symbols.

Let  $m(\alpha, \beta)$  denotes a codeword of dual Melas code  $M^\perp(\theta)$  associated with pair  $(\alpha, \beta) \in G_p^2$ , and let  $\text{wt}(m(\alpha, \beta))$  denotes a weight of  $m(\alpha, \beta)$ . Clearly that  $\text{wt}(m(\alpha, \beta)) = n - z(\alpha, \beta)$  with

$$z(\alpha, \beta) = \#\{x \in G_p^* \mid \text{tr}(\alpha x + \beta x^{-1}) = 0\}$$

For considered case we have  $\text{tr}(\gamma) = \gamma + \bar{\gamma}$ , where  $\bar{\gamma}$  is a complex conjugate to  $\gamma$ , so  $\text{tr}(\gamma) = 2\Re\gamma$ .

Next we will express the Hamming weight  $\text{wt}(m(\alpha, \beta))$  by means of the

Kloosterman sum over  $G_p^*$

$$k(\alpha, \beta; p) := \sum_{x \in G_p^*} e^{\pi i \operatorname{tr} \left( \frac{\alpha x + \beta x^{-1}}{p} \right)}.$$

It well-known that

$$k(\alpha, \beta; p) = \begin{cases} p^2 - 1 & \text{if } \alpha = \beta = 0, \\ -1 & \text{if } \alpha = 0, \beta \neq 0 \\ & \text{or } \alpha \neq 0, \beta = 0, \\ \varepsilon(\alpha, \beta) \cdot p & \text{if } \alpha\beta \neq 0, \end{cases}$$

here  $|\varepsilon(\alpha, \beta)| \leq 2$ .

Since  $k(\alpha, \beta; p) = k(1, \alpha\beta; p)$  if  $\alpha \neq 0$ , we consider the  $h$ -th moment  $K^{(h)}$  of the Kloosterman sum  $k(1, \gamma)$  that is given by

$$K^{(h)} := \sum_{\gamma \in G_p^*} (k(1, \gamma; p))^h.$$

In terms of  $K^{(h)}$  we will study the distribution of weight of the  $M(\theta)^\perp$  code.

**Lemma 1.4** *Let  $\theta$  is a generated element of the group  $G_p^*$ . Then*

$$\operatorname{wt}(m(\alpha, \beta)) = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha = \beta = 0, \\ p^2 - 1 & \text{if } \alpha = 0, \beta \neq 0, \\ & \text{or } \alpha \neq 0, \beta = 0, \\ \frac{(p^2 - 1)(p - 1)}{p} - \frac{1}{p} \sum_{z \in \mathbb{Z}_p^*} k(1, \alpha\beta z^2; p) & \text{if } \alpha\beta \neq 0. \end{cases}$$

The following lemma show that an estimate of  $\operatorname{wt}(m(\alpha, \beta))$  can be improved.

**Lemma 2.5** *Let  $\alpha \in G_p^*$ . Then*

$$\sum_{z=1}^{p-1} k(1, \alpha z^2; p) = 2p^2 \cos \varphi_0 + 1.$$

**Corollary 1.6** *For  $\alpha\beta \neq 0$*

$$\operatorname{wt}(m(\alpha, \beta)) = p^2 - p - 1 + 2p \cos \varphi,$$

where  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

**Theorem 1.7** *Let  $M_i$  denote the number of code words of weight  $i$  for the Melas code  $M(\theta)$  over  $\mathbb{Z}_p$ . Then for every positive integer  $h$ , the moment  $K^{(h)}$  of the Kloosterman sum  $k(1, \gamma; p)$  is given by*

$$(p^2 - 1)(p - 1)^h \overline{K}^{(h)} = f(M_0, \dots, M_h) + g(\overline{K}^{(0)}, \overline{K}^{(1)}, \dots, \overline{K}^{(h-1)}),$$

where

$$f(M_0, M_1, \dots, M_h) = p^4 \sum_{i=0}^h M_i \sum_{j=1}^h j! S(h, j) p^{h-1} \begin{pmatrix} p^2 - 1 - i \\ p^2 - 1 - j \end{pmatrix}$$

$$g(K_0^{(0)}, \dots, K^{(h-1)}) = -(p^2 - 1)(p^h(p^2 - 1)).$$

Theorem 1 establishes link between the number of codewords of weight  $i$  in  $M(\theta)$  and values of  $\overline{K}^{(j)}$ . But it is easy to show that  $\overline{K}^{(j)}$  can be expressed by values of the  $\ell$ -th power moment  $K^{(\ell)}$  of Kloosterman sums  $k(1, \alpha; p)$ , where

$$K^{(\ell)} := \sum_{\alpha \in G_p} (k(1, \alpha; p))^\ell, \ell = 0, 1, 2, \dots$$

# SIMULATION OF CROP PRODUCTION AND AGRITECHNOLOGICAL PROCESSES

I. M. Vergunova

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine*

[vergunova@bigmir.net](mailto:vergunova@bigmir.net)

Agronomic processes belong to complicated systems having a plurality of heterogeneous elements. Therefore, getting of mathematical models describing the agricultural systems is the subject of special research [1—3]. For today obtained a lot of different models for describing the agronomic processes in plants and soil, using different mathematical methods and approaches. The mathematical models of soil fertility, productivity of sowings and formation of harvests are the basis of automatic systems for control of agritechnological processes [4—7].

In the presented article examines approach to describe the accounting abiotic stress in models of growing crops on the basis of algebraic functional networks [6—7] with functional structures [8, 9] and fuzzy logic [10—12].

The approach for the describing of the accounting abiotic stress in the models of grow crops technology and methods for the simulating of agricultural technologies based on the functional networks and structures. Functional structures built on the basis of a pre-existing generic algorithms and the main agrotechnological process parameters.

For solving the task of the modeling and control of technological processes of growing agricultural crops within a certain technological scheme [4] we proposed to use the algebraic functional networks [5—8]. When we are constructing logical functional units (standard and constituent) and logical functional structures for the algebraic functional network we must consider the logical conditions with well-known for their characteristics of expenditures and quality of functioning. One of these conditions are the conditions the account of presence of abiotic stress.

The total hierarchical FLS system has three types of partial FLS: PP, accounting FF and AS. This common FLS system also has seven layers — for the preparatory period and for each month from April to September.

The fuzzy logic system PP has in its base the fuzzy algorithm Sugeno. Its rule base has the form: IF “Temperature”=  $t$  AND “Rainfall”=  $b$  THEN  $\omega = \varepsilon_1 t + \varepsilon_2 b$ .

For the group phenophases FF1, FF2, FF3 the values of  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$  for all inference rules and all values for linguistic variables of temperature and rainfall are given in tables 1, 2 and 3 respectively. In the consequent of fuzzy statements  $t$  and  $b$  values are precise values of the input variables for temperature and rainfall

( $t = \frac{|t_{month} - t_{average}|}{t_{average}}$ ,  $b = \frac{|b_{month} - b_{average}|}{b_{average}}$ ) which correspond to statements of

antecedents. Therefore  $\omega$  it is a precise value of the output variable as a weighting coefficient of abiotic stress for a single month. If value of  $\omega \geq 2,3$  for the group

phenophases FF1 and  $\varpi \geq 2,2$  for the group phenophases FF2, FF3 then we have values for input variable “Month abiotic stress” in the partial FLS system AS, which corrects the values of abiotic stress coefficient after each month.

The fuzzy logic system FF has in its base the fuzzy algorithm Mamdani (makes the division into three groups FF1, FF2, FF3). Its rules base have the form: IF “Phenophases”= $f$  THEN FF. The linguistic variable “Phenophases” is determined by its terms, the names of which correspond to the names phenophases of maize and linguistic variable “FF” is determined by its terms FF1, FF2, FF3 (Table 4).

The logic system AS collects all values of “Month abiotic stress” for classification. Its base is fuzzy algorithm Mamdani too. The input variables for this system we have output variables from logic systems FF and PP. The rules have the form: IF “FF”= $ff$  AND  $\varpi \geq \varpi_{ff}$  THEN ASF (were defined for FF1 -  $\varpi_{ff} = 2.3$  and for FF2, FF3 -  $\varpi_{ff} = 2.2$ ). The linguistic variable ASF gives the linguistic values of the coefficient of stress that can be stored in the knowledge base for each month and used to produce the total value of the coefficient of stress for the entire period.

Table 1. The values of  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$  for inference rules in the group phenophases FF1

<b>Temperature</b>	$\varepsilon_1$	<b>ainfall</b>	$\varepsilon_2$
lowest	5	lowest	5
below average	4	below average	4
near to the average	1	near to the average	3
above average	1	above average	2
highest	1	highest	1

Table 2. The values of  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$  for inference rules in the group phenophases FF2

<b>Temperature= <math>t</math></b>	<b>Rainfall= <math>b</math></b>	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$
lowest	lowest	5	1
below average	lowest	3	4
near to the average	lowest	1	4
above average	lowest	2	4
highest	lowest	3	5
lowest	below average	5	3
below average	below average	3	2
near to the average	below average	1	2
above average	below average	1	1
highest	below average	4	2
lowest	near to the average	5	1
below average	near to the average	3	1
near to the average	near to the average	1	1
above average	near to the average	2	1

highest	near to the average	4	1
lowest	above average	5	3
below average	above average	3	3
near to the average	above average	1	3
above average	above average	2	3
highest	above average	4	3
lowest	highest	5	5
below average	highest	3	5
near to the average	highest	1	5
above average	highest	3	5
highest	highest	4	5

Table 3. The values of  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$  for inference rules in the group phenophases FF3

<b>Temperature</b>	$\varepsilon_1$	<b>Rainfall</b>	$\varepsilon_2$
lowest	5	lowest	1
below average	3	below average	1
near to the average	1	near to the average	1
above average	1	above average	3
highest	1	highest	5

Table 4. The values of linguistic variable “Phenophases” and its groups FF

<b>“Phenophases”</b>	<b>FF</b>
Substantive preparations of soil	FF1
The germination	FF1
The development of leaves	FF2
The stem elongation	FF2
The formation of flowers, the ejection of brooms	FF2t
The bloom	FF2
The fetal development	FF2
The ripening of grains	FF3

The common hierarchical fuzzy logic system correspond to a hierarchical knowledge base. This FLC may be considered as a knowledge-based alternative to conventional control of technological processes therefore it can be applied for modification of control strategy in general.

The proposed approach makes it possible to describe the accounting abiotic stress in models of growing crops on the base of algebraic functional networks with fussy logic. This approach uses the hierarchical fuzzy logic system.

The total hierarchical FLS system has three types of partial FLS systems and seven layers — for the preparatory period and for each month from April to September. Partial FLS systems based on the algorithms Mamdani and Sugeno.

The given technique provides an opportunity to decide the problem of constructing an optimal agritechnological process with taking into account the presence and degree of abiotic stress.

### References

1. Пепо Р. Environmental friendly maize (zea mays l.) production on chernozem soil in Hungary // *Агроекологічний журнал*. — 2009. — Спец. Випуск. Червень. — С. 18—21.
2. Пепо Р., Sarvari M., Vergunov V., Vergunova I. Effect of agrotechnical factors on maize yield. // *Агроекологічний журнал*. — 2010. Спец. Випуск. Червень. — С. 19—25.
3. Вергунова І. М., Вергунов В. А., Пепо П., Сарварі М. Задачі оптимізації технологій вирощування культур та управління відповідними технологічними процесами // Abstracts of conference reports. XV International Conference “Dynamical system modeling and stability investigation “Modelling & Stability””(DSMSI). — К., 2011. — С. 170.
4. Вергунов В. А., Вергунова І. М. Методичні рекомендації з вибору оптимальних технологій вирощування культур за їх формалізованими описами. — К., 2010. — 46 с.
5. Vergunova I. The algebraic functional structures for analyze of the agrotechnologies // Proceedings of the XX International Conference “Problems of decision making under uncertainties” (PDMU-2012). — Brno, Czech Republic, 2012. — P. 127—128.
6. Vergunova I. Analog of H-function method for fussy models of agritechnological processes // Abstracts of conference reports. XVI International Conference “Dynamical system modeling and stability investigation “Modelling & Stability””(DSMSI). — К., Ukraine, 2013. — P. 167.
7. Vergunova I. Using of templates in algebraic functional networks for simulation of technological processes // Proceedings of the XXIV International Conference “Problems of decision making under uncertainties” (PDMU-2014). — Cesky Rudolec, Czech Republic, 2014. — P. 104.
8. Ротштейн А.П., Кузнецов П.Д. Проектирование бездефектных человеко-машинных технологий. — К.: Техника, 1992.
9. Ротштейн А. П., Штовба С. Д., Казачко С. Д. Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов. — Винница: УНИВЕРСУМ, 2007.
10. Yager Ronald R., Filev Dimitar P. Essentials of Fuzzy Modeling and Control. — A Wiley Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., 1994.
11. Passino Kevin M., Yurkovich Stephen Fuzzy control. — Addison Wesley Longman, Inc., 1998.
12. Рубанов В. Г., Филатов А. Г., Рыбин И. А. Интеллектуальные системы автоматического управления // *Нечеткое управление в технических системах*. — Белгород: БГТУ им. В. Г. Шухова, 2010.

# TUNING LOGARITHMIC TYPE ALGEBRAIC STRUCTURE BASED ON TRIANGULAR NORM

**R. Vorobel**

*Physico-Mechanical Institute NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine;*  
*Department of Computer Science, Faculty of Physics and Applied Informatics,*  
*University of Lodz, Poland*  
roman.vorobel@gmail.com

Algebraic type mathematical models are used in image processing tasks to improve their quality because they correspond to the properties of the human visual system. An example of this is the law of Weber — Fechner human perception of light. This direction of research was initiated by Jourlin and Pinoli as a logarithmic image processing (LIP) [1, 2]. Their mathematical model was based on the following operations for  $x, y, g \in (-\infty, 1]$ :

$$\begin{aligned} x &= 1 - g, \\ x \oplus y &= x + y - xy, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x \theta y &= -\frac{x - y}{1 - y}, \\ x * y &= \phi^{-1}(\phi(x) \cdot \phi(y)), \\ \phi(x) &= -\ln(1 - x), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\phi^{-1}(x) = 1 - \exp(-x),$$

where  $\oplus$  is used as LIP addition,  $*$  — as LIP multiplication, and  $\phi$  — is an isomorphism function. Note that for  $x, y, g \in [0, 1]$  described operation of addition (1) is simultaneously an algebraic triangular  $s$ -norm [3, 4], it was payed attention on in the papers [5—7]. Further development of the LIP theory was received through new algebraic structures, which were published in the papers of Patrascu and Buzuloiu [8, 9] and Deng [10], where algebraic structures were proposed for vector space of gray level pixels. In [8] was considered gray levels space, set  $E = (-1, 1)$  and for this set  $E$  were defined operations of addition  $\langle + \rangle$  and multiplication by real scalar  $\alpha$  and subtraction  $\langle - \rangle$ . These operations are defined by the next expressions:

for addition

$$x \langle + \rangle y = \frac{x + y}{1 + xy},$$

for subtraction

$$x \langle - \rangle y = \frac{x - y}{1 - xy},$$

for multiplication by real scalar  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\langle \times \rangle x = \frac{(1+x)^\alpha - (1-x)^\alpha}{(1+x)^\alpha + (1-x)^\alpha},$$

isomorphism function

$$\phi(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}. \quad (3)$$

Note that for  $x \in [0,1]$  function  $\phi(x)$  is Hamacher triangular  $s$ -norm additive generator. However, the disadvantage of this algebraic structure is impossibility of setting on modeling a certain level of constant background illumination in the perception of the image. The purpose of this work is to build a tuning algebraic structure, which would take into account the presence of a constant background lighting at image processing for arithmetic operations on pixel gray levels. To realize this task we use such isomorphism function

$$\psi(x) = a + \phi(x) = a + \ln \frac{1+x}{1-x}. \quad (4)$$

On this basis we obtain for set  $E \in (-1, 1)$  of gray level pixels such expression for arithmetic operations:  
for addition operation

$$x\langle \hat{+} \rangle y = \frac{(b-1)(1+xy) + (b+1)(x+y)}{(b-1)(x+y) + (b+1)(1+xy)}, \quad (5)$$

where  $b = \ln(a)$ ,  $a > 0$ ,

for subtraction operation

$$x\langle \hat{-} \rangle y = \frac{(b-1)(1-xy) + (b+1)(x-y)}{(b-1)(x-y) + (b+1)(1-xy)}, \quad (6)$$

for multiplication by real scalar  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\langle \hat{\times} \rangle x = \frac{b^{\alpha-1}(1+x)^\alpha - (1-x)^\alpha}{b^{\alpha-1}(1+x)^\alpha + (1-x)^\alpha}. \quad (7)$$

This inverse isomorphism function  $\psi^{-1}(x)$  is defined as

$$\psi^{-1}(x) = \frac{\exp(x-a) - 1}{\exp(x-a) + 1}.$$

If we will consider as interval  $x, y = G \in (0,1)$ , as the range of variation of gray levels of pixels, then from formulas (5)—(7) we obtain the following expressions for the arithmetic operations for new tuned algebraic structures:  
for addition

$$x\langle \tilde{+} \rangle y = 0,5 + 0,5 \frac{(b-1)(1+x_1y_1) + (b+1)(x_1+y_1)}{(b-1)(x_1+y_1) + (b+1)(1+x_1y_1)}, \quad (8)$$

where  $x_1 = 2x - 1$ ,  $y_1 = 2y - 1$ ;

for subtraction

$$x \langle \ominus \rangle y = 0,5 + 0,5 \frac{(b-1)(1-x_1y_1) + (b+1)(x_1-y_1)}{(b-1)(x_1-y_1) + (b+1)(1-x_1y_1)},$$

for multiplication by real scalar  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \langle \otimes \rangle x = 0,5 + 0,5 \frac{b^{\alpha-1}(1+x_1)^\alpha - (1-x_1)^\alpha}{b^{\alpha-1}(1+x_1)^\alpha + (1-x_1)^\alpha}. \quad (9)$$

We note that the basis of isomorphism function (4) is a Hamacher's triangular  $s$ -norm generator function. From this function was built function  $\psi(x)$ .

The set  $E$  with operations  $\langle \hat{+} \rangle$  of addition (5) and the operation of multiplication  $\langle \hat{\times} \rangle$  by real scalar (7) form a real vector space, as the set  $G$  with operations  $\langle \check{+} \rangle$  of addition (8) and the operation  $\langle \check{\times} \rangle$  of multiplication by real scalar (9).

Described algebraic structures make it possible to configure the properties of arithmetic operations so that they reflect a continuous backlight intensity of the simulated values  $b$ .

Due to this we get the correct processing of digital images, which simulates the human perception of image provided that the light source.

### References

1. Jourlin M., Pinoli J.-C. A model for logarithmic image processing // Journal of Microscopy. — 1988. — Vol. 149, Pt. 1. — P. 21—35.
2. Jourlin M., Pinoli J.-C. Logarithmic image processing // In: Advances in Imaging and Electron Physics. — 2001. — Vol. 115. — P. 129—196.
3. Alsina C., Frank M. J., Schweizer B. Associative functions: triangular norms and copulas. — Hackensack, London, Singapore: World Scientific. — 2006. — 237 p.
4. Klement E. P., Mesiar R., Pap E. Triangular Norms. — Dordrecht. — Kluwer Acad. Publ. — 2000. — 384 p.
5. Vorobel R. A. Logarithmic Image Processing. — Kyiv: Naukova Dumka. — 2012. — 231 p. (In Ukrainian).
6. Vorobel R. A. Logarithmic Image Processing. Part 1: Basic model // Information Extraction and Processing. — 2009. — Issue 31 (107). — P. 26—35. (In Ukrainian).
7. Vorobel R. A. Logarithmic Image Processing. Part 2: Generalized model // Information Extraction and Processing. — 2009. — Issue 31(107). — P. 36—46. (In Ukrainian).
8. Pătraşcu V., Buzuloiu V. A Mathematical Model for Logarithmic Image Processing. In: The 5th World Multi—Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics, SCI2001, July 22—25, 2001, Orlando, USA. — Vol. 13. — P. 117—122.
9. Pătraşcu V., Buzuloiu V. The Affine Transforms for Image Enhancement in the Context of Logarithmic Models. In: Proceedings of International Conference on Computer Vision and Graphics, ICCVG 2002, September 25—29, 2002, Zakopane, Poland. — Vol. 2. — P. 596—601.
10. Deng G. An entropy interpretation of the logarithmic image processing model with application to contrast enhancement // IEEE Transaction on image processing. 2009. — Vol. 18. — No. 5. — P. 1135—1140.

**THE LAPLACE TRANSFORM  
OF THE HURWITZ — LERCH ZETA-FUNCTION**

**Ya. Vorobyov**

*I. I. Mechnikov Odessa National University, Odessa, Ukraine*

[yashavo@mail.ru](mailto:yashavo@mail.ru)

Integral transforms (Laplace, Forier, Mellin) play an important role in the analytic number theory. In the works of Titchmarsh, Atkinson, Ivič, Jutila, Lukkarinen it has been pointed out the connection between moments  $I_k(I)$  of  $|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)|^{2k}$  on  $[0, T]$

and Laplace transform  $L_k\left(\frac{1}{2}\right)$  or modified Mellin transform  $Z_k(\sigma + it)$ ,

$k = 1, 2, \dots$ . Balčianas and Laurincikas investigated the Laplace transform of the Dirichlet  $L$ -function with principal character.

Our aim is to study the Laplace transform for product of the Hurwitz and Lerch functions.

The classical Laplace transform  $L_f(s)$ ,  $s = \sigma + it$ , of the function  $f(x)$  is defined by

$$L_f(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx$$

provided that the integral exists for  $\sigma > \sigma_0$  with some  $\sigma_0$ .

Let  $0 < \alpha, \beta \leq 1$ . We define for  $\Re s > 1$ :

$$\zeta(s; \alpha, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \alpha)^s}$$

$$\zeta(s; 0, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi in\beta}}{(n)^s}.$$

The function  $\zeta(s; \alpha, 0)$  and  $\zeta(s; 0, \beta)$  call respectively the Hurwitz and Lerch zeta-functions. It is well-known that  $\zeta(s; \alpha, 0)$  has meromorphic continuation to the whole complex plane with simple pole  $s = 1$  with residue 1, and  $\zeta(s; 0, \beta)$  is an entire function if  $\beta \neq 1$ .

The Lerch zeta-function produces two functions

$$S(s; \beta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n\beta)}{n^s}, \quad C(s; \beta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n\beta)}{n^s},$$

which are the entire functions if  $\beta \neq 1$ .

These functions are connected by the Hurwitz relation

$$\begin{aligned} \zeta(s; \alpha, 0) &= \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \times \\ &\times \left( \sin \frac{\pi s}{2} \cdot C(a-1s; \alpha) + \cos \frac{2\pi}{2} \cdot S(1-s; \alpha) \right), \end{aligned} \quad (1)$$

( $\Re s < 1$ ).

Let us  $\ell, q$  be positive integers,  $\ell < q$ ,  $(\ell, q) = 1$ , and let  $(\ell_1, \ell_2)$  runs complete system of solutions of the congruence

$$\ell_1 \ell_2 \equiv \ell \pmod{q}, 0 < \ell_1, \ell_2 < q.$$

Define the function

$$F(x) = \sum_{\substack{\ell_1, \ell_2=1 \\ \ell_1 \ell_2 \equiv \ell \pmod{q}}}^q \zeta\left(\frac{1}{2} + ix; \frac{\ell_1}{q}, 0\right) \zeta\left(\frac{1}{2} - ix; 0, \frac{\ell_2}{q}\right). \quad (2)$$

Consider the Laplace transform for  $F(x)$

$$L_F(s) := \int_0^{\infty} F(x) e^{-sx} dx. \quad (3)$$

The main result of this paper is a proof the following statement.

**Theorem 1.1** *Let  $\ell, q$  be the positive numbers,  $(\ell, q) = 1$ . Then for the Laplace transform of the function  $F(x)$  defined by (2), we have*

$$\begin{aligned} L_F(s) &= \pi i \left( e^{\frac{is}{2}} + e^{-\frac{is}{2}} \right) c_0(\ell, q) + \\ &+ e^{-\frac{is}{2}} \sum_{m,n=1}^{\infty} K(m, -n\ell; q) \exp\left(-2\pi imn\ell^{-is}\right) + \lambda_{\ell}(s), \end{aligned}$$

where  $K(m, -n\ell; q)$  is the Kloosterman sum and  $\lambda_{\ell}(s)$  is analytic in the strip  $|\Re s| < \pi$ , and, for  $|\Re s| \leq \pi - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  is arbitrary small, the estimate  $\lambda_{\ell}(s) \ll (1 + |s|)^{-1}$  holds. Moreover,

$$c_0(\ell, q) = \frac{2}{\pi} \sum_{\ell_1 \ell_2 \equiv \ell \pmod{q}} \left( \frac{1}{2} - \frac{\ell_1}{q} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{\ell_2}{q} \right).$$

Denote,

$$\begin{aligned} L_{F_1}(s) &:= \int_0^{\infty} \sum_{\substack{(\ell) \\ 0}}^{\infty} \zeta\left(\frac{1}{2} + ix; \frac{\ell_1}{q}, 0\right) C\left(\frac{1}{2} - ix; \frac{\ell_2}{q}\right) e^{-sx} dx, \\ L_{F_2}(s) &:= \int_0^{\infty} \sum_{\substack{(\ell) \\ 0}}^{\infty} \zeta\left(\frac{1}{2} + ix; \frac{\ell_1}{q}, 0\right) S\left(\frac{1}{2} - ix; \frac{\ell_2}{q}\right) e^{-sx} dx. \end{aligned} \quad (6)$$

The proof of theorem above is based on the following lemma

**Lemma. 2** *There are exist the functions  $\lambda_\ell^{(1)}(s)$ ,  $\lambda_\ell^{(2)}(s)$  that are analytic in the strip  $|\Re s| < \pi$  and  $\lambda_\ell^{(j)}(s) \ll (1 + |s|)^{-1}$ ,  $j = 1, 2$ , such that*

$$L_{F_1}(s) = \frac{e^2}{2} \int \sum_{\left(\frac{1}{2}\right)^{(\ell)}} \frac{\zeta\left(z; \frac{\ell_1}{q}, 0\right) C\left(1 - z; \frac{\ell_2}{q}\right) e^{-iz\left(\frac{\pi}{2} - s\right)}}{\sin \frac{\pi z}{2}} dz + \lambda_\ell^{(1)}(s), \quad (7)$$

$$L_{F_2}(s) = \frac{e^2}{2i} \int \sum_{\left(\frac{1}{2}\right)^{(\ell)}} \frac{\zeta\left(z; \frac{\ell_1}{q}, 0\right) S\left(1 - z; \frac{\ell_2}{q}\right) e^{-iz\left(\frac{\pi}{2} - s\right)}}{\cos \frac{\pi z}{2}} dz + \lambda_\ell^{(2)}(s). \quad (8)$$

# ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ РАСШИРЕННОГО ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А. Б. Антоневиц, Е. Ю. Леонова

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

[antonevich@bsu.by](mailto:antonevich@bsu.by), [genieleo@mail.ru](mailto:genieleo@mail.ru).

С каждым функционалом на банаховом пространстве связан двойственный по Лежандру функционал, определенный на сопряженном пространстве. Двойственные пары функционалов возникают в теории динамических систем, термодинамике и других направлениях. Утверждения о том, что две величины связаны между собой преобразованием Фенхеля — Лежандра, называют *вариационными принципами*. Одной из двойственных по Лежандру пар являются энтропия динамической системы и топологическое давление. В работе вводится расширенное топологическое давление и для него получен вариационный принцип.

**Преобразование Лежандра.** Пусть всюду далее  $X$  — компактное метрическое пространство с метрикой  $d$ ,  $C(X)$  — банахово пространство вещественнозначных непрерывных на  $X$  функций. Согласно теореме Рисса — Маркова — Какутани [1] сопряженное пространство  $C(X)^*$  изометрически изоморфно пространству регулярных борелевских зарядов на  $X$ : каждый линейный ограниченный функционал на  $X$  может быть представлен в виде:

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \int_X \varphi(x) d\mu, \quad \varphi \in C(X), \quad (1)$$

где  $\mu$  — некоторый регулярный борелевский заряд на  $X$ . При фиксированном  $\varphi \in C(X)$  формула (1) задает функционал на  $C(X)^*$ . Функционалы вида (1) и только они являются линейными непрерывными в  $*$ -слабой топологии.

Определим, следуя [2], основные понятия, связанные с преобразованием Лежандра, применительно к сопряженному пространству  $C(X)^*$ . Пусть  $F$  есть функционал на  $C(X)^*$  со значениями в  $\overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$ . Множество

$$D(F) = \{ \mu \in C(X)^* : F(\mu) < +\infty \}$$

называется *эффективной областью* функционала  $F$ . *Двойственным по Лежандру* к функционалу  $F$  называется функционал  $F^* : C(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , определенный выражением

$$F^*(\varphi) = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu - F(\mu) : \mu \in C(X)^* \right\} = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu - F(\mu) : \mu \in D(F) \right\}.$$

Функционал  $F$  называется *полунепрерывным снизу (сверху)* в точке  $\varphi_0 \in C(X)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что если  $\|\varphi - \varphi_0\|_{C(X)} < \delta$ , то  $F(\varphi) > F(\varphi_0) - \varepsilon$  ( $F(\varphi) < F(\varphi_0) + \varepsilon$ ).

**Предложение 1.** Если функционал  $F$  не есть тождественно  $+\infty$ , то двойственный по Лежандру функционал  $F^*$  является выпуклым и полунепрерывным снизу.

**Топологическое давление.** Гомеоморфизм  $f : X \rightarrow X$  порождает последовательность отображений  $f^i(x) = f(f^{i-1}(x))$  и задает на пространстве  $X$  динамическую систему с дискретным временем. Одним из основных понятий в теории динамических систем является энтропия меры  $h_\mu$ , введенная Колмогоровым и Синаем, определенная на множестве  $M(f)$ , состоящем из инвариантных нормированных мер на  $X$  [3]. По энтропии определим функционал, заданный на всем пространстве  $C(X)^*$ :

$$H(\mu) = \begin{cases} -h_\mu, & \mu \in M(f) \\ -\infty, & \mu \notin M(f) \end{cases}.$$

Введем несколько понятий, участвующих в определении топологического давления [4]. Пусть на  $X$  задана последовательность метрик

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)).$$

Через  $B(x, \varepsilon, n)$  обозначим шар с центром в точке  $x$  радиуса  $\varepsilon$  в метрике  $d_n$ . Множество  $E \subset X$  называется  $(n, \varepsilon)$ -покрытием, если  $X \subset \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon, n)$ .

Множество всех  $(n, \varepsilon)$ -покрытий обозначим  $\Theta(n, \varepsilon)$ .

Для заданной функции  $\varphi \in C(X)$  введем обозначения

$$S_n \varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)), \quad S_d(f, \varphi, \varepsilon, n) = \inf \left\{ \sum_{x \in E} e^{S_n \varphi(x)} : E \in \Theta(n, \varepsilon) \right\}. \quad (2)$$

Топологическим давлением функции  $\varphi \in C(X)$  относительно  $f$  называется величина

$$P(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln S_d(f, \varphi, \varepsilon, n). \quad (3)$$

Энтропия  $h_\mu$  и топологическое давление связаны между собой преобразованием Лежандра.

**Предложение 2 (Вариационный принцип для топологического давления).** Пусть  $f : X \rightarrow X$  — гомеоморфизм компактного метрического пространства  $X$  и  $\varphi \in C(X)$ . Тогда

$$P(\varphi) = H^*(\varphi) = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu + h_\mu(f) : \mu \in M(f) \right\}. \quad (4)$$

**Расширенное топологическое давление.** Пусть  $K$  есть открытый конус положительных функций в пространстве  $C(X)$ ,  $\overline{K}$  — его замыкание, т.е. конус

из неотрицательных функций. Обозначим  $a(x) = e^{\varphi(x)}$  и  $R(a) = e^{P(\ln a)}$ . Тогда формулы (2)—(3) принимают вид:

$$e^{S_n \varphi(x)} = \prod_{i=0}^{n-1} a(f^i(x)), \quad S_d(f, \varphi, \varepsilon, n) = \inf \left\{ \sum_{x \in E} \prod_{i=0}^{n-1} a(f^i(x)) : E \in \Theta(n, \varepsilon) \right\},$$

$$R(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [S_d(f, \varphi, \varepsilon, n)]^{\frac{1}{n}}, \quad a \in K.$$

В приложениях именно функция  $a$  имеет физический смысл. Она описывает влияние среды на происходящий процесс [6]. Величина  $R(a) = e^{P(\ln a)}$  в ряде случаев [5] совпадает со спектральным радиусом оператора взвешенного сдвига с коэффициентом  $a$ . При этом условие строгой положительности функции  $a$  может не выполняться и естественно рассмотреть продолжение функционала  $R(a)$  на конус  $\overline{K}$ . Для функций  $a \in \overline{K}$  определим продолжение следующим образом:

$$\overline{R}(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \inf \left\{ \sum_{x \in E} \prod_{i=0}^{n-1} (a(f^i(x)) + \delta) : E \in \Theta(n, \varepsilon) \right\} \right]^{\frac{1}{n}}, \quad a \in \overline{K}.$$

*Расширенным топологическим давлением* будем называть функционал  $\overline{P}(a) = \ln \overline{R}(a)$ , определенный на конусе  $\overline{K}$ . Свойства расширенного топологического давления на  $\overline{K}$  принципиально отличаются от свойств на  $K$ . В точках из  $\overline{K} \setminus K$  функционал  $\overline{R}$  может быть разрывным.

**Лемма 1.** *Функционал  $\overline{R}$  на  $\overline{K}$  является полунепрерывным сверху и монотонным функционалом.*

Правая часть вариационного принципа (4) также имеет смысл для  $a \in \overline{K}$ , т.е. определен функционал

$$\overline{G}(a) = e^{H^*(\ln a)} = \exp \left( \sup \left\{ \int_X \ln a \, d\mu + h_\mu(f) : \mu \in M(f) \right\} \right), \quad a \in \overline{K}. \quad (5)$$

Если интеграл в (5) расходится, то естественно считать, что

$$\exp \int_X \ln a \, d\mu = 0.$$

Для  $a \in \overline{K} \setminus K$  функция  $\varphi(x) = \ln a(x)$  ограничена сверху, но неограничена снизу. Поэтому выражение

$$\int_X \ln a \, d\mu$$

задает разрывный функционал на пространстве мер и формула (5) не является частным случаем преобразования Лежандра, а является его расширением.

**Лемма 2.** Функционал  $\overline{G}$  на  $\overline{K}$  является полунепрерывным сверху и монотонным.

**Лемма 3.** Если два функционала совпадают на  $K$ , а в точках из  $\overline{K} \setminus K$  являются полунепрерывными сверху и монотонными, то они совпадают на  $\overline{K}$ .  
Сформулируем основной результат.

**Теорема 1.** Для расширенного топологического давления на  $\overline{K}$  справедлив вариационный принцип

$$\overline{R}(a) = \exp \left( \sup \left\{ \int_X \ln a \, d\mu + h_\mu(f) : \mu \in M(f) \right\} \right). \quad (6)$$

Заметим, что согласно предложению 2 левая и правая часть в (6) совпадают на конусе  $K$  и вопрос заключается в совпадении двух продолжений  $\overline{R}$  и  $\overline{G}$  на его замыкании  $\overline{K}$ . Содержательность рассматриваемого вопроса связана с тем, что в точках из  $\overline{K} \setminus K$  оба функционала могут быть разрывными, а разрывных продолжений может быть много.

#### Список литературы

1. Кадец В. М. Курс функционального анализа. — Харьков: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. — 607 с.
2. Ekeland I., Temam R. Convex Analysis and Variational Problems. Amsterdam: North-Holland Publis., 1976.
3. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. — М.: Наука, 1980.
4. Каток А. Б., Хассельблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.
5. Латушкин Ю. Д., Степин А. М. Операторы взвешенного сдвига на топологической марковской цепи // Функци. анализ и его прил. — 1988. — Т. 22, № 4. — С. 86—87.
6. Антоневиц А. Б. Линейные функциональные уравнения: операторный подход. — Минск, Университетское, 1988; перевод на англ. — Birkhäuser, 1996.
7. Antonevich A., Bakhtin V., Lebedev A. Thermodynamics and spectral radius // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. — 2001. — V. 4. No. 4. — P. 318—321.
8. Antonevich A. B., Bakhtin V. I., Lebedev A. V. T-entropy and variational principle for the spectral radius of transfer and weighted shift operators // arXiv:0809.3216v1 [math.DS] 18 Sep 2008, 50 p.
9. Антоневиц А. Б., Зайковски К. Вариационные принципы для спектрального радиуса функциональных операторов // Матем. сб. — 2006. — Т. 197, № 5. — С 3—50.

# ДЕФОРМАЦІЯ З ЗАДАНИМ ЗАКОНОМ ЗМІНЮВАННЯ ЕЛЕМЕНТА ПЛОЩІ МІНІМАЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ

Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич

Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова, Одеса, Україна

[liliyabezka@gmail.com](mailto:liliyabezka@gmail.com), [khomych.yuliia@gmail.com](mailto:khomych.yuliia@gmail.com)

У тривимірному евклідовому просторі  $E_3$  розглянемо область  $G$ , що належить площині  $x^1, x^2$ . Нехай  $S$  — деяка однозв'язна поверхня класу  $C^3$ , що допускає параметризацію  $\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2)$ , до того ж  $\bar{r}_1 \times \bar{r}_2 \neq 0, \bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^i}$ . Тут і надалі всі індекси набувають значень 1, 2.

Розглянемо нескінченно малу деформацію першого порядку поверхні  $S$  з деформуєчим полем  $\bar{U}(x^1, x^2)$  класу  $C^3$  і параметром деформації  $t \rightarrow 0$ :

$$\bar{r}^*(x^1, x^2) = \bar{r}(x^1, x^2) + t\bar{U}(x^1, x^2). \quad (1)$$

**Означення.** Якщо при нескінченно малій деформації елемент площі поверхні змінюється за заданим законом, то таку деформацію будемо називати квазіареальною нескінченно малою деформацією поверхні (квазіареальна н. м. д.).

Частинні похідні вектора зміщення  $\bar{U}(x^1, x^2)$  квазіареальної н. м. д. розкладемо за базисом  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{n}$ :

$$\bar{U}_i(x^1, x^2) = (c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} - \mu \delta_i^\beta) \bar{r}_\beta + c_{i\alpha} T^\alpha \bar{n}, \quad (2)$$

де  $\bar{n}$  — орт нормалі поверхні,  $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \in C^2$  — деякий двічі контраваріантний тензор,  $T^\alpha \in C^2$  — контраваріантний вектор,  $\mu = \mu(x^1, x^2) \in C^2$  — деяка функція. В [1] доведено, що функція  $\mu$  визначає закон змінювання елемента площі поверхні при її квазіареальній н. м. д.. В цьому полягає її геометричний зміст. Зазначимо, що при  $\mu = 0$  квазіареальна деформація зводиться до ареальної нескінченно малої деформації.

У [2] досліджувалась ареальна нескінченно мала деформація поверхні  $S(K \neq 0)$  з відхиленням від дотичної площини, стаціонарним у будь-якому напрямі. В даній роботі вивчається аналогічна задача для квазіареальної деформації. За умови  $\mu \neq 0$  ця задача зводиться до розв'язування системи рівнянь

$$\begin{cases} T^{\alpha\beta} - T^\alpha b_\alpha^\beta + \mu_\alpha c^{\alpha\beta} = 0, \\ c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} b_{\beta j} + c_{i\alpha} T_{,j}^\alpha - \mu b_{ij} = 0, \\ c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

яка узагальнює систему, отриману в [2]. (3) містить п'ять диференціальних рівнянь відносно шести невідомих функцій — симетричного тензора  $T^{\alpha\beta}$ , компонентів вектора  $T^\alpha$  і функції  $\mu$ .

З (3) можна у явному вигляді визначити тензорне поле  $T^{\alpha\beta}$  і функцію  $\mu$  через тензор  $T^\alpha$

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(T_{,k}^\alpha d^{k\beta} + T_{,k}^\beta d^{k\alpha}\right), \mu = \frac{1}{2}T_{,k}^\alpha d^{k\beta} c_{\beta\alpha},$$

який повинен задовольняти таку систему двох диференціальних рівнянь:

$$T_{,\alpha i}^\alpha + T_{,k}^\alpha d_{,\alpha}^{k\beta} b_{\beta i} = 0. \quad (4)$$

Далі в роботі знайдемо окремий розв'язок системи рівнянь (4) для мінімальної поверхні, який ми також представимо у тензорному вигляді. Передусім припустимо, що інваріант  $T_{,\alpha}^\alpha$  є сталою величиною

$$T_{,\alpha}^\alpha = c, c = \text{const}. \quad (5)$$

Цю умову можна розглядати як додаткове обмеження на тензор  $T^\alpha$ , яка, очевидно, еквівалентна рівностям  $T_{,\alpha i}^\alpha = 0$ . З їх урахуванням з (4) дістанемо

$$T_{,k}^\alpha d_{,\alpha}^{k\beta} b_{\beta i} = 0. \quad (6)$$

Для мінімальної поверхні (6) можна подати також у вигляді

$$T_{,k}^\alpha b^{k\beta} b_{\beta\alpha,i} = 0. \quad (7)$$

**Лема 1.** Система двох диференціальних рівнянь (7) для будь-якої мінімальної поверхні  $S$  ( $K \neq 0$ ) рівносильна наступній

$$\begin{cases} T_{,\alpha}^\alpha = 0, \\ T_{,2}^1 - T_{,1}^2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

*Доведення.* Як відомо, мінімальні поверхні належать до класу ізотермічних поверхонь [3]. Окрім того, на ізотермічній поверхні лінії кривини утворюють ізотермічну сітку. Прийmemo цю сітку за координатну, тоді метрична форма мінімальної поверхні

$$ds^2 = g_{11}(x^1, x^2)(dx^{1^2} + dx^{2^2}).$$

При такій параметризації маємо:  $g_{11} = g_{22}, g_{12} = b_{12} = 0$ . Окрім того, з рівнянь Петерсона — Кодацці

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{11}}{\partial x^2} = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22}) \frac{\partial \ln g_{11}}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial b_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22}) \frac{\partial \ln g_{11}}{\partial x^1}, \end{cases}$$

одержимо, що коефіцієнти другої квадратичної форми мінімальної поверхні є сталими:  $b_{22} = -b_{11} = c$ .

Підставивши зазначені вирази для коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм в систему рівнянь (7), отримуємо однорідну систему двох алгебраїчних рівнянь відносно  $T_{,\alpha}^\alpha$  і  $T_{,1}^2 - T_{,2}^1$

$$\begin{cases} T_{,\alpha}^\alpha b_{11,1} + \left(T_{,1}^2 - T_{,2}^1\right) b_{12,1} = 0, \\ T_{,\alpha}^\alpha b_{12,1} - \left(T_{,1}^2 - T_{,2}^1\right) b_{11,1} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Її визначник

$$\Delta = -b_{11,1}^2 - b_{12,1}^2 = K \left[ \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right)^2 \right].$$

Очевидно,  $\Delta = 0$  тоді і лише тоді, коли  $K = 0$ , а цей випадок ми виключили з розгляду. Звідси випливає, що система (9) має єдиний розв'язок  $T_{,\alpha}^\alpha = 0, T_{,1}^2 - T_{,2}^1 = 0$ . Лема доведена.

Отже, питання про існування квазіреальної нескінченно малої деформації мінімальної поверхні з відхиленням від дотичної площини, стаціонарним у будь-якому напрямі, за умови (5) зводиться до дослідження системи рівнянь (8).

**Лема 2.** Для будь-якої регулярної поверхні  $S \in C^2$  розв'язок рівняння  $T_{,\alpha}^\alpha = 0$  можна подати через довільну функцію  $\psi = \psi(x^1, x^2) \in C^2$  у вигляді

$$T^\alpha = c^{\alpha\gamma} \psi_\gamma, \quad \psi_\gamma = \frac{\partial \psi}{\partial x^\gamma}.$$

*Доведення.* Представимо коваріантну похідну в (8.1) через звичайні похідні

$$\frac{\partial T^\alpha}{\partial x^\alpha} + T^s \Gamma_{s\alpha}^\alpha = 0.$$

Це рівняння можна розглядати як одне диференціальне рівняння відносно  $T^1$  і  $T^2$ . Використовуючи формулу Фосса — Вейля [4]

$$\Gamma_{s\alpha}^\alpha = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^s},$$

останнє рівняння можна записати так:

$$\frac{\partial (\sqrt{g} T^\alpha)}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (10)$$

Покладемо тепер

$$T^\alpha = c^{\alpha\gamma} \psi_\gamma, \quad (11)$$

де  $\psi_\gamma$  — довільний ковектор класу  $C^1$ , і підставимо  $T^\alpha$  у (10), тоді дістанемо:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x^1}.$$

Ця рівність означає градієнтність ковектора  $\psi_\gamma$ . Отже, існує функція  $\psi = \psi(x^1, x^2)$  класу  $C^2$ , через похідні якої виражено вектор  $T^\alpha$ . Нам вдалося знайти розв'язок рівняння  $T_{,\alpha}^\alpha = 0$  у тензорному вигляді (11). Лема доведена.

В (11) функція  $\psi(x^1, x^2)$  є довільною. Коли ми підставимо тензор  $T^\alpha$  з (11) у друге співвідношення з (8), то дістанемо умову на функцію  $\psi$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{2^2}} = 0. \quad (12)$$

З (12) випливає, що функція  $\psi(x^1, x^2)$  у випадку мінімальної поверхні для поставленої геометричної задачі задовольняє рівняння Лапласа (12), тобто є гармонічною функцією.

Таким чином, справедлива

**Теорема 1.** *Будь-яка мінімальна поверхня ненульової гаусової кривини  $S$  допускає квазіреальну нескінченно малу деформацію, при якій відхилення від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі. При цьому тензорні поля  $T^{\alpha\beta} \in C^2, T^\alpha \in C^2$  та функція  $\mu = \mu(x^1, x^2) \in C^2$  явно виражаються через довільну гармонічну функцію  $\psi = \psi(x^1, x^2)$ :*

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2K} \psi_{\gamma,j} (c^{\alpha\gamma} b^{j\beta} + c^{\beta\gamma} b^{j\alpha}), T^\alpha = c^{\alpha\gamma} \psi_{,\gamma}, \mu = \frac{1}{2K} \psi_{\alpha,\beta} b^{\alpha\beta}.$$

Здобуті тензорні поля  $T^{\alpha\beta}, T^\alpha$  та функція  $\mu$  є ненульовим розв'язком системи рівнянь (3) для однозв'язної мінімальної поверхні. Оскільки умови інтегрованості системи рівнянь (2) для мінімальної поверхні виконуються, то з (2) можна знайти деформує поле

$$\overline{U}(M) = \int_{M_0 M} \left( -\frac{1}{K} \psi_{i,\alpha} b^{\alpha\beta} \overline{r}_\beta - \psi_{,i} \overline{n} \right) dx^i + \overline{U}_0,$$

де  $\overline{U}_0$  — сталий вектор.

Очевидно, вірна

**Теорема 2.** *Будь-яка мінімальна однозв'язна поверхня  $S$  ( $K \neq 0$ ) допускає квазіреальну нескінченно малу деформацію з відхиленням від дотичної площини, стаціонарним у будь-якому напрямі. При цьому деформує поле  $\overline{U}$  через гармонічну функцію  $\psi = \psi(x^1, x^2)$  можна виразити так:*

$$\overline{U}(M) = \int_{M_0 M} \left( -\frac{1}{K} \psi_{i,\alpha} b^{\alpha\beta} \overline{r}_\beta - \psi_{,i} \overline{n} \right) dx^i + \overline{U}_0,$$

де криволінійний інтеграл береться по будь-якій спрямній лінії, що належить поверхні та з'єднує довільно фіксовану точку  $M_0$  зі змінною точкою  $M$ .

### Список літератури

1. Безкоровайна Л. Л., Хомич Ю. С., Квазіреальна нескінченно мала деформація поверхні в  $E_3$  // Proceedings of the international geometry center, Одеса. — 2014, № 2. — С. 6—19.
2. Безкоровайна Л. Л., Хомич Ю. С. А-деформація поверхні  $S \subset E_3$  з обмеженням на відхилення від дотичної площини // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15—17 травня, 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — К.: НТУУ «КПІ», 2014. — С. 42.
3. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. — Часть вторая. — Москва: ОГИЗ, 1948. — 410 с.
4. Безкоровайна Л. Л. Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки. — Одеса: Астропринт, 1999. — 168 с.

# ОБ УСЛОВИЯХ СОХРАНЕНИЯ ТЕНЗОРА РИМАНА ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

В. Е. Березовский, Й. Микеш

Уманский национальный университет садоводства, Умань, Украина,  
berez.volod@rambler.ru

Университет Палацкого, Оломоуц, Чешская Республика  
josef.mikes@upol.cz

В работе установлены условия сохранения тензора Римана относительно почти геодезических отображений пространств аффинной связности. Примечательно, что эти условия имеют место и для других видов диффеоморфизмов.

Напомним некоторые понятия теории почти геодезических отображений, которые изложены в [1—3].

Кривую, определенную в пространстве аффинной связности  $A_n$  называют *почти геодезической*, если вдоль нее существует двумерная параллельная площадка, содержащая ее касательный вектор.

Диффеоморфизм  $f : A_n \rightarrow \bar{A}_n$  называют *почти геодезическим отображением*, если при этом отображении все геодезические линии пространства  $A_n$  переходят в почти геодезические линии пространства  $\bar{A}_n$ .

Для того чтобы отображение пространства  $A_n$  на пространство  $\bar{A}_n$  было почти геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат  $x^1, x^2, \dots, x^n$  тензор деформации связностей

$$P_{ij}^h(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^h(x)$$

удовлетворял условиям:

$$A_{\alpha\beta\gamma}^h \lambda^\alpha \lambda^\beta \lambda^\gamma = a P_{\alpha\beta}^h \lambda^\alpha \lambda^\beta + b \lambda^h,$$

где  $A_{ijk}^h = P_{ij,k}^h + P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h$ ,  $\Gamma_{ij}^h$  ( $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ ) — объект аффинной связности пространства  $A_n$  ( $\bar{A}_n$ ),  $\lambda^h$  — произвольный вектор,  $a$  и  $b$  — некоторые функции переменных  $x^h$  и  $\lambda^h$ .

Нами доказана

**Теорема 1.** *Для того чтобы тензор Римана  $R_{ijk}^h$  являлся инвариантным геометрическим объектом относительно почти геодезических отображений пространств аффинной связности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$$A_{ijk}^h = A_{ikj}^h.$$

Пусть при отображении пространств аффинной связности  $A_n$  на  $\bar{A}_n$  выполняются условия:

$$P_{ij,k}^h + P_{ik,j}^h = -P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h - P_{ik}^\alpha P_{\alpha j}^h + \delta_{(i}^h a_{jk)}. \quad (1)$$

Такие отображения являются частным случаем почти геодезических отображений первого типа.

Уравнения (1) сведены к уравнениям вида

$$P_{ij,k}^h = -P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h + \delta_{(i}^h \tilde{a}_{jk)}, \quad (2)$$

где  $\tilde{a}_{ij}$  некоторый тензор.

Очевидно, для почти геодезических отображений, характеризующихся условиями (2), тензор  $A_{ijk}^h = \delta_{(i}^h \tilde{a}_{jk)}$ . Тогда на основании Теоремы 1 имеет место

**Теорема 2.** *Тензор Римана  $R_{ijk}^h$  является инвариантным геометрическим объектом пространств аффинной связности относительно почти геодезических отображений, определяемых уравнениями (1).*

Поскольку тензор Римана в аффинном пространстве обращается в нуль, то имеет место

**Теорема 3.** *Если аффинное пространство  $A_n$  допускает почти геодезическое отображение, определяемое уравнениями (1), на  $\bar{A}_n$ , то  $\bar{A}_n$  является аффинным пространством.*

Таким образом, аффинные пространства образуют замкнутый класс относительно почти геодезических отображений, определяемых уравнениями (1). Уравнения (1) сведены к замкнутой системе типа Коши в ковариантных производных.

#### Список литературы

1. Berezovski V. E., Mikeš J., Vanžurová A. Fundamental PDE's of the canonical almost geodesic mappings of type  $\pi_1$  // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2). — 2014. — 37, No. 3. — P. 647—659.
2. Mikeš J., Vanžurová A., Hinterleitner I. Geodesic mappings and some generalizations. — Olomouc: Palacky University, 2009. — 304 p.
3. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.

**ПРО ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДЕЯКИХ ІНТЕГРАЛІВ  
ЗА МІРОЮ ЛЕБЕГА — ПУАССОНА**

**В. А. Болух**

*Інститут математики НАН України, Київ, Україна*

vira\_shevchuk@ukr.net

У доповіді наведено доведення теореми, яка відображає властивості міри Лебега — Пуассона, і яка значно спрощує доведення деяких важливих формул статистичної механіки, а саме представлення у вигляді експоненти великої статистичної суми  $Z_\Lambda$ . Цей розклад необхідний для побудови термодинамічних потенціалів (зокрема тиску) при переході до нескінченного об'єму.

Нехай  $\mathbb{R}^d$  — це  $d$ -вимірний евклідовий простір.  $B(\mathbb{R}^d)$  — сім'я всіх борелівських множин в  $\mathbb{R}^d$ .  $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$  — система усіх обмежених множин з  $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ . Простір конфігурацій:

$$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d} := \left\{ \gamma \subset \mathbb{R}^d \mid |\gamma \cap \Lambda| < \infty, \text{ для } \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \right\},$$

де  $\gamma := \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$  — конфігурація, що характеризує положення нескінченної системи точкових частинок у просторі  $\mathbb{R}^d$ . Простір скінченних конфігурацій в обмеженому об'ємі:

$$\Gamma_\Lambda = \{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma \subset \Lambda, \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \}.$$

Міра Лебега — Пуассона  $\lambda_{z\sigma}$ , де  $z > 0$ , а  $\sigma$  — міра Лебега в  $\mathbb{R}^d$ , визначається формулою:

$$\int_{\Gamma_\Lambda} F(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Lambda} \dots \int_{\Lambda} F(\{x_1, \dots, x_n\}) \sigma(dx_1) \dots \sigma(dx_n)$$

для  $\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$ -вимірної обмеженої функції  $F$ .

Будемо розглядати функції на конфігураційному просторі  $\Gamma_\Lambda$ , що мають вигляд

$$\Phi(\gamma) = \sum_{k=1}^{|\gamma|} \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\} \subset \gamma}^* F(\gamma_1) F(\gamma_2) \dots F(\gamma_k), \quad (1)$$

$$\Phi(\emptyset) = 1,$$

де  $*$  в межі суми означає, що сума береться по всіх складових множини  $\gamma$  в  $k$ -непорожніх неперетинних підмножинах, тобто:

$$\bigcup_{j=1}^k \gamma_j = \gamma, \quad \gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset \text{ для всіх } i \neq j,$$

$$\gamma_j \neq \emptyset, \text{ та } i, j \in \{1, \dots, k\}.$$

**Теорема 1.** Нехай функція  $\Phi$  має вигляд як в (1) і функції  $F_n$  задовольняють наступні оцінки:

$$\int_{\Lambda} \dots \int_{\Lambda} F_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \leq c^n C_{\Lambda} n!,$$

де стала  $c$  не залежить від  $\Lambda$ . Тоді

$$\int_{\Gamma_{\Lambda}} \Phi(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma) = e^{\int_{\Gamma_{\Lambda} \setminus \{\emptyset\}} F(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma)},$$

для  $0 < z < 1 / 2c$ .

Для системи точкових частинок, що взаємодіють для двочастинкових потенціалів  $\Phi$  велику статистичну суму можна записати у вигляді:

$$Z_{\Lambda} = \int_{\Gamma_{\Lambda}} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma),$$

$$U(\gamma) = \sum_{\{x,y\} \subset \gamma} \phi(|x - y|).$$

З метою побудови розкладів для термодинамічних потенціалів гіббсову щільність можна перетворити до вигляду (1) і застосувати теорему 1.

Доповідь побудована за результатами роботи [1].

#### Список літератури

1. Boluh V. A. An Exponential Representation for Some Integrals with Respect to Lebesgue — Poisson Measure / V. A. Boluh, A. L. Rebenko // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2014. — Vol. 20. — No. 2. — P. 186—192

## К УСЛОВИЮ R-РЕГУЛЯРНОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

О. Ф. Борисенко, А. Д. Булова, Л. И. Минченко

Белорусский государственный университет информатики  
и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

leschov@bsuir.by

Пусть  $f$  и  $h_i, i = 1, \dots, p$  — непрерывно дифференцируемые функции из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}$ .

Введем непустое множество допустимых точек

$$C = \{y \in \mathbb{R}^m \mid h_i(y) \leq 0, i \in I, h_i(y) = 0, i \in I_0\},$$

где  $I = \{1, \dots, s\}, I_0 = \{s + 1, \dots, p\}$ , и рассмотрим задачу  $NLP$  минимизации функции  $f(y)$  на множестве  $C$ .

Положим  $I(y) = \{i \in I \mid h_i(y) = 0\}$  и определим в точке  $y \in C$  множество множителей Лагранжа

$$\Lambda(y) = \{\lambda \in \mathbb{R}^p \mid \nabla f(y) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y) = 0, \\ \lambda_i \geq 0, i \in I(y), \lambda_i = 0, i \in I \setminus I(y)\}.$$

Основным необходимым условием оптимальности для задачи  $NLP$  является условие Куна — Таккера, утверждающее, что в оптимальной точке  $y \in C$  существуют множители Лагранжа, то есть  $\Lambda(y) \neq \emptyset$ . Ключевое значение условия Куна — Таккера заключается также в том, что на его основе строятся многочисленные вычислительные алгоритмы для нахождения оптимальных точек. Однако условие Куна — Таккера справедливо только при выполнении некоторых условий регулярности. Наиболее известным условием регулярности в точке  $y \in C$  является условие Мангасаряна — Фромовица ( $MFCQ$ ), которое сводится к требованию  $\Lambda_0(y) = \{0\}$ , где

$$\Lambda_0(y) = \{\lambda \in \mathbb{R}^p \mid \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y) = 0, \\ \lambda_i \geq 0, i \in I(y), \lambda_i = 0, i \in I \setminus I(y)\}.$$

Однако имеются классы задач, для которых условие  $MFCQ$  не выполняется, однако выполняются более слабые (менее жесткие) условия регулярности.

При исследовании задач оптимизации важную роль играет следующее условие, представляющее практический интерес и одновременно являющееся достаточно общим и слабым условием регулярности. Обозначим через  $d_C(y)$  евклидово расстояние от точки  $y$  до множества  $C$ .

**Определение 1.** Множество  $C$  будем называть  $R$ -регулярным в точке  $y^0 \in C$  (или говорить, что в данной точке выполнено the error bound property), если существуют число  $\alpha > 0$  и окрестность  $V(y^0)$  точки  $y^0$  такие, что

$$d_C(y) \leq \alpha \max\{0, h_i(y), i \in I, |h_i(y)|, i \in I_0\} \text{ для всех } y \in V(y^0).$$

Понятие  $R$ -регулярности и его модификации в свое время рассматривались в [1, 2] и изучались другими авторами.

Представим множество индексов  $I(y)$  в точке  $y \in C$  в виде разбиения на два множества

$$I(y) = I^+(y) \cup I^-(y),$$

где  $I^+(y) \cap I^-(y) = \emptyset$  и  $I^+(y) = \{i \in I(y) \mid \exists \lambda \in \Lambda_0(y) \text{ такой, что } \lambda_i > 0\}$ .

**Определение 2** ([3]). Будем говорить, что в точке  $y^0 \in C$  выполнено ослабленное условие регулярности Мангасаряна — Фромовица  $RMFCQ$ , если система векторов  $\{\nabla h_i(y), i \in I_0 \cup I^+(y^0)\}$  имеет постоянный ранг в некоторой окрестности этой точки.

Условие  $RMFCQ$  слабее условия  $MFCQ$  и целого ряда других условий регулярности (см. [4, 5]).

Известно [5, 6], что выполнение условия  $RMFCQ$  в допустимой точке влечет  $R$ -регулярность множества  $C$  в этой точке. С необходимым условием  $R$ -регулярности можно связать также более слабое требование по сравнению с  $RMFCQ$ . В [7] показано, что из  $R$ -регулярности множества  $C$  при дополнительном условии  $I = \emptyset$  следует, что

$$\text{rank}\{\nabla h_i(y), i \in I_0\} = \text{rank}\{\nabla h_i(y^0), i \in I_0\}$$

для всех допустимых точек  $y$  из некоторой окрестности точки  $y^0$ . Данное утверждение допускает обобщение.

**Теорема 1.** Пусть множество  $C$   $R$ -регулярно в точке  $y^0 \in C$  и  $I^+(y^0) = \emptyset$ . Тогда для всех допустимых точек  $y$  из некоторой окрестности  $y^0$  имеет место равенство

$$\text{rank}\{\nabla h_i(y), i \in I_0 \cup I^+(y^0)\} = \text{rank}\{\nabla h_i(y^0), i \in I_0 \cup I^+(y^0)\}.$$

Примеры показывают, что обратное утверждение для теоремы 1 не имеет место.

### Список литературы

1. Ioffe A. D. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1979. — **251**. — P. 61—69.
2. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. — Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
3. Минченко Л. И., Стаховский С. М. // Доклады БГУИР. — 2010, № 8. — С.104—109.
4. Minchenko L., Stakhovski S. // SIAM J. Optimization. — 2011. — **21**, No. 1. — P. 314—332.
5. Andreani R., Haeser G., Schuverdt M. L., Silva P. J. S. // SIAM J. Optimization. — 2012. — **22**, No. 3. — P. 1109—1125.
6. Лещев А. Е., Минченко Л. И. // Известия НАН Беларуси, сер. физ.-матем.наук. — 2014. — № 2. — С. 64—70.
7. Behling R., Iusem A. // Math. Programming, Ser. A. — 2013. — **137**. — P. 155—165.

# УЗАГАЛЬНЕНІ $F_{up}$ -ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

**І. В. Брисіна, В. О. Макарічев**

*Національний аерокосмічний університет імені М. Є. Жуковського*

*«Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна*

*iryna.brysina@gmail.com, victor.makarichev@gmail.com*

Атомарні функції — це розв'язки з компактним носієм лінійних функціонально-диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами та лінійними перетвореннями аргументу. Одним із напрямів розвитку теорії атомарних функцій є дослідження їх апроксимаційних властивостей. Основні результати, що отримані у цьому напрямку, належать В. О. Рвачову та представникам його наукової школи. Ці дослідження можна розглядати як спробу знайти апарат наближення, що поєднував би такі властивості: нескінченна гладкість, компактність носія, а також оптимальність (з тієї чи іншої точки зору) наближення різноманітних класів функцій.

Розглянемо функцію

$$mur_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{st}{(2s)^k}\right)}{s^2 \frac{t}{(2s)^k} \sin\left(\frac{t}{(2s)^k}\right)} dt, \quad s \in \mathbb{N}.$$

При  $s = 1$  функція  $mur_s(x)$  є відомою  $ur$ -функцією В.О. Рвачова [1]. За умови  $s \geq 2$  цю функцію було отримано у [2].

Для кожного  $s \in \mathbb{N}$  атомарна функція  $mur_s(x)$  є нескінченно диференційованою, має носій  $[-1, 1]$  та задовольняє рівнянню

$$y'(x) = 2 \sum_{k=1}^s \left( y(2sx + 2s - 2k + 1) - y(2sx - 2k + 1) \right).$$

Розглянемо простори лінійних комбінацій зсувів цієї функції. Нехай  $MUP_{s,n}$  — простір функцій виду

$$\varphi(x) = \sum_k c_k \cdot mur_s\left(x - \frac{k}{(2s)^n}\right), \quad x \in [-1, 1].$$

**Теорема 1** ([3] для випадку  $s = 1$ , [4] для випадку  $s \geq 2$ ). *Для будь-якого  $n = 0, 1, 2, \dots$  існують коефіцієнти  $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  такі, що*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j \cdot mur_s\left(x - \frac{j}{(2s)^n}\right) \equiv x^n.$$

Наслідком цієї теореми є той факт, що кожен поліном степеня не вище за  $n$  належить простору  $MUP_{s,n}$ . Крім того, було доведено, що в цих просторах існує базис, що складається зі зсувів однієї фінітної функції з локальним носієм.

**Теорема 2** ([3],[4]). Система функцій

$$\left\{ F_{\text{тип}_{s,n}} \left( x - \frac{j}{(2s)^n} + 1 + \frac{n+2}{2(2s)^n} \right) \right\}_{j=1}^{2(2s)^n + n + 1}$$

утворює базис простору  $MUP_{s,n}$ , де

$$F_{\text{тип}_{s,n}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left( \frac{\sin\left(\frac{t}{2(2s)^n}\right)}{\frac{t}{2(2s)^n}} \right)^n F_s\left(\frac{t}{(2s)^n}\right) dt,$$

$F_s(t)$  — перетворення Фур'є функції  $\text{тип}_s(x)$ .

**Теорема 3** ([3],[4]). Носієм функції  $F_{\text{тип}_{s,n}}(x)$  є відрізок  $\left[ -\frac{n+2}{2(2s)^n}, \frac{n+2}{2(2s)^n} \right]$ .

Далі було досліджено простори періодичних лінійних зсувів атомарних функцій  $\text{тип}_s(x)$ .

Позначимо через  $\widetilde{MUP}_{s,n}$  простір функцій

$$\psi(x) = \sum_k c_k \cdot \text{тип}_s\left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n}\right), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

таких, що  $\psi^{(j)}(-\pi) = \psi^{(j)}(\pi)$  для всіх  $j = 0, 1, 2, \dots$ , а через  $\widetilde{W}_2^r$  — клас функцій  $f \in C_{[-\pi, \pi]}^{r-1}$  таких, що  $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$  для кожного  $k = 0, 1, \dots, r-1$ ,  $f^{(r-1)}(x)$  абсолютно неперервна та  $\|f^{(r)}\|_{L_2[-\pi, \pi]} \leq 1$ . Крім того, нехай

$$E_X(A, L) = \sup_{\varphi \in A} \inf_{\psi \in L} \|\varphi - \psi\|_X \quad \text{та} \quad d_N(A, X) = \inf_{\dim L=N} E_X(A, L)$$

—  $N$ -поперечник за Колмогоровим.

**Теорема 4** ([3],[4]). Розмірність простору  $\widetilde{MUP}_{s,n}$  дорівнює  $2(2s)^n$ .

**Теорема 5** ([5]). При  $n \geq n(r)$  виконується рівність

$$E_{L_2[-\pi, \pi]} \left( \widetilde{W}_2^r, \widetilde{MUP}_{1,n} \right) = d_{2^{n+1}} \left( \widetilde{W}_2^r, L_2[-\pi, \pi] \right).$$

**Теорема 6** ([4]). Для будь-якого  $s \geq 2$  існують  $C(r) \geq 0$  та  $n(r) \geq 0$  такі, що виконується нерівність

$$E_{L_2[-\pi, \pi]} \left( \widetilde{W}_2^r, \widetilde{MUP}_{s,n} \right) \leq d_{2(2s)^n} \left( \widetilde{W}_2^r, L_2[-\pi, \pi] \right) \sqrt{1 + \frac{C(r)}{2^n}}.$$

Отже, простори  $\widetilde{MUP}_{s,n}$  екстремальні при  $s = 1$  і асимптотично екстремальні при  $s \geq 2$  для наближення класів періодичних диференційованих функцій  $\widetilde{W}_2^r$  за нормою простору  $L_2[-\pi, \pi]$ .

Таким чином, простори періодичних лінійних комбінацій зсувів атомарної функції  $\text{тип}_s(x)$  поєднують такі переваги:

- 1) нескінченна гладкість елементів;
- 2) існування базису, що складається зі зсувів однієї функції з малим носієм;
- 3) «гарні» апроксимаційні властивості.

У той же час, виникає цілком природне питання про обчислення базисних функцій цих просторів. Крім того, їх суттєвим недоліком є висока швидкість зростання розмірності цих просторів. Відзначимо, що для усунення цього недоліку підхід до побудови запропонованих просторів потребує перегляду. Фактично, потрібно змінити їх структуру. З цього випливають питання: якими повинні бути ці простори, якими при цьому будуть їх апроксимаційні властивості, чи збережеться наявність базису з малим носієм?

Розглянемо узагальнення функції  $F_{\text{мур}}_{s,n}(x)$ .

**Визначення 1.** Узагальненою Фур-функцією будемо називати функцію виду

$$f_{N,m}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left( \frac{\sin \frac{t}{N}}{\frac{t}{N}} \right)^{m+1} F\left(\frac{t}{N}\right) dt,$$

де  $N$  — парне натуральне число,  $m \in \mathbb{N}$ , причому  $m \leq N - 2$ ,  $F(t)$  — перетворення Фур'є функції  $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$  такої, що

- 1)  $\text{supp } f(x) = [-1, 1]$ ;
- 2)  $f(x)$  — парна функція;
- 3)  $f(x) \geq 0$  на відрізку  $[-1, 1]$ ;
- 4)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ .

Нехай  $L_{N,m}$  — простір функцій

$$\varphi(x) = \sum_k c_k \cdot f_{N,m}\left(\frac{x}{\pi} - \frac{2k-m}{N}\right), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

таких, що  $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ .

**Теорема 7.** Якщо  $m + 1 \geq r$ , то існує така константа  $M \geq 0$ , що

$$E_{L_2[-\pi, \pi]} \left( \widetilde{W}_2^r, L_{N,m} \right) \leq \left( \frac{N}{2} \right)^{-r} \sqrt{1 + \frac{M}{2^m}}.$$

**Теорема 8.**

$$\text{supp } f_{N,m}(x) = \left[ -\frac{m+2}{N}, \frac{m+2}{N} \right].$$

**Теорема 9.** Розмірність простору  $L_{N,m}$  дорівнює  $N$ .

У [6] було доведено, що  $d_N \left( \widetilde{W}_2^r, L_2[-\pi, \pi] \right) = (N/2)^{-r}$ .

Отже, простори періодичних лінійних комбінацій зсувів узагальненої Фур-функції є «майже» оптимальними для наближення класів функцій  $\widetilde{W}_2^r$  за

нормою простору  $L_2[-\pi, \pi]$ . Крім того, запропоновані простори мають базис, що складається зі зсувів функції з малим носієм. Також у цих просторах відсутній недолік просторів  $\widetilde{MUP}_{s,n}$ .

Іншим цікавим результатом є теорема про асимптотику узагальнених *Fur*-функцій.

**Теорема 10.** *Існує многочлен  $P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$  такий, що для будь-якого  $x \in \mathbb{R}$  виконується рівність*

$$\frac{1}{N} f_{N,m}(x) = P(x) \cdot e^{-\frac{3x^2 N^2}{2m}} + R(x),$$

де функція  $R(x)$  задовольняє нерівності  $|R(x)| \leq \frac{C(f)}{m^{\frac{5}{2}}}$ .

Слід відзначити, що перший член асимптотичних розвинень функцій  $\frac{1}{N} f_{N,m}(x)$  було отримано у роботі [7]. Теорема 10 є узагальненням результатів цієї статті.

До нерозв'язаних питань відносно узагальнених *Fur*-функцій можна віднести:

1) чи можна покращити оцінку величини найкращого наближення класів періодичних диференційованих функцій просторами періодичних лінійних комбінацій зсувів узагальнених *Fur*-функцій (наприклад, за яких додаткових умов на функцію  $f(x)$ , що породжує  $f_{N,m}(x)$ , буде виконуватися рівність

$$E_{L_2[-\pi, \pi]} \left( \widetilde{W}_2^r, L_{N,m} \right) = d_N \left( \widetilde{W}_2^r, L_2[-\pi, \pi] \right)?$$

2) відомо, що норма оператора інтерполяції елементами простору  $\widetilde{MUP}_{1,n}$  періодичних функцій на рівномірній сітці зростає як  $\ln \ln N$ , де  $N$  — розмірність простору  $\widetilde{MUP}_{1,n}$  [3]; чи можна поширити цей результат на випадок просторів періодичних лінійних комбінацій зсувів узагальнених *Fur*-функцій?

3) як оптимально з тієї чи іншої точки зору обчислювати узагальнені *Fur*-функції?

Дослідження В. О. Макарічева було виконано за часткової підтримки Фонду імені Н. І. Ахієзера.

### Список літератури

1. Рвачов В. Л., Рвачов В. О. Про одну фінітну функцію // Доповіді АН УРСР, Сер. А. — 1971. — № 8. — С. 705—707.
2. Рвачов В. О., Старець Г. О. Деякі атомарні функції та їх застосування // Доповіді АН УРСР, Сер. А. — 1983. — № 11. — С. 22—24.
3. Рвачев В. Л., Рвачев В. А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. — К.: Наук. думка, 1979. — 196 с.

4. Макаричев В. А. Приближение периодических функций с помощью  $mur_s(x)$  // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93. — № 6. — С. 878—901.
5. Рвачев В. А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применения // Успехи мат. наук. — 1990. — Т. 45, № 1 (271). — С. 77—103.
6. Kolmogoroff A. N. Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. of Math. — 1936. — 37. — P. 107—110.
7. Brysina I. V., Makarichev V. A. On the asymptotics of the generalized  $Fup$ -functions // Adv. Pure Appl. Math. — 2014. — 5. — P. 131—138.

# ФРАКТАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ СПЛАЙНАМИ

Т. А. Брязкало

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

tianan@yandex.ru

У доповіді запропоновано метод фрактальної інтерполяції за допомогою сплайнів мінімального дефекта для апроксимації вихідних функцій. Отримано похибку наближення, при певних обмеженнях щодо вихідних диференційовних функцій з різних класів.

Результати гарантують збіжність інтерполянта до будь-якої гладкої функції, коли крок інтерполяції прямує до нуля. Як наслідок, стає можливим апроксимувати будь-яку функцію за допомогою фрактальних інтерполяцій сплайнами мінімального дефекта з довільною точністю. Можлива втрата точності врівноважується з узагальненням метода, оскільки, інтерполяційні фрактальні функції співпадають зі сплайнам мінімального дефекта, у окремому випадку, коли коефіцієнт  $\alpha$  дорівнює нулю. Це узагальнення зберігається при збереженні гладкості функції.

Нехай  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$  — дійсні числа,  $I = [t_0, t_N] \subset \mathbb{R}$  — відрізок, що включає ці точки, функція  $g$  належить класу неперервних на відрізку  $I$  функцій  $C(I)$ . Позначимо через  $\Delta : t_0 < t_1 < \dots < t_N$  розбиття відрізка  $I = [t_0, t_N] \subset \mathbb{R}$ . Нехай  $I_n = [t_{n-1}, t_n]$ ,  $L_n : I \rightarrow I_n, n \in \{1, 2, \dots, N\}$  — гомеоморфізм такий, що

$$L_n(t_0) = t_{n-1}, \quad L_n(t_N) = t_n,$$

$$|L_n(c_1) - L_n(c_2)| \leq l |c_1 - c_2|, \quad \forall \{c_1, c_2\} \subset I,$$

для  $0 \leq l \leq 1$ . Розглянемо для всіх  $n = 0, 1, \dots, N$  і  $F = I \times \mathbb{R}$ ,  $|\alpha_n| < 1$ ,  $N$  неперервних відображень  $F_n : F \rightarrow \mathbb{R}$ , які задовольняють умови

$$F_n(t_0, x_0) = x_{n-1}, \quad F_n(t_N, x_N) = x_n, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

$$|F_n(t, x) - F_n(t, y)| \leq |\alpha_n| |x - y|, \quad t \in I, \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$$

Визначимо функції

$$w_n(t, x) = (L_n(t), F_n(t, x)), \quad \forall n = 0, 1, \dots, N,$$

Тоді має місце наступна теорема:

Нехай  $\mathfrak{S}$  — множина неперервних функцій  $f : [t_0, t_N] \rightarrow \mathbb{R}$  таких, що  $f(t_0) = x_0$  і  $f(t_N) = x_N$ . Розглянемо метрику на  $\mathfrak{S}$

$$d(f, g) = \|f - g\|_p = \left( \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} |f(t) - g(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty, t \in [t_0, t_N], \forall \{f, g\} \subset \mathfrak{S}.$$

Зазначимо, що простір  $(\mathfrak{S}, d)$  є метричним і повним. Визначимо відображення  $T : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$  наступним чином:

$$(Tf)(t) = F_n(L_n^{-1}(t), f \circ L_n^{-1}(t)) \quad \forall t \in [t_{n-1}, t_n], \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

$(Tf)(t)$  є неперервною функцією на відрізку  $[t_{n-1}, t_n]$  для  $\forall n = 1, 2, \dots, N$ . Відображення  $T$  є стискуючим  $(\mathfrak{S}, d)$ , бо

$$\|Tf - Ts\|_p \leq |\alpha| \|f - s\|_p,$$

де  $|\alpha| = \max\{|\alpha_n| : n = 0, 1, \dots, N\}$ . Оскільки  $|\alpha| < 1$ , відображення  $T$  визначає єдину фіксовану точку на  $\mathfrak{S}$ , тобто існує  $f \in \mathfrak{S}$  така, що  $(Tf)(t) = f(t)$  для  $t \in [t_0, t_N]$ . Ця функція є фрактальною інтерполяційною функцією для  $w_n$ .

Розглянемо систему ітераційних функцій:

$$\begin{cases} L_n(t) = a_n t + b_n, \\ F_n(t, x) = \alpha_n x + q_n(t), \end{cases}$$

$$a_n = \frac{(t_n - t_{n-1})}{(t_N - t_0)}, \quad b_n = \frac{(t_N t_{n-1} - t_0 t_n)}{(t_N - t_0)}.$$

У випадку, коли  $\alpha_n = 0, n = 1, 2, \dots, N$ , маємо  $F_n(t, x) = q_n(t)$  і  $f(t) = q_n \circ L_n^{-1}(t), t \in I_n$ .

Позначимо через  $C^p[t_0, t_N]$  множину  $p$  разів неперервно-диференційовних на  $[t_0, t_N]$  функцій.

Для визначення умов побудови фрактальної інтерполяційної функції, яка буде диференційовною, використаємо наступну теорему.

Вважатимемо далі, що  $a_n = \frac{1}{N}$ . Використовуючи теорему Барнслі і Харрінгтона, подамо  $q_n$  у такому вигляді:

$$q_n(t) = s \circ L_n(t) - \alpha_n b(t),$$

де  $s$  — неперервна функція,  $s(t_n) = x_n, n = 0, 1, \dots, N$ , а  $b(t)$  — дійсна неперервна функція,  $b \neq g$ , така, що  $b(t_0) = x_0, b(t_N) = x_N$ .

Нехай  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Позначимо через  $s^\alpha$  фрактальну інтерполяційну функцію, яку іноді називають  $\alpha$ -фрактальною функцією для  $s$  відносно розбиття  $\Delta$  та функції  $b$ .

З'ясуємо додаткові обмеження на функцію  $b(t)$  для того, щоб виконувались умови теореми Барнслі — Харрінгтона і забезпечувалось існування фрактальної інтерполяційної функції. Розглянемо

$$p \geq 0, |\alpha_n| < \frac{1}{N^p} \text{ і } q_n \in C^p[t_0, t_N], n = 1, 2, \dots, N.$$

Обов'язкова умова для  $n = 2, 3, \dots, N, k = 1, 2, \dots, p$

$$F_{n-1,k}(t_N, x_{N,k}) = F_{nk}(t_0, x_{0,k}).$$

Оскільки

$$F_{nk}(t, x) = \frac{(\alpha_n x + q_n^{(k)}(t))}{a_n^k}, \quad L_n(t) = \frac{t}{N} + b_n, \quad L_n'(t) = \frac{1}{N} = a_n,$$

то

$$q_n^{(k)}(t) = \frac{1}{N^k} s^k(L_n(t)) - \alpha b^{(k)}(t), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, p,$$

Співвідношення перепишемо наступним чином:

$$\begin{aligned} N^k \alpha_{n-1} \frac{g^k(t_N) - N^k \alpha_N b^{(k)}(t_N)}{1 - N^k \alpha_N} - \alpha_{n-1} N^k b^{(k)}(t_N) &= \\ = N^k \alpha_n \frac{g^k(t_0) - N^k \alpha_1 b^{(k)}(t_0)}{1 - N^k \alpha_1} - \alpha_n N^k b^{(k)}(t_0) \end{aligned}$$

Якщо взяти  $\alpha_n = \alpha$ ,  $n = 1, \dots, N$ , то одержимо

$$s^{(k)}(t_N) - s^{(k)}(t_0) = s^{(k)}(t_0) - s^{(k)}(t_0).$$

Звідки,

$$\begin{cases} b^{(k)}(t_0) = s^{(k)}(t_0), \\ b^{(k)}(t_N) = s^{(k)}(t_N), \end{cases}$$

де  $k = 0, 1, 2, \dots, p$ .

Отже, в ролі функції  $b(t)$  візьмемо інтерполяційний поліном степеня  $2p + 1$ , а функцією  $g$  може бути будь-яка функція з класу  $C^p$ .

Система ітераційних функцій з  $k$  разів диференційовними фрактальними інтерполяційними функціями виражається наступним чином:

$$\begin{cases} L_n(t) = \frac{1}{N} t + b_n, \\ F_{nk}(t, x) = N^k \alpha x + N^k q_n^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, p, \\ q_n^{(k)}(t) = \frac{1}{N^k} s^k(L_n(t)) - \alpha b^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, p, \end{cases}$$

Тоді:

$$\begin{cases} L_n(t) = \frac{1}{N} t + b_n, \\ F_{nk}(t, x) = N^k \alpha x + s^k \circ L_n(t) - N^k \alpha b^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, p, \end{cases}$$

тобто,  $q_{nk}(t) = s^k \circ L_n(t) - N^k \alpha b^{(k)}(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, p$ , і

$$(s_b^\alpha)^{(k)} = (s^{(k)})_{b^{(k)}}^{N^k \alpha}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, p.$$

Згідно з теоремою 3, величина  $\left\| (s_b^\alpha)^{(k)} - s^{(k)} \right\|_p$  оцінюється таким чином:

$$\left\| (s_b^\alpha)^{(k)} - s^{(k)} \right\|_p = \left\| (s^{(k)})_{b^{(k)}}^{N^k \alpha} - s^{(k)} \right\|_p \leq \frac{N^k |\alpha|}{1 - N^k |\alpha|} \left\| s^{(k)} - b^{(k)} \right\|_p.$$

Нехай  $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1\}$  — довільне розбиття відрізка  $[0, 1]$ ,  
 $h_n = t_n - t_{n-1}$  і  $|\Delta| = \max_{1 \leq n \leq N} h_n$ .

Зафіксувавши точки (вузли інтерполяції)  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_L < 1$ ,  
зпівставимо кожній точці  $\tau_j$  число  $\gamma_j$  ( $0 \leq \gamma_j \leq r - 1; j = 1, 2, \dots, L$ ), що  
характеризує кратність інтерполювання. Виділимо з набору цілих чисел  
 $Q_{r-1} = \{0, 1, \dots, r - 1\}$  підмножини  $I_0$  та  $I_1$  (вони можуть бути порожніми), що  
задають інтерполяційні крайові умови відповідно в точках 0 та 1; загальне число  
крайових умов позначимо через  $u$ . Нехай, далі,  $\chi_q$  ( $q = 0, 1, \dots, m - 1$ ) — число  
інтерполяційних умов для  $s^q(t)$  на  $[0, 1]$ ,  $\delta_{0,i}, \delta_{1,i}$  — число інтерполяційних умов  
для  $s(t), s'(t), \dots, s^{r-1}(t)$  на півінтервалах  $[0, t_i]$  і  $[t_i, 1]$ . Помітимо, що

$$\sum_{q=0}^{r-1} \chi_q = \sum_{j=1}^L (\gamma_j + 1) + u.$$

Якщо виконані співвідношення

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^L (\gamma_j + 1) + u &= N + r, \\ \chi_0 + \chi_1 + \dots + \chi_k &\geq k + 1, k = 0, 1, \dots, m - 1, \\ \delta_{0,i} &\geq i, \delta_{1,i} \geq N - i, i = 1, 2, \dots, N - 1, \end{aligned}$$

то за результатами одержимо, що для функції  $f(t) \in C^{r-1}$  існує єдиний сплайн  
 $s \in S_r(\Delta)$ , що задовольняє інтерполяційні умови

$$\begin{aligned} s^{(\nu)}(f, \tau_j) &= f^{(\nu)}(\tau_j), \nu = 0, 1, \dots, \gamma_j, j = 1, \dots, L, \\ s^{(\mu)}(f, 0) &= f^{(\mu)}(0), \mu \in I_0, s^{(\rho)}(f, 1) = f^{(\rho)}(1), \rho \in I_1. \end{aligned}$$

Враховуючи умови, покладемо

$$\varphi(t) = \psi(t) - s(\psi, t), 0 \leq t \leq 1,$$

де функція  $\psi(t) \in L_\infty^{r+1}$ , у якої  $\|\psi^{(r+1)}\|_\infty \leq 1$ , та задається наступним чином:

$$\psi^{(r+1)}(t) = (-1)^n, t_{n-1} < t < t_n, n = 1, 2, \dots, N.$$

Функція  $\varphi(t) \in C^r$ , у якої для всіх  $t', t''$  на  $[0, 1]$  виконується нерівність

$$\left| \varphi^{(m)}(t') - \varphi^{(m)}(t'') \right| \leq |t' - t''|.$$

Мають місце наступні рівності

$$\begin{aligned} \varphi^{(\nu)}(\tau_j) &= 0, \nu = 0, 1, \dots, \gamma_j, j = 1, \dots, L, \\ \varphi^{(\mu)}(0) &= \varphi^{(\rho)}(1) = 0, \mu \in I_0, \rho \in I_1. \end{aligned}$$

Отже, функція  $\varphi(t)$  з точністю до знака однозначно визначається розбиттям

$\Delta$ , системою точок  $\tau_j$  і характеризуючими кратність числами  $\gamma_j$ , а також крайовими умовами  $I_0, I_1$ .

Нехай  $f \in C^r$  та для всіх  $t', t''$  на  $[0, 1]$  виконується співвідношення

$$\left| f^{(m)}(t') - f^{(m)}(t'') \right| \leq |t' - t''|.$$

Для того, щоб оцінити величину  $\|f - s_b^\alpha\|_p, 1 \leq p \leq \infty$ , скористаємось методом проміжного наближення, а саме,

$$\|f - s_b^\alpha\|_p \leq \|f - s\|_p + \|s - s_b^\alpha\|_p, 1 \leq p \leq \infty.$$

Для оцінки першого доданка правої частини скористаємось результатами роботи [1].

При виконанні умов для функції  $f \in C^r$ , для всіх  $t', t''$  на  $[0, 1]$ ,

$$\left| f^{(m)}(t') - f^{(m)}(t'') \right| \leq |t' - t''|$$

та сплайна мінімального  $s \in S_r(\Delta)$ , що визначається співвідношеннями (13), справедлива оцінка, яку не можна покращити:

$$\|f - s\|_p \leq \|\varphi\|_p, 1 \leq p \leq \infty.$$

З іншого боку, використовуючи теорему 3,

$$\|s - s_b^\alpha\|_p \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} \|s - b\|_p, 1 \leq p \leq \infty.$$

Отже, маємо наступну теорему.

**Теорема.** При виконанні умов для функції  $f \in C^r$ , для всіх  $t', t''$  на  $[0, 1]$ ,

$$\left| f^{(m)}(t') - f^{(m)}(t'') \right| \leq |t' - t''|$$

та сплайна мінімального  $s \in S_r(\Delta)$ , що визначається співвідношеннями (11), виконується наступне:

$$\|f - s_b^\alpha\|_p \leq \|\varphi\|_p + \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} \|s - b\|_p, 1 \leq p \leq \infty.$$

### Список літератури

1. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения. — М.: Наука, 1984.
2. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. — М.: Наука, 1976.
3. Barnsley M. F. Fractal Everywhere. — Academic Press, Inc, 1988.
4. Barnsley M. F. Fractal functions and interpolation // Contr. Approx. — 1986. — **2**, No. 4. — P. 303–329.
5. Barnsley M. F., Harrington A. N. The calculus of fractal interpolation functions // J. Approx. Theory. — 1989. — **57**. — P. 14–34.

**О НЕРАВЕНСТВЕ КОЛМОГОРОВСКОГО ТИПА ДЛЯ ЧАСТНЫХ  
ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ВЕСОВОМ  
ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ  $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$  И ЕГО ПРИЛОЖЕНИИ  
К ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИИ «УГЛОМ»**

**С. Б. Вакарчук, А. В. Швачко**

*Университет имени Альфреда Нобеля,  
Днепропетровский государственный аграрно-экономический университет,  
Днепропетровск, Украина  
sbvakarchuk@mail.ru, annuchka-nuta@mail.ru*

Пусть  $L_2(\mathbb{R})$  — пространство вещественных измеримых функций, суммируемых на действительной оси  $\mathbb{R}$  с квадратом. Через  $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ , где  $\rho(x) := \exp(-x^2 / 2)$ , обозначим множество функций  $f$  таких, что  $f \cdot \rho \in L_2(\mathbb{R})$ . При этом норма в пространстве  $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$  определяется равенством

$$\|f\|_{2,\rho} := \left\{ \int_{\mathbb{R}} (f(x)\rho(x))^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Полагаем  $\beta_{j,r} := j(j-1)\dots(j-r+1)$ , где  $j \geq r$ .

В работе И. В. Бердниковой и З. С. Рафальсона [1] было показано, что если  $r \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq r$  — натуральное число и заданная на вещественной оси  $\mathbb{R}$  функция  $f$  обладает следующими свойствами:

1) производная  $(r-1)$ -го порядка  $f^{(r-1)}$  абсолютно непрерывна на любом конечном отрезке,

2) производная  $r$ -го порядка  $f^{(r)}$  принадлежит  $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ ,

3) коэффициенты Фурье — Эрмита  $c_\nu(f)$  функции  $f$  по системе многочленов Эрмита, ортонормированных на  $\mathbb{R}$  с весом  $\rho^2$ , равны нулю для  $\nu = \overline{r-k, r-1}$ , то имеет место неравенство

$$\|f^{(r-k)}\|_{2,\rho} \leq \left( \frac{\beta_{r,r-k}}{\beta_{r,r}^{1-k/r}} \right)^{1/2} \|f\|_{2,\rho}^{k/r} \|f^{(r)}\|_{2,\rho}^{1-k/r}. \quad (1)$$

Соотношение (1) является точным в том смысле, что существует функция  $f_0 \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ , которая удовлетворяет условиям 1)–3) и для которой (1) обращается в равенство.

В данном сообщении результат (1) распространяется на случай функций двух переменных. Пусть  $L_2(\mathbb{R}^2)$  — пространство вещественных измеримых функций, суммируемых на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с квадратом.

Через  $L_{2,\tilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ , где

$$\tilde{\rho}(x_1, x_2) = \exp(-(x_1^2 + x_2^2) / 2),$$

обозначим пространство вещественных функций  $f$ , для которых  $f \cdot \tilde{\rho} \in L_2(\mathbb{R}^2)$ .

Норма в пространстве  $L_{2,\tilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$  определяется следующим образом:

$$\|f\|_{2,\tilde{\rho}} := \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} (f(x_1, x_2)\tilde{\rho}(x_1, x_2))^2 dx_1 dx_2 \right\}^{1/2}.$$

Через  $L_{2,\tilde{\rho}}^{r_1, r_2}(\mathbb{R}^2)$ ,  $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ , обозначим класс функций  $f \in L_{2,\tilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ , частные производные  $f^{(r_1-1, r_2-1)}$  которых локально абсолютно непрерывны по двум переменным, а производные  $f^{(r_1, r_2)}$ ,  $f^{(r_1-1, r_2)}$ ,  $f^{(r_1, r_2-1)}$  принадлежат пространству  $L_{2,\tilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ .

Приведем один из полученных результатов.

**Теорема 1.** Пусть  $r_1, r_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ,  $k_j \in \mathbb{N}$  и  $1 \leq k_j < r_j, j = 1, 2$ ; для функции  $f \in L_{2,\tilde{\rho}}^{r_1, r_2}(\mathbb{R}^2)$  её коэффициенты Фурье — Эрмита по системе многочленов Эрмита, ортонормированных на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с весом  $\tilde{\rho}^2$ , удовлетворяют условиям:

$$1) c_{\nu, r_2 - k_2}(f) = \dots = c_{\nu, r_2 - 1}(f) = 0, \text{ где } \nu = r_1 - k_1, r_1 - k_1 + 1, \dots;$$

$$2) c_{r_1 - k_1, \mu}(f) = \dots = c_{r_1 - 1, \mu}(f) = 0, \text{ где } \mu = r_2 - k_2, r_2 - k_2 + 1, \dots$$

Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|f^{(r_1 - k_1, r_2 - k_2)}\|_{2,\tilde{\rho}} &\leq \frac{\beta_{r_1, r_1 - k_1}^{1/2} \beta_{r_2, r_2 - k_2}^{1/2}}{\beta_{r_1, r_1}^{(1 - k_1/r_1)/2} \beta_{r_2, r_2}^{(1 - k_2/r_2)/2}} \|f\|_{2,\tilde{\rho}}^{k_1 k_2 / (r_1 r_2)} \times \\ &\times \|f^{(0, r_2)}\|_{2,\tilde{\rho}}^{(1 - k_2/r_2)k_1/r_1} \cdot \|f^{(r_1, 0)}\|_{2,\tilde{\rho}}^{(1 - k_1/r_1)k_2/r_2} \cdot \|f^{(r_1, r_2)}\|_{2,\tilde{\rho}}^{(1 - k_1/r_1)(1 - k_2/r_2)}, \end{aligned} \quad (2)$$

являющееся точным в том смысле, что существует функция  $f_1 \in L_{2,\tilde{\rho}}^{r_1, r_2}(\mathbb{R}^2)$ , удовлетворяющая условиям 1), 2), для которой соотношение (2) обращается в равенство.

Авторами также рассмотрено приложение теоремы 1 к некоторым вопросам аппроксимации функций двух переменных в метрике пространства  $L_{2,\tilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$  «углом», построенным при помощи полиномов Эрмита, ортонормированных на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с весом  $\tilde{\rho}^2$ .

#### Список литературы

1. Бердникова И. В., Рафальсон С. З. Некоторые неравенства между нормами функции и её производных в интегральных метриках // Изв. вузов. Математика. — 1985. — № 12. — С. 3—6.

# ХВИЛЬОВІ ОПЕРАТОРИ СИНГУЛЯРНОГО ЗБУРЕННЯ РАНГУ ОДИН НЕСИМЕТРИЧНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

Т. І. Вдовенко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

tanyavdovenko@meta.ua

Розглядаються несамопряжені сингулярні збурення рангу один самоспряженого оператора несиметричним потенціалом, тобто вирази виду

$$\tilde{A} = A + \alpha \langle \cdot, \delta_1 \rangle \delta_2,$$

де  $A$  — самоспряжений напівобмежений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі  $\mathcal{H}$  і  $\delta_1 \neq \delta_2$ , вектори  $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{H}_{-2}$ . Такий оператор визначається за допомогою не однієї, а двох підмножин

$$\mathfrak{D} = \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}) \mid Af = \tilde{A}f\},$$

$$\mathfrak{D}_* = \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}^*) \mid Af = \tilde{A}^*f\}$$

щільних в  $\mathcal{H}$ .

В роботі розглянуто випадок «слабо-слабо» сингулярного збурення рангу «один-один»:

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}) = 0,$$

$$\dim(\mathcal{H}_{+1} \ominus \mathfrak{D}) = 1,$$

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}_*) = 0,$$

$$\dim(\mathcal{H}_{+1} \ominus \mathfrak{D}_*) = 1.$$

Використовуючи конструктивний опис  $\tilde{A}$ , доводиться інування хвильових операторів при  $|\alpha| < \infty$  відповідних  $\tilde{A}$ . Хвильові оператори визначаються рівністю

$$(\tilde{W}_{\pm} u, v) = (u, v) \mp \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle R_{\lambda \pm i0} u, \omega_1 \rangle \langle \omega_2, \tilde{R}_{\lambda \mp i0}^* v \rangle d\lambda, \quad u, v \in \mathcal{H},$$

де  $\tilde{R}$  і  $R$  — резольвенти збуреного і незбуреного операторів.

## Список літератури

1. Вдовенко Т. І., Дудкін М. Є. Хвильові оператори сингулярного збурення рангу один несиметричним потенціалом // Подано до друку Наукові Вісті НТУУ «КПІ». — 2015.

**ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СПІРАЛЬНИХ ХВИЛЬ  
ПОВЕРХНЕВОЇ РЕАКЦІЇ ОКИСНЕННЯ ЧАДНОГО ГАЗУ**

**О. В. Вовк, Г. А. Шинкаренко**

*Львівський національний університет ім. І. Франка, Львів, Україна*

*Політехніка Опольська, Ополь, Польща*

olexandrrovk@gmail.com, h.shynkarenko@po.opole.pl

Реакцію окиснення чадного газу (CO) на поверхні платини описав Г. Ертль у 1982 р. Згодом для дослідження спіральних хвиль, які виникають на поверхні каталізатора, у праці [1] була запропонована модель такого ґатунку:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } a, b, \omega, T > 0, \Omega, \quad u^0(x) = 0.02x_1, \quad w^0(x) = 0.02x_2(a - 2b); \\ \text{знайти: } u = u(x, t) - \text{ступінь покриття молекулами CO та} \\ w = w(x, t) - \text{ступінь реконструкції поверхні платини, такі, що} \\ \partial_t u - \nabla \cdot (\nabla u) = f[u, w] := \omega^{-1}u(u - 1)[u - (w + b)a^{-1}] \\ \partial_t w = g[u, w] \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad \Omega = (0, 50)^2, \\ -(\nabla u) \cdot n = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times [0, T], \quad u|_{t=0} = u^0, \quad w|_{t=0} = w^0 \quad \text{в } \bar{\Omega}, \end{array} \right. \quad (1)$$

де  $g[u, w] = 1 - 6.75u(u - 1)^2 - w$ , якщо  $u \in (\frac{1}{3}, 1)$  і  $g[u, w] = -w$ , якщо  $u \notin (\frac{1}{3}, 1)$ .

Для розв'язування задачі (1) застосуємо проекційно-сіткову схему [7] до її варіаційної постановки:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти } u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \text{ та} \\ w \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ такі, що} \\ (u'(t), v) + b(u(t), v) = (f[u(t), w(t)], v), \\ (w'(t), v) = (g[u(t), w(t)], v) \quad \forall t \in (0, T], \\ (u(0) - u^0, v) = 0, \quad (w(0) - w^0, v) = 0 \quad \forall v \in V := H^1(\Omega), \end{array} \right. \quad (2)$$

де  $(u, v) := \int_{\Omega} uv \, dx$ ,  $b(u, v) := \int_{\Omega} (\nabla_x u) \cdot \nabla_x v \, dx$ .

Просторова напівдискретизація методом скінченних елементів (МСЕ) на триангуляції  $\mathfrak{S}_h = \{K\}$ , за деталями див. [5], приводить до відокремлення незалежних змінних з апроксимаціями вигляду

$$u_h(t) := u_h(x, t) = \sum_{k=1}^N u_k(t) \varphi_k(x), \quad w_h(t) := w_h(x, t) = \sum_{k=1}^N w_k(t) \varphi_k(x),$$

де  $\varphi_k(x)$  базисні функції скінченно-елементного простору  $V_h \subset V$ .

Використання стандартної процедури Гальоркіна до задачі (2) зводить її до задачі Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^N [(\varphi_k, \varphi_m) u'_m(t) + b(\varphi_k, \varphi_m) u_m(t)] = (f[u_h(t), w_h(t)], \varphi_k), \\ \sum_{m=1}^N (\varphi_k, \varphi_m) w'_m(t) = (g[u_h(t), w_h(t)], \varphi_k) \quad \forall t \in (0, T] \end{array} \right. \quad (3)$$

з початковими умовами

$$\sum_{m=1}^N (\varphi_k, \varphi_m) u_m(0) = (u^0, \varphi_k), \quad \sum_{m=1}^N (\varphi_k, \varphi_m) w_m(0) = (w^0, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Розв'язування задачі Коші (3)-(4) здійснено однокроковою рекурентною схемою (ОРС) з лінеаризацією Ньютона на кожному кроці інтегрування в часі [5, 6]. Взаємозв'язок похибок цих методів відслідковується в останній колонці табл. 2. Для розв'язування СЛАР застосовується метод GMRES [2].

Запропоновану схему застосуємо до розв'язування задачі (1) з параметрами моделі  $a = 0.84$ ,  $b = 0.19$ ,  $\omega = 0.025$ ,  $T = 14$  та схеми  $\theta = 1/2$  і точністю наближень Ньютона та GMRES  $\delta = 10^{-8}$ . Рис. 1 наочно демонструє збіжність апроксимацій МСЕ на рівномірних сітках із  $30 \times 30$ ,  $60 \times 60$  і  $120 \times 120$  квадратичних серендипових скінченних елементів. Візуально спостерігаються осциляції послідовності наближень на рідших сітках, що свідчить про складність динамічної структури шуканого розв'язку моделі реакції окиснення.

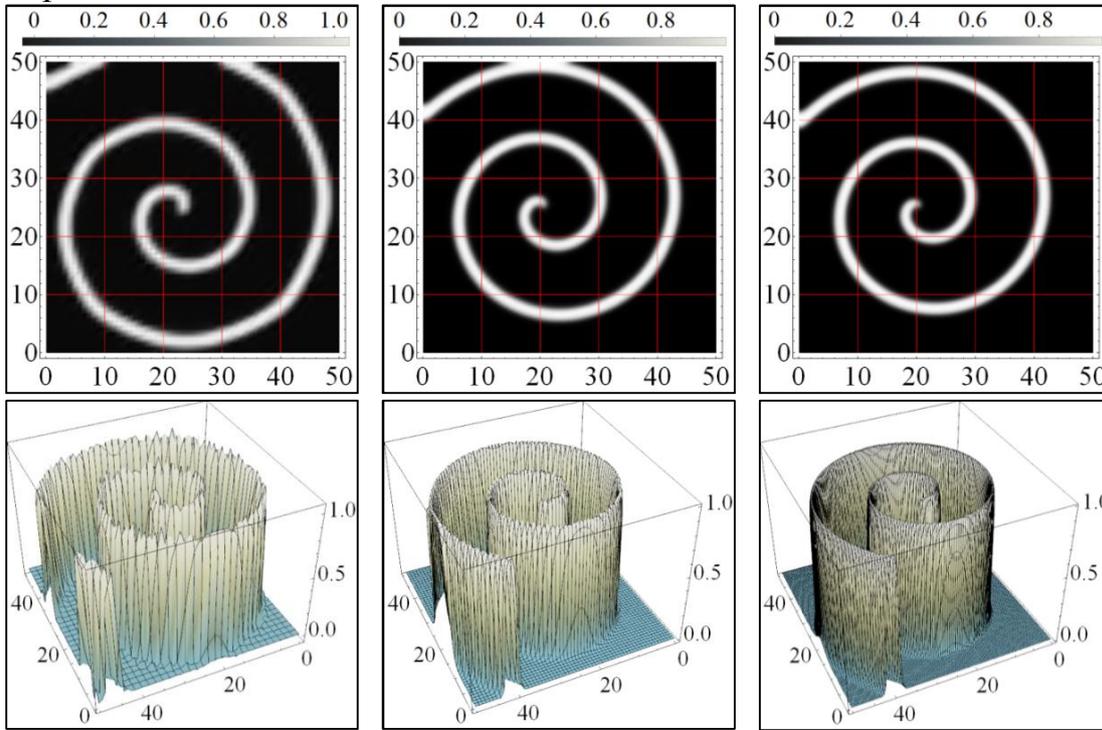


Рис. 1. Апроксимація покриття СО поверхні платини,  $\Delta t = 0.01$ ,  $T = 14$

Точніше збіжність апроксимацій  $U_{h,\Delta t} := \{u_{h,\Delta t}(x,t), w_{h,\Delta t}(x,t)\}$ , побудованої числової схеми охарактеризована в табл. 1 та 2 такими показниками

$$\begin{aligned} e_s^h &= \| U_{h,\Delta t} - U_{h/2,\Delta t} \|_s, \quad e_s^{\Delta t} = \| U_{h,\Delta t} - U_{h,\Delta t/2} \|_s, \\ \| U_{h,\Delta t} \|_s^2 &= \| u_{h,\Delta t} \|_s^2 + \| w_{h,\Delta t} \|_s^2 \\ \varepsilon_s^p &= e_s^p \| U_{h,\Delta t} \|_s^{-1} \times 100\%, \\ p_s^p &= \log_2 e_s^p - \log_2 e_s^{p/2}, \quad p = h \text{ або } \Delta t, \end{aligned}$$

з використанням норм  $\| \cdot \|_m = \| \cdot \|_{H^m(\Omega)}$ ,  $m = 0, 1$ , і

$$\| v \|_T^2 = \frac{1}{2} \| v(T) \|_0^2 + \int_0^T \| \nabla v(t) \|_0^2 dt,$$

де  $Nod \mathfrak{S}_h$ ,  $Card \mathfrak{S}_h$  — кількість вузлів та елементів триангуляції  $\mathfrak{S}_h$  відповідно,  $N_m$  — максимальна кількість ітерацій Ньютона.

Таблиця 1. Збіжність апроксимацій схеми за просторовою змінною  $h$ ,  $T = 3$ .

Лінійні апроксимації МСЕ, $\Delta t = 0.005$												
$k$	$Nod \mathfrak{S}_h$	$Card \mathfrak{S}_h$	$\varepsilon_0^h, \%$	$\varepsilon_1^h, \%$	$\varepsilon_T^h, \%$	$p_0^h$	$p_1^h$	$p_T^h$	$\ U_{h,\Delta t}\ _0$	$\ U_{h,\Delta t}\ _1$	$\ U_{h,\Delta t}\ _T$	$N_m$
1	761	1 444	-	-	-	-	-	-	14.908	15.793	14.356	3
2	2 965	5 776	41.19 8	54.43 5	80.671	-	-	-	16.184	17.452	16.737	3
3	11 705	23 104	20.39 4	35.32 4	58.066	1.1	0.7	0.5	15.508	16.936	16.796	3
4	46 513	92 416	9.439	19.61 0	33.514	1.1	0.9	0.8	15.203	16.652	16.640	3
5	185 441	369 664	2.809	7.249	12.794	1.8	1.4	1.4	15.118	16.569	16.583	3
Білінійні апроксимації МСЕ, $\Delta t = 0.005$												
1	729	676	-	-	-	-	-	-	15.770	16.864	15.786	3
2	2 809	2 704	51.23 5	65.51 4	94.093	-	-	-	16.029	17.338	16.769	3
3	11 025	10 816	22.18 8	34.69 6	54.839	1.3	1.0	0.8	15.397	16.832	16.737	3
4	43 681	43 264	9.136	16.52 3	27.318	1.3	1.1	1.0	15.171	16.620	16.616	3
5	173 889	173 056	3.055	6.292	10.719	1.6	1.4	1.4	15.110	16.561	16.576	3
Квадратичні серендипові апроксимації МСЕ, $\Delta t = 0.005$												
1	736	225	-	-	-	-	-	-	15.039	16.131	15.234	3
2	2 821	900	63.96 2	82.73 0	119.22 7	-	-	-	15.507	16.823	16.401	3
3	11 041	3 600	30.02 1	48.42 6	77.310	1.1	0.8	0.6	15.206	16.640	16.592	3
4	43 681	14 400	8.293	16.73 3	28.382	1.9	1.5	1.4	15.099	16.550	16.567	3
5	173 761	57 600	2.494	5.307	9.096	1.7	1.7	1.6	15.090	16.542	16.562	3

Таблиця 2. Збіжність апроксимацій схеми за часовою змінною  $\Delta t$ ,  $T = 3$ .

Лінійні апроксимації МСЕ, $Nod \mathfrak{S}_h = 46 513$ , $Card \mathfrak{S}_h = 92 416$												
$k$	$\Delta t$	$\varepsilon_0^{\Delta t}, \%$	$\varepsilon_1^{\Delta t}, \%$	$\varepsilon_T^{\Delta t}, \%$	$p_0^{\Delta t}$	$p_1^{\Delta t}$	$p_T^{\Delta t}$	$\ U_{h,\Delta t}\ _0$	$\ U_{h,\Delta t}\ _1$	$\ U_{h,\Delta t}\ _T$	$N_m$	
1	0.1500	-	-	-	-	-	-	10.618	12.791	15.058	25	
2	0.0769	43.143	43.23	43.447	-	-	-	15.717	17.162	16.915	6	
3	0.0390	6.868	7.717	9.507	2.7	2.5	2.2	15.264	16.717	16.651	5	
4	0.0196	1.069	1.408	2.019	2.7	2.5	2.2	15.216	16.666	16.632	4	
5	0.0098	0.252	0.342	0.501	2.1	2.0	2.0	15.205	16.655	16.635	4	
6	0.0049	0.062	0.085	0.124	2.0	2.0	2.0	15.203	16.652	16.640	3	

Білінійні апроксимації MCE, $Nod \mathfrak{S}_h = 43\ 681$ , $Card \mathfrak{S}_h = 43\ 264$											
1	0.1500	-	-	-	-	-	-	10.589	12.760	15.029	25
2	0.0769	43.184	43.189	43.204	-	-	-	15.687	17.131	16.891	6
3	0.0390	6.868	7.685	9.415	2.7	2.5	2.2	15.232	16.685	16.628	5
4	0.0196	1.067	1.399	1.998	2.7	2.5	2.2	15.183	16.634	16.609	4
5	0.0098	0.251	0.339	0.495	2.1	2.0	2.0	15.173	16.622	16.612	4
6	0.0049	0.062	0.084	0.123	2.0	2.0	2.0	15.171	16.620	16.616	3
Квадратичні серендипові апроксимації MCE, $Nod \mathfrak{S}_h = 43\ 681$ , $Card \mathfrak{S}_h = 14\ 400$											
1	0.1500	-	-	-	-	-	-	10.528	12.695	14.968	25
2	0.0769	43.265	43.079	42.606	-	-	-	15.620	17.064	16.839	6
3	0.0390	6.862	7.601	9.180	2.7	2.5	2.2	15.162	16.615	16.578	5
4	0.0196	1.061	1.374	1.943	2.7	2.5	2.2	15.112	16.563	16.559	4
5	0.0098	0.249	0.333	0.482	2.1	2.0	2.0	15.101	16.552	16.562	4
6	0.0049	0.062	0.083	0.120	2.0	2.0	2.0	15.099	16.550	16.567	3

Як видно з табл. 1 порядки збіжності схеми наближаються до теоретично очікуваних зі значним згущенням сіток скінченних елементів, що знову пояснюється складністю змін просторової структури розв'язку. В табл. 2 порядки збіжності за часовою змінною відповідають схемі Кранка — Ніколсон, причому обчислення з великим кроком  $\Delta t$  вимагає більшої кількості ітерацій Ньютона.

Аналіз збіжності та точності у табл. 1 і 2 показує, що розв'язування задачі (1) вимагає густих сіток, що дуже уповільнює цей процес. Згущення сітки вдвічі приводить приблизно до 4-ох кратного збільшення часу обчислень. При цьому для розв'язування СЛАР використовується GMRES (прямі методи вимагали б незрівнянно більших часових затрат). А зменшення вдвічі кроку  $\Delta t$  збільшує час розв'язування лише у два рази і навіть менше, завдяки кращому початковому наближенню для методу Ньютона та GMRES, що зменшує кількість ітерацій для останніх. Звідси можна зробити висновок, що перший крок до побудови ефективніших методів розв'язування початково-крайової задачі (1) полягає у побудові адаптивних схем з локальним згущенням/розрідженням сіток з ефективними та надійними апостеріорними оцінювачами похибок апроксимацій. Останні запропоновані в роботах [2—4] для крайових задач.

#### Список літератури

1. Bar M. Spiral waves in a surface reaction: Model calculations / M. Bar, N. Gottschalk, M. Eiswirth, G. Ertl // J. Chem. Phys. — 1994. — №100. — P. 1202—1214.
2. Ostapov O. Yu. Finite element adaptive refinement techniques for diffusion-advection-reaction problems / O. Yu. Ostapov, H. A. Shynkarenko, O. V. Vovk // Manufacturing Process. Actual Problems-2013; M. Gajek, O. Hachkevych, A. Stanik-Besler eds. — Opole: Politechnika Opolska, 2013. — Vol. 1. Basic science applications in manufacturing processes. — P. 31—46.
3. Kvasnytsia H. A. Computable double-sided a posteriori error estimates and h-adaptive finite element approximations / H. A. Kvasnytsia, O. Yu. Ostapov, H. A. Shynkarenko, O. V. Vovk // Manufacturing Process. Actual Problems-2014; M. Gajek, O. Hachkevych, A. Stanik-Besler eds. — Opole: Politechnika Opolska, 2014. — Vol. 1. Basic science applications in manufacturing processes. — P. 96—111.

4. Shynkarenko H. A. A posteriori error estimations for finite element approximations on quadrilateral meshes. / H. A. Shynkarenko, O. V. Vovk // J. of Comput. & Appl. Math. — 2013. — Vol. 3, № 113. — P. 107—118.

5. Вовк О. В. Проекційно-сіткова схема розв'язування еволюційних задач окиснення чадного газу на поверхні платини / О. В. Вовк, Н. І. Павленко, Г. А. Шинкаренко, В. Д. Вовк // Вісник Львів. ун-ту. — 2012. — № 18. — С. 54—69.

6. Вовк О. В. Інтеграція ньютонівської лінеаризації у часову дискретизацію початково-крайових задач / О. В. Вовк, Г. А. Шинкаренко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 2. — С. 60—71.

7. Трушевський В. М. Метод Скінченних Елементів і Штучні Нейронні Мережі / В. М. Трушевський, Г. А. Шинкаренко, Ю. М. Щербина. — Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2014.

# УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ТРЕУГОЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ, СВЯЗАННЫЕ С ОДНОПРОЕКТОРНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Т. Г. Войтик, Г. С. Полетаев

Одесский национальный морской университет,  
Одесская государственная академия строительства и архитектуры,  
Одесса, Украина

[beauty5@i.ua](mailto:beauty5@i.ua), [poletayev\\_gs@ukr.net](mailto:poletayev_gs@ukr.net)

Изучаются уравнения с неизвестными нижней и верхней треугольными матрицами  $X^+, Y_-$ , соответственно, вида:

$$AX^+ + Y_- = B. \quad (1)$$

Родственные (1) и связанные с ними уравнения возникают, в частности, при изучении специальных новых задач механики для совокупностей одинаковых по геометрическим и физическим характеристикам тел. Они возникают также при исследовании общих видов и приложений, обнаруженных сравнительно недавно, одночленных однопроекторных второго порядка уравнений в кольце с факторизационной парой. Абстрактные уравнения из работы [2, 3] связывают уравнения (1) с интегральными уравнениями типа Винера — Хопфа.

1. Следуя [2, 4—6] (ср.[7]), обозначим  $\mathbb{R}_{n \times n}$  кольцо вещественных числовых квадратных матриц размера  $n \times n$ ,  $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;  $\mathbb{R}_{n \times n}^+$ ,  $\mathbb{R}_{n \times n}^-$  — подкольца нижних, верхних треугольных из  $\mathbb{R}_{n \times n}$ ; —  $\mathbb{R}_{n \times n}^0 := \mathbb{R}_{n \times n}^+ \cap \mathbb{R}_{n \times n}^-$ ,  $\mathbb{R}_{n \times n}^\mp = (\mathbb{R}_{n \times n})_\pm \oplus \mathbb{R}_{n \times n}^0$ , соответственно. Результат применения соответствующих проекторов к матрицам, а также принадлежность матрицы из  $\mathbb{R}_{n \times n}$  подмножеству  $\mathbb{R}_{n \times n}^{\mp,0}$ ,  $(\mathbb{R}_{n \times n})_\pm$  [2—7] будем отмечать знаками  $+$ ,  $-$ ,  $0$ , соответственно. Устанавливается, что  $\mathbb{R}_{n \times n}$  — кольцо с факторизационной парой  $(\mathbb{R}_{n \times n}^+, \mathbb{R}_{n \times n}^-)$ .

2. Важную роль при построении формул для матриц — решений рассматриваемых уравнений играют нормированные правильные факторизации по факторизационной паре  $(\mathbb{R}_{n \times n}^+, \mathbb{R}_{n \times n}^-)$ . Именно, разложения матрицы  $A^{-1}$  на обратимые в соответствующих подкольцах  $\mathbb{R}_{n \times n}^+$ ,  $\mathbb{R}_{n \times n}^0$ ,  $\mathbb{R}_{n \times n}^-$  треугольные и диагональный множители [1—8]:

$$A^{-1} = \Gamma^+ S^0 T^-, \quad (2)$$

где матрицы — сомножители  $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_{n \times n}^+$ ,  $S^0 \in \mathbb{R}_{n \times n}^0$ ,  $T^- \in \mathbb{R}_{n \times n}^-$ ;  $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Нормирование осуществляется условием:  $\Gamma^0 = T^0 = E$ , где  $E$  —

единичная матрица кольца  $\mathbb{R}_{n \times n}$ . Устанавливается, что нормированная правильная факторизация по факторизационной паре подколец единственна.

**3.** Рассматривается следующая задача. «Для заданных матриц — коэффициентов  $A, B \in \mathbb{R}_{n \times n}$ ;  $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$  найти пару матриц  $X^+ \in \mathbb{R}_{n \times n}^+, Y_- \in (\mathbb{R}_{n \times n})_-$ , удовлетворяющую уравнению:

$$AX^+ + Y_- = B. \quad (1)$$

**4.** При правильной нормированной факторизации обратной матрицы:

$$A^{-1} = \Gamma^+ S^0 T^-; \quad (3)$$

где  $\Gamma^+ \in \mathbb{R}^+, S^0 \in \mathbb{R}^0, T^- \in \mathbb{R}^-$ , обосновываются следующие формулы решений уравнений вида (1) в кольце матриц  $\mathbb{R}_{n \times n}$  с факторизационной парой  $(\mathbb{R}_{n \times n}^+, \mathbb{R}_{n \times n}^-)$ :

$$\begin{aligned} X^+ &= \Gamma^+ S^0 [T^- B^+]^+, \\ Y_- &= B_- + T^{-'} [T^- B^+]_- , \end{aligned} \quad (4)$$

где  $T^{-'} := (T^-)^{-1}$ .

**5. Иллюстративный пример.** Пусть требуется найти пары треугольных матриц  $X^+ \in \mathbb{R}_{3 \times 3}^+, Y_- \in \mathbb{R}_{3 \times 3}^-$  из  $R_{3 \times 3}$ , удовлетворяющие уравнению (1), если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix};$$

$\alpha, \beta$  — произвольные фиксированные действительные числа.

Реализуя формулы (4) решения в  $\mathbb{R}_{3 \times 3}$  уравнения (1), последовательно найдём:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \Gamma^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ T^- &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (T^-)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$X^+ = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha + 3\beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}, Y_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 + 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Список литературы

1. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи математических наук. — 1958. — **13**, вып. 5. — С. 3—120.
2. Полетаев Г. С. Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами. — К., 1988. — 20 с. — (Препринт / АН УССР. Институт математики: 88.31).
3. Полетаев Г. С. Об однопроекторных второго порядка уравнениях с правильно факторизуемыми коэффициентами в кольце с факторизационной парой // Вестник Херсонского государственного технического университета. — 2000. — № 2 (8). — С. 191—195.
4. Полетаев Г. С. О постановках, матричных моделях некоторых обратных задач механики балок и представлениях факторизованных матриц влияния // Математическое моделирование в образовании, науке и промышленности. — С.-Пб. — 2000. — С.146—148.
5. Полетаев Г. С., Солдатов Л. И. О задачах механики и уравнениях с неизвестной треугольной матрицей и проекторами // Современные методы проектирования машин. Расчет, конструирование и технология изготовления / Сборник научных трудов. — Вып. 1 в 3-х т. — Т. 2 — Мн.: УП «Технопринт», 2002. — 477 с. — С. 244—249.
6. Полетаев Г. С., Солдатов Л. И. О моделировании некоторых задач механики матричными уравнениями с треугольными неизвестными // Нелинейная динамика механических и биологических систем / Межвузовский научный сборник. Саратовский государственный технический университет, вып. 2. — Саратов, 2004. — С. 133—136.
7. McNabb A., Schumitzky A. Factorization of Operators I: Algebraic Theory and Examples // J. Funct. Anal. — 1972. — **9**, № 3. — P. 262—295.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 549 с.

# ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ ТА ВЛАСТИВІСТЬ ДАРБУ БАГАТОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ТОПОЛОГІЧНИХ ПРОСТОРІВ

С. В. Горленко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Нехай  $\Phi : X \rightarrow Y$  багатозначне відображення топологічних просторів, причому множини  $\Phi(x)$  замкнені в  $Y$ .

**Означення 1.** Відображення  $\Phi(x)$  називається неперервним у точці  $x_0 \in X$ , якщо для кожного околу множин  $O(\Phi(x_0))$  знайдеться такий окіл  $U(x_0)$  точки  $x_0$ , що  $\Phi(U(x_0)) \subset O(\Phi(x_0))$ .

**Зауваження.** У просторі  $2^Y$  замкнених підмножин  $Y$  можна запровадити три топології, так звані  $\Phi, \lambda$  та  $\Psi$ -топології [1]. Відповідно можна розглядати три типи неперервності відображення  $\Phi$ :  $\varkappa$ -неперервність (напівнеперервність зверху),  $\lambda$ -неперервність (напівнеперервність знизу) та  $\psi$ -неперервність. У цій роботі неперервність розглянуто, як впливає з означення 1, саме в сенсі напівнеперервності зверху ( $\varkappa$ -неперервність).

**Означення 2.** Казатимемо, що відображення  $\Phi : X \rightarrow Y$  має властивість Дарбу ( $D$ ), якщо образами зв'язних множин є зв'язні множини.

**Означення 3.** Нехай  $X$  та  $Y$  — метричні простори. Казатимемо, що відображення  $\Phi$  має властивість ( $K$ ), якщо для кожної поверхні рівня  $K \subset Y$  функції відстані множина точок  $x \in X$  таких, що  $\Phi(x) \cap K \neq \emptyset$  є замкнутою в  $X$ .

**Означення 4.** Нехай  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^1 = Oy$ . Казатимемо, що  $\Phi$  має властивість ( $K_1$ ), якщо на осі  $Oy$  знайдеться скрізь щільна множина  $Y$  точок  $y$ , прообрази яких  $\Phi^{-1}(y) = \{x \in X : y \in \Phi(x)\}$  замкнені.

**Теорема 1.** Нехай  $\Phi : X \rightarrow Y$  — багатозначне відображення метричних просторів із зв'язними, замкненими образами точок, причому  $X$  — локально зв'язний простір, а  $Y$  — компакт. Тоді для того, щоб  $\Phi$  було неперервним, необхідно й достатньо, щоб воно мало властивості ( $D$ ) та ( $K$ ).

**Теорема 2.** Нехай  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^1$ , причому  $X$  — локально-зв'язний метричний простір,  $\Phi(x)$  — зв'язні, замкнені множини. Тоді для того, щоб  $\Phi(x)$  було неперервним, необхідно і достатньо, щоб вона мало властивості ( $D$ ) та ( $K_1$ ).

**Зауваження.** Одним з еквівалентних означень неперервності багатозначного відображення є таке: багатозначне відображення  $\Phi : X \rightarrow Y$  називають неперервним, якщо для кожної замкненої множини  $F \subset Y$  множина

$$E = \{x \in X : \Phi(x) \cap F \neq \emptyset\}$$

є також замкненою. Теореми 1 та 2 показують, що умову довільності  $F$  в цьому означенні можна послабити додавши необхідну зв'язність відображення  $\Phi$ .

## Список літератури

1. Куратовський К. Топология. Т. 1. — М: Мир, 1966. — 594 с.

# ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ КОМУТАТОРІВ ОСЦИЛЯЦІЙНИХ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Г. М. Губаль

Луцький національний технічний університет, Луцьк, Україна

[niik-g@yandex.ru](mailto:niik-g@yandex.ru)

Нехай  $\Omega(x)$  — однорідна функція нульового виміру на  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , тобто

$$\Omega(\mu x) = \Omega(x) \quad \forall \mu > 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

де  $\mathbb{R}^n$  —  $n$ -вимірний евклідов простір. Функція  $\Omega(x)$  має середнє нульове значення на сфері

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}.$$

Осциляційний сингулярний інтегральний оператор  $T$  визначається за такою формулою [1—4]:

$$Ta(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iQ(x,y)} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} a(y) dy,$$

У роботі [1] одержані покращені деякі відомі результати роботи [4].

Для додатного цілого  $k$  і функції  $f(x)$  з  $BMO(\mathbb{R}^n)$  запишемо комутатор  $k$ -го порядку  $T_{f,k}$  сингулярного інтегрального оператора  $T$  і функції  $f(x)$ :

$$T_{f,k}a(x) = T((f(x) - f(\cdot))^k a)(x), \quad a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Доведено обмеженість комутатора  $T_{f,k}$  у просторі  $L^2(\mathbb{R}^n)$  на основі представленого методу.

## Список літератури

1. Губаль Г. М. Характеристика комутаторів для параболічних сингулярних інтегралів / Г. М. Губаль // Всеукраїнська наукова конференція «Застосування математичних методів в науці і техніці». Луцьк, 25—26 листопада 2011 р. Збірник тез доповідей. — Луцьк: Луцький національний технічний університет. — 2011. — С. 29—32.
2. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения / Р. Эдвардс. — М.: Мир, 1969.
3. Федоров В. М. Теория функций и функциональный анализ. Часть вторая. Функциональный анализ / В. М. Федоров. — М.: Изд-во мех-мат. ф-та МГУ, 2000.
4. Palagachev D. Singular integral operators, Morrey spaces and fine regularity of solutions to PDE's / D. Palagachev, L. Softova // Potential Anal. — 2004. — Vol. 20. — P. 237—263.

## ПРО ДЕЯКІ ТИПИ ГЛАДКИХ БАЗИСІВ

### У ПІДПРОСТОРАХ $C_{[0;1]}^n$ ТА $C_{[0;1]}^\infty$

В. П. Денисюк, Л. В. Рибачук, А. І. Бабко

Національний авіаційний університет, Київ, Україна

[r\\_lv@mail.ru](mailto:r_lv@mail.ru)

Розглядається тригонометричний базис Шаудера в підпросторі  $C_{[0;1]}^n$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ), що ґрунтується на двійковій системі числення [1].

Визначимо функцію  $\varphi(x)$  рівністю

$$\phi(n, x) = \begin{cases} \left[ \cos \frac{\pi}{2} x \right]^{n+1}, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Ця функція має неперервні похідні на всій вісі до порядку  $n$  включно.

Розглянемо систему елементів

$$\{e_i(x)\}, (i = 1, 2, \dots),$$

де  $e_0(x) = \phi(x)$ ;  $e_1(x) = \phi(1-x)$ . Якщо ж  $i \geq 2$  і подається у вигляді  $i = 2^{k+1} + l, l = 1, 2, \dots, 2^k$ , то [1]

$$e_i(x) = \phi \left[ 2^{k+1} \left( x - \frac{2l-1}{2^{k+1}} \right) \right], x \in [0, 1].$$

Геометрично  $e_i(x)$ ,  $i \geq 2$ , подаються додатною косинусоїдальною півхвилею, заданою на відрізку  $\left[ \frac{l-1}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}} \right]$ , до якої прилягають відрізки вісі абсцис, розташовані ззовні цієї основи на відрізку  $[0, 1]$ .

Також розглядається показниковий фінітний базис, що складається з нескінченно диференційовних функцій, заданих на відрізку  $[0, 1]$ .

Нехай  $a$  — дійсне число,  $1 < a < \infty$ . Визначимо функцію  $\phi(x)$  рівністю

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp \left( \frac{x^2 \ln a}{x^2 - 1} \right), & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1, (a > 1). \end{cases}$$

Розглянемо на відрізку  $[0, 1]$  систему елементів

$$\{e_i(x)\}, (i = 0, 1, \dots),$$

де, як і раніше,  $e_0(x) = \phi(x)$ ;  $e_1(x) = \phi(1-x)$ .

Якщо ж  $i \geq 2$  і подається у вигляді  $i = 2^{k+1} + l, l = 1, 2, \dots, 2^k$ , то [1]

$$e_i(x) = \phi \left[ 2^{k+1} \left( x - \frac{2l-1}{2^{k+1}} \right) \right], x \in [0, 1].$$

#### Список літератури

1. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1981. — 384 с.

## ПРО ДЕЯКІ КЛАСИ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ БАЗИСІВ

В. П. Денисюк, Л. В. Рибачук

Національний авіаційний університет, Київ, Україна

[r\\_lv@mail.ru](mailto:r_lv@mail.ru)

Визначимо функцію  $\phi(n, x)$  рівністю

$$\phi(n, x) = \begin{cases} (1 - x^2)^{n+1}, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Легко бачити, що функція  $\phi(n, x)$  є фінітною і має неперервні похідні на всій вісі до порядку  $n$  включно, тобто  $\phi(n, x) \in C_{[0,1]}^n$ .

Розглянемо систему елементів  $\{e_i(n, x)\}$ , ( $i = 0, 1, \dots$ ), де, за аналогією з упорядкованим базисом Шаудера,  $e_0(n, x) = \phi(n, x)$ ;  $e_1(n, x) = \phi(n, 1 - x)$ .

Якщо ж  $i \geq 2$  і подається у вигляді  $i = 2^{k+1} + l$ ,  $l = 1, 2, \dots, 2^k$ , то

$$e_i(n, x) = \phi\left[n, 2^{k+1}\left(x - \frac{2l-1}{2^{k+1}}\right)\right], \quad x \in [0, 1].$$

Зрозуміло, що система  $\{e_i(n, x)\}$  утворює базис у підпросторі  $C_{[0,1]}^n$ .

Частинні суми  $L_N(n, x)$  ряду

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_k e_i(n, x),$$

що подає функцію  $f(x) \in C_{[0,1]}^n$ , являють собою криві підпростору  $C_{[0,1]}^n$ , вершини якої розташовано на графіку функції  $f(x)$ . Як і раніше, із геометричних міркувань впливає сенс коефіцієнтів. Збіжність частинних сум до функції  $f$  є очевидною. Легко встановлюється і єдиність розкладу. Таким чином, система симетричних функцій  $\{e_i(n, x)\}$  має всі основні властивості базису Шаудера.

**Висновки.** Запропоновано базис типу Шаудера в підпросторах  $C_{[0,1]}^n$ .

Функції цього базису можна розглядати як фундаментальні ермітові сплайни. Також запропонований базис можна розглядати і як аналог базису в просторах простих поліноміальних сплайнів, що складається з  $B$ -сплайнів. На відміну від  $B$ -сплайнів, носій функції запропонованого базису не пов'язаний із показником  $n$  підпростору  $C_{[0,1]}^n$ . Елементи запропонованого базису реалізуються значно простіше, ніж  $B$ -сплайни.

Одним з напрямків подальших досліджень є з'ясування умов подання простих поліноміальних та ермітових сплайнів через функції запропонованого базису.

#### **Список літератури**

1. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1981. — 384с.

# ОДНОЧАСНІ НАБЛИЖЕННЯ СУМАМИ ФУР'Є ФУНКЦІЙ ТА ЇХ ЗСУВІВ ЗА АРГУМЕНТОМ З КЛАСІВ СТЕПАНЦЯ

В. В. Дрозд

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут»

[slava572@ukr.net](mailto:slava572@ukr.net)

У доповіді представлені асимптотичні рівності, які одержані для точних верхніх меж відхилень сум Фур'є на класах Степанця, визначених функціями, що правильно змінюються. Тобто, розв'язано так звану задачу Колмогорова — Нікольського на певному класі неперервних періодичних функцій.

У 1936 році А. Н. Колмогоровим [1] була одержана асимптотична рівність

$$E_n(W^r) = 4\pi^{-2}n^{-r} \ln(n) + O(1)n^{-r},$$

де  $E_n(W^r) = \sup |f(x) - S_n(f, x)|$ , точна верхня межа береться по всіх функціях  $f$  з класу Вейля  $W^r$ , тобто класу неперервних  $2\pi$ -періодичних функцій,  $r$ -ті похідні яких,  $r \in \mathbb{N}$ , по модулю майже скрізь не перебільшують одиниці,  $S_n(f, x)$  — суми Фур'є функції  $f$ . На протязі певного часу завдяки зусиллям С. М. Нікольського, С. А. Теляковського, А. В. Єфімова, О. І. Степанця та інших математиків подібну задачу було розв'язано для загальніших класів функцій та для різних агрегатів наближення.

На початку 1980-х років в роботах О. І. Степанця [2, 3] було розглянуто класи  $2\pi$ -періодичних функцій, які є природним узагальненням класів Вейля та класів Вейля — Надя.

Нехай  $f \in L(0, 2\pi)$  і  $S(f)$  є рядом Фур'є цієї функції,  $a_k(f)$  та  $b_k(f)$  — його коефіцієнти. Нехай, далі,  $\psi(k)$  є довільна функція натурального аргументу,  $\beta$  — будь яке фіксоване дійсне число. Нехай ряд

$$\sum (\psi(k))^{-1} (a_k(f) \cos(kx + \beta\pi / 2) + b_k(f) \sin(kx + \beta\pi / 2))$$

є рядом Фур'є деякої функції з класу  $L(0, 2\pi)$ . Тоді функцію, представлену наведеним рядом, називають  $(\psi, \beta)$ -похідною функції  $f$ , а множину функцій  $f$ , що задовольняють цій умові, називають класами Степанця і позначають через  $L_\beta(\psi)$ . Підмножину неперервних функцій з цих класів позначають через  $C_\beta(\psi)$ .

Доповідачем розглянуто класи  $C_\beta(\psi)$ , де  $\psi(t)$  є функція, що правильно змінюється. За Е. Сенетою [4], це є додатня функція, яка вимірна на  $[a, \infty)$ ,  $a > 0$ , і існує таке дійсне число  $r$ , що для довільного  $t > 0$  має місце рівність

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\psi(tx) / \psi(x)) = t^r.$$

При цьому число  $r$  називають порядком функції  $\psi(t)$ .

Доповідачем одержано асимптотичну рівність

$$\sup \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i (f(x + \mu_i) - S_n(f, x + \mu_i)) \right| = \\ = 4\pi^{-2} \psi(n) H(\alpha, \mu) \ln(h(n) - n) + O(1) \psi(n),$$

де точна верхня межа береться по всіх функціях  $f$  з класу  $C_\beta(\psi), \psi(n)$  — функція, що правильно змінюється,

$$H(\alpha, \mu) = (A^2 + B^2)^{1/2}, \\ A = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cos(\beta / 2 - n\mu_i), \\ B = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sin(\beta / 2 - n\mu_i), \\ h(n) = \psi^{-1}(\psi(n) / 2).$$

#### Список літератури

1. Колмогоров А. Н. Zur Grossenordnung des Restliedes Fouriershen Reihen differenzierbaren Funktionen // Ann. Math. — 1935. — **36**. — S. 521—526.
2. Степанец А. И. Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье // Докл. АН СССР. — 1984. — **277**, № 5. — С. 1074—1077.
3. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наукова думка, 1987.
4. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985.

# ГРУППЫ СИММЕТРИЙ ПОДОБИЯ КВАЗИКРИСТАЛЛОВ КАК ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

А. А. Дышлис, Н. В. Варех, О. И. Герасимова, М. В. Цыбанёв  
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,  
Днепропетровск, Украина

Как отмечается в [1], диаграмма квазикристалла обладает приближенной масштабной инвариантностью, т.е. она может быть получена однократным или многократным увеличением своей центральной части. Это означает, что идеальный квазикристалл обладает симметрией подобия.

Идея использования симметрий подобия в кристаллографии принадлежит А. В. Шубникову [2]. Приведем определение группы симметрии подобия евклидова пространства, данное А. М. Заморзаевым [3].

**Определение 1.**  $N$ -мерной группой симметрии подобия называется группа преобразований подобия  $n$ -мерного евклидова пространства  $E^n$ , если

- а) в ней содержится хоть одно преобразование подобия с коэффициентом  $k \neq 1$ ;
- б) хоть одна точка пространства  $E^n$  изолирована в бесконечном классе ее образов.

В работах [2], [3] приведена классификация групп симметрий подобия в пространствах  $E^2, E^3$ . Применение преобразования подобия для описания свойств квазикристаллов рассматривается в недавно опубликованной работе [4].

В нашей работе группа симметрий подобия рассматривается как группа движений геометрии Лобачевского  $H^2$ .

**Теорема.** *Фундаментальной областью кристаллографической группы движений геометрии Лобачевского  $H^2$ , описывающей симметрии двумерного квазикристалла, является частично вырожденный треугольник с углами  $\alpha, \beta, \gamma$ , где  $\alpha = \beta = 0$ , а  $\gamma$  может принимать значения  $30^\circ, 36^\circ, 45^\circ, 72^\circ$ .*

Эта теорема позволяет объяснить эффект масштабной инвариантности и некоторые другие свойства квазикристаллов.

## Список литературы

1. Артамонов В. А., Словохотов Ю. Л. Группы и их приложения в физике, химии, кристаллографии. — М.: Академия, 2005. — 512 с.
2. Шубников А. В. Симметрия подобия // Кристаллография. — 1960. — 5, № 4. — С. 489—496.
3. Заморзаев А. М. О пространственных группах симметрии подобия // ДАН СССР. — 1966. — 167, №2. — С. 334—337.
4. Мадисон А. Е. Симметрия квазикристаллов // Физика твердого тела. — 2013. — 55, вып. 4. — С. 784—796.

# ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДВОЙСТВЕННОСТИ МЕЖДУ ГЕОМЕТРИЯМИ $S^2$ И $H^2$ ДЛЯ СОВМЕСТНОГО ОПИСАНИЯ ФУЛЛЕРЕНОВ И КВАЗИКРИСТАЛЛОВ

А. А. Дышлис, С. М. Покась

Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск,  
Одесский национальный университет, Одесса, Украина

[pokas@onu.edu.ua](mailto:pokas@onu.edu.ua)

Возможность совместного описания фуллеренов и квазикристаллов основана на том, что известное определение кристаллического множества евклидова пространства можно без изменения перенести на случай метрического пространства и том факте, что метрики геометрий  $E^n$ ,  $S^n$  и  $H^n$  являются римановыми метриками.

При  $n=2$  существуют только три геометрии:  $E^2$ ,  $S^2$  и  $H^2$ , причём геометрии  $S^2$  и  $H^2$  двойственны.

Как показал Тёрстен, можно дать такое определение геометрии, что при  $n=3$  имеется восемь существенно различных геометрий, среди которых геометрии  $S^2 \times R$  и  $H^2 \times R$  двойственны.

Следуя Тёрстену, под геометрией понимают пару  $\Gamma=(X, G)$ , где  $X$  — гладкое многообразие, а  $G$  — группа, транзитивно действующая на  $X$ , причём стабилизаторы точек компактны.

Введем на  $X$  риманову или псевдориманову метрику, так что  $X$  станет метрическим пространством.

**Определение 1.** Идеальным кристаллом геометрии  $\Gamma=(X, G)$  называется кристаллическое множество  $K$  атомов, расположенных на многообразии  $X$ , в частности, *квазикристаллы* можно рассматривать как кристаллические множества геометрии Лобачевского  $H^2$  или  $H^3$ , а также геометрии  $H^2 \times R$ , множество атомов кристалла является кристаллическим множеством геометрий  $E^2$  и  $E^3 = E^2 \times E$  [1, 2].

Наконец, дискретные множества атомов вещества, расположенных на поверхности сферы или нанотрубки можно рассматривать как кристаллические множества геометрий соответственно  $S^2$  и  $S^2 \times R$ .

**Замечание.** Предположение, что квазикристаллы можно рассматривать как кристаллы геометрии  $H^3$  было сделано А. Дышлисом и А.Тушевым еще в 1994 году [3—5].

Группы симметрий идеальных кристаллов геометрий  $E^2$  и  $E^3$  являются кристаллографическими. Определение этого понятия, данное в [1, 2] обобщается следующим образом.

**Определение 2.** Кристаллографической группой геометрии  $\Gamma$  называется дискретная группа  $G$  движений  $\Gamma$ , для которой объем фундаментальной области  $\Phi(G)$  конечен.

**Замечание 1.** Для геометрий  $E^n$ ,  $S^n$  и  $H^n$  это определение приведено в [6].

**Замечание 2.** Обычное определение кристаллографической группы геометрий  $E^n$  и  $S^n$  исключает из рассмотрения весьма полезные дискретные группы геометрии  $H^n$  с бесконечными (но конечными по объему) фундаментальными областями, которые играют существенную роль и в нашей работе.

Сформулируем принципы двойственности между геометриями  $S^2$  и  $H^2$ . Он был высказан Ламбертом, который, пытаясь доказать пятый постулат Евклида, получил ряд результатов гиперболической геометрии и высказал гипотезу, что они имеют место на сфере мнимого радиуса. Выражение «плоскость Лобачевского — это сфера мнимого радиуса  $i$ » следует понимать в следующем смысле:

Из всякой теоремы или формулы сферической геометрии, в которых фигурируют линейные размеры, путем деления их на число  $i$ , можно получить теоремы или формулы гиперболической геометрии. При этом функции линейных размеров следует продолжить до аналитических функций в комплексной области. Отметим, что 190 лет назад Лобачевский показал возможность вывода полученных им формул гиперболической тригонометрии из формул сферической тригонометрии, используя принцип двойственности.

В нашей работе мы впервые применяем принципы двойственности Ламберта — Лобачевского для нахождения фундаментальных областей кристаллографических групп геометрий  $S^2$  и  $H^2$ ,  $H^2 \times R$  и  $S^2 \times R$ , а также групп симметрий орбиформов, имеющих геометрическую структуру по образцу этих геометрий (последнее высказывание принадлежит Тёрстену).

Из теоремы Гаусса — Бонне или, применяя принцип двойственности, получаем, что площадь треугольника  $\Delta$  на сфере радиуса 1 с точностью до знака равна его дефекту, т.е. модулю разности  $|\alpha + \beta + \gamma - \pi|$ , а именно в геометрии  $S^2$  она равна  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ , а в геометрии  $H^2$  она равна  $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — углы треугольника  $\Delta$ .

Далее, напомним, что группой треугольника с углами  $\frac{\pi}{p}$ ,  $\frac{\pi}{q}$  и  $\frac{\pi}{r}$ , где  $p$ ,  $q$ ,  $r$  — натуральные числа, делящие  $180^\circ$ , называется группа  $\Delta^*(p, q, r)$  изометрий геометрии  $X^2$ , порожденная отражениями от сторон треугольника  $\Delta$  [2]. Здесь  $X^2$  — одна из геометрий  $E^2$ ,  $S^2$  и  $H^2$ .

Для того, чтобы описывать квазикристаллы в геометрии  $E^2$  надо допустить существование треугольных групп для треугольников с рациональными частями от  $180^\circ$ . Например, при разрезании тупого угла у ромбов Пенроуза, получим треугольники Робинсона с углами  $(72^\circ, 54^\circ, 54^\circ)$  и  $(72^\circ, 72^\circ, 36^\circ)$ . Нами показано в геометрии Лобачевского им соответствуют треугольники с углами  $(0, 0, 108^\circ)$  и  $(0, 0, 144^\circ)$  и площадями соответственно 72 и 36 квадратных единиц (напомним, что в геометрии Лобачевского есть абсолютная мера длины). Как известно, площадь полностью вырожденного треугольника геометрии  $L^2$ , т.е. треугольника, все углы которого равны 0, равна 180 кв. ед.

**Определение 3.** Треугольной группой геометрий  $H^2$  и  $H^2 \times K$  называется группа изометрий этих геометрий, порожденная отражениями от сторон

частично вырожденного треугольника или невырожденного треугольника, углы которого являются целыми или рациональными частями  $180^\circ$ .

Сформулируем один из результатов, полученных нами.

**Теорема 1.** Пусть  $G_2$  — двумерная квазикристаллическая группа (в смысле Новикова) геометрии  $E^2$ , пересечение которой с  $R^2$  является свободной абелевой группой ранга 4 (квадратичной квазирешеткой). Группа  $G_2$  изоморфна одной из треугольных групп геометрии  $H^2$  фундаментальной областью которой является один из треугольников с углами  $(0, 0, 144^\circ)$ ,  $(0, 0, 108^\circ)$ ,  $(0, 0, 135^\circ)$ ,  $(0, 0, 150^\circ)$ , площади которых равны 36, 72, 45, 30 кв. ед. соответственно. В силу принципа двойственности им соответствуют на сфере треугольники с углами  $(72^\circ, 72^\circ, 72^\circ)$ ,  $(36^\circ, 108^\circ, 108^\circ)$ ,  $(90^\circ, 90^\circ, 45^\circ)$  и  $(90^\circ, 90^\circ, 30^\circ)$ . Соответственно эти группы описывают квазикристаллы и фуллерены с симметриями порядков 10, 5, 8, 12.

**Замечание.** В [7] отмечается, что  $\Delta(2, 2, n)$  изоморфны диэдральным группам порядка  $2n$ , обладающие поворотами порядка  $n$ . В условиях теоремы 1  $\Delta(2, 2, 8)$  и  $\Delta(2, 2, 12)$  подгруппы группы  $\Delta^*(2, 2, 8)$  и  $\Delta^*(2, 2, 12)$  состоящие из движений не меняющих ориентации сферы  $S^2$ . Кроме этого результата нами получены группы симметрий квазикристаллов геометрии  $H^2 \times R$  и нанотрубок  $S^2 \times R$ , а также группы симметрии орбифолдов, рассмотренных в [8].

#### Список литературы

1. Делоне Б. Н., Падунов Н., Александров А. Математические основы структурного анализа кристаллов. — М., Л.: ГТТИ, 1934.
2. Артамонов В. Н., Славохотов Ю. Л. Группы и их приложения в физике, химии, кристаллографии. — М., 2005. — 512 с.
3. Дышлис А. А., Тушев А. В. Квазикристаллографические группы в евклидовом пространстве Лобачевского // Алгебра и анализ. — 1994. — С. 33—34.
4. Антонюк П. В., Галиулин Г. В., Макаров В. С. Квазикристалл как идеальный кристалл пространства Лобачевского // Природа. — 1993. — № 7. — С. 28—31.
5. Галиулин Р. В., Макаров В. С. Квазикристалл как идеальный кристалл пространства Лобачевского // In memorial Lobatschevskii. — 1995. — С. 34—38.
6. Винберг Э. Б., Шварцман О. В. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны // Совр. проблемы математики, фундаментальные направления. — Т. 29. — М.: ВИНТИ, 1988. — С. 147—259.
7. Скотт П. Геометрии на трехмерных многообразиях. — М.: Мир, 1986. — 168 с.
8. Дишлис А. А., Покась С. М. Орбіфолди геометрії Лобачевського як моделі квазикристалів // Матеріали XV Міжнародної наукової конференції ім. М. Кравчука, 2014. — С. 81.

## ЧЕРЕПИЧНІ ПОРЯДКИ В $M_n(D)$ ТА УМОВА ЯТЕГАОНКАРА

В. М. Журавльов, О. А. Шевченко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
vshur@univ.kiev.ua

Усі необхідні відомості про черепичні порядки можна знайти [1].

Нехай  $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{i,j})\}$  — зведений черепичний порядок над дискретно нормованим кільцем  $\mathcal{O}$  з максимальним ідеалом  $\pi\mathcal{O}$ , де  $\pi$  — простий елемент,  $\mathcal{E} \in M_n(\mathbb{Z})$ , і  $M$  — незвідна  $\Lambda$  — ґратка. У роботі [2] (лема 1.7) В.А. Ятегаокар навів необхідні і достатні умови для того, щоб  $\Lambda / \pi\Lambda$ -модуль  $M / \pi M$  розкладався у пряму суму модулів. При цьому проєктивна розмірність ґратки  $M$  дорівнює нескінченності.

Якщо такої ґратки не існує, то будемо говорити, що черепичний порядок  $\Lambda$  задовольняє умові Ятегаонкара.

Незвідна  $\Lambda$  — ґратка  $M$  така, що  $\Lambda / \pi\Lambda$ -модуль  $M / \pi M$  розкладається у пряму суму модулів, існує тоді і тільки тоді, коли

$$\Lambda \simeq A = \{\mathcal{O}, \mathcal{A} = (a_{i,j})\},$$

$$\text{де } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}, \mathcal{A} \geq 0, A_{21} \geq 2U, U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо простий граф  $G = G(\Lambda)$ , що будується за черепичним порядком  $\Lambda \subset M_n(D)$  наступним чином: множиною вершин є  $VG = \{1, 2, \dots, n\}$ . Точки  $i$  та  $j$  з'єдані ребром тоді і тільки тоді, коли  $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 1$ .

Якщо граф  $G = G(\Lambda)$  зв'язний, то  $\Lambda$  задовольняє умові Ятегаонкара.

**Теорема 1.** Нехай  $\Lambda$  — зведений черепичний порядок в  $M_n(D)$ , де  $n \in \{4, 5\}$ ,  $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}$  — двосторонній пірсовський розклад порядку  $\Lambda$

$$G(\Lambda) = G(\Lambda_{11}) \cup G(\Lambda_{22}).$$

Нехай  $Q(\Lambda)$  — сагайдак черепичного порядку  $\Lambda$ . Тоді  $\Lambda$  задовольняє умові Ятегаонкара тоді і тільки тоді, коли існує цикл  $i_1 \rightarrow j_1 \rightarrow i_2 \rightarrow j_2 \rightarrow i_1$  у сагайдаку

$$Q(\Lambda) \text{ з } \alpha_{i_1 j_1} + \alpha_{j_1 i_2} + \alpha_{i_2 j_2} + \alpha_{j_2 i_1} < 4,$$

де  $i_1, i_2 \in VG(\Lambda_{11}), j_1, j_2 \in VG(\Lambda_{22})$

**Теорема 2.** Нехай  $\Lambda$  — зведений черепичний порядок в  $M_n(D)$ , де  $n \leq 5$ , який задовольняє умові Ятегаокара. Тоді

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \leq \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

#### Список літератури

1. Hazewinkel M., Gubareni N. and Kirichenko V. V. Algebras, Rings and Modules. Vol. 1, Series: Mathematics and Its Applications. — **575**. — Kluwer Acad. Publish., 2004. — XII+380 p.
2. Jategaonkar V. A., Global dimension of tiled order over a discrete valuation rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — **196**. — P. 313—330.

# ПРО ДВОСТОРОННІСТЬ КВАДРАТУРНИХ ФОРМУЛ ПІДВИЩЕНОЇ ТОЧНОСТІ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
aleksei\_kalaida@comcast.net

Квадратурні формули підвищеної точності інтегрування функцій (формули типу Гаусса) теж потребують простих засобів контролю точності (похибки). На відміну від різних наближених методів такого контролю (принцип Рунге тощо) надійним засобом цього є двосторонні методи (або їх середнє арифметичне та піврізниця для контролю похибки) [1]. Тут розглянуто схему побудови двосторонніх методів підвищеної точності з одним (початковим, кінцевим) закріпленим, наперед заданим (формули типу Маркова) простим квадратурним вузлом та рештою двократними вільними вузлами.

Побудуємо для функції  $f$  методом вичерпування за  $n + 1$  упорядкованими вузлами  $x_j$  (але, замість методу невизначених коефіцієнтів, з використанням многочленів типу Лагранжа) два многочлени типу Маркова — Ерміта

$$\hat{H}_{2n}(x; f) = L_n(x; f) + \omega(x)\hat{L}_{n-1}(x; \phi), \check{H}_{2n}(x; f) = L_n(x; f) + \omega(x)\check{L}_{n-1}(x; \phi), \quad (1)$$

з простим вузлом  $x_0, x_n$ , відповідно, та рештою вільними двократними вузлами (вузлами, відповідно,  $x_1, \dots, x_n$  та  $x_0, \dots, x_{n-1}$ ), де  $\omega$  — так звана буферна функція — функція з простими нулями  $x_j, j = \overline{0, n}$ ,  $L_x(x; f)$  — многочлен типу Лагранжа функції  $f$  за вузлами  $x_j, j = \overline{0, n}$ ,  $\hat{L}_{n-1}(x; \phi), \check{L}_{n-1}(x; \phi)$  — многочлени типу Лагранжа функції  $\phi = (f' - L'_n) / \omega'$  за вузлами  $x_j$ , відповідно, при  $j = \overline{1, n}$  та  $j = \overline{0, n-1}$ .

Зінтегрувавши многочлени (1) та визначивши вільні вузли  $x_j$  з умов

$$\int_a^b \rho(x)\omega(x)\omega_j(x)dx = 0, \quad j = \overline{1, n}, j = \overline{0, n-1}, \quad (2)$$

де  $[a, b]$  — відрізок інтегрування,  $\rho$  — вагова функція,  $\omega_j$  — базисні функції многочлена типу Лагранжа), дістанемо квадратурні формули підвищеної точності. За побудовою, при знакосталості похідної функції  $f$  в залишкових членах  $\check{r}(x) = f(x) - \check{H}_{n-1}(x; f)$  ці формули являються двосторонніми [1].

У цих побудовах, а також у побудовах з усіма двократними вузлами  $x_j$  і  $k < n$  в умовах (2) матимемо формули (не двосторонні) з більшою кількістю фіксованих вузлів, а при  $(n + 1)$  умовах (2) — формули типу Гаусса.

## Список літератури

1. Калайда О. Ф. Чисельні методи. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2000. — 250 с.

# ДВОСТОРОННІ СИМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ ДРУГОЇ ПОХІДНОЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ДВОСТОРОННІХ КОЛОКАНТ ФУНКЦІЙ З ПРОСТИМИ ТА ДВОКРАТНИМИ ВУЗЛАМИ

О. Ф. Калайда

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна*  
aleksei\_kalaida@comcast.net

Загальну теорію двосторонніх наближень (колокант) функцій і на основі двосторонніх колокант з простими вузлами двосторонні наближення похідної у внутрішніх вузлах розроблено в [1], а симетричні двосторонні наближення розв'язків різних задач — в [2]. Тут за допомогою двосторонніх колокант з простими вузлами побудовано двосторонні симетричні наближення другої похідної у середніх точках між внутрішніми вузлами, а за допомогою симетричних двосторонніх колокант з одним простим (початковим, кінцевим) та рештою двократними вузлами — симетричні двосторонні наближення другої похідної у внутрішніх вузлах, а також в середніх точках між цими вузлами.

За допомогою двосторонніх колокант  $\hat{K}_n(x; f)$ ,  $\check{K}_n(x; f)$  функції  $f$  за простими упорядкованими вузлами  $x_j$ , відповідно, при  $j = 0, n$  та при  $j = 1, n + 1$  у середніх точках  $\bar{x}_i = (x_i + x_{i+1}) / 2$ ,  $i = 1, n - 1$ , дістаємо симетричні двосторонні наближення  $\hat{f}_i'' = \hat{K}_n''(\bar{x}_i; f)$ ,  $\check{f}_i'' = \check{K}_n''(\bar{x}_i; f)$  другої похідної  $f''(x)$ , а також більш точне наближення (середнє арифметичне двосторонніх наближень) та, відповідно, вилки

$$\bar{f}_i'' = (\hat{K}_n''(\bar{x}_i; f) + \check{K}_n''(\bar{x}_i; f)) / 2, \quad \bar{r}_i = (\hat{K}_n''(\bar{x}_i; f) - \check{K}_n''(\bar{x}_i; f)) / 2$$

для контролю точності результату. Так, за допомогою відомої формули чисельного диференціювання  $f_i'' \approx (f_{i-1} + f_{i+1} - 2f_i) / h^2$  дістаємо двосторонні наближення  $f''(x)$  у точці  $\bar{x}_i = (x_i + x_{i+1}) / 2$

$$\hat{f}_{i+1/2}'' = (f_{i-1} + f_{i+1} - 2f_i) / h^2, \quad \check{f}_{i+1/2}'' = (f_i + f_{i+2} - 2f_{i+1}) / h^2,$$

а їх середнє арифметичне  $\bar{f}_{i+1/2}'' = (\hat{f}_{i+1/2}'' + \check{f}_{i+1/2}'') / 2$  має той же порядок точності, що й утворюючі їх формули, тобто можна згустити сітку значень другої похідної вдвічі без залучення додаткових значень функції (тобто не згущуючи сітку вузлів), а контроль точності здійснювати за допомогою вилки.

Побудуємо, далі, для функції  $f$  за допомогою многочленів типу Лагранжа двосторонні многочлени типу Маркова — Ерміта парного порядку за упорядкованими вузлами  $x_j$ ,  $j = 0, n$ , відповідно, з двократними вузлами  $x_i$ ,  $i = 1, n$ , (перший вузол простий),  $x_k$ ,  $k = 0, n - 1$ , (останній вузол простий)

$$\hat{H}_{2n}(x; f) = L_n(x; f) + \omega(x)\hat{L}_{n-1}(x; \phi), \quad \check{H}_{2n}(x; f) = L_n(x; f) + \omega(x)\check{L}_{n-1}(x; \phi), \quad (1)$$

де  $\omega$  — так звана буферна функція з простими нулями у вузлах  $x_j, j = \overline{0, n}$ , тобто функція, що  $\omega(x_j) = 0, \omega'(x_j) \neq 0, L_n(x; f), \hat{L}_{n-1}(x; \phi), \check{L}_{n-1}(x; \phi)$  — многочлени типу Лагранжа за вузлами, відповідно,  $x_j, x_i, x_k$  та значеннями функцій, відповідно,  $f$  та  $\phi$  у вказаних вузлах. Легко переконатись, що многочлени (1), задовольняють умови колокації  $\hat{H}_{2n}(x_j; f) = \check{H}_{2n}(x_j; f) = f_j, j = \overline{0, n}$ , а умови колокації похідної  $f'(x) \hat{H}'(x_v; f) = f'(x_v) = f'_v$  у вузлах  $x_i, i = \overline{1, n}$ , та  $x_k, k = \overline{0, n-1}$ , — при  $\phi = (f' - L'_n) / \omega'$ . Оскільки, далі, залишковий член многочленів (1) має вигляд ( $r = f - H_m$ )

$$\hat{r}(x) = (x - x_0)\hat{\omega}^2(x)\hat{M}(x) / (2n + 1)!, \check{r}(x) = \check{\omega}^2(x)(x - x_n)\check{M}(x) / (2n + 1)!,$$

то при  $x \in [x_0, x_n]$  та умові знакосталості виразу  $\hat{M}(x)\check{M}(x)$  маємо нерівність  $x \in [x_0, x_n]$

$\hat{r}(x)\check{r}(x) \leq 0$ , тобто дані многочлени являються двосторонніми колокантами функції  $f$ , причому на інтервалі  $(x_1, x_{n-1})$  ця двосторонність досить симетрична. При цьому графіки похибок у внутрішніх вузлах мають (а також у середніх точках між цими вузлами) протилежну угнутість, а отже, другі похідні многочленів (1) у вказаних вузлах (точках) теж являються двосторонніми наближеннями похідної  $f''(x)$ , причому досить симетричними.

Отже, виконавши диференціювання многочленів (1) та зафіксувавши змінну  $x$  у внутрішніх вузлах  $x_i, i = \overline{1, n}$ , дістанемо двосторонні формули чисельного диференціювання для другої похідної  $f''(x)$  функції  $f$  ( $i = \overline{1, n}$ ):

$$\hat{f}_i'' = \hat{H}_{2n}''(x_i; f) = L_n''(x_i; f) + 2\omega'(x_i)\hat{L}'_{n-1}(x_i; \phi) + \omega''(x_i)(f'_i - L'_n(x_i; f)) / \omega'(x_i), (2)$$

$$\check{f}_i'' = \check{H}_{2n}''(x_i; f) = L_n''(x_i; f) + 2\omega'(x_i)\check{L}'_{n-1}(x_i; \phi) + \omega''(x_i)(f'_i - L'_n(x_i; f)) / \omega'(x_i). (3)$$

За допомогою цих формул дістаємо і більш точно середнє арифметичне наближення  $\bar{f}_i'' = (\hat{f}_i'' + \check{f}_i'') / 2$  та вилку похибки  $\bar{r}_i = (\hat{f}_i'' - \check{f}_i'') / 2$  двосторонніх наближень (2), (3) для здійснення контролю точності їх результату.

### Список літератури

1. Калайда О. Ф. Чисельні методи. — К.: ВПЦ «Київський університет». — 2000. — 250 с.
2. Калайда О. Ф. Двосторонні симетричні наближення функцій, похідних та інтегралів та розв'язків інтегральних рівнянь, диференціальних та інтегродиференціальних задач // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-математичні науки. — 2005. — Вип. № 4. — С. 77—83.

# ДВОСТОРОННІ СИМЕТРИЧНІ МНОГОЧЛЕНИКОЛОКАНТИ ФУНКЦІЙ З ДВОКРАТНИМИ ВУЗЛАМИ

О. Ф. Калайда

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна*  
aleksei\_kalaida@comcast.net

Загальний спосіб побудови двосторонніх колокант функцій як з простими, так і з кратними вузлами побудовано в [1]. Проте двосторонні колоканти з простими вузлами не досить симетричні, а тому їх середнє арифметичне не дає значного зменшення похибки апроксимації. Залучення ж вузлів високої кратності надто трудомістське, а тому, за рідкими винятками, не оправдане. Оптимальними, на наш погляд, є двосторонні многочлени типу Маркова — Ерміта з двократними вузлами, вони ж являються одночасно й досить симетричними.

Тут дано схему побудови двосторонніх «симетричних» многочленів типу Маркова — Ерміта парного порядку за упорядкованою системою  $(n + 1)$  вузлів, з яких  $n$  вузлів двократні. Побудова здійснюється методом вичерпування [1] з використанням многочленів Лагранжа. Результат добуто **в явній формі**.

Шукані многочлени  $\hat{H}_{2n}(x; f)$ ,  $\check{H}_{2n}(x; f)$  за вузлами  $x_j$ ,  $j = 0, n$ , для функції  $f$ , відповідно, за простим вузлом  $x_0$  (решта вузлів двократні) і за простим вузлом  $x_n$  (решта вузлів двократні) будуюмо методом вичерпування у вигляді

$$\hat{H}_{2n}(x; f) = L_n(x; f) + \omega(x)\hat{L}_{n-1}(x; \phi), \check{H}_{2n}(x; f) = L_n(x; f) + \omega(x)\check{L}_{n-1}(x; \phi), \quad (1)$$

де  $\omega(x)$  — так званий буферний множник  $\omega(x_j) = 0$ ,  $\omega'(x_j) \neq 0$ ,  $j = 0, n$ ,

$$L_n(x; f) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j \hat{L}_{n-1}(x; \phi) = \sum_{i=1}^n \hat{\omega}_i(x) \phi_i, \check{L}_{n-1}(x; \psi) = \sum_{k=0}^{n-1} \check{\omega}_k(x) \phi_k$$

многочлени Лагранжа за вузлами, відповідно,  $x_j$ ,  $j = 0, n$  (для функції  $f$ ),  $x_i$ ,  $i = 1, n$ ,  $x_k$ ,  $k = 0, n - 1$ , (для невідомої функції  $\phi$ ).

Невідомі в (1) значення  $\phi_i$ ,  $\phi_k$  функції  $\phi$  знаходимо з умов колокації

$$\hat{H}'_{2n}(x_i; f) = f'_i, i = 1, n, \check{H}'_{2n}(x_k; f) = f'_k, k = 0, n - 1.$$

В результаті маємо рівності:

$$\phi_i = (f'_i - L'_n(x_i; f)) / \omega'(x_i), i = 1, n, \phi_k = (f'_k - L'_n(x_k)) / \omega'(x_k), k = 0, n - 1. \quad (2)$$

Підставивши це, відповідно, в (1), матимемо шукані многочлени, так що  $f(x) = \hat{H}_{2n}(x; f) + \hat{R}(x)$ ,  $f(x) = \check{H}_{2n}(x; f) + \check{R}(x)$ ;  $\hat{R}(x)\check{R}(x) \leq 0$ ,

$$\text{sgn } f^{(2n+1)}(x) = \text{const.}$$

**Приклад.** При  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.2$ ,  $f(x) = \exp(x)$ ,  $x = 0.1$ , згідно (1), (2), маємо:

$$\hat{R}(x) \approx 1.9 \cdot 10^{-4}, \check{R}(x) \approx -1.8 \cdot 10^{-4},$$
$$\bar{R}(x) = f(x) - (\hat{H}_2(x) + \check{H}_2(x)) / 2 \approx 5.6 \cdot 10^{-6}.$$

Похибка ж  $f(x) - L_1(x) \approx -0.0055$ . Як бачимо,  $\bar{R}(x)$  на три порядки менша.

#### Список літератури

1. Калайда О. Ф. Чисельні методи. — К.: ВПЦ «Київський університет». — 2000. — 250 с.

## ДВОСТОРОННІ МЕТОДИ З ДВОКРАТНИМИ ВУЗЛАМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НОРМАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

О. Ф. Калайда

*Київський університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна*  
aleksei\_kalaida@comcast.net

Найбільш надійними з точки зору контролю точності результату розв'язування задач є двосторонні чисельні методи. Різноманітні двосторонні чисельні методи розв'язування задачі Коші (методи типу Крилова, методи типу Адамса) побудовано на основі двосторонніх многочленів типу Лагранжа [1]. Вони порівняно прості, алгоритмізовані та комп'ютеризовані і тому цілком придатні для практичного застосування. (Двосторонні ж аналітичні наближені методи надто складні; наприклад, практично неможливо знайти двосторонні початкові наближення в двосторонніх аналітичних ітеративних методах для нелінійних операторних рівнянь. Двосторонні ж чисельні методи на основі інтервальної арифметики теж малоприсадатні; так, у випадку задачі Коші для нормальних рівнянь для побудови двосторонніх методів Рунге — Кутта необхідно мати вираз їх залишкового члена). Однак найбільш надійними є чисельні так звані симетричні двосторонні методи, тобто методи з майже симетричною вилкою похибки.

Тут розглянуто двосторонні симетричні чисельні методи для задачі Коші

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0, \Rightarrow (f(x, y))' = f'_x(x, y) + f(x, y)f'_y(x, y) = \phi(x, y) \quad (1)$$

за допомогою квадратурних формул, утворених інтегруванням симетричних двосторонніх многочленів (для функції  $f$ ) типу Маркова — Ерміта з  $n + 1$  вузлами  $x_j$ , з яких  $n$  початкові (кінцеві) вузли двократні ( $x \mapsto \omega(x) \leftarrow \omega(x_j) = 0$ ;  $L_k(x)$  — многочлени Лагранжа за вузлами  $x_j, j = 0, n, x_i, i = 0, n - 1, x_l, l = 1, n$ )

$$\hat{H}_{2n}(x) = L_n(x) + \omega(x)\hat{L}_{n-1}(x; \psi),$$

$$\check{H}_{2n}(x) = L_n(x) + \omega(x)\check{L}_{n-1}(x; \psi), \psi = (f' - L'_n) / \omega'.$$

Зінтегрувавши ці многочлени на відрізку  $[x_0, x_n]$ , дістанемо двосторонні симетричні квадратурні формули (а також  $\bar{J} = (\hat{J} + \check{J}) / 2$  та вилку  $r = (\hat{J} - \check{J}) / 2$ )

$$\hat{J} = \hat{\kappa}_0 f_0 + \dots + \hat{\kappa}_n f_n + \hat{\gamma}_0 f'_0 + \dots + \hat{\gamma}_{n-1} f'_{n-1},$$

$$\check{J} = \check{\kappa}_0 f_0 + \dots + \check{\kappa}_n f_n + \check{\gamma}_1 f'_1 + \dots + \check{\gamma}_n f'_n$$

при двох вузлах  $x_0, x_1$ :

$$\hat{J} = h(2f_0 + f_1) / 3 + h^2 f'_0 / 6, \check{J} = h(f_0 + 2f_1) / 3 - h^2 f'_1 / 6;$$

наприклад, при

$$f(x) = \exp(x), x_0 = 0, x_1 = 0.2 \Rightarrow \hat{r} = -0.000024, \check{r} = 0.000025).$$

Ці двосторонні формули дають двосторонні методи типу Крилова та інтерполяційні методи типу Адамса, а формула  $\bar{J}$  односторонні методи вищого порядку з контролем похибки результату за величиною вилки  $r$ . Так, при двох вузлах маємо двосторонні інтерполяційні методи типу Крилова (типу Адамса)

$$\begin{aligned}\hat{y}_{i+1} &= \hat{y}_i + h_i(2\hat{f}_i + \hat{f}_{i+1}) / 3 + h_i^2\hat{\phi}_i / 6, \\ \check{y}_{i+1} &= \check{y}_i + h_i(\check{f}_i + 2\check{f}_{i+1}) / 3 - h_i^2\check{\phi}_{i+1} / 6.\end{aligned}$$

#### Список літератури

1. Калайда О. Ф. Чисельні методи. — К.: ВПЦ «Київський університет». — 2000. — 250 с.

## ДВОСТОРОННІ СИМЕТРИЧНІ КОЛОКАНТИ ТА КВАДРАТУРНІ ФОРМУЛИ З ДВОКРАТНИМИ ВУЗЛАМИ

О. Ф. Калайда

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна*  
aleksei\_kalaida@comcast.net

Двосторонні колоканти функцій за простими вузлами дають можливість будувати двосторонні формули чисельного диференціювання у внутрішніх вузлах та двосторонні квадратурні формули [1]. Однак ці формули не досить симетричні, тому їх середнє арифметичне не дає результатів значно вищого порядку точності. Тут будуються більш симетричні двосторонні колоканти з двократними вузлами та відповідні їм двосторонні квадратурні формули.

Многочлени з двократними вузлами  $x_1, \dots, x_n$  та простим вузлом  $x_0$  і, відповідно, з двократними вузлами  $x_0, \dots, x_{n-1}$  та простим вузлом  $x_n$  (будуємо їх методом вичерпування, але з використанням многочленів типу Лагранжа)

$$\hat{H}_{2n}(x) = L_n(x; f) + \omega(x)\hat{L}_{n-1}(x; \phi), \phi(x) = (f'(x) - L'_n(x)) / \omega'(x); \quad (1)$$

$$\check{H}_{2n}(x) = L_n(x; f) + \omega(x)\check{L}_{n-1}(x; \phi), \omega(x) \Leftarrow \omega(x_j) = 0, j = \overline{0, n}, \quad (2)$$

при упорядкованій системі вузлів  $x_j, j = \overline{0, n}$ , та знакосталості  $f^{(2n+1)}(x)$  являються двосторонніми наближеннями функції  $f$  на відрізку  $[x_0, x_n]$ , оскільки

$$\hat{r}(x) = f(x) - \hat{H}_{2n}(x) = \frac{(x - x_0)((x - x_1) \dots (x - x_n))^2}{(2n + 1)!} f^{(2n+1)}(\xi), \xi \in (x_0, x_n), \quad (3)$$

$$\check{r}(x) = f(x) - \check{H}_{2n}(x) = \frac{((x - x_0) \dots (x - x_{n-1}))^2(x - x_n)}{(2n + 1)!} f^{(2n+1)}(\zeta), \zeta \in (x_0, x_n). \quad (4)$$

Оскільки залишкові члени (3), (4) знакосталі, то квадратурні формули, побудовані інтегруванням на відрізку  $[x_0, x_n]$  многочленів (2), (3), теж будуть двосторонніми і, згідно (3), (4), досить симетричними, причому інтеграли від других доданків в (1), (2) даватимуть двосторонні добавки до квадратурних формул з простими вузлами  $x_j, j = \overline{0, n}$ , так що за їх допомогою можна контролювати точність процесу чисельного інтегрування. Проілюструємо це у випадку двох вузлів  $x_0, x_1$ . Зінтегрувавши (1), (2), дістаємо квадратурні формули, де  $J$  — точне значення інтеграла,

$$\Delta f = f_1 - f_0, J_T = h(f_0 + f_1) / 2, \bar{J} = (\hat{J} + \check{J}) / 2):$$

$$\hat{J} = J_T + h^2(f'_0 - \Delta f / h) / 6, \check{J} = J_T - h^2(f'_1 - \Delta f / h) / 6.$$

Так, при  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.2$ ,  $f(x) = \exp(x)$  маємо:

$$J = 0.221402758, \hat{J} = 0.221426851,$$

$$\check{J} = 0.221377683, \bar{J} = 0.221402267,$$

$$\hat{r} = -0.000024093, \check{r} = 0.000025075, \bar{r} \approx 5 \cdot 10^{-7}.$$

#### **Список літератури**

1. Калайда О. Ф. Чисельні методи. — К.: ВПЦ «Київський університет». — 2000. — 250 с.

# ДВОСТОРОННІ АЛГОРИТМИ ЧИСЕЛЬНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ДВОСТОРОННІХ КВАДРАТУРНИХ ФОРМУЛ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
aleksei\_kalaida@comcast.net

Оскільки визначений інтеграл від похідної  $k$ -го порядку є приріст на відрізку інтегрування похідної  $(k-1)$ -го порядку, то за двосторонніми квадратурними формулами для інтеграла від похідної  $k$ -го порядку можна розв'язувати обернену до інтегрування задачу чисельного диференціювання, а з огляду на двосторонність згаданих квадратурних формул — будувати алгоритми чисельного диференціювання, причому більш високого порядку, ніж диференціюванням колокації функції [1]. Зокрема, в такий спосіб задача чисельного диференціювання зводиться до крайових задач для різницевого рівнянь [1]. А застосування при цьому двосторонніх формул чисельного диференціювання дає можливість добувати двосторонні наближення значень похідних у вузлах колокації, а також (або, принаймні) вилку похибки наближених значень. Проілюструємо це на прикладі формули Сімпсона (для похідної  $k$ -го порядку)

$$y_{i+1}^{(k-1)} - y_{i-1}^{(k-1)} = h(y_{i-1}^{(k)} + 4y_i^{(k)} + y_{i+1}^{(k)}) / 3 + O(h^5), \quad h = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i, \quad (1)$$

та її двосторонніх аналогів (легко переконатись, що  $r = h(y_{i+1}^{(k)} - y_{i-1}^{(k)}) / 3 = O(h^2)$ )

$$\begin{aligned} y_{i+1}^{(k-1)} - y_{i-1}^{(k-1)} &= 2h(y_{i-1}^{(k)} + 2y_i^{(k)}) / 3 + r, \\ y_{i+1}^{(k-1)} - y_{i-1}^{(k-1)} &= 2h(2y_i^{(k)} + y_{i+1}^{(k)}) / 3 - r. \end{aligned} \quad (2)$$

Зауважимо, використовувати рівність (1) рекурентно (задавши  $y_0^{(k)}, y_1^{(k)}$ ) не можна, оскільки такий рекурентний процес нестійкий (в такий спосіб стійкий процес утворюється за допомогою формули трапецій). Для побудови стійкого процесу зведемо його до крайової задачі для різницевого рівняння (1) (без похибки  $O(h^5)$ ). Для цього задамо  $y_0^{(k)}, y_n^{(k)}$ , а решту невідомих  $y_i^{(k)}, i = \overline{1, n-1}$ , знайдемо з системи лінійних алгебричних рівнянь (1). Це трьохдіагональна система з діагональною перевагою. Її можна розв'язувати методом прогонки, а також ітеративними методами (зокрема, методом Пікара), записавши її у вигляді

$$y_i^{(k)} = 3(y_{i+1}^{(k-1)} - y_{i-1}^{(k-1)}) / 4h - (y_{i+1}^{(k)} + y_{i-1}^{(k)}) / 4, \quad i = \overline{1, n-1},$$

( $y_0^{(k)}, y_n^{(k)}$  задані).

Після цього контроль точності можна здійснювати за допомогою рівностей (2) без складової  $\pm r$  або за допомогою виразу для  $r$ .

У таблиці наведено результат чисельного експерименту: за формулою Сімпсона з кроком  $h = 0.1$  на відрізку  $[0.1; 3.0]$  знайдені значення похідної (як середнє арифметичне двосторонніх наближень) для функцій  $x \mapsto \exp(x)$ ,  $x \mapsto \sin(x)$ , а для порівняння у третій та п'ятій колонках наближення похідної за традиційною трьохточковою (центральнорізницевою) формулою.

0.1	8.3259E007	1.848E003	6.6560E007	1.658E003
0.2	7.7992E007	2.037E003	4.3182E007	1.633E003
0.3	9.6383E007	2.251E003	4.4357E007	1.591E003
0.4	1.0932E006	2.488E003	3.8680E007	1.534E003
0.5	1.2366E006	2.749E003	3.5753E007	1.462E003
0.6	1.3876E006	3.038E003	3.2009E007	1.375E003
0.7	1.5432E006	3.358E003	2.9132E007	1.274E003
0.8	1.7138E006	3.711E003	2.5932E007	1.161E003
0.9	1.8966E006	4.101E003	2.2997E007	1.035E003
1.0	2.0983E006	4.533E003	1.9830E007	9.001E004
1.1	2.3193E006	5.009E003	1.6627E007	7.556E004
1.2	2.5636E006	5.536E003	1.3258E007	6.036E004
1.3	2.8333E006	6.119E003	9.7862E008	4.456E004
1.4	3.1313E006	6.762E003	6.2165E008	2.831E004
1.5	3.4606E006	7.473E003	2.5872E008	1.178E004
1.6	3.8246E006	8.259E003	1.0680E008	4.864E005
1.7	4.2268E006	9.128E003	4.7125E008	2.146E004
1.8	4.6713E006	1.009E002	8.3099E008	3.785E004
1.9	5.1626E006	1.115E002	1.1824E007	5.385E004
2.0	5.7056E006	1.232E002	1.5221E007	6.932E004
2.1	6.3056E006	1.362E002	1.8465E007	8.410E004
2.2	6.9688E006	1.505E002	2.1524E007	9.803E004
2.3	7.7017E006	1.663E002	2.4369E007	1.110E003
2.4	8.5117E006	1.838E002	2.6970E007	1.228E003
2.5	9.4069E006	2.031E002	2.9302E007	1.335E003
2.6	1.0396E005	2.245E002	3.1341E007	1.427E003
2.7	1.1488E005	2.481E002	3.3068E007	1.506E003
2.8	1.2695E005	2.742E002	3.4465E007	1.570E003
2.9	1.4013E005	3.030E002	3.5537E007	1.617E003
3.0	1.5471E005	3.349E002	3.6254E007	1.649E003

На завершення наведемо ще одну квадратурну формулу (з похибкою  $O(h^9)$ ), придатну для чисельного диференціювання у такий спосіб (з похибкою  $O(h^8)$ )

$$y_{i+3} - y_{i-3} = h(41(y'_{i-3} + y'_{i+3}) + 216(y'_{i-2} + y'_{i+2}) + 27(y'_{i-1} + y'_{i+1}) + 272y'_i).$$

Двосторонні для неї формули виду (2) утворюються як і для формули Сімпсона.

#### **Список літератури**

1. Калайда О. Ф. Нелінійні та загальні лінійні квадратурно-матричні методи чисельного диференціювання // XV Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. Матеріали Конференції. Ч. 2. — К.: 2014. — С. 104.

## КОЛОКАНТИ З ПРОПУСКАМИ ГОРИЗОНТАЛІВ ІНФОРМАЦІЇ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei\_kalaida@comcast.net

Тут будуються колоканти функції  $f$  за  $(n + 1)$  вузлами  $x_j$ , інформація в яких — значення функції та її похідних задано з пропусками (наприклад, задано значення функції та значення другої похідної, значення ж першої похідної не задано, і т.д.). Будуємо такі колоканти методом вичерпування, але з використанням, замість методу невизначених коефіцієнтів, многочленів типу Лагранжа.

Так, наприклад, колоканту за значеннями  $f_j, f_j'', j = \overline{0, n}$ , будуємо у вигляді

$$H_{3n+2}(x; f; f'') = L_n(x; f) + \omega^2(x)L_n(x; \phi), \quad (1)$$

де  $L_n(x; f), L_n(x; \phi)$  — многочлени типу Лагранжа, відповідно, для функцій  $f$  та  $\phi$ ,  $\omega$  — функція з простими нулями  $x_j \Rightarrow \omega(x_j) = 0, \omega'(x_j) \neq 0$ . Очевидні рівності  $H_{3n+2}(x_j; f; f'') = f_j$ . Далі, маємо рівності  $H'_{3n+2}(x_j; f; f'') = L'_n(x_j; f)$ . Нарешті, з умов колокації  $H''_{3n+2}(x_j; f; f'') = f_j''$  дістаємо рівності

$$f_j'' = L''_n(x_j; f) + 2\omega'^2(x_j)L_n(x_j; \phi) \Rightarrow \phi_j = (f_j'' - L''_n(x_j; f)) / \omega'^2(x_j)2!.$$

Отже, шукана колоканта існує і єдина. Аналогічно методом вичерпування можна, використавши інформацію у вузлах про похідні вищого порядку, також однозначно побудувати відповідні колоканти. Так, якщо, далі, у вузлах задано  $f_j'''$ , то колоканту  $H_{4n+3}(x; f; f''; f''')$  будуємо у вигляді

$$H_{4n+3}(x; f; f''; f''') = H_{3n+2}(x; f; f'') + \omega^3(x)L_n(x; \psi).$$

За побудовою маємо рівності

$$H_{4n+3}(x_j; f; f''; f''') = H_{3n+2}(x_j; f; f'') = f_j,$$

$$H'_{4n+3}(x_j; f; f''; f''') = H'_{3n+2}(x_j; f; f'') = L'_n(x_j; f),$$

$$H''_{4n+3}(x_j; f; f''; f''') = H''_{3n+2}(x_j; f; f'') = f_j'',$$

а з умов колокації

$$H'''_{4n+3}(x_j; f; f''; f''') = f_j'''$$

для невідомої функції  $\psi$  дістаємо рівності

$$\psi_j = (f_j''' - L'''_n(x_j; f)) / \omega'^3(x_j)3!.$$

Як бачимо, систематичне використання многочленів Лагранжа для невідомих функцій значно спрощує процес таких побудов. Зазначимо, що стандартній

метод встановлення вигляду залишкового члена (похибки методу) цих нестандартних колокант через неможливість використати теорему Ролля тут не працює.

#### **Список літератури**

1. Калайда О. Ф. Один простий алгоритм побудови многочленів Маркова — Ерміта // III Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика». Присвячена пам'яті академіка НАН України Івана Івановича Ляшка. Київ, 11—12 вересня 2009 р.: Матеріали конференції. — К., 2009. — С. 39.

## КОЛОКАНТИ З ПРОПУСКАМИ ЗА ЗНАЧЕННЯМИ ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ПОХІДНОЇ

О. Ф. Калайда

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна*  
aleksei\_kalaida@comcast.net

Е посібниках з чисельних методів описано методи побудови колокант функцій з кратними вузлами (колокант без пропусків в таблиці квантів інформації про функцію у вузлах) — так званих многочленів типу Маркова — Ерміта. Що ж до колокант з пропусками в згаданій таблиці, то вони можуть і не існувати (приклад наведено в [1]). Побудова таких колокант методом невизначених коефіцієнтів приводить до лінійної алгебричної системи, порядок якої дорівнює сумі усіх квантів інформації у вузлах. Тут наведено економнішу схему побудови згаданих колокант методом вичерпування за горизонталями [1] таблиці квантів інформації; в ній порядок алгебричної системи дорівнює лише кількості пропусків у згаданій таблиці. Цього вдалося досягти використанням многочленів Лагранжа. Для простоти викладу обмежимося випадком заданих у вузлах лише значень функції та її похідної.

Нехай у вузлах  $x_j, j = \overline{0, n}$ , задано значення  $f_j$  функції  $f$ , причому серед них вузли  $\hat{x}_i, i = \overline{1, n_1}$ , двократні, а у вузлах  $\check{x}_k, k = \overline{1, n_2}$  (бажано між вузлами  $x_j$ ) — лише значення  $\check{f}'_k$  похідної  $f'(x)$ . Будуємо шуканий многочлен типу Маркова — Ерміта  $H_m(x; f), m = n + n_1 + n_2$ , методом вичерпування у вигляді

$$H_m(x; f) = L_n(x, f) + \omega(x)L_p(x; \phi, \psi), p = n_1 + n_2 - 1, \omega(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n), \quad (1)$$

$$L_n(x; f) = \omega_0(x)f_0 + \dots + \omega_n(x)f_n, \omega_j(x) = \gamma(x) / \gamma(x_j), \gamma(x) = \prod_{\mu=0, \mu \neq j}^n (x - x_\mu),$$

$$L_p(x; \phi, \psi) = \sigma_1(x)\phi_1 + \dots + \sigma_{n_1}(x)\phi_{n_1} + \sigma_{n_1+1}(x)\psi_1 + \dots + \sigma_p(x)\psi_{n_2}$$

многочлени Лагранжа, відповідно,  $n$ -го та  $p$ -го порядку (останній з невідомими значеннями  $\phi_r, \psi_\nu$  функцій  $\phi, \psi$  у вузлах, відповідно,  $\hat{x}_i, \check{x}_k$ ; його базисні функції  $\sigma_s$  будуються за  $n_1 + n_2$  вузлами  $\hat{x}_i, \check{x}_k$  за тим же правилом, що й функції  $\omega_j$ ).

З рівності (1) слідує, що  $H_m(x_j) = f_j$ . З умов  $H'_m(\hat{x}_i; f) = \hat{f}'_i$  маємо рівності

$$\phi_i = (\hat{f}'_i - L'_n(\hat{x}_i; f)) / \omega'(\hat{x}_i), i = \overline{1, n_1},$$

а з умов  $H'_m(\check{x}_k; f) = \check{f}'_k$  — лінійну систему

$$\check{f}'_k - L'_n(\check{x}_k; f) = \omega'(\check{x}_k)L_p(\check{x}_k; \phi, \psi) + \omega(\check{x}_k)L'_p(\check{x}_k; \phi, \psi), k = \overline{1, n_2}$$

(зручно  $n_2 = 1, 2, 3$ ).

# ПОБУДОВА СИМЕТРИЧНИХ ДВОСТОРОННІХ РАЦІОНАЛЬНИХ КОЛОКАНТ ІЗ ДВОКРАТНИМИ ВУЗЛАМИ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
aleksei\_kalaida@comcast.net

За допомогою раціональної колоканти з параметрами [1]

$$R(x; f) = \frac{L_n(x; f, a)}{L_n(x; 1, a)} = \frac{a_0 f_0 \omega_0(x) + \sum_{j=1}^{n-1} a_j f_j \omega_j(x) + a_n f_n \omega_n(x)}{a_0 \omega_0(x) + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \omega_j(x) + a_n \omega_n(x)}, \quad (1)$$

$$\omega_j(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^n (x - x_k) / \prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k),$$

$$f_j = f(x_j), a = (a_0 \dots a_n), a_0 = 1 \vee a_n = 1$$

для функції  $f$  за  $n + 1$  простими вузлами колокації  $x_j$  ( $x_i < x_{i+1}$ ) за рахунок параметрів  $a_j$  значно простіше, ніж безпосередньо методом невизначених коефіцієнтів у вигляді дробово-раціональної функції (тоді система для невідомих коефіцієнтів буде квадратичною), будуються двосторонні «симетричні» раціональні колоканти з  $n$  двократними вузлами

$$x_j, j = 0, n - 1 \vee j = 1, n, \text{ (див. приклад).}$$

Для побудови таких двосторонніх колокант необхідно розв'язати системи

$$\hat{R}'(x_i; f) = f'_i, i = 1, n, a_0 = 1; \check{R}'(x_i; f) = f'(x_i), i = 0, n - 1, a_n = 1.$$

Ці системи після скорочення кожного з рівнянь на  $a_i$  лінійні:

$$\sum_{j=1}^n (\omega'_j(x_i)(a_j f_j - a_i f_i) - a_i f'_i) = (f_i - f_0) \omega'_0(x_i); \quad (2)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\omega'_j(x_i)(a_j f_j - a_i f_i) - a_i f'_i) = (f_i - f_n) \omega'_n(x_i). \quad (3)$$

При двох вузлах  $x_j$  розв'язок цих систем подається у простому явному вигляді. Так, при вузлах  $x_{i-1}, x_i$  з (2), (3), відповідно, маємо

$$(h_i = x_i - x_{i-1}, \Delta f_i = f_i - f_{i-1}):$$

$$\hat{R}(x) = \frac{h_i(x_i - x)f_{i-1}f'_i + (x - x_{i-1})f_i\Delta f_i}{h_i(x_i - x)f'_i + (x - x_{i-1})\Delta f_i},$$

$$\check{R}(x) = \frac{(x_i - x)f_{i-1}\Delta f_i + h_i(x - x_{i-1})f_i f'_{i-1}}{(x_i - x)\Delta f_i + h_i(x - x_{i-1})f'_{i-1}}.$$

Приклад. При

$$f(x) = \exp(x), x_0 = 0, x_1 = 0.2, x = 0.1 \quad (r(x) = f(x) - R(x))$$

$$\hat{r}(x) = 9.1985 \cdot 10^{-5}, \check{r}(x) = -9.1993 \cdot 10^{-5},$$

$$r_c(x) = f(x) - (\hat{R}(x) + \check{R}(x)) / 2 = -4 \cdot 10^{-9}.$$

За допомогою ж лінійної інтерполяції маємо лише

$$r_l = f(x) - L_1(x) = -0.0055.$$

### Список літератури

1. Калайда О. Ф. Чисельні методи. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2000. — 250 с.

# ПРО ПОБУДОВУ ЗАГАЛЬНИХ РАЦІОНАЛЬНИХ КОЛОКАНТ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei\_kalaida@comcast.net

Безпосередньо будувати раціональні колоканти

$$R_{m,n}(x; f) = P_m(x) / P_n(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m) / (1 + b_1x + \dots + b_nx^n) \quad (1)$$

функції  $f$  за вузлами  $x_j, j = \overline{0, m+n}$ , у загальному випадку, тобто при  $m \neq n$  (так звані *повні* колоканти) за винятком випадку  $m = n$  (так званих діагональних раціональних колокант — при  $m$  парному та  $m - n = 1$  при  $m$  непарному), коли результат явно подається у вигляді ланцюгового дроби через обернені розділені різниці функції  $f$ , досить складно, оскільки вимагає розв'язування алгебричних систем (лінійних лише у випадку усіх простих вузлів). Тут викладено побудову колокант виду (1) при довільних  $m, n$  з використанням многочленів типу Лагранжа, що в разі спрощує процес побудови.

Зауважимо, що побудова згаданих так званих *неповних* діагональних раціональних колокант виду (1) будується за допомогою многочлена типу Лагранжа безпосередньо без додаткових алгебричних систем. Дійсно, при довільному многочлені  $P_n(x)$  (і, взагалі, довільній функції  $x \mapsto g(x)$ ) раціональна колоканта

$$R(x; f) = L_m(x; fP_n) / P_n(x) \Rightarrow R(x_j; f) = f(x_j), j = \overline{0, m},$$

являється такою неповною раціональною колокантою. За її допомогою можна апроксимувати функції  $f$  і з точками розриву (наприклад, полюсів).

Звернемо увагу, що  $1 / K(x; f)$  є колоканта для функції  $x \mapsto 1 / f(x)$  (це стосується і довільних колокант).

За неперетинними множинами простих вузлів  $x_j, j = \overline{0, m}$ , та  $z_k, k = \overline{0, n}$ , та многочленами типу Лагранжа  $L_m(x; \phi; x_0, \dots, x_m)$ ,  $L_n(x; \psi; z_0, \dots, z_n)$  побудуємо раціональну колоканту виду (1)

$$R(x; f) = L_m(x; fL_n; x_0, \dots, x_m) / L_n(x; L_m / f; z_0, \dots, z_n), x_i \neq z_k. \quad (2)$$

Легко переконатись, що вона справджує умови колокації в обох системах вузлів, тобто  $R(x_i; f) = f(x_i), R(z_k; f) = f(z_k)$ . Крім того, колокантою виду (2) є

$$R(x; f) = \omega_{n+1}(x; z_0, \dots, z_n) / L_m(x; 1 / f; x_0, \dots, x_m) + \omega_{m+1}(x; x_0, \dots, x_m) / L_n(x; 1 / f; z_0, \dots, z_n),$$

де  $x \mapsto \omega_{m+1}, \omega_{n+1}$  — функції (многочлени) з нулями, відповідно,  $x_j, z_k$ .

Аналогічно можна побудувати такі колоканти і з довільною кількістю доданків.

# КВАДРАТУРНО-МАТРИЧНІ МЕТОДИ ДЛЯ СЛАБОСИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРА

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
aleksei\_kalaida@comcast.net

Принципові нові прості апроксиманти функцій, похідних та інтегралів і їх застосування для побудови двосторонніх методів розв'язування різних рівнянь (інтегральних, диференціальних, інтегро-диференціальних) розроблено в [1]. Клас так званих симетричних двосторонніх методів винайдено і викладено стосовно різних задач і, зокрема, інтегральних рівнянь Вольтерра в [2].

Тут за схемою [2] побудуємо квадратурний метод високого порядку розв'язування слабосингулярних рівняння типу Вольтерра другого роду

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s, \phi(s))(x-s)^{-\alpha} ds, \quad x \in [a, b], \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

Для цього функцію  $K$  в (1) апроксимуємо многочленом Лагранжа з  $(n+1)$  вузлами  $s_j \in [a, \bar{s}]$ ,  $j = 0, n$ ,  $\bar{s} \leq b$ ,

$$L_n(s; K) = \Omega(s)Y(K(x, \phi)) = (\omega_0(s) \dots \omega_n(s))(K(x, s_0, \phi_0) \dots K(x, s_n, \phi_n))^T, \quad (2)$$

з матрицею  $\Omega(s)$  базисних функцій  $\omega_j(s)$ , поданою у вигляді многочлена Тейлора (з центром у точці  $c \in [a, s_n]$ ;  $E$  – одинична матриця)

$$\Omega(s) = \Omega(c)(E + (s-c)\theta + \dots + (s-c)^n \theta^n / n!), \quad (3)$$

де  $\theta$  – матриця чисельного диференціювання [1]. Підставивши (2) з врахуванням (3) в (1) та зінтегрувавши на відрізку  $[a, x]$ , дістанемо наближену рівність

$$\phi(x) = f(x) + \sum_{j=0}^n \kappa_j(x, \alpha) K(x, s_j, \phi_j)$$

(позначення в ній зберігаємо). Зафіксувавши тут змінну  $x$  в точках  $s_i$ ,  $i = 0, n$ , дістанемо систему скінченних (алгебричних) рівнянь (відносно невідомих  $\phi_j$ )

$$\phi_i = f_i + \sum_{j=0}^n \kappa_j(s_i, \alpha) K(s_i, s_j, \phi_j), \quad i = 0, n. \quad (4)$$

При достатньо малому відрізку  $[a, \bar{s}]$  система (4) розв'язується методом простих ітерацій [2]. Далі процес можна рекурентно продовжити.

Для рівнянь виду (1) першого роду схема методу аналогічна (в системі (4) в ліву частину, замість  $\phi_i$ , переносимо з правої  $f_i$ ).

### **Список літератури**

1. Калайда О. Ф. Чисельні методи. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2000. — 250 с.
2. Калайда О. Ф. Двосторонні методи типу Крилова розв'язування рівнянь Вольтерра другого роду // XIII Міжнародна Наукова Конференція імені академіка М. Кравчука. Матеріали Конференції. Т. II. — К.: 2010. — С. 134.

# ЗАГАЛЬНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ КВАДРАТУРНИХ ФОРМУЛ ПІДВИЩЕНОЇ ТОЧНОСТІ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
aleksei\_kalaida@comcast.net

Загальні квадратурні формули підвищеної точності (формули з кратними вузлами) типу формул Гаусса за традиційною схемою побудовано в [1]. Тут з іншої точки зору розглянуто загальний підхід до побудови таких формул.

Такі формули побудуємо шляхом інтегрування многочленів Маркова — Ерміта для функції  $f$  за непарнократними вузлами  $x_j \in (a, b)$ ,  $j = 0, n$ , виду

$$H_m(x; f; \dots; f^{(2k+1)}) = H_{m-n-1}(x; f; \dots; f^{(2k)}) + \omega^{2k+1}(x)L_n(x; \phi),$$

$$m = (2k + 1)(n + 1) - 1,$$

$$\phi_j = (f_j^{(2k+1)} - H_{m-n-1}^{(2k+1)}(x_j; f; \dots; f^{(2k)})) / \omega'^{2k+2}(x_j)(2k + 1)!$$

Після інтегрування цього многочлена дістаємо квадратурну формулу

$$J(f) = \sum_{j=0}^n (\kappa_{0,j} f_j + \dots + \kappa_{2k,j} f_j^{(2k)}) + \sum_{j=0}^n \phi_j \int_a^b \rho(x) \omega^{2k+1}(x) \omega_j(x) dx. \quad (1)$$

Для одержання звідси формул підвищеного порядку (формул без усіх або частини значень  $\phi_j$ ) добираємо вузли так, щоб остання сума була рівною нулеві. Це й будуть узагальнені формули Гаусса (при  $k = 0$  — власне формули Гаусса). Отже, для цього вузли  $x_j$  слід добирати такими, щоб виконувалась умова

$$\sum_{j=0}^n \phi_j \int_a^b \rho(x) \omega^{2k+1}(x) \omega_j(x) dx = 0, \quad (2)$$

(або рівність нулеві певних лінійних комбінацій з доданків цієї суми), а з огляду на те, що вона мусить виконуватись для довільної функції  $f$ , мусять виконуватись умови

$$\int_a^b \rho(x) \omega^{2k+1}(x) \omega_j(x) dx = 0, \quad j = \overline{0, l}, \quad l \leq n$$

( $l < n$ , якщо частина вузлів  $x_j$  — як, наприклад, в формулах Лобатто, — задані; у цьому випадку відповідні доданки в сумі (2), а отже, і в квадратурній формулі (1) залишаються), тобто умови ортогональності (з вагою  $\rho(x)$ ) функції  $\omega^{2k+1}$  з функціями  $\omega_j$ . Ці умови, очевидно, являються системою рівнянь для шуканих вільних (не закріплених) вузлів  $x_j$ .

На завершення відмітимо, що дослідження залишкового члена формул вигляду (1) та ілюстрацію однієї з них на прикладі наведено в [1].

### **Список літератури**

1. Калайда О. Ф. Побудова узагальнених формул Гаусса // Вісник Київського ун-ту. Серія: Фізико-математичні науки. — 2004. — Вип. 2. — С. 107—110.

## КЛЮЧОВІ ЗАДАЧІ В АЛГЕБРИ ТА ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ

Н. В. Калашнікова

Дніпропетровський національний університет, Дніпропетровськ, Україна  
natalja\_kn@ukr.net

Проблема постановки задач у математичних курсах є однією з найбільш важливих проблем у викладанні. Уміння вирішувати математичні задачі є яскравою характеристикою стану математичної освіти. Для доброго засвоєння теоретичного матеріалу, а також для набуття навиків розв'язування задач можна використовувати ключові задачі. Розглянемо це на прикладах ключових задач з алгебри та теорії чисел

**Ключова задача 1.** Нехай  $G$  — група,  $g \in G$  і  $|g| = n$ . Довести, що для будь-якого натурального  $k$   $|g^k| = \frac{n}{(n,k)}$ .

**Розв'язання.** Оскільки  $(n,k)$  — дільник числа  $k$ , то  $\frac{k}{(n,k)} = m$ , де  $m$  — деяке ціле число. Оскільки  $(g^k)^{\frac{n}{(n,k)}} = g^{\frac{nk}{(n,k)}} = (g^n)^{\frac{k}{(n,k)}} = e^m = e$ , то  $|g^k|$  ділить число  $\frac{n}{(n,k)}$ . Припустимо, що  $|g^k| = p < \frac{n}{(n,k)}$ . Оскільки  $g^k$  — елемент циклічної групи  $\langle g \rangle$ , то  $|g^k|$  — дільник числа  $n$ , тобто  $p = \frac{n}{r}$  для деякого цілого  $r > (n,k)$ . Тоді  $e = (g^k)^p = (g^k)^{\frac{n}{r}} = g^{\frac{kn}{r}}$ . Звідси виходить, що  $g^{\frac{kn}{r}} = e$ , тобто  $\frac{kn}{r}$  ділиться на число  $n$ . Це означає, що існує таке ціле число  $s$ , що  $\frac{kn}{r} = sn$ , тобто  $\frac{k}{r} = s$ . Оскільки  $r > (n,k)$  і  $r$  ділить  $n$ , то число  $\frac{k}{r}$  не є ціле, а  $s$  — ціле. Одержана суперечність показує, що не існує такого числа  $p$ , меншого за  $\frac{n}{(n,k)}$ , що  $(g^k)^p = e$ . Це означає, що  $|g^k| = \frac{n}{(n,k)}$ .

За допомогою ключової задачі 1 можна розв'язати, наприклад, такі задачі.

**Задача 1.1.** Нехай  $G = \langle g \rangle$  — циклічна група порядку  $n$ . Довести, що елемент  $g^k$  тоді й тільки тоді є породжувальний елемент групи  $G$ , коли числа  $k$  і  $n$  взаємно прості.

**Розв'язання.**  $\langle g^k \rangle = G \Leftrightarrow |g^k| = n \Leftrightarrow \frac{n}{(n,k)} = n \Leftrightarrow (n,k) = 1$ .

**Задача 1.2.** Довести, що добуток двох породжувальних елементів циклічної групи парного порядку не є її породжувальний елемент.

**Розв'язання.** Нехай  $G = \langle g \rangle$  — циклічна група парного порядку  $n$ . Якщо елемент  $g^k$  є породжувальний елемент групи  $G$ , то числа  $k$  і  $n$  взаємно прості, а отже, число  $k$  — непарне. В тому випадку, коли  $g^k$  і  $g^m$  — породжувальні елементи групи  $G$ , числа  $k$  і  $m$  — непарні, а значить, число  $k + m$  — парне, тобто не є взаємно просте з парним числом  $n$ . Звідси виходить, що  $g^{k+m}$  не є породжувальний елемент групи  $G$ .

**Задача 1.3.** Знайти кількість підгруп порядку 5 у циклічній групі порядку 150.

**Розв'язання.** Нехай  $G = \langle g \rangle$  — циклічна група парного порядку 150. Всі неодиначні елементи підгрупи порядку 5 мають порядок 5. Знайдемо елементи групи  $G$  порядку 5. Якщо  $|g^k| = 5$ , то  $5 = \frac{150}{(150, k)}$ , а отже,  $(150, k) = 30$ . Ця рівність вірна, коли  $k = 30, 60, 90, 120$ . Елементи  $g^{30}, g^{60}, g^{90}, g^{120}$  належать підгрупі  $\langle g^{30} \rangle$ , тобто циклічна група порядку 150 має єдину підгрупу порядку 5.

Також, використовуючи ключову задачу 1, можна довести більш сильне твердження: Нехай  $G = \langle g \rangle$  — циклічна група порядку  $n$ . Тоді для кожного дільника  $d$  числа  $n$  в  $G$  існує єдина підгрупа порядку  $d$ .

**Задача 1.4.** Знаючи, що 2 є первісний корінь за модулем 19, знайти решту первісних коренів за цим модулем.

**Розв'язання.** Оскільки  $\varphi(19) = 18 = 2 \cdot 3^2$ , то множина

$$\{2^k \mid (k, 18) = 1, 1 \leq k < 18\} = \{2, 2^5, 2^7, 2^{11}, 2^{13}, 2^{17}\}$$

складається з усіх первісних коренів за модулем 19.

$2^5 \equiv 13 \pmod{19}$ ,  $2^7 \equiv 14 \pmod{19}$ ,  $2^{11} \equiv 15 \pmod{19}$ ,  $2^{13} \equiv 3 \pmod{19}$ ,  $2^{17} \equiv 10 \pmod{19}$ . Ми отримали, що окрім числа 2, первісними коренями за модулем 19 є числа 3, 10, 13, 14, 15.

**Задача 1.5.** Довести, що якщо  $n$  — парне число, то циклічна група порядку  $n$  має єдиний елемент порядку 2 і добуток всіх елементів цієї групи дорівнює цьому елементу.

**Розв'язання.** Нехай  $G = \langle g \rangle$  — циклічна група парного порядку  $n$ . Якщо

$|g^k| = 2$ , то  $2 = \frac{n}{(n, k)} = \frac{2 \cdot \frac{n}{2}}{(n, k)}$ , а отже,  $(n, k) = \frac{n}{2}$ . Це можливо лише, коли

$k = \frac{n}{2}$ . Знайдемо добуток усіх елементів групи  $G$ .

$$g^0 g^1 \dots g^{n-1} = g^{\frac{n(n-1)}{2}} = (g^2)^{\frac{n}{2}} = (g^n)^{\frac{n}{2}} \cdot (g^2)^{-1} = e^{\frac{n}{2}} \cdot g^{-\frac{n}{2}} = g^{\frac{n}{2}}.$$

**Задача 1.6.** Нехай  $m, k$  — взаємно прості натуральні числа. Довести, що абелева група  $G$  порядку  $mk$  циклічна тоді й тільки тоді, коли  $G$  має елемент порядку  $m$  і елемент порядку  $k$ .

**Ключова задача 2.** Довести, що спряжені елементи групи мають однакові порядки.

**Розв'язання.** Нехай  $a = b^g$ . Тоді

$$a^m = (g^{-1}bg)^m = \underbrace{((g^{-1}bg)(g^{-1}bg)\dots(g^{-1}bg))}_m = g^{-1}b^m g.$$

Звідси випливає, що коли  $a$  і  $b$  — спряжені елементи групи  $G$ , то  $a^m = e$  тоді й тільки тоді, коли  $b^m = e$  за будь-якого  $m \in \mathbb{N}$ .

Далі наведені приклади задач, які можна розв'язати, використовуючи отриманий результат.

**Задача 2.1.** З'ясувати, чи спряжені елементи  $\pi = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  і  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$  у групі  $S_4$ .

**Розв'язання.** Елементи  $\pi$  і  $\sigma$  не спряжені у групі  $S_4$ , оскільки  $|\pi| = |\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}| = 3$ , а  $|\sigma| = |\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}| = 2$ .

**Задача 2.2.** Нехай  $G$  — скінченна група,  $a, b \in G$  і  $a^{-1}ba = b^2$ . Довести, що  $|b|$  є непарне число.

**Розв'язання.** Оскільки елементи  $b$  і  $b^2$  спряжені, то  $|b| = |b^2|$ . Якщо припустити, що  $|b| = n$  і число  $n$  — парне, то одержимо, що  $|b^2| = \frac{n}{(n, 2)} = \frac{n}{2} \neq n$ .

**Задача 2.3.** Нехай у групі  $G$  існує, причому тільки один елемент  $a$  такий, що  $a \neq e$ ,  $a^2 = e$ . Довести, що  $a \in C(G)$ .

**Розв'язання.** Із умови задачі випливає, що  $|a| = 2$  і  $a$  — єдиний елемент групи  $G$  порядку 2. Оскільки спряжені елементи мають однакові порядки, то елемент  $a$  спряжений лише сам із собою. Це означає, що  $g^{-1}ag = a$  для всіх  $g \in G$ , тобто  $ag = ga$  за будь-якого  $g \in G$ .

**Задача 2.4.** Нехай  $p$  — просте непарне число і  $a$  — первісний корінь за модулем  $p$ . Довести, що  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv p-1 \pmod{p}$ .

**Розв'язання.** Оскільки  $p$  — просте число, то  $Z_p$  є поле. З того, що  $a$  є первісний корінь за модулем  $p$  випливає, що порядок елемента  $\bar{a}$  в групі  $U(Z_p)$  дорівнює  $p-1$ , а отже,  $\bar{a}^{p-1} \neq \bar{1}$ . Оскільки  $(\bar{a}^{p-1})^2 = (\bar{a})^{p-1} = \bar{1}$ , то  $|\bar{a}^{p-1}| = 2$ . Мультиплікативна група поля  $Z_p$  є циклічна група парного порядку, а отже, вона має єдиний елемент порядку 2. Очевидно, це є елемент  $\bar{p-1}$ , тобто  $\bar{a}^{p-1} = \bar{p-1}$ .

**Ключова задача 3.** Довести, що в полі немає дільників нуля.

**Розв'язання.** Нехай  $F$  — поле,  $a$  і  $b$  — ненульові елементи із  $F$ . Припустимо, що  $ab = 0$ . Оскільки всякий ненульовий елемент поля має обернений, то існує  $a^{-1}$ . Помноживши обидві частини рівності  $ab = 0$  на  $a^{-1}$ , одержимо, що  $b = 0$ .

Використовуючи ключову задачу 3, можна розв'язати нижченаведені задачі.

**Задача 3.1.** Чи є полем фактор-кільце  $Z_{19}[x] / \langle x^2 + \bar{15} \rangle$ ?

**Розв'язання.** Позначимо  $I = \langle x^2 + \bar{15} \rangle$ . Тоді  $(x + \bar{2}) + I$  і  $(x + \bar{17}) + I$  — ненульові елементи фактор-кільця  $Z_{19}[x] / \langle x^2 + \bar{15} \rangle$ . Знайдемо їх добуток:

$$\begin{aligned} ((x + \bar{2}) + I) \cdot ((x + \bar{17}) + I) &= (x + \bar{2})(x + \bar{17}) + I = (x^2 + \bar{34}x + \bar{34}) + I = \\ &= (x^2 + \bar{15}) + I = I. \end{aligned}$$

Отже, фактор-кільце  $Z_{19}[x] / \langle x^2 + \bar{15} \rangle$  має дільники нуля, а, значить, не є поле.

**Задача 3.2.** Довести, що характеристика поля  $K$  або дорівнює 0, або є просте число.

**Розв'язання.** Припустимо, що  $\text{char } K = m \neq 0$  і число  $m$  складене. Тоді  $m$  можна подати у вигляді  $m = n \cdot k$ , де  $1 < n, k < m$ . Звідси маємо  $0 = m \cdot 1 = (nk) \cdot 1 = (n \cdot 1)(k \cdot 1)$ . Оскільки в полі немає дільників нуля, то або  $n \cdot 1 = 0$ , або  $k \cdot 1 = 0$ , що суперечить тому, що  $m$  — найменше число з такою властивістю.

**Задача 3.3.**  $F$  — поле із 8 елементів. Знайти всі розв'язки рівняння  $x^2 + 2x = 0$  в полі  $F$ .

**Розв'язання.** Запишемо подане рівняння у вигляді  $x(x + 2) = 0$ . Оскільки в полі немає дільників нуля, то добуток  $x(x + 2)$  дорівнює нулю тільки, якщо

$x = 0$  і  $x = -2 \cdot 1_F = 2 \cdot 1_F$  (оскільки  $\text{char } F = 2$ ), тобто рівняння має два розв'язки в полі  $F$ .

**Зауваження.** Теж саме рівняння в кільці  $Z_8$ , яке складається з 8 елементів, але не є поле, має 4 розв'язки —  $\bar{0}$ ,  $\bar{2}$ ,  $\bar{4}$ ,  $\bar{6}$ .

#### Список літератури

1. Завало С. Т. Алгебра і теорія чисел. в 2 ч. / С. Т. Завало, В. Н. Костарчук, Б. И. Хацет. — К.: Вища школа» 1976. — 383 с.

# ОСТАТОЧНІСТЬ ОЦІНОК ЩОДО ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ЗА $S(p, \Lambda)$ -СИСТЕМАМИ

С. О. Кирилов

Одеський національний морський університет, Одеса, Україна

kirillovsergei@yandex.ru

Поняття  $S_p$ -системи було введено С. Б. Стечкиним і виникло як узагальнення того факту, що аналогічними властивостями володіють лакуарні підсистеми тригонометричної системи функцій. Саме С. Б. Стечкиним були одержані необхідні і достатні коефіцієнтні умови для збіжності майже всюди рядів за такими системами. Подальшому розвитку цих результатів присвячені роботи [1, 2]. Поняття  $S(p, \Lambda)$ -систем виникло як природне узагальнення поняття  $S_p$ -системи. У роботі [3] наведені коефіцієнтні умови, які зумовлюють збіжність майже всюди рядів за  $S(p, \Lambda)$ -системами, проте питання про остаточноість цього результату залишилось відкритим. Наша робота містить теорему, яка розв'язує питання про остаточноість зазначених коефіцієнтних умов.

Нехай  $\Lambda$  — неспадна послідовність додатних чисел.

**Означення.** Послідовність  $\Lambda$  називається опуклою догори, якщо при всіх  $n = 1, 2, \dots$

$$\Delta^2 \lambda_n = \lambda_{n+2} - 2\lambda_{n+1} + \lambda_n \leq 0.$$

Остання нерівність означає, що ламана з вершинами в точках  $(k, \lambda_k), k = 1, 2, \dots$  являє собою графік опуклої догори функції.

Легко бачити, що в цьому випадку при всіх  $k = 1, 2, \dots$

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \lambda_2 - \lambda_1 \equiv C,$$

а значить,

$$\lambda_k = O(k). \quad (1)$$

Головним результатом роботи є наступна теорема.

**Теорема 1.** Нехай  $\Lambda = \{\lambda_k\}$  — неспадна, опукла догори послідовність додатних чисел. Існує така ортонормована система на відрізку  $[0, 1]$   $\{\psi_n(x)\}$ , яка є  $S(p, \Lambda)$  — системою ( $2 < p < \infty$ ), і при будь-якій послідовності  $\{\omega_n\}$  з

$$\omega_n = \bar{o}(\log^2(e + \lambda_n)), \quad (2)$$

знайдеться така послідовність  $\{a_n\}$ , що  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n < \infty$ , але ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$  є розбіжним на множині додатної міри.

**Доведення.** Визначимо послідовність  $\{\nu_k\}$  наступним чином. Нехай  $\nu_k = \min \{n \in \mathbb{N} : \lambda_n^2 \geq k\}$ . При цьому

$$\lambda_{\nu_k}^2 = \lambda_{\nu_k-1}^2 + (\lambda_{\nu_k}^2 - \lambda_{\nu_k-1}^2) \leq k + C .$$

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що  $\nu_1 = 1$  і при всіх  $k$  :  
 $\lambda_{\nu_k}^2 \leq k + 1$  .

Визначимо тепер нашу систему  $\{\psi_n(x)\}$  таким чином. Покладемо

$$\psi_{\nu_k}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\varphi_k(2x), & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ 0, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) , \end{cases}$$

та якщо  $n \neq \nu_k$  при всіх  $k = 1, 2, \dots$  , то

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \sqrt{2}r_n(2x-1), & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \end{cases}$$

де  $r_n(x) = \text{sign} \sin 2^n \pi x$  — функції Радемахера, а послідовність  $\{\varphi_n(x)\}$  побудована в [4, с. 299].

Очевидно, що  $\{\psi_n(x)\}$  є ортогональною системою. Але, крім цього,

$$\int_0^1 |\psi_{\nu_k}(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2|\varphi_k(2x)|^2 dx = \int_0^1 |\varphi_k(x)|^2 dx = 1 ,$$

і при  $n \neq \nu_k$  при всіх  $k = 1, 2, \dots$  ,

$$\int_0^1 |\psi_n(x)|^2 dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 2|r_n(2x-1)|^2 dx = \int_0^1 |r_n(x)|^2 dx = 1 ,$$

тобто система  $\{\psi_n(x)\}$  ортонормована на  $[0, 1]$ .

Покажемо тепер, що  $\{\psi_n(x)\}$  —  $S(p, \Lambda)$ -система. Для цього розглянемо

поліном за цією системою  $P_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n \psi_n(x)$  .

Маємо

$$P_N(x) = \sum_{k:\nu_k \leq N} a_{\nu_k} \psi_{\nu_k}(x) + \sum_{\substack{n \neq \nu_k \\ n \leq N}} a_n \psi_n(x) \equiv P_N^{(1)}(x) + P_N^{(2)}(x) .$$

Далі

$$\begin{aligned}
\|P_N^{(2)}\|_p &= \left\| \sum_{\substack{n \neq \nu_k \\ n \leq N}} a_n \psi_n(x) \right\|_p = \left( \int_0^1 \left| \sum_{\substack{n \neq \nu_k \\ n \leq N}} a_n \psi_n(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \\
&= \left( \int_{1/2}^1 \left| \sum_{\substack{n \neq \nu_k \\ n \leq N}} a_n r_n(2x-1) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq c_p \left( \int_0^1 \left| \sum_{\substack{n \neq \nu_k \\ n \leq N}} a_n r_n(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq c_p \left( \sum_{\substack{n \neq \nu_k \\ n \leq N}} a_n^2 \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

тому, що система Радемахера є  $S_p$  — системою ([5], с.153).

Далі

$$\begin{aligned}
\left( P_N^{(1)} \right)_p &= \left( \int_0^1 \left| \sum_{k: \nu_k \leq N} a_{\nu_k} \psi_{\nu_k}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \\
&= \left( \int_0^{1/2} \left| \sum_{k: \nu_k \leq N} a_{\nu_k} \varphi_k(2x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq c_p \left( \int_0^1 \left| \sum_{k: \nu_k \leq N} a_{\nu_k} \varphi_k(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq (3) \\
&\leq c_p \left( \int_0^1 \left( \sum_{k: \nu_k \leq N} a_{\nu_k}^2 \right)^{p/2} \left( \sum_{k: \nu_k \leq N} |\varphi_k(x)|^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p} = c_p \left( \sum_{k: \nu_k \leq N} 1 \right)^{1/2} \left( \sum_{k: \nu_k \leq N} a_{\nu_k}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Із означення  $\{\nu_k\}$  легко зрозуміти, що  $\sum_{k: \nu_k \leq N} 1 \leq \lambda_N^2$ , значить

$$\|P_N^{(1)}\|_p \leq c_p \lambda_N \left( \sum_{k: \nu_k \leq N} a_{\nu_k}^2 \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Об'єднуючи оцінки (3) і (4), одержуємо

$$\|P_N\|_p \leq \|P_N^{(1)}\|_p + \|P_N^{(2)}\|_p \leq c_p \lambda_N \left( \sum_{n=1}^N a_n^2 \right)^{1/2}.$$

Таким чином, показано, що  $\{\psi_n(x)\}$  —  $S(p, \Lambda)$ -система.

Нехай тепер  $\{\omega_n\}$  задовольняє умову (2). Покладемо

$$\bar{\omega}_n = \omega_{\nu_n} = \bar{o} \left( \log^2(e + \lambda_{\nu_n}^2) \right) = \bar{o}(\log^2 n).$$

Тоді, спираючись на теорему Б. С. Кашина [4, с. 299], можна стверджувати, що знайдеться послідовність  $\{\bar{a}_n\}$  така, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n^2 \bar{\omega}_n < \infty, \quad (5)$$

але ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \varphi_n(x) \quad (6)$$

розбігається на множині додатної міри. Нарешті нехай

$$a_{\nu_k} = \bar{a}_k \quad \text{і} \quad a_n = 0 \quad \text{при} \quad n \neq \nu_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тоді ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$  розбігається на множині додатної міри внаслідок

розбіжності ряду (6), хоча і  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n < \infty$  згідно з (5).

#### Список літератури

1. Гапошкин В. Ф. Лакунарные ряды и независимые функции // Усп. мат. наук. — 1966. — Т. 21. — № 6. — С. 3—82.
2. Балыкбаев Т. О. Об одном классе систем сходимости // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-матем. — 1986. — № 3. — С. 6—9.
3. Кириллов С. А. О множителях Вейля для некоторых классов ортонормированных систем // Изв. вузов. Матем. — 1994. — № 7. — С. 29—36.
4. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. — М: Наука, 1984. — 495 с.
5. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. — М: Физматгиз, 1958. — 507 с.

# СЛАБЫЕ НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. Е. Лещёв, Л. И. Минченко

Белорусский государственный университет информатики  
и радиоэлектроники, Минск, Беларусь  
[leschov@bsuir.by](mailto:leschov@bsuir.by), [leonidm@relsoft.by](mailto:leonidm@relsoft.by)

Необходимые условия оптимальности второго порядка играют важную роль в теории оптимизации. Это объясняется тем, что большинство используемых на практике численных алгоритмов сводится к нахождению стационарных точек, удовлетворяющих условиям оптимальности первого порядка. В то же время многие задачи оптимизации, особенно задачи высокой размерности, имеют достаточно большое число стационарных точек. В связи с этим возникает проблема усиления необходимых условий за счет привлечения необходимых условий второго порядка для удаления неоптимальных стационарных точек.

В данном сообщении рассматриваются так называемые слабые необходимые условия оптимальности второго порядка, обобщаются известные ранее и доказываются новые результаты.

Пусть  $f(y), h_i(y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  — дважды непрерывно дифференцируемые функции из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}$ . Рассмотрим задачу (*NLP*):

$$f(y) \rightarrow \min, \quad y \in C,$$

на непустом множестве допустимых точек

$$C = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \mid h_i(y) \leq 0, i \in I, h_i(y) = 0, i \in I_0 \right\},$$

где  $I = \{1, \dots, s\}$ ,  $I_0 = \{s + 1, \dots, p\}$ .

Для задачи (*NLP*) введем функцию Лагранжа

$$L(y, \lambda) = f(y) + \langle \lambda, h(y) \rangle,$$

где  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ,  $h = (h_1, \dots, h_p)$  и множество множителей Лагранжа в точке  $y$

$$\Lambda(y) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^p \mid \nabla_y L(y, \lambda) = 0, \lambda_i \geq 0 \text{ и } \lambda_i h_i(y) = 0, i \in I \right\}.$$

Обозначим через  $I(y) = \{i \in I \mid h_i(y) = 0\}$  множество индексов активных в точке  $y \in C$  ограничений типа неравенства и введем конусы критических направлений:

$$D_C(y^0) = \{\bar{y} \in \Gamma_C(y^0) \mid \langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle \leq 0\}$$

$$S_C(y^0) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, i \in I_0 \cup I(y^0)\}.$$

Для задачи (*NLP*) принято выделять три основных типа необходимых условий оптимальности второго порядка (см. [1, 2]).

**Определение 1.** Пусть  $y^0 \in C$  и  $\Lambda(y^0) \neq \emptyset$ .

1) Будем говорить, что в точке  $y^0$  выполняется необходимое условие оптимальности второго порядка (refined second-order necessary optimality condition) *RSONC*, если для любого вектора  $\bar{y} \in D_C(y^0)$  найдется вектор  $\lambda \in \Lambda(y^0)$  такой, что  $\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle \geq 0$ .

2) Будем говорить, что в точке  $y^0$  выполняется слабое необходимое условие оптимальности второго порядка (weak second-order necessary optimality condition) *WSONC*, если существует множитель  $\lambda \in \Lambda(y^0)$ , при котором неравенство  $\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle \geq 0$  выполняется для всех  $\bar{y} \in S_C(y^0)$ .

3) Будем говорить, что в точке  $y^0$  выполняется сильное необходимое условие оптимальности второго порядка (strong second-order necessary optimality condition) *SSONC*, если при любом векторе  $\lambda \in \Lambda(y^0)$  неравенство  $\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle \geq 0$  выполняется для всех  $\bar{y} \in D_C(y^0)$ .

В контексте необходимых условий оптимальности второго порядка в качестве самого распространенного условия регулярности, гарантирующего их справедливость, выступает условие линейной независимости градиентов  $\nabla h_i(y^0)$ ,  $i \in I(y^0) \cup I_0$ . Поскольку при его выполнении множество множителей Лагранжа состоит только из одного вектора  $\lambda$ , условия *SSONC*, *RSONC* и *WSONC* в этом случае совпадают и ситуация с необходимыми условиями второго порядка весьма упрощается. Большинство монографий, посвященных задачам нелинейного программирования, ограничиваются данной ситуацией. С другой стороны, привлечение более слабых условий регулярности, в частности условия Мангасаряна — Фромовица [4], приводит к неоднозначной ситуации.

Несмотря на то, что слабые условия оптимальности уступают в эффективности другим типам необходимых условий оптимальности второго порядка, большинство практических алгоритмов, использующих необходимые условия оптимальности второго порядка, имеют дело именно со слабыми условиями *WSONC* [1—3]. В то же время известно [1], что справедливость слабых необходимых условий оптимальности второго порядка не гарантируется традиционным условием регулярности Мангасаряна — Фромовица без дополнительных предположений. В работе [1] предложено одно из таких дополнительных условий, наличие которого вместе с условием регулярности Мангасаряна — Фромовица способно обеспечить справедливость слабых необходимых условий оптимальности второго порядка.

Следуя [1], будем говорить, что в точке выполняется слабое условие постоянного ранга (*WCR*), если

$$\text{rank} \left\{ \nabla h_i(y), i \in I_0 \cup I(y^0) \right\} = \text{const}$$

в некоторой окрестности точки  $y^0$ .

Из результатов [1] следует, что при совместном выполнении в оптимальной точке условия  $WCR$  и условия регулярности Мангасаряна-Фромоваца в данной точке справедливо слабое необходимое условие оптимальности второго порядка  $WSONC$ . В [2] получен более сильный результат, утверждающий, что в оптимальной точке  $y^0 \in C$  при выполнении условия  $WCR$  и условия  $\Lambda(y^0) \neq \emptyset$  справедливо  $WSONC$ .

Следующая теорема обобщает результаты [1, 2].

**Теорема 1.** Пусть в точке  $y^0 \in C$ , являющейся решением задачи NLP, выполнены условия  $WCR$  и  $\Lambda(y^0) \neq \emptyset$ . Тогда для любого множителя  $\lambda \in \Lambda(y^0)$  справедливо условие  $WSONC$ .

Следует также отметить, что отличные от  $WCR$  условия, обеспечивающие совместно с условием Мангасаряна — Фромоваца справедливость  $WSONC$ , были предложены в работе Вассари и Трад [5]. Условие Вассари и Трад имеет место в точке  $y^0$ , если в этой точке выполнено условие MFCQ и число линейно независимых векторов градиентов активных ограничений в этой точке не менее  $|I_0| + |I(y^0)| - 1$ , где  $|I|$  — число элементов конечного множества  $I$ .

$$\text{Пусть } I^\oplus(y^0) = \{i \in I(y^0) \mid \exists \lambda \in \Lambda(y^0) : \lambda_i > 0\} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(y^0)} I_\lambda^\oplus(y^0).$$

**Определение 2.** Пусть  $\Lambda(y^0) \neq \emptyset$  в точке  $y^0 \in C$ . Будем говорить, что в точке  $y^0 \in C$  выполнено условие критической регулярности (коротко CRC) если для всех точек  $y$  из некоторой окрестности точки  $y^0$  справедливо условие:

$$\text{rank} \left\{ \nabla h_i(y), i \in I_0 \cup I^\oplus(y^0) \right\} = \text{const}.$$

Отметим, что введенное условие критической регулярности всегда выполняется если выполнено условие регулярности постоянного ранга [6] или ослабленное условие регулярности постоянного ранга [7].

**Теорема 2.** Пусть в точке  $y^0 \in C$ , являющейся решением задачи (NLP), выполнено условие критической регулярности CRC. Тогда для любого множителя  $\lambda \in \Lambda(y^0)$  справедливо условие  $WSONC$ .

Следующие примеры показывает эффективность теоремы 2 по сравнению с результатами [1, 2, 5].

**Пример 1.** Пусть  $C = \left\{ y \in R^3 \mid -y_1^2 - y_2 \leq 0, -y_2 \leq 0, y_1 - y_3 \leq 0 \right\}$ ,

$$f(y) = -y_1 + y_3 - y_3^2.$$

Рассмотрим точку  $y^0 = (0, 0, 0)$ . Нетрудно показать, что условие CRC выполнено. Далее, в силу необходимых условий теоремы 1 должно выполняться неравенство

$$\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda_0, \lambda) \bar{y} \rangle = -2\bar{y}_3^2 \geq 0$$

для всех  $\bar{y}_3 \in \mathbb{R}$ , что очевидно не выполнимо. Следовательно, исследуемая точка не является оптимальной. Отметим, что для точки  $y^0$  в данном примере условие Мангасаряна — Фромовица выполняется, однако не выполнено условие WCR. Таким образом, в данном примере не применимы необходимые условия [1, 2].

**Пример 2.** Пусть  $C = \left\{ y \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} -y_1^2 - y_3 \leq 0, -y_1 + y_2 \leq 0, \\ y_3 - y_4 \leq 0, y_1^2 + y_2^2 - y_3 - y_4 \leq 0, -y_4 \leq 0 \end{array} \right\}$ ,

$$f(y) = y_3.$$

Рассмотрим точку  $y^0 = (0, 0, 0, 0)$ . Условие Мангасаряна — Фромовица в точке  $y^0$  выполнено. Также выполнено условие CRC и теорема 2 позволяет доказать неоптимальность данной точки.

Отметим, что для точки  $y^0$  в данном примере не выполнено ни условие WCR, ни условия Vaccari и Trad [5]. Таким образом, в данном примере не применимы необходимые условия [1, 2, 5].

#### Список литературы

1. Andreani R., Martinez J. M., Schuverdt M. L. On second-order optimality conditions for nonlinear programming // Optimization. — 2007. — **56**. — P. 529—542.
2. Guo L., Lin G. H. and Ye J. J. Second order optimality conditions for mathematical programs with equilibrium constraint // J. Optim. Theo. Appl. — 2013. — **158**. — P. 33—64.
3. Fletcher R. Practical Methods of Optimization. — London: Academic Press, 1987.
4. Mangasarian O. L., Fromovitz S. The Fritz — John necessary optimality conditions in presence of equality and inequality constraints // J. Mathematical Analysis and Appl. — 1967. — **17**. — P. 37—47.
5. Vaccari A., Trad A. On the classical necessary second-order optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints // SIAM J. Optimization. — 2004. — **15**. — P. 394—408.
6. Janin R. Directional derivative of the marginal function in nonlinear programming // Mathematical Programming Study. — 1984. — **21**. — P. 110—126.
7. Minchenko L., Stakhovski S. Parametric nonlinear programming problems under relaxed constant rank regularity condition // SIAM Journal on Optimization. — 2011. — **21**, No. 1. — P. 314—332.

## ФОРМУВАННЯ СІМ'Ї НОРМАЛЬНИХ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

С. М. Літвінцев, О. І. Рибін, О. А. Якубенко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

**Вступ.** Класифікація сигналів за формою їх графоелементів знаходить широке застосування в сучасній радіотехніці, медицині, криміналістиці. Серед методів класифікації найбільш простими та такими, що дають чисельну оцінку відстані між еталонним та досліджуваним сигналом, є методи з використанням нормального дискретного ортогонального перетворення (ДОП) [1]. ДОП еталонного сигналу містить у своєму розкладанні лише один ненульовий коефіцієнт  $A_1$ . Досліджуваний сигнал, відмінний від еталону, має коефіцієнти розкладання, які у загальному випадку мають ненульові значення  $A_i$ . Ступінь подібності досліджуваного сигналу до еталону чисельно оцінюється за допомогою коефіцієнта трансформант [2], який є подібним до коефіцієнта гармонік, обчислюваного для оцінки ступеню спотворення гармонічного сигналу:

$$k_{\text{тр}} = \sqrt{\sum_{i=2}^N A_i^2} / A_1$$

де  $A_i$  — значення  $i$ -го коефіцієнту;  $N$  — формат перетворення.

Запропоноване в [1] нормальне ДОП має властивості, подібні до властивостей перетворення Адамара. Таким чином, якщо тестовий сигнал представлено одиницями  $\bar{X} = [1111\dots 1]^T$ , тоді нормальне ДОП збігається з дискретним перетворенням Адамара. Тому при довільному тестовому сигналі  $\bar{X} = [x_1 x_2 x_3 \dots x_N]^T$  нульовий коефіцієнт у матричному операторі дискретного нормального перетворення дорівнює нулю. Покажемо, що крім запропонованого в [3] виду матричних операторів нормального перетворення існують інші, один з яких пропонується в даній роботі.

**Варіант ортогонального перетворення.** Як приклад розглянемо матричний оператор 8-го порядку для тестового сигналу

$$\bar{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T.$$

Складемо матрицю  $\bar{W}_x$  8-го порядку перестановкою елементів  $x_i$  так, щоб кожен стовпець матриці містив  $x_i$  тільки з різними індексами  $i$ :

$$\overline{W}_x = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \hline x_2 & x_1 & x_4 & x_3 & x_6 & x_5 & x_8 & x_7 \\ \hline x_3 & x_4 & x_1 & x_2 & x_7 & x_8 & x_5 & x_6 \\ \hline x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_8 & x_7 & x_6 & x_5 \\ \hline x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_6 & x_5 & x_8 & x_7 & x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ \hline x_7 & x_8 & x_5 & x_6 & x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ \hline x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ \hline \end{array}$$

У результаті перестановок у жодному стовпці матриці  $\overline{W}_x$  елементи  $x_i$  з однаковими індексами не зустрічаються. Окрім того, сама матриця  $\overline{W}_x$  є симетричною відносно індексів  $i$  елементів  $x_i$ . Знаки при елементах матриці  $\overline{W}_x$  надамо у відповідності до знаків елементів матричного оператора дискретного перетворення Адамара 8 порядку ( $\text{Had}_8$ ), рядки якого переставлені таким чином (рядок  $\rightarrow$  рядок):  $1 \rightarrow 0, 2 \rightarrow 7, 3 \rightarrow 6, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 4, 6 \rightarrow 1, 7 \rightarrow 3, 8 \rightarrow 2$ , що отримана модифікована матриця Адамара  $\text{Had}_N$ .

Після виконання операції  $\overline{W}_x \circ \text{Had}_N$ , де « $\circ$ » — добуток Адамара, маємо матрицю нормального перетворення 8-го порядку

$$\overline{W}_{R1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \hline x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 & -x_6 & x_5 & x_8 & -x_7 \\ \hline x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 & -x_7 & -x_8 & x_5 & x_6 \\ \hline x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 & -x_8 & x_7 & -x_6 & x_5 \\ \hline x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ \hline x_6 & -x_5 & x_8 & -x_7 & x_2 & -x_1 & x_4 & -x_3 \\ \hline x_7 & -x_8 & -x_5 & x_6 & x_3 & -x_4 & -x_1 & x_2 \\ \hline x_8 & x_7 & -x_6 & -x_5 & x_4 & x_3 & -x_2 & -x_1 \\ \hline \end{array}$$

(1)

Добуток  $\overline{W}_{R1} \cdot \overline{W}_{R1}^T$  є діагональною матрицею, елементи головної діагоналі якої дорівнюють енергії дискретного еталонного сигналу

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^8 x_i^2.$$

Виконавши нормування матриці  $\overline{W}_{R1}$  на «діюче значення» дискретного еталонного сигналу, отримаємо матрицю нормального ортогонального перетворення  $\overline{W}_N$  восьмого порядку.

**Приклад.** Для перевірки запропонованої моделі формування матричного оператора нормального перетворення виконано розрахунки за допомогою програмного пакету MATLAB. В якості еталонного сигналу обрана функція  $y = 2x$  на інтервалі  $[0; 0,35]$  (рис. 1, крива 1). В якості досліджуваних сигналів використані функції  $y = 1 - \exp(-2,5x)$  і  $y = 7x^2$  на тому ж інтервалі (рис. 1, криві 2, 3 відповідно).

На рис. 2 наведено значення розрахованих коефіцієнтів запропонованого перетворення для еталонного та досліджуваних сигналів (рис. 2а, б, в, відповідно). Як видно із рис. 2, значення коефіцієнтів розподілені таким же чином, як вони розподілені в [3]. Відповідні коефіцієнти трансформант для кривих 2 і 3 дорівнюють 0,1245 і 0,2857.

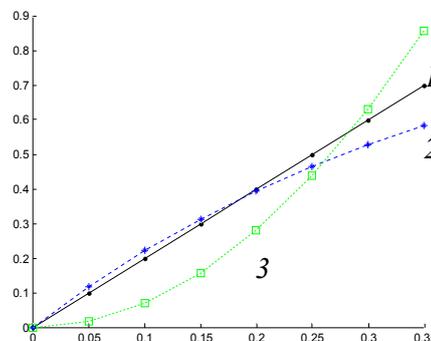


Рис. 1

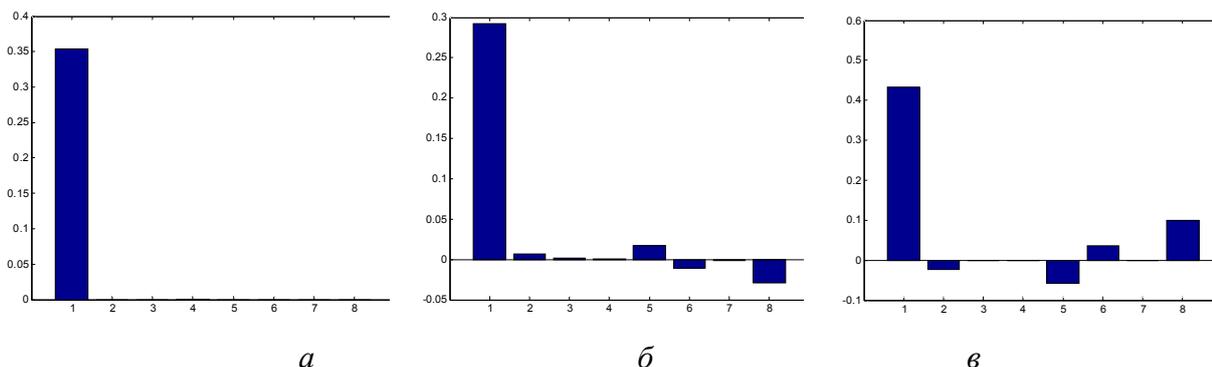


Рис. 2

Таким чином доведено, що можливо сформувати будь яку кількість матричних операторів нормального перетворення, які мають однакові властивості. Для формування матричного оператора нормального ДОП довільного порядку  $M = 2^k, k = 2, 3, \dots, D$  необхідно провести додаткові дослідження.

### Список літератури

1. Рибін О. І. Нормальне дискретне ортогональне перетворення / О. І. Рибін, Ю. Х. Ніжебецька // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. — 2008. — № 37. — С. 8—15.
2. Рыбин А. И. Коэффициенты трансформант нормализованных ортогональных преобразований и диагностика пульсограм / А. И. Рыбин, О. Б. Шарпан, Т. В. Сакалош, Е. Г. Григоренко // Вісник НУТУ «КПІ». Сер. Приладобудування. — 2005. — Вип. 30. — С. 148—156.
3. Рибін О. І. Алгоритм формування матричного оператора дискретного нормального перетворення / О. І. Рибін, Ю. Х. Ніжебецька // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. — 2008. — № 36. — С. 19—27.

# ПОБУДОВА ФУНКЦІЙ З ДАНИМИ ГРАНИЧНИМИ МНОЖИНАМИ

О. В. Маслюченко, Д. П. Онипа

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,

Чернівці, Україна

Institut matematyki, Akademia Pomorska w Słupsku, Polska

ovmasl@gmail.com, denys.onypa@gmail.com

Задача про побудову функцій з даним коливанням, що йде від П. Костирка [1], досліджувалася в роботах З. Дужинського, З. Гранде [2], С. Пономарьова, Й. Еверт [3] і О. Маслюченка [4, 5]. Ця задача є уточненим варіантом задачі про побудову функцій з даними розривами, розв'язанням якої займалися Р. Кешнер, Дж. Брекенрідж, Т. Нішіура, В. Маслюченко, В. Михайлюк. Проте ними вивчалася поведінка функції всередині області визначення функції. Дослідження функцій на межі їх області визначення розпочате нами в [6]. Зокрема, в [7] встановлено, що для довільної напівнеперервної зверху функції  $f: L \rightarrow [0; +\infty]$ , що визначена на межі  $L = \bar{G} \setminus G$  деякої відкритої множини  $G$  в метризовному просторі  $X$ , існує неперервна функція  $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ , граничне коливання  $\tilde{\omega}_g$  якої рівне  $f$ .

Нагадаємо, що для деякої підмножини  $D$  топологічного простору  $X$ , і деякої функції  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ , коливання цієї функції  $\omega_g: \bar{D} \rightarrow [0; +\infty]$  визначається формулою

$$\omega_g(x) = \inf_{U \text{ — окіл } x} \sup_{u, v \in U \cap D} |g(u) - g(v)|, \quad x \in \bar{D}.$$

Граничним коливанням називається звуження  $\tilde{\omega}_g = \omega_g|_{\bar{D} \setminus D}$ .

Множинним аналогом коливання функції є поняття граничної множини. Тому дослідження функцій на межі їх області визначення мають продовження в теорії многозначних відображень.

Нехай  $X$  — топологічний простір,  $Y$  — компактний топологічний простір,  $G$  — відкрита непорожня підмножина простору  $X$ ,  $L = \bar{G} \setminus G$  і  $f: G \rightarrow Y$  — деяка функція. Множина

$$\bar{f}(x) = \bigcap \{\overline{f(U \cap G)} : U \text{ — окіл точки } x\}$$

називається *граничною множиною функції  $f$  в точці  $x \in L$* . Інакше граничні множини позначають також символом  $C(f; x)$ .

Таким чином, довільній функції  $f$  можна поставити у відповідність деяке многозначне відображення  $\bar{f}: L \multimap Y$ . Нас цікавить зворотній зв'язок: для яких многозначних відображень  $F: L \multimap Y$  існує функція  $f: G \rightarrow Y$  така, що  $\bar{f}(x) = F(x)$  на  $L$ .

Нагадаємо, що многозначне відображення  $F: X \multimap Y$  називається *неперервним зверху*, якщо для довільної точки  $x$  з  $X$  і для кожної відкритої множини  $V$  такої, що  $F(x) \subseteq V$ , існує окіл  $U$  точки  $x$  в  $X$ , для якого  $F(U) \subseteq V$ .

**Твердження 1.** Нехай  $X$  — метризовний простір,  $Y$  — щільний підпростір метризовного компакту  $\bar{Y}$ ,  $L$  — замкнена ніде не щільна в  $X$  множина,  $F: L \rightarrow Y$  — неперервне зверху компактнозначне відображення і  $D \subseteq X \setminus L$  така множина, що  $L \subseteq \bar{D}$ . Тоді існує замкнена дискретна в  $D$  множина  $A$  і функція  $f: A \rightarrow Y$  така, що  $\bar{f}(x) = F(x)$  для кожного  $x \in L$ .

**Твердження 2.** Нехай  $X$  — метризовний простір,  $Y$  — щільний підпростір метризовного компакту  $\bar{Y}$ ,  $L$  — замкнена ніде не щільна в  $X$  множина,  $F: L \rightarrow \bar{Y}$  — неперервне зверху компактнозначне відображення і  $D \subseteq X \setminus L$  така множина, що  $L \subseteq \bar{D}$ . Тоді існує  $f: D \rightarrow Y$  така, що  $\bar{f}(x) = F(x)$  для кожного  $x \in L$ .

**Теорема 1.** Нехай  $X$  — метризовний простір,  $Y$  — щільний підпростір метризовного компакту  $\bar{Y}$ ,  $L$  — замкнена ніде не щільна в  $X$  множина,  $F: L \rightarrow \bar{Y}$  — неперервне зверху компактнозначне відображення і  $D \subseteq X \setminus L$  така множина, що  $L \subseteq \bar{D}$ . Тоді існує  $f: D \rightarrow Y$  така, що  $\bar{f}(x) = F(x)$  для кожного  $x \in L$ .

Наступна теорема уточнює імплікацію  $(iii) \Rightarrow (i)$  основного результату повідомлення [8].

**Теорема 2.** Нехай  $X$  — метризовний простір,  $L$  — замкнена ніде не щільна в  $X$  множина,  $D \subseteq X \setminus L$  така множина, що  $L \subseteq \bar{D}$ ,  $F: L \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  — неперервне зверху многозначне відображення і  $f_1, f_2: L \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  такі, що  $f_1(x) \leq f_2(x)$  та  $F(x) = [f_1(x); f_2(x)]$  для довільного  $x \in L$ . Тоді існує неперервна функція  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  така, що  $\bar{f}(x) = F(x)$  для кожного  $x \in L$ .

#### Список літератури

1. Kostyrko P. Some properties of oscillation // Math. Slovaca. — 1980. — **30**. — P. 157—162.
2. Duszynski Z., Grande Z., Ponomarev S. On the w-primitives // Math. Slovaca. — 2001. — **51**. — P. 469—476.
3. Ewert J., Ponomarev S. On the existence of w-primitives on arbitrary metric spaces // Math. Slovaca. — 2003. — **53**. — P. 51—57.
4. Maslyuchenko O. The oscillation of quasi-continuous functions on pairwise attainable spaces // Houston Journal of Mathematics. — 2009. — **35**, No. 1. — P. 113—130.
5. Маслюченко О. Побудова w-первісних: сильно досяжні простори // Математичний вісник НТШ. — 2009. — **6**. — С. 155—178.
6. Маслюченко О., Онипа Д. Граничні коливання локально сталих функцій // Бук. мат. журн. — 2013. — **1**, № 3—4. — С. 97—99.
7. Маслюченко О., Онипа Д. Граничні коливання неперервних функцій // Карп. мат. публ. — 2015.
8. Маслюченко О. В., Онипа Д. П., Фотій О. Г. Граничні множини неперервних функцій // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. Ворохта, 25 лютого — 3 березня 2013 р. — Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. — С. 68—69.

# ПОШУК МУЛЬТИПЛІКАТИВНО ОБЕРНЕНОГО ЕЛЕМЕНТУ У КІЛЬЦІ ЛИШКІВ ЗА ДОВІЛЬНИМ МОДУЛЕМ МЕТОДАМИ, ЩО ҐРУНТУЮТЬСЯ НА МОДУЛЯРНОМУ ПІДНЕСЕННІ ДО СТЕПЕНЯ

М. В. Онай, А. Ю. Бартков'як

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна  
onay\_nikolay\_kpi@ukr.net, andriy.bartkovyak@hotmail.com

**Вступ.** Задача пошуку мультиплікативно оберненого елемента у кільці лишків за довільним модулем виникає у багатьох криптографічних алгоритмах таких як алгоритм *RSA*, схема Ель-Гамала та при виконанні елементарних операцій на еліптичних кривих, що визначаються над скінченним полем [1]. Окрім цього при завадостійкому кодуванні даних та у деяких алгоритмах генерування псевдовипадкових чисел також виникає необхідність пошуку мультиплікативно оберненого елемента [2, 3].

У всіх перелічених алгоритмах найбільш обчислювально-витратною операцією є пошук мультиплікативно оберненого елемента у кільці лишків за довільним модулем, тому виникає необхідність у дослідженні існуючих та побудові нових алгоритмів пошуку мультиплікативно оберненого елемента.

**Постановка задачі.** На даний момент проводяться чисельні експериментальні дослідження методів пошуку мультиплікативно оберненого елемента у кільці лишків за довільним модулем, що засновані на методах пошуку найбільшого спільного дільника (*НСД*) двох чисел [2, 4, 5]. В той же час залишаються без уваги методи пошуку мультиплікативно оберненого елемента, що не ґрунтуються на методах пошуку *НСД*, тому виникає необхідність у дослідженні таких методів.

**Умова існування мультиплікативно оберненого елемента у кільці лишків за довільним модулем.** Мультиплікативно обернений елемент до числа  $b$  за модулем  $m$  є таке число  $t$ , що виконується рівність:

$$b \cdot t = 1 \pmod{m}.$$

Мультиплікативно обернений елемент існує не для всіх аргументів. Якщо модуль  $m$  є складеним числом, то існування мультиплікативно оберненого елемента визначається умовою  $НСД(b; m) = 1$ . Зрозуміло, що коли модуль є простим числом, то мультиплікативно обернений елемент існує для всіх аргументів.

**Метод Ейлера.** Одним з методів, що не ґрунтується на пошуку *НСД* є метод, що заснований на теоремі Ейлера (назвемо його методом Ейлера). Згідно теореми Ейлера, якщо  $НСД(b; m) = 1$ , то:

$$b^{\varphi(m)} = 1 \pmod{m}, \quad (1)$$

де  $\varphi(m)$  – функція Ейлера.

Помноживши рівність (1) на  $b^{-1}$  отримаємо:

$$b^{-1} = b^{\varphi(m)-1} \pmod{m}. \quad (2)$$

**Метод Кармайкла.** Згідно визначення функції Кармайкла [6] для будь-якого  $b$ , що задовольняє умову  $\text{НСД}(m; b) = 1$  є справедливою рівність:

$$b^{\lambda(m)} = 1 \pmod{m}, \quad (3)$$

де  $\lambda(m)$  – функція Кармайкла.

З рівності (3) отримаємо метод пошуку мультиплікативно оберненого елемента у кільці лишків за модулем  $m$ , що заснований на функції Кармайкла (назвемо його методом Кармайкла):

$$b^{-1} = b^{\lambda(m)-1} \pmod{m}.$$

**Метод Аразі.** Для випадку коли мультиплікативно обернений елемент до  $m$  за модулем  $b$  знайти простіше ніж мультиплікативно обернений елемент до  $b$  за модулем  $m$  використовується формула Аразі [1]:

$$b^{-1} \pmod{m} = \frac{1 + m \cdot (-m^{-1} \pmod{b})}{b}.$$

Коли число  $b$  є простим, формула Аразі спрощується до вигляду:

$$b^{-1} \pmod{m} = \frac{1 + m \cdot (-m^{b-2} \pmod{b})}{b}.$$

Якщо  $b$  та  $m$  є складеними числами та для них виконується умова  $\text{НСД}(m; b) = 1$ , то для пошуку  $b^{-1} \pmod{m}$  можна використати формулу:

$$b^{-1} \pmod{m} = \frac{1 + m \cdot (-m^{f(b)-1} \pmod{b})}{b}, \quad (4)$$

де  $f(b)$  — функція Ейлера або Кармайкла. Формула (4) дозволяє швидше знайти  $b^{-1} \pmod{m}$ , ніж формула (3), оскільки значення  $\lambda(b)$  обчислити простіше ніж  $\lambda(m)$  за рахунок того, що  $b < m$ . Такий метод знаходження мультиплікативно оберненого елемента назвемо методом Аразі.

**Експериментальні дослідження** Для проведення експериментальних досліджень було розроблено програмний продукт на мові програмування C# у середовищі розробки Visual Studio 2013. Експериментальні дослідження проводились на ЕОМ з такими технічними характеристиками: CPU Intel Core I5-3210M, 2.5 GHz, оперативна пам'ять 8 Гб.

У даному програмному продукті реалізовано метод Ейлера, метод Кармайкла, та дві модифікації методу Аразі, а саме метод Аразі з використанням формули Ейлера та метод Аразі з використанням формули Кармайкла. Розроблений програмний продукт дозволяє проводити тестування коректності роботи

алгоритмів, генерувати вхідні дані із заданими характеристиками та отримувати часові показники алгоритмів при заданих аргументах.

Для проведення дослідження швидкості роботи алгоритмів було сформовано 4 множин з парами випадкових чисел  $m$  та  $b$ . Кожна множина містить 50 непарних модулів  $m$  фіксованої довжини 8, 16, 20, 32 біт та 100 чисел  $b$  для кожного  $m$ .

Таблиця 1. Час роботи алгоритмів, що реалізують методи пошуку мультиплікативно оберненого елемента, мс

Назва методу	8 біт	16 біт	20 біт	32 біт
Метод Ейлера	0,097	2,955	50,185	201732,856
Метод Кармайкла	4,819	378,484	7047,701	—
Метод Аразі (на основі формули Ейлера)	0,067	0,905	16,314	9131,719
Метод Аразі (на основі формули Кармайкла)	0,993	821,955	77260,18	—

**Висновки.** Для методів, що використовують функцію Кармайкла, на операндах довжиною 32 біти не було отримано результатів за прийнятний час, оскільки для обчислення функції Кармайкла необхідно виконувати факторизацію великих чисел. З отриманих експериментальних результатів (табл. 1) можна зробити висновок, що для пошуку мультиплікативно оберненого елемента доцільним є застосування методу Аразі на основі формули Ейлера. Подальші дослідження слід зосередити на побудові алгоритмів пошуку мультиплікативно обернених елементів за довільним модулем для аргументів, що є добутком малої кількості степенів простих чисел.

#### Список літератури

1. Gueric Meurice de Dormale Efficient Modular Division Implementation ECC over GF(p) Affine Coordinates Application / Meurice de Dormale Gueric, Bulens Philippe, Quisquater Jean-Jacques // The 14th International Conference on Field Programmable Logic and Applications, FPL 2004, Volume 3203 of Lecture Notes in Computer Science. — 2004. — P. 231—240.
2. Knuth D. E. Art of Computer Programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms / Donald E. Knuth. — 3rd Ed. — Canada: Addison-Wesley Professional, 1997. — 784 p.
3. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки = Theory and Practice of Error Control Codes / Р. Блейхут. — М. : Мир, 1986. — 576 с.
4. Sorenson J. Two fast GCD algorithms / Jonathan Sorenson // Journal of Algorithms. — 1994. — 16 (1). — P. 110—144.
5. Sorenson J. An analysis of Lehmer's Euclidean GCD algorithm / Jonathan Sorenson // ISSAC'95 Proceedings of the 1995 international symposium on Symbolic and algebraic computation. — 1995. — P. 254—258.
6. WolframMathWorld: [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://mathworld.wolfram.com/CarmichaelFunction.html>. — Дата звернення: 03.04.2015.
7. Joye M. GCD-Free Algorithms for Computing Modular Inverses / Marc Joye, Pascal Paillier // CHES 2003: Cologne, Germany. — 2003. — P. 243—253.

# НЕОБХІДНІ УМОВИ ОБМЕЖЕНОСТІ ОПЕРАТОРІВ КАЛЬДЕРОНА У ПРОСТОРАХ ТИПУ ЛОРЕНЦЯ

**Б. Г. Пелешенко**

*Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет,  
Дніпропетровськ, Україна  
dsaupelesh@ukr.net*

Нехай  $\Phi$  — об'єднання функції  $\text{sign } t$  та множини додатних, зростаючих опуклих або вгнутих функцій  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ , для яких виконуються умови  $\varphi(0) = 0$  і  $\phi(2t) = O(\phi(t))$ , коли  $t \rightarrow +0$ .

Для функції  $\phi(t)$  з  $\Phi$  позначимо  $M_\varphi(t) = \sup_{0 < s \leq \min(1/t, 1)} \frac{\varphi(st)}{\varphi(s)}$  ( $0 < t < \infty$ ) і

$\alpha_\varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln M_\varphi(t)}{\ln t}$ ,  $\beta_\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln M_\varphi(t)}{\ln t}$ . Через  $S(0, 2\pi)$  позначається

простір вимірних за Лебегом на  $(0, 2\pi)$  функцій і через  $f^*(t)$  незростаюча перестановка модуля функції  $f(x) \in S(0, 2\pi)$  відносно нормованої міри Лебега

$$m(e) = \frac{1}{2\pi} \int_e dx.$$

Нехай  $LM \in$  множина повільно змінних в нулі функцій  $h(t)$ , тобто таких додатних вимірних за мірою Лебега на  $(0, \infty)$  функцій, що для будь-якого

$$\lambda > 0 \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{h(\lambda t)}{h(t)} = 1.$$

Простір типу Лоренця  $\Lambda_{\varphi, a}(0, 2\pi)$  для заданих  $\varphi(t) \in \Phi$  і  $0 < a \leq \infty$  складається з функцій із простору  $S(0, 2\pi)$ , для яких скінчена квазінорма (чи

норма)  $\|f\|_{\Lambda_{\varphi, a}} = \left\{ \int_0^1 (f^*(t))^a d\varphi(t) \right\}^{\frac{1}{a}}$ , якщо  $\varphi(t) \neq \text{sign } t$ ,  $0 < a < \infty$ , і квазі-

норма  $\|f\|_{\Lambda_{\varphi, \infty}} = \sup_{0 < t < 1} (f^*(t)\varphi(t))$  для  $a = \infty$ . В випадку  $a = \infty$  простір

$\Lambda_{\varphi, \infty}(0, 2\pi)$  ще називається слабким простором Марцинкевича [1]. Коли  $\varphi(t) = t^{1/p}$ ,  $0 < p < \infty$ ,  $a = 1$ , тоді  $\Lambda_{\varphi, 1}(0, 2\pi) = L^1(0, 2\pi)$  і, якщо  $\varphi(t) = \text{sign } t$ , то  $\Lambda_{\varphi, \infty}(0, 2\pi) = L_\infty(0, 2\pi)$ .

Нехай функції  $\phi_0(t)$ ,  $\phi_1(t)$  із множини  $\Phi$  такі, що функція  $\phi_0(t)/\phi_1(t)$  зростає, тоді позначимо

$$W(f^*)(t) = \frac{1}{\varphi_0(t)} \int_0^t f^*(u) d\varphi_0(u) + \frac{1}{\varphi_1(t)} \int_t^1 f^*(u) d\varphi_1(u), \text{ якщо } \varphi_1(t) \neq \text{sign } t,$$

та

$$W(f^*)(t) = \frac{1}{\varphi_0(t)} \int_0^t f^*(u) d\varphi_0(u) + \int_t^1 f^*(u) \frac{du}{u} \text{ у випадку } \varphi(t) = \text{sign } t.$$

**Теорема 1.** Нехай  $0 < a \leq 1, a \leq b \leq 1$  і функції  $\varphi_0(t), \varphi_1(t) \in \Phi$  такі, що функція  $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$  зростає, їх показники розтягування задовольняють нерівності  $0 < \alpha_{\varphi_1} \leq \beta_{\varphi_1} < \alpha_{\varphi_0} \leq \beta_{\varphi_0} < \infty$ . Нехай функція  $\tilde{\varphi}(t) \in \Phi$  і така, що  $\beta_{\varphi_1} < \alpha_{\tilde{\varphi}} \leq \beta_{\tilde{\varphi}} < \alpha_{\varphi_0}$ , функції  $l_1(t), l_2(t) \in LM$ , зростають або спадають та

$$l_1(1) > 0, \quad l_2(1) > 0; \quad \varphi^a(t) = \int_0^t l_1^a(\tau) d\tilde{\varphi}^a(\tau), \quad \psi^b(t) = \int_0^t l_2^b(\tau) d\tilde{\varphi}^b(\tau).$$

Для того, щоб виконувалась для всякої функції  $f \in \Lambda_{\varphi,a}(0, 2\pi)$  нерівність

$$\left\{ \int_0^1 (W(f^*)(t))^b d\psi^b(t) \right\}^{1/b} \leq C \left\{ \int_0^1 (f^*(t))^a d\varphi^a(t) \right\}^{1/a} \quad (1)$$

з деякою сталою  $C > 0$ , необхідно, щоб

$$\int_t^1 \frac{l_2^b(\tau) d\tilde{\varphi}^b(\tau)}{\varphi_0^b(\tau)} \leq \gamma_1 \int_t^1 \frac{l_1^b(\tau) d\tilde{\varphi}^b(\tau)}{\varphi_0^b(\tau)} \text{ для } t \in (0, 1/2]$$

та

$$\int_0^t \frac{l_2^b(\tau) d\tilde{\varphi}^b(\tau)}{\varphi_1^b(\tau)} \leq \gamma_2 \int_0^t \frac{l_1^b(\tau) d\tilde{\varphi}^b(\tau)}{\varphi_1^b(\tau)} \text{ для } t \in (1/2, 1].$$

Далі розглянемо при  $\varphi(t) \neq \text{sign } t$  необхідні умови обмеженості операторів типу Кальдерона в просторах близьких до просторів  $\Lambda_{\varphi_0}(0, 2\pi)$ ,  $\Lambda_{\varphi_0, \infty}(0, 2\pi)$  або  $\Lambda_{\varphi_1}(0, 2\pi)$ ,  $\Lambda_{\varphi_1, \infty}(0, 2\pi)$ .

**Теорема 2.** Нехай  $0 < a < 1$ , функції  $\varphi_0(t), \varphi_1(t) \in \Phi$  і такі, що функція  $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$  зростає, їх показники розтягування задовольняють нерівності  $0 < \alpha_{\varphi_1} \leq \beta_{\varphi_1} < \alpha_{\varphi_0} \leq \beta_{\varphi_0} < \infty$ . Нехай  $h(t)$  така спадна чи зростаюча функція із множини  $LM$ , що  $h(1) > 0$ ,

$$\int_0^1 \frac{d\tau}{\tau h(\tau)} = \infty; \quad \varphi^b(t) = \left\{ \varphi_1^b(t) \int_0^t \frac{\varphi_0^b(\tau) d\tau}{\varphi_1^b(\tau) \tau h(\tau)} + \varphi_0^b(t) \int_t^1 \frac{d\tau}{\tau h(\tau)} \right\}.$$

Для того, щоб виконувалась для всякої функції  $f \in \Lambda_{\varphi,a}(0, 2\pi)$  нерівність (1) необхідно, щоб для любого  $t \in (0, 1]$   $\psi(t) \leq \gamma_3 \varphi(t)$ ,  $\gamma_3 > 0$ .

**Наслідок 1.** Якщо в умові теореми 2  $\psi^b(t) = \frac{\varphi_0^b(t)}{tr(t)}$ , де  $r(t) \in LM$ ,  $r(1) > 0$  то необхідно, щоб виконувалась нерівність

$$\int_t^1 \frac{d\tau}{\tau r(\tau)} \leq \gamma_4 \int_t^1 \frac{d\tau}{\tau h(\tau)} \text{ для } t \in (0, 1/2]$$

та нерівність

$$\int_0^t \frac{\varphi_0^b(\tau) d\tau}{\varphi_1^b(\tau) \tau r(\tau)} \leq \gamma_5 \int_0^t \frac{\varphi_0^b(\tau) d\tau}{\varphi_1^b(\tau) \tau h(\tau)} \text{ в випадку, коли } t \in (1/2, 1].$$

**Теорема 3.** Нехай  $0 < a \leq 1$  і виконуються умови теореми 2 для функцій  $\phi_0(t)$ ,  $\phi_1(t)$ . Нехай  $h(t)$  така спадна функція із множини  $LM$ , що

$$h(1) > 0, \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau h(\tau)} < \infty; \varphi^b(t) = \left\{ \varphi_1^b(t) \int_0^t \frac{d\tau}{\tau h(\tau)} + \varphi_0^b(t) \int_t^1 \frac{\varphi_1^b(\tau) d\tau}{\varphi_0^b(\tau) \tau h(\tau)} \right\}.$$

Для того, щоб виконувалась для всякої функції  $f \in \Lambda_{\varphi, a}(0, 2\pi)$  нерівність (1) необхідно, щоб для любого  $t \in (0, 1]$   $\psi(t) \leq \gamma_6 \varphi(t)$ ,  $\gamma_6 > 0$ .

**Наслідок 2.** Якщо в умові теореми 3  $\psi^b(t) = \frac{\varphi_1^b(t)}{tr(t)}$ , де  $r(t) \in LM$ ,  $r(1) > 0$  то необхідно, щоб виконувалась нерівність

$$\int_t^1 \frac{\varphi_1^b(\tau) d\tau}{\varphi_0^b(\tau) \tau r(\tau)} \leq \gamma_7 \int_t^1 \frac{\varphi_1^b(\tau) d\tau}{\varphi_0^b(\tau) \tau h(\tau)} \text{ для } t \in (0, 1/2]$$

і нерівність

$$\int_t^1 \frac{d\tau}{\tau r(\tau)} \leq \gamma_8 \int_t^1 \frac{d\tau}{\tau h(\tau)} \text{ для } t \in (1/2, 1].$$

Сформулюємо установлені твердження за умови, що  $\varphi_1(t) = \text{sign } t$ .

**Теорема 4.** Нехай  $0 < a < 1$ ,  $\varphi_1(t) = \text{sign } t$ ,  $\varphi_0(t) \in \Phi$ , і  $0 < \alpha_{\varphi_0} \leq \beta_{\varphi_0} < \infty$ .

Нехай  $h(t)$  така спадна чи зростаюча функція із множини  $LM$ , що

$$h(1) > 0, \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau h(\tau)} = \infty; \varphi^b(t) = \left\{ \int_0^t \ln^b \left( \frac{t}{\tau} \right) \frac{\varphi_0^b(\tau) d\tau}{\tau h(\tau)} + \varphi_0^b(t) \int_t^1 \frac{d\tau}{\tau h(\tau)} \right\}.$$

Для того, щоб виконувалась для всякої функції  $f \in \Lambda_{\varphi, a}(0, 2\pi)$  нерівність (1) необхідно, щоб для любого  $t \in (0, 1]$   $\psi(t) \leq \gamma_9 \varphi(t)$ ,  $\gamma_9 > 0$ .

**Наслідок 3.** Якщо в умові теореми 4  $\psi^b(t) = \frac{\varphi_0^b(t)}{tr(t)}$ , де  $r(t) \in LM$ ,  $r(1) > 0$  то необхідно, щоб виконувалась нерівність

$$\int_t^1 \frac{d\tau}{\tau r(\tau)} \leq \gamma_4 \int_t^1 \frac{d\tau}{\tau h(\tau)} \text{ для } t \in (0, 1/2]$$

та нерівність

$$\int_0^t \ln^b \left( \frac{t}{\tau} \right) \frac{\varphi_0^b(\tau) d\tau}{\tau r(\tau)} \leq \gamma_{10} \int_0^t \ln^b \left( \frac{t}{\tau} \right) \frac{\varphi_0^b(\tau) d\tau}{\tau h(\tau)} \text{ в випадку, коли } t \in (1/2, 1].$$

**Теорема 5.** Нехай  $0 < a \leq 1$ ,  $\varphi_1(t) = \text{sign } t$ ,  $\varphi_0(t) \in \Phi$ , і  $0 < \alpha_{\varphi_0} \leq \beta_{\varphi_0} < \infty$ . Нехай  $h(t)$  така спадна функція із множини  $LM$ , що

$$h(1) > 0, \int_0^1 \ln^b \left( \frac{t}{\tau} \right) \frac{d\tau}{\tau h(\tau)} < \infty; \varphi^b(t) = \left\{ \int_0^t \ln^b \left( \frac{t}{\tau} \right) \frac{d\tau}{\tau h(\tau)} + \varphi_0^b(t) \int_t^1 \frac{d\tau}{\varphi_0^b(\tau) \tau h(\tau)} \right\}.$$

Для того, щоб виконувалась для всякої функції  $f \in \Lambda_{\varphi, a}(0, 2\pi)$  нерівність (1) необхідно, щоб для любого  $t \in (0, 1]$   $\psi(t) \leq \gamma_{11} \varphi(t)$ ,  $\gamma_{11} > 0$ .

**Наслідок 4.** Якщо в умові теореми 5  $\psi^b(t) = \frac{\varphi_1^b(t)}{tr(t)}$ , де  $r(t) \in LM$ ,  $r(1) > 0$  то необхідно, щоб виконувалась нерівність

$$\int_t^1 \frac{d\tau}{\varphi_0^b(\tau) \tau r(\tau)} \leq \gamma_{12} \int_t^1 \frac{d\tau}{\varphi_0^b(\tau) \tau h(\tau)} \text{ для } t \in (0, 1/2]$$

і нерівність

$$\int_t^1 \ln^b \left( \frac{t}{\tau} \right) \frac{d\tau}{\tau r(\tau)} \leq \gamma_{13} \int_t^1 \ln^b \left( \frac{t}{\tau} \right) \frac{d\tau}{\tau h(\tau)} \text{ для } t \in (1/2, 1].$$

Сформульовані теореми дають необхідні умови обмеженості деяких відомих операторів в просторах типу Лоренця.

У роботі Р. Шарплі [2] встановлена необхідна умова інтерполяції для квазілінійних операторів в просторах Лоренця — Зігмунда в випадку, коли  $\varphi_0(t) = t^{\frac{1}{p}}$ ,  $\varphi_1(t) = t^{\frac{1}{r}}$ ,  $\psi_0(t) = t^{\frac{1}{q}}$ ,  $\psi_1(t) = t^{\frac{1}{s}}$ , а  $1 \leq p < r \leq \infty$ ,  $1 \leq q < s \leq \infty$ ,  $1 \leq a < \infty$ .

#### Список літератури

1. Крейн С. Г. Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн., Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
2. Sharply R. Counterexamples for operators on Lorentz—Zygmund spaces / R. Sharply // Studia mathematica. — 1980. — **118**. — P. 142—158.

## ПРОЕКТИВНІ ГРАТКИ ЧЕРЕПИЧНИХ ПОРЯДКІВ

О. О. Плужнікова

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
apl2008@ukr.net

Всі необхідні відомості про черепичні порядки та допустимі сагайдаки можна знайти в [1, 2].

Нехай  $\Lambda$  — черепичний порядок над дискретно нормованим кільцем  $\mathcal{O}$  з простим елементом  $\pi$ . У [3] показано, що ядра проективної резольвенти незвідної  $\Lambda$  — ґратки мають вигляд  $\sum M_i f_i$ , де  $M_i$  — незвідні  $\Lambda$  — ґратки, які є перетином проективних  $\Lambda$  — ґраток,  $f_i$  — вектори. Якщо  $\Lambda$  — черепичний порядок скінченної глобальної розмірності, то певні перетини проективних ґраток є проективними.

Нехай  $\Lambda_\Delta = \bigoplus_{i=1}^n P_i$  — правий пірсонський розклад правого регулярного модуля у пряму суму нерозкладних проективних модулів,  $Q(\Lambda)$  — сагайдак порядку,  $VQ$  — множина вершин сагайдака  $Q$ .

**Теорема.** Нехай  $\Lambda$  — зведений черепичний порядок над дискретно нормованим кільцем  $\mathcal{O}$  з простим елементом  $\pi$ . Якщо  $\pi^a P_i \cap \pi^b P_j = \pi^c P_k$ , то існує розбиття множини вершин  $\{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$  на дві підмножини  $I_1, I_2$  таке, що  $\alpha_{il} = \alpha_{ik} + \alpha_{kl}$ ,  $\alpha_{jp} = \alpha_{jk} + \alpha_{kp}$  для всіх  $l \in I_1, p \in I_2$ .

### Список літератури

1. Hazewinkel M., Gubarenian N., Kirichenko V. V. — Algebras, Rings and Modules. Vol. 1, Series: Mathematics and Its Applications, **575**, Kluwer Acad. Publish., 2004. — xii+380pp.
2. Hazewinkel M., Gubarenian N., Kirichenko V. V. Algebras, Rings and Modules. Vol. 2, Series: Mathematics and Its Applications, **586**, Springer Dordrecht, 2007. — xii+400pp.
3. Zhuravlev V., Zhuravlyov D. Projective resolution of irreducible modules over tiled order // Algebra and discrete mathematics. — 2012. — Vol. 14, No. 2. — P. 323—336.

## ПОВТОРНА ЗІРКОВА ЗБІЖНІСТЬ

В. Д. Погребний

Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка,

Суми, Україна

[mathematicsspu@mail.ru](mailto:mathematicsspu@mail.ru)

Зіркові збіжності є важливою конструкцією в теорії просторів абстрактної збіжності. Це поняття пройшло свій шлях розвитку і узагальнення. Вперше воно було введене для послідовностей відносно конкретної збіжності — порядкової збіжності у решітках. Далі відбулось узагальнення для напрямленостей відносно тієї ж збіжності, а потім воно було віднесене до довільної абстрактної збіжності, причому використовувались конфінальні піднапрявленості.

Автор займався різними узагальненнями і вивченнями зіркових збіжностей.

1. По типу піднапрявленостей. Одержуються конфінальна, ізотонна, мурівська, квазі-зіркові збіжності. Це «чисті» типи.

2. По різним типам піднапрявленостей на першому і другому етапах. Це «мішані» типи, наприклад, конфінально-мурівська зіркова збіжність.

3. По різним абстрактним збіжностям на першому і другому етапах. В минулому році було введене поняття подвійної зіркової збіжності  $(^*\sigma\omega)$ .

Використання двох абстрактних збіжностей дає можливість ввести і інше узагальнення.

Отже, нехай на множині  $X \neq \emptyset$  задані дві абстрактні збіжності:  $(\sigma)$  та  $(\omega)$ . Напрявленість  $S = (x_\alpha, \alpha \in A)$  називається повторно зірково збіжною до елемента  $x_0 \in X$  відносно збіжностей  $(\sigma)$  та  $(\omega)$ , якщо кожна її  $(\sigma)$ -збіжна до  $x_0$  піднапрявленість  $T = (y_\beta, \beta \in B)$  має піднапрявленість  $U = (z_\gamma, \gamma \in C)$ , яка  $(\omega)$ -збіжна до  $x_0$ . Запис:  $x_\alpha \xrightarrow{(\sigma^*\omega)} x_0$ .

Різні типи цієї збіжності одержуються, по-перше, за рахунок різних класів піднапрявленостей  $T$  та  $U$  одного класу — це «чисті» типи:  $(c\sigma^*\omega)$ ,  $(i\sigma^*\omega)$ ,  $(m\sigma^*\omega)$ ,  $(q\sigma^*\omega)$ . По-друге, використання різних класів піднапрявленостей для  $T$  та  $U$  — це «мішані» типи, наприклад,  $(c\sigma^*q\omega)$  і т.д. Властивості повторної зіркової збіжності, природньо, залежать від властивостей збіжностей  $(\sigma)$  та  $(\omega)$ . Це стосується і аксіом класу збіжності NA1, NA2, NA3, NA4. Доведемо, для прикладу, деякі властивості.

**Теорема 1.** Якщо  $(\sigma)$  та  $(\omega)$ -збіжності задовольняють умову NA1, то  $(c\sigma^*c\omega)$ -збіжність має ту ж властивість.

Доведення. Нехай  $T$  — конфінальна піднапрявленість напрямленості  $S$ . В якості піднапрявленості  $U$  візьмемо саму  $T$ . В силу конфінальності  $(\sigma)$   $(\omega)$   
 $z_\gamma = x_0 \forall \gamma \in C$ . В силу NA1 для  $(\sigma)$ ,  $y_\beta \rightarrow x_0$ . В силу NA1 для  $(\omega)$ ,  $z_\gamma \rightarrow x_0$ .  
 Це і означає  $(\sigma * \omega)$  збіжність  $S$  до точки  $x_0$ .

Теорему доведено.

Аналогічний результат одержується для інших «чистих» типів, а також для «мішаних» типів цієї збіжності.

**Теорема 2.**  $(\sigma * \omega)$ -збіжність задовольняє умову NA2.

$(\sigma * \omega)$

Доведення. Нехай  $x_\alpha \rightarrow x_0$ . Візьмемо довільну піднапрявленість  $S_1$  напрямленості  $S$ , а  $T_1$  — довільна піднапрявленість для  $S_1$ , яка  $(\sigma)$ -збіжна до  $x_0$ .  $T_1$  є піднапрявленістю для  $S$ , і вона збіжна до  $x_0$  у смислі  $(\sigma)$ . Тому вона має, за умовою, піднапрявленість  $U_1$ , яка  $(\omega)$ -збіжна до  $x_0$ .  $U_1$  є піднапрявленістю для  $S_1$ , а тому  $(S_1)$  збігається  $(\sigma * \omega)$  до  $x_0$ . В силу довільності  $S_1$ , це і означає виконання NA2 для  $(\sigma * \omega)$ -збіжності.

Теорему доведено.

**Теорема 3.**  $(\sigma * \omega)$ -збіжність задовольняє умову NA3.

Доведення. Нехай  $x_\alpha \xrightarrow{(\sigma * \omega)} x_0$ . Тоді  $S$  має таку піднапрявленість  $T$ , яка збігається  $(\sigma)$  до  $x_0$ , але всі її піднапрявленості  $U$  не є  $(\omega)$ -збіжними до  $x_0$ . Це означає, що всі піднапрявленості для  $T$  не можуть збігатись  $(\sigma * \omega)$  до  $x_0$ , бо якщо навіть якесь із них  $(\sigma)$ -збіжне, то воно не може бути  $(\omega)$ -збіжне до  $x_0$ . Одержуємо виконання умови NA3 для  $(\sigma * \omega)$ -збіжності.

Теорему доведено.

Зіркові збіжності є важливою конструкцією як у просторах абстрактної збіжності, так і для конкретних збіжностей сучасного аналізу.

### Список літератури

1. Погребний В. Д. Зіркові збіжності мішаного типу / В. Д. Погребний // Матеріали 10-ої Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. — К., 2004. — С. 385.
2. Погребной В. Д. Звездные сходимости смешанного типа / В. Д. Погребной // Вісник Сумського державного університету. — 2006. — № 6. — С. 150—155.
3. Погребной В. Д. Свойства звездных сходимостей смешанного типа / В. Д. Погребной // Вісник Сумського державного університету. — 2006. — № 9. — С. 125—127.
4. Погребной В. Д. Смешанные звездные сходимости: дальнейшие свойства / В. Д. Погребной // Вісник Сумського державного університету. — 2007. — № 9 (93). — С. 127—129.
5. Погребний В. Д. Подвійна зіркова збіжність / В. Д. Погребний // Матеріали 15-ої Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. — К., 2014. — С. 148.

**ЧИСЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ  
ЛІНІЙ ГАЛУЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ  
ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

**Б. М. Подлевський, Г. Ф. Могитич**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики*

*НАН України ім. Я.С. Підстригача,*

*Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, Україна*

[bpodlev@gmail.com](mailto:bpodlev@gmail.com), [galyussya@gmail.com](mailto:galyussya@gmail.com)

У рамках простої математичної моделі розглядається нелінійна скалярна задача синтезу плоскої еквідістантної решітки при заданих вимогах до діаграми направленості за потужністю. При знаходженні ліній галуження розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь, отриманих у результаті розв'язування задачі синтезу, виникають двопараметричні спектральні задачі. Для таких задач запропоновано чисельний алгоритм знаходження кривих власних значень, які є лініями галуження розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь.

У даній роботі, у рамках варіаційної постановки задачі синтезу діаграми направленості решітки за заданою ДН за потужністю, яка приводить до чисельного розв'язування нелінійного інтегрального рівняння, пропонується алгоритм знаходження ліній галуження оптимальних розв'язків шляхом знаходження кривих власних значень відповідної нелінійної двопараметричної спектральної задачі.

Для випромінюючої системи, яка складається з  $N = N_1 \times N_2 = (2M_1 + 1)(2M_2 + 1)$  ідентичних і однаково орієнтованих випромінювачів з однаковою для усіх випромінювачів діаграмою направленості (ДН), у яких фазові центри розміщені на площині (площина решітки)  $XOY$  декартової системи координат, функція, яка описує ДН (множник плоскої решітки) еквідістантної плоскої системи випромінювачів (плоскої решітки), має вигляд [1, с. 105]

$$f(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} I_{nm} e^{i(c_1 n \xi_1 + c_2 m \xi_2)},$$

де  $I_{nm}$  — комплексні струми на випромінювачах,  $c_1 = kd_1$ ,  $c_2 = kd_2$ ,  $d_1, d_2$  — віддалі між сусідніми випромінювачами,  $k$  — хвильове число.

Надалі вважатимемо, що необхідна енергетична діаграма направленості  $P(\xi_1, \xi_2)$  задана в області  $\Omega: \{|\xi_1| \leq 1, |\xi_2| \leq 1\}$  й описується функцією, яка є неперервною та невід'ємною в області  $\Omega$  і тотожно дорівнює нулю за її межами, причому  $\max_{(\xi_1, \xi_2) \in \Omega} P(\xi_1, \xi_2) = 1$ .

Отже, задача синтезу полягає у знаходженні таких струмів  $I_{nm}$  на випромінювачах, щоб створювана ними діаграма направленості за потужністю

$|f(\xi_1, \xi_2)|^2$  найкращим чином наближалася до заданої  $P(\xi_1, \xi_2)$ . З цією метою розглянемо варіаційну постановку задачі, тобто задачу синтезу сформулюємо як задачу мінімізації функціонала

$$\sigma(I) = \iint_{\Omega} \left[ P(\xi_1, \xi_2) - |f(\xi_1, \xi_2)|^2 \right]^2 d\xi_1 d\xi_2 + \alpha \sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} |I_{nm}|^2$$

у просторі  $H_I = C^N$ , тобто

$$\sigma(I) \rightarrow \min_{I \in H_I}, \quad I_{nm} \in H_I,$$

який характеризує величину середньоквадратичного відхилення модулів заданої та синтезованої діаграм направленості в області  $\Omega$ , а другий накладає обмеження на норму струмів. Тут  $\alpha$  — деякий дійсний параметр.

З необхідної умови мінімуму функціонала  $\sigma(I)$  отримуємо нелінійну систему рівнянь для оптимальних струмів на випромінювачах

$$\begin{aligned} \alpha I_{nm} &= 2 \iint_{\Omega} \left[ P(\xi_1, \xi_2) - |f(\xi_1, \xi_2)|^2 \right] e^{-i(c_1 n \xi_1 + c_2 m \xi_2)} \times \\ &\times \sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} I_{nm} e^{i(c_1 n \xi_1 + c_2 m \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2, \\ &(n = -M_1 \div M_1, \quad m = -M_2 \div M_2). \end{aligned}$$

Помноживши обидві частини рівняння на  $e^{i(c_1 n \xi_1 + c_2 m \xi_2)}$  та підсумувавши за  $n$  і  $m$ , отримуємо еквівалентне нелінійне рівняння для оптимальної діаграми

$$\alpha f(\xi_1, \xi_2) = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ P(\xi'_1, \xi'_2) - |f(\xi'_1, \xi'_2)|^2 \right] K(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) f(\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_1 d\xi'_2. \quad (1)$$

Тут  $f(\xi_1, \xi_2)$  — шукана функція, а  $K(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)$  — ядро вигляду

$$K(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) = \sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} e^{i[c_1 n (\xi_1 - \xi'_1) + c_2 m (\xi_2 - \xi'_2)]}.$$

Оскільки рівняння (1) є нелінійним рівнянням, то воно може мати неєдиний розв'язок, кількість і властивості яких залежать від кількості елементів ґратки та їх розміщення, а також від властивостей заданої діаграми направленості за потужністю  $P(\xi_1, \xi_2)$ .

Легко переконатися, що при будь-яких обмежених значеннях параметрів  $c_1$  та  $c_2$  рівняння (1) має нульовий розв'язок. Числові експерименти показують, що при певних значеннях параметрів  $c_1$  та  $c_2$  існують відмінні від нуля розв'язки рівняння (1).

Точками можливого галуження розв'язків інтегрального рівняння (1) є такі значення дійсних фізичних параметрів  $c_1$  та  $c_2$ , при яких однорідне лінійне рівняння

$$f(\xi_1, \xi_2) = T(c_1, c_2)f(\xi_1, \xi_2) \equiv \frac{2}{\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P(\xi'_1, \xi'_2) K(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) f(\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_1 d\xi'_2, \quad (2)$$

отримане лінеаризацією рівняння (1) має відмінні від тотожного нуля розв'язки.

Отже ми отримали нелінійну (за параметрами  $c_1$  та  $c_2$ ) двопараметричну задачу на власні значення

$$(T(c_1, c_2) - I)f(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) = 0. \quad (3)$$

Враховавши, що  $P(\xi_1, \xi_2) > 0$ , приведемо оператор  $T(c_1, c_2)$  у (2) до самоспряженого вигляду стандартним чином. Вводячи нову функцію

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) = \sqrt{P(\xi_1, \xi_2)} f(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2),$$

отримуємо інтегральне рівняння

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) \varphi(\xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) d\xi'_1 d\xi'_2$$

із симетричним ядром

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) = K(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) \sqrt{P(\xi_1, \xi_2) P(\xi'_1, \xi'_2)}.$$

Отже, ми отримали самоспряжену узагальнену задачу на власні значення

$$L(\lambda_1, \lambda_2)\varphi \equiv (T(\lambda_1, \lambda_2) - I)\varphi = 0, \quad \lambda_1 = c_1, \lambda_2 = c_2,$$

з неперервно диференційовним за параметрами  $c_1$  та  $c_2$  оператором  $T(c_1, c_2)$ .

Існування частинних похідних Фреше  $\frac{\partial T(c_1, c_2)}{\partial c_i}$ ,  $i = 1, 2$ , та  $\frac{\partial^2 T(c_1, c_2)}{\partial c_i \partial c_j}$ ,

$i, j = 1, 2$  у довільних точках  $c_1 = \mu$ ,  $c_2 = \nu$  впливає з неперервності ядра

$\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)$  за сукупністю своїх змінних в області  $\Omega \times \Omega$  та існування й

неперервності в  $\Omega \times \Omega$  похідних  $\frac{\partial \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)}{\partial c_i}$ ,  $i = 1, 2$ , та

$\frac{\partial^2 \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)}{\partial c_i \partial c_j}$ ,  $i, j = 1, 2$ , які, з огляду на їхню громіздкість, тут не

наводяться.

Використовуючи властивість виродженності ядра  $K(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)$ , рівняння (2) зводиться до еквівалентної системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{D}_N(\lambda, \mu) \mathbf{b}_N \equiv (\mathbf{A}_N(\lambda, \mu) - \mathbf{I}_N) \mathbf{b}_N = 0 \quad (4)$$

з симетричною матрицею  $\mathbf{A}_N(\lambda, \mu)$  розмірності  $N \times N$ ,  $\mathbf{I}_N$  — одинична

матриця розмірності  $N \times N$ ,  $\mathbf{b}_N \in R^N$ ,  $\lambda = c_1$ ,  $\mu = c_2$ .

Отже, задача знаходження ліній галуження розв'язків рівняння (3) зводиться до знаходження кривих власних значень нелінійної двопараметричної спектральної задачі (4). Очевидно, для того щоб задача (4) мала відмінний від нуля розв'язок необхідно, щоб

$$\psi(\lambda, \mu) \equiv \det \mathbf{D}_N(\lambda, \mu) = 0, \quad (5)$$

тобто власні значення задачі (4) — це нулі функції  $\psi(\lambda, \mu)$ .

Замінивши в задачі (4) параметр  $\mu$  виразом  $\mu = \alpha\lambda + \beta$  розглядається відповідна однопараметрична задача

$$\mathbf{D}_N(\lambda)\mathbf{b}_N \equiv \mathbf{D}_N(\lambda, \alpha, \beta)\mathbf{b}_N = 0$$

для фіксованих значень  $\alpha$  і  $\beta$ . Тут  $\mathbf{D}_N(\lambda)$  — дійсна  $(N \times N)$ -матриця, елементи якої нелінійно залежать від параметра  $\lambda$ . Відповідне рівняння (5) має вигляд

$$z(\lambda) \equiv \det \mathbf{D}_N(\lambda) = 0. \quad (6)$$

Очевидно, що якщо  $\lambda$  — розв'язок рівняння (6), то  $(\lambda, \mu = \alpha\lambda + \beta)$  є власним значенням задачі (5). Отже, розв'язуючи рівняння (6) для послідовності різних значень  $\alpha$  і  $\beta$ , отримуємо криві власних значень  $\mu(\lambda)$  задачі (5), тобто криві в яких від нульового розв'язку можуть відгалужуватися інші розв'язки.

В основі алгоритму — чисельна процедура обчислення похідних детермінанта матриці та алгоритм знаходження всіх власних значень у заданій області зміни спектральних параметрів [2-3].

### Список літератури

1. Синтез антенн по амплитудной диаграмме направленности. Численные методы и алгоритмы / М. И. Андрийчук, Н. Н. Войтович, П. А. Савенко, В. П. Ткачук. — К.: Наукова думка, 1993. — 256 с.
2. Подлевський Б. М. Обчислення точних похідних детермінанта матриці // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. математ. та інформ. — 2013. — Вип. 20. — С. 42—48.
3. Подлевський Б. М. Двосторонні методи розв'язування нелінійних спектральних задач. — К.: Наукова думка, 2014. — 175 с.

# ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ФУНКЦІІ ТРИКОМІ

А. М. Пономаренко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Ponomarenko\_kri@ukr.net

Інтерес до теорії спеціальних функцій за останні десятиріччя різко посилюється, оскільки ці функції відіграють велику роль у різноманітних галузях природничих, технічних наук та ін.

Трикомі у 1927 році запропонував функцію  $\Psi(a, c; x)$  [1]:

$$\Psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt, \quad (\text{Re } a > 0), \quad (1)$$

Розглянемо узагальнення функції Трикомі у вигляді:

$${}_r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} e^{-xt} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}\left(\alpha; \gamma; -\frac{r}{t^\delta}\right) dt, \quad (2)$$

де  $\text{Re } a > \text{Re } c > 0$ ,  $\{\tau, \beta\} \subset \mathfrak{R}$ ;  $\tau > 0$ ;  $\tau - \beta < 1$ ,  $\{\alpha, c\} \subset \mathbb{C}$ ,  $\delta > 0$ ,  $r > 0$ ,  $\text{Re } \alpha > \text{Re } \gamma > 0$ ;  $\Gamma(a)$  — гамма-функція [2];  ${}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(\dots)$  —  $(\tau, \beta)$  — узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [3]:

$${}_1\Phi_1^{\tau, \beta}\left(\alpha; \gamma; -\frac{r}{t^\delta}\right) = \frac{1}{B(\alpha, \gamma - \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n\tau)}{\Gamma(\gamma + n\beta)} \left(-\frac{r}{t^\delta}\right)^n \frac{1}{n!}. \quad (3)$$

Запишемо формули диференціювання для функції  ${}_r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a, c; x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} {}_r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a, c; x) &= -\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} t^a (1+t)^{c-a-1} e^{-xt} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}\left(\alpha; \gamma; -\frac{r}{t^\delta}\right) dt, \\ \frac{d^n}{dx^n} {}_r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a, c; x) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} t^{a+n-1} (1+t)^{c-a-1} e^{-xt} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}\left(\alpha; \gamma; -\frac{r}{t^\delta}\right) dt. \end{aligned}$$

Теорема. При умовах існування функції  ${}_r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a, c; x)$  справедливі такі функціональні співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} {}_r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a, c; x) &= (-1)^n \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} {}_r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a+n, c+n; x), \\ \frac{d^n}{dx^n} \left[ e^{-xr} {}_r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a, c; x) \right] &= (-1)^n e^{-xr} {}_r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a, c+n; x), \\ \left[ {}_r\mathcal{U}^{\tau-\alpha_1, \beta-\gamma}(a, c; x) \right]_{\alpha=\alpha_1+1} + (\alpha_1 - \gamma + 1) \left[ {}_r\mathcal{U}^{\tau-\alpha_1, \beta-\gamma}(a, c; x) \right]_{\alpha=\alpha_1} &= \\ = \frac{r}{\alpha_1} (\alpha_1 - \tau) (\gamma - \alpha_1 - 1) \frac{B(\tau, \beta - \tau)}{B(\alpha_1, \gamma - \alpha_1)} \frac{\Gamma(a - \delta)}{\Gamma(a)} \left[ {}_r\mathcal{U}^{\tau-\alpha_1, \beta-\gamma}(a - \delta, c - \delta; x) \right]_{\alpha=\tau, \gamma=\beta}, \tau > \alpha_1, \\ &\tau_1 + \gamma - \beta_1 - \alpha < 1. \quad (4) \end{aligned}$$

Доведемо формулу (4). Для цього в (3) змінну  $\alpha$  замінимо на  $\alpha + 1$ . Тоді одержимо:

$${}_1\Phi_1^{\tau, \beta}\left(\alpha + 1; \gamma; -\frac{r}{t^\delta}\right) = \frac{1}{B(\alpha + 1, \gamma - \alpha - 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + 1 + n\tau)}{\Gamma(\gamma + n\beta)} \left(-\frac{r}{t^\delta}\right)^n \frac{1}{n!}. \quad (5)$$

За формулою Діріхле [2]:

$$B(\alpha + 1, \gamma - \alpha - 1) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\gamma - \alpha - 1)}{\Gamma(\alpha + 1 + \gamma - \alpha - 1)} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\gamma - \alpha - 1)}{\Gamma(\alpha + \gamma - \alpha)} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha - 1)}{\Gamma(\alpha + \gamma - \alpha)} =$$

$$= \frac{\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \alpha)}{(\gamma - \alpha - 1) \Gamma(\alpha + \gamma - \alpha)} = \frac{\alpha}{(\gamma - \alpha - 1)} \mathbf{B}(\alpha, \gamma - \alpha). \quad (6)$$

З (5), (6) та властивості гамма-функції [2]  $\sigma \Gamma(\sigma) = \Gamma(\sigma + 1)$ ,  $\operatorname{Re} \sigma > 0$  отримуємо:

$$\begin{aligned} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta} \left( \alpha + 1; \gamma; -\frac{r}{t^\delta} \right) &= \frac{\gamma - \alpha - 1}{\alpha} \frac{1}{\mathbf{B}(\alpha, \gamma - \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + 1 + n\tau)}{\Gamma(\gamma + n\beta)} \left( -\frac{r}{t^\delta} \right)^n \frac{1}{n!} = \\ &= \frac{\gamma - \alpha - 1}{\alpha} \frac{1}{\mathbf{B}(\alpha, \gamma - \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha + n\tau) \Gamma(\alpha + n\tau)}{\Gamma(\gamma + n\beta)} \left( -\frac{r}{t^\delta} \right)^n \frac{1}{n!} = \\ &= \frac{\gamma - \alpha - 1}{\mathbf{B}(\alpha, \gamma - \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n\tau)}{\Gamma(\gamma + n\beta)} \left( -\frac{r}{t^\delta} \right)^n \frac{1}{n!} + \tau \frac{\gamma - \alpha - 1}{\alpha} \frac{1}{\mathbf{B}(\alpha, \gamma - \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \Gamma(\alpha + n\tau)}{\Gamma(\gamma + n\beta)} \left( -\frac{r}{t^\delta} \right)^n \frac{1}{n!} = \\ &= (\gamma - \alpha - 1) {}_1\Phi_1^{\tau, \beta} \left( \alpha + 1; \gamma; -\frac{r}{t^\delta} \right) + \left( \frac{-r\tau}{t^\delta} \right) \frac{\gamma - \alpha - 1}{\alpha} \frac{1}{\mathbf{B}(\alpha, \gamma - \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + \tau + n\tau)}{\Gamma(\gamma + \beta + n\beta)} \left( -\frac{r}{t^\delta} \right)^n \frac{1}{n!} = \\ &= (\gamma - \alpha - 1) {}_1\Phi_1^{\tau, \beta} \left( \alpha + 1; \gamma; -\frac{r}{t^\delta} \right) - \left( \frac{r\tau}{t^\delta} \right) \frac{(\gamma - \alpha - 1) \mathbf{B}(\alpha + \tau, \gamma + \beta - \alpha - \tau)}{\alpha \mathbf{B}(\alpha, \gamma - \alpha)} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta} \left( \alpha + \tau; \gamma + \beta; -\frac{r}{t^\delta} \right). \quad (7) \end{aligned}$$

В (7) виконаємо наступну заміну:  $\tau = \tau_1 - \alpha$ ,  $\beta = \beta_1 - \gamma$ ; після якої одержимо:

$$\begin{aligned} {}_1\Phi_1^{\tau_1 - \alpha, \beta_1 - \gamma} \left( \alpha + 1; \gamma; -\frac{r}{t^\delta} \right) &= (\gamma - \alpha - 1) {}_1\Phi_1^{\tau_1 - \alpha, \beta_1 - \alpha} \left( \alpha + 1; \gamma; -\frac{r}{t^\delta} \right) - \\ &- \frac{r}{t^\delta} \frac{(\tau_1 - \alpha)(\gamma - \alpha - 1) \mathbf{B}(\tau_1, \beta_1 - \tau_1)}{\alpha \mathbf{B}(\alpha, \gamma - \alpha)} {}_1\Phi_1^{\tau_1 - \alpha, \beta_1 - \gamma} \left( \tau_1; \beta_1; -\frac{r}{t^\delta} \right), \quad \tau_1 > \alpha, \quad \tau_1 + \gamma - \beta_1 - \alpha < 1. \quad (8) \end{aligned}$$

Для зручності, перепозначимо узагальнення функції Трикомі, подане у вигляді (2), у наступній формі:

$${}_r\mathcal{U}^{\tau, \beta} (a, c; x; \alpha; \gamma) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} e^{-xt} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta} \left( \alpha; \gamma; -\frac{r}{t^\delta} \right) dt, \quad (9)$$

де  ${}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(\dots)$  —  $(\tau, \beta)$  — узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [3], що визначається формулою (3).

Підставляючи одержане співвідношення (8) в узагальнення функції Трикомі (9), маємо:

$$\begin{aligned} {}_r\mathcal{U}^{\tau_1 - \alpha, \beta_1 - \gamma} (a, c; x; \alpha + 1; \gamma) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} e^{-xt} \left( (\gamma - \alpha - 1) {}_1\Phi_1^{\tau_1 - \alpha, \beta_1 - \gamma} \left( \alpha, \gamma; -\frac{r}{t^\delta} \right) \right) dt - \\ &- \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} e^{-xt} \left( \frac{r}{\alpha} t^{-\delta} (\tau_1 - \alpha) (\gamma - \alpha - 1) {}_1\Phi_1^{\tau_1 - \alpha, \beta_1 - \gamma} \left( \tau_1, \beta_1; -\frac{r}{t^\delta} \right) \right) dt = \\ &= (\gamma - \alpha - 1) \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} e^{-xt} \left( {}_1\Phi_1^{\tau_1 - \alpha, \beta_1 - \gamma} \left( \alpha, \gamma; -\frac{r}{t^\delta} \right) \right) dt - \\ &- \frac{r}{\alpha} (\tau_1 - \alpha) (\gamma - \alpha - 1) \frac{\mathbf{B}(\tau_1, \beta_1 - \tau_1) \Gamma(a - \delta)}{\mathbf{B}(\alpha, \gamma - \alpha) \Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-\delta-1} (1+t)^{c-\delta-(a-\delta)-1} e^{-xt} \left( {}_1\Phi_1^{\tau_1 - \alpha, \beta_1 - \gamma} \left( \tau_1, \beta_1; -\frac{r}{t^\delta} \right) \right) dt = \\ &= (\gamma - \alpha - 1) {}_r\mathcal{U}^{\tau_1 - \alpha, \beta_1 - \gamma} (a, c; x; \alpha; \gamma) - \\ &- \frac{r}{\alpha} (\tau_1 - \alpha) (\gamma - \alpha - 1) \frac{\mathbf{B}(\tau_1, \beta_1 - \tau_1) \Gamma(a - \delta)}{\mathbf{B}(\alpha, \gamma - \alpha) \Gamma(a)} {}_r\mathcal{U}^{\tau_1 - \alpha, \beta_1 - \gamma} (a - \delta, c - \delta; x; \tau_1, \beta_1), \\ &\quad \tau_1 > \alpha, \quad \tau_1 + \gamma - \beta_1 - \alpha < 1. \end{aligned}$$

Отже, властивість (4) доведена.

Представимо (4) згідно форми (9):

$${}^r\mathcal{U}^{\tau-\alpha, \beta-\gamma}(a, c; x; \alpha+1; \gamma) + (\alpha-\gamma+1) {}^r\mathcal{U}^{\tau-\alpha, \beta-\gamma}(a, c; x; \alpha; \gamma) = \\ = \frac{r}{\alpha}(\alpha-\tau)(\gamma-\alpha-1) \frac{\mathbb{B}(\tau, \beta-\tau) \Gamma(a-\delta)}{\mathbb{B}(\alpha, \gamma-\alpha) \Gamma(a)} {}^r\mathcal{U}^{\tau-\alpha, \beta-\gamma}(a-\delta, c-\delta; x; \tau; \beta), \tau > \alpha_1, \tau_1 + \gamma - \beta_1 - \alpha < 1. \quad (10)$$

Проводячи в (10) наступну заміну:  $\tau = \tau_1 + \alpha$ ,  $\beta = \beta_1 + \gamma$ , одержуємо:

$${}^r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a, c; x; \alpha+1; \gamma) + (\alpha-\gamma+1) {}^r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a, c; x; \alpha; \gamma) = \\ = \frac{r\tau}{\alpha}(\alpha-\gamma+1) \frac{\mathbb{B}(\tau+\alpha, \beta+\gamma-\tau-\alpha) \Gamma(a-\delta)}{\mathbb{B}(\alpha, \gamma-\alpha) \Gamma(a)} {}^r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a-\delta, c-\delta; x; \alpha+\tau; \gamma+\beta), \tau > 0, \tau - \beta < 1. \quad (11)$$

Представимо (11) у вигляді:

$${}^r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a, c; x; \alpha+1; \gamma) = (\gamma-\alpha-1) {}^r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a, c; x; \alpha; \gamma) + \\ + \frac{r\tau}{\alpha}(\alpha-\gamma+1) \frac{\mathbb{B}(\tau+\alpha, \beta+\gamma-\tau-\alpha) \Gamma(a-\delta)}{\mathbb{B}(\alpha, \gamma-\alpha) \Gamma(a)} {}^r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a-\delta, c-\delta; x; \alpha+\tau; \gamma+\beta), \tau > 0, \tau - \beta < 1. \quad (12)$$

Замінімо в (12)  $\alpha$  на  $\alpha+v-1$  та застосуємо до виразу  ${}^r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a, c; x; \alpha+v-1; \gamma)$ , що буде знаходитися в правій частині отриманої формули перетворення (12). Повторення цієї послідовності дій  $\nu$  разів, приводить до отримання загальнішої формули для узагальнення функції Трикомі у вигляді (2) у позначенні (9):

$${}^r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a, c; x; \alpha+v; \gamma) = \frac{r\tau}{\alpha+v-1}(\alpha+v-1-\gamma+1) \frac{\mathbb{B}(\tau+\alpha+v-1, \beta+\gamma-\tau-\alpha-v+1) \Gamma(a-\delta)}{\mathbb{B}(\alpha+v-1, \gamma-\alpha-v+1) \Gamma(a)} \times \\ \times {}^r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a-\delta, c-\delta; x; \alpha+v-1+\tau; \gamma+\beta) + \sum_{k=1}^{\nu-1, (\nu-1) \in \mathbb{N}} \left[ \prod_{l=1}^k (\alpha+v-l) \right] \times \\ \times \frac{r\tau}{\alpha+v-k-1}(\alpha+v-k-1-\gamma+1) \frac{\mathbb{B}(\tau+\alpha+v-k-1, \beta+\gamma-\tau-\alpha-v+k+1) \Gamma(a-\delta)}{\mathbb{B}(\alpha+v-k-1, \gamma-\alpha-v+k+1) \Gamma(a)} \times \\ \times {}^r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a-\delta, c-\delta; x; \alpha+v-k-1+\tau; \gamma+\beta) + \prod_{k=1}^{\nu} (\gamma-\alpha-v+k-1) {}^r\mathcal{U}^{\tau, \beta}(a, c; x; \alpha; \gamma),$$

де  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}$  — множина натуральних чисел,  $\operatorname{Re} a > \operatorname{Re} c > 0$ ,  $\{\tau, \beta\} \subset \mathfrak{R}$ ;  $\tau > 0$ ;  $\tau - \beta < 1$ ,  $\{a, c\} \subset C$ ,  $\delta > 0$ ,  $r > 0$ ,  $\operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Re} \gamma > 0$ .

### Список літератури

1. Tricomi F. Funzioni Ipergeometriche Confluenti Monografie Matem. — Rome, 1954.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1973. — Т. 1. — 296 с.
3. Virchenko N. On the generalized confluent hypergeometric function and its application // J. Fract. Calculus and Appl. Anal. — 2006. — 9, No. 2. — P. 101–108.

## АНАЛІТИЧНЕ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЙ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ ТА ЇХ ЗМІННІ ПЕРІОДИ

М. В. Приймак, Л. П. Дмитроца, Я. П. Василенко, М. З. Олійник

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя,  
Тернопіль, Україна

[Kaf\\_KN@tu.edu.te.ua](mailto:Kaf_KN@tu.edu.te.ua), [dmytrotsa.lesya@gmail.com](mailto:dmytrotsa.lesya@gmail.com)

У роботі [1] було введено означення функцій зі змінним періодом. Нагадаємо його. Функція  $f(x)$  дійсного аргументу  $x \in I \subseteq \mathbb{R}$  називається **функцією зі змінним періодом (ФЗП)**, якщо існує така диференційовна функція  $T(x) > 0$ , що для всіх  $x \in I$  таких, що  $x + T(x) \in I$ , виконується рівність

$$f(x) = f(x + T(x)).$$

Функція  $T(x)$  називається *змінним періодом*.

Із цього визначення випливає, що при  $T(x) = T = \text{const}$   $f(x)$  є періодичною функцією з періодом  $T$ .

Уважатимемо надалі, що область визначення  $I = [a, b]$  в кожному конкретному випадку повинна уточнюватися, що буде зустрічатися нижче.

Наведене означення виникло як модель реальних сигналів із змінним періодом. До таких належить електрокардіограма пацієнта, отримана відразу ж після фізичного навантаження і яка розглядається протягом деякого проміжку часу, поки пульс приходить в «норму». Цікавий приклад явища зі змінним періодом, що має філософсько-узагальнюючий характер, зустрічаємо у висловлюванні В. І. Вернадського: «... ходові наукової думки властива певна швидкість руху, що вона закономірно змінюється з часом, причому спостерігається зміна періодів її замирання і періодів її підсилення».

Яким чином вивчати функції зі змінним періодом, в першу чергу емпіричні функції (за термінологією Лузіна — безформульні функції), отримані в результаті спостережень за протіканням певних процесів, явищ чи під час проведення експериментальних досліджень?

Основоположні кроки вже зроблені. Крім наведеного вище означення функції із змінним періодом, що по суті є моделлю емпіричних функцій із змінним періодом, в [2] розглянуті приклади елементарних ФЗП, якими є тригонометричні функції  $\sin x^\alpha$ ,  $\cos x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ ,  $x \in I = [0, \infty)$ , для цих

функцій записані їх змінні періоди:  $T(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$ ,  $x \in [0, \infty)$ ,

$T^-(x) = x + (x^\alpha - 2\pi)^{1/\alpha}$ ,  $x \in [T(0), \infty)$ . Також показано, що

тригонометрична система функцій  $\sin kx^\alpha$ ,  $\cos kx^\alpha$ ,  $x \geq 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,

змінний період якої  $T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$ , є ортогональною на інтервалі  $[x, x + T_\alpha(x)]$ ,  $x > 0$ , із ваговою функцією  $\rho_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ .

Наведені вище результати є підставою для розробки теорії рядів Фур'є ФЗП, методів їх спектрального аналізу тощо. Звичайно, що при цьому обов'язково виникнуть питання перевірки тих чи інших положень теорії на конкретних прикладах з використанням для цього ФЗП, які були б задані аналітично. Однак на даний час способи (методи) аналітичного задання функцій зі змінним періодом відсутні, за винятком згаданих вище тригонометричних ФЗП.

**Мета роботи** — провести аналіз існуючих способів аналітичного задання періодичних функцій та запропонувати способи аналітичного задання функцій зі змінним періодом і записати формули (вирази) їх змінних періодів.

**Способи задання періодичних функцій.** Аналіз літературних джерел показує, що відомі способи (методи) задання періодичних функцій (з постійним періодом) умовно можна розділити на три групи. Це графічно-описові методи, методи «зсуву» (паралельного переносу) та аналітичні методи. Зупинимось лише на огляді деяких аналітичних методів, даючи їм назви відповідних функцій.

а) Показникова функція:  $f(x) = a^{g(x)}$ , де  $a > 0$ ,  $g(x)$  — тригонометрична функція, найчастіше  $g(x) = \sin x$  або  $g(x) = \cos x$ .

б) Степенева функція:  $f(x) = (g(x))^a$ ,  $a > 0$ ,  $g(x)$  — тригонометрична функція.

в) Модуль функції:  $f(x) = |g(x)|$ , де  $g(x)$  — тригонометрична функція. В більш загальному випадку  $f(x) = h(|g(x)|)$ ,  $h(\cdot)$  є неперервна функція.

г) Знак (сигнум) функції:  $f(x) = \text{sign } g(x)$ ,  $g(x)$  — тригонометрична функція.

е) Дробова частина:  $f(x) = g(\{x\})$ , де  $g(\cdot)$  — неперервна зростаюча (спадна) функція,  $\{x\}$  — дробова частина числа (аргумента)  $x$ .

Способи аналітичного задання періодичних функцій легко продовжити.

**Способи задання періодичних функцій із змінним періодом.** Кожний із цих способів — це певним чином побудована суперпозиція спеціально підібраних функцій. Ось деякі функції із змінним періодом, що задаються аналітично.

а) Показникова функція:  $f(x) = a^{g(x)}$ , де число  $a > 0$ ,  $g(x)$  — тригонометрична функція із змінним періодом, найчастіше  $g(x) = \sin x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ , або  $g(x) = \cos x^\alpha$ .

b) Степенева функція:  $f(x) = (g(x))^a$ , де число  $a$  та функція  $g(x)$  такі ж, як і в пункті а).

с) Модуль функції:  $f(x) = |g(x)|$ ,  $g(x)$  — тригонометрична функція із змінним періодом.

d) Знак (сигнум) функції:  $f(x) = \text{sign } g(x)$ ,  $g(x)$  — тригонометрична функція із змінним періодом.

f) Дробова частина:  $f(x) = \{g(x)\}^a$ , де  $a > 0$ ,  $\{\cdot\}$  — дробова частина,  $g(x)$  — деяка нелінійна неперервна зростаюча (спадна) функція.

Як і у випадку з періодичними функціями, способи аналітичного задання функцій із змінним періодом можна продовжити.

Розглянемо приклади деяких функцій із змінним періодом, заданих аналітично.

**Приклад 1.** Степенева функція  $f(x) = \left(\sin x^{4/3} + \frac{1}{2}\right)^2$  (рис. 1), її змінний період  $T(x) = -x + \left(x^{4/3} + 2\pi\right)^{3/4}$  (рис. 4).

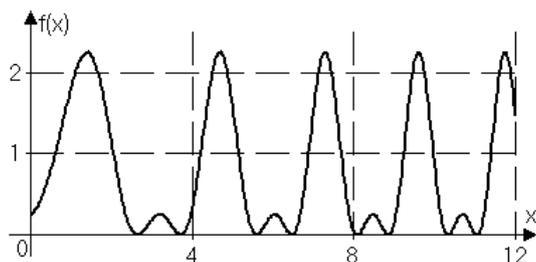


Рис. 1. Графік функції  $f(x) = \left(\sin x^{4/3} + \frac{1}{2}\right)^2$

**Приклад 2.** Суперпозиція степеневі функції та функції «дробова частина»  $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$  (рис. 2). Графік цієї функції — це коливань пилкоподібної форми із змінним періодом  $T(x) = -x + \left(x^{3/5} + 1\right)^{5/3}$  (рис. 4).

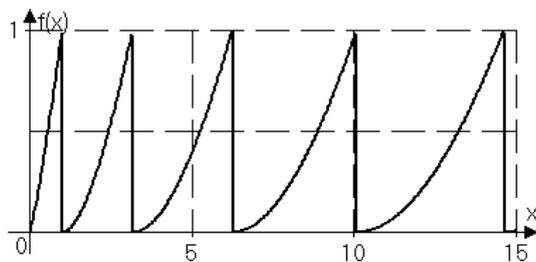


Рис. 2. Графік функції  $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$

**Приклад 3.** Суперпозиція логарифмічної функції та функції «дробова частина»  $f(x) = \{\log_c x\}$ ,  $x \geq 1$ ,  $c > 1$ . Для цієї функції її змінний період  $T(x) = x(c - 1)$ . При  $c = 3$  графік функції  $f(x) = \{\log_3 x\}$  показаний на рис. 3.

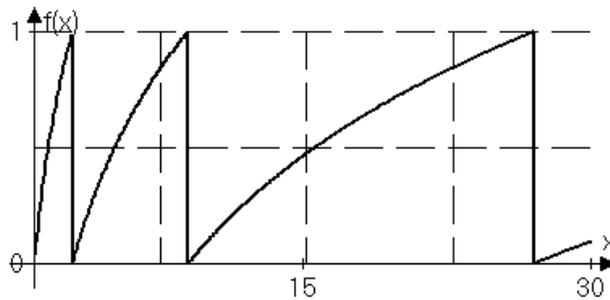


Рис. 3. Графіки функції  $f(x) = \{\log_3 x\}$

**Приклад 4.** Графіки змінних періодів (рис. 4).

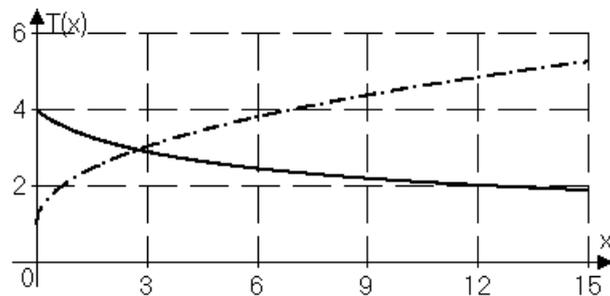


Рис. 4. Графіки змінних періодів:

$$T(x) = -x + \left(x^{4/3} + 2\pi\right)^{3/4} \text{ — суцільна лінія}$$

$$\text{та } T(x) = -x + \left(x^{3/5} + 1\right)^{5/3} \text{ — штрих-пунктирна лінія}$$

У роботі проведено огляд існуючих способів аналітичного задання періодичних функцій, запропоновано способи аналітичного задання функцій зі змінним періодом. Наведено приклади аналітично заданих функцій зі змінним періодом та записано їх змінні періоди. Отримані результати можуть бути використані при перевірці теорії рядів Фур'є функцій зі змінним періодом.

#### Список літератури

1. Приймак М. В., Боднарчук І. О., Лупенко С. А. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. — 2005. — Т. 10, № 2. — С. 132—141.
2. Василенко Я. П., Дмитроца Л. П., Приймак М. В. Клас функцій із змінним періодом // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. — № 1105. — Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». — 2014. — Вип. 24. — С. 21—32.

## ФУНКЦІЯ $\tau_3(\omega)$ В АРИФМЕТИЧНІЙ ПРОГРЕСІЇ

А. С. Радова

Національний одеський університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

[radova\\_as@mail.ru](mailto:radova_as@mail.ru)

Нехай  $\mathbb{Z}[i]$  — кільце цілих гаусових чисел та  $k \geq 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Нехай функція дільників  $\tau_k(\omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{Z}[i]$ , в ряді Діріхле

$$Z^k(s) = \sum_{\omega}^* \frac{\tau_k(\omega)}{N^s(\omega)}, \quad \operatorname{Re} s > 1$$

де  $N(\omega) = |\omega|^2$  — норма цілого гаусова  $\omega$ ,  $Z(s)$  —  $Z$ -функція Гекке).

Розглянемо випадок  $k = 3$  та побудову асимптотичної формули суми

$$D_k(x; l, q) = \sum_{\substack{N(\omega) \leq x \\ \omega \equiv l \pmod{q}}} \tau_k(\omega), \quad (1 \leq N(l) < N(q), (l, q) = 1),$$

зокрема, дослідимо значення  $q$  і  $x$ , для яких ця формула є нетривіальною.

Аналогічна задача була розглянута в працях Deshouillers і Iwaniec [1] та Heath-Brown [2].

**Лема.** Нехай  $l, q$  — додатні цілі,  $q > 1$ ,  $l$  не ділиться на  $q$ , і нехай  $J(l, q)$  — кількість розв'язків  $x^2 + y^2 \equiv l \pmod{q}$ . Тоді маємо

$$J(l, q) = E(l, q)q \prod_{\substack{p^a | q \\ p \text{ не парне}}} \left\{ 1 - \frac{(\chi_4(p))^{v_p((l, p^a))+1} - \chi_4(p^{a+1})}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{b=a-v_p((l, p^a))}^{a-1} \chi_4(p^{a-b}) \right\},$$

де

$$E(l, q) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } q \text{ не парне або } q \equiv 2 \pmod{4}; \\ 1, & \text{якщо } q \equiv 0 \pmod{4}, v_2(l) > v_2(q) - 2; \\ 2, & \text{якщо } q \equiv 0 \pmod{4}, l \cdot 2^{-v_2(l)} \equiv 1 \pmod{4}; \\ 0, & \text{якщо } q \equiv 0 \pmod{4}, l \cdot 2^{-v_2(l)} \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Доведено теорему.

**Теорема.** Нехай  $l, q$  — додатні цілі,  $1 \leq l < q$ ,  $(l, q) = 1$ . Тоді при  $x \rightarrow \infty$

маємо

$$\sum_{\substack{N(\omega) \leq x \\ N(\omega) \equiv l \pmod{q}}} \tau_3(\alpha) = \frac{x}{q^2} J(l, q) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{N(p)}\right)^2 P_2(\log x) + \\ + \frac{x}{q^2} J(l, q) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{N(p)}\right) P_1(\log x) + \frac{12x}{q^2} J(l, q) + O\left(x^{\frac{5}{7} + \varepsilon}\right),$$

де  $P_j(u)$  — многочлен  $j$ -го степеня з коефіцієнтами, що не залежать від  $x, l, q$ .

#### Список літератури

1. Deshouillers J.-M. and Iwaniec M. An additive divisor problem // Proc. London Math. Soc. (2). — 1982. — **26**. — P. 1—14.

2. Heath-Brown D. R. The divisor function  $d_k(n)$  in arithmetic progressions // Acta Arith. — 1986. — 47 (1). — P. 29—56.

## ПІДРАХУНОК ПЕРЕСТАНОВОК ІЗ ЗАДАНОЮ ДИСТАНЦІЄЮ

О. В. Рибак

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

semperfi@ukr.net

Для перестановки  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ , яка складається з чисел  $1, 2, \dots, n$ , однією з мір неупорядкованості є її дистанція

$$d = |i_1 - 1| + |i_2 - 2| + \dots + |i_n - n|.$$

Якщо  $d = 0$ , то перестановка має вигляд  $(1, 2, \dots, n)$ , тобто її елементи повністю впорядковані за зростанням. Чим більша дистанція, тим більше перестановка  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  відрізняється від  $(1, 2, \dots, n)$ .

Помітимо, що  $d$  може бути лише парним числом: доданки  $|i_1 - 1|, |i_2 - 2|, \dots, |i_n - n|$  мають ту ж парність, що і  $(i_1 - 1), (i_2 - 2), \dots, (i_n - n)$ , а останні в сумі дають 0.

При заданій кількості елементів  $n$  максимальну дистанцію  $\lceil n^2 / 2 \rceil$  має зворотна перестановка  $(n, n - 1, \dots, 1)$ . Це легко довести за допомогою наступних міркувань: якщо дано довільну перестановку  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ , то при зміщенні числа  $n$  вліво, а числа 1 вправо ми не зменшимо дистанції. Потім будемо аналогічно зсувати елементи  $n - 1$  та 2, і так далі. Наприкінці отримаємо  $(n, n - 1, \dots, 1)$  і на кожному кроці дистанція не зменшувалася. Тому у вихідній перестановки вона була не більшою за  $\lceil n^2 / 2 \rceil$ . Але, як не дивно, перестановок з максимальною дистанцією багато. Наприклад, для  $n = 4$  це  $(4321), (4312), (3421)$  та  $(3412)$ .

Цікавою є задача підрахунку перестановок із заданою дистанцією. Для її розв'язання застосуємо метод динамічного програмування. Він полягає в тому, що значення для більших  $n$  розраховуються завдяки значенням для менших  $n$ . Але в нашому випадку одразу здійснити підрахунок не вдається, бо додавання нового елемента  $n + 1$  може по-різному змінити дистанцію перестановки. Тому потрібно застосувати динамічне програмування з розширеним набором параметрів. А саме, будемо розглядати не лише звичайні перестановки, але й перестановки з вільними місцями. Тобто деякі з чисел  $i_1, i_2, \dots, i_n$  будуть дорівнювати 0, а інші прийматимуть значення від 1 до  $n$ . Нулів може бути багато, а інші числа повторюватися не можуть. Елементи  $i_k$ , що дорівнюють 0, позначають числа, які перевищують  $n$ . Тому ми поки що не цікавимося значенням таких чисел, символічно замінюючи їх нулями. Дистанція для  $i_k = 0$  розраховуватиметься за формулою  $2(n - k)$ .

Наприклад,  $(4, 0, 2, 0, 5)$  має дистанцію

$$|4 - 1| + 2(5 - 2) + |2 - 3| + 2(5 - 4) + |5 - 5| = 12.$$

З геометричної точки зору такий підхід означає наступне. Уявімо, що кожен елемент був зв'язаний ниточкою зі своїм місцем. Потім ми обрізали частину перестановки, яка знаходиться правіше  $i_n$ , і підраховували загальну довжину всіх ниточок, розташованих лівіше розрізу.

Нехай  $P(n, d, f)$  — це кількість перестановок з  $n$  елементами, дистанцією  $d$  та  $f$  вільними місцями. Якщо ми перейдемо від  $n - 1$  до  $n$ , то у нас на місці одного з нулів може з'явитися елемент, рівний  $n$  (всього  $f$  варіантів). Також один з відсутніх  $f$  елементів може виявитися на місці  $i_n$  (теж  $f$  варіантів). Ці дві події можуть трапитися незалежно одна від одної, тобто можливі 4 варіанти. Ще може так статися, що  $i_n = n$ , а тоді всі попередні місця залишаються вільними. Тому усього 5 варіантів переходу від  $n - 1$  до  $n$ . Кожного разу дистанція перестановки збільшується на  $2f$ . Тому маємо рекурентну формулу:

$$P(n, d, f) = (f + 1)^2 P(n - 1, d - 2f - 2, f + 1) + (2f + 1)P(n - 1, d - 2f, f) + P(n - 1, d - 2f + 2, f - 1).$$

Кількість звичайних перестановок з  $n$  елементами та дистанцією  $d$  дорівнює  $P(n, d, 0)$ .

Задача на подібну тему була запропонована автором на Міжнародну студентську олімпіаду з математики 2008 року. [1]

#### Список літератури

1. Матеріали Міжнародної студентської олімпіади з математики 2008 року: [http://www.imc-math.org.uk/imc2008/day1\\_solutions.pdf](http://www.imc-math.org.uk/imc2008/day1_solutions.pdf) (задача 6).

## САГАЙДАКИ МАТРИЦЬ ПОКАЗНИКІВ

Н. М. Савенюк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

nataliya.savenyuk@mail.ru

Матриці показників виникли при вивченні черепичних порядків. Сагайдак матриці показників співпадає із сагайдаком черепичного порядку.

**Означення 1.** Цілочисельна матриця  $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$  називається матрицею показників, якщо

$$(1) \quad \alpha_{ii} = 0 \text{ для всіх } i = 1, \dots, n;$$

$$(2) \quad \alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik} \text{ для всіх } 1 \leq i, j, k \leq n;$$

Матриця показників називається зведеною, якщо  $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$  при  $i \neq j$ .

Нехай  $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$  — зведена матриця показників. Покладемо

$$\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij}),$$

де  $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$  при  $i \neq j$  та  $\beta_{ii} = 1$  для  $i, j = 1, \dots, n$ ,

$$\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij}), \text{ де } \gamma_{ij} = \min_k (\beta_{ik} + \beta_{kj}).$$

Очевидно, що  $\mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$  є  $(0,1)$ -матрицею.

**Теорема [2].** Матриця  $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$  є матрицею суміжності сильнозв'язного простого сагайдака  $Q = Q(\mathcal{E})$ .

**Означення 2.** Сагайдак  $Q(\mathcal{E})$  називається сагайдаком зведеної матриці показників  $\mathcal{E}$ .

**Теорема.** Нехай  $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}), A = (a_{ij})$  зведені матриці показників,  $\mathcal{E} \in M_n(\mathbb{Z}), A \in M_{n-1}(\mathbb{Z})$  та  $a_{ij} = \alpha_{ij}$  при  $i, j < n, [Q(\mathcal{E})] = (q_{ij}), [Q(A)] = (\bar{q}_{ij})$   $\bar{q}_{ij} = 1$  тоді і лише тоді, коли або  $q_{ij} = 1$  або  $q_{ij} = 0$  і існують стрілки з  $i$  в  $n$  та з  $n$  в  $j$ .

### Список літератури

1. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V. Algebras Rings and Modules. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publish., 2004. — 380 p.

2. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V. Algebras Rings and Modules. Vol. 2. — Mathematical and Its Applications. — Springer, 2007. — 400 p.

## ДО ТЕОРІЇ МНОГОВИДІВ МОДАЛЬНИХ ГРУП

Т. І. Савочкіна

Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди,

Харків, Україна

savochkinat@rambler.ru

Одним із продуктивних напрямків дослідження в теорії груп є такий в якому решітка підгруп  $RG$  групи  $G$  міститься у фіксованому многовиді решіток  $\beta$ . Клас усіх таких груп позначимо  $\Gamma(\beta)$ . В роботах [1—3] детально досліджено групи для конкретних многовидів решіток (дистрибутивних, модулярних та інших). Відмітимо наступні важливі факти:

а) якщо  $\alpha$  — многовид дистрибутивних решіток, то  $\Gamma(\beta)$  — клас усіх локально циклічних груп ([3], теорема 14);

б) нехай  $\delta$  — многовид модулярних решіток, тоді всяка група  $G$  із  $\Gamma(\delta)$  є прямим добутком груп  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , кожна із яких або модулярна  $p$ -група, або  $P_0^*$ -група, при цьому порядку груп  $P_i$  і  $P_j$  ( $i \neq j$ ) взаємно прості ([1], теорема 13).

Решітка підгруп  $L$  називається модальною ( $n$ -модальною), якщо для довільних елементів  $t, x_1, \dots, x_n \in L$  виконується нерівність  $t \wedge M(x_1, \dots, x_n) \leq K(x_1, \dots, x_n)$ , де  $M(x_i) = \bigwedge_{j \neq i} (x_j \vee x_i)$ ,  $K(x_i) = \bigvee_{i=1}^n (t \wedge x_i)$ . Многовид усіх модальних решіток позначимо  $\gamma_n$ . Якщо група  $G \in \Gamma(\gamma_4)$ , то група  $G$  називається модальною (або 4-модальною). Модальні групи параметра  $n = 3$  досліджувалися в роботах [4], [5]. Опис 4-модальних груп започатковано в [5].

У роботі дано повний опис 4-модальних груп, а саме сформульовані загальні твердження про них, встановлено будову періодичних 4-модальних груп, а також неперіодичних 4-модальних груп. Зокрема доведено наступні твердження.

**Теорема 1.** Нехай  $G$  — довільна 4-модальна група, тоді:

1) для довільних елементів  $x, y \in G$  маємо включення

$$x \cdot y^2 \cdot x^{-1} \in \langle y^2 \rangle;$$

2) на групі  $G$  істина тотожність  $[x^2, y^2] = 1$ .

**Лема 1.** Нехай  $F$  — скінченна абелева 4-модальна і нециклічна  $p$ -група.

Тоді

1) якщо  $p = 2$ , то  $F$  — група Клейна або  $F = A_2 \times A_4$ , де  $A_i$  — циклічна  $i$ -го порядку;

2) якщо  $p = 3$ , то  $F$  — нециклічна група 9-го порядку.

**Лема 2:** а) якщо в періодичній 4-модальній групі  $G$  елементи  $a, b$  такі, що комутатор  $c = [a, b] \neq 1$  належить центру підгрупи  $D = \langle a, b \rangle$ , то  $D$  містить групу кватерніонів  $Q$ ;

б) якщо на неабелевій періодичній 4-модальній групі  $G$  істина тотожність  $[x^2, y] = 1$ , то група  $G$  містить групу кватерніонів  $Q$ .

**Лема 3.** Усяка 4-модальна періодична стаціонарна група  $G$  містить у собі узагальнену симетричну групу  $S_3^* = S_3(m)$ .

**Лема 4.** Нехай  $G$  — періодична 4-модальна і стаціонарна група. Тоді для довільного елемента  $f \in H(G) \setminus S_3(m)$  і довільного елемента  $g \in G \setminus H$  має місце рівність  $f \cdot g = g \cdot f$ .

**Теорема 2.** Для неабелевої періодичної групи  $G$  наступні умови рівносильні:

- 1)  $G$  — 4-модальна група, на якій істина тотожність  $[x, y^2] = 1$ ;
- 2)  $G = Q \times A \times B$ , де  $Q$  — група кватерніонів,  $A$  — нециклічна група 9-го порядку, а  $B$  — локально циклічна група і  $(Q, B) = (A, B) = 1$  (групи  $A$  або  $B$  можуть бути і тривіальними).

Нехай  $G$  — довільна група, на якій істина тотожність  $[x^2, y^2] = 1$  і для якої існують елементи  $u, v \in G$  такі, що  $[u, v^2] \neq 1$ . Таку груп  $G$  будемо надалі називати стаціонарною групою. Далі, групу

$$S_3^* = S_3(m) = \langle x, y \mid x^3 = 1, y^{2^m} = 1, x \cdot y = y \cdot x^{-1} \rangle$$

будемо називати узагальненою симетричною групою.

**Теорема 3.** Періодична стаціонарна група  $G$  є модальною тоді і тільки тоді, коли  $G = A \times S$ , де  $A$  — абелева періодична 4-модальна група, а  $S$  — узагальнена симетрична і  $(|A|, |S|) = 1$ .

Відмітимо, що теореми 2, 3 дають повний опис періодичних модальних груп. Нехай  $G$  — 4-модальна група, яка містить як елементи скінченного порядку, так і нескінченного порядку. Відомо, що на  $G$  істина тотожність

$$x^2 \cdot y^2 = y^2 \cdot x^2,$$

а тому множина усіх елементів виду  $z^2$ , де  $z \in G$ , породжує абелеву підгрупу  $H$ , а тому  $H \triangleleft G$  і фактор-група  $\bar{G} = G/H$  є елементарною 2-групою.

**Теорема 4.** Усяка 4-модальна група  $G$ , яка містить елемент нескінченного порядку, є локально-циклічною групою.

У роботі використовуються факти з теорії многовидів та їх решіток [6—8].

#### Список літератури

1. Судзуки М. Строение группы и строение структуры ее подгрупп. М: Изд. ин. лит., 1960. — 158 с.
2. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. — М: Наука. — 1980. — 384 с.
3. Биркгоф Г. Теория решеток. — С. 568. — М.: Наука, 1984.
4. Мельник И. И. Некоммутативные модальные группы // ДЭП. ВИНТИ, 1983. — № 9679. — С. 1—17.
5. Савочкіна Т. І., Мельник І. І. Структурні властивості модальних груп і їх многовидів (Частина 1) // Математичний вісник наукового товариства ім. Тараса Шевченка, 2013. — Т. 10. — С. 45—50.
6. Нейман Х. Многообразия групп. — М.: Мир, 1969. — 204 с.
7. Senashov V. I. On Shunkov groups with a strongly embedded group // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics, 2009. — Vol. 266., No. 12. — P. 210—217.
8. Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю. II. Тождества // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, 1988. — Т. 18. — С. 117—248.

## ПРО \*-ЗОБРАЖЕННЯ СІМЕЙ ОРТОПРОЕКТОРІВ СТРУКТУРОВАНИХ ГРАФАМИ-ДЕЕРЕВАМИ

Є. Є. Самойленко

*Миколаївський національний аграрний університет, Миколаїв, Україна*  
[sam7@imath.kiev.ua](mailto:sam7@imath.kiev.ua)

Описання незвідних  $n$ -ок підпросторів (те ж саме, що  $n$ -ок ортопроекторів) при  $n \geq 3$  без додаткових умов є  $*$ -дикою задачею, тобто «безнадійною» (див. [1]). Це означає, що для такого опису необхідно враховувати структурні властивості сімей ортопроекторів ( $n$ -ок підпросторів).

Останнім часом з'явилося багато робіт [2, 3] присвячених проблемі існування  $*$ -зображень для сімей ортопроекторів  $\mathcal{S}_{\tau, \Gamma}$  структурованих графами  $\Gamma$ , тобто:

$$\mathcal{S}_{\tau, \Gamma} = \left\{ H \rightarrow H_i \mid \begin{array}{l} P_i = P_i^2 = P_i^* : \\ P_i P_j P_i = \tau P_i, \quad P_j P_i P_j = \tau P_j \iff (i, j) \in R_\Gamma; \\ P_i P_j = P_j P_i = 0 \iff (i, j) \notin R_\Gamma; \end{array} \quad i, j \in I \right\},$$

де  $R_\Gamma$  — множина ребер графа  $\Gamma$ ,  $H$  — гільбертовий простір, а  $H_i \subset H$  — його нетривіальні підпростори утілюючи тим самим принцип «немає інших алгебр окрім операторних». Але ж теорія операторів потребує не тільки теорем існування, а й самих  $*$ -зображень для різних сімей ортопроекторів.

Доведено ряд структурних теорем та на їх основі наведено алгоритм побудови  $*$ -зображень (з точністю до унітарних перетворень) для сімей ортопроекторів структурованих скінченими графами-деревами:

- 1) запис сім'ї ортопроекторів у операторно-матричному вигляді;
- 2) запис сім'ї ортопроекторів у вигляді матриці;
- 3) використання структурних теорем для знаходження елементів дійснозначної матриці, зокрема і у параметричному вигляді;
- 4) знаходження області визначення незалежних параметрів;
- 5) аналіз адекватності результатів та безпосередня перевірка структурних співвідношень.

Побудовано  $*$ -зображення для сімей ортопроекторів структурованих такими графами-деревами:

- 1) графи-зірки  $K_{1,n}$  (див. рис. 1), їм відповідає сім'я ортопроекторів відома під назвою ALL-BUT-ONE ортопроектори;
- 2) графи-дерева та розширені графи-дерева Динкіна:  $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$  (див. рис. 2-10);
- 3)  $H_{p,q,r}$ -графи (див. рис. 11);
- 4)  $T_{p,q,r}$ -графи (див. рис. 12)
- 5) та інші.

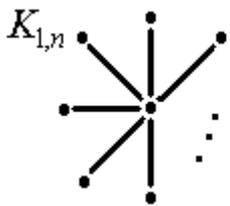


Рис. 1

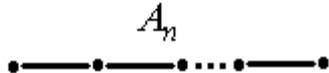


Рис. 2

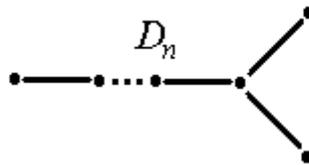


Рис. 3

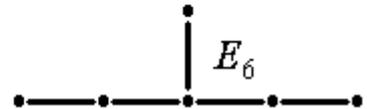


Рис. 4



Рис. 5

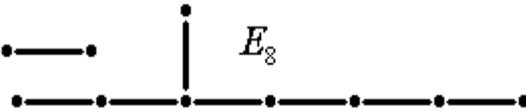


Рис. 6

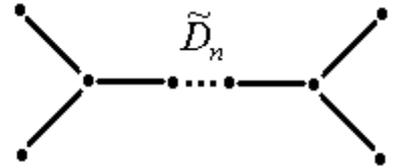


Рис. 7

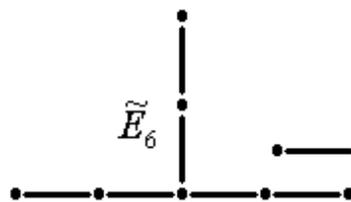


Рис. 8

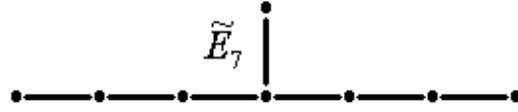


Рис. 9

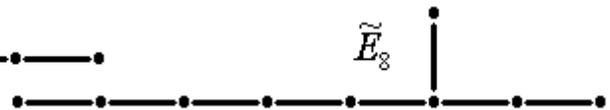


Рис. 10

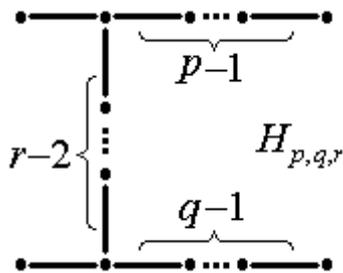


Рис. 11

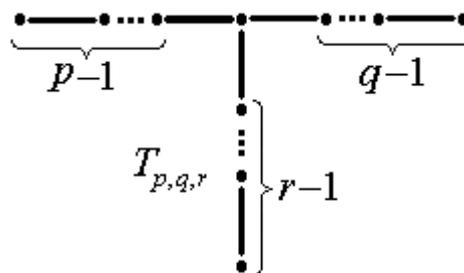


Рис. 12

### Список літератури

1. Кругляк С. А., Самойленко Ю. С. Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов // Функцион. анализ и его прил. — 1980. — 14, № 1. — С. 60—62.
2. Самойленко Ю. С., Стрелец А. В. О простых  $n$ -ках подпространств гильбертова пространства // Укр. мат. журн. — 2009. — 61, № 12. — С. 1668—1706.
3. Власенко М. А., Попова Н. Д. О конфигурациях подпространств гильбертова пространства с фиксированными углами между ними // Укр. мат. журн. — 2004. — 56, № 5. — С. 606—615.

**О РАСШИРЕНИИ ОСНОВНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ  
ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ, СВЯЗАННОМ  
С ИНВАРИАНТНЫМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ  
В ТЕОРИИ ТАКИХ ПРОСТРАНСТВ**

**Е. Н. Синюкова**

*Южноукраинский национальный педагогический университет  
имени К. Д. Ушинского», Одесса, Украина  
marbel@ukr.net*

Как известно, инвариантные приближения в теории пространств аффинной связности  $A^n$  основываются на рядах Тейлора для тензорных полей и объекта аффинной связности пространства  $A^n$  ([1, 2]). Наиболее естественная ковариантная форма таких рядов получена А. Н. Александровым и К. А. Пирагасом ([2]). Ими исследованы основные алгебраические и дифференциальные свойства соответствующих рядов. Однако, сложность структуры коэффициентов указанных рядов Тейлора в пространствах, отнесенных к произвольной системе координат, и невозможность оценки точности получаемых на их основе приближений приводят к недостаточной эффективности данного подхода.

Гораздо целесообразнее рассматривать указанные ряды в аффинносвязном пространстве  $A^n$  (с базисным многообразием  $X^n$ ) в окрестности произвольной фиксированной точки  $M_0$  в римановой системе координат  $y^1, y^2, \dots, y^n$  с началом в точке  $M_0$ . При этом  $y^h = e^h \tau$ , где множители  $e^h$  не зависят от  $\tau$  и являются компонентами касательного в точке  $M_0$  вектора к некоторой (произвольной) геодезической линии пространства  $A^n$ , отнесенной к каноническому параметру  $\tau$ . Когда исходная система координат в  $A^n$  преобразуется, функции  $y^h$  меняются по закону изменения компонент контравариантного вектора. В окрестности точки  $M_0$ , в первом приближении относительно  $\tau$ , компоненты объекта аффинной связности пространства  $A^n$  в римановых координатах задаются ([3]) формулой

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y) = -\frac{1}{3} R_{0(ij)\alpha}^h y^\alpha \quad (1)$$

Здесь  $R_{0ijk}^h$  — компоненты тензора Римана пространства  $A^n$  в точке  $M_0$  в римановой системе координат  $y^i$ . Очевидно, что  $\tilde{\Gamma}_{ij}^h$  задают на  $X^n$  объект аффинной связности некоторого пространства  $\tilde{A}^n$  в римановой системе координат  $\tilde{y}^i = y^i$  с началом в точке  $M_0$ . При этом, определенная по закону (1)

аффинная связность, для которой компоненты тензора Римана в точке  $M_0$  взяты в исходной, произвольной системе координат  $x^i$ , эквивалентна связности (1) и, значит, также является первым приближением связности  $\Gamma^h_{ij}$  в римановой системе координат в окрестности точки  $M_0$ .

В соответствии с (1), на  $X^n$ , отнесенном к произвольной системе координат  $x^i$ , определяется ([4]) объект аффинной связности

$$\bar{\Gamma}^h_{ij}(x; y) = \Gamma^h_{ij}(x) - \frac{1}{3} R^h_{(ij)\alpha}(x) y^\alpha, \quad (2)$$

зависящий не только от координат текущей точки, но и от касательного элемента в ней, то есть от адаптированных координат  $x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n$  текущей точки касательного расслоения  $T(A^n)$ . Связность  $\bar{\Gamma}$  называется расширением связности  $\Gamma$ .

Расширенная аффинная связность (2) на  $X^n$  в некоторой степени аналогична связностям Картана и Бервальда финслеровой геометрии. В соответствии с (2), для тензорных полей на  $X^n$ , зависящих также и от касательного элемента, вводится ковариантное дифференцирование по формулам вида

$$T_i^h(x; y)_{;j} = \frac{\partial T_i^h}{\partial x^j} - y^\alpha \Gamma_{\alpha j}^\beta \frac{\partial T_\alpha^h}{\partial y^\beta} + \Gamma_{j\alpha}^h T_i^\alpha - \Gamma_{ji}^\alpha T_\alpha^h.$$

Связность (2) по правилу типа полного лифта ([5]) распространяется на все многообразии  $T(A^n)$ . В результате реализуется возможность построения геометрии касательного расслоения  $T(A^n)$ , естественным образом связанной с инвариантной теорией приближений в  $A^n$ . Изучены некоторые закономерности такой геометрии. В частности, получены формулы типа формул Риччи.

#### Список литературы

1. Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. — М.: ИЛ., 1948. — 140 с.
2. Александров А. Н., Пирагас К. А. Экспоненциальное отображение и теорема Тейлора в тензорном анализе //Препринт ИТФ. 74-70Р. — Институт теоретической физики. — К., 1974. — 25 с.
3. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. — М.: Наука, 1966. — 319 с.
4. Синюков Н. С., Синюкова Е. Н. Об инвариантных приближениях в теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств // Геометрия и анализ. — Кемерово, 1991. — С. 59—62.
5. Широков А. П. Структуры на дифференциальных многообразиях // Итоги науки и техники, ВИНТИ. Алгебра. Топология. Геометрия. — М., 1969. — С. 127—128.

## ГРУПИ З УМОВОЮ МІНІМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ПІДГРУП, ЯКІ НЕ Є УЗАГАЛЬНЕНО НІЛЬПОТЕНТНИМИ

Л. В. Скасків

Національний університет державної податкової служби України,

Ірпінь, Україна

[lila\\_yonyk@ua.fm](mailto:lila_yonyk@ua.fm)

$AC$ -групою (відповідно  $NC$ -групою) називається група, яка є розширенням абелевої (відповідно нільпотентної) групи за допомогою черніковської групи. Справедливим є таке

**Твердження.** Нехай  $G$  — недосконала локально ступінчата група. Тоді справджуються такі властивості:

(1) якщо група  $G$  періодична і всі її власні нормальні підгрупи є  $AC$ -групами, то  $G$  —  $AC$ -група;

(2) якщо всі власні нормальні підгрупи із  $G$  є  $NC$ -групами, то  $G$  —  $NC$ -група.

Звідси випливає, що не існує груп, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою абелевих груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими, та не існує груп, які не є розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських груп, в той час, як всі їхні власні підгрупи є такими.

Групу, яка є розширенням скінченної групи за допомогою нільпотентної групи, прийнято скорочено називати  $FN$ -групою. Якщо  $G$  — недосконала група, всі власні нормальні підгрупи якої є  $FN$ -групами, то група  $G$  задовольняє умову  $Min-FN$  в тому і тільки тому випадку, коли вірне одне із тверджень:

(1)  $G$  —  $FN$ -група;

(2)  $G$  — майже нільпотентна група;

(3)  $G$  — мінімальна не  $FN$ -група.

М. Ксу досліджував мінімальні не  $FN$ -групи, а Х. Отал і Х. Пена розширили розглядуваний клас заміною терміну «скінченна група» на термін «черніковська група»; вони розглядали локально ступінчаті групи, всі власні підгрупи яких є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп.

Із результатів досліджень Ф. Наполітані, Е. Пегораро та Х. Отала, Х. Пени випливає, що не існує локально ступінчатих груп, які не є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, в той час, як всі їхні власні підгрупи є такими (тобто не існує мінімальних не  $NC$ -груп).

Важливою є така характеристика груп з умовою мінімальності  $Min-\overline{FN}$  для не  $FN$ -підгруп.

**Теорема.** Нехай  $G$  — група, яка не має неодиначних досконалих секцій. Тоді група  $G$  задовольняє умову мінімальності  $Min-\overline{FN}$  для не  $FN$ -підгруп в тому і тільки тому випадку, коли вона належить до одного із типів:

(1)  $G$  —  $FN$ -група;

(2)  $G$  — майже нільпотентна група;

(3)  $G$  має таку нормальну підгрупу  $A$  скінченного індексу, що

$$A = A_0 \cdot A_1 \cdots A_n \quad (n > 1),$$

де  $A_i$  — група з нільпотентним комутантом  $A_i = A' \leq A_0$  і подільною черніковською  $p_i$ -групою  $A_i/A'_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $A_0$  — нільпотентна нормальна підгрупа із подільною черніковською фактор-групою  $A_0/A'$  (зокрема,  $A_0/A'$  — одинична) і, крім того,  $p_1, \dots, p_n$  — попарно різні прості числа.

Встановлено, що існують групи, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп, в той час, як всі їхні власні підгрупи є такими (тобто існують мінімальні не  $\check{C}N$ -групи). Тому справедливою є така

**Теорема.** Нехай  $G$  — недосконала група. Тоді  $G$  — мінімальна не  $\check{C}N$ -група в тому і тільки тому випадку, коли  $G$  — мінімальна ненільпотентна група із субнормальними власними підгрупами.

В низці робіт Х. Сміта, Л. А. Курдаченка, В. Миреса, К. Касоло, Б. Брукса та інших досліджувався вплив субнормальності на будову групи. Доведено таку теорему.

**Теорема.** Нехай  $G$  — локально нільпотентна група. Тоді справджуються такі твердження:

- (i) якщо  $G$  задовольняє умову мінімальності для ненільпотентних підгруп, то кожна підгрупа, яка є мінімальною ненільпотентною групою, субнормальна в  $G$ ;
- (ii) якщо  $G$  задовольняє умову мінімальності для негіперцентральної підгруп, то кожна підгрупа, яка є мінімальною негіперцентральною групою, субнормальна в  $G$ .

#### Список літератури

1. Heineken H., Mohamed I. J. A group with trivial centre satisfying the normalizer condition // J. Algebra. — 1968. — V.10. — P. 368—376.
2. Napolitani F., Pegoraro E. On groups with nilpotent-by-Cernikov proper subgroups // Archiv Math. — 1997. — V. 69. — P. 89—94.
3. Otal J., Peña J. M. Groups in which every proper subgroup is Cernikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Cernikov // Archiv Math. — 1988. — V. 51. — P. 193—197.
4. Xu M. Groups whose proper subgroups are finite-by-nilpotent // Archiv Math. — 1996. — V. 66. — P. 353—359.

# ОПИС ОПЕРАТОРІВ $C$ -СИМЕТРІЇ У ВИПАДКУ ПРОСТОРУ $\mathbb{C}^2$

В. І. Суділовська

Київський професійний коледж

з посиленою військовою та фізичною підготовкою, Київ, Україна

veronica.sudi@gmail.com

Розвиток псевдо-єрмітової квантової механіки протягом останніх десятиліть привів до необхідності вивчення нових класів несамоспряжених операторів. Одним з таких класів є несамоспряжені оператори з властивістю  $C$ -симетрії. В роботі описано за допомогою матриць Паулі всі можливі оператори  $C$ , які діють в двовимірному гільбертовому просторі  $\mathbb{C}^2$  зі скалярним добутком:

$$\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = x_1 \bar{x}_2 + y_1 \bar{y}_2, \quad x_j, y_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2.$$

**Означення 1.1** Оператор  $A$  в просторі Крейна  $(\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot])$  має властивість  $C$ -симетрії, якщо існує лінійний оператор  $C$  в  $\mathfrak{H}$  такий, що: (i)  $C^2 = I$ ; (ii) оператор  $J = C^*$  є додатним в  $\mathfrak{H}$ ; (iii) рівність  $ACf = CAf$  має сенс для всіх  $f$  з області визначення  $\mathcal{D}(A)$  оператора  $A$ .

В умові (ii) цього означення, обмежений оператор  $J$  задовольняє властивості

$$J^2 = I, \quad J^* = J,$$

де  $J^*$  означає спряжений оператор для оператора  $J$  відносно скалярного добутку  $(\cdot, \cdot)$  простору  $\mathfrak{H}$ . Оператор  $J$  з такими властивостями називається фундаментальною симетрією.

Довільна фундаментальна симетрія  $J$  та початковий гільбертів простір  $\mathfrak{H}$  з скалярним добутком  $(\cdot, \cdot)$  дозволяє визначити півторалінійну форму (індефінітну метрику)  $[f, g] = (Jf, g)$ ,  $f, g \in \mathfrak{H}$ .

Гільбертів простір  $\mathfrak{H}$  з індефінітною метрикою  $[\cdot, \cdot]$  називається простором Крейна і позначається як  $(\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot])$ .

Розглянемо матриці Паулі:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матриці Паулі мають властивості

$$\sigma_j \sigma_k = -\sigma_k \sigma_j, \quad j \neq k, \quad \sigma_3 \sigma_1 = i\sigma_2, \quad \sigma_1 \sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_2 \sigma_3 = i\sigma_1. \quad (1)$$

Крім того  $\sigma_j^2 = \sigma_0$ , де  $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  є одиничною матрицею.

Довільний оператор  $X$  в  $\mathbb{C}^2$  можна представити у вигляді:

$$X = \sum_{j=0}^3 x_j \sigma_j,$$

де  $x_j \in \mathbb{C}$ .

Нехай  $Y = \sum_{j=0}^3 y_j \sigma_j$ . Використовуючи (1) дістаємо,

$$X \cdot Y = \sum_{j=0}^3 x_j y_j \sigma_0 + \sum_{j=1}^3 (x_0 y_j + x_j y_0) \sigma_j + i \vec{x} \times \vec{y}, \quad (2)$$

де  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$  і «векторний добуток»  $\vec{x} \times \vec{y}$  визначається через формальний визначник

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

де

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \sigma_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \sigma_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \sigma_3.$$

Нехай  $X$  є самоспряженим оператором. Використовуючи () одержуємо

$$X^2 = \sum_{j=0}^3 x_j^2 \sigma_0 + 2 \sum_{j=1}^3 x_0 x_j \sigma_j.$$

Тому  $X^2 = \sigma_0$  тоді і тільки тоді, коли  $X = \pm \sigma_0$  або  $X = J_{\vec{\alpha}}$ , де

$$J_{\vec{\alpha}} = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sigma_j, \quad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{S}^2,$$

де

$$\mathbb{S}^2 = \{\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3 : \sum_{j=1}^3 \alpha_j^2 = 1\}.$$

Таким чином нетривіальні фундаментальні симетрії в гільбертовому просторі  $\mathbb{C}^2$  мають вигляд  $X = J_{\vec{\alpha}}$ .

Зафіксуємо фундаментальну симетрію  $J_{\vec{\alpha}}$  в гільбертовому просторі  $(\mathbb{C}^2, (\cdot, \cdot))$  і розглянемо простір Крейна  $(\mathbb{C}^2, [\cdot, \cdot]_{\vec{\alpha}})$  з індефінітною метрикою

$$[\cdot, \cdot]_{\vec{\alpha}} = (J_{\vec{\alpha}} \cdot, \cdot).$$

**Теорема.** Множина всіх операторів  $C$  в просторі Крейна  $(\mathbb{C}^2, [\cdot, \cdot]_{\vec{\alpha}})$  задається формулою

$$C = -i \sinh \rho \sin \xi J_{\vec{\beta}} + i \sinh \rho \cos \xi J_{\vec{\zeta}} + \cosh \rho J_{\vec{\alpha}}, \quad (3)$$

де  $\xi \in \mathbb{R}, \rho \geq 0$ , вектор  $\vec{\beta} \in \mathbb{S}^2$  є ортогональним до  $\vec{\alpha} \in \mathbb{S}^2$  і  $\vec{\zeta} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta}$  є векторним добутком  $\vec{\alpha}$  та  $\vec{\beta}$ .

**Приклад.3** Нехай  $\vec{\alpha} = (0,0,1)$ ,  $\vec{\beta} = (1,0,0)$ . Тоді  $\vec{\zeta} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta} = (0,1,0)$ . Тоді  $J_{\vec{\alpha}} = \sigma_3$ ,  $J_{\vec{\beta}} = \sigma_1$ ,  $J_{\vec{\zeta}} = \sigma_2$  і (3) набуває вигляд

$$C = \begin{pmatrix} \cosh \rho & \sinh \rho e^{-i\xi} \\ -\sinh \rho e^{i\xi} & -\cosh \rho \end{pmatrix}.$$

# ПРО ПІДГРУПИ НІЛЬПОТЕНТНОЇ ГРУПИ, ЩО ЗБИГАЮТЬСЯ ЗІ СВОЇМ ЗАМИКАННЯМ

О. М. Супрун

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
suprunso@ukr.net

Вивчення груп за заданими властивостями підгруп — один з основних підходів теорії топологічних груп для з'ясування особливостей будови груп та їх описання. В даній роботі використано саме такий підхід. Доведена одна властивість скінченних підгруп нільпотентної локально компактною групи: при породженні скінченною і замкненою підгрупами зв'язна компонента не збільшується, що не виконується для розв'язних та індуктивно нільпотентних груп. Побудована велика кількість прикладів, що демонструють істотність отриманих умов.

Використано такі позначення:  $\langle X \rangle$  — підгрупа, що алгебраїчно породжена множиною  $X$ ;  $\overline{\langle X \rangle}$  — підгрупа, що топологічно породжена множиною  $X$ ;  $S_p(G)$  — силовська  $p$ -підгрупа деякої групи  $G$ ;  $C_{p^\infty}$  — квазіциклічна група, де  $p$  — просте число;  $r(G)$  — топологічний варіант спеціального рангу А. І. Мальцева.

Нам знадобляться такі результати.

**Лема 1** [1]. Нехай кількість твірних групи  $G$  не перевищує  $t$  і  $G_0 = 1$ . Якщо клас нільпотентності топологічної групи  $G$  не перевищує  $k$ , то існує таке число  $n$ , яке залежить лише від  $t$  та  $k$ , що для будь-якої підгрупи  $H$  кількість її твірних не перевищує  $n$ .

Отже,  $r(G) \leq n$ .

**Лема 2** [2]. Нехай  $G$  — топологічна індуктивно нільпотентна компактно покривна група і  $G_0 = 1$ . Якщо ранги  $S_p(G)$  обмежені в сукупності, то  $r(G) < \infty$ .

Нагадаємо теорему Бернсайда для проскінченної  $p$ -групи  $H$ .

Нехай  $\overline{\langle HP, [H, H] \rangle} = M$ . Якщо  $\phi : H \rightarrow H/M = \overline{\langle \bigcup_{\alpha} x_{\alpha} \rangle}$  і  $\phi(y_j) = x_j$ ,

то  $H = \overline{\langle \bigcup_{\alpha} y_{\alpha} \rangle}$ .

**Лема 3.** Нехай  $G$  — індуктивно нільпотентна компактно покривна група і  $G_0 = 1$ . Якщо  $G = \overline{M}$  і ранги всіх скінченно породжених підгруп з елементів підгрупи  $M$  обмежені в сукупності числом  $l$ , то  $r(G) < \infty$ .

**Теорема.** Нехай  $G$  — нільпотентна топологічна група,  $F = S_{p_1} \times S_{p_2} \times \dots \times S_{p_k}$  — її скінченна підгрупа,  $H$  — її підгрупа, що задовольняє умовам  $r(H/B(H) \cdot H_0) < \infty$  і  $r(S_p(B(H)/B_0(H))) < \infty$  для  $p = p_1, p_2, \dots, p_k$ . Тоді  $\langle F, H \rangle$  — замкнена підгрупа.

**Наслідок.** В індуктивно нільпотентній топологічній групі  $G$  для скінченної підгрупи  $F$  і підгрупи  $H = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  виконано  $\langle F, H \rangle = \overline{\langle F, H \rangle}$ .

**Зауваження 1.** Побудовано приклад, який демонструє, що в теоремі нільпотентність групи  $G$  не можна замінити на розв'язність групи  $G$ .

**Зауваження 2.** Побудовано приклад, який демонструє, що в теоремі нільпотентність групи  $G$  не можна замінити на індуктивну нільпотентність групи  $G$ .

**Зауваження 3.** Побудовано приклад, який демонструє істотність обмеження теореми  $r(S_p(B(H)/B_0(H))) < \infty$  для  $p = p_1, p_2, \dots, p_k$ , якщо  $F = S_{p_1} \times S_{p_2} \times \dots \times S_{p_k}$ .

**Зауваження 4.** Побудовано приклад, який демонструє істотність обмеження теореми  $r(H/B(H) \cdot H_0) < \infty$ .

**Зауваження 5.** Побудовано приклад, який одночасно демонструє істотність обмеження  $r(H/B(H) \cdot H_0) < \infty$  та обмеження  $r(S_p(B(H)/B_0(H))) < \infty$  для  $p = p_1, p_2, \dots, p_k$  істотне, якщо  $F = S_{p_1} \times S_{p_2} \times \dots \times S_{p_k}$ .

**Зауваження 6.** Побудовано приклад, який демонструє, що заміна в теоремі скінченної групи  $F$  на найпростішу компактну підгрупу  $Z_p$  різко змінює ситуацію, а саме: існує двохступінчата нільпотентна топологічна група, в якій підгрупа  $\langle C_{p^\infty}, Z_p \rangle$  незамкнена, більш того,  $\langle C_{p^\infty}, Z_p \rangle_0 \supset T$ .

### Список літератури

1. Полецких В. М. Топологический изолятор группы подгрупп конечного ранга / В. М. Полецких // Украинский математический журнал. — 1977. — 29, № 5. — С. 614—623.
2. Чарин В. С. О группах конечного ранга. II / В. С. Чарин // Украинский математический журнал. — 1966. — 18, № 3. — С. 85—96.

## БАЗИС У ПРОСТОРИ ФУНКЦІЙ, АНАЛІТИЧНИХ У СМУЗИ

М. А. Сухорольський, І. В. Андрусак, Л. І. Коляса

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна

andrusyak.ivanna@gmail.com, kolyasa.lubov@gmail.com

В роботах [1—3] розглядаються системи многочленів Фабера і споріднені з ними системи та їх базисні властивості в просторах аналітичних функцій.

Використовуючи конформні відображення смуги на круг отримано системи функцій, які є базисами у просторах функцій, аналітичних у цій області. Грунтуючись на розвиненнях аналітичних функцій в ряди за базисами побудовано розв'язки крайових задач для рівняння Гельмгольца.

**Базис.** Нехай область  $D$  — вертикальна смуга  $\{|\operatorname{Re} z| \leq \frac{\pi}{4}\}$ . Конформне відображення області  $D$  на внутрішність одиничного круга  $\bar{K} : |w| \leq 1$  задаємо функцією

$$w = \phi(z) = \operatorname{tg} z. \quad (1)$$

Використовуючи це перетворення будемо базис у просторі аналітичних в області  $D$  функцій [2]. Система функцій  $\{w^n\}_{n=0}^{\infty}$  — базис у просторі функцій,

аналітичних в крузі одиничного радіуса;  $\left\{\frac{1}{w^{m+1}}\right\}_{m=0}^{\infty}$  — відповідна асоційована система функцій. Умови біортогональності для таких систем мають вигляд

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w^n}{w^{m+1}} dw = \delta_{nm}, \quad (2)$$

де  $\Gamma : |w| = r, r < 1$  — коло.

Підставляючи вираз перетворення (1) в умову (2), одержимо наступні співвідношення

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} \phi^n(z) \frac{\phi'(z)}{\phi^{m+1}(z)} dz = \delta_{nm}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} \frac{d\phi^{n+1}(z)}{dz} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\phi^{m+1}(z)} dz = \delta_{nm}, \quad (3)$$

де  $\Gamma^* \subset D$  — прообраз кола  $\Gamma$  при відображенні (1).

Введемо систему функцій

$$\{g_n(z) = \phi^n(z) = (\operatorname{tg} z)^n\}_{n=0}^{\infty}, \quad z \in D \quad (4)$$

і побудуємо відповідну їй систему асоційованих функцій.

Для системи (4) будемо асоційовану систему функцій, які є головною частиною ряду Лорана функції  $\operatorname{ctg}^m z$ .

Розглянемо систему функцій:

$$\phi^{-m}(z) = \left( \frac{1}{\operatorname{tg} z} \right)^m = (\operatorname{ctg} z)^m.$$

Використовуючи рекурентну формулу

$$(\operatorname{ctg} z)^m = -\operatorname{ctg}^{m-2} z - \frac{1}{m-1} (\operatorname{ctg}^{m-1} z)'$$

знайдемо головну частину ряду Лорана функції  $\phi^{-m}(z)$  в околі нуля:

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \operatorname{m.p.}\{\operatorname{ctg} z\} = \frac{1}{z}; & v_2(z) &= \operatorname{m.p.}\{\operatorname{ctg}^2 z\} = \frac{1}{z^2} - \frac{5}{6}; \\ v_3(z) &= \operatorname{m.p.}\{\operatorname{ctg}^3 z\} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z}; & v_4(z) &= \operatorname{m.p.}\{\operatorname{ctg}^4 z\} = \frac{1}{z^4} - \frac{4}{3} \frac{1}{z^2}; \\ v_5(z) &= \operatorname{m.p.}\{\operatorname{ctg}^5 z\} = \frac{1}{z^5} - \frac{5}{3} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z}, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\operatorname{m.p.}\{f(z)\}$  — головна частина ряду Лорана функції  $f(z)$ .

Головна частина розвинення функції

$$-\frac{1}{m} \frac{d}{dz} \phi^{-m}(z) = \phi^{-(m+1)}(z) \phi'(z), \quad \omega_m(z) = -\frac{1}{m} \frac{d}{dz} v_m(z)$$

є асоційованою з системою функцій (4). Для перших п'яти членів цієї системи з (5) одержимо

$$\begin{aligned} \omega_1(z) &= \frac{1}{z^2}; & \omega_2(z) &= \frac{1}{z^3}; & \omega_3(z) &= \frac{1}{z^4} - \frac{1}{3z^2}; \\ \omega_4(z) &= \frac{1}{z^5} - \frac{2}{3z^3}; & \omega_5(z) &= \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{5z^2}. \end{aligned}$$

Оскільки розвинення (4) функцій  $g_n(z)$  не містить членів з від'ємними степенями змінної, то перше співвідношення (3) виконується для систем функцій  $\{g_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  і  $\{\omega_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ , а саме

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} g_n(z) \omega_m dz = \delta_{nm},$$

Тобто ці системи є біортогональними [4, 5].

**Теорема.** Якщо функція  $g(z)$  аналітична в області  $D$ , то вона зображується у вигляді суми ряду

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(z), \quad z \in D,$$

де  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} g(z) \omega_n(z) dz.$

**Побудова розв'язків рівняння Гельмгольца.** Нехай  $w = \phi(z)$  — конформне відображення обмеженої однозв'язної області  $D$  комплексної площини  $z$  на круг  $K : |w| \leq 1$  комплексної площини  $w$ ;  $L = \partial D$  — гладка жорданова крива відображується на коло  $C = \partial K$ .

Запишемо рівняння Гельмгольца з використанням змінних  $w, \bar{w}$ ,

$$4 \frac{\partial^2 U}{\partial w \partial \bar{w}} + \kappa U = 0, \quad (6)$$

де  $\kappa = \text{const}$ .

Множину розв'язків цього рівняння в крузі можна записати у вигляді [4]

$$U = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \omega^m J_m^*(w\bar{w}), \quad (7)$$

де  $J_m^*(w\bar{w}) = J_m^*(|w|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \kappa^n |w|^{2n}}{2^{2n+m} (n+m)! n!}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $c_m$  — довільні сталі.

Вираз (7) є розв'язком рівняння Гельмгольца (6) в крузі  $K : |w| < 1$ .

Перейдемо до нових змінних  $z = \phi^{-1}(w)$ ,  $\bar{z} = \bar{\phi}^{-1}(w)$ . Оскільки  $\phi'(z) \neq 0$ , одержимо наступне рівняння

$$4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + \kappa \phi'(z) \bar{\phi}'(z) U = 0. \quad (8)$$

Множину розв'язків рівняння (8) одержимо з (7) заміною змінних  $w = \phi(z)$ ,  $\bar{w} = \bar{\phi}(z)$ , тобто

$$U(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi^m(z) J_m^*(\phi(z) \bar{\phi}(z)).$$

Знайдемо розв'язок задачі (6) в області  $D$  за умови

$$U(z, \bar{z})|_L = f(t), \quad t \in L, \quad (9)$$

де  $f(t)$  — функція, що розвивається у рівномірно збіжний ряд за системою (4),

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(t). \quad (10)$$

З умови стосовно функції (10) впливає рівномірна збіжність цього ряду в області  $\bar{D}$ , аналітичність функції  $f(z)$  в області  $D$  і неперервність цієї функції на межі  $L$ .

Підставляючи відображення (1) у вираз розв'язку задачі (7) для круга, одержимо множину розв'язків рівняння (6) для області  $D$  у вигляді суми ряду

$$U(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi^n(z) J_n^*(\phi(z) \bar{\phi}(z)). \quad (11)$$

Коефіцієнти ряду (11) знайдемо з умови (9). Якщо підставити формули (10) і (11) в граничну умову і врахувати що  $g_n(z) = \phi^n(z)$ ,  $\phi(t)\bar{\phi}(t) = 1$ ,  $\phi(t) = e^{i\psi}$ ,  $0 \leq \psi < 2\pi$ , то одержимо рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\psi} J_n^*(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\psi}.$$

Звідси, знайдемо  $c_n = \frac{a_n}{J_n^*(1)}$  і запишемо розв'язок задачі

$$U(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{J_n^*(1)} g_n(z) J_n^*(\phi(z)\bar{\phi}(z)). \quad (12)$$

Підстановкою значень  $z = t \in L$  у ряд (12), безпосередньо одержимо граничну умову (9). Рівномірна збіжність ряду (12) в область  $D$  впливає з обмеженості функцій  $J_n^*(\phi(z)\bar{\phi}(z))$ , оскільки  $0 \leq |\phi(z)| \leq 1, z \in D$  і рівномірної збіжності ряду (10).

#### Список літератури

1. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. — М.: Л, 1964. — 440 с.
2. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Том 2 — М.: Наука, 1968. — 624 с.
3. Дзядик В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука. 1977. — 512 с.
4. Сухорольський М. А. Аналітичні розв'язки рівняння Гельмгольца. // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. — Львів: ІППММ НАН України, 2014. — С. 160—163.
5. Сухорольський М. А., Достойна В. В. Один клас біортогональних систем функцій, які виникають при розв'язанні рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2012. — 55, № 2 — С. 52—62.

## К ПРОБЛЕМЕ ВВЕДЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОРАСШИРЕННОГО ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА (ФРФП)

В. А. Сущенко

Львов, Украина

ppser0lviv@gmail.com

Развитое понятие математического пространства произвело методы, которые привели к введению непустых пространств прикладного характера в различных областях науки, техники, экономики. Например, в фундаментальной астрономии, в её разделе астрометрии построено «неподвижное» пространство (система координат) с преимущественной системой отчёта [1, с. 143—175]; в монографии [2, с. 239] — пространство с анизотропией электромагнитной волны; в труде [3] подчеркивается характерные признак непустого Аристотелева пространства в физике — это совместное рассмотрение в физическом явлении законов механического движения и неотделимого от них сил трения (Галилей и Ньютон их отделяли). В данной работе предложено понятие функционально-расширенного физического пространства (ФРФП), которое также является непустым, то есть учёт окружающей среды, а точнее развитие подхода Н. А. Умова, исходя из движения материальной точки (сигнала) в волнообразной среде [4]. При этом, в отличие от общей теории относительности (ОТО), пространству ФРФП не передаются свойства и признаки окружающей среды. ФРФП по своей полноте охватывает частный случай материализованного пространства [5], подключая нарушение симметрии в пространстве при сверхвысоких скоростях [6]. В предлагаемой статье показано как переход к материализованному пространству сопровождается переходом от одной пары преобразований Лоренца (ПЛ) к двум парам преобразований Фогта как в случае  $v_1 < v_m, v'_m$  так и при  $v_2 > v_m, v'_m$ , где  $v_1, v_2$  — текущие скорости, а  $v_m, v'_m$  — максимальные скорости распространения физического взаимодействия в неподвижной и движущейся системах отсчёта.

При этом поскольку постулат постоянства скорости света  $C = const$  в ФРФП отсутствует, а присутствуют  $C = v_m \neq const, v'_m < v_m$ , рассматриваются последствия: изменения в преобразованиях координат(ПК) с добавлениям ПК сопряженных пространств, в том числе в энерго-импульсном представлении. Рассмотрение нарушения симметрии во времени в изотропном материализованном пространстве при  $v_1 < v_m$  (эксперимент с космическими  $\pi$

-мезонами) ФРФП описывает с помощью радикала  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{v_m^2}}}$ , а пространственная дисимметрия при  $v_2 > v_m$  (эксперимент со сплюснутым

быстрым электроном) — с радикалом  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_m^2}{v_2^2}}}$ . Далее константируется

движение в пространстве с помощью пространственно-координатного перехода  $x' = x - vt$  при  $t$  — универсальное время («работает» вместе с локальным временем  $t'$ ); движение во времени — времени-координатным переходом  $t' = t - \frac{x}{v}$  при универсальной пространственной координате  $x$  («работает» вместе с пространственной локальной  $x'$ ).

ФРФП в согласии с фундаментальной связью симметрии — асимметрии [7]:

$$A = W + C,$$

где  $A$  — асимметрия,  $W$  — энергетические виды полей,  $C$  — симметрия, но поскольку описание физического явления происходит в энерго-импульсном представлении использовано вместо понятия «пространство-время» понятие «энергия-количество движения». Дополнительно укажем роботу [8], которая служит параллелью с рассматриваемым направлением «непустых» пространств, но в области экономики.

#### Список литературы

1. Толчельникова-Мурри С. А. Построение «Неподвижного» пространства (системы координат) с помощью периодически повторяемых абсолютных наблюдений звёзд // Сб. «Проблемы пространства и времени в современном естествознании» — Санкт-Петербург, изд-во ГАО, 1991. — С.143—175.
2. Денисов А. А. Мифы теории относительности // А. А. Денисов. — Вильнюс, ЛитНИИТИ, 1989.
3. Станюкович К. П., Колесников С. М., Московкин В. М. Проблемы теории пространства, времени и материи. — М., 1968.
4. Умов Н. А. Единообразный вывод преобразований совместных с принципом относительности // Phys. Zeits. — 1910 / Н. А. Умов. Избр.соч. — М.-Л.: Гос.изд.-во техн.-теор. лит., 1950 — С.492—499.
5. Сущенко В. А. К вопросу нарушения симметрии во времени в материализованном пространстве // Вторая межд. научно-практическая конф. «Математика в современном техническом университете» 20-21 декабря 2013: Материалы конф. — К.: НТУУ «КПИ», 2013. — 336 с.
6. Сущенко В. А. Пространственная дисимметрия в математической модели сверхвысоких скоростей.// Материалы XII Межд. наук. конференции им. акад. М. Кравчука I ч. — К., 2008. — С. 805.
7. Макаров Н. В. Симметрия и ассиматрия в природе. — М.: Знание, 1990 — 32с.
8. Хусаинов Діл. Я. Простір, як соціальний концепт. Кількісний та якісний простір, його види // Материалы межд. конф. по моделированию и устойч. динамич. систем (DSMSI—2013). — К.: КНУ им. Т. Шевченко, 2013 — С. 239.

## АРИФМЕТИЧНІ ПОСЛІДОВНОСТІ, МНОГОКУТНІ ТА ФІГУРНІ ЧИСЛА В КОМБІНАТОРИЦІ

**Тимофієва Н. К.**

*МННЦІТiС НАН та МОН України, Київ*

TymNad@gmail.com

**Вступ.** У комбінаториці та комбінаторній оптимізації знаходження комбінаторних формул досить часто проводиться з використанням арифметичних послідовностей, значення складових яких є многокутні та фігурні числа.

**Многокутні та фігурні числа.** Розглянемо перші  $n$  чисел натурального ряду. Утворення в ньому наступних чисел проводиться додаванням одиниці до попереднього. Аналогічно можна скласти послідовності, які починаються з одиниці, а наступні їхні елементи утворюються додаванням до попереднього числа по 2, по 3, по 4 і т.д.

Одержимо такі послідовності

$$\begin{aligned}
 &1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, j; \\
 &1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots, 2j - 1; \\
 &1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots, 3j - 2 \\
 &1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, \dots, 4j - 3
 \end{aligned} \tag{1}$$

...

Знаходячи суму одного, двох, трьох і т.д. чисел першої (другої, третьої) послідовностей (1), отримаємо послідовності многокутних чисел:

$$\begin{aligned}
 &1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots, j(j + 1)/2 \quad \text{— трикутні числа,} \\
 &1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots, j^2 \quad \text{— квадратні числа,} \\
 &1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, \dots, j(3j - 1)/2 \quad \text{— п'ятикутні числа,}
 \end{aligned}$$

.....

де  $j \in \{1, 2, 3, \dots, p\}$ ,  $p$  — кількість елементів у заданій послідовності.

*Фігурними* називають як многокутні числа так і коефіцієнти членів степенів бінома  $(a + b)^n$ . Із коефіцієнтів складається арифметичний трикутник (трикутник Паскаля)

				1								
				1		1						
			1		2		1					
		1		3		3		1				
	1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1

По косих лініях цієї таблиці знаходяться коефіцієнти перших, (других, третіх і т.д.) членів степенів  $(a + b)^n$ . Подамо їх у вигляді такої таблиці.

Таблиця. Коефіцієнти членів степенів бінома  $(a + b)^n$

1	1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...	
1	3	6	10	15	...		
1	4	10	20	...			
1	5	15	...				

Перший рядок та перший стовпець цієї таблиці становлять 1, 1, 1, 1, 1, 1, ..., 1, ..., 1. Другий рядок та другий стовпець — числа натурального ряду: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... . Третій рядок та третій стовпець містить трикутні числа 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... ,  $j$ -й елемент якого є сума  $j$  перших чисел натурального ряду. Четвертий рядок та четвертий стовпець — числа 1, 4, 10, 20, 35, 56, ...,  $j$ -й елемент якого є сума  $j$  перших значень трикутних чисел. Ці числа називають тетраедричними. П'ятий рядок та п'ятий стовпець містять числа, які називають п'ятикутними: 1, -5, 15, 35, 70, 126, ...  $j$ -й елемент яких є сума перших значень тетраедричних чисел, і т. д. Будь-який елемент таблиці, крім чисел натурального ряду, є сума двох чисел, що знаходяться в тому ж рядку вліво і в тому ж стовпці над пошукуваним числом.

**Побудова арифметичних послідовностей при генеруванні множини комбінаторних конфігурацій.** Описані вище послідовності утворюються при знаходженні кількості комбінаторних конфігурацій  $w$  у їхній множині  $W$  за правилами їхнього генерування рекурентно-періодичним методом [1,2], за якими утворюються: а) інтервал нульового рангу, б) обмежувальна комбінаторна конфігурація (перша в інтервалі нульового рангу), в) інтервал  $\sigma$ -го рангу. Інтервал  $\sigma$ -го рангу складається з інтервалів  $(\sigma - 1)$ -го рангу, а інтервал 1-го рангу — з інтервалів нульового рангу. За певними правилами, які різні для різних типів комбінаторних конфігурацій, утворюємо скінченну послідовність, кожне значення якої задає кількість  $w$  в інтервалах  $\sigma$ -го рангу.

Розглянемо множину сполучень без повторень. Упорядкуємо цю множину за розробленими правилами з використанням рекурентно-періодичного методу підмножинами ізоморфних сполучень  $W_\eta$ , починаючи з  $\eta = 1$  і закінчуючи  $\eta = n$ , де  $\eta$  — кількість елементів, які вибираються з базової множини  $A = (a_1, \dots, a_n)$ .

**Теорема 1.** Значення послідовності, які задають кількість сполучень без повторень  $w$  у їхній множині  $W$ , що упорядкована з використанням рекурентно-періодичного методу генерування комбінаторних конфігурацій, утворюють арифметичний трикутник та є фігурними числами.

*Доведення* проводимо методом математичної індукції для підмножини ізоморфних сполучень. Для  $\eta = 1$  підмножина  $W_1$  складається з одного

інтервалу нульового рангу і містить усі можливі для нього нетотожні сполучення кількістю  $n$ .

Підмножина  $W_\eta$  для  $\eta = 2$  складається з одного інтервалу першого рангу, в який входять  $n - 1$  інтервали нульового рангу. Кількість  $w$  в ньому дорівнює

$$1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n!}{(n-2)! 2!}.$$

Аналогічно для  $\eta = 3$  підмножина  $W_3$ , побудована за тими ж правилами складається з одного інтервалу другого рангу, в який входять інтервали першого рангу, кожен з яких складається з  $1, 2, 3, \dots, n-3$  інтервалів нульового рангу. Тоді кількість  $w$  в  $W_3$  дорівнює

$$1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \left( \frac{j(j+1)}{2} \right)_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n!}{(n-3)! 3!},$$

$j \in \{1, \dots, n-2\}$ . Відповідно, для  $\eta = 4$   $W_4$  складається з одного інтервалу третього рангу, в який входять  $n-2$  інтервали другого рангу, кожен з яких складається з  $1, 2, 3, \dots, n-3$  інтервалів першого рангу, а останні — з

$1, 3, 6, 10, \dots, \left( \frac{j(j+1)}{2} \right)_{n-3}$ ,  $j \in \{1, \dots, n-3\}$ , інтервалів нульового рангу.

Тоді кількість  $w$  в  $W_4$  дорівнює

$$1 + 4 + 10 + 20 + \dots + \left( \frac{j(j+1)(j+2)}{6} \right)_{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n!}{(n-4)! 4!}.$$

Для  $n$  кількість  $w$  у підмножині  $W_n$  дорівнює одиниці.

З цього видно, що одержані послідовності, суми членів яких задають кількість  $w$  у підмножинах  $W_\eta$ , утворюють арифметичний трикутник (трикутник Паскаля) і є біноміальними коефіцієнтами, тобто для  $n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  відповідно маємо послідовності:  $1; 1,1; 1,2,1; 1,3,3,1; 1,4,6,4,1; 1,5,10,10,5,1; \dots$ , що і доводить теорему 1.

Розглянемо множину розбиттів  $n$ -елементної множини на підмножини.

Впорядкуємо цю комбінаторну множину за розробленими правилами з використанням рекурентно-періодичного методу для підмножин  $W_\eta$ , де  $\eta$  — кількість підмножин  $w_l \subset w$ , на які розбивається базова множина  $A = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $\xi_l$  — кількість елементів у підмножині  $w_l \subset w$ ,  $l \in \{1, \dots, \eta\}$ .

**Теорема 2.** Значення послідовностей, які задають кількість розбиття  $n$ -елементної множини на підмножини у їхній підмножині  $W_\eta$  для  $\eta = 2$ , що упорядкована з використанням рекурентно-періодичного методу генерування комбінаторних конфігурацій, утворюють арифметичний трикутник та є фігурними числами.

*Доведення* проводимо методом математичної індукції для підмножин ізоморфних розбиттів  $W_\eta, \eta = 2$ .

Для  $\xi_1 = n - 1, \xi_2 = 1$  кількість розбиттів у підмножині  $W_2$  дорівнює  $n$ .

Для  $\xi_1 = n - 2, \xi_2 = 2$  кількість інтервалів  $\sigma$ -го рангу дорівнює  $n - 1$ , а кількість інтервалів  $(\sigma - 1)$ -го рангу в кожному з них подамо послідовністю  $1, 2, 3, \dots, n - 1$ . Звідси, кількість  $w$  у  $W_2$  для  $\xi_1 = n - 2, \xi_2 = 2$  дорівнює

$$1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n!}{(n-2)! 2!}.$$

Аналогічно для значень  $\xi_1 = n - 3, \xi_2 = 3$  кількість інтервалів  $\sigma$ -го рангу складає  $n - 2$ , а кількість  $w$  у  $W_2$  дорівнює

$$1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \left( \frac{j(j+1)}{2} \right)_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n!}{(n-3)! 3!},$$

де  $j \in \{1, \dots, n - 2\}$ .

Для  $\xi_1 = n - 4, \xi_2 = 4$  кількість  $w$  у  $W_2$  дорівнює  $1 + 4 + 10 + 20 + \dots$

$$\dots + \left( \frac{j(j-1)(j-2)}{6} \right)_{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n!}{(n-4)! 4!}.$$

Звідси, кількість розбиттів у підмножині  $W_2$  для  $\eta = 2$  дорівнює

$$\frac{n!}{(n-j)! j!}, \text{ що відповідає виразу } \frac{n!}{\xi_1! \xi_2!}. \text{ Якщо } \xi_1 = \frac{n}{2}, \xi_2 = \frac{n}{2}, \text{ то}$$

кількість  $w$  у  $W_2$  дорівнює

$$\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-2}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)! 2!}, \quad n \in \{2, 4, \dots, 2j\}.$$

З цього випливає, що одержані послідовності, суми членів яких задають кількість  $w$  у підмножині ізоморфних розбиттів  $W_2$ , утворюють арифметичний трикутник (трикутник Паскаля) та є фігурними числами, що і доводить теорему 2.

**Висновок.** Отже, використання рекурентно-періодичного методу для генерування комбінаторних конфігурацій дозволяє розв'язувати перелічувальні задачі в комбінаториці. Значення утворених арифметичних послідовностей є багатокутні та фігурні числа.

#### Список літератури

1. Тимофієва Н. К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ. — 2007. — 32 с.
2. Тимофієва Н. К. Рекурентно-періодичний метод для генерування комбінаторних конфігурацій / Н. К. Тимофієва // Комбінаторні конфігурації та їх застосування: Матеріали десятого міжвузівського науково-практичного семінару (15—16 жовтня 2010 р.). — Кіровоград: Кіровогр. техн. ун-т. — 2010. — С. 138—141.

# КРИТЕРІЙ ЕЛЕМЕНТА НАЙКРАЩОГО НЕСИМЕТРИЧНОГО НАБЛИЖЕННЯ У ПРОСТОРАХ $L_{p_1, \dots, p_n}$

**В. М. Трактинська, М. Є. Ткаченко**

*Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара,  
Дніпропетровськ, Україна*

victoria-dp@yandex.ru, mtkachenko2009@ukr.net

Нехай  $L_{p_1, \dots, p_n} = L_p^-$  — простір сумовних на паралелепіпеді

$$K = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

функцій від  $n$  змінних  $f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x})$ . Якщо  $0 < \alpha, \beta < \infty$  та

$$f_{\pm}(\bar{x}) = \max \{ \pm f(\bar{x}); 0 \},$$

то покладемо:

$$\operatorname{sgn}_{\alpha, \beta} f(\bar{x}) = \alpha \cdot \operatorname{sgn} f_+ - \beta \cdot \operatorname{sgn} f_-, \quad |f|_{\alpha, \beta} = \alpha \cdot f_+ + \beta \cdot f_-.$$

Визначимо несиметричну норму у просторі  $L_p^-$  наступним чином:

$$\begin{aligned} \|f\|_{p; \alpha, \beta}^- &= \|f\|_{p_1, \dots, p_n; \alpha, \beta} = \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_{p_1, \dots, p_n} = \\ &= \left( \int_{a_n}^{b_n} \left\{ \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left[ \int_{a_1}^{b_1} |f(\bar{x})|_{\alpha, \beta}^{p_1} dx_1 \right]^{p_2} \dots dx_{n-1} \right\}^{p_{n-1}} dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}}. \end{aligned}$$

Покладемо

$$|f|_{p_k, \dots, p_i; \alpha, \beta} = \left( \int_{a_i}^{b_i} \left\{ \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \dots \left[ \int_{a_k}^{b_k} |f(\bar{x})|_{\alpha, \beta}^{p_k} dx_k \right]^{p_{k+1}} \dots dx_{i-1} \right\}^{p_{i-1}} dx_i \right)^{\frac{1}{p_i}},$$

де  $1 \leq k < i \leq n$ .

Питання характеристизації елемента найкращого наближення у просторах із змішаною інтегральною метрикою для функцій двох змінних були досліджені Г. С. Смірновим [1] в 1973 році. Його результати були розповсюджені В. М. Трактинською на випадок функцій багатьох змінних [2], а для функцій двох змінних — на випадок несиметричного наближення [3]. Наступна теорема

дає критерій елемента найкращого несиметричного наближення для функцій багатьох змінних у просторах  $L_p^-$ .

**Теорема.** Нехай  $H_m$  — скінченновимірний підпростір простору  $L_p^-$  і  $f(\bar{x}) \in L_p^- \setminus H_m$ . Для того, щоб поліном  $P_m^*(\bar{x}) \in H_m$  був поліномом найкращого  $(\alpha, \beta)$ -наближення для функції  $f(\bar{x})$  в метриці  $L_p^-$ , достатньо та (у випадку, коли хоча б одне  $p_i = 1$ , за умови, що різниця  $f(\bar{x}) - P_m^*(\bar{x}) \neq 0$  майже скрізь на  $K$ ) необхідно, щоб для функції

$$\phi(\bar{x}) = \begin{cases} \left| f - P_m^* \right|_{p_1, \dots, p_{n-1}; \alpha, \beta}^{p_n - p_{n-1}} \times \dots \times \left| f - P_m^* \right|_{p_1; \alpha, \beta}^{p_2 - p_1} \left| f - P_m^* \right|_{\alpha, \beta}^{p_1 - 1} \operatorname{sgn}_{\alpha, \beta} (f - P_m^*), & \text{якщо } \left| f - P_m^* \right|_{p_1, \dots, p_{n-1}; \alpha, \beta} > 0, \\ 0, & \text{якщо } \left| f - P_m^* \right|_{p_1, \dots, p_{n-1}; \alpha, \beta} = 0. \end{cases}$$

та будь-якого полінома  $P_m(\bar{x}) \in H_m$  мала місце рівність:

$$\int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} P_m(\bar{x}) \cdot \phi(\bar{x}) dx_1 \dots dx_n = 0.$$

### Список літератури

1. Смирнов Г. С. Общий вид линейного функционала и критерий полинома наилучшего приближения в пространствах со смешанной интегральной метрикой // Укр.мат.журн. — 1973. — Т. 25. — № 1. — С.134—138.
2. Трактинская В. Н. Характеризация элемента наилучшего интегрального приближения функций многих переменных // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. — 2007. — Вип. 8. — С.134—136.
3. Трактинская В. Н. Критерий элемента наилучшего несимметричного приближения в пространствах со смешанной интегральной метрикой // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. — 1998. — Вип. 3. — С. 33—41.

## ДИЛЕММЫ Д. ГИЛЬБЕРТА

А. Ф. Турбин

Национальный педагогический университет имени М. Драгоманова,

Киев, Украина

[turbin@imath.ua](mailto:turbin@imath.ua)

В знаменитой «Наглядной геометрии» Д. Гильберт, суммируя знания о правильных многогранниках полученные во второй половине 19 в., делает (по крайней мере) две грубые ошибки.

*Ошибка первая.* Д. Гильберт утверждает, что трёхмерные грани 16-ячейки Л. Шлефли (8,24,32,16) — тетраэдры.

В  $E^4$  есть три (!) 8-вершинника, двумерные грани которых правильные треугольники:

— гипероктаэдр Б. Н. Делоне (8, 24, 32, 16), двойственный гиперкубу Л. Шлефли (16, 32, 24, 8), трёхмерные грани которого кокубы (октаэдры),

— правильный галлоэдр Д. Гильберта (8, 24, 32, 8), трёхмерные грани которого тетраэдры, и для которого  $8 - 24 + 32 = 8 = 40 - 32 = 8$  (характеристика Л. Эйлера — А. Пуанкаре не равна нулю),

— гипертетраантипризма (8, 24, 32, 6), у которой 6 трёхмерных граней: два тетраэдра и четыре октаэдра (характеристика Л. Эйлера — А. Пуанкаре  $8 - 24 + 32 - 6 = 40 - 30 = 10$  не равна нулю),

$\frac{1}{2}$ -архимедово усечение галлоэдра Д. Гильберта даёт 24-ячейку Л. Шлефли (24, 96, 96, 24).

*Ошибка вторая.* Д. Гильберт объявляет 24-ячейку Л. Шлефли (24, 96, 96, 24) самодвойственным многогранником лишь на том основании, что ее структурный символ — палиндром.

Трёхмерные грани 24-ячейки — октаэдры, двойственные кубам. Многогранник, двойственный 24-ячейке Л. Шлефли, — мегакубоэдр Вадима Кириченко (24, 48, 48, 24).

Гипероктаэдры Б. Н. Делоне, галлоэдры Д. Гильберта и гипертетраантипризмы перенесены в  $E^n, n > 4$ .

$\frac{1}{2}$ -архимедово усечение галлоэдра Д. Гильберта в  $E^n, n > 4$ , даёт контактный мегаоктаэдр И. Ньютона — Н. Ф. Кузенного, на вершинах которого окончательно решается проблема контактного числа И. Ньютона.

### Список литературы

1. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981. — 344 с.

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА ПРОИЗВЕДЕНИЯ НЕВЫРОЖДЕННЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Л. А. Хвощинская

Белорусский государственный аграрный технический университет,

Минск, Беларусь

ludmila.ark@gmail.com

Пусть  $A_1, A_2$  — постоянные невырожденные матрицы 2-го порядка.  
Равенство

$$\ln(A_1 \cdot A_2) = \ln A_1 + \ln A_2$$

справедливо лишь для перестановочных матриц [1]. Выведем формулу, связывающую логарифмы матриц  $A_1, A_2$  и  $A_3 = A_1 \cdot A_2$  в случае непостоянных матриц.

Обозначим  $\alpha_k, \beta_k$  характеристические числа матриц  $A_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и  $\rho_k = \ln \alpha_k, \sigma_k = \ln \beta_k$ .

Зафиксируем ветви логарифмов для  $\rho_1, \sigma_1, \rho_2, \sigma_2$  (например,

$$0 \leq \operatorname{Re} \rho_k < 2\pi, 0 \leq \operatorname{Re} \sigma_k < 0).$$

Тогда ветви логарифмов для  $\rho_3, \sigma_3$  должны быть согласованы и выбираются из условия

$$\rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 = \rho_3 + \sigma_3.$$

Пусть  $C_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) — матрицы, приводящие матрицы  $A_k$  к нормальной жордановой форме:

$$G_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & \beta_k \end{pmatrix}, \text{ если } \alpha_k \neq \beta_k$$

и

$$G_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 1 & \alpha_k \end{pmatrix}, \text{ если } \alpha_k = \beta_k.$$

Матрицы  $B_k = \ln A_k$  могут быть найдены по формулам

$$B_k = C_k \begin{pmatrix} \rho_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} C_k^{-1}, \text{ если } \rho_k \neq \sigma_k$$

и

$$B_k = C_k \begin{pmatrix} \rho_k & 0 \\ 1/\alpha_k & \rho_k \end{pmatrix} C_k^{-1} = C_k \begin{pmatrix} 1/\alpha_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_k & 0 \\ 1 & \sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C_k^{-1}, \text{ если } \rho_k = \sigma_k.$$

Найдём матрицы  $M_1$  и  $M_2$ , удовлетворяющие равенству

$$M_1 B_1 M_1^{-1} + M_2 B_2 M_2^{-1} = B_3 \quad (1)$$

Приводя матрицу  $B_3$  к нормальной жордановой форме, перепишем (1) в виде

$$C_3^{-1}M_1B_1M_1^{-1}C_3 + C_3^{-1}M_2B_2M_2^{-1}C_3 = C_3^{-1}B_3C_3$$

или

$$S_1 + S_2 = C_3^{-1}B_3C_3. \quad (2)$$

Пусть  $\rho_3 \neq \sigma_3$ . Тогда равенство (2) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} s_1 & c \\ d & \rho_1 + \sigma_1 - s_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 & -c \\ -d & \rho_2 + \sigma_2 - s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Получили систему из четырёх уравнений

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= \rho, \\ \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 - s_1 - s_2 &= \sigma, \\ s_1(\rho_1 + \sigma_1 - s_1) - cd &= \rho_1\sigma_1, \\ s_2(\rho_2 + \sigma_2 - s_2) - cd &= \rho_2\sigma_2, \end{aligned}$$

решая которую находим элементы матриц

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{\rho_1\sigma_1 - (\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \sigma_2)}{\sigma_3 - \rho_3} & \frac{(\rho - \rho_1)(\sigma - \sigma_1) - \rho_2\sigma_2}{(\sigma_3 - \rho_3)d} \\ d & \frac{\rho_2\sigma_2 - (\sigma_3 - \rho_1)(\sigma_3 - \sigma_1)}{\sigma_3 - \rho_3} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} \frac{\rho_2\sigma_2 - (\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \sigma_1)}{\sigma_3 - \rho_3} & \frac{\rho_2\sigma_2 - (\rho_3 - \rho_1)(\sigma_3 - \sigma_1)}{(\sigma_3 - \rho_3)d} \\ -d & \frac{\rho_1\sigma_1 - (\sigma_3 - \rho_2)(\sigma_3 - \sigma_2)}{\sigma_3 - \rho_3} \end{pmatrix}, \quad (3')$$

где  $d$  — произвольное число. Если матрица  $C_3$  приводит  $A_1$  и  $A_2$  к треугольному виду, то формулы упрощаются, т. к. в этом случае  $cd = 0$ .

Обозначим  $N_k$  матрицы, приводящие матрицы  $S_k$  ( $k = 1, 2$ ) к жордановым формам, т. е.

$$S_1 = N_1G_1N_1^{-1}, \quad S_2 = N_2G_2N_2^{-1}.$$

С одной стороны,

$$S_k = C_3^{-1}M_kB_kM_k^{-1}C_3.$$

С другой стороны,

$$S_k = N_kG_kN_k^{-1} = N_kC_k^{-1}(C_kG_kC_k^{-1})C_kN_k^{-1} = N_kC_k^{-1}B_kC_kN_k^{-1}.$$

Следовательно, искомые матрицы  $M_1$  и  $M_2$  можно найти по формулам:

$$M_k = C_3N_kC_k^{-1}, \quad k = 1, 2.$$

Если  $\rho_3 = \sigma_3$ , то равенство (2) можно переписать в виде

$$S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 1/\alpha_3 & \rho_3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} s_1 & c \\ d & \rho_1 + \sigma_1 - s_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 & -c \\ 1/\alpha_3 - d & \rho_2 + \sigma_2 - s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 1/\alpha_3 & \rho_3 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= \rho_3, \\ s_1(\rho_1 + \sigma_1 - s_1) - cd &= \rho_1\sigma_1, \\ s_2(\rho_2 + \sigma_2 - s_2) - cd + \frac{c}{\alpha_3} &= \rho_2\sigma_2, \end{aligned}$$

откуда находим

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{s}{\alpha_3} \frac{(s - \rho_1)(s - \sigma_1)}{\rho_1\sigma_1 - (\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \sigma_2)} & \alpha_3 \left( (\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \sigma_2) - \rho_1\sigma_1 \right) \\ \frac{1}{\alpha_3} \left( 1 - \frac{(s - \rho_1)(s - \sigma_1)}{\rho_1\sigma_1 - (\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \sigma_2)} \right) & \rho_1 + \sigma_1 - s \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} \frac{\rho_3 - s}{\alpha_3} \frac{(s - \rho_1)(s - \sigma_1)}{\rho_1\sigma_1 - (\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \sigma_2)} & \alpha_3 \left( \rho_1\sigma_1 - (\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \sigma_2) \right) \\ \frac{1}{\alpha_3} \left( 1 - \frac{(s - \rho_1)(s - \sigma_1)}{\rho_1\sigma_1 - (\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \sigma_2)} \right) & \rho_2 + \sigma_2 - \rho_3 + s \end{pmatrix}, \quad (4')$$

где  $s$  — произвольное число.

Если  $N_k$  ( $k = 1, 2$ ) — матрицы, приводящие матрицы  $S_k$  к жордановой форме, то искомые матрицы  $M_k$  можно найти по формулам

$$\begin{aligned} M_k &= C_3 N_k C_k^{-1}, \text{ если } \rho_k \neq \sigma_k \text{ и} \\ M_k &= C_3 N_k \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C_k^{-1}, \text{ если } \rho_k = \sigma_k. \end{aligned} \quad (5)$$

Применяя формулу (1) несколько раз подряд, можно найти представление логарифма произведения любого числа матриц.

Пусть  $A_1, A_2, A_3$  — постоянные невырожденные матрицы 2-го порядка неперестановочные в совокупности,

$$A_4 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Обозначим  $\alpha_k, \beta_k$  ( $k = 1, 4$ ) характеристические числа матриц  $A_k$ ,  $\alpha_{23}, \beta_{23}$  — характеристические числа матрицы  $A_2 \cdot A_3$  и найдём числа

$$\rho_k = \ln \alpha_k, \sigma_k = \ln \beta_k, \rho_{23} = \ln \alpha_{23}, \sigma_{23} = \ln \beta_{23},$$

где

$$\sum_{k=1}^3 (\rho_k + \sigma_k) = \rho_4 + \sigma_4, \rho_2 + \sigma_2 + \rho_3 + \sigma_3 = \rho_{23} + \sigma_{23}.$$

С помощью формулы (1) запишем представление

$$\begin{aligned}
\ln(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) &= M_1 \ln A_1 M_1^{-1} + M_{23} \ln(A_2 \cdot A_3) M_{23}^{-1} = \\
&= M_1 \ln A_1 M_1^{-1} + M_{23} (M_2' \ln A_2 M_2'^{-1} + M_3' \ln A_3 M_3'^{-1}) = \\
&= M_1 \ln A_1 M_1^{-1} + M_{23} M_2' \ln A_2 \cdot (M_{23} M_2')^{-1} + M_{23} M_3' \ln A_3 (M_{23} M_3')^{-1} = \\
&= M_1 \ln A_1 M_1^{-1} + M_2 \ln A_2 \cdot M_2^{-1} + M_3 \ln A_3 M_3^{-1},
\end{aligned}$$

где

$$M_2 = M_{23} \cdot M_2', \quad M_3 = M_{23} \cdot M_3',$$

а элементы матриц  $M_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ),  $M_{23}$  можно найти по формулам (5), где в формулах (3) или (4) заменяем:

для  $M_1$  —  $\rho_2, \sigma_2$  на  $\rho_{23}, \sigma_{23}$ , а  $\rho_3, \sigma_3$  на  $\rho_4, \sigma_4$ ;

для  $M_2'$  —  $\rho_1, \sigma_1$  на  $\rho_2, \sigma_2$ , а  $\rho_2, \sigma_2$  на  $\rho_3, \sigma_3$  и  $\rho_3, \sigma_3$  на  $\rho_{23}, \sigma_{23}$ ,  
и в формулах (3') или (4')

для  $M_{23}$  —  $\rho_1, \sigma_1$  на  $\rho_2, \sigma_2$ , а  $\rho_2, \sigma_2$  на  $\rho_3, \sigma_3$  и  $\rho_3, \sigma_3$  на  $\rho_4, \sigma_4$ ;

для  $M_3'$  —  $\rho_1, \sigma_1$  на  $\rho_2, \sigma_2$ , а  $\rho_2, \sigma_2$  на  $\rho_3, \sigma_3$  и  $\rho_3, \sigma_3$  на  $\rho_{23}, \sigma_{23}$ .

#### Список литературы

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

## СТРУКТУРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ $\mathcal{HS}_0$ -ГРАФІВ

М. П. Хоменко, Т. М. Виврот

Київ, Україна

Тут будуємо теорію графів певного підкласу одного класу 0-класифікації всіх простих скінченних графів заданого порядку  $n$  запропонованої в 1972-73 рр. М. П. Хоменком сім'ї  $\mathcal{K}$ -класифікацій,  $\mathcal{K} = 0(1)n$  всіх простих скінченних графів порядку  $n$  з погляду неіснування чи існування 1-фактора в самому графі чи в певних його підграфах, а саме  $\mathcal{HS}_0$ -графів (гіперпримітивних графів; термін «гіперпримітивний граф» вперше ввів і досліджував властивості таких графів У. Татт [1]) — максимально насичених ребрами  $S_0$ -графів (примітивних графів, графів без 1-факторів). Ідея  $k$ -класифікацій всіх простих скінченних графів при  $\mathcal{K} = 0$  започаткована в 1971 р. авторами цієї роботи. В побудованій теорії  $\mathcal{HS}_0$ -графів значне місце посідає дослідження структурних властивостей графів. Знайдена структура графів цього класу дає можливість побудувати всі такі графи заданого порядку  $n$ . Встановлено критерій належності графа до класу  $\mathcal{HS}_0$ -графів. Дослідження проводимо створеним авторами цієї роботи загальним методом дослідження структурних властивостей графів різних класів кожної  $\mathcal{K}$ -класифікації,  $0 \leq \mathcal{K} \leq n$ , всіх простих скінченних графів порядку  $n$ , названим нами методом локалізованих переміжних ланцюгів.

У класі простих (без петель і кратних ребер) скінченних неорієнтованих  $S_0$ -графів  $G$ ,  $G = (G^0, G^1)$ , розглядаємо підклас  $S_0$ 1-графів, кожен з яких містить принаймні одну таку пару несуміжних вершин  $a_{i_1}, a_{i_2}$ , що при доданні до графа  $G$  ребра  $(a_{i_1} a_{i_2})$  з доповнюючого до нього графа  $\hat{G}$  отримаємо уже не  $S_0$ -граф  $G_{0, \neg 1}$ ,  $G_{0, \neg 1} = G + (a_{i_1} a_{i_2})$ , а граф, який, отожд, буде  $\mathcal{K}_0$ -графом (непримітивним графом; графом, що містить 1-фактор). Властивості цих графів використовуємо для дослідження  $\mathcal{HS}_0$ -графів. Через  $G \setminus (\{a_i, a_j\})$  позначаємо граф, одержаний видаленням з заданого графа  $G$  його вершин  $a_i, a_j$  разом з інцидентними їм в  $G$  ребрами, а 1-фактор графа  $G$  — через  $f_{[1]}(G)$ . Пару вершин  $a_i, a_j$  графа  $G$  називаємо  $S$ -парою чи  $\mathcal{K}$ -парою в залежності від того, чи граф  $G \setminus (\{a_i, a_j\}) \in S_0$ -графом чи  $\mathcal{K}_0$ -графом відповідно, це пара типу I чи пара типу II графа  $G$ .

Ясно, що пара  $\{a_{i_1} a_{i_2}\}, (a_{i_1} a_{i_2}) \in \hat{G}^1$ , вершин  $S_0$ 1-графа  $G$  є його  $\mathcal{K}$ -

парою. Ребро  $(a_{l_1} a_{l_2})$ , називаємо 0-факторизуючим ребром  $\mathcal{S}_0$ 1-графа  $G$ , а множину  $\mathcal{B}_{0,1}^*$ ,  $\mathcal{B}_{0,1}^* = \{a_{l_t}\}_{t=1}^2$ , вершин  $\mathcal{S}_0$ 1-графа  $G$  — його 0-початком. Отже,  $\mathcal{S}_0$ 1-граф містить незалежну множину потужності  $\geq 2$ . Нехай  $f_{0,1} = f_{[1]}^1(G \setminus (\mathcal{B}_{0,1}^*))$ . При цьому  $f_{[1]}^1(G_{0,\tau 1}) = f_{0,1}^1 + (a_{l_1} a_{l_2})$ . Порядок  $n$   $\mathcal{S}_0$ 1-графа  $G$  задовольняє умовам:  $n \equiv 0 \pmod{2}$  і  $n \geq 2$ .  $\mathcal{HS}_0$ -граф  $G$  порядку  $n$ ,  $n \equiv 0 \pmod{2}$  є  $\mathcal{S}_0$ 1-графом. Кожен граф  $G$  порядку  $n$ ,  $n \equiv 1 \pmod{2}$  є  $\mathcal{S}_0$ -графом, тому  $\mathcal{HS}_0$ -графом порядку  $n$ ,  $n \equiv 1 \pmod{2}$  є повний граф  $K_n$ , тобто  $\mathcal{N}$ -граф  $\mathcal{N}_{n,n-1,2-n}$ .

**Теорема 1.** Граф порядку  $n$ ,  $n \geq 1$ , є  $\mathcal{HS}_0$ -графом тоді і лише тоді, коли він є або  $\mathcal{N}$ -графом  $\mathcal{N}_{n,k,2}(\{n_r\}_{r=1}^{k+2})$ ,  $n_r \equiv 1 \pmod{2}$ ,  $r = 1(1)(k+2)$ ,  $0 \leq k \leq (n-2)/2$ ,  $n \equiv 0 \pmod{2}$ , або  $\mathcal{N}$ -графом  $\mathcal{N}_{n,n-1,2-n}$ ,  $n \equiv 1 \pmod{2}$ .

Нижче через  $p_0^h(G)$  позначаємо кількість компонент непарного порядку графа  $G$ , а потужність множини  $M$  — через  $|M|$ .

**Наслідок (теорема III [1]).** Нехай  $\Sigma$  — множина особливих вершин гіперпримітивного графа  $G$  парного порядку. Тоді  $p_0^h(G \setminus (\Sigma)) > |\Sigma|$ .

Слід відмітити, що множиною  $\Sigma$  є множина  $A$  центральних вершин  $\mathcal{N}$ -графа  $\mathcal{N}_{n,k,2}$ ,  $n \equiv 0 \pmod{2}$  з теореми 1.

З теореми 1 впливає наступна структурна характеристика  $\mathcal{S}_0$ -графів.

**Теорема 2.** Граф порядку  $n$ ,  $n \geq 1$  є  $\mathcal{S}_0$ -графом тоді і лише тоді, коли він є фактор-графом або  $\mathcal{N}$ -графа  $\mathcal{N}_{n,k,2}(\{n_r\}_{r=1}^{k+2})$ ,  $n_r \equiv 1 \pmod{2}$ ,  $r = 1(1)(k+2)$ ,  $0 \leq k \leq (n-2)/2$ ,  $n \equiv 0 \pmod{2}$ , або  $\mathcal{N}$ -графа  $\mathcal{N}_{n,n-1,2-n}$ ,  $n \equiv 1 \pmod{2}$ .

**Наслідок (теорема IV [1]).** Граф  $G$  є примітивним графом тоді і лише тоді, коли існує така підмножина  $S$  множини його вершин  $G^0$ , що  $p_0^h(G \setminus (S)) > |S|$ .

Множиною  $S$  при  $|G^0| \equiv 0 \pmod{2}$  є множина  $A$  центральних вершин  $\mathcal{N}$ -графа  $\mathcal{N}_{n,k,2}$ ,  $n \equiv 0 \pmod{2}$  з теореми 1, фактор-графом якого є заданий граф  $G$ , а при  $|G^0| \equiv 1 \pmod{2}$  множиною  $S$  є порожня множина  $\emptyset$ .

Теорема 1 дає можливість побудувати всі  $\mathcal{HS}_0$ -графи заданого порядку  $n$ , а теорема 2 — всі  $\mathcal{S}_0$ -графи того ж порядку  $n$ .

#### Список літератури

1. Tutte W. T. The factorization of linear graphs // J. London Math. Soc. — 1947. — **22**. — P. 107—111.

**ФУНКЦІЇ МОРСА, ІНДУКОВАНІ ФУНКЦІЯМИ МОРСА — БОТТА**  
**С. Й. Цешковський**

*НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна*  
[tsesh@ukr.net](mailto:tsesh@ukr.net)

**Означення 1** [1]. Замкнений підмноговид  $V^k$  кобордизму  $(W^n, V_0, V_1)$ ,  $(k < n)$  називається невинродженим критичним підмноговидом функції  $f$ , якщо

1.  $V^k \cap V_0 = V^k \cap V_1 = \emptyset$ ; 2.  $df|_{V^k} = 0$  ( $f|_{V^k} = a$ ); 3.  $\text{corank } H_p(f) = k$   $\forall p \in V^k$ , де  $H_p(f)$  – гессіан  $f$  в точці  $p$ .

**Лема 1** [13]. (Узагальнена лема Морса) Нехай

$$f : (W^n, V_0, V_1) \rightarrow ([0;1], 0, 1)$$

гладка функція,  $V^k$  — її невинроджений критичний підмноговид. Тоді у трубчастому околі  $V^k$   $\exists \nu : V^k \times D^{n-k}(\varepsilon) \rightarrow \text{Int } W^n$  така система координат, де  $D^{n-k}(\varepsilon)$  — диск радіуса  $\varepsilon$ ,  $\nu(V^k \times 0) = V^k$ , що

$$f \circ \nu(p, x) = -x_1^2 - x_2^2 \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + x_{\lambda+2}^2 + \dots + x_{n-k}^2$$

для будь-якої  $(p, x) \in V^k \times D^{n-k}(\varepsilon)$ .

Надалі критичні підмноговиди вимірності  $k$  індексу  $\lambda$  будемо позначати  $V_\lambda^k$ .

**Означення 2** [1–2]. Гладка функція

$$f : (W^n, V_0, V_1) \rightarrow ([0;1], 0, 1)$$

називається функцією Морса — Ботта, якщо всі її критичні підмноговиди невинроджені та не перетинаються.

Нехай  $f : (W^n, V_0, V_1) \rightarrow ([0;1], 0, 1)$  — функція Морса — Ботта, з одним невинродженим підмноговидом  $V_\lambda^k$  індексу  $\lambda$   $\dim V_\lambda^k = k$  і  $f(V_\lambda^k) = a$ ,  $0 < a < 1$ , а  $h : V_\lambda^k \rightarrow [0;1]$  — довільна функція Морса на  $V_\lambda^k$ .  $h : V_\lambda^k \rightarrow [0;1]$  задано таким чином, що  $\forall \delta > 0$   $h \in B(0, \delta)$  де  $B(0, \delta)$  —  $\delta$ -окіл 0-функції в  $C^2(V_\lambda^k, \mathbb{R})$ . Згідно з лемою 1, існує таке вкладення

$$\nu : V_\lambda^k \times D^{n-k}(2\sigma_1) \rightarrow \text{Int } W^n,$$

що  $\nu(V_\lambda^k \times 0) = V_\lambda^k$ ,  $f \circ \nu(V_\lambda^k \times 0) = a$  і

$$f \circ \nu(t, x) = a - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-k}^2,$$

$$(t, x) \in V_\lambda^k \times D^{n-k}(2\sigma_1).$$

Оберемо  $\sigma < \sigma_1$  і розглянемо замкнений трубчастий окіл підмноговида  $V_\lambda^k$   
 $T_{2\sigma}(V_\lambda^k) = V_\lambda^k \times \overline{D}^{n-k}(2\sigma)$ . Розглянемо функцію  $Q : V_\lambda^k \times \overline{D}^{n-k}(2\sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ , що  
задається співвідношенням

$$Q(t, x) = a - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-k}^2.$$

Позначимо

$$\overline{Q}(t, x) = Q(t, x) + h(t),$$

де  $h \in B(0, \delta) \subset C^2(V_\lambda^k, \mathbb{R})$  – функція Морса.

Зрозуміло, що  $\overline{Q} : V_\lambda^k \times \overline{D}^{n-k}(2\sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  має вигляд

$$\overline{Q}(t, x) = a - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-k}^2 + h(t).$$

**Лема 3.** Нехай функція Морса  $h : V_\lambda^k \rightarrow [0;1]$   $h \in B(0, \delta) \subset C^2(V_\lambda^k, \mathbb{R})$   
для будь якого  $\sigma > 0$  має лише критичні точки  $q_1, q_2, \dots, q_l \in V_\lambda^k$ . Функція  $\overline{Q}$  є  
функцією Морса на  $\text{Int}\left(V_\lambda^k \times \overline{D}^{n-k}(2\sigma)\right)$ , її критичними точками є точки  
 $q_1, q_2, \dots, q_l \in V_\lambda^k$ , причому якщо  $\text{ind}_h(q_i) = r_i$ , то  $\text{ind}_{\overline{Q}}(q_i) = \lambda + r_i$ . Більш  
того, для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує таке  $\delta > 0$ , що якщо  
 $h \in B(Q, \delta) \subset C^2(V_\lambda^k, \mathbb{R})$ , то  $\overline{Q} \in B(Q, \varepsilon)$ , де  $B(Q, \varepsilon)$  —  $\varepsilon$ -окіл функції  $Q$  в  
 $C^2\left(V_\lambda^k \times \overline{D}^{n-k}(2\sigma), \mathbb{R}\right)$ .

**Теорема.** Нехай  $f : (W^n, V_0, V_1) \rightarrow ([0;1], 0, 1)$  — функція Морса — Ботта,  
з одним невиродженим підмноговидом  $V_\lambda^k$ ,  $f(V_\lambda^k) = a$ ,  $0 < a < 1$ . Тоді  
 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ , що  $\forall h \in B(0, \delta) \subset C^2(V_\lambda^k, \mathbb{R})$  функції Морса  
 $\exists g : (W^n, V_0, V_1) \rightarrow ([0;1], 0, 1)$  функція Морса, критичними точками якої є  
критичні точки функції  $h$ , при цьому, якщо  $q \in V_\lambda^k$  є критичною точкою  
функції  $h$ , то

$$\text{ind}_g(q) = \text{ind}_h(q) + \lambda \text{ і } g \in B(f, \varepsilon),$$

де  $B(f, \varepsilon)$  —  $\varepsilon$ -окіл функції  $f \in C^2(W^n, \mathbb{R})$ .

#### Список літератури

1. Bott R. Lecture on Morse Theory, old and new // Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — 7, No. 2.
2. Hirsh M. W. Differential topology. — New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1976.

**ПРО ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ  
УЗАГАЛЬНЕНИХ ЯДЕР ТИПУ ТЕПЛИЦА**

**О. Б. Чернобай**

*Національний університет державної податкової служби України,  
Ірпінь, Україна,  
chernobai.olga@gmail.com*

Нехай  $G = (l', l'')$ ,  $(-\infty \leq l' \leq l'' \leq \infty)$ .

Функцію називають *експоненціально випуклою*, якщо ядро

$$K(x, y) = k(x + y), \quad (x, y \in G)$$

додатно визначене.

Для таких функцій відоме інтегральне зображення

$$K(x, y) = k(x + y) = \int e^{\lambda(x+y)} d\sigma(\lambda), \quad x, y \in G,$$

де  $d\sigma(\lambda)$  — невід’ємна міра. Міра  $d\sigma(\lambda)$  завжди визначається по  $k$  єдиним чином ([1, розд. 8, п. 3.10]).

Розглядувана задача є продовженням робіт [2, 3], в яких побудовано і досліджено інтегральне зображення узагальнених ядер Теплиця на основі теорії узагальнених власних функцій. Такі ядра вивчалися і раніше, до робіт [2, 3], але за допомогою класичного аналізу. Вони пов’язані з додатно визначеними функціями.

В даній доповіді вивчаються подібні ядра, але пов’язані з експоненціально випуклими функціями.

Нехай  $I$  є інтервал вигляду  $I = (-l, l)$ , де  $0 < l \leq \infty$ .  
 $I_1 = I \cap [0, \infty)$ ,  $I_2 = I \cap (-\infty, 0)$ . Позначимо для довільних  $\alpha, \beta = 1, 2$

$$I_{\alpha, \beta} = \{t = x + y \mid x \in I_\alpha, y \in I_\beta\}, \quad (1)$$

тобто  $I_{11} = (0, 2l)$ ,  $I_{12} = (-l, l)$ ,  $I_{21} = (-l, l)$ ,  $I_{22} = (-l, 0)$ .

Розглянемо обмежене додатно визначене ядро

$$I \times I \ni \langle x, y \rangle \rightarrow K(x, y) \in C^1.$$

Ядру  $K$  поставимо у відповідність чотири функції  $I_{\alpha, \beta} \ni t \mapsto k_{\alpha, \beta}(t) \in C^1$  такі, що:

$$K(x, y) = k_{\alpha, \beta}(x + y), \quad \langle x, y \rangle \in I_\alpha \times I_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2)$$

Кожне додатно визначене ядро (2) ермітове, тобто  $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ .

**Теорема.** Для кожного ядра типу (2) справедливе інтегральне зображення

$$K(x, y) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda(x+y)} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \kappa_{\alpha}(x) \kappa_{\beta}(y) d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda), \quad (x, y) \in I \times I. \quad (3)$$

Тут  $\kappa_{\alpha}$  — характеристична функція інтервалу  $I_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$  і

$d\sigma(\lambda) = (\sigma_{\alpha\beta}(\lambda))_{\alpha, \beta=1}^2$  — скінченна, невід’ємна матрична борелівська міра на  $\mathbb{R}^1$  ( $d\sigma_{11}(\lambda)$  і  $d\sigma_{22}(\lambda)$  є невід’ємними скінченними скалярними мірами,  $d\sigma_{12}(\lambda) = \overline{d\sigma_{21}(\lambda)}$  має скінченну варіацію на  $\mathbb{R}^1$ ).

Навпаки, кожне ядро типу (3) з скінченною невід’ємною матрично значною мірою  $d\sigma(\lambda)$  є узагальненим ядром.

Міра  $d\sigma(\lambda)$  в представленні (3) визначається однозначно.

Доведення базується на теорії розкладів за узагальненими власними векторами самоспряженого оператора, який діє в гільбертовому просторі, побудованому за таким ядром.

За ядром  $K$  побудуємо гільбертовий простір  $H_K$ , в якому діятиме наш оператор, та квазіядерне оснащення цього простору:

$$H_{K,-} \supset H_K \supset H_{K,+} \supset D$$

вкладення  $D$  в  $H_{K,+}$  є неперервним.

Квазіскалярний добуток у просторі  $H_K$  введемо таким чином:

$$(f, g)_{H_K} = \iint_{I \times I} K(x, y) f(y) \overline{g(x)} dx dy = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \iint_{I_{\alpha} \times I_{\beta}} k_{\alpha\beta}(x+y) f(y) \overline{g(x)} dx dy, \quad f, g \in L^2, \quad (4)$$

де  $L^2$  — гільбертовий простір  $L_2$  побудований за мірою Лебега  $dx$  на  $I$ .

У просторі  $H_K$  розглянемо оператор

$$\text{Dom}(A') = C_0^{\infty}(I) \ni u \mapsto A'u = \frac{du}{dx} := (Lu)(x),$$

де  $C_0^{\infty}(I)$  — сукупність функцій, які анулюються в околі границі та в околі нуля.

Оператор  $A'$  ермітів відносно скалярного добутку (4). У нього рівні дефектні числа, бо в цьому просторі діє класична інволюція  $L^2 \ni f(x) \mapsto \overline{f(x)} \in L^2$  і оператор  $A'$  дійсний відносно цієї інволюції, тому його дефектні числа рівні і він має самоспряжене розширення в цьому гільбертовому просторі  $H_K$ .

Далі робиться розклад за узагальненими власними векторами оператора або його самоспряженого розширення у просторі  $H_K$ .

Відповідна рівність Парсеваля і дає нам зображення (3).

Зауважимо, що єдиність міри  $d\sigma(\lambda)$  в зображенні (3), означає, що оператор, який фігурував у доведенні теореми, насправді буде самоспряженим розширенням оператора  $A'$ , бо інші розширення цього оператора будуть давати інші міри  $d\sigma(\lambda)$ . Тим самим можна стверджувати, що оператор  $A'$  істотно самоспряжений у просторі  $H_K$ , породженому ядром  $K$ .

#### Список літератури

1. Berezansky Yu. M. Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators. — Amer. Math. Soc., Providence, R.I.AMS, 1968. (Russian edition: Kiev: Naukova Dumka, 1965).
2. Berezansky Yu. M. Chernobai O. B. On the theory of generalized Toeplitz kernels // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 11. — С. 1458—1472.
3. Чернобай О. Б. Спектральне зображення для узагальнених операторнозначних ядер Тепліца // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 12. — С. 1698—1710.

## РОЗВИНЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ МОМЕНТІВ У РЯДИ КЛАСИЧНИХ МОМЕНТІВ

М. М. Чип

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна

Класичні моменти  $\{\sigma_\nu\}_0^\infty$  на відрізку  $[a; b]$  дійсної осі зображають у вигляді

$$\sigma_\nu = \int_a^b x^\nu d\mu(x),$$

в якому монотонно неспадна функція  $\mu(x)$  має нескінченну кількість точок зростання. Узагальнені моменти  $\{S_\nu\}_0^\infty$  на відрізку  $[a; b]$  дійсної осі зображають у вигляді

$$S_{k+l} = \int_a^b a_k(x) b_l(x) d\mu(x),$$

в якому послідовності  $\{a_k(x)\}_0^\infty$  та  $\{b_l(x)\}_0^\infty$  знаходяться в просторі інтегрованих з квадратом функцій на відрізку  $[a; b]$  з мірою  $d\mu(x)$ . Якщо  $a_k(x) = x^k$  та  $b_l(x) = x^l$ , то узагальнені моменти стають класичними моментами ([1], [2]).

Підінтегральні функції розвинемо в степеневі ряди, тобто нехай

$$a_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{km} x^m, \quad b_l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{ln} x^n$$

у відповідних проміжках збіжності. Тоді справджується розвинення

$$S_{k+l} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^n \alpha_{km} \beta_{l, n-m} \right) \sigma_n$$

узагальнених моментів у звичайні ряди класичних моментів та

$$S_{k+l} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{km} \beta_{ln} \sigma_{m+n}$$

узагальнених моментів у подвійні ряди класичних моментів.

Встановлені розвинення отримуються внаслідок підстановки степеневих рядів у зображення узагальнених моментів та наступного почленного інтегрування.

Підінтегральні функції будемо вважати алгебраїчними многочленами відповідних степенів з дійсними коефіцієнтами, тобто нехай

$$a_k(x) = \sum_{m=0}^k p_{km} x^m, \quad b_l(x) = \sum_{n=0}^l q_{ln} x^n, \quad \mu(x) = x,$$

причому старші коефіцієнти відмінні від нуля. Тоді справджується розвинення

$$S_{k+l} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[ a_k^{(j)}(b) b_{l,j+1}(b) - a_k^{(j)}(a) b_{l,j+1}(a) \right] + \\ + (-1)^k k! p_{kk} \left[ b_{l,k+1}(b) - b_{l,k+1}(a) \right]$$

узагальнених моментів у суми скінченної кількості відмінних від нуля доданків, у яких покладено

$$b_{l,j+1}(x) = \frac{1}{j!} \int_a^x (x-t)^j b_l(t) dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Якщо функції  $c_l(t)$  диференційовані на проміжку  $(a; b)$ , причому  $b_l(t) = c_l'(t) \geq 0$ , то функції  $b_{l,j+1}(x)$  виражають зміщені класичні моменти функцій  $c_l(t)$ .

Встановленні розвинення отримуються внаслідок інтегрування частинами  $k$  разів зображення узагальнених моментів на основі методу математичної індукції.

#### Список літератури

1. Голуб А. П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — К.: Ін-т математики НАН України, 2002. — 222 с.
2. Чип М. М. Зображення узагальнених моментів на відрізку дійсної осі. — Львів: Вісник НУ «Львівська політехніка». Фізико-математичні науки. — 2013. — № 768. — С. 71—75.

## ВИДИ ОРТОПРОЕКТОРІВ У ДВОВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ

В. П. Шоха

Національний університет харчових технологій, Київ, Україна

Як відомо, лінійний оператор  $A_M$  є ортопроектором на підпростір  $M$ , якщо  $A_M^2 = A_M^* = A_M$ . Знайдемо, який вигляд мають ортопроектори в двовимірному просторі.

Нехай ортопроектор  $A_M$  заданий матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

З умови  $A = A^*$  маємо:  $a_{11} = \bar{a}_{11}$ ,  $a_{12} = \bar{a}_{21}$ ,  $a_{21} = \bar{a}_{12}$ ,  $a_{22} = \bar{a}_{22}$ . Отже, елементи  $a_{11}$  і  $a_{22}$  є дійсними числами, а елементи  $a_{12}$  і  $a_{21}$  є комплексно спряженими. Тоді матрицю  $A$  можна записати у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ \bar{\lambda} & \beta \end{pmatrix},$$

де  $\alpha, \beta$  — дійсні.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ \bar{\lambda} & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ \bar{\lambda} & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + |\lambda|^2 & \lambda(\alpha + \beta) \\ \bar{\lambda}(\alpha + \beta) & |\lambda|^2 + \beta^2 \end{pmatrix}.$$

З рівності  $A^2 = A$  отримуємо систему:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha^2 + |\lambda|^2 \\ \lambda = \lambda(\alpha + \beta) \\ \bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\alpha + \beta) \\ \beta = |\lambda|^2 + \beta^2 \end{cases}.$$

Розв'язавши систему, отримуємо:

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha = 0, \\ \beta = 0 \end{cases}, \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha = 0, \\ \beta = 1 \end{cases}, \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha = 1, \\ \beta = 0 \end{cases}, \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha = 1, \\ \beta = 1 \end{cases}, \begin{cases} \lambda = \sqrt{\alpha - \alpha^2} e^{i\varphi} \\ \beta = 1 - \alpha \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Отже матриці ортопроекторів в двовимірному просторі мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{\alpha - \alpha^2} e^{i\varphi} \\ \sqrt{\alpha - \alpha^2} e^{-i\varphi} & 1 - \alpha \end{pmatrix},$$

де  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Узагальнюючи отримані результати, приходимо до висновку, що ортопроектори в двовимірному просторі мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{\alpha - \alpha^2} e^{i\varphi} \\ \sqrt{\alpha - \alpha^2} e^{-i\varphi} & 1 - \alpha \end{pmatrix}.$$

Позначивши  $\alpha = \cos^2 \gamma$ , де  $\gamma \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , останню матрицю можна переписати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \gamma & \cos \gamma \sin \gamma e^{i\varphi} \\ \cos \gamma \sin \gamma e^{-i\varphi} & \sin^2 \gamma \end{pmatrix}.$$

Для дійсного простору  $\mathbb{R}^2$  даний лінійний оператор буде мати вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2 \gamma & \pm \cos \gamma \sin \gamma \\ \pm \cos \gamma \sin \gamma & \sin^2 \gamma \end{pmatrix}.$$

Знайдемо проекцію вектора  $\bar{m} = (x_m; y_m)$  на вектор  $\bar{n} = (\cos \gamma; \sin \gamma)$ :

$$np_{\bar{n}} \bar{m} = \frac{\bar{m} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{x_m \cos \gamma + y_m \sin \gamma}{\sqrt{\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma}} = x_m \cos \gamma + y_m \sin \gamma.$$

$$A\bar{m} = \begin{pmatrix} x_m \cos^2 \gamma + y_m \cos \gamma \sin \gamma \\ x_m \cos \gamma \sin \gamma + y_m \sin^2 \gamma \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} |A\bar{m}| &= \sqrt{(x_m \cos^2 \gamma + y_m \cos \gamma \sin \gamma)^2 + (x_m \cos \gamma \sin \gamma + y_m \sin^2 \gamma)^2} = \\ &= x_m \cos \gamma + y_m \sin \gamma. \end{aligned}$$

Отже, подіявши цим оператором  $A$  на довільний вектор  $\bar{m}$ , отримаємо проекцію цього вектора на пряму  $l$ , яка проходить через початок координат і утворює кут  $\gamma$  з додатнім напрямом осі  $Ox$ .

### Список літератури

1. Муратов М. А., Островський В. Л., Самойленко Ю. С. Конечномерный линейный анализ. I. Линейные операторы в конечномерных гильбертовых (унитарных) пространствах (H). — К.: Центр учебной литературы, 2012. — 174 с.
2. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966. — 544 с.
3. Городецкий В. В., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П. Методы решения задач по функциональному анализу. — К.: Выща шк., 1990. — 479 с.

# ВІДНОСНИЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРИ

В. П. Шоха

*Національний університет харчових технологій, Київ, Україна*

Як відомо, відносним спектром оператора  $A$  в гільбертовому просторі  $H$  називається множина комплексних чисел  $\lambda$ , для яких оператор  $A - \lambda$  не буде відносно оборотним, тобто для оператора  $A$  не існує такого оператора  $B$ , що  $ABA = A$ . Поняття оборотного оператора є досить спеціальним, не дуже корисним, але воно володіє деякими цікавими властивостями. Кожний оборотний оператор є відносно оборотним; насправді ж відносно оборотним є оператор, який має лівий або правий обернений. Менш очевидним є той факт, що кожен оператор у скінченновимірному просторі є відносно оборотним: його можна представити у вигляді прямої суми оборотного та нільпотентного операторів.

Розглянемо питання про замкненість відносного спектра оператора.

Нехай  $A$  — оператор в гільбертовому просторі  $H$  і  $\alpha$  — число, не рівне нулю.

Операторна матриця

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & A \end{pmatrix}$$

відносно оборотна тоді і тільки тоді, коли відносно оборотним є оператор  $A$ . Числа  $\alpha$  і  $1$  із матриці  $M$  розуміються тут як оператори в  $H$ .

Припустимо спочатку, що матриця  $M$  відносно оборотна. Якщо

$$N = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

— відносно оборотна матриця для  $M$ , то  $MNM = M$ .

$$MN = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha P & \alpha Q \\ P + AR & Q + AS \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} MNM &= \begin{pmatrix} \alpha P & \alpha Q \\ P + AR & Q + AS \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & A \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2 P + \alpha Q & \alpha QA \\ \alpha(P + AR) + Q + AS & (Q + AS)A \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Звідси  $\alpha QA = 0$  і  $QA + ASA = A$ . Так як  $\alpha \neq 0$ , то  $QA = 0$  і тому  $ASA = A$ , тобто оператор  $A$  відносно оборотний.

Припустимо тепер, що оператор  $A$  відносно оборотний, тобто  $ABA = A$ .  
Покладемо

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} AB & 1 - AB \\ -\frac{1}{\alpha} B & B \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
MN &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} AB & 1 - AB \\ -\frac{1}{\alpha} B & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & \alpha(1 - AB) \\ \frac{1}{\alpha} AB - \frac{1}{\alpha} AB & 1 - AB + AB \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} AB & \alpha(1 - AB) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \\
MNM &= \begin{pmatrix} AB & \alpha(1 - AB) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & A \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha AB + \alpha(1 - AB) & \alpha(1 - AB)A \\ 1 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & A \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отже,  $MNM = M$ .

Із отриманого результату слідує, що існують оператори, відносні спектри яких незамкнені. Для доведення розглянемо випадок, коли  $\alpha = 0$ . Операторна матриця

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & A \end{pmatrix}$$

завжди відносно оборотна незалежно від того, що представляє собою оператор  $A$ .

Дійсно, якщо

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то  $MNM = M$ .

Таким чином, відносний спектр операторної матриці

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & A \end{pmatrix}$$

майже співпадає з відносним спектром оператора  $A$ ; єдине, чим вони можуть відрізнитися, це число 1. Точніше, якщо відносні спектри операторів  $M$  і  $A$  позначити через  $\Phi$  і  $\Psi$  відповідно, то  $\Phi = \Psi - \{1\}$ . Тому якщо 1 — точка накопичення для відносного спектра оператора  $A$ , то відносний спектр операторної матриці  $M$  незамкнений.

### Список літератури

1. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. — М.: Мир, 1970. — 352 с.
2. Городецкий В. В., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П. Методы решения задач по функциональному анализу. — К.: Выща шк., 1990. — 479 с.
3. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966. — 544 с.

# ПРО ОДИН ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКОЇ ОБЕРНЕНОЇ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ

**О. С. Ярошко**

*Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, Україна*  
oksyanya@gmail.com

Розглянемо задачу реконструкції матриці на основі відомих її спектральних даних та за умови, що матриця володіє певною заданою структурою. Така задача відома як обернена задача на власні значення і зустрічається у різних галузях науки: моделюванні механічних систем, геології, системах контролю та ідентифікації, тощо.

Залежно від типу структури матриці, виділяють різні типи обернених спектральних задач: багатопараметрична, поліноміальна, симетрична та ін., (див. [3]). У цій роботі розглянемо задачу, матриця якої,  $A(\vec{h})$ , нелінійно залежить від набору спектральних параметрів  $\vec{h} = (h_1, \dots, h_{n+1})$ .

Для чисельного відшукування розв'язку оберненої спектральної задачі існують різні чисельні методи: методи типу Ньютонa [1], методи, що базуються на неточному перетворенні Кейлі [4], або такі, що використовують ортогональні перетворення [3]. У свою чергу, ми пропонуємо ітераційний метод, що базується на градієнтній процедурі [2, 5]. Він дозволяє знайти розв'язок деякої варіаційної задачі, еквівалентної до вихідної спектральної задачі.

Нехай задано нелінійну задачу на власні значення:

$$A(\vec{h})x + \lambda x = 0, \tag{1}$$

де  $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ,  $\lambda_k = k^2\pi^2, k = 1, \dots, n$  — власні значення матриці  $A(\vec{h})$ ,  $\vec{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$  — відповідні їм власні вектори,  $\vec{h} = (h_1, \dots, h_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

— невідомі спектральні параметри такі, що  $h_k > 0, k = 1, \dots, n$ ,  $\sum_{k=1}^{n+1} h_k = 1$ .

Матриця  $A(\vec{h})$  має визначену структуру:

$$A(\vec{h}) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{h_1 h_2} & \frac{2}{(h_1 + h_2) h_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{(h_2 + h_3) h_2}{2} & -\frac{h_2 h_3}{2} & \frac{2}{(h_2 + h_3) h_3} & & & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{2}{(h_{n-1} + h_n) h_{n-1}} & -\frac{2}{h_{n-1} h_n} & \frac{(h_{n-1} + h_n) h_n}{2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{2}{(h_n + h_{n+1}) h_n} & -\frac{2}{h_n h_{n+1}} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Користуючись означенням спектру матриці, отримуємо систему  $n$  нелінійних рівнянь відносно невідомих параметрів  $h_1, \dots, h_n$ :

$$\begin{cases} A(\vec{h})\vec{x}^1 + \pi^2\vec{x}^1 = 0 \\ A(\vec{h})\vec{x}^2 + 4\pi^2\vec{x}^2 = 0 \\ \vdots \\ A(\vec{h}) + n^2\pi^2\vec{x}^n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

У матричному вигляді система (3) запишеться наступним чином:

$$T(\vec{h})\vec{x} = 0, \quad (4)$$

Отриману задачу, розглядатимемо як звичайну задачу на власні значення де  $\vec{x} \in E^{n^2} \setminus \{0\}$  — це власний вектор,  $\vec{h} = \{h_1, \dots, h_{n+1}\} \in E^{n+1}$  — власне значення і, водночас, шуканий набір спектральних параметрів.

У відповідність до задачі (4) поставимо еквівалентну варіаційну задачу.

Знайти такий набір параметрів  $\vec{h} = \{h_1, \dots, h_{n+1}\} \in E^{n+1}$  та відповідний їм вектор  $\vec{x} \in E^{n^2} \setminus \{0\}$ , при яких функціонал  $F(\vec{u})$ ,  $\vec{u} = \{\vec{x}, \vec{h}\}$ , досягає свого мінімального значення:

$$F(\vec{u}) \rightarrow \min_{\vec{u}} \vec{u} \in U \subset H, \quad (5)$$

де функціонал  $F(\vec{u})$  має вигляд:

$$F(\vec{u}) = \frac{1}{2} \|T(\vec{h})\vec{x}\|^2, \quad \forall \vec{u} = \{\vec{x}, \vec{h}\} \in H = (E^{n^2} \setminus \{0\}) \oplus E^{n+1},$$

а вектор градієнт цього функціонала описується формулою:

$$\nabla F(\vec{u}) = \left\{ (T^*T\vec{x}, e_1), \dots, (T^*T\vec{x}, e_n), \left( T\vec{x}, \frac{\partial T}{\partial h_1} \vec{x} \right), \dots, \left( T\vec{x}, \frac{\partial T}{\partial h_n} \vec{x} \right) \right\}$$

Таким чином ми здійснили перехід від оберненої нелінійної спектральної задачі (1) до прямої нелінійної задачі на власні значення (4) і далі — до еквівалентної їй задачі мінімізації функціонала (5).

Для того, щоб обчислити найближчий розв'язок варіаційної задачі (5), застосуємо метод, відомий з робіт [2], [5]. Цей ітераційний метод базується на градієнтній процедурі та методі Ньютона і описується наступною формулою:

$$\vec{u}^{(k+1)} = \vec{u}^{(k)} - \gamma_k \nabla F(\vec{u}^{(k)}), \quad \text{де } \gamma_k = \frac{F(\vec{u}^{(k)})}{\|\nabla F(\vec{u}^{(k)})\|^2} \quad (6)$$

Еквівалентність розглянутих задач та збіжність запропонованого методу доведено відповідними теоремами, (див. [2, 5]).

Отже, алгоритм розв'язання оберненої нелінійної спектральної задачі (1) складається з наступних кроків:

*Крок 1 (Вхідні дані)*

Задано  $\lambda_k = k^2\pi^2, k = 1, \dots, n$  — власні значення матриці задачі  $A(\vec{h})$ .

*Крок 2 (Вибір початкового наближення)*

2.1. Вибрати початкове наближення набору параметрів  $\vec{h}^{(0)} = (h_1^{(0)}, \dots, h_{n+1}^{(0)})$ .

2.2. Обчислити матрицю  $A(\vec{h}^{(0)})$ , знайти її власні значення та відповідні власні вектори будь-яким із відомих методів. Отримані власні вектори прийняти за початкове наближення для

$$\vec{x}^{(0)} = [\vec{x}^{1(0)}, \vec{x}^{2(0)}, \dots, \vec{x}^{n(0)}]^T.$$

*Крок 3 (Відшукання розв'язку)*

for  $k = 0, 1, 2, \dots$  до досягнення точності do

3.1. Побудувати матриці  $A(\vec{h}^{(k)})$ ,  $T(\vec{h}^{(k)})$ .

3.2. Побудувати матриці  $\frac{\partial A(\vec{h}^{(k)})}{\partial h_i}$ ,  $\frac{\partial T(\vec{h}^{(k)})}{\partial h_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

3.3. Обчислити  $F(\vec{u}^{(k)}) = \frac{1}{2} (T(\vec{h}^{(k)})\vec{x}^{(k)}, T(\vec{h}^{(k)})\vec{x}^{(k)})$ .

3.4. Побудувати вектор градієнт  $\nabla F(\vec{u}^{(k)})$ , обчислити  $\|\nabla F(\vec{u}^{(k)})\|^2$ .

3.5. Обчислити наступне наближення  $\vec{u}^{(k+1)}$ .

end for

*Крок 4 (Оформлення результатів)*

Виділити параметри  $\vec{h}^*$  зі знайденого розв'язку  $u^* = \vec{u}^{(k+1)}$ .

*Крок 5 (Кінець)*

### Список літератури

1. Friedland I., Nocedal J., Overton M. The formulation and analysis of numerical methods for inverse eigenvalue problems // Technical Report. — 1985. — Vol. 179.
2. Khlobystov V. V., Podlevskiy B. M., Yaroshko O. S. A gradient descent method for solving of one class of nonlinear multiparameter eigenvalue problem // Proceeding of the Institute of Mathematics, Minsk. — 2014. — Vol. 22, No. 1. — P. 122—130.
3. Boley D., Golub G. H. A survey of matrix inverse eigenvalue problems // Inverse Problems. — 1987. — Vol. 3. — P. 595—622.
4. Jian Z. Numerical methods for Inverse Eigenvalue Problems. — The Chinese University of Hong Kong, 2004.
5. Podlevskiy B. M., Khlobystov V. V., Yaroshko O. S. One gradient method for solving the nonlinear multiparameter eigenvalue problems. — Modern Problems of Mechanics and Mathematics: In 3 vol. — Lviv, 2003. — Vol. 3. — P. 47—49.

# THEY PROBLEM OF GLOBAL LEARNING IN ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

A. O. Prykhodko, O. P. Prykhodko

*V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine*

[o.pryhodko@karazin.ua](mailto:o.pryhodko@karazin.ua), [prykhodkooa@gmail.com](mailto:prykhodkooa@gmail.com)

Elementally, a process of machine learning, occurred either in supervised artificial neural network, finding the local minimum among the distances to etalon, or in cluster analysis, extracting the cluster, implies operating with some numeric method.

In this context, traditional algorithm of backpropagation [1, 2] is a hybrid of gradient descent and the principle of dynamic programming that allows us investigate the local minimum of error energy. As a result, we obtain wide hypothesis space causes uncertainty in the modeling.

A considerable reduction of the hypothesis space (typically to a single classifier) appears during the transition to the problem of searching global minimum. But contemporary algorithms of mathematic programming are not able to solve introduced problem in general.

Nevertheless, in this publication has been presented fairly universal approach which enables to fulfill learning in artificial neural network whereby finding of a global minimum for a narrow, but still universal enough, class of models.

**Definition.** The global learning of artificial neural network is finding out minimum of errors' declines for figuring out the main parameters of artificial neural network (particularly the elements in weight transformation matrix  $W_{ij}$ ).

The difficulty of the learning emerges due to nonlinearity of artificial neural networks. To notice, the first innate source of nonlinearity followed by applying of nonlinear evaluation functions of various nature which, unlike the linear model of perceptron[3], set a stage of universality for modern models of artificial neural networks with a sophisticated architecture [1, 2].

Therefore, first of all, it is suggested to limit the class of eligible evaluation functions, according to a specific of a certain problem with either piecewise constant functions or piecewise linear functions, the last ones often produce more acceptable results concerning a number of approximation areas.

The elementary Heaviside unit step function, also well-known as a barrier function, contains two approximation areas.

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1, & \text{if } v \geq 0 \\ 0, & \text{if } v < 0 \end{cases}$$

In contrast, elementary piecewise linear function possesses three approximation areas.

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1, & \text{if } v \geq \frac{1}{2} \\ |v|, & \text{if } -\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{if } v < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

The second source of nonlinearity appears as a suitable metric type, connected with a specific of a concrete clusterization or recognizing problem. Let's have a look on the most popular metrics:

- Taxicab geometry:  $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$
- Chebyshev distance:  $\rho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$
- Generalised mean:  $\rho(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$
- Euclid — Mahalanobis distance :  $\rho(x, y) = \sqrt{((x - y)'G(x - y))}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$

In case of approximation the metric with a convex sphere it is natural to apply the approximation with convex polyhedron which admits next form of approximating the metric:

$$\rho(x, y) = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n c_j^i (x_j - y_j) \right\}, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Thus, further, we will study the class of artificial neural network models with the piecewise constant or piecewise linear evaluation functions (types 1, 2) and the metric (type 3), additionally Chebyshev as well as L1 metric have representation 3.

Importantly, the presented artificial neural network with the evaluation function (1, 2) and the metrics (3), on the one hand, in correspondence with an architecture of the network, define the dynamic process of signal passage that makes possible to apply the results of the optimization of dynamic systems. On the other hand, regarding the specific of conditions (1, 2, 3) it may be converted into the equivalent problems of linear programming with larger dimensions, that admit a finding of exact solution in a countable number of steps. The matching dynamic control system has following appearance:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= Az_n + Bu_n, z_0 \in Z_0, n = 0, \dots, N \\ u_n &\in U_n, \\ J &= (c, z_N) \xrightarrow{u_n \in U_n} \min. \end{aligned}$$

Where  $Z_0, U_N$  determine polyhedron of conditions. Introduced problem allows us utilize the principle of dynamic programming and the maximum principle [4]. Moreover, its solution calculate by dint of method of reverse gradual solving for the linear programming subproblems on each step  $n = (N - 1), \dots, 0$ .

Additionally, we obtain solution of global minimization problem because of a convexity of problem (4).

Especially, represented approximation admits interval estimation from both above and beneath

$$\rho_*(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \rho^*(x, y)$$

where metrics  $\rho_*, \rho^*$  are given in form (3) for each circumscribed and inscribed polyhedrons into main sphere:

$$S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(0, x) \leq 1\}.$$

In this case, we should employ a relaxation principle from dynamic programming [7], based on following inequality instead of a Bellman equation:

$$\min_u \{V(f(x, u) + l_*(x, u))\} \leq V(x) \leq \min_u \{V(f(x, u) + l^*(x, u))\}$$

#### References

1. Minsky M. L, Papert S. Perceptrons. — Cambridge, MA: MIT Press, 1969.
2. Hayrin S. Neural Networks. — Second Edition. — McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada, 2006.
3. Callan R. The Essenct of Neural Networks. — Pretice Hall Europe, 2001.
4. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. — М.: Наука, 1973.
5. Lincoln B., Rantzer A. Relaxing Dynamic Programming // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2006. — **51**, No. 8.

# ЗМІСТ

Balyas L. V. <i>Exponential sums with the binomial in the exponent over the ring of Gaussian integers</i> .....	11
Breide V. E. <i>Generalised Landau problem</i> .....	14
Desiateryk O. O. <i>Variants of a commutative band</i> .....	18
Feshchenko B. <i>Functions on 2-torus whose Kronrod — Reeb graph is a tree</i> .....	19
Kadubovs'kyi O. A., Voschana L. V. <i>Enumeration of 2-color chord diagrams of maximal genus under rotation and reflection</i> .....	20
Konovenko N., Lychagin V. <i>Möbius invariants of rational <math>\mathbb{C}P^1</math> mappings</i> .....	22
Lukashenko M. P., Artemovych O. D. <i>On rigid derivations in rings</i> .....	25
Machusky E. A. <i>Logarithmics of quantum physics</i> .....	26
Safulina E. <i>Semiparallel space-like submanifolds with maximal principal normal subspace in pseudo-Euclidean space</i> .....	30
Tran T. V. <i>Distribution of the weights of the Kloosterman code</i> .....	34
Vergunova I. M. <i>Simulation of crop production and agritechnological processes</i> .....	38
Vorobel R. <i>Tuning logarithmic type algebraic structure based on triangilar norm</i> .....	42
Vorobyov Ya. <i>The Laplace transform of the Hurwitz — Lerch zeta-function</i> .....	45
Антоневич А. Б., Леонова Е. Ю. <i>Вариационный принцип для расширенного топологического давления динамической системы</i> .....	48
Безкоровайна Л. Л., Хомич Ю. С. <i>Деформація з заданим законом змінювання елемента площі мінімальної поверхні</i> .....	52
Березовский В. Е., Микеш Й. <i>Об условиях сохранения тензора Римана относительно почти геодезических отображений пространств аффинной связности</i> .....	57
Болух В. А. <i>Про представлення деяких інтегралів за мірою Лебега — Пуассона</i> .....	59
Борисенко О. Ф., Булова А. Д., Минченко Л. И. <i>К условию <math>r</math>-регулярности в задачах оптимизации</i> .....	61
Брисіна І. В., Макарічев В. О. <i>Узагальнені Фур-функції та їх властивості</i> .....	64
Брязкало Т. А. <i>Фрактальна апроксимація сплайнами</i> .....	69
Вакарчук С. Б., Швачко А. В. <i>О неравенстве колмогоровского типа для частных производных функций двух переменных в весовом гильбертовом пространстве <math>L_{2,p}(\mathbb{R}^2)</math> и его приложении к теории аппроксимации «углом»</i> .....	74
Вдовенко Т. І. <i>Хвильові оператори сингулярного збурення рангу один несиметричним потенціалом</i> .....	76
Вовк О. В., Шинкаренко Г. А. <i>Чисельне моделювання спіральних хвиль поверхневої реакції окиснення чадного газу</i> .....	77
Войтик Т. А., Полетаев Г. С. <i>Уравнения с неизвестными треугольными матрицами, связанные с однопроекторными второго порядка</i> .....	82
Горленко С. В. <i>Про неперервність та властивість Дарбу багатозначних відображень топологічних просторів</i> .....	85

Губаль Г. М. <i>Про обмеженість комутаторів осциляційних сингулярних інтегралів</i> .....	86
Денисюк В. П., Рибачук Л. В., Бабко А. І. <i>Про деякі типи гладких базисів у підпросторах <math>C^n_{[0;1]}</math> та <math>C^\infty_{[0;1]}</math></i> .....	87
Денисюк В. П., Рибачук Л. В. <i>Про деякі класи поліноміальних базисів</i> .....	89
Дрозд В. В. <i>Одноразні наближення сумами Фур'є функцій та їх зсувів за аргументом з класів Степанця</i> .....	91
Дышлис А. А., Варех Н. В., Герасимова О. И., Цыбанёв М. В. <i>Группы симметрий подобия квазикристаллов как группы движений гиперболической плоскости</i> .....	93
Дышлис А. А., Покась С. М. <i>Применение принципа двойственности между геометриями <math>S^2</math> и <math>H^2</math> для совместного описания фуллеренов и квазикристаллов</i> .....	94
Журавльов В. М., Шевченко О. А. <i>Черетичні порядки в <math>M_n(D)</math> та умова Ятегаонкара</i> .....	97
Калайда О. Ф. <i>Про двосторонність квадратурних формул підвищеної точності</i> .....	99
Калайда О. Ф. <i>Двосторонні симетричні наближення другої похідної за допомогою двосторонніх колокант функції з простими та двократними вузлами</i> .....	100
Калайда О. Ф. <i>Двосторонні симетричні многочлени колоканти функцій з двократними вузлами</i> .....	102
Калайда О. Ф. <i>Двосторонні методи з двократними вузлами розв'язування задачі Коші для нормальних рівнянь</i> .....	104
Калайда О. Ф. <i>Двосторонні симетричні колоканти та квадратурні формули з двократними вузлами</i> .....	106
Калайда О. Ф. <i>Двосторонні алгоритми чисельного диференціювання за допомогою двосторонніх квадратурних формул</i> .....	108
Калайда О. Ф. <i>Колоканти з пропусками горизонталів інформації</i> .....	111
Калайда О. Ф. <i>Колоканти з пропусками за значеннями функції та її похідної</i> .....	113
Калайда О. Ф. <i>Побудова симетричних двосторонніх раціональних колокант з двократними вузлами</i> .....	114
Калайда О. Ф. <i>Про побудову загальних раціональних колокант</i> .....	116
Калайда О. Ф. <i>Квадратурно-матричні методи для слабо сингулярних інтегральних рівнянь Вольтерра</i> .....	117
Калайда О. Ф. <i>Загальний метод побудови квадратурних формул підвищеної точності</i> .....	119
Калашнікова Н. В. <i>Ключові задачі в алгебри та теорії чисел</i> .....	121
Кирилов С. О. <i>Остаточність оцінок щодо збіжності рядів за <math>S(P, A)</math>-системами</i> .....	126
Лещёв А. Е., Минченко Л. И. <i>Слабые необходимые условия оптимальности второго порядка</i> .....	130
Літвінцев С. М., Рибін О. І., Якубенко О. А. <i>Формування сім'ї нормальних ортогональних перетворень</i> .....	134
Маслюченко О. В., Оніпа Д. П. <i>Побудова функцій з даними граничними множинами</i> .....	137
Онай М. В., Бартков'як А. Ю. <i>Пошук мультиплікативно оберненого елемента в кільці лишків за довільним модулем методами, що ґрунтуються на модулярному піднесенні до степеня</i> .....	139
Пелешенко Б. Г. <i>Необхідні умови обмеженості операторів Кальдерона у просторах типу Лоренця</i> .....	142

Плужнікова О. О. <i>Проективні ґратки черепичних порядків</i> .....	146
Погребний В. Д. <i>Повторна зіркова збіжність</i> .....	147
Подлевський Б. М., Могитич Г. А. <i>Чисельний алгоритм знаходження ліній галузження розв'язків одного класу нелінійних інтегральних рівнянь</i> .....	149
Пономаренко А. М. <i>Про одне узагальнення функції Трикомі</i> .....	153
Приймак М. В., Дмитроца Л. П., Василенко Я. П., Олійник М. З. <i>Аналітичне задання функцій зі змінним періодом та їх змінні періоди</i> .....	156
Радова А. С. <i>Функція <math>\tau_3(\omega)</math> в арифметичній прогресії</i> .....	160
Рибак О. В. <i>Підрахунок перестановок із заданою дистанцією</i> .....	162
Савенюк Н. М. <i>Сагайдаки матриць показників</i> .....	164
Савочкіна Т. І. <i>До теорії многовидів модальних груп</i> .....	165
Самойленко Є. Є. <i>Про * -зображення сімей ортопроекторів структурованих графами-деревами</i> .....	167
Синюкова Е. Н. <i>О расширении основных геометрических объектов пространств аффинной связности, связанном с инвариантными приближениями в теории таких пространств</i> .....	169
Скасків Л. В. <i>Групи з умовою мінімальності для підгруп, які не є узагальнено нільпотентними</i> .....	171
Суділовська В. І. <i>Опис операторів C-симетрії у випадку простору <math>\mathbb{C}^2</math></i> .....	173
Супрун О. М. <i>Про підгрупи нільпотентної групи, що збігаються зі своїм замиканням</i> .....	176
Сухорольський М. А., Андрусак І. В., Коляса Л. І. <i>Базис у просторі функцій, аналітичних у смузї</i> .....	178
Сущенко В. А. <i>К проблеме введения функционально расширенного физического пространства (ФРФП)</i> .....	182
Тимофієва Н. К. <i>Арифметичні послідовності, многокутні та фігурні числа в комбінаториці</i> .....	184
Трактинська В. М., Ткаченко М. Є. <i>Критерій елемента найкращого несиметричного наближення у просторах <math>L_{p_1, \dots, p_n}</math></i> .....	189
Турбин А. Ф. <i>Дилеммы Д. Гильберта</i> .....	191
Хвощинская Л. А. <i>Представление логарифма произведения невырожденных матриц второго порядка</i> .....	192
Хоменко М. П., Виврот Т. М. <i>Структурні характеристики <math>hs</math> 0-графів</i> .....	196
Цешковський С. Й. <i>Функції Морса, індуковані функціями Морса — Ботта</i> .....	199
Чернобай О. Б. <i>Про інтегральне зображення узагальнених ядер типу Тепліца</i> .....	201
Чип М. М. <i>Розвинення узагальнених моментів у ряди класичних моментів</i> .....	204
Шоха В. П. <i>Види ортопроекторів у двовимірному просторі</i> .....	206
Шоха В. П. <i>Відносний спектр оператора в гільбертовому просторі</i> .....	208
Ярошко О. С. <i>Про один чисельний метод розв'язування деякої оберненої нелінійної задачі на власні значення</i> .....	210
Prykhodko A. O., Prykhodko O. P. <i>Thy problem of global leaning in artiffical neural networks</i> ...	213

Інститут математики НАН України  
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка  
Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова  
Національний технічний університет України «КПІ»

**ШІСТНАДЦЯТА  
МІЖНАРОДНА  
НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ  
ІМЕНІ АКАДЕМІКА  
МИХАЙЛА КРАВЧУКА**  
14–15 травня 2015 р., Київ

**МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ**  
**II**  
Алгебра. Геометрія.  
Математичний аналіз

Підписано до друку 28.04.2015.  
Формат 60x84/16. Папір офсетний.  
Ум. друк. арк. 13.5

Зам. № . Наклад 100 примірників.  
Видавництво ТОВ «Спринт-Сервіс»  
Свідоцтво: Серія ДК № 4365 від 17.07.2012  
м. Київ-70, вул. Почайнинська, 28-б