

Інститут математики НАН України
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова
Національний технічний університет України «КПІ»

ШІСТНАДЦЯТА
МІЖНАРОДНА
НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ
ІМЕНІ АКАДЕМІКА
МИХАЙЛА КРАВЧУКА

14–15 травня 2015 р., Київ

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ
III

**Теорія ймовірностей та математична статистика.
Історія та методика математики**

Київ — 2015

**Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Ukraine
Taras Shevchenko National University of Kyiv
National Pedagogical Drahomanov University
National Technical University of Ukraine «KPI»**

**SIXTEENTH
INTERNATIONAL
SCIENTIFIC
MYKHAILO KRAVCHUK
CONFERENCE**

14–15 May, 2015, Kyiv

**CONFERENCE MATERIALS
III**

**Probability theory and mathematical statistics.
History and methods of teaching mathematics**

Kyiv — 2015

Институт математики НАН Украины
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка
Национальный педагогический университет им. М. Драгоманова
Национальный технический университет Украины «КПИ»

ШЕСТНАДЦАТАЯ
МЕЖДУНАРОДНАЯ
НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА
МИХАИЛА КРАВЧУКА

14–15 мая 2015 г., Киев

МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ
III

Теория вероятностей и математическая статистика.
История и методика математики

Киев — 2015

УДК 519.2(06)+37.016:51(091)(06)
ББК 22.17я43+74.262.21г.я43
Т33

Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 14–15 травня, 2015 р., Київ: Матеріали конф. Т. 3. Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики. — К.: НТУУ «КПІ», 2015. — 272 с. — Укр., англ., рос.

Sixteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, May 14–15, 2015, Kyiv: Conference materials. Vol. 3. Probability theory and mathematical statistics. History and methods of teaching mathematics.— K.: NTUU «KPI», 2015. — 272 p.

Шестнадцатая международная научная конференция им. акад. Михаила Кравчука, 14–15 мая, 2015 г., Киев: Материалы конф. Т. 3. Теория вероятностей и математическая статистика. История и методика математики. — К.: НТУУ «КПИ», 2015. — 272 с.

ISBN 978-617-7021-29-1

ISBN 978-617-7021-29-1

©Автори

©НТУУ «КПІ», 2015



Академік Всеукраїнської академії наук
Academician of All-Ukrainian Academy of Sciences
Академик Всеукраинской академии наук

Михайло Кравчук
Mychailo Kravchuk
Михаил Кравчук

1892–1942

XVI Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука

Програмний комітет

Акад. НАН України *М. Згуровський* (Україна)
Проф. *Н. Вірченко* (Україна)
(співголови)
Доц. *В. Гайдей* (Україна)
(заступник голови)
Акад. НАН України *Ю. Якименко* (Україна)
Акад. НАН України *М. Ільченко* (Україна)
Проф. *В. Ванін* (Україна)
Акад. НАН України *А. Самойленко* (Україна)
Акад. НАН України *Я. Яцків* (Україна)
Акад. НАН України *М. Перестюк* (Україна)
Проф. *М. Городній* (Україна)
Проф. *М. Працьовитий* (Україна)
Проф. *І. Парасюк* (Україна)
Чл.-кор. НАН України *М. Горбачук* (Україна)
Проф. *Р. Андрушків* (США)

Організаційний комітет

Акад. НАН України *М. Згуровський* (Україна)
Проф. *Н. Вірченко* (Україна)
(співголови)
Доц. *В. Гайдей* (Україна)
(заступник голови)
Проф. *О. Клесов* (Україна)
Проф. *С. Івасишен* (Україна)
Доц. *М. Дудкін* (Україна)
Проф. *О. Іванов* (Україна)
Доц. *І. Алексєєва* (Україна)
Доц. *О. Диховичний* (Україна)
Доц. *Н. Коновалова* (Україна)
Доц. *Г. Нефьодова* (Україна)
Доц. *Л. Федорова* (Україна)

Sixteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference

Programme Committee

Acad. NASU *M. Zgurovsky* (Ukraine)
Prof. *N. Virchenko* (Ukraine)
(Co-Chairs)
Ass. Prof. *V. Haidey* (Ukraine) (Deputy Chair)
Acad. NASU *Yu. Yakymenko* (Ukraine)
Acad. NASU *M. Ilchenko* (Ukraine)
Prof. *V. Vanin* (Ukraine)
Acad. NASU *A. Samoilenko* (Ukraine)
Acad. NASU *Ya. Yatskiv* (Ukraine)
Acad. NASU *M. Perestiuk* (Ukraine)
Prof. *M. Horodniy* (Ukraine)
Prof. *M. Pratsiovytyi* (Ukraine)
Prof. *I. Parasiuk* (Ukraine)
Corr. Member NASU *M. Horbachuk* (Ukraine)
Prof. *R. Andrushkiw* (USA)

Organizing Committee

Acad. NASU *M. Zgurovsky* (Ukraine)
Prof. *N. Virchenko* (Ukraine)
(Co-Chairs)
Ass. Prof. *V. Haidey* (Ukraine) (Deputy Chair)
Prof. *O. Klesov* (Ukraine)
Prof. *S. Ivashyshen* (Ukraine)
Ass. Prof. *M. Dudkin* (Ukraine)
Prof. *O. Ivanov* (Ukraine)
Ass. Prof. *I. Alyeksyeyeva* (Ukraine)
Ass. Prof. *O. Dykhovychnyi* (Ukraine)
Ass. Prof. *N. Konovalova* (Ukraine)
Ass. Prof. *H. Nefiodova* (Ukraine)
Ass. Prof. *L. Fedorova* (Ukraine)

XVI Международная научная конференция им. акад. Михаила Кравчука

Программный комитет

Акад. НАН Украины *М. Згуровский* (Украина)
Проф. *Н. Вирченко* (Украина)
(сопредседатели)
Доц. *В. Гайдей* (Украина)
(заместитель председателя)
Акад. НАН Украины *Ю. Якименко* (Украина)
Акад. НАН Украины *М. Ильченко* (Украина)
Проф. *В. Ванин* (Украина)
Акад. НАН Украины *А. Самойленко* (Украина)
Акад. НАН Украины *Я. Яцкив* (Украина)
Акад. НАН Украины *Н. Перестюк* (Украина)
Проф. *Н. Городний* (Украина)
Проф. *Н. Працевитый* (Украина)
Проф. *И. Парасюк* (Украина)
Чл.-кор. НАН Украины *М. Горбачук* (Украина)
Проф. *Р. Андрушків* (США)

Организационный комитет

Акад. НАН Украины *М. Згуровский* (Украина)
Проф. *Н. Вирченко* (Украина)
(сопредседатели)
Доц. *В. Гайдей* (Украина)
(заместитель председателя)
Проф. *О. Клесов* (Украина)
Проф. *С. Ивасиен* (Украина)
Доц. *Н. Дудкин* (Украина)
Проф. *А. Иванов* (Украина)
Доц. *И. Алексеева* (Украина)
Доц. *А. Дыховичный* (Украина)
Доц. *Н. Коновалова* (Украина)
Доц. *Г. Нефедова* (Украина)
Доц. *Л. Федорова* (Украина)

УКРАЇНСЬКИЙ ВЧЕНИЙ СВІТОВОЇ СЛАВИ

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942) — найвизначніший український математик ХХ сторіччя, всесвітньо відомий вчений, громадський діяч, академік Всеукраїнської академії наук.

«... Майже жодне явище у створенні математичної науки в Україні не сталося без його участі,... ані закладалися **перші** українські школи в місті і по селах, **перші** курси, **перші українські університети** (народний і державний),..., ані утворювалася математична термінологія або наукова мова... — нічого цього не робилося без **найактивнішої участі Михайла Кравчука**» (так писалося в характеристиці на нього, надісланій до Всеукраїнської академії наук 1929 р. у зв'язку з висуненням його кандидатури в дійсні члени академії).

Наукові праці М. Кравчука з різних галузей математики (вищої алгебри та математичного аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії імовірностей та математичної статистики тощо) увійшли до скарбниці **світової Науки**. За його ідеями й відкриттями виразно проступала перспектива поглибленого розвитку й використання їх.

Вже давно існують на сторінках наукових досліджень і **многочлени Кравчука**, і **моменти Кравчука**, і **формули Кравчука**, і осцилятори **Кравчука**, а завдяки пошукам І. Качановського виявилось, що М. Кравчук стояв біля витоків **винаходу першого у світі електронного комп'ютера!**

Увесь свій короткий вік М. Кравчук працював невпинно й творчо на благо **Науки**, на благо **Освіти рідного народу**.

«Моя любов — Україна і математика» — таким було його життєве кредо.

Він справжній поет формул, математика для нього — це творчість, натхнення і радість. Він педагог за покликанням. Його лекції — це і сила, й безмірна глибочинь, і краса математичної думки. На його лекції ходили як на свято.

М. Кравчук викладав математичні предмети і в Київському університеті, і у політехнічному, авіаційному, архітектурному, ветеринарно-зоотехнічному, сільськогосподарському інститутах Києва. Він відкрив талант і дав півтіку у світ відкриттів видатним конструкторам **Сергію Корольову** і **Архипу Люльці**.

Пам'ять про М. Кравчука живе у **серцях київських політехніків**, де він викладав вищу математику з 1921 р. і завідував кафедрою вищої математики (1934–1938 рр.). КПП від 1992 р. вже провів 13 Міжнародних наукових конференцій ім. акад. М. Кравчука. Видано його «Науково-популярні праці», «Вибрані математичні праці», книгу «Розвиток математичних ідей Михайла Кравчука», відкрито **пам'ятник** М. Кравчуку (2003 р.), створено фільм «Голгофа академіка Кравчука» (2004 р.), названо його ім'ям одну з київських **вулиць** (2009 р.)

Життя цього видатного вченого-математика спалахнуло як блискучий болід і після арешту й засуду в терорному 1938 році приречено було згоріти через кілька літ у суворих колимських таборах.

Ім'я М. Кравчука повернулось в український науковий пантеон і є зразком для наслідування та продовження його досліджень у працях сучасних і майбутніх науковців в **Україні й далеко поза Україною**.

OUTSTANDING UKRAINIAN MATHEMATICIAN ACADEMICIAN M. KRAVCHUK (1892–1942)

Mykhailo Kravchuk made significant contributions to numerous branches of mathematics and the development of **mathematical education**. In 1929 Kravchuk was elected a full member of All-Ukrainian Academy of Sciences.

Kravchuk was the author of more than 180 scientific works, including 10 monographs, in a number of branches of mathematics (algebra and number theory, theory of functions of real and complex variable, theory of differential and integral equations, mathematical statistics and probability theory, history of mathematics, Ukrainian mathematical terminology etc.)

Let us point some fundamental lines of his research:

- investigations in the theory of permutation matrices, quadratic and bilinear forms, theory of algebraic and transcendental equations;

- the creation and mathematical proof of the general method of moments and its application to the approximate solution of ordinary linear differential equations, integral equations, equations of mathematical physics;

- introduction and use of polynomials associated with the binomial distribution, now known in the world mathematical literature as **Kravchuk's polynomials**;

- analysis of complex questions in philosophy, the history of mathematics and techniques.

Mykhailo Kravchuk never learned about the role that his sci. works played in the inventions of the first electronic computer. American scientist **John Atanasoff** (1903–1995) took a great interest in Kravchuk's sci. works when he investigated the problem of **making electronic computer**.

His selfless efforts for the sake of the **development of science in Ukraine**, extraordinary **talent as teacher** and **reputation among students and scientific community** could not go unnoticed by authority.

In 1938 Kravchuk was arrested and accused of involvement in a host of typical counterrevolutionary activities — changes that were common in those years in USSR. In the same year he was sentenced to 20 years of confinement and 5 years of exile and transported to concentration camps in **Kolyma**. There in consequence of cold, undernourishment and illnesses he **was died in March 9, 1942**.

He was **rehabilitated** by soviet regime only in 1956. But only in 1992, almost 100 years after his birth, M. Kravchuk was readmitted to membership in **the National Academy of Sciences of Ukraine**. The same year his name was entered in the International Calendar of Scientists by UNESCO. The **First Kravchuk International Conference** was held at Kyiv Polytechnic Institute "KPI" in 1992. Since that time there were 13 such **conferences, three books** of M. Kravchuk's works were **published** in Kyiv:

"Popular scientific works" (2000).

"Selected mathematical works" (2002).

"Development of the Mathematical ideas of Mykhailo Kravchuk (Krawtchouk)".

On the 20th of May 2003 the NTUU "KPI" unveiled **a statue of M. Kravchuk**.

III

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

ON THE TWO APPROACHES TO CALCULATING THE BEST LINEAR REGRESSION

V. N. Kuzmin

NTUU «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine

In many spheres of human activity arises a necessity of calculating the best linear regression while processing of empirical data/ there are several methods for calculating the best linear regression, namely: regression of Y on X , regression of X on Y , Wald's grouping method, orthogonal regression, reduced major axis and soon.

In this short article are offered two approaches to calculate the best linear regression of the kind:

$$Y = a + bx.$$

For better explaining of practical application for suggested mathematical technique consider the following example.

Table 1. Data from [1]. $X \equiv GLAR$, $Y \equiv NIR / R$

N	X	Y		N	X	Y		N	X	Y
1	0	1,45		10	1,23	2,85		19	2,04	4,01
2	0,57	1,65		11	1,34	2,68		20	2,16	4,45
3	0,62	1,99		12	1,37	2,54		21	2,18	4,87
4	0,97	2,38		13	1,42	3,43		22	2,19	4,28
5	1,08	2,6		14	1,43	2,79		23	2,27	3,2
6	1,09	3,99		15	1,6	3,56		24	2,43	3,66
7	1,14	3		16	1,77	4,24		25	2,77	3,85
8	1,16	2,35		17	1,83	4,3		26	2,97	3,68
9	1,17	2,56		18	1,98	4,11				

It should be noted that the first approach is quite new because it is based on the new statistical method of analysis of cumulative sum (curve) for deviations in terminology of the article [2].

The first approach is based on minimization of range of the cumulative curve for deviations:

$$R \rightarrow \min$$

the second approaches is founded on the minimization of sum for absolute deviations:

$$\sum_{i=1}^n |Y_i - a - bX_i| \rightarrow \min$$

In both cases under realization of these approaches is used optimization using second order parabola.

As a result of calculating our example we are getting the result given in table 2.

Table 2. Results of lines fitted to the data in Table 1.

Method	Fitted form
Regression of Y on X	$Y = 1,645 + 1,023X$
Regression of X on Y	$X = -0,358 + 0,593Y$
Wald's method	$Y = 1,534 + 1,093X$
Reduced major axis	$Y = 1,187 + 1,314X$
Minimization of cumulative curve for residuals	Coefficient $b = 1,3597$
Minimization of sum for absolute residuals	Coefficient $b = 1,2811$

The coefficients $b_1 = 1,3597$ and $b_2 = 1,2811$ were computed by means of parabolic optimization.

Thus the offered approaches extend the possibility of calculating the best linear regressions.

References

1. Curran P. I., Hay F. M. The importance of measurement error for certain procedures in remote sensing at optical wavelengths // Photogramm. Eng. and Rem. Sens. — 1986. — **52** (2). — P. 229—241.
2. Kuzmin V. New statistical method for identification of nonlinearity of empirical data // Proceedings of the Fifth International Conference “Computer Data Analysis and Modeling” Volume 1: A-M. (June, 8—12, 1998, Minsk). — P. 159—164

THE INTERPOLATION REPRESENTATION OF SOME CLASSES OF RANDOM FIELDS

G. V. Verovkina

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ganna.verov@gmail.com

Interpolation representations of a class of random fields with rectangular grid interpolation knots are investigated.

Consider a random $\xi(\bar{t}), \bar{t} \in \mathbb{R}^2$ with $M\xi(\bar{t}) = 0$ and covariance function which the representation is

$$\xi(\bar{t}) = \int_{\Lambda^2} \prod_{i=1}^2 f_i(t_i, \lambda_i) Z(d\bar{\lambda}), \quad (1)$$

where Λ is a set of parameters, $\Lambda^2 = \Lambda \times \Lambda$. $Z(d\bar{\lambda})$ is random function on $\Lambda^2 = \Lambda \times \Lambda$ such that

$$MZ(d\bar{\lambda}) = 0, \quad MZ(A_1, A_2) \cdot \overline{Z(B_1, B_2)} = F(A_1, A_2, B_1, B_2), \quad (2)$$

$F(.,.)$ is a positive definite additive complex function on $\Lambda \times \Lambda$ such that

$$\int_{\Lambda^2 \times \Lambda^2} |F(d\bar{\lambda}, d\bar{\mu})| < +\infty. \quad (3)$$

The functions $f_i(t_i, \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots$ can be defined in the complex plane. The function $f_1(t_1, \lambda_1)$ with respect to t_1 is an entire function of exponential type with indicator $\sigma_1(\lambda_1)$ and the function $f_2(t_2, \lambda_2)$ with respect to t_2 is an entire function of exponential type with indicator $\sigma_2(\lambda_2)$ such that

$$\sup_{\lambda_i \in \Lambda} \sigma_i(\lambda_i) = \sigma_i < \infty, \quad (4)$$

$$\sup_{\lambda_i \in \Lambda} \sup_{t_i \in \mathbb{R}} |f_i(t_i, \lambda_i)| = L_{f_i} < \infty. \quad (5)$$

Properties of these random fields are investigated in the work [1].

The following theorem holds true.

Teorema. Let $\xi(\bar{t}), \bar{t} \in \mathbb{R}^2$ be a separable random field (1) that satisfies conditions (2)—(5). Then with probability 1 the following representation holds true

$$\xi(\bar{t}) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \xi_{k_1, k_2}(\bar{t}) \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}), \quad (6)$$

where $\xi_{k_1, k_2}(\bar{t}) = \xi_{k_1, k_2}(t_1, t_2)$, $\omega_{k_1, k_2}(\bar{t}) = \omega_{k_1, k_2}(t_1, t_2)$ are defined as

$$\begin{aligned}
& \xi_{k_1, k_2}(\bar{t}) = \xi_{k_1, k_2}(t_1, t_2) = \\
& = \xi\left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right) \frac{2}{3} \frac{\alpha_1}{3} \left(\frac{\alpha_1}{3} - \sqrt{3}\right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}\right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1}\right) \\
& \quad \times \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right)\right)^2\right) + \\
& \quad + \xi\left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right)\right)^2\right) - \\
& \quad - \frac{\partial \xi\left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right)}{\partial t_1} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}\right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1}\right) \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right)\right)^2\right) + \\
& \quad + \frac{\partial \xi\left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right)}{\partial t_2} \frac{2}{3} \frac{\alpha_1}{3} \left(\frac{\alpha_1}{3} - \sqrt{3}\right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}\right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1}\right) \times \\
& \quad \times \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right) \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right)\right)^2\right) + \\
& \quad + \frac{\partial \xi\left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right)}{\partial t_2} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}\right)^2 \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right) \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right)\right)^2\right) - \\
& \quad - \frac{\partial^2 \xi\left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right)}{\partial t_1 \partial t_2} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}\right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1}\right) \times \\
& \quad \times \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right) \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right)\right)^2\right) + \\
& \quad + \frac{\partial^2 \xi\left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right)}{\partial t_2^2} \frac{1}{3} \frac{\alpha_1}{3} \left(\frac{\alpha_1}{3} - \sqrt{3}\right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}\right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1}\right) \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right)^2 + \\
& \quad + \frac{\partial^2 \xi\left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right)}{\partial t_2^2} \frac{1}{2} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}\right)^2 \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}\right)^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial^3 \xi \left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right)}{\partial t_1 \partial t_2^2} \frac{1}{2} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right)^2 + \\
& + \frac{\partial^3 \xi \left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right)}{\partial t_2^3} \frac{1}{9} \frac{\alpha_1}{3} \left(\frac{\alpha_1}{3} - \sqrt{3} \right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right)^3 + \\
& + \frac{\partial^3 \xi \left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right)}{\partial t_2^3} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right)^2 \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right)^3 - \\
& - \frac{\partial^4 \xi \left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right)}{\partial t_1 \partial t_2^3} \frac{1}{6} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right) +, (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}) = \omega_{k_1, k_2}(t_1, t_2) = \\
& = \frac{\sin^2 \frac{\alpha_1}{3} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right) \sin \frac{\alpha_1}{3} \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1} \right) \left(\sin \frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right) \right)^4}{\left(\frac{\alpha_1}{2} \right)^3 \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right)^2 \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1} \right) \left(\frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right) \right)} \quad (8)
\end{aligned}$$

In formulas (7) and (8) interpolation knots form a rectangular grid on the plane

$$\left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right), \left(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right), k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \quad , \quad (9)$$

for any real α_1, α_2 such that $\alpha_1 > \sigma_1, \alpha_2 > \sigma_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

References

1. Yadrenko M. I. Analytic random fields // Bulletin of Kyiv University. Mathematics and Mechanics. — 1969. — Vol. 1. — P. 56—60.

PERIODOGRAM ESTIMATIONS OF SCALE PARAMETER AND AMPLITUDE OF THE ALMOST PERIODIC SIGNAL

B. M. Zhurakovskiy

*National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine
zhurak@gmail.com*

Suppose the random process

$$X(t) = A_0 \varphi(\omega_0 t) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, T],$$

is observed, where $\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}^1$, and $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k > 0$, with $k > 0$, $a_{-k} = \overline{a_k}$, $\lambda_{-k} = -\lambda_k$, $|\lambda_l - \lambda_k| \geq \Delta > 0$ for $l \neq k$ with some fixed $\Delta > 0$, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k| < \infty$.

Assume also that $A_0 > 0$, $\omega_0 \in (\underline{\omega}, \overline{\omega})$, $0 < \underline{\omega} < \overline{\omega} < \infty$, and there exists $i_0 > 0$ such that $|a_{i_0}| > |a_i|$, $i \neq \pm i_0$. $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}^1$, is a local functional of a Gaussian stationary process ξ , that is $\varepsilon(t) = G(\xi(t)), G(x), x \in \mathbb{R}^1$, is a Borel function such that $E\varepsilon(0) = 0$, $E\varepsilon^2(0) < \infty$. The random process $\xi(t), t \in \mathbb{R}^1$, is a measurable stationary Gaussian process $E\xi(0) = 0$ with covariance function

$$B(t) = E[\xi(0)\xi(t)] = \sum_{j=0}^k D_j B_{\alpha_j, \psi_j}(t), \quad t \in \mathbb{R}^1, \geq 0,$$

$$\sum_{j=0}^k D_j = 1, \quad D_j \geq 0, \quad j = \overline{0, k},$$

where

$$B_{\alpha_j, \psi_j}(t) = \frac{\cos(\psi_j t)}{(1 + t^2)^{\alpha_j/2}}, \quad 0 \leq \psi_0 < \psi_1 < \dots < \psi_\kappa, \quad \alpha_j > 0, \quad j = \overline{0, \kappa}.$$

The periodogram estimator of the frequency ω_0 is said to be any random variable $\omega_T \in [\lambda_{i_0} \underline{\omega}, \lambda_{i_0} \overline{\omega}]$ such that

$$Q_T(\omega_T) = \max_{\omega \in [\lambda_{i_0} \underline{\omega}, \lambda_{i_0} \overline{\omega}]} Q_T(\varphi).$$

We define the periodogram estimator of an amplitude A_0 as

$$A_T = \frac{1}{2 |a_{i_0}|} Q_T^{1/2}(\omega_T). \text{ Under some additional conditions on } G \text{ it is proved that the}$$

vector

$$\left(T^{1/2}(A_T - A_0), T^{3/2}(\omega_T - \lambda_{i_0} \omega_0) \right)'$$

is asymptotically as $T \rightarrow \infty$ normal with zero mean and covariance matrix

$$2\pi |a_{i_0}|^{-2} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{C_j^2(G)}{j!} f^{*j}(\lambda_{i_0} \omega_0) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 6A_0^{-2} \end{pmatrix},$$

where $f^{*j}(\lambda)$ is the j -th convolution of the spectral density $f(\lambda)$ of the random process ξ , m is Hermite rank of G and

$$C_k(G) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) H_k(x) \varphi(x) dx, \quad k \geq 0, \quad \varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2},$$

where $H_k(x)$ are Hermite polynomials. This statement generalizes the result of the paper [1].

References

1. Knopov P. S. Estimation of the unknown parameters of an almost periodic function in the presence of random noise // Cybernetics. — 1984. — 6. — P. 83—87.

К ВОПРОСУ О НЕСМЕЩЕННОСТИ ОЦЕНКИ ПРИ ФУНКЦИИ ПОТЕРИ, РАВНОЙ КВАДРАТУ ОШИБКИ

Т. В. Авдеева, Л. М. Ильичева

НТУУ «Киевский политехнический институт»,

Академия водного транспорта, Киев, Украина

avdeeva_t1@rambler.ru, m_ilicheva@ukr.net

В [1, с. 20] указано, что целью статистической теории является отыскание решающей функции δ , которая минимизирует функцию риска:

$$R(\theta, \delta) = E_{\theta}[L(\theta, \delta(X))].$$

Решающая функция δ каждому возможному значению x случайной величины X ставит в соответствие одно из возможных решений d . Принятие решения d при условии, что распределение случайной величины X равно P_{θ} , приводит к потере, которая может выражаться числом $L(\theta, d)$. Исходя из этих предположений, функцию риска, представляющую математическое ожидание (вычисленное в предположении, что распределение случайной величины X равно P_{θ}), можно трактовать как средний убыток, возникающий при применении δ .

Предположим, что между функциями потерь и значениями θ можно установить взаимно однозначное соответствие (для любого θ существует единственное правильное решение, причем каждое решение правильно при некотором θ ; для любого d выполняется равенство $L(\theta_1, d) = L(\theta_2, d)$, если правильные решения совпадают). Тогда функция потерь $L(\theta, d')$ зависит только от принятого решения d' и правильного решения d . В этих предположениях и вводится понятие несмещенности для решающей функции δ .

Решающая функция δ называется несмещенной, если

$$E_{\theta}L(d', \delta(X)) \geq E_{\theta}L(d, \delta(X)),$$

где θ — распределение по отношению к которому рассматриваются математические ожидания; d — решение, правильное для θ .

Вообще, при указанных выше предположениях δ называется несмещенным правилом, если для всех θ, θ' :

$$E_{\theta}L(\theta', \delta(X)) \geq E_{\theta}L(\theta, \delta(X)) \quad (1)$$

Согласно примеру 12 [1, с. 26], при оценке действительной функции $\gamma = \gamma(\theta)$ и представления функции потери в виде квадрата ошибки, условие несмещенности примет вид: $E_{\theta}\delta(X) = \gamma(\theta)$, что и принимается в качестве определения несмещенности в теории точечных оценок.

Предположим, что множество параметров Ω связно, γ — непрерывная действительная функция на Ω , не обращающаяся в константу ни на каком

открытом подмножестве Ω ; математическое ожидание $h(\theta) = E_{\theta}\delta(X)$ непрерывно как функция от θ при любой оценке $\delta(X)$ величины $\gamma(\theta)$. Тогда условие (1) является необходимым и достаточным для того, чтобы оценка $\delta(X)$ была несмещенной при функции потерь, равной квадрату ошибки.

Докажем это утверждение. Запишем условие несмещенности (1) при указанных предположениях:

$$E_{\theta}[\delta(X) - \gamma(\theta')]^2 \geq E_{\theta}[\delta(X) - \gamma(\theta)]^2$$

Раскроем скобки и обозначив

$$h(\theta) = E_{\theta}[\delta(X)],$$

получим:

$$\gamma^2(\theta') - \gamma^2(\theta) \geq 2h(\theta)[\gamma(\theta') - \gamma(\theta)].$$

Если θ не является ни относительным минимумом, ни относительным максимумом функции γ , то существуют точки, сколь угодно близкие к θ , для которых может выполняться неравенство

$$\gamma(\theta) + \gamma(\theta') \geq 2h(\theta),$$

для других подобных точек — выполняется неравенство

$$\gamma(\theta) + \gamma(\theta') \leq 2h(\theta).$$

Поэтому, получим $\gamma(\theta) = h(\theta)$. Поскольку математическое ожидание $h(\theta) = E_{\theta}\delta(X)$ непрерывно как функция от θ при любой оценке $\delta(X)$ величины $\gamma(\theta)$, то равенство выполняется и для точек экстремума функции γ .

Привычное условие несмещенности подробно и с примерами рассматривается в [2, разд. 1].

Список литературы

1. Леман Э. Проверка статистических гипотез. — М., 1964 — 500 с.
2. Турчин В. М. Математическая статистика: Навч. посіб. — К.: Видавн. центр «Академія», 1999. — 240 с.

КОНЗИСТЕНТНІСТЬ КОРЕЛОГРАМНОЇ ОЦІНКИ ПЕРЕХІДНОЇ ФУНКЦІЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ З ВНУТРІШНІМ ШУМОМ

І. П. Блажівська

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
packsenarrior@rambler.ru

Нехай $H = (H(t), t \in \mathbb{R})$ — перехідна функція однорідної лінійної системи з внутрішнім шумом. Припустимо, що на вхід подається сім'я $X_\Delta = (X_\Delta(t), t \in \mathbb{R})$, $\Delta \in (0, \infty)$, — дійснозначних стаціонарних центрованих гауссівських процесів, які, в деякому сенсі, збігаються при $\Delta \rightarrow \infty$ до білого шуму. Реакція системи на X_Δ містить внутрішній шум системи та має вид

$$U_\Delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(s)X_\Delta(t-s)ds + Z(t), t \in \mathbb{R},$$

де $Z = (Z(t), t \in \mathbb{R})$ — стаціонарний центрований гауссівський процес, ортогональний до X_Δ .

В якості оцінки для невідомої дійснозначної функції H розглядається сумісна інтегральна корелограма

$$\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau) = \frac{1}{cT} \int_0^T X_\Delta(t)U_\Delta(t+\tau)dt, \tau \in \mathbb{R},$$

де c — деяка додатна стала й T — довжина інтервалу усереднення $[0, T]$.

За припущень інтегрованості у квадраті та локальної ліпшицевості з показником $\alpha \in (0, 1]$ на функцію H , загальних обмежень на характеристики Z , а також умов балансу між параметрами $\Delta = \Delta(n)$, $T = T(n)$, $n \in \mathbb{N}$, у доповіді встановлюються наступні результати: асимптотична незсуненість, конзистентність у середньому квадратичному і кубічному, сильна конзистентність оцінки $\widehat{H}_{T(n),\Delta(n)}$ в точці $\tau \in \mathbb{R}$ (при $T(n), \Delta(n) \rightarrow \infty$ для $n \rightarrow \infty$). Доведення спирається на властивості інтегралів з циклічним добутком ядер [1], деякі результати роботи [2] та класичні теореми про збіжність випадкових величин майже напевно. Зокрема, всі результати ілюструються прикладами.

Список літератури

1. Buldygin V., Utzet F. and Zaiats V. Asymptotic normality of cross-correlogram estimates of the response function // Statistical Inference for Stochastic Processes. — 2004. — Vol. 7. — P. 1—34.
2. Buldygin V. and Blazhievskaya I. On asymptotic behavior of cross-correlogram estimators of response functions in linear Volterra systems // Theory of Stochastic Processes. — 2009. — Vol. 15 (31), No. 2. — P. 84—98.

ПРО ВАРІАЦІЇ ВНУТРІ ОБЛАСТІ В АБСТРАКТНОМУ ВІНЕРІВСЬКОМУ ПРОСТОРІ

О. С. Гаврилів

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна

bo_Lu@ukr.net

Багатовимірні варіації детально розглянуто в [1].

Абстрактний вінерівський простір побудовано Гроссом [2].

В роботі, на базі варіації в багатовимірних просторах, будуються елементи теорії варіацій в абстрактному вінерівському просторі [3].

Нехай (i, H, B) — абстрактний вінерівський простір з вінерівською мірою p_t , де H — дійсний сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком

$$\langle x, y \rangle \quad \forall x \in H, \quad \forall y \in H.$$

Нехай $\{e_n\}$ — ортонормальний базис в H , і P_n — ортопроектор в H ,

$n < \dim H$, $P_n x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$. Основним вважаємо розуміння простору H нескінченновимірним аналогічно [3].

Природно, $P_n H$ є ізоморфним $\mathbb{R}^n$.

Нехай I_n — n -вимірний замкнутий куб із $P_n H$, $|x_k| \leq \rho > 0$; τ_k^l — k -вимірна гіперплощина в $P_n H$, натягнута на якісь k із ортів $\{e_s\}$, $s = \overline{1, n}$; $l = 1, 2, \dots, c_n^k$.

Нехай, $\beta_{n-k}^l(q)$ — $(n-k)$ -вимірна гіперплощина із $P_n H$, що містить точку $q \in \tau_k^l$, гіперплощина $\beta_{n-k}^l(q)$ — ортогональна до τ_k^l в розумінні ортогональності в проекції $P_n H$.

Розглянемо E — довільну замкнуту підмножину $P_n H$, $E \subset P_n H$, причому $v_0^{I_n}(E \cap \beta_{n-k}^l(q))$ — число компонент множини $E \cap \beta_{n-k}^l(q)$, що лежать всередині куба I_n і не мають спільних точок з границею куба I_n .

Теорема 1. Для кожної замкнутої множини $E \subset B$ величина $v_0^{I_\infty}(E \cap \beta_{\infty-k}^l(q))$ як функція точки $q \in \tau_k^\infty$ є вимірною (p_t^k) [8] по Лебегу, де абстрактний вінерівський інтеграл розуміємо як інтеграл від функціонала при I_∞ — нескінченно вимірний куб в H [5, 6], $\beta_{\infty-k}^l(q)$ — гіперплощина в H , не натягнута на ті k ортів e_s , $s = \overline{1, k}$ — на які натягнуто гіперплощину τ_k^∞ .

Доведення. Інтеграл від функціонала надає можливість самого себе розуміти як неявно заданий функціонал, тобто здійснювати і кратне інтегрування.

Вінерівські інтеграли запроваджено в схему розглядання вимірності по Лебегу в [4], що зводить доведення теореми до технічних аспектів.

Виходимо з обмеженості і неперервності $v_0^{I_\infty}(E \cap \beta_{\infty-k}^l(q))$, і нехай $g(v_0^{I_\infty}(E \cap \beta_{\infty-k}^l(q)))_H$ — є звуженням $v_0^{I_\infty}(E \cap \beta_{\infty-k}^l(q))$ на гільбертів простір H . Із [3, ст.81] випливає, що випадкова величина $\tilde{g}$ має зміст, і $\tilde{g} = v_0^{I_\infty}(E \cap \beta_{\infty-k}^l(q))$ майже скрізь відносно міри p_t .

Звідси ми можемо вибрати таку послідовність проекторів $\{P_n\}$ із частково впорядкованої множини Φ всіх проекторів на H , сильно збіжну до тотожного відображення, що $\tilde{g}(P_n \cdot)$ збігається до $v_0^{I_\infty}(E \cap \beta_{\infty-k}^l(q))$ майже скрізь відносно p_t . Цим маємо

$$\begin{aligned} v_0^{I_\infty}(E \cap \beta_{\infty-k}^l(q)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}(P_n x)(q) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} v_0^{I_n}(E \cap \beta_{n-k}^l(q))|_{P_n H} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} v_0^{I_n}(E \cap \beta_{n-k}^l(q)). \end{aligned}$$

Останній підграничний вираз є апробованим в [1].

Маємо збіжність виразів функцій по ймовірності. За необхідності переходимо до такої підпослідовності P_n , що попередня збіжність буде збіжністю майже скрізь щодо p_t . Теорему доведено.

Список літератури

1. Витушкин А. Г. О многомерных вариациях. — М.: ГИТТЛ, 1955. — 228 с.
2. Gross L. Abstract Wiener spaces // Proc. 5th. Berkeley Sym. Math. Stat. Prob. — 1965. — v. 2. — P. 31—42.
3. Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. — М.: Мир, 1979. — 176 с.
4. Фомин С. В. О включении интеграла по мере Винера в общую теорию интеграла Лебега // Науч. докл. высш. школы физ.-мат.наук. — 1958. — № 2. — С. 83—85.
5. Козак П. П., Чабанюк Я. М. Інтеграл по вінерівській мірі в нескінченному добутку просторів неперервних функцій багатьох змінних // Доп. АН УРСР. Сер.А. — 1981. — № 9. — С. 67—70.
6. Гаврылив О. С. К вычислению кратных винеровских интегралов // Киев, 1984. — 7 с. — Деп. В УкрНИИТИ 6.5.84, № 2201Ук-84.
7. Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе. — К.: Наукова думка, 1988. — 679 с.
8. Гаврилів О. С., Козак П. П. Кратний абстрактний вінерівський інтеграл і його властивості // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1985. — № 2. — С. 3—6.

**ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ
ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ СИНГУЛЯРНИХ РОЗПОДІЛІВ
САЛЕМІВСЬКОГО ТИПУ**

Я. В. Гончаренко, Н. В. Дивляш

*Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
goncharenko.ya.v@ukr.net*

У сучасній теорії ймовірностей сингулярні розподіли до недавнього часу були однією з маловивчених областей, не зважаючи на їх «рівноправність» з абсолютно неперервними та дискретними з точки зору застосування фундаментальної теореми Лебега про розклад функції обмеженої варіації до функцій розподілу. В величезній кількості монографій, навчальних та довідкових видань з теорії ймовірностей сингулярним функціям розподілу (якщо вони взагалі згадуються) приділяється буквально кілька рядків. В математичній же статистиці, що розв'язує, зокрема, задачі ідентифікації функцій розподілу за результатами спостережень, сингулярні розподіли, як правило, взагалі не зустрічаються. Причина цього відома — відсутність ефективних методів задання та дослідження.

«Прорив» в дослідженнях сингулярних розподілів в Україні та світі відбувся завдяки роботам М. В. Працьовитого та його послідовників. На сьогодні побудовано та досліджено цілі класи сингулярних розподілів, отримано загальні результати щодо їх класифікації, умови належності до кожного з класів сингулярних розподілів. Дослідження в цій галузі інтенсивно продовжуються. Можна констатувати, що ймовірнісна складова теорії сингулярних розподілів вже збагатилась рядом фундаментальних результатів, в той же час не було жодної спроби дослідження сингулярних розподілів засобами математичної статистики.

В доповіді представляються результати розв'язання задачі оцінювання параметрів розподілу та побудови оптимального критерію типу Неймана — Пірсона для перевірки простої гіпотези щодо параметра розподілу в класі найпростіших сингулярних розподілів салеми́вського типу.

Нехай задана випадкова величина виду $\eta = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k} \eta_k$ з незалежними однаково розподіленими двійковими цифрами η_k , які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями p_0 і p_1 ($0 < p_0 \neq p_1 < 1$, $p_0 + p_1 = 1$) відповідно. Приймаючи в якості параметра $\rho = p_1$, $\rho \in (0;1)$, функцію розподілу випадкової величини η можна записати у вигляді:

$$F_{\eta}(x) = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{\alpha_{k+1}} \rho^{\sum_{j=1}^k \alpha_j} (1-\rho)^{k - \sum_{j=1}^k \alpha_j}, \quad (1)$$

де α_k — k -та двійкова цифра x ; $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1 - \rho$.

Для реалізації $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вибірок з даного класу розподілів, розв'язано задачу оцінки параметра розподілу ρ різними методами.

В доповіді розглядаються наступні методи статистичних оцінок: метод моментів, а також модифікації методів мінімальної відстані та максимальної правдоподібності для сингулярних розподілів. При цьому отримані такі результати.

Теорема 1.1 *Незміщеною і спроможною оцінкою $\hat{\rho}$ параметра ρ є вибірковий момент першого порядку (вбіркове середнє значення): $\hat{\rho} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.*

Метод мінімальної відстані в нашому випадку реалізується наступним способом. Відрізок $[0;1]$ розбивається на 2^m двійкових відрізків рангу m , для кожного з яких визначається відносна частота $\nu(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m})$ попадання вибіркових значень x_i , $i = \overline{1, n}$, в двійковий відрізок $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}$ та відповідні значення ймовірностей

$$P\{x \in \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}\} = \rho^{\sum_{j=1}^m \alpha_j} (1 - \rho)^{m - \sum_{j=1}^m \alpha_j}.$$

Для всіх $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}$ обчислюються найбільші значення функцій

$$|\varphi_{\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}}(\rho)| = \left| P\{x \in \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}\} - \nu(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}) \right|, \quad \rho \in [0;1].$$

Значення $\hat{\rho} = \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j}{m}$, при якому $\max_{\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}} |\varphi_{\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}}(\rho)|$ набуває

найменшого значення, приймається в якості оцінки параметра ρ за методом мінімальної відстані.

Теорема 2.2 *Оцінка $\hat{\rho} = \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j}{m}$, отримана методом мінімальної відстані, є незміщеною.*

Теорема 3.3 *Оцінка максимальної правдоподібності $\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}}{mn}$, де α_{ij}*

— j -та цифра x_i , $i = \overline{1, n}$ $j = \overline{1, m}$, є незміщеною та сильно спроможною

оцінкою параметра ρ .

Для доведення ефективності отриманої оцінки, розглядається статистика

(функція вибірки) виду $T(X_n) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}}{mn}$ та доводиться її достатність і повнота.

Теорема 4.4 Оцінка $\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}}{mn}$ є ефективною.

Крім точкових оцінок, запропоновано також побудову інтервальної оцінки значення параметру для однопараметричного розподілу досліджуваного класу.

Теорема 5.5 Довірчий інтервал для невідомого параметра ρ розподілу виду (1) з ймовірністю γ визначається з рівності

$$P \left\{ \rho \in \left(\hat{\rho} - u_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\rho}(1-\hat{\rho})}{nm}}; \hat{\rho} + u_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\rho}(1-\hat{\rho})}{nm}} \right) \right\} = \gamma,$$

де $\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}}{mn}$ — незміщена оцінка параметра ρ , $u_{\frac{\gamma}{2}}$ — квантиль

нормального розподілу, що визначається з рівності $\Phi \left(u_{\frac{\gamma}{2}} \right) = \frac{\gamma}{2}$.

Доведено аналог теореми Неймана — Пірсона про існування оптимального критерія для перевірки простої гіпотези щодо значення параметра сингулярного розподілу, встановлено його явний вигляд, що представлено в наступній теоремі.

Теорема 6.6 Оптимальний критерій Неймана — Пірсона для перевірки простих гіпотез $H_0 : \rho = \rho_0$, $H_1 : \rho = \rho_1 \neq \rho_0$ про параметр ρ розподілу виду (1) має вид:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } p^{\rho_1}(x, m) \geq c_{\alpha, m} p^{\rho_0}(x, m); \\ 0, & \text{якщо } p^{\rho_1}(x, m) < c_{\alpha, m} p^{\rho_0}(x, m), \end{cases} \quad (2)$$

де α — рівень значущості, β — потужність критерію, $\Phi(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, $\Phi(u_{1-\beta}) = 1 - \beta$,

$$c_{\alpha, m} = e^{(u_{1-\alpha} \sqrt{nm\rho_0} + nm\rho_0) \left(\ln \frac{\rho_1(1-\rho_0)}{\rho_0(1-\rho_1)} \right) + mn \ln \frac{1-\rho_1}{1-\rho_0}}.$$

Теорема 7.7 Якщо

$$nm \geq \left(\frac{u_{1-\alpha} \sqrt{\rho_0(1-\rho_0)} + u_{1-\beta} \sqrt{\rho_1(1-\rho_1)}}{\rho_1 - \rho_0} \right)^2,$$

де $\Phi(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, $\Phi(u_{1-\beta}) = 1 - \beta$, то оптимальний критерій (2) забезпечує рівень значущості не більший за α і має потужність не меншу за β .

На основі доведених тверджень сформульовано алгоритми перевірки статистичних гіпотез щодо параметру розподілу виду (1).

Перевірка простої гіпотези H_0 для випадку простої гіпотези H_1 :

$$H_0 : \rho = \rho_0, \quad H_1 : \rho = \rho_1 > \rho_0$$

з рівнем значущості α .

1. Знайти емпіричне значення c_{emp} за формулою:

$$c_{emp} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}.$$

2. Знайти критичне значення $c_{kr}(\alpha)$ з рівності:

$$c_{kr}(\alpha) = u_{1-\alpha} \sqrt{nm\rho_0(1-\rho_0)} + nm\rho_0,$$

де $\Phi(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$.

3. Якщо $c_{emp} < c_{kr}(\alpha)$, то немає підстав відхиляти гіпотезу H_0 з рівнем значущості α .

4. Знайти критичне значення $c_{kr}(\beta)$ з рівності:

$$c_{kr}(\beta) = nm\rho_1 - u_{1-\beta} \sqrt{nm\rho_1(1-\rho_1)},$$

де $\Phi(u_{1-\beta}) = 1 - \beta$.

5. Якщо $c_{emp} > c_{kr}(\beta)$, то немає підстав відхиляти гіпотезу H_1 з надійністю β .

Також сформульовано алгоритм для перевірки гіпотези про значення параметра для випадку складної конкуруючої гіпотези.

Список літератури

1. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296.
2. Боровков А. А. Математическая статистика. — Новосибирск: Наука, 1997. — 772 с.

ПОБУДОВА МОДЕЛІ МАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ ЗА ЗАДАНОЮ ФУНКЦІЄЮ НАДІЙНОСТІ

І. О. Дьогтева

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, Вінниця, Україна
irishka_do@mail.ru

Нехай маємо функцію надійності

$$\bar{F}(t) = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3} e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3} e^{-(\lambda_1 + \lambda_3)t} \quad (1)$$

Покажемо, що існує марковський процес, для якого (1) є розподіл часу його перебування у фіксованій множині станів.

Сконструюємо такий процес. Будемо вважати, що процес може перебувати у трьох станах. У стані e_1 він перебуває час $\min(\xi_1, \xi_3)$, де ξ_1, ξ_3 незалежні показниково розподілені випадкові величини з параметрами λ_1, λ_3 , і з ймовірністю $P(\xi_1 < \xi_3)$ переходить у стан e_3 , а з ймовірністю $P(\xi_1 > \xi_3)$ переходить у стан e_2 . У стані e_2 він перебуває час ξ_2 , який має показниковий розподіл з параметром λ_2 , і з ймовірністю 1 переходить у стан e_3 . Третій стан — поглинаючий, тобто коли процес попадає у третій стан, він ніколи з нього не виходить. Таким чином, переходи із стану в стан здійснюються згідно з вкладеним ланцюгом Маркова, що задається матрицею

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3} & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

і матрицею перехідних ймовірностей $Q_{ij}(t)$ ($Q_{ij}(t)$ ймовірність того, що процес в i -у стані проведе час менший t і перейде у j -ий стан. В нашому випадку

$$Q_{12}(t) = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3} (1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_3)t}),$$

$$Q_{13}(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_3} (1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_3)t}),$$

$$Q_{23}(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t},$$

$$Q_{11}(t) = Q_{21}(t) = Q_{22}(t) = Q_{31}(t) = Q_{32}(t) = 0,$$

$$Q_{33}(t) = 1.$$

Нехай $\bar{F}_1(t)$ ймовірність того, що процес проведе на множині станів $\{e_1, e_2\}$ час більший t за умови, що у початковий момент він знаходився у першому стані, а $\bar{F}_2(t)$ — ймовірність того, що процес на цій множині проведе час більший t за умови, що у початковий момент він знаходився в другому стані. Тоді, скориставшись формулою повної ймовірності, маємо:

$$\bar{F}_1(t) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_3)t} + \int_0^t Q'_{12}(u) \bar{F}_2(t - u) du,$$

$$\bar{F}_2(t) = e^{-\lambda_2 t}.$$

Звідси

$$\begin{aligned}\bar{F}_1(t) &= e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t} + \lambda_3 \int_0^t e^{-(\lambda_1+\lambda_3)u} e^{-\lambda_2(t-u)} du = \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t} + \lambda_3 e^{-\lambda_2 t} \int_0^t e^{-(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)u} du = \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3} e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t},\end{aligned}$$

що збігається з (1).

Для

$$\bar{F}_1(t) = \frac{\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3} e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3} e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t},$$

$$\bar{F}_2(t) = e^{-\lambda_4 t},$$

$$\bar{\Phi}(t) = e^{-\lambda_5 t},$$

скориставшись формулою

$$\bar{F}(t) = \int_0^t \bar{F}_1(u) \bar{F}_2(t-u) \varphi(u) du - \bar{F}_1(t) \bar{\Phi}(t),$$

дістанемо розподіл

$$\begin{aligned}\bar{F}(t) &= \frac{\lambda_5}{\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5} + \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_3-\lambda_4+\lambda_5} \right) e^{-\lambda_4 t} + \\ &\quad + \frac{\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_3 \lambda_4}{(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5)} e^{-(\lambda_2+\lambda_5)t} + \\ &\quad + \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_3-\lambda_4)}{(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_3-\lambda_4+\lambda_5)} e^{-(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_5)t}.\end{aligned}$$

Розглянувши випадок, коли $\lambda_2 = \lambda_3$, $\lambda_4 = \lambda_5$, матимемо:

$$\begin{aligned}\bar{F}(t) &= \frac{1}{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)} (2\lambda_1\lambda_4 e^{-\lambda_4 t} + (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_4) e^{-(\lambda_2+\lambda_4)t} + \\ &\quad + (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_4) e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4)t}).\end{aligned}$$

Для цього розподілу функція інтенсивності

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= (2\lambda_1\lambda_4^2 + (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2) e^{-\lambda_2 t} + (\lambda_1-\lambda_2) \times \\ &\quad \times ((\lambda_1+\lambda_2)^2 - \lambda_4^2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}) (2\lambda_1\lambda_4 + (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_4)) e^{-\lambda_2 t} + \\ &\quad + (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_4) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t})^{-1},\end{aligned}$$

причому $\lambda(0) = \lambda_1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lambda_4$.

В даному випадку $\lambda(t)$ може бути кусково-монотонною, зокрема може мати місце так зване «корито», коли на початковому етапі функція інтенсивності спадає, а потім зростає.

Список літератури

1. Томусяк А. А., Турбин А. Ф. О моделях отказов элементов // Сб. н. т. «Аналитические методы в задачах теории вероятностей. — К.: ИМАН УССР, 1984. — С. 130—145.
2. Томусяк А. А. До питання побудови функцій надійності // Сучасні проблеми фізики та математики (Вінниця). — 2003. — Вип. 8. — С. 181—191.

ДОСЛІДЖЕННЯ НА СИЛЬНУ ЗАЛЕЖНІСТЬ ФІНАНСОВИХ РЯДІВ, ЩО ОПИСУЮТЬ ІНДЕКСИ ФОНДОВИХ РИНКІВ

Н. Г. Зражевська

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

natasha.zrazhevskaya@gmail.com

Часові ряди з сильною залежністю широко використовуються при моделюванні і прогнозуванні в фінансовій математиці, області телекомунікацій тощо. Наявність сильної залежності може бути описана за допомогою параметра Херста [1].

За останні роки розроблене фундаментальне теоретичне підґрунтя для визначення цього важливого параметру, а також запропонована та досліджена достатньо велика кількість практичних алгоритмів [2]. Більшість з них базується на оцінюванні автокореляційної функції, або спектральної щільності, або вибіркової дисперсії методами математичної статистики та застосуванням до них апарату регресійного аналізу. У той же час, при роботі з реальними даними при оцінюванні параметра Херста часто виникають певні труднощі. Це пов'язано з тим, що для дослідження сильнозалежних рядів потрібно розглядати автокореляційні функції з великим часовим лагом, що накладає суттєві обмеження на вибірки даних. Крім того, для цих рядів характерним є значні частотні коливання в околі нуля, що приводить до появи великих похибок при обчисленнях. Тому проблема оцінювання параметра Херста залишається актуальною.

У роботі розглянуто вісім стандартних методів знаходження параметра Херста [2]. Методи були апробовані на штучно змодельованих по моделі FIGARCH даних. Було підтверджено можливість їх використання для виявлення сильної залежності часових рядів із параметром Херста близьким до 0.8. Ці методи були застосовані до реальних даних індексу цін РТС («Российской торговой системы») за 2014.

Аналіз отриманих результатів виявив, що значення параметру, отримані за методами Хігучі, модифікованим методом періодограм та методом диференціювання дисперсії виявляються недостовірними для реальних даних, а, отже, не можуть бути використані при аналізі. За результатами п'яти інших методів було підтверджено, що часовий ряд даних індексу цін РТС є сильно залежним. При цьому було знайдено середнє значення параметра Херста, рівне 0.8692.

Список літератури

1. Palma W. Long-Memory Time Series: Theory and Methods. — New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. — 2007. — 304 p.
2. Taqqu M. S., Teverovsky V., Willinger W. Estimators for long-range dependence: An empirical study // Fractals. — 1995. — P. 785—798.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА М-ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ НЕЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ ІЗ СИНГУЛЯРНИМ СПЕКТРОМ

О. В. Іванов, І. В. Орловський

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

alexntuu@gmail.com, i.v.orlovsky@gmail.com

Розглянемо нелінійну модель регресії

$$X_j = g(j, \theta) + \varepsilon_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1)$$

де $g(j, \theta)$ — не випадкова послідовність, задана на множині Θ_γ , Θ_γ — відкрита множина, яка включає в себе Θ^c — замикання Θ в $\mathbb{R}^q$, $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ — відкрита, обмежена та опукла множина; ε_j , $j \in \mathbb{Z}$, випадкова послідовність, яка є локальним функціоналом від послідовності ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, причому $E\varepsilon_0 = 0$, $E\varepsilon_0^2 < \infty$; ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, є стаціонарною гауссівською послідовністю з нульовим середнім та сингулярним спектром, у тому сенсі, що її коваріаційна функція має вигляд

$$B(j) = E\xi_0\xi_j = \sum_{i=0}^r A_i \frac{\cos(\kappa_i j)}{(1 + j^2)^{\alpha_i/2}}, \quad r \geq 0,$$

де $0 \leq \kappa_0 < \kappa_1 < \dots < \kappa_r$, $0 < \alpha_i < 1$, $i = \overline{0, r}$, $\sum_{i=0}^r A_i = 1$, $A_i \geq 0$, тобто спектральна щільність послідовності ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$ має інтегровані сингулярності в точках $\pm\kappa_i$, $i = \overline{0, r}$ (детальніше, див. [1]).

Означення. М-оцінкою невідомого параметра $\theta \in \Theta$, одержаною за спостереженнями X_j , $j = \overline{1, N}$, виду (1) та неперервною функцією втрат $\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, називається будь який випадковий вектор $\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N(X_j, j = \overline{1, N}) \in \Theta^c$, для якого

$$S_N(\hat{\theta}_N) = \inf_{\tau \in \Theta^c} S_N(\tau), \quad S_N(\tau) = \sum_{j=1}^N \rho(X_j - g(j, \tau)).$$

У доповіді наведено достатні умови консистентності, асимптотичної єдиності та нормальності М-оцінок, з гладкими функціями втрат, параметрів нелінійних моделей регресії (1) із випадковим шумом, який має сингулярний спектр.

Список літератури

1. Ivanov A. V., Leonenko N. N., Ruiz-Medina M. D., Savych I. N. Limit theorems for weighted non-linear transformations of Gaussian processes with singular spectra // The Annals of Probability. — 2013. — Vol. 41, No. 2. — P. 1088—1114.

УТОЧНЕННЯ УМОВ ЗБІЖНОСТІ МАЙЖЕ НАПЕВНО РЯДІВ БАГАТОВИМІРНИХ РЕГРЕСІЙНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

М. К. Ільєнко

НТУУ «Київський політехнічний інститут»

mari-run@ukr.net

Нехай $R^d, d \geq 1$, — скінченновимірний евклідів простір зі скалярним добутком (X, Y) та нормою

$$\|X\| = \sqrt{(X, X)}, X, Y \in R^d.$$

У просторі R^d розглянемо багатовимірну регресійну послідовність випадкових векторів $(X_k) = (X_k, k \geq 1)$, тобто послідовність, яка задається рекурентними співвідношеннями першого порядку:

$$X_1 = V_1, \quad X_k = C_k X_{k-1} + V_k, \quad k \geq 2, \quad (1)$$

де (C_k) — не випадкова послідовність $d \times d$ -матриць, (V_k) — послідовність незалежних у сукупності випадкових векторів простору R^d . Для послідовності (X_k) будемо розглядати випадковий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$.

У серії робіт В. В. Булдигіна та М. К. Руновської досліджувалися необхідні і достатні умови збіжності майже напевно рядів, елементами яких є елементи одновимірних і багатовимірних регресійних послідовностей. Найбільш повно напрацювання авторів в цьому напрямку зібрано у праці [1]. Для одновимірного випадку, тобто при $d = 1$, було знайдено загальний критерій збіжності майже напевно (м. н.) рядів, складених з елементів регресійних послідовностей з довільними коефіцієнтами (C_k) . Для багатовимірного випадку, тобто при $d > 1$, аналогічний критерій вдалося встановити лише для регресійних послідовностей з не виродженими матрицями (C_k) . Насамперед це пов'язано з тим, що застосований для одновимірного випадку метод збурення нульових коефіцієнтів є надзвичайно громіздким і технічно складним для матриць. Зрозуміло, що випадок не вироджених матричних коефіцієнтів значно обмежує загальну ситуацію. Крім того, при розв'язанні деяких споріднених задач, можливість розглядати вироджені матриці (C_k) у регресійній схемі (1) є дуже важливою. Це надихнуло автора на пошук іншого шляху доведення загального результату — без використання методу збурення коефіцієнтів послідовності, як це зроблено для $d = 1$.

В цій роботі отримано загальний критерій збіжності м. н. ряду $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ для послідовності (1) з довільними матричними коефіцієнтами (C_k) . Більш

того, відшукування іншого шляху доведення достатніх умов збіжності м. н. ряду $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ призвело до уточнення основного результату. Наведемо його.

Через $\mathfrak{R}^{\infty}$ позначимо клас всіх монотонних послідовностей натуральних чисел, що прямують до нескінченності.

Теорема 1. *Випадковий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ є збіжним м. н. тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:*

1) для кожного $k \geq 1$ ряд $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\left(\prod_{j=k+l}^{k+1} C_j \right) V_k \right)$ є збіжним м. н.;

2) для всіх послідовностей (m_j) з класу $\mathfrak{R}^{\infty}$:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} Q(m_{j+1}, k) V_k \right\| = 0, \text{ м. н.},$$

де

$$Q(n, k) = I + \sum_{l=1}^{n-k} \left(\prod_{j=k+l}^{k+1} C_j \right), \quad 1 \leq k \leq n-1;$$

$$Q(n, k) = I, \quad k = n; \quad Q(n, k) = O, \quad k > n,$$

а O та I — нульова та одинична $d \times d$ -матриця відповідно.

Список літератури

1. Buldygin V. V., Runovska M. K. Sums whose terms are elements of linear random regression sequences. Lambert Academic Publishing. — 2014. — 168 p.

ПРО ЄДИНІСТЬ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З ВИПЕРЕДЖЕННЯМ

О. В. Ільченко, Т. В. Шовкопляс

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
from_Tatyana@ukr.net

Вивченню проблеми існування і єдності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь присвячено багато робіт різних науковців. Стохастичні диференціальні рівняння в частинних похідних параболічного типу з не випадковою початковою умовою розглядалися Б. Л. Розовським [3].

У розглядуваному випадку вивчається проблема єдності розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь, яка зводиться до єдності розв'язку звичайних диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Нехай $t \in [0, T]$, $T < \infty$; λ — міра Лебега на відрізку $[0, T]$; $I_{[a,b]}(\cdot)$ — індикатор відрізка; нехай $x \in \mathbb{R}^d$, $|\cdot|$ — норма вектора з $\mathbb{R}^d$. Через G будемо позначати обмежену область (відкриту зв'язну множину в $\mathbb{R}^d$) з кусково-гладкою межею [1], ∂G — межа області G , λ_d — міра Лебега на G :

$$G_T = \{(x, t) : x \in G, t \in (0, T)\}, \partial G_T = \{(x, t) : x \in \partial G, t \in [0, T]\}.$$

Надалі тут по парам однакових індексів здійснюється підсумовування в межах від 1 до d . Позначимо,

$$u_{x_i} = du/dx_i, i = 1, \dots, d, u_s = du/ds, u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_d}).$$

Усі похідні розглядаються в узагальненому сенсі [2]. Через $(\cdot, \cdot)_0$ і $(\cdot, \cdot)_{0,0}$ позначено скалярні добутки в $L^2(G)$ і в $L^2(G_T)$ відповідно:

$$\|f\|_0 = (f, f)_0^{1/2}, \|f\|_{0,0} = (f, f)_{0,0}^{1/2}.$$

$W_1^2(G)$ — простір Соболева функцій $f \in L^2(G)$, які мають похідну $f_x \in L^2(G)$;

$$(f, g)_1 = (f, g)_0 + (f_{x_k}, g_{x_k})_0,$$

$\|f\|_1 = (f, f)_1^{1/2}$ — скалярний добуток і норма елементів в $W_1^2(G)$;

$W_{1,0}^2(G_T)$ — простір Соболева функцій $f \in L^2(G_T)$ з похідними $f_x \in L^2(G_T)$ і скалярним добутком

$$(f, g)_{1,0} = (f, g)_{0,0} + (f_{x_k}, g_{x_k})_{0,0};$$

$$\overset{\circ}{W}_{1,0}^2(G_T) = W_{1,0}^2(G_T) \cap \left\{ f : f|_{\partial G_T} = 0 \right\}.$$

$\overset{\circ}{W}_{1,1}^2(G_T)$ – простір Соболева функцій $f \in L^2(G_T)$, що мають похідні $f_x \in L^2(G_T)$ та $f_s \in L^2(G_T)$, скалярний добуток у $\overset{\circ}{W}_{1,1}^2(G_T)$:

$$(f, g)_{1,1} = (f_s, g_s)_{0,0} + (f, g)_{1,0};$$

$$\overset{\circ}{W}_{1,1}^2(G_T) = W_{1,1}^2(G_T) \cap \left\{ f : f|_{\partial G_T} = 0 \right\}. \quad \text{Через } \overset{\circ}{V} \text{ будемо позначати}$$

банахів простір, який складається з таких елементів $\overset{\circ}{W}_{1,0}^2(G_T)$, що мають скінченну норму

$$\|f\|_{\overset{\circ}{V}} = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|f(\cdot, t)\|_0 + \left(\int_{G_T} |f_x(x, s)|^2 dx ds \right)^{1/2}.$$

Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ – канонічний ймовірнісний простір; $w(t), t \in [0, T]$ — вінерівський процес, заданий на ньому. Це означає, що $\Omega = C_0([0, T])$, $\mathfrak{F} = \overline{B}^P(\Omega)$, P — вінерівська міра на $\mathfrak{F}$, а $W(t, \omega) = \omega(t)$; $E\xi$ — математичне сподівання ξ по мірі P ; D_s — стохастична похідна [5];

$$\|F\|_2 = \left(E|F|^2 \right)^{1/2}.$$

Через $\overset{\circ}{SV}$ будемо позначати банахів простір, який складається з таких елементів $L^2\left([0, T] \times \Omega; \overset{\circ}{W}_1^2(G)\right)$, що мають скінченну норму:

$$\|f\|_{\overset{\circ}{SV}} = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \left(E \|f(\cdot, t, \cdot)\|_0^2 \right)^{1/2} + \left(E \int_{G_T} |f_x(x, s, \omega)|^2 dx ds \right)^{1/2}.$$

Через $\varepsilon(h)$ позначимо стохастичну експоненту:

$$\varepsilon(h) = \exp \left\{ \int_0^T h(s) dw(s) - \frac{1}{2} \|h\|_{L^2([0, T])}^2 \right\}, \quad h \in C^\infty([0, T]).$$

Під

$$\int_0^t u(s) dw(s), 0 \leq t \leq T,$$

будемо розуміти невизначений розширений стохастичний інтеграл Скорохода [4, 5]; $Dom \delta$ — область визначення інтегралу Скорохода.

Нехай $a_{ij}(x, t), b_{ij}(x, t), (x, t) \in G_T, i, j = \overline{1, d}; \phi(x, \omega), (x, \omega) \in G \times \Omega$ — задані функції. Надалі, з метою спрощення записів, аргументи функцій можуть опускатися, якщо це не призводить до неоднозначності, наприклад,

$$a_{ij} \equiv a_{ij}(x, t), b_i \equiv b_i(x, t), \phi \equiv \phi(x) \equiv \phi(x, \omega),$$

$$u \equiv u(t) \equiv u(x, t) \equiv u(x, t, \omega), u_{x_i} \equiv u_{x_i}(x, t, \omega), i, j = \overline{1, d}, \text{ і т. п.}$$

Припускається, що мають місце нижченаведені умови:

Показано, що при виконанні умов

$$A) |a_{ij}(x, t)| + |b_i(x, t)| \leq K < \infty, (x, t) \in G_T;$$

$$B) \nu |\xi|^2 \leq a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j, \xi \in R^d, \nu > 0, (x, t) \in G_T;$$

$$C) \phi \in L^2(G \times \Omega);$$

$$D) \text{ Процес } \left\{ I_{[0,t]}(s) (b_i u_{x_i}(s), \eta)_0, 0 \leq s \leq T \right\} \in Dom \delta \quad \text{для всіх}$$

о

$$\eta \in W_1^2(G) \text{ майже всіх } t \in [0, T],$$

крайова задача для рівняння

$$u(x, t) = \phi(x) + \int_0^t \left(a_{ij} u_{x_i} \right)_{x_j} ds + \int_0^t b_i u_{x_i} dw(s)$$

має лише один узагальнений розв'язок.

Список літератури

1. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.
2. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с.
3. Розовский Б. Л. Эволюционные стохастические системы. — М.: Наука, 1983. — 208 с.
4. Скороход А. В. Об одном обобщении стохастического интеграла // Теория вероятностей и применение. — 1975. — № 2, вып. 20. — С. 223—237.
5. Nualart D. The Malliavin calculus and related topics. — Springer, 1995. — 266 p.

РОЗПОДІЛ ОДНОВИМІРНОГО БЛУКАННЯ ЧАСТИНКИ В ЕРЛАНГІВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ 3-ГО ПОРЯДКУ

Т. Ю. Коломієць

Європейський університет, Житомирська філія, Житомир, Україна

tamila.kolomiets@mail.ru

Доповідь присвячена знаходженню розподілу одновимірної напівмарковської еволюції в узагальненому ерлангівському середовищі. Для цього випадку відоме диференціальне рівняння з частинними похідними гіперболічного типу для функції щільності розподілу $f(t, x)$ положення x частинки у момент часу t [1].

У [2] описано метод розв'язування однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними, що базується на дослідженні моногенних функцій на асоційованій з рівнянням комутативній алгебрі, і за допомогою цього методу в [3] знайдено розподіл одновимірної блукання частинки, для якої проміжок часу між послідовними перемикаваннями швидкості має розподіл Ерланга 2-го порядку.

У доповіді розглядається рух частинки на прямій для випадку, коли перемикаючий швидкість процес є альтернуючим напівмарковським процесом з часом перебування у станах, що має ерлангівський розподіл 3-го порядку.

Отже, відомо [1], що функція щільності розподілу $f(t, x)$ у момент часу t положення x частинки, що рухається на прямій в ерлангівському середовищі m -го порядку, задовольняє диференціальне рівняння:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} + \lambda \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} + \lambda \right)^m f(t, x) - \lambda^{2m} f(t, x) = 0, \quad (2)$$

де $v > 0$ — швидкість частинки, λ — параметр m -ерлангівського розподілу.

Розв'язуючи рівняння (1) за допомогою дослідження моногенної функції на асоційованій комутативній алгебрі, ми знайшли щільність розподілу $f(t, x)$ положення x частинки в момент часу t в ерлангівському середовищі порядку $m = 3$ [4].

Теорема. При $m = 3$, $v = 1$, $\lambda = 1$ функція щільності розподілу $f(t, x)$ для $t \geq |x|$ має вигляд:

$$f(t, x) = \frac{(t^2 + x^2)e^{-t}}{2(t^2 - x^2)} I_0(\Lambda_x) + \left(\frac{txe^{-t}}{3(t^2 - x^2)} - \frac{2(3tx^2 + t^3)e^{-t}}{3(t^2 - x^2)^2} \right) \times \\ \times \left(I_0(\Lambda_x) - \omega_3 I_0(\omega_3 \Lambda_x) + \omega_3^2 I_0(\omega_3^2 \Lambda_x) \right) - \frac{(t^2 + x^2)e^{-t}}{\sqrt{(t^2 - x^2)^3}} I_1(\Lambda_x) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{4(3tx^2 + t^3)e^{-t}}{3\sqrt{(t^2 - x^2)^5}} - \frac{2txe^{-t}}{3\sqrt{(t^2 - x^2)^3}} \right) \left(I_1(\Lambda_x) - I_1(\omega_3\Lambda_x) + I_1(\omega_3^2\Lambda_x) \right) + \\
& + \frac{(3tx^2 + t^3)e^{-t}}{6\sqrt{(t^2 - x^2)^3}} \left(I_1(\Lambda_x) - \omega_3^2 I_1(\omega_3\Lambda_x) - \omega_3 I_1(\omega_3^2\Lambda_x) \right) + \\
& + \frac{te^{-t}}{6\Lambda_x} \left(2I_1(\Lambda_x) + \omega_3^2 I_1(\omega_3\Lambda_x) + \omega_3 I_1(\omega_3^2\Lambda_x) \right) + e^{-t} \left(1 + t + \frac{t^2}{2} \right) \delta(t - x),
\end{aligned}$$

$$\text{де } \Lambda_x = \sqrt{t^2 - x^2}, \quad \omega_3 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

Список літератури

1. Pogorui A. A. One-dimensional semi-Markov evolutions with general Erlang sojourn times / A. A. Pogorui, R. M. Rodriguez-Dagnino // *Random Operators and Stochastic Equations*. — 2005. — **13** (4). — P. 399—405.
2. Pogorui A. Monogenic functions on commutative algebras / A. Pogorui // *Complex Variables and Elliptic Equations*. — 2007. — **52** (12). — P. 1155—1159.
3. Pogorui A. The distribution of random evolutions in semi-Markov media / A. Pogorui // *Theory of Stochastic Processes*. — 2011. — **17** (1). — P. 90—99.
4. Kolomiets T. The distribution of random motion with Erlang-3 sojourn times / T. Kolomiets, A. A. Pogorui, R. M. Rodriguez-Dagnino // *Random Operators and Stochastic Equations*. — 2015. — On-line version [Електронний ресурс]. Режим доступу: (<http://www.degruyter.com/view/j/rose.ahead-of-print/rose-2014-0030/>).

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ СТОЙКИ ПО УСТОЙЧИВОСТИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Э. Ф. Кривулина, Т. С. Хучраева, С. М. Шляхов

Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина,
Саратов, Россия
orifelwi@mail.ru

Рассмотрим проблему оценки надежности по устойчивости составных стержней с позиций теории стационарных случайных процессов. Пусть P — обобщенная нагрузка, T — время эксплуатации стойки, P_{kr} — критическая нагрузка.

В этом случае мерой надежности является вероятность того, что за весь срок службы стойки нагрузка P не превысит критической, т.е. надежность по устойчивости будет равна [1]

$$H = \exp \left[- \int_0^T \int_0^\infty \dot{P} f(P_{kr}, \frac{\dot{P}}{t}) d\dot{P} dt \right]. \quad (1)$$

Для нормального стационарного процесса $P(t)$ выражение (1) примет вид

$$H = \exp \left[- \frac{T \sigma_{\dot{P}}}{2 \pi \sigma_P} \exp \left[- \frac{(P_{kr} - m_P)^2}{2 \sigma_P^2} \right] \right]. \quad (2)$$

Корреляционную функцию зададим в виде

$$K_P(\tau) = \sigma_P^2 e^{-\alpha_0 |\tau|} \left(\cos \beta_0 \tau + \frac{\alpha_0}{\beta_0} \sin \beta_0 |\tau| \right). \quad (3)$$

Здесь α , β — эмпирические коэффициенты.

На основании (3) выражение (2) примет вид

$$H = \exp \left[- \frac{T \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}}{2 \pi} \exp \left[- \frac{(P_{kr} - m_P)^2}{2 \sigma_P^2} \right] \right]. \quad (4)$$

Решая задачу устойчивости и определяя критическую силу P_{kr} , на основании (4) определим искомую надежность.

Условием обеспеченности надежности на время эксплуатации T будет $H \geq H_{zad}$, где H_{zad} — нормативная надежность.

Проиллюстрируем описанную теорию практическим примером. Рассмотрим сжатую стойку в виде раскосной конструкции под действием продольной нагрузки P (рис. 1).

Составная решетчатая стойка образована из двух ветвей (поясов), соединенных между собой посредством диагоналей (раскосов). Диагональ образует с осью y угол α . Длина отдельной панели b мала по сравнению с

общей длиной стойки, т.е. $b \ll l$. Это обстоятельство позволит заменить дискретную систему на условно непрерывную и заменить суммирование интегрированием.

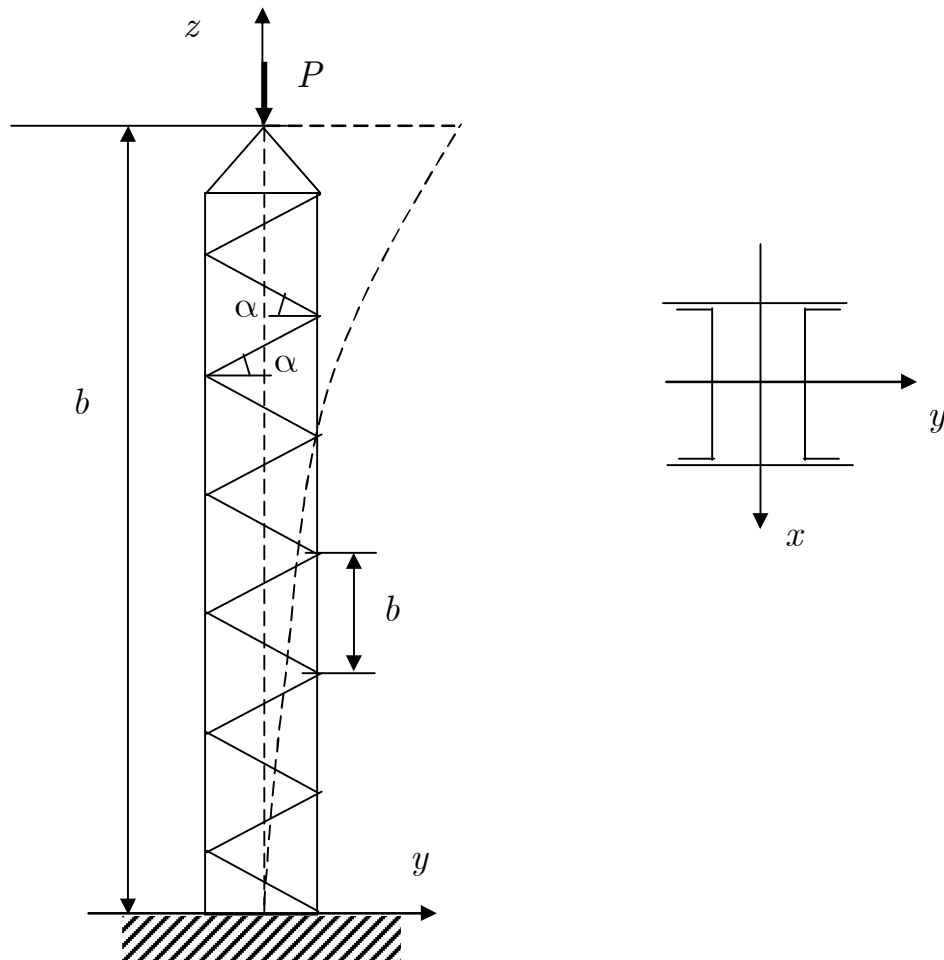


Рис. 1. Конструктивная схема стойки

Для определения критической силы используем энергетический метод [2].

Рассмотрим потерю устойчивости стойки в плоскости YOZ , полагая $I_y > I_x$. Аппроксимируем уравнение упругой линии стойки после потери устойчивости однопараметрическим выражением вида (рис. 2)

$$u = a(1 - \cos \frac{\pi z}{2l}). \quad (5)$$

Изгибающий момент в произвольном z сечении будет равен

$$M_{изг} = P(a - u) = Pa \cos \frac{\pi z}{2l}. \quad (6)$$

Поперечная сила в сечении z по абсолютной величине будет равна

$$Q = \frac{dM_{изг}}{dz} = \frac{Pa\pi}{2l} \sin \frac{\pi z}{2l}. \quad (7)$$

Примем допущение о шарнирном соединении элементов решетки (диагоналей) с поясами. Тогда приращение потенциальной энергии составного

стержня при искривлении его оси складывается из энергии изгиба поясов U_1 и растяжения диагоналей U_2 .

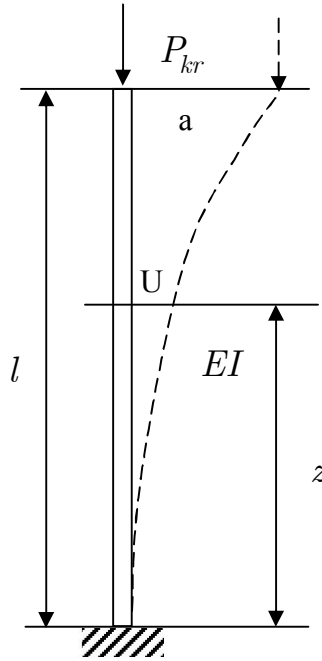


Рис. 2. Конструктивная схема стойки

Потенциальная энергия изгиба поясов представляется интегралом

$$U_1 = \frac{1}{2EI_x} \int_0^l M_{изг}^2 dz.$$

На основании (6) для U_1 получим

$$U_1 = \frac{P^2 a^2 l}{4EI_x}. \quad (8)$$

Здесь I_x — момент инерции обоих поясов относительно центральной оси X.

Потенциальная энергия растяжения диагоналей равна

$$U_2 = \sum_1^n \frac{N^2 l_1}{2EF} = \sum_1^n \frac{Q^2}{4 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{b}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{1}{2EF},$$

Заменяя суммирование интегрированием при большом n , получим

$$U_2 = \frac{\pi^2 P^2 a^2}{128 l E F \cos^2 \alpha \sin \alpha}. \quad (9)$$

Здесь F — площадь поперечного сечения двух диагоналей.

Работа внешней силы P при искривлении стойки равна

$$U_P = P \cdot \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 dz = \frac{\pi^2 P^2 a^2}{16l}. \quad (10)$$

Из равенства $U_P = U_1 + U_2$ определяем критическое значение нагрузки

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2}, \quad (11)$$

где коэффициент приведенной длины μ равен

$$\mu = \sqrt{4 + \frac{\pi^2 I_x}{8l^2} \left[\frac{1}{F \sin \alpha \cos^2 \alpha} \right]}. \quad (12)$$

Пример расчета:

сечение — два швеллера № 30,

расстояние между стенками швеллеров — 10 см,

длина поясов $l = 10$ м,

угол наклона диагоналей $\alpha = 45^\circ$,

диагонали выполнены из уголков 5х5х0,5 см.

Параметры вероятностного процесса: $\alpha_0 = 0,3 \frac{1}{c}$, $\beta_0 = 0,4 \frac{1}{c}$, $T = 10$

лет = $315 \cdot 10^6 c$, $H_{norm} = 0,99$.

Рабочая нагрузка:

математическое ожидание $m_P = 250$ кН,

среднее квадратическое отклонение $\sigma_P = 20$ кН.

Осей момент инерции двух поясов $I_x = 8786,43$ см⁴,

площадь поперечного сечения двух диагоналей $F = 9,6$ см⁴.

Расчетный коэффициент приведения длины $\mu = 2,0008$.

Критическая сила $P_{kr} = 432,8$ кН.

Детерминистический коэффициент запаса устойчивости $n_y = 1,73$.

Надежность стойки, определенная по формуле (4), равна

$$H = 1 \geq H_{zad} = 0,99,$$

значит, в течение всего срока эксплуатации стойки потеря надежности не произойдет.

Список литературы

1. Арасланов А. М. Расчет элементов конструкций заданной надежности при случайных воздействиях. — М. Машиностроение, 1987. — 128 с.
2. Пономарев С. Д. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 3. — М. Машгиз, 1959. — 1118 с.

ЗАСТОСУВАННЯ НЕПАРАМЕТРИЧНОЇ РЕГРЕСІЇ ПРИ НАВНОСТІ ВИКИДІВ

С. М. Лапач

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

lapach@ukr.net

Проблема: визначення «викидів» (експериментів, які виділяються) при відсутності повторних експериментів в регресійному аналізі.

Стан: Ми розглядаємо «викиди», які не є грубими помилками і не повинні виключатися з вибірки [1]. Як правило, вони спричинені гетероскедастичністю або відхиленням розподілу випадкової складової від нормального закону розподілу. З одного боку, вони повинні ураховуватись для визначення дисперсій відтворюваності і довірчого інтервалу для значення відгуку, а з другого боку — рівняння регресії «перетягується» до цих значень і отримана модель при прогнозуванні може давати великі помилки.

Якщо при наявності повторних дослідів проблема виявлення «викидів» відносно легко розв'язується, то при їх відсутності ситуація погіршується ще й тим, що результати експериментів є випадковими величинами (на відміну від середніх значень при повторних). Застосувати зваженого методу найменших квадратів для корекції коефіцієнтів кореляції в такій ситуації неможливо в зв'язку з неможливістю обґрунтованої оцінки дисперсій дослідів. Використання критеріїв виявлення гетероскедастичності при відсутніх повторних дослідях [2, 3] викликає певні проблеми, оскільки вони базуються на регресійних залишках. Так, критерій Бройша — Пагана — Годфрі вимагає нормального закону розподілу залишків і відсутності автокореляції дослідів; для Голдфелда — Квондта розбиття на групи неформалізоване (суб'єктивне); критерій Вайта — реагує як на гетероскедастичність, так і на помилки в специфікації.

Ситуація з відсутністю повторних дослідів звичайна в економічних дослідженнях, але досить часто зустрічається і в технічних задачах. Зокрема, прогнозування характеристик виробу на основі спостережень технічного контролю, яка часто зустрічається в авіації.

Деформованість регресійної моделі принципова в тому випадку, коли ми плануємо використовувати модель для прогнозування.

Мета: вибір методу побудови регресійної моделі при наявності викидів, які не виключаються з вибірки і відсутності повторних дослідів.

Результати досліджень.

Критичною перешкодою для використання регресійних залишків для розв'язання поставленої проблеми є використання передумови про те, що структура рівняння регресії (конкретна специфікація) відома до її побудови. Але ця перешкода знімається завдяки тому, що проблема визначення структури рівняння регресії була задовільно розв'язана в [4, 5], що дає змогу обґрунтовано використовувати методи, розраховані на відому специфікацію рівняння регресії.

При відомій структурі (визначеній за алгоритмами, запропонованими в [4, 5]), оцінку коефіцієнтів регресії можна виконати методами непараметричної регресії [6—8].

Виконується вона наступним чином.

Для всіх факторів:

1. Впорядкувати x_i за збільшенням з відповідним впорядкуванням відповідного y_i .

2. Знайти масив значень оцінок кутів нахилу

$$B = \left\{ \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}, 1 \leq i < j \leq n, x_i \neq x_j \right\},$$

тут n — кількість експериментів.

3. Визначити b_0 .

Стійкість до викидів забезпечується стійкістю до викидів як властивістю медіани. Використання цієї властивості уможлиблюється фактичним розрахунком відповідного коефіцієнту моделі за кожним експериментом окремо.

Слід зауважити, що при розрахуванні коефіцієнтів за вказаним алгоритмом неможливо обчислити суму квадратів, обумовлену моделлю, за традиційною формулою. Це викликано тією обставиною, що вона може бути більшою, ніж загальна сума квадратів. Тому її обчислюють як різницю між загальною і залишковою сумами квадратів.

Продемонструємо результати на спеціальному тестовому прикладі. В ньому половина точок — навчальна вибірка, половина — контрольна, за якою виконується прогноз. У навчальній вибірці два викиди (8% точок), які відрізняються від «звичайного значення» в кілька разів. Така ситуація досить часто зустрічається при випробуваннях на міцність.

На рис. 1 представлено експериментальні дані («експеримент»), а також результати, розраховані за моделями. При цьому половина точок, починаючи з 25-ої — це прогноз за відповідною моделлю. На рис. «Класична» — модель, отримана методом найменших квадратів з включенням «викидів»; «Непараметрична» — модель з коефіцієнтами, розрахованими за описаним вище алгоритмом; «Теоретична» — лінія регресії, побудована з виключенням спостережень, які виділяються.

Як видно, непараметрична регресія при наявності «викидів» практично співпадає з такою, яка побудована за даними без «викидів», як на даних навчальної, так і контрольної вибірки. Рівняння регресії, отримане методом найменших квадратів за вибіркою з «викидами» використовувати для прогнозування не варто.

Побудова регресійної моделі в такому разі виконується наступним чином:

1. визначення структури рівняння регресії за алгоритмом, запропонованим в [4, 5];

2. обчислення коефіцієнтів регресії для заданої структури за [6 —8].
3. визначення викидів і робота з ними (тепер може бути використано і критерій Вайта).

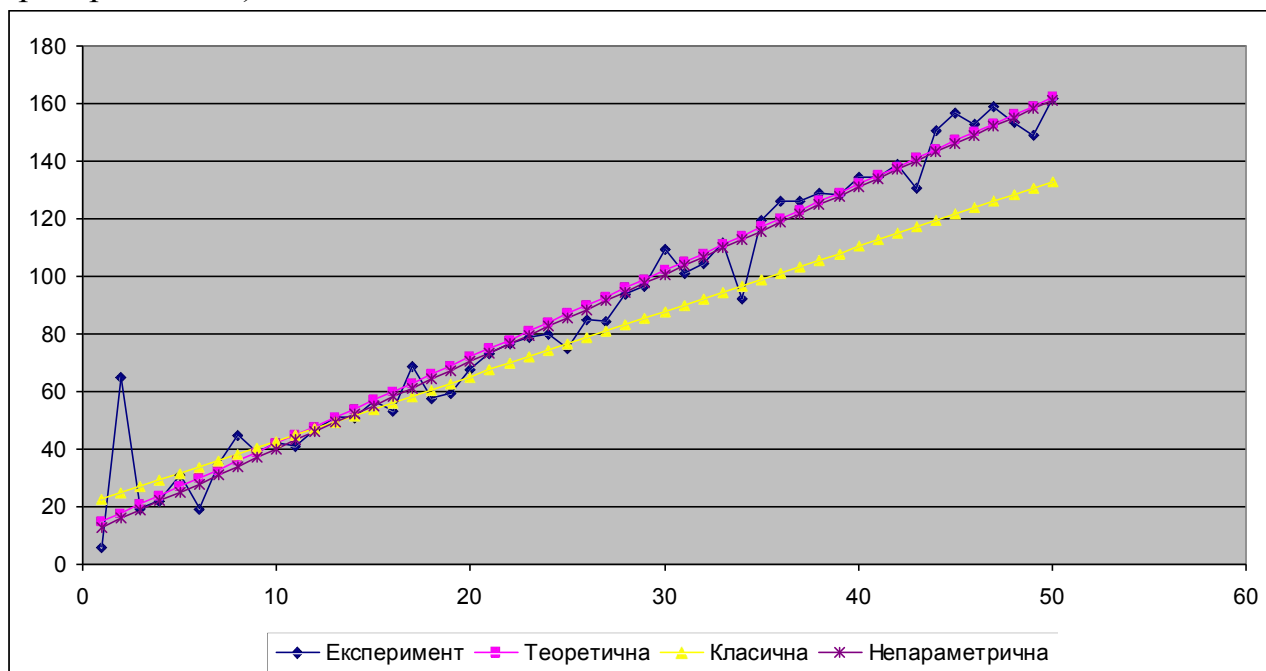


Рис. 1

Висновки. Запропонований підхід дозволяє будувати регресійні моделі, за якими можливе прогнозування, нечутливі до великих «викидів» в навчальній вибірці. Побічним результатом є можливість обґрунтованого визначення «викидів».

Підхід базується на двох алгоритмах: визначення часткової структури рівняння регресії і непараметричної регресії.

Недоліком підходу є відносно великий обсяг обчислень за рахунок того, що спочатку визначається часткова структура рівняння регресії, а потім обчислюються оцінки коефіцієнтів регресії методами непараметричної регресії.

Список літератури

1. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. — 3-е изд. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. — 912 с.
2. Грін В. Г. Економетричний аналіз. — К.: Основи, 2005. — 1197 с.
3. Доугерти К. Введение в эконометрику. — М.: ИНФРА-М, 2001. — 402 с.
4. Лапач С. Н., Пасечник М. Ф., Чубенко А. В. Статистические методы в фармакологии и маркетинге фармацевтического рынка. — К.: 1999. — 312 с.
5. Лапач С. Н., Радченко С. Г. Основные проблемы построения регрессионных моделей // Математичні машини і системи. — 2012. — № 4. — С. 125—133.
6. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. — М.: Физматлит, 2006. — 816 с.
7. Хардле В. Прикладная непараметрическая регрессия. — М.: Мир, 1993. — 349 с.
8. Хеттманспергер Т. Статистические выводы, основанные на рангах. — М.: Финансы и статистика, 1987. — 334 с.

МІНІМАКСНА ФІЛЬТРАЦІЯ ПРОЦЕСІВ ЗІ СТАЦІОНАРНИМИ ПРИРОСТАМИ У ВИПАДКУ СТАЦІОНАРНОГО ШУМУ

М. М. Луз, М. П. Моклячук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

maksim_luz@ukr.net, mmp@univ.kiev.ua

Задача фільтрації. Означення 1. Для заданого випадкового процесу $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ процес $\xi^{(n)}(t, \tau) = (1 - B_\tau)^n \xi(t) = \sum_{l=0}^n (-1)^l C_n^l \xi(t - l\tau)$, де $B_\tau \xi(t) = \xi(t - \tau)$, називають випадковим приростом n -го порядку з кроком $\tau \in \mathbb{R}$, породженим процесом $\xi(t)$.

Означення 2. Випадковий n -й приріст $\xi^{(n)}(t, \tau)$ називають стаціонарним, якщо математичні сподівання $E\xi^{(n)}(t_0 + t, \tau_1)\xi^{(n)}(t_0, \tau_2) = D^{(n)}(t, \tau_1, \tau_2)$ та $E\xi^{(n)}(t_0, \tau) = c^{(n)}(\tau)$ існують для всіх $t_0, \tau, t, \tau_1, \tau_2$ і не залежать від t_0 .

Теорема 1. Стаціонарний n -й приріст $\xi^{(n)}(t, \tau)$ допускає зображення

$$\xi^{(n)}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} (1 - e^{-i\lambda\tau})^n (1 + i\lambda)^n (i\lambda)^{-n} dZ(\lambda),$$

де $Z(\lambda)$ — випадковий процес з незалежними приростами на $\mathbb{R}$.

Задача фільтрації полягає в оптимальному в середньоквадратичному сенсі оцінюванні лінійного функціонала $A\xi = \int_0^\infty a(t)\xi(-t)dt$ від невідомих значень випадкового процесу $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, зі стаціонарними n -ми приростами за відомими спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \leq 0$, де $\eta(t)$ — некорельований з $\xi(t)$ стаціонарний випадковий процес.

У випадку, коли відомі спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ випадкових процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$, а також має місце умова мінімальності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\lambda)|^2 (1 + \lambda^2)^n}{(1 + \lambda^2)^n f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda)} d\lambda < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\lambda)|^2 |1 - e^{i\lambda\tau}|^{-2n} \lambda^{2n}}{(1 + \lambda^2)^n f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda)} d\lambda < \infty \quad (1)$$

для деякої ненульової функції експоненціального типу $\gamma(\lambda) = \int_0^\infty \alpha(t)e^{i\lambda t} dt$,

оптимальна оцінка функціонала $A\xi$ обчислюється за формулою

$$\hat{A}\xi = \int_0^\infty a(t)(\xi(-t) + \eta(-t))dt - \int_{-\infty}^{\infty} h_\tau(\lambda) dZ_{\xi^{(n)} + \eta^{(n)}}(\lambda).$$

Спектральна характеристика та величина середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$ обчислюються за формулами

$$h_\tau(\lambda) = \frac{A(\lambda)(1+i\lambda)^n(-i\lambda)^n g(\lambda)}{(1+\lambda^2)^n f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda)} - \frac{(1+i\lambda)^n(-i\lambda)^n C_\tau(\lambda)}{(1-e^{i\lambda\tau})^n((1+\lambda^2)^n f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda))},$$

$$\Delta(f, g; \hat{A}\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A(\lambda)(1-e^{i\lambda\tau})^n(1+\lambda^2)^n f(\lambda) + \lambda^{2n} C_\tau(\lambda)|^2}{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2n} ((1+\lambda^2)^n f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda))^2} g(\lambda) d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}(1+\lambda^2)^n |A(\lambda)(1-e^{i\lambda\tau})^n g(\lambda) - C_\tau(\lambda)|^2}{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2n} ((1+\lambda^2)^n f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda))^2} f(\lambda) d\lambda =$$

$$= \langle \mathbf{S}_\infty^\tau \mathbf{a}_\tau, (\mathbf{P}_\infty^\tau)^{-1} \mathbf{S}_\infty^\tau \mathbf{a}_\tau \rangle + \langle \mathbf{Q}_\infty \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle,$$

де

$$C_\tau(\lambda) = \int_0^\infty ((\mathbf{P}_\infty^\tau)^{-1} \mathbf{S}_\infty^\tau \mathbf{a}_\tau)(t) e^{i\lambda t} dt, \quad A(\lambda) = \int_0^\infty a(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

а лінійні оператори $\mathbf{S}_\infty^\tau$, $\mathbf{P}_\infty^\tau$, $\mathbf{Q}_\infty$ у просторі квадратично інтегрованих функцій визначаються як

$$(\mathbf{S}_\infty^\tau \mathbf{x})(s) = \int_{-\tau n}^\infty \mathbf{x}(t) \int_{-\infty}^\infty e^{-i\lambda(t+s)} \frac{\lambda^{2n} g(\lambda)}{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2n} ((1+\lambda^2)^n f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda))} d\lambda dt, \quad s \in [0; \infty),$$

$$(\mathbf{P}_\infty^\tau \mathbf{y})(s) = \int_0^\infty \mathbf{y}(t) \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda(t-s)} \frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\tau}|^{2n} ((1+\lambda^2)^n f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda))} d\lambda dt, \quad s \in [0; \infty),$$

$$(\mathbf{Q}_\infty \mathbf{z})(s) = \int_0^\infty \mathbf{z}(t) \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda(t-s)} \frac{(1+\lambda^2)^n f(\lambda) g(\lambda)}{(1+\lambda^2)^n f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda)} d\lambda dt, \quad s \in [0; \infty).$$

Мінімаксий (робастний) метод фільтрації. У випадку, коли точні значення спектральних щільностей $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ невідомі, а задано лише множину $D = D_f \times D_g$ допустимих щільностей, до задачі оцінювання функціонала застосовується мінімаксий підхід, тобто визначається оцінка, яка мінімізує значення середньоквадратичної похибки одночасно для всіх пар спектральних щільностей із заданого класу D .

Означення 3. Для заданого класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральні щільності $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ називають найменш сприятливими в класі D для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо виконується умова

$$\Delta(f^0, g^0) = \Delta(h(f^0, g^0); f^0, g^0) = \max_{(f, g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f, g); f, g).$$

Лема 1. Спектральні щільності $f^0(\lambda) \in D_f$ та $g^0(\lambda) \in D_g$, що задовольняють умову мінімальності (1), найменш сприятливі в класі $D = D_f \times D_g$ для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо оператори $(\mathbf{P}_\infty^\tau)^0$, $(\mathbf{S}_\infty^\tau)^0$, $(\mathbf{Q}_\infty)^0$, визначені за допомогою коефіцієнтів Фур'є функцій

$$\frac{\lambda^{2n} |1 - e^{i\lambda\tau}|^{-2n}}{(1 + \lambda^2)^n f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda)}, \frac{\lambda^{2n} g^0(\lambda) |1 - e^{i\lambda\tau}|^{-2n}}{(1 + \lambda^2)^n f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda)}, \frac{(1 + \lambda^2)^n f^0(\lambda) g^0(\lambda)}{(1 + \lambda^2)^n f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda)},$$
 задають розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\begin{aligned} \max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \left(\langle \mathbf{S}_\infty^\tau \mathbf{a}_\tau, (\mathbf{P}_\infty^\tau)^{-1} \mathbf{S}_\infty^\tau \mathbf{a}_\tau \rangle + \langle \mathbf{Q}_\infty \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \right) = \\ = \langle (\mathbf{S}_\infty^\tau)^0 \mathbf{a}_\tau, ((\mathbf{P}_\infty^\tau)^0)^{-1} (\mathbf{S}_\infty^\tau)^0 \mathbf{a}_\tau \rangle + \langle (\mathbf{Q}_\infty)^0 \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

Пара (f^0, g^0) найменш сприятливих спектральних щільностей визначає розв'язок наступної задачі на умовний екстремум:

$$\tilde{\Delta}(f, g) = -\Delta(h(f^0, g^0); f, g) \rightarrow \inf, \quad (f, g) \in D,$$

$$\begin{aligned} \Delta(h(f^0, g^0); f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A(\lambda)(1 - e^{i\lambda\tau})^n (1 + \lambda^2)^n f^0(\lambda) + \lambda^{2n} C_\tau^0(\lambda)|^2}{|1 - e^{i\lambda\tau}|^{2n} (1 + \lambda^2)^{2n} (f^0(\lambda) + \frac{\lambda^{2n}}{(1 + \lambda^2)^n} g^0(\lambda))^2} g(\lambda) d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A(\lambda)(1 - e^{i\lambda\tau})^n (-i\lambda)^n g^0(\lambda) - (-i\lambda)^n C_\tau^0(\lambda)|^2}{|1 - e^{i\lambda\tau}|^{2n} (1 + \lambda^2)^n (f^0(\lambda) + \frac{\lambda^{2n}}{(1 + \lambda^2)^n} g^0(\lambda))^2} f(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

де $C_\tau^0(\lambda) = \int_0^\infty (((\mathbf{P}_\infty^\tau)^0)^{-1} (\mathbf{S}_\infty^\tau)^0 \mathbf{a}_\tau)(t) e^{i\lambda t} dt$. Мінімаксна спектральна характеристика оцінки визначається як $h^0 = h(f^0, g^0)$.

Найменш сприятливі щільності в класі $D_f^0 \times D_g^0$. Розглянемо множину $D = D_f^0 \times D_g^0$ допустимих спектральних щільностей.

$$D_f^0 = \left\{ f(\lambda) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right\}, \quad D_g^0 = \left\{ g(\lambda) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda \leq P_2 \right\}.$$

Припустимо, що спектральні щільності $f^0(\lambda) \in D_f^0$, $g^0(\lambda) \in D_g^0$ та функції

$$\begin{aligned} h_{\tau,f}(f^0, g^0) &= \frac{|A(\lambda)(1 - e^{i\lambda\tau})^n (-i\lambda)^n g^0(\lambda) - (-i\lambda)^n C_\tau^0(\lambda)|}{|1 - e^{i\lambda\tau}|^n |1 + i\lambda|^n (f^0(\lambda) + \frac{\lambda^{2n}}{(1 + \lambda^2)^n} g^0(\lambda))}, \\ h_{\tau,g}(f^0, g^0) &= \frac{|A(\lambda)(1 - e^{i\lambda\tau})^n (1 + \lambda^2)^n f^0(\lambda) + \lambda^{2n} C_\tau^0(\lambda)|}{|1 - e^{i\lambda\tau}|^n (1 + \lambda^2)^n (f^0(\lambda) + \frac{\lambda^{2n}}{(1 + \lambda^2)^n} g^0(\lambda))} \end{aligned}$$

обмежені. За цих умов функціонал $\Delta(h_\tau(f^0, g^0); f, g)$ неперервний і обмежений в просторі $L_1 \times L_1$, а найменш сприятливі спектральні щільності задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} & \left| A(\lambda)(1 - e^{i\lambda\tau})^n(1 + \lambda^2)^n f^0(\lambda) + \lambda^{2n} C_\tau^0(\lambda) \right| = \\ & = \alpha_1 |1 - e^{i\lambda\tau}|^n \left((1 + \lambda^2)^n f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & |\lambda|^n \left| A(\lambda)(1 - e^{i\lambda\tau})^n g^0(\lambda) - C_\tau^0(\lambda) \right| = \\ & = \alpha_2 \frac{|1 - e^{i\lambda\tau}|^n}{|1 - i\lambda|^n} \left((1 + \lambda^2)^n f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

де $\alpha_1 \geq 0$ та $\alpha_2 \geq 0$ — деякі константи такі, що $\alpha_1 \neq 0$, якщо $(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f^0(\lambda) d\lambda = P_1$, та $\alpha_2 \neq 0$, якщо $(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} g^0(\lambda) d\lambda = P_2$.

Теорема 1. Нехай спектральні щільності $f^0(\lambda) \in D_f^0$, $g^0(\lambda) \in D_g^0$ задовольняють умову мінімальності (1), а функції $h_{\tau,f}(f^0, g^0)$, $h_{\tau,g}(f^0, g^0)$ — обмежені. Якщо спектральні щільності $f^0(\lambda)$ та $g^0(\lambda)$, визначені з рівнянь (3) (4), визначають розв'язок екстремальної задачі (2), то вони є найменш сприятливими в класі $D = D_f^0 \times D_g^0$ для лінійної фільтрації функціонала $A\xi$.

Теорема 2. Нехай спектральна щільність $f(\lambda)$ (або $g(\lambda)$) відома. Припустимо, що спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g^0(\lambda) \in D_g^0$ (або $g(\lambda)$ та $f^0(\lambda) \in D_f^0$) задовольняють умову (1). Якщо функція $h_{\tau,g}(f^0, g^0)$ (або $h_{\tau,f}(f^0, g^0)$) обмежена, а пара (f, g^0) (або (f^0, g)) визначає розв'язок екстремальної задачі (2), то спектральна щільність

$$g^0(\lambda) = \frac{(1 + \lambda^2)^n}{\lambda^{2n}} \max \left\{ 0, \frac{|A(\lambda)(1 - e^{i\lambda\tau})^n(1 + \lambda^2)^n f(\lambda) + \lambda^{2n} C_\tau^0(\lambda)|}{\alpha_2 |1 - e^{i\lambda\tau}|^n (1 + \lambda^2)^n} - f(\lambda) \right\}$$

або

$$f^0(\lambda) = \frac{(1 + \lambda^2)^n}{\lambda^{2n}} \max \left\{ 0, \frac{|A(\lambda)(1 - e^{i\lambda\tau})^n(-i\lambda)^n g(\lambda) - (-i\lambda)^n C_\tau^0(\lambda)|}{\alpha_1 |1 - e^{i\lambda\tau}|^n |1 + i\lambda|^n} - g(\lambda) \right\},$$

є найменш сприятливою в D_g^0 (або D_f^0) для фільтрації функціонала $A\xi$.

Задача фільтрації стохастичних послідовностей досліджується в статтях [1], [2]. Задачі екстраполяції та інтерполяції випадкових процесів вивчаються в роботах [3], [4] відповідно.

Список літератури

1. Luz M. M., Moklyachuk M. P. Minimax-robust filtering problem for stochastic sequence with stationary increments // Theory Probability and Mathematical Statistics. — 2014. — No. 89. — P. 127—142.
2. Luz M., Moklyachuk M. Minimax-robust filtering problem for stochastic sequences with stationary increments and cointegrated sequences // Statistics, Optimization & Information Computing. — 2014. — Vol. 2, No. 3. — P. 176—199.
3. Luz M., Moklyachuk M. Robust extrapolation problem for stochastic processes with stationary increments // Mathematics and Statistics. — 2014. — Vol. 2, No. 2. — P. 78—88.
4. Luz M., Moklyachuk M. Minimax interpolation problem for random processes with stationary increments // Statistics, Optimization & Information Computing. — 2015. — Vol. 3, No. 1. — P. 30—41.

ПРО АСИМПТОТИЧНІ РОЗКЛАДИ МОМЕНТІВ ОЦІНКИ КОВАРІАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОГО ШУМУ

К. К. Москвичова

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

kamok@ua.fm

Розглянемо нелінійну модель регресії

$$X(t) = g(t, \theta) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

де $g(t, \theta) : [0, \infty) \times \Theta^c \rightarrow \mathbb{R}^1$ — неперервна функція, що залежить від невідомого параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$, де Θ — обмежена відкрита опукла множина; $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, — випадковий шум.

Означення 1. Оцінкою найменших квадратів параметра $\theta \in \Theta$, отриманою за спостереженням процесу (1), називається будь-який випадковий вектор $\hat{\theta}_T = (\hat{\theta}_{1T}, \dots, \hat{\theta}_{qT})$, для якого $L_T(\hat{\theta}_T) = \inf_{\tau \in \Theta^c} L_T(\tau)$, де Θ^c замикання множини Θ ,

$$L_T(\tau) = \int_0^T (X(t) - g(t, \tau))^2 dt.$$

Позначимо

$$B_T(z, \hat{\theta}_T) = T^{-1} \int_0^T (X(t+z) - g(t+z, \hat{\theta}_T))(X(t) - g(t, \hat{\theta}_T)) dt,$$

де $z \in [0, H]$, корелограмну оцінку коваріаційної функції $B(z)$ випадкового шуму ε .

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ — мультиіндекс, $|\alpha| = \sum_{i=1}^q \alpha_i$,

$$g^{(\alpha)} = \partial^{|\alpha|} / \left((\partial \theta_1)^{\alpha_1} \dots (\partial \theta_q)^{\alpha_q} \right) g, \quad g_{i_1 \dots i_r} = \partial^r / \left(\partial \theta_{i_1} \dots \partial \theta_{i_r} \right) g.$$

$$b^{(\alpha)}(z, \theta) = T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T (\varepsilon(t+z) g^{(\alpha)}(t, \theta) + \varepsilon(t) g^{(\alpha)}(t+z, \theta)) dt,$$

$$a^{(\alpha)}(z, \theta) = T^{-1} E B_T^{(\alpha)}(z, \theta), \quad v(r) = \{x \in \mathbb{R}^q : \|x\| < r\}, \quad U^c(\theta) = \Theta^c - \theta.$$

Аналогічний зміст мають позначення $b_{i_1 \dots i_r}(z, \theta)$, $a_{i_1 \dots i_r}(z, \theta)$.

Припустимо, що виконуються умови

I. $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, — дійсний неперервний в середньому квадратичному вимірний стаціонарний гаусівський випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією $B(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^1)$;

II. Для довільного $R \geq 0$ існують такі константи $c_i(\alpha, R) = c_i < \infty$, $i = 1, 2$, що

$$\sup_{u \in U^c(\theta) \cap v^c(\mathbb{R})} T^{-1} \int_0^T \left(g^{(\alpha)}(t, \theta + u) \right)^2 dt \leq c_1, |\alpha| = \overline{1, k},$$

$$\sup_{u_1, u_2 \in U^c(\theta) \cap v^c(\mathbb{R})} T^{-1} \int_0^T \left(g^{(\alpha)}(t, \theta + u_1) - g^{(\alpha)}(t, \theta + u_2) \right)^2 dt \|u_1 - u_2\|^{-2} \leq c_2, |\alpha| = k,$$

для деякого $k \geq 2$;

III. Для деякого $\lambda_0 > 0$ для достатньо великих T

$$\lambda_{\min}(I(\theta)) \geq \lambda_0,$$

де $\lambda_{\min}(A)$ найменше власне число додатньо визначеної матриці A ,

$$I(\theta) = \left(T^{-1} \int_0^T g_i(t, \theta) g_j(t, \theta) dt \right)_{i,j=1}^q, \quad \Lambda = \left(\Lambda^{ij}(\theta) \right)_{i,j=1}^q = I^{-1}(\theta).$$

IV. $P\left\{T^{1/2} \|\hat{\theta}_T - \theta\| \geq M\right\} \leq c_3 M^{-m}$ при всіх достатньо великих m та M .

Позначимо для $i, j = \overline{1, q}$, $z \in [0, H]$

$$\Pi_{(i)(j)}(z, \theta) = T^{-1} \int_0^T g_i(t + z, \theta) g_j(t, \theta) dt,$$

$$\Psi_{ij}(z) = T^{-1} \int_0^T \left(B(t - s + z) g_i(t, \theta) g_j(s, \theta) + B(t - s) g_i(t + z, \theta) g_j(s, \theta) \right) dt ds,$$

$$\Psi_{ij} = T^{-1} \int_0^T B(t - s) g_i(t, \theta) g_j(s, \theta) dt ds.$$

Теорема 2. Якщо виконано умови **I**, **II** для $k=4$, **III**, **IV** для $m \geq 5$, то

$$T^{1/2} E \left(B_T \left(z, \hat{\theta}_T \right) - B(z) \right) = L_T(z) T^{-1/2} + O \left(T^{-3/2} \ln^2 T \right),$$

де $L_T(z) = \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Pi_{(i_1)(i_2)}(z) \Psi_{j_1 j_2} - \Lambda^{i_1 j_1} \Psi_{i_1 j_1}(z)$.

За додаткової умови обмеженості похідних функції регресії доведено також теорему про асимптотичний розклад дисперсії оцінки $B_T(z, \hat{\theta}_T)$.

Отримані результати надруковано в роботі [1] та узагальнюють відповідні теореми для нелінійної регресійної моделі з незалежними однаково розподіленими випадковими помилками спостережень [2].

Список літератури

1. Іванов О. В., Москвичова К. К., Асимптотичний розклад моментів корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії // Укр. мат. журн. — 2014. — 66, № 6. — С. 787—805.
2. Ivanov A. V. Asymptotic Theory of Nonlinear Regression. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1997. — 327 p.

ВЛАСТИВІСТЬ ПРАВИЛЬНОЇ ЗМІНИ УНІТАРНИХ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ

В. В. Павленков

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

smallstar_84@mail.ru

Нехай $\mathbb{R}^+$ — простір невід’ємних дійсних чисел, $GL(\mathbb{R}^d)$ — простір невід’ємних лінійних операторів $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ (невироджених квадратних матриць розміру $d \times d$).

Означення. Нехай функція $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow GL(\mathbb{R}^d)$ є вимірною, Q — квадратна матриця розміру $d \times d$. Функцію f називають *правильно змінною* на нескінченності функцією з показником (індексом) Q якщо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\lambda t) f(t)^{-1} = \lambda^Q$$

для усіх $\lambda > 0$.

Під λ^Q ми надалі розумітимемо вираз $e^{(\log \lambda)Q}$, де

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!},$$

та X — квадратна матриця розміру $d \times d$.

В [1] показано, що унітарна матрична функція

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

не є правильно змінною на нескінченності функцією, але функція $U(\log t)$ уже правильно змінна з показником

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто підстановка $t \rightarrow \log t$ робить функцію U правильно змінною.

Зауважимо, що довільну унітарну матричну функцію $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow GL(\mathbb{R}^2)$ можна подати у вигляді

$$f(t) = U(\varphi(t)),$$

де $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$. В роботі розглядаються умови на функцію φ , при яких за допомогою деякої підстановки функцію f можна зробити правильно змінною на нескінченності. Виявляється, що ці умови є достатньо загальними, і широкий клас двовимірних матричних функцій задовольняють вказаній властивості.

В тривимірному просторі ситуація аналогічна до двовимірного.

Але якщо збільшувати розмірність до 4, то побудовано приклад унітарної матричної функції, яку підстановкою $t \rightarrow \log t$ не можна зробити правильно змінною. А саме

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t^2) & -\sin(t^2) \\ 0 & 0 & \sin(t^2) & \cos(t^2) \end{pmatrix}, t > 0.$$

Список літератури

1. Meerschaert M. M., Scheffler H.-P. Limit Distributions for Sums of Independent Random Vectors: Heavy Tails in Theory and Practice. — Hoboken, New Jersey, U.S.A.: Wiley-Interscience, 2001. — 512 p. — (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics).

ІНТЕРВАЛЬНІ РЕКУРЕНТНІ ПОТОКИ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

М. В. Приймак, О. В. Маєвський, О. В. Мацюк, Г. В. Шимчук

Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя,

Тернопіль, Україна

Kaf_KN@tu.edu.te.ua, alexmajevskiy@gmail.com

У багатьох питаннях теорії та прикладних досліджень систем масового обслуговування приходиться мати справу із потоками подій, в першу чергу із вхідними потоками.

Щоб уникнути в тексті певних роз'яснень, застережень, спочатку нагадаємо деякі поняття, пов'язані з потоками.

Поняття потоку та деякі моделі потоків. В загальному випадку потоком називають послідовність подій. Якщо подіями є звернення в систему обслуговування, такий потік називається потоком замовлень (подій, вимог), вхідним потоком або просто потоком.

Способи задання потоків та їх взаємозв'язок. Є три основних способи опису потоків, які між собою взаємопов'язані. Нагадаємо їх, дотримуючись при цьому [1—3].

Потік як випадковий процес. Потік можна розглядати як випадковий процес $\xi(t)$, $t \geq 0$, що визначає число подій, що відбулися за проміжок часу $(0, t)$.

Потік як послідовність випадкових точок. Нехай $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_0 = 0$ — випадкові моменти часу, в які надходять замовлення. Якщо ці моменти розглядати як послідовність випадкових величин (точок) $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_0 = 0$, $0 < t_1 < t_2 < \dots$, заданих на осі часу $0t, t \geq 0$, то таку послідовність називають потоком, іноді **точковим процесом**.

Потік як послідовність випадкових величин (інтервалів). Якщо послідовність $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_0 = 0$ — це моменти надходження замовлень, то

df

різниці $t_k - t_{k-1} = \tau_k$, $k = 1, 2, \dots$, визначають інтервали (проміжки) часу між $k - 1$ -м і k -м замовленнями. Сам же потік розглядається як **послідовність випадкових величин (інтервалів)**

$$\tau_k, k = 1, 2, \dots$$

Взаємозв'язок між способами задання потоків. Перераховані способи подання потоків взаємопов'язані, тобто потік, описаний одним із трьох способів може бути описаний і в розумінні двох інших [1, 3].

Щоб досліджувати той чи інший потік, найперше потрібно визначитися із його моделлю, яка враховує характерні властивості потоку. Маючи модель, дослідження потоку зводиться до дослідження його моделі. Нагадаємо деякі відомі моделі потоків.

Найпростіший потік. Добре вивченими є потоки, що задовольняють умовам стаціонарності, відсутності післядії і ординарності [1—3]. За пропозицією Хінчина такі потоки отримали назву *найпростіших потоків* [1]. Для найпростішого потоку ймовірність надходження k замовлень за довільний проміжок часу t , тобто $p_k(t) = P\{\xi(t) = k\}$, $k = 0, 1, \dots$, визначається за формулою

$$P(\xi(t) = k) = p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0, 1, \dots.$$

Параметр λ , що входить в цю формулу, отримав назву *інтенсивності* потоку.

Оскільки розподіл ймовірностей (3) носить назву закону Пуассона, говорять, що моделлю найпростішого потоку є *пуассонівський процес*, а сам потік називають *пуассонівським потоком* або *потокм Пуассона*.

Якщо потік розглядати як послідовність інтервалів τ_k , $k = 1, 2, \dots$, то для найпростішого потоку розподілу інтервалів τ_k є показниковим:

$$F_k(x) = P(\tau_k < x) = 1 - e^{-\lambda x} \stackrel{df}{=} F(x).$$

Періодичний пуассонівський потік. У випадках, коли потік без наслідків, ординарний, але умова стаціонарності вже не виконується, то в таких випадках вважається, що параметр потоку λ є деякою функцією $\lambda(t)$. Якщо ж потік є стохастично періодичним з деяким періодом $T > 0$, то для врахування цієї характеристики потоку припускається [4], що параметр потоку $\lambda(t)$ є періодичною функцією з цим же періодом T :

$$\lambda(t) = \lambda(t + T), \quad t \geq 0.$$

Сам потік при цьому називається періодичним пуассонівським потоком, або моделлю потоку є періодичний пуассонівський процес. Зауважимо, що періодичні пуассонівські процеси є підкласом випадкових процесів з незалежними періодичними приростами [4].

Практика показує, що не для всіх потоків виконуються умова відсутності післядії, тобто не всі потоки можуть бути зведені тільки до пуассонівських. Щоб вивчати потоки, відмінні від пуассонівських, їх зручно розглядати як послідовність випадкових величин (інтервалів)

$$\tau_k, k = 1, 2, \dots.$$

Із загальної множини потоків без післядії чи з обмеженою післядією виділені окремі класи потоків, задання яких суттєво спрощується [3].

Потік з обмеженою післядією. Випадковий потік подій τ_k , $k = 1, 2, \dots$, називається *потокм з обмеженою післядією* або *потік Пальма*, якщо його

випадкові величини τ_k *взаємно незалежні*. Із цього визначення випливає, що для задання потоку з обмеженою післядією, достатньо задати послідовність розподілів

$$F_k(x) = P\{\tau_k < x\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

припускаючи при цьому, що $F_k(x) \equiv 0$ при $x < 0$.

Потоком з обмеженою післядією в загальному випадку ні теоретичного, ні тим більше практичного інтересу не мають, їх дослідження теж по суті неможливе. Проте певний інтерес, особливо для практики, мають виділені із множини потоків з обмеженою післядією рекурентні потоки із запізненням та рекурентні потоки [3].

Рекурентний потік із запізненням. Потік з обмеженою післядією, для якого

$$F_k(x) = F(x), \quad k = 2, 3, \dots, \quad F_1(x) \neq F(x),$$

називається *рекурентним потоком із запізненням* або *процесом відновлення із запізненням*.

Рекурентний потік. Потік з обмеженою післядією, для якого

$$F_k(x) = F(x) \quad \text{при } k = 1, 2, \dots$$

називається *рекурентним потоком* або *процесом відновлення*.

При дослідженні рекурентних потоків застосування знаходять різні функції розподілів: гама-функції, розподіл Вейбулла, рівномірний розподіл, нормальний і логарифмічно нормальний розподіли.

Хоча функція розподілу випадкових величин рекурентного потоку τ_k , $k = 1, 2, \dots$, одна і та ж, проте, подібно до періодичного пуассонівського потоку, рекурентних потоків теж спостерігаються випадки їх стохастичної періодичності. Яким же чином побудувати модель стохастично періодичного рекурентного потоку, врахувати характерні особливості зміни параметра чи параметрів його функції розподілу?

Інтервальний процес. Щоб була можливість обґрунтувати модель стохастично періодичного рекурентного потоку, визначимо поняття потоку дещо іншим способом. Для цього скористаємося синтезом визначень потоку як випадкового процесу, з іншої сторони — як послідовності випадкових величин. Для цього замість конкретних моментів t_k , $k = 1, 2, \dots$, надходження вимог будемо розглядати момент надходження вимоги в загальному випадку і позначимо його через t . Інтервал часу між моментом t і моментом надходження наступної вимоги позначимо через $\tau(t)$, $t \in [0, \infty)$, і будемо розглядати його як процес, що описує інтервалів між сусідніми вимогами (подіями) потоку. *Реалізацією* цього процесу є послідовність інтервалів τ_k , $k = 1, 2, \dots$.

Інтервальний процес $\tau(t), t \in [0, \infty)$, будемо називати *інтервальним процесом рекурентного потоку*, або *інтервальним рекурентним потоком*. Для випадку рекурентного потоку із запізненням — інтервальним рекурентним потоком із запізненням.

Оскільки випадкові величини рекурентного потоку взаємно незалежні, інтервальний процес повністю характеризується одновимірною функцією розподілу

$$F(t, x) = P(\tau(t) < x).$$

Припустимо, що ця функція залежить від параметрів $a_1, a_2, \dots, a_n$, які в загальному випадку є деякими функціями часу $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$.

Поняття інтервального рекурентного потоку (процесу) дозволяє виділити із множини таких потоків окремі класи:

- ✓ стаціонарні інтервальні рекурентні потоки (процеси);
- ✓ кусково-стаціонарні інтервальні рекурентні потоки (процеси);
- ✓ періодичні інтервальні рекурентні потоки (процеси);
- ✓ періодичні кусково-стаціонарні інтервальні рекурентні потоки (процеси).

Для прикладу наведемо означення періодичного інтервального рекурентного потоку та періодичного інтервального рекурентного потоку із рівномірним розподілом.

Означення 1. Інтервальний рекурентний потік $\tau(t), t \in [0, \infty)$, із функцією розподілу

$$F(t, x) = P(\tau(t) < x)$$

називається *періодичним інтервальним потоком*, якщо параметри розподілу $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$ (всі чи деякі) є періодичними з одним і тим же періодом T .

Для реальних потоків функція розподілу конкретизується, наприклад, це може бути рівномірним розподілом.

Означення 2. Інтервальний рекурентний потік $\tau(t), t \in [0, \infty)$, називається *періодичним інтервальним потоком із рівномірним розподілом*, якщо його для його густини розподілу

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{b(t) - a(t)}, & x \in [a(t), b(t)], \\ 0, & x \notin [a(t), b(t)], \end{cases}$$

де параметри $a(t)$ і $b(t)$, $b(t) > a(t) > 0$ є періодичними із одним і тим же періодом T :

$$a(t) = a(t + T), \quad b(t) = b(t + T).$$

Подібно до рівномірного періодичного потоку можуть бути визначені трикутний періодичний потік, показниковий (експоненційний), гіперекспоненційний, гамма-, бета-періодичні потоки тощо.

Висновки. Аналіз стану теорії потоків показав наявність цілої низки ще невирішених питань, особливо щодо потоків без післядії та рекурентних потоків. Для рекурентних потоків побудована їх модель у вигляді інтервального рекурентного потоку, для опису стохастично періодичних рекурентних потоків запропоновано моделі у вигляді періодичного інтервального рекурентного потоку, якщо ж розподіл інтервалів конкретизується, наприклад, припускається рівномірним, моделлю буде періодичний інтервальний потік із рівномірним розподілом. Отримані результати є базою розробки статистичних методів аналізу потоків, їх імітаційного моделювання.

Список літератури

1. Хинчин А. Я. Работы по теории массового обслуживания. — М.: Физматгиз, 1963. — 236 с.
2. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1966. — 432 с.
3. Ивченко Г. И., Каштанов В.А., Коваленко И. Н. Теория массового обслуживания: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1982. — 256 с.
4. Приймак М. В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. дис...докт. техн. наук: 05.13.06 / Київ: НАУ, 2001. — 34 с.

МЕТОД БЕСПРИЗНАКОВОГО РАСПОЗНАВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЛИПСОВ ПЕТУНИНА

М. В. Присяжная

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина
marriner@gmail.com

Введение. Современный статистический анализ — это большое количество методов, позволяющих классифицировать объекты по заданным классам (метод опорных векторов, метод ближайшего соседа, нейронные сети и другие). В большинстве методов одной из подзадач классификации является задача устранения неопределенности. То есть ситуации, когда классификатор не может однозначно определить к какому классу принадлежит рассматриваемый объект.

В многочисленных работах Robert P. W. Duin и его учеников разрабатывается теория беспризнакового распознавания. Однако в работе [2] ее авторы прямо указывают на еще нерешенную проблему: необходимость разработки новой вероятностной теории в беспризнаковом анализе. В данной работе описанная проблема решается с помощью теории статистической глубины. Новое вероятностное понимание этого понятия дает возможность ранжировать элементы многомерной выборки с учетом вероятности того, что новая точка с той же генеральной совокупности попадет в заданную область решения [1]. Так же с помощью предложенной статистической глубины предлагается устранять неопределенность в классификаторе.

Мера близости между выборками (p-статистика). Обозначим через H гипотезу о равенстве непрерывных функций распределения $F_G(u)$ и $F_{G'}(u)$ генеральных совокупностей G и G' , соответственно. Пусть

$x = (x_1, \dots, x_n) \in G$ и $x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in G'$, $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, $x'_{(1)} \leq \dots \leq x'_{(n)}$ — порядковые статистики. Предположим, что $F_G(u) = F_{G'}(u)$. Обозначим через $A_{ij}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, m$ случайное событие, состоящее в том, что x'_k попадает в интервал $(x_{(i)}, x_{(j)})$, т.е. $A_{ij}^{(k)} = \{x'_k \in (x_{(i)}, x_{(j)})\}$. Как известно [3], в случае, когда $F_G(u) = F_{G'}(u)$ (т.е. $G = G'$) вероятность этого события вычисляется по формуле:

$$P(A_{ij}^{(k)}) = P(x'_k \in (x_{(i)}, x_{(j)})) = p_{ij}^{(n)} = \frac{j-i}{n+1}.$$

Положим

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(1)} &= \frac{h_{ij}^{(n)}m + g^2/2 - g \sqrt{h_{ij}^{(n)}(1-h)m + g^2/4}}{m + g^2} \\ p_{ij}^{(2)} &= \frac{h_{ij}^{(n)}m + g^2/2 + g \sqrt{h_{ij}^{(n)}(1-h)m + g^2/4}}{m + g^2} \end{aligned} \quad (1)$$

где $h_{ij}^{(n)}$ — частота появления события $A_{ij}^{(n)}$ в m испытаниях, величина $g = 3$.

Обозначим через N все доверительные интервалы $I_{ij}^{(n,m)} = (p_{ij}^{(1)}, p_{ij}^{(2)})$ ($N = \frac{n(n-1)}{2}$) и L — число тех интервалов $I_{ij}^{(n,m)}$, которые содержат вероятности $p_{ij}^{(n)}$. Положим

$$h^{(n,m)} = \rho(G, G') = \rho(x, x') = \frac{L}{N}.$$

Поскольку $h^{(n,m)}$ — частота случайного события $B = \{p_{ij}^{(n)} \in I_{ij}^{(n,m)}\}$, имеющего вероятность $p(B) = 1 - \beta$ то, полагая, $h_{ij}^{(n,m)} = h^{(n)}, m = N, g = 3$ в формулах (1), мы получим доверительный интервал $I^{(n,m)} = (p^{(1)}, p^{(2)})$ для вероятности $p(B)$. Статистика $h^{(n)}$ называется p -статистикой. Она является мерой близости $\rho(x, x')$ между выборками x и x' . Доверительные интервалы $I_{ij}^{(n,m)} = (p_{ij}^{(1)}, p_{ij}^{(2)})$ и $I^{(n,m)} = (p^{(1)}, p^{(2)})$ мы будем называть интервалами, построенными по правилу 3σ .

Метод распознавания. Метод распознавания, предложенный в данной работе, основывается на построении эллипсов Петунина, как некоего вида разделяющей поверхности. Подробный алгоритм построения эллипса Петунина в двумерном и многомерном случаях представлен в другой работе автора [4].

Подытожив, предложенный в данной работе метод распознавания состоит в следующем:

1. Вычисление p -статистики по заданным признакам объектов рассматриваемых классов и формирование на ее основании обучающих выборок.
2. Построение эллипсов Петунина на основании обучающих выборок.
3. Построение классификатора на основании эллипсов, как нелинейных разделяющих поверхностей.

Проиллюстрируем работу классификатора на рис. 1 (а, б)/

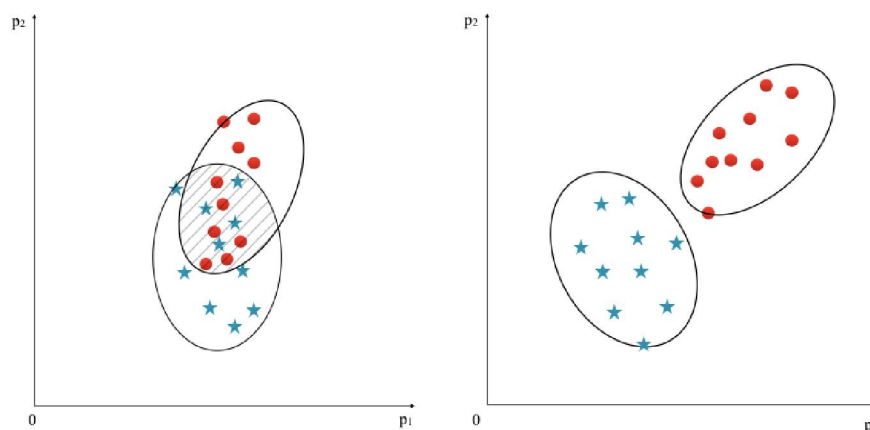


Рис. 1 (а, б). Пример работы классификатора: точное разделение выборок (а) и ситуация с неопределенностью (б).

В случае (б) возникает ситуация неопределенности, классификатору не удастся точно определить класс, к которому принадлежит объект (в данном

случае, рассматриваемые эллипсы в своем пересечении имеют точки обучающих выборок). С целью устранения неопределенности предлагается модифицировать предложенный метод распознавания процедурой эллиптического пилинга. Как результат его применения может быть получен вариационный ряд, в котором каждая точка будет иметь свой ранг относительно построенной системы концентрических эллипсов.

Результаты. С целью иллюстрации работы метода были использованы данные работы [5], а именно значения 15 показателей по клеткам 100 пациентов (50 больных раком и 50 фиброаденоматозом). В Таблице 2(а, б, в) приведены результаты работы классификатора без процедуры пилинга (нижний треугольник таблицы) и с процедурой пилинга (верхний треугольник) для 5 показателей из набора. (Распознавание проводилось с использованием процедуры кросс-валидации). Для каждой пары показателей приведены стандартные специфичность, чувствительность и точность метода.

Специфичность, %	1	2	3	4	5
1		100	76,9	100	89,8
2	100		76,9	100	89,8
3	65,5	69,2		58,8	57,1
4	90,9	95,2	47,1		50,0
5	80,0	80,0	17,1	9,4	

Таблица 2(а). Специфичность метода для 5 пар показателей с пилингом и без него.

Чувствительность, %	1	2	3	4	5
1		100	79,2	90,9	88,2
2	92,6		79,2	90,9	88,2
3	68,9	70,8		51,8	51,9
4	82,1	82,8	49,4		50,0
5	80,0	80,0	27,1	4,3	

Таблица 2(б). Чувствительность метода для 5 пар показателей с пилингом и без него.

Точность, %	1	2	3	4	5
1		100	78,0	95,0	89,0
2	96,0		78,0	95,0	89,0
3	67,0	70,0		53,0	53,0
4	86,0	88,0	49,0		50,0
5	80,0	80,0	23,0	7,0	

Таблица 2(в). Точность метода для 5 пар показателей с пилингом и без него.

Замечание. При исследовании всех 15 показателей возможны вырожденные случаи, в которых построенные по алгоритму эллипсы на основе заданных выборок, вложены друг в друга. Таким образом, без пилинга результат работы классификатора равен 0, а с пилингом 100%. В невырожденных случаях мы так же можем наблюдать значительное увеличение специфичности и чувствительности, как основных показателей эффективности метода.

Обсуждение. Основная цель данного исследования заключается в дальнейшем развитии теории беспризнакового распознавания. Данное приложение открывает новое направление в методах распознавания образов, основанное не на признаках объектов, а на исследовании меры близости между ними.

Среди особенностей предложенного в данной работе метода:

1. Использование p -статистики как новой меры близости между наборами признаков исследуемых объектов.
2. Модификация метода с помощью процедуры эллиптического пилинга, что позволяет более успешно решать проблему неопределенности.
3. Предложенный метод, основываясь на построении доверительных эллипсов Петунина, дает возможность вероятностной оценки классификатора.

Список литературы

1. Присяжна М. В., Ключин Д. А. Еліптична функція статистичної глибини даних // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2014. — Вип. 1. — С. 179—184.
2. Duin R., de Ridder D., Tax D. Featureless Pattern Classification // Kybernetika. — 1998. — Vol. 34, issue 4. — P. 399—404.
3. Мадреимов И., Петунин Ю. И. Характеризация равномерного распределения с помощью порядковых статистик // Теор. вероятностей и мат. статистика. — 1982. — В. 27. — С. 96—102.
4. Ключин Д. А., Присяжная М. В. Многомерное ранжирование с помощью эллипсов Петунина // Журнал вычислительная и прикладная математика. — 2013. — В. 4. — С. 95—101.
5. Andrushkiw R. I., Klyushin D. A., Petunin Yu. I., Lysyuk V., Boroday N. V. Diagnosis of breast cancer by the modified nearest neighbor recognition method // Proc. Intl. Conference on Mathematics and Engineering Techniques in Medicine and Biological Sciences. — 2002. — P. 176—189.

ПРО АСИМПТОТИЧНУ НОРМАЛЬНІСТЬ ОЦІНКИ МІНІМАЛЬНОГО КОНТРАСТУ ПАРАМЕТРА СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ ШУМУ В МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ

В. В. Приходько

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

vikaprihodko@ukr.net

Розглянемо модель спостережень

$$X(t) = g(t, \alpha_0) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, T].$$

де $g(t, \alpha) : [0, \infty) \times A^c \rightarrow \mathbb{R}$, — неперервна функція, що залежить від невідомого параметра $\alpha_0 \in A$, $A \subset \mathbb{R}^q$, — обмежена відкрита опукла множина, $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}$, — вимірний стаціонарний гаусівський процес з нульовим середнім і спектральною щільністю

$$f(\lambda, \theta_0), \lambda \in \mathbb{R}, \theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^m,$$

де Θ — обмежена відкрита опукла множина, а функція $f(\lambda, \theta) > 0$.

Коли в моделі регресії за спостереженнями процесу «сигнал + шум» виникає потреба оцінити функціональні характеристики випадкового шуму, то сигнал із корисного перетворюється на заважаючий. Для того, щоб знешкодити його вплив, необхідно спочатку оцінити параметр функції регресії і потім будувати оцінки, скажімо, параметра спектральної щільності стаціонарного випадкового шуму за допомогою залишків.

Означення 1. *Оцінкою найменших квадратів* параметра $\alpha_0 \in A$, отриманою за спостереженням процесу $\{X(t), t \in [0, T]\}$, називається будь-який випадковий вектор $\hat{\alpha}_T = (\hat{\alpha}_{1T}, \dots, \hat{\alpha}_{qT}) \in A^c$, A^c — замикання A , для якого

$$L_T(\hat{\alpha}_T) = \min_{\alpha \in A^c} L_T(\alpha), \text{ де } L_T(\alpha) = \int_0^T (y(t) - g(t, \alpha))^2 dt.$$

Введемо періодограму залишків

$$I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T (X(t) - g(t, \hat{\alpha}_T) e^{-i\lambda t}) dt \right|^2, \lambda \in \mathbb{R}$$

і розглянемо поле контрасту Уїтла [1]

$$U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\ln f(\lambda, \theta) + \frac{I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}{f(\lambda, \theta)} \right) w(\lambda) d\lambda, \theta \in \Theta^c,$$

де $w(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$, — деяка парна додатна обмежена вимірна за Лебегом вагова функція.

Означення 2 [1, 2]. *Оцінкою мінімального контрасту* невідомого параметра $\theta_0 \in \Theta$ називається будь-який випадковий вектор $\hat{\theta}_T = (\hat{\theta}_{1T}, \dots, \hat{\theta}_{mT})$, для якого

$$U_T(\hat{\theta}_T, \hat{\alpha}_T) = \min_{\theta \in \theta^c} U_T(\theta, \hat{\alpha}_T).$$

Нами доведено, що якщо виконано деякі вимоги до функції регресії g , спектральної щільності f і вагової функції w , то нормована оцінка мінімального контрасту $T^{\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_T - \theta_0)$ асимптотично при $T \rightarrow \infty$ нормальна з нульовим середнім та коваріаційною матрицею

$$W_1^{-1}(\theta_0)W_2(\theta_0)W_1^{-1}(\theta_0),$$

де

$$W_1(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\theta} \ln f(\lambda, \theta) \nabla'_{\theta} \ln f(\lambda, \theta) w(\lambda) d\lambda,$$

$$W_2(\theta) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\theta} \ln f(\lambda, \theta) \nabla'_{\theta} \ln f(\lambda, \theta) w^2(\lambda) d\lambda.$$

Список літератури

1. Leonenko N. N., Sakhno L. M. On the Whittle estimators for some classes of continuous-parameter random processes and fields // Statistics & Probability Letters. — 2006. — No. 76. — P. 781—795.
2. Anh V. V., Leonenko N. N., Sakhno L. M.. On a class of minimum contract estimators for fractional stochastic processes and fields // J. Statist. Planning and Inference. — 2004. — No. 123. — P. 161—185.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ІНТЕГРАЛЬНОГО ФУНКЦІОНАЛУ ВІД РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

О. Д. Приходько

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
prykhodko.olga@inbox.ru

Якщо відсоткова ставка є випадковим процесом і задовольняє стохастичне диференціальне рівняння, тоді щоб оцінити майбутні прибутки відносно рівня відсоткової ставки досліджується гранична поведінка функціоналу від розв'язку СДР. У даній роботі розглядається довгострокова поведінка

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d(s, \xi(s)) ds$$

для відсоткової ставки, що задовольняє СДР, яке містить члени з Вінеровим процесом, центрованою та нецентрованою мірами Пуассона.

Ключові слова: *стохастичне диференціальне рівняння, малий параметр, відсоткова ставка, гранична поведінка, інтегральний функціонал.*

Вступ. В зв'язку з тим, що стохастичні диференціальні рівняння є досить зручною моделлю для опису різноманітних динамічних систем збурених випадковими процесами, останнім часом підвищився інтерес до теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Тому вивчення стохастичних диференціальних рівнянь, властивостей та поведінки їх розв'язків є актуальним напрямком сучасної математики.

За допомогою стохастичних диференціальних рівнянь можна моделювати випадкові процеси в економіці, механіці, задачах автоматизованого управління, біології та інших сферах науки. Апарат теорії стохастичних диференціальних рівнянь широко використовується при дослідженні математичних моделей фінансового та страхового ринку.

Результати досліджень. Будемо розглядати властивості та поведінку розв'язку стохастичного диференціального рівняння. Сформульовані результати мають наступне практичне застосування.

На даний момент ринок страхових послуг перенасичений страховими пропозиціями, компанії змушені все більше і більше удосконалювати і поглиблювати якість послуг, обсяг і процентні ставки.

В деяких випадках страхові компанії обіцяють фіксовану відсоткову ставку для своїх страхових продуктів, таких як облігації, страхування життя і т.п.

Цікавим є дослідження граничної поведінки

$$\frac{1}{t} \int_0^t r(u) du$$

де $r(u)_{u \geq 0}$ — миттєва відсоткова ставка, яка задовольняє стохастичне диференціальне рівняння. Великий інтерес викликає питання як ця відсоткова ставка має бути визначена.

Це пов'язано з тим, що страхова компанія прагне мінімізувати страхові виплати, для того, щоб була змога покрити всі видатки та зберегти деякі резерви. З іншого боку, конкурентна боротьба, яка характерна для ринкової економіки, спонукає конкуруючі компанії задовольняти якомога більше побажань клієнтів. Природно, що споживачі (клієнти) хочуть виплати з якомога більшим відсотком [1].

Щоб вирішити цю практичну проблему доцільно змодельовати довгострокові виплати з математичної точки зору.

Розглядається поведінка функціоналу

$$\eta_{\varepsilon}(t) = \left(\varepsilon^k / t\right) \int_0^{t/\varepsilon^k} d(s, \xi(s)) ds$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, де $\xi(t)$ — це розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$\begin{aligned} \xi(t) = & \varepsilon^{k_1} \int_0^t f(t, \xi(t)) dt + \varepsilon^{k_2} \int_0^t g(t, \xi(t)) dw(t) + \\ & + \varepsilon^{k_3} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} q(t, \xi(t), y) v(dt, dy) + \varepsilon^{k_4} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t, \xi(t), y) \tilde{\mu}(dt, dy), \quad (1) \\ & \xi(0) = \xi_0; \end{aligned}$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр; $k > 0, k_i > 0, i = 1, \dots, 4$;

$d(t, x)$ — не випадкова функція;

$$f(t, x) = \left\{ f_i(t, x), i = \overline{1, d} \right\}, q(t, x, y) = \left\{ q_i(t, x, y), i = \overline{1, d} \right\},$$

$\varphi(t, x, y) = \left\{ \varphi_i(t, x, y), i = \overline{1, d} \right\}$ — це не випадкові векторнозначні функції;

$g(t, x) = \left\{ g_{i,j}(t, x), i, j = \overline{1, d} \right\}$ — це не випадкові матричнозначні функції;

$t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}^d; w(t)$ — d -вимірний процес Вінера;

$v(dt, dy)$ — міра Пуассона, незалежна від $w(t)$,

$\tilde{\mu}(dt, dy)$ — міра Пуассона, незалежна від $w(t)$ і $v(dt, dy)$;

$Ev(dt, dy) = \Pi_1(dy)dt; \tilde{\mu}(dt, dy) = \mu(dt, dy) - \Pi_2(dy)dt$;

$\Pi_1(\cdot), \Pi_2(\cdot)$ — це скінченні міри на Борелевих множинах в $\mathbb{R}^d$;

ξ_0 — випадковий вектор, незалежний від $w(t)$ та $v(dt, \cdot)$

Припустимо, що коефіцієнти рівняння (1) задовольняють наступним умовам:

$$1) |f(t, x)|^2 + g(t, x)^2 + \int_{\mathbb{R}^d} |q(t, x, y)|^2 \Pi_1(dy) + \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(t, x, y)|^2 \Pi_2(dy) \leq C,$$

$$\text{де } |f|^2 = \sum_{i=1}^d f_i^2, g^2 = \sum_{i,j=1}^d g_{ij}^2, \int_{\mathbb{R}^d} |q(t, x, y)| \Pi_1(dy) \leq \infty.$$

2) Для будь-якого $N > 0$ існує $L_N > 0$ таке, що

$$\begin{aligned} & |f(t, x_1) - f(t, x_2)|^2 + g(t, x_1) - g(t, x_2)^2 + \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} |q(t, x_1, y) - q(t, x_2, y)|^2 \Pi_1(dy) + \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(t, x_1, y) - \varphi(t, x_2, y)|^2 \Pi_2(dy) \leq L_N |x_1 - x_2|^2, \end{aligned}$$

для всіх $x_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, 2$ таких, що $|x_i| \leq N, i = 1, 2$.

3) Функції $d(t, x), f(t, x), g(t, x), q(t, x, y), \varphi(t, x, y)$ є неперервними по x відносно $t \in [0, \infty), y \in \mathbb{R}^d$ та x з будь-якої множини $|x| \leq C$. Для кожних $x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$ існують наступні границі

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T^{T+A} d(t, x) dt = \bar{d}(x), \\ & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T^{T+A} f(t, x) dt = \bar{f}(x) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T^{T+A} q(t, x, y) dt = \bar{q}(x, y), \\ & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T^{T+A} g(t, x) g^*(t, x) dt = \bar{G}(x), \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T^{T+A} \varphi(t, x, y) \varphi^*(t, x, y) dt = \bar{\Phi}(x, y). \end{aligned}$$

Тут g^* є матрицею (вектором), транспонованим до g , тому для векторнозначної функції $\varphi(t, x, y)$ добуток $\varphi(t, x, y) \varphi^*(t, x, y)$, є $d \times d$ -вимірною функцією.

$$4) \quad \text{Функції } \bar{d}(x), \bar{f}(x), \bar{G}(x), \int_{\mathbb{R}^d} \bar{q}(x, y) \Pi_1(dy) \quad \text{є обмеженими,}$$

неперервними по x , функція $\bar{\Phi}(x, y)$ є обмеженою, неперервною по x рівномірно відносно $y \in \mathbb{R}^d$. Матриця $\bar{\sigma}^2(x)$ є рівномірно параболічною,

$$\bar{\sigma}^2(x) = \bar{G}(x) + \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\Phi}(x, y) \Pi_2(dy).$$

Теорема. Нехай виконуються умови 1)–4), $k = \min(k_1, 2k_2, k_3, 2k_4)$.

1. Якщо $k_1 = 2k_2 = k_3 = 2k_4$, тоді випадковий процес $\eta_\varepsilon(t)$ слабо збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$ до випадкового процесу

$$\bar{\eta}(t) = (1/t) \int_0^t \bar{d}(\bar{\xi}(s)) ds,$$

де процес $\bar{\xi}(s)$ є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$d\bar{\xi}(t) = \bar{f}(\bar{\xi}(t))dt + \int_{\mathbb{R}^d} \bar{q}(\bar{\xi}(t), y) \Pi(dy)dt + \bar{\sigma}(\bar{\xi}(s))d\bar{w}(t), \bar{\xi}(0) = \xi_0 \quad (2)$$

де $\bar{w}(t)$ — деякий d -вимірний Вінерів процес.

2. Якщо $k < k_1$, тоді в рівнянні (2) відсутній коефіцієнт $\bar{f}(x)$;

якщо $k < 2k_2$, тоді в рівнянні (2) відсутній коефіцієнт $\bar{G}(x)$;

якщо $k < 2k_4$, тоді в рівнянні (2) відсутній коефіцієнт $\int_{\mathbb{R}^d} \bar{\Phi}(x, y) \Pi_2(dy)$;

якщо $k < k_3$, тоді в рівнянні (2) відсутній коефіцієнт $\int_{\mathbb{R}^d} \bar{q}(x, y) \Pi_1(dy)$.

Висновок. Досліджено граничну поведінку інтегрального функціоналу від розв'язку стохастичного диференціального рівняння, залежного від малого параметра з доданками, що містять процес Вінера, центровану і нецентровану міри Пуассона. Сформульовано і доведено теорему про властивості стохастичного процесу $\eta_\varepsilon(t)$, що залежить від малого параметра. Одержано різні види граничного процесу відносно порядку малості параметра.

Список літератури

1. Deelstra G. and Delbaen F. Long-term return in stochastic interest rate models // Insurance: Mathematics and Economics. — 1995. — **17**. — P. 163—169.

РОЗПОДІЛ МАКСИМУМУ ПОЛЯ ЧЕНЦОВА ПО КРИВИМ І ЙОГО ЗВ'ЯЗОК З ІНТЕГРАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ ПАРКА — ПАРАНЬЯПА Н. В. Прохоренко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
natahak@ukr.net

Ми досліджуємо задачі знаходження ймовірності перетину вінерівського процесу з криволінійним зсувом нульового рівня і знаходження розподілу максимуму поля Ченцова по кривим, зв'язок між цими проблемами. Розв'язки таких теоретичних задач необхідні для вирішення певних проблем в метеорології, радіофізиці, статистиці, економіці і т. п.

Функціонали від вінерівського процесу досліджуються ще з 19 століття. Для багатьох з них було знайдено точні розподіли або побудовано певні інтегральні рівняння, розв'язками яких будуть необхідні розподіли. Наприклад, в 1974 р. Парк і Параньяп розглянули наступний функціонал:

$$F(T) = P\{\sup_{t \in [0, T]} (w(t) - f(t)) \geq b\}, \quad (1)$$

де $w(t)$ — вінерівський процес, а $f(t)$ — функція з певними властивостями. Ймовірність (1) являється , розв'язком інтегро-диференціального рівняння.

Багатовимірним аналогом вінерівського процесу являється поле Ченцова. Результат задачі (1) ми поширили для поля Ченцова.

Розглянемо двопараметричне поле Ченцова $X(s, t)$ і криву

$$L = \{(s, t) | t = v(s), s \in [0, 1]\},$$

де $v(s)$ — спадна функція. Введемо наступні позначення: $T = \frac{1}{v(1)}$ і

$$G(T) = P\{\sup_{(s, t) \in L} X(s, t) \geq x\} \quad (2)$$

Теорема 1. Нехай $X(s, t)$ — двопараметричне поле Ченцова і L — крива, задана вище. Позначимо

$$g(x, t) = \frac{x}{v\left(\left(\frac{t}{v(t)}\right)^{-1}\right)}.$$

Нехай функція $g(x, t)$ задовольняє наступні умови:

- 1) $g(x, t)$ неперервна по t на $[0, T]$;
- 2) $g(x, t)$ диференційовна по t на $(0, T)$;
- 3) для деякої константи c виконується: $|g(x, t)| \leq \frac{c}{t^p}$, ($p < \frac{1}{2}$).

Тоді $G(T)$ буде єдиним неперервним розв'язком інтегрального рівняння:

$$G(T) = \Psi\left(\frac{g(x, T)}{\sqrt{T}}\right) + \int_0^T \Phi\left(\frac{g(x, T) - g(x, t)}{\sqrt{T - x}}\right) dG(T),$$

де

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt, \Psi(x) = 1 - \Phi(x).$$

Зауваження. Якщо $v(s)$ — лінійна функція, то розв'язок задачі (2) можна записати в явному вигляді через гауссівську функцію розподілу.

Список літератури

1. Klesov O. I., Kruglova N. V. The distribution of a functional of the Wiener process and its application to the Brownian sheet // Statistics. — 2011. — Vol. 45, No. 1. — P. 1—8.
2. Kruglova N. V. Distribution of the maximum of the Chentsov random field // Theory of Stochastic Processes. — 2008. — No. 1. — P. 76—81.
3. Park C., Paranjape S. R. Probabilities of wiener paths crossing differentiable curves // Pacific Journal of Mathematics Prob. — 1974. — Vol. 53, No. 2. — P. 579—583.

ТЕХНОЛОГИЯ RASTA В РЕГРЕССИОННОМ АНАЛИЗЕ

С. Г. Радченко

НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина

lapach@ukr.net

Статистические модели широко применяются при моделировании сложных систем и процессов. В качестве исходной информации используются результаты проведенных экспериментов, данные, полученные методом статистических испытаний (метод Монте-Карло), экспертного оценивания, трудоемких вычислений. Получаемые модели должны соответствовать многим критериям качества. Предпосылки регрессионного анализа могут не выполняться, и тогда решается некорректно поставленная задача.

Для успешного получения регрессионных моделей необходимо использовать технологию RASTA. Она включает следующие методы.

1. Квазипланирование эксперимента: Эвристическое построение квазиортогональных планов возможно на основе использования многофакторных регулярных планов в следующих ситуациях.

1.1. Сильное ограничение на число проводимых экспериментов.

1.2. Отсутствие необходимых планов экспериментов для определенного числа уровней факторов. Используются алгоритмы RASTA1, RASTA2, RASTA8, RASTA13. Применение в качестве планов экспериментов ЛП_т равномерно распределенных последовательностей [1, с. 113—115, 117—118, 188—189, 101—111].

2. Формализованное получение структур статистических моделей неизвестных исследователю, использование элементов структуры полного факторного эксперимента. Общий вид структуры статистической модели предложен на основе эвристического анализа получения адекватной модели и свойств полного факторного эксперимента по теореме Бродского В.З. [1, с. 27]. Выбор структуры многофакторной модели неизвестной исследователю проводится по алгоритму RASTA3 [1, с. 91—93].

3. Расширенную концепцию ортогональности [2], которая включает.

3.1. Ортогональный план эксперимента.

3.2. Структуру многофакторной модели с ортогональными эффектами, главными и взаимодействиями.

3.3. Ортогональные элементы структуры модели в виде системы ортогональных контрастов.

4. Топологический метод устойчивого оценивания моделей в условиях исходной коррелированности факторов: алгоритмы RASTA4, RASTA5.1, RASTA4K, RASTA10 [3, с. 214—220, 222—224, 250—257, 302—313]. Метод позволяет путем топологического отображения устойчивого плана эксперимента прообраза в область образа создать в нем устойчивый план эксперимента и получить устойчивую статистическую модель.

5. Повышение воспроизводимости результатов эксперимента путем учета влияния неуправляемых и неконтролируемых факторов — поправка RASTA [1, с. 122—133]. Разработанное преобразование результатов экспериментов, полученных в разных сериях повторных опытов, позволяет уменьшить среднеквадратическую ошибку воспроизводимости и обоснованно определить значимость влияния управляемых факторов на моделируемые критерии качества.

6. Использование эвристических решений в получении статистических моделей. Эвристические методы используются в решениях неструктурированных и слабоструктурированных задач, в которых построение логической формальной схемы получения необходимого результата для исследователя затруднено или невозможно по причине сложности и новизны предметной области, в которой решается задача.

Для успешного построения моделей необходим системный подход в использовании разработанных методов.

В основе технологии RASTA лежит идея обеспечения наилучших из возможных начальных условий получения статистических моделей, которые позволяют построить адекватные и устойчивые модели, избежать или уменьшить неопределенность в принимаемых решениях и получить модели наиболее близкие к «истинным».

Создание наилучших начальных условий рассматривается в теории планирования эксперимента и прикладной статистике. Используются формализованные и эвристические решения. Такой подход является фундаментальным и позволяет избежать возникновения некорректно поставленных задач.

С использованием технологии RASTA было решено более ста задач по моделированию реальных сложных систем и процессов и получены хорошие результаты [1, с. 209—290].

С разработанными методами моделирования и полученными результатами можно ознакомиться в [4, 5].

Список литературы

1. Радченко С. Г. Методология регрессионного анализа: монография / С. Г. Радченко. — К.: «Корнійчук», 2011. — 376 с.
2. Радченко С.Г. Системное оптимальное планирование регрессионного эксперимента / С. Г. Радченко // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2012. — Т. 78, № 7. — С. 71—75.
3. Радченко С. Г. Устойчивые методы оценивания статистических моделей: монография / Радченко С. Г. — К. : ПП «Санспарель», 2005. — 504 с.
4. Лаборатория экспериментально-статистических методов исследований (ЛЭСМИ). — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.n-t.org/sp/lesmi>
5. Сайт кафедры «Технология машиностроения» Механико-машиностроительного института Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт». — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://tm-mm.kpi.ua/index.php/ru/1/publications/>

**ПРО μ -ПРИПУСТИМІСТЬ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ
СИЛЬНО ЗАЛЕЖНОГО ВИПАДКОВОГО ШУМУ
НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЯХ РЕГРЕСІЇ**

І. М. Савич

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

sim_ka@i.ua

Нехай спостерігається випадковий процес

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), t \in [0, T],$$

де $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}^1$, — дійсний неперервний в середньому квадратичному вимірний стаціонарний гауссівський процес з нульовим середнім. Дійсна функція $g(t, \theta), (t, \theta) \in \mathbb{R}_+^1 \times \Theta^c$ (Θ^c — замикання в $\mathbb{R}^q$ відкритої множини $\Theta \subset \mathbb{R}^q$, що містить істинне значення параметра θ^0) неперервно диференційовна за $\theta \in \Theta$ при кожному фіксованому $t \in \mathbb{R}_+^1$ та вимірна за $t \in \mathbb{R}_+^1$ при кожному фіксованому $\theta \in \Theta$.

Вважатимемо, що похідні $g_k(t, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_k} g(t, \theta), k = \overline{1, q}$ локально інтегровні з квадратом за t при кожному фіксованому $\theta \in \Theta$.

Позначимо

$$d_{kT}^2(\theta) = \int_0^T g_k^2(t, \theta) dt, d_T^2(\theta) = \text{diag}(d_{kT}^2(\theta), k = \overline{1, q}), \nabla g(t, \theta) = (g_k(t, \theta))_{k=1}^q$$

Нехай $\theta \in \Theta$ — фіксоване значення параметра, S^1 — σ -алгебра вимірних за Лебегом підмножин $\mathbb{R}^1$. Розглянемо на $(\mathbb{R}^1, S^1)$ сім'ю комплексних матричних мір $\mu_T(d\lambda, \theta) = \mu_T(\lambda, \theta) d\lambda$ з матричними щільностями відносно міри Лебега

$$\mu_T(\lambda, \theta) = (\mu_T^{kl}(\lambda, \theta))_{k,l=1}^q,$$

$$\mu_T^{kl}(\lambda, \theta) = g_T^k(\lambda, \theta) \overline{g_T^l(\lambda, \theta)} \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g_T^k(\lambda, \theta)|^2 d\lambda \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |g_T^l(\lambda, \theta)|^2 d\lambda \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$g_T^k(\lambda, \theta) = \int_0^T e^{i\lambda t} g_k(t, \theta) dt.$$

I. Сім'я мір $\mu_T(d\lambda, \theta)$ слабо збігається при $T \rightarrow \infty$ до додатно означеної матричної міри $\mu(d\lambda, \theta)$.

Означення 1 [1—5]. Міра $\mu(d\lambda, \theta)$ називається спектральною мірою функції регресії $g(t, \theta)$. Припускається, що міра $\mu(d\lambda, \theta)$ не вироджена, тобто не вироджена матриця $\mu(\mathbb{R}^1, \theta)$.

За умов $\lim_{T \rightarrow \infty} d_{kT}^2(\theta) = \infty$, $\sup_{0 \leq t \leq T} |g_k(t, \theta)| = o(d_{kT}^2(\theta))$, $T \rightarrow \infty$, $k = \overline{1, q}$ компоненти $\mu^{kl}(d\lambda, \theta)$ визначаються із співвідношень

$$R^{kl}(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} d_{kT}^{-1}(\theta) d_{lT}^{-1}(\theta) \times \int_0^T g_k(t+s, \theta) g_l(t, \theta) dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} \mu^{kl}(d\lambda, \theta), \quad k, l = \overline{1, q}$$

за додаткового припущення неперервності матриці $R(s) = (R^{kl}(s))_{k,l=1}^q$ в нулі [2].

Нехай коваріаційна функція (к. ф.) $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)$ інтегрована на $\mathbb{R}^1$ (випадок слабкої залежності $\varepsilon(t)$). Тоді процес $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}^1$ має обмежену та неперервну спектральну щільність (с. щ.) $f(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}^1$ та

$$K(T) = d_T^{-1}(\theta) \times \left(\int_0^T \int_0^T B(t-s) \nabla g(t, \theta) \nabla g^*(s, \theta) dt ds \right) \cdot d_T^{-1}(\theta) =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \mu_T(\lambda, \theta) d\lambda \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \mu(d\lambda, \theta) = K, \quad (1)$$

якщо вірне I.

Якщо f обмежена с. щ. та міра μ точок її розриву дорівнює нулю, збіжність (1) також має місце (див. [6]).

З іншого боку, якщо к. ф. $B(t)$ не інтегрована (випадок сильної залежності $\varepsilon(t)$), а с. щ. існує, то вона втрачає властивість обмеженості, тому граничний перехід у (1) треба обґрунтовувати.

Означення 2 [2]. С. щ. f називається μ — припустимою, якщо вона інтегровна за мірою μ , тобто всі елементи матриці

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \mu(d\lambda, \theta)$$

набувають скінченних значень, та

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \mu_T(d\lambda, \theta) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \mu(d\lambda, \theta).$$

Множина індексів J в умовах II—IV, взагалі кажучи, може бути однією з трьох множин $-m, m, -m, m \setminus \{0\}, \{0\}$. Дано формулювання для $J = -m, m$.

II. С. щ. $f \in C(R^1 \setminus \{\lambda_j, j \in J\}), \lambda_{-j} = -\lambda_j, j = \overline{1, m},$

$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m < +\infty$ задовольняє вимозі

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_j} f(\lambda) |\lambda - \lambda_j|^{1-\alpha_j} = a_j > 0, \quad (2)$$

$\alpha_j \in (0, 1), j \in J; \alpha_j = \alpha_{-j}, a_j = a_{-j}, j = \overline{1, m}.$

Із (2) випливає, що для будь-яких $\varepsilon > 0$ та $j \in J$ існує $\delta_j = \delta_j(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$f(\lambda) < \frac{a_j + \varepsilon}{|\lambda - \lambda_j|^{1-\alpha_j}} \text{ при } |\lambda - \lambda_j| < \delta_j.$$

Тоді якщо $|\lambda - \lambda_j| < \delta_j$, то

$$\{\lambda : f(\lambda) > c\} \subset \left\{ \lambda : |\lambda - \lambda_j| < \left(\frac{a_j + \varepsilon}{c} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_j}} \right\} = V_j(c), \quad (3)$$

причому c повинно задовольняти нерівність

$$\left(\frac{a_j + \varepsilon}{c} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_j}} \leq \delta_j, \text{ або } c \geq \frac{a_j + \varepsilon}{\delta_j^{1-\alpha_j}(\varepsilon)} = c_j(\varepsilon).$$

III. Нехай $\varepsilon_0 > 0$ фіксовано. Існує таке $c_0 \geq \max_{j \in J} c_j(\varepsilon_0)$ що для $c \geq c_0$

$$\{\lambda : f(\lambda) > c\} \subset \bigcup_{j \in J} V_j(c) \quad (4)$$

Із (3) бачимо, що для достатньо великих c (нехай вже для $c \geq c_0$) околи $V_j(c), j \in J$ у (4) не перетинаються та $|V_j(c)| \downarrow 0$ при $c \rightarrow \infty, j \in J$.

IV. Для достатньо великих $T (T > T_0)$

$$d_{kT}^{-1}(\theta) \max_{\lambda \in V_j(c_0)} |g_T^k(\lambda, \theta)| \leq h_{jk} < +\infty, \quad j \in J, k = \overline{1, q}. \quad (5)$$

Зауважимо, що виконання (5) можна вимагати для $j = \overline{0, q}$, тому що

$$V_{-j}(c_0) = -V_j(c_0), j = \overline{1, q} \text{ завдяки парності с. щ. } f.$$

Теорема. Якщо виконано умови I—IV та f інтегровна за мірою μ , то $f \in \mu$ — припустимою функцією, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \mu_T(d\lambda, \theta) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \mu(d\lambda, \theta).$$

Список літератури

1. Grenander U., Rozenblatt M. Statistical analysis of stationary time series. — N. Y.: John Wiley and Sons, 1957. — P. 300.
2. Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А. Гауссовские случайные процессы. — М.: Наука, 1970. — 383 с.
3. Ivanov A. V., Leonenko N. N. Statistical Analysis of Random Fields. — Dordrecht — Boston — London: Kluwer Acad.Publ., 1989. — P. 244.
4. Холево А. С. Об оценках коэффициентов регрессии // Теория вероятн. и ее примен. — 1969. — Т. 14. — С. 78—101.
5. Холево А. С. Об асимптотической нормальности оценок коэффициентов регрессии. Теория вероятн. и ее примен. — 1971. — Т. 16. — С. 724—728.
6. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977. — 352 с.

ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ НЕАВТОНОМНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

О. А. Тимошенко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

У роботах [1—3] досліджувався *точний порядок зростання* розв'язку стохастичного диференціального рівняння (СДР) з коефіцієнтом зсуву та дифузії, які залежать від часу

$$d\eta(t) = g(\eta(t))\phi(t)dt + \sigma(\eta(t))\theta(t)dw(t), \quad t \geq 0; \quad (1)$$

$$\eta(0) \equiv b, \quad b > 0.$$

Було знайдено умови на функції g , ϕ , σ , θ , при яких точний порядок зростання розв'язку η майже напевно (м. н.) збігається з розв'язком μ відповідного звичайного диференціального рівняння (ЗДР)

$$d\mu(t) = g(\mu(t))\phi(t)dt, \quad t \geq 0; \quad (2)$$

$$\mu(0) \equiv b, \quad b > 0.$$

При знаходженні відповідних умов, одним з основних припущень робіт [1—3] було те, що розв'язок СДР η із збільшенням часу м. н. необмежено зростає та прямує до нескінченності. Тому доцільно дослідити умови, за яких

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty \text{ м. н.}$$

Й. І. Гіхманом та А. В. Скороходом [4] були отримані основні результати, що стосуються питання необмеженості розв'язку для *автономного* СДР.

Розглянуто поведінку розв'язку рівняння (1), коли $t \rightarrow \infty$.

Список літератури

1. Булдігін В. В., Тимошенко О. А. Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2008. — № 6. — С. 27—132.
2. Тимошенко О. А. Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі знакозмінним коефіцієнтом зсуву // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2009. — № 5. — С. 145—151.
3. Buldygin V. V., Tymoshenko O. A. On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients // Theory of stochastic processes. — 2010. — No. 2. — P. 12—22.
4. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. — К: Наук. думка, 1968. — 353 с.

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДІВ ФОРМУВАННЯ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЮ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

О. С. Тупко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

olha.tupko@gmail.com

У світовій практиці портфельне інвестування передбачає диверсифікацію-розподіл інвестиційного потенціалу між різними групами активів. Використання диверсифікації зумовлено тим, що не існує інвестиційного паперу з високим доходом і високою надійністю одночасно. Тому в залежності від вимог інвестора, формується інвестиційного портфель, що має оптимальне відношення між ризиком і доходністю.

У статті на основі даних українських компаній були побудовані математичні моделі формування інвестиційного портфелю: моделі Марковіца та квазі-Шарпа. Відповідно проведено їх порівняльний аналіз і визначено особливості роботи.

Розглянемо формування портфелю цінних паперів на основі принципу «дохідність — ризик». Даний підхід був запропонований Г. Марковіцем.

У методі Марковіца дохідність акції приймається за випадкову величину X , яка розподілена за нормальним законом. Відповідно, знаючи параметри розподілу, можна передбачити дохід акції у майбутньому. За оптимальні оцінки параметрів вважаємо:

$$(E X)^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

— оцінка математичного сподівання X ;

$$(DX)^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - (E X)^*)^2$$

— оцінка дисперсії X , де $X_i, i = \overline{1, n}$ — це значення доходності певної акції за певний проміжок часу.

В основу методу покладено (лінійну) залежність між доходністю різних цінних паперів: дохідність одних зростає, одночасно зростає дохідність других, третіх залишається незмінною, а четвертих — спадає. Така залежність описується кореляцією між кожними двома випадковими величинами. За її оцінку приймаємо

$$(\sigma_{XY})^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - (E X)^*) * (Y_i - (E Y)^*)},$$

де X, Y — випадкові величини ВВ, що визначають дохідність двох певних акцій.

За Марковіцем доходність цінних паперів дорівнює

$$\sum_{i=1}^n W^i * EX^i, i = \overline{1, n},$$

де W^i — частка цінних паперів у портфелі, X^i — дохідність i -ї акції. У свою чергу ризик визначається, як середнє квадратичне відхилення доходності портфелю, тобто

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W^i * W^j * \sigma_{XY}}$$

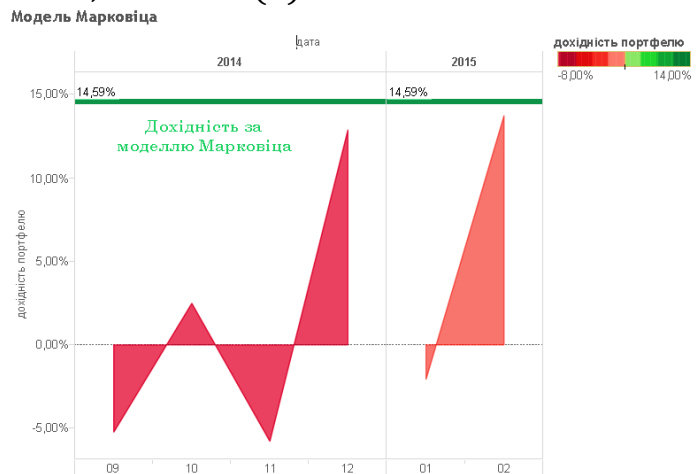
У методі передбачається, що інвестор або намагається максимізувати дохідність паперів за рівня ризику не більше заданого значення (пряма задача), або мінімізувати ризики за рівня доходності не менше заданого значення (зворотна задача). Задача оптимізації у першому випадку виглядає таким чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n W^i * (EX^i)^* \rightarrow \max \quad (1) \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W^i * W^j * (\sigma_{X^i X^j})^*} \leq risk \quad (2) \\ \sum_{j=1}^n W^i = 1 \quad (3) \\ W^i \geq 0, \forall i = \overline{1, n} \quad (4) \end{array} \right.$$

Для апробування методу Марковіца були використані дані прибутковості акцій компаній «Центренерго», «Мотор Січ», «Єнакієвський металургійний завод» за період з 03.14 по 08.14 (помісячно). У результаті був сформований портфель цінних паперів, що виглядає таким чином: акції «Центренерго» складають 29,520%, «Мотор Січ» — 70,479%, «Єнакієвський

металургійний завод» — 1.532e-14 %, при цьому дохід портфелю 14.596% за ризиком 20%. За отриманими даними були порівняні дохідність, визначена за моделлю Марковіца, і реальні дані доходностей за період з 09.14 по 02.15.

Результати порівняння пояснюються тим, що за оцінку математичного сподівання доходності акції (1) приймається середнє арифметичне минулих



дохідностей. За цих умов не враховуються коливання ринку. Тому Лише у випадку стабільного фінансового ринку модель Марковіца матиме сенс.

Оскільки не доцільно використовувати модель Марковіца в умовах волатильного фондового ринку, розглянемо більш ефективну за цих умов модель квазі-Шарпа.

В основу методу покладена залежність між дохідністю окремої акції з поміж набору N цінних паперів і дохідністю одиничного портфелю, що складається з цих цінних паперів у рівній частці. Модель передбачає, що дана залежність описується функцією лінійної регресії.

Ризики моделі включають в себе β -ризик (характеризує ступінь залежності окремої акції і дохідністю одиничного портфелю) і залишковий ризик (ризик того, що акція не належатиме побудованій функції регресії).

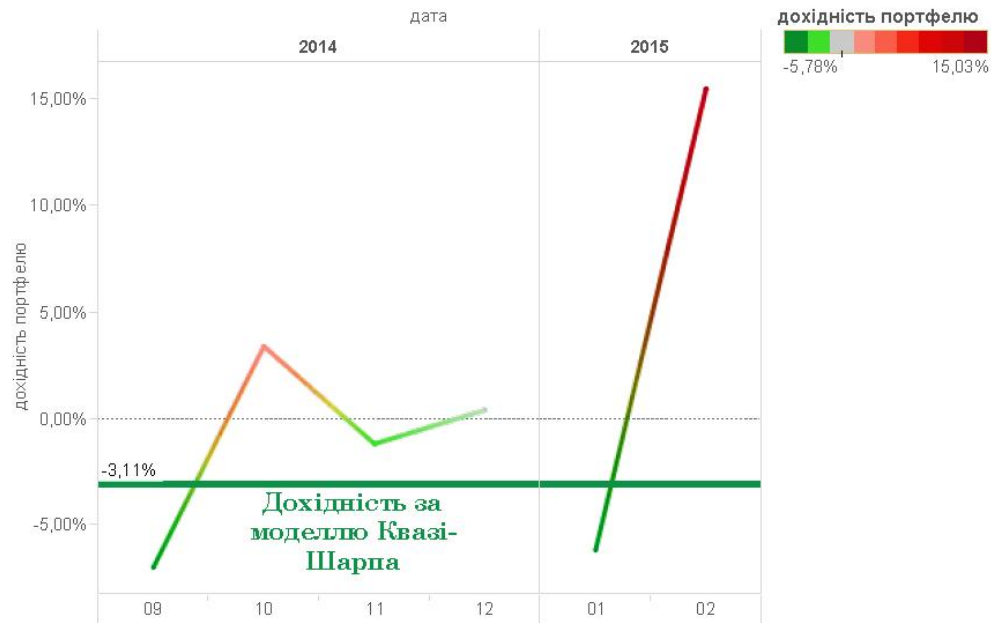
Отже, задача оптимізації у моделі квазі-Шарпа має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n (\bar{R}^i * W^i) + (R^{sp} - \bar{R}^{sp}) * \sum_{i=1}^n (\beta^i * W^i) \rightarrow \max \quad (5) \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n (\beta^i * W^i)^2 * \sigma^{sp2} + \sum_{i=1}^n (\sigma^{ri} * W^i)^2} \leq risk \quad (6) \\ \sum_{j=1}^n W^j = 1 \quad (7) \\ W^i \geq 0, \forall i = \overline{1, n} \quad (8) \end{array} \right.$$

де (5) — дохідність одиничного портфелю; W^i — частка i -ї акції у портфелі; β^i — β ризик i -ї акції; R^{sp} -дохідність одиничного портфелю; $\bar{R}^{sp}$ — середня дохідність одиничного портфелю; (6) — ризик портфелю цінних паперів; σ^{sp} — показник ризику одиничного портфелю; σ^{ri} — ризик i -ої акції; (7) і (8) — природні обмеження на частку від одиниці.

У результаті застосування моделі квазі-Шарпа для даних, що були використані в моделі Марковіца, був сформований портфель цінних паперів, що виглядає таким чином: акції «Центренерго» складають 100%, «Мотор Січ» — 0%, «Єнакієвський металургійний завод» — 0%. При цьому дохід портфелю складає 0.031% за ризику 0,077%. За отриманими даними були порівняні дохідність, визначена за моделлю квазі-Шарпа, і реальні дані дохідностей за період з 09.14 по 02.15.

Модель Квазі-Шарпа



Після апробування моделей на фондовому ринку України було підтверджено, що модель квазі-Шарпа, на відміну від моделі Марковіца, дозволяє враховувати волатильність ринку, що є важливим для економік, що розвиваються. Тому результат прогнозування моделі квазі-Шарпа виявився більш правдоподібним.

Але треба також зазначити, що модель враховує коливання лише окремого сегменту ринку і не дає можливість враховувати глобальні тенденції.

Список літератури

1. Шарп У., Александр Г., Бэйли Дж. Инвестиции: Пер. с англ. — М.: ИНФРА-М, 1999, 1028 с.
2. <http://www.ux.ua>
3. <http://exsolver.narod.ru/Books/Fininvest/Invest/c60.html>

ПРО ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЧНИХ КОВАРІАЦІЙ М-ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ РЕГРЕСІЇ

Р. В. Фіжук

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

r.fizhuk@live.com

Граничні коваріації М-оцінок параметрів регресії з неперервним та дискретним часом та випадковим шумом, який є локальним перетворенням гаусівського стаціонарного процесу, записуються у вигляді деяких рядів. Для розв'язання практичних задач доцільно замість рядів використовувати скінченні суми. В нашій доповіді ми розв'язуємо задачу оцінювання хвостів згаданих рядів для найбільш поширених функцій втрат, за якими визначаються М-оцінки. У якості допоміжного обчислювального пакету використовується бібліотека SciPy 0.15.1 для мови програмування Python.

Ми оцінюємо хвости рядів

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = E\psi^2(G(\xi(0))) - \sum_{j=m}^n \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!}$$

де ψ — похідна функцій втрат; $G(\xi(t))$, $t \in \mathbb{R}$, — випадковий шум; $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — гаусівський стаціонарний процес, причому $\xi(0) \sim N(0,1)$;

$$C_j(\psi \circ G) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(G(x)) H_j(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx, \quad j \geq m,$$

— коефіцієнти Фур'є функції $\psi \circ G$ за поліномами Ерміта

$$H_j(x) = (-1)^j e^{x^2/2} \frac{d^j}{dx^j} (e^{-x^2/2}), \quad j \geq m,$$

де $m \geq 1$ — Ермітів ранг функції $\psi \circ G$.

Наведено деякі числові розрахунки.

ФУНКЦІОНАЛ ВІД ОДНОРІДНОГО ЗАГАЛЬНОГО МАРКІВСЬКОГО ЛАНЦЮГА ТА МЕЖА НЕЕРГОДИЧНОСТІ

Ю. П. Філонов, О. М. Шутовський

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна
gpf@voliacable.com

В цій роботі пропонується часткове узагальнення результату роботи [1]. Узагальнення в бік довільного фазового простору для дійсних стрибків функціоналу (C^n не розглядається). Ще додається результат для однієї економіко-математичної моделі. Великий об'єм результатів відносно ергодичних властивостей марківських ланцюгів (м. л.) граничної поведінки функціоналів та застосувань є в книзі [2].

Форма наших результатів та метод їх отримання є подібними до запропонованих при вивченні зворотності у роботі [3].

Перейдемо до конкретного викладу.

1. Запишемо загальні вимоги до нашого м. л. $(X_n), n = 0, 1, \dots$ та функціоналу $K = K(x)$ ($x \in E, E$ — фазовий простір м. л.): $K \in [1, \infty)$ (число 1 не суттєве) множини $(K < C) = \{x | K(x) < C\}$ є скінченними сумами мінорантних множин для великих чисел C ; σ -алгебра в E сепарабельна, $P = P(x, dy)$ — перехідна ймовірність для м. л., ланцюг незвідний, K суттєво не обмежений на E .

2. Позначимо $v = K(X_{n+1}) - K(X_n) = K(y) - K(x)$ — стрибок функціонала K , $\alpha_{1,2}$ — моменти стрибка:

$$\alpha_1(x) = Pv = \int [K(y) - K(x)]P(xdy); \alpha_2(x) = P(v^2).$$

Нехай для деякого числа (та спадної функції $\psi(K) \geq 0$ ($1 \leq K < \infty$)) виконується умова:

$$(2.1) -\psi < 2K\alpha_1 + \alpha_2 < C, \alpha_2 < C \quad (x \in E);$$

$$(2.2) P(v < -1/c) > 1/c \quad (K(x) > C);$$

$$(2.3) \int_1^\infty \psi(K)dK < \infty.$$

3. **Теорема.** Марківський ланцюг, описаний в п. 1—2 є непозитивним; функціонал $K_n = K(X_n) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ за ймовірністю; відносна частота подій $(X_i < C)$ ($i < n$) майже напевно прямує до нуля ($n \rightarrow \infty, C = \text{const}$).

4. **Зауваження.** Візьмемо простий м. л. з функціоналом: $E = [1, \infty)$, $K = X, |v| < C$, при $X > C$ стрибки v однаково розподілені. Це є класичне

випадкове блукання на $[1, \infty)$ збурене в околі одиниці (припускаємо незвідність). Як відомо, при $\alpha_1 < 0$ буде ергодичність (позитивність), при $\alpha_1 \geq 0$ буде неергодичність (непозитивність) ($X > C$).

«Межа ергодичності»: $\alpha_1 = 0$. Тоді м. л. відповідає п. 1—3. Теорема (п. 3) дає умови непозитивності неоднорідних просторово м. л., навіть відхилених «у бік позитивності» (можливо $\alpha_1(x) < 0$ при усіх $X > C$).

5. Застосування. Розглянемо стохастичну модель роботи підприємства в стабільних умовах. Стан X підприємства це достатній набір характеристик для марковості в сенсі п. 1, X_n — стан в момент n , K_n — кількість грошей на рахунку в цей час ($K = K(x)$, $K_n = K(X_n)$, проценти не розглядаються — йдуть акціонерам). Також є страховий договір: V — стабільний страховий внесок за «одиничний» період часу, ($K_n < K_{кр}$) — страховий випадок ($K_{кр}$ — критична сума на рахунку підприємства), S — страхова виплата (дозволяє подальшу роботу). Ще позначимо не випадкові величини: $r(x)$ — витрати без урахування страхового внеску V та можливої суми преміальних $P(x)$ за «період» (одиницю часу).

Також позначимо: $r_n = r(X_n)$, $P_n = P(X_n)$, θ_n — дохід за наступний період — випадкова величина з обмеженою дисперсією $\sigma^2 = \sigma^2(x) < C$ та можливістю відхилення від середнього:

$$P^x(\theta_n - M\theta_n < -\frac{1}{c}) > \frac{1}{c} (K > K_{кр}).$$

Маємо динаміку рахунку: $K_{n+1} = K_n + \theta_n - V - r_n - P_n$ (мабуть $P(x) = 0$ і страхова виплата S входить в θ_n якщо $K(X) < K_{кр}$). В моделі п.5 розглянемо очікуваний межевий випадок рентабельності

$$M\theta_n = r(X) + V (X_n = X, K(X) > K_{кр}),$$

та ще й додатково, але обмежено, будемо виплачувати преміальні:

$$(5.1) \quad P(X) \leq \frac{\sigma^2}{2K} \left(1 + \frac{C}{K^{1,01}} \right).$$

Тим не менш, справедливе наступне:

6. Твердження. Для моделі п. 5 з часом прямуватимуть до нескінченності і грошовий капітал K_n підприємства і прибуток від договору з ним страхової фірми (за ймовірністю), страхові випадки відбуватимуться невідворотно, але їх відносна частота напевно прямуватиме до нуля, (зрозуміло, що достовірно ймовірності результати для необмеженого проміжку часу на практиці не перевіряються).

Твердження випливає з п. 1—3, якщо в теоремі п. 3 покласти $\psi = \frac{C}{K^{1,01}}$, $\alpha_1 = -P(X)$ та зважити на (5.1) (та інші припущення, сталі можна змінити).

Список літератури

1. Філонов Ю. П., Шутовський О. М. Інтегральна умова неперитивності ланцюга Маркова в $C^n(R^n)$ // П'ятнадцята Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15—17 травня 2014 р.): Матеріали конференції. — К.: НТУУ «КПІ», 2014. — Т. 3. Теорія ймовірностей і математична статистика. — С. 134—135.
2. Meyn S. and Tweedie R. L. Markov chains and stochastic stability. — New York: Springer-Verlag, 1993.
3. Ісакова Т. І., Філонов Ю. П. Інтегральні умови зворотності марківських ланцюгів із загальною мірою незвідності // Український математичний журнал. — 2004. — Т. 56, № 5. — С. 705—712.

IV

ІСТОРІЯ ТА МЕТОДИКА МАТЕМАТИКИ

STATIC MAGNETIC FIELD AND FINE STRUCTURE CONSTANT IN ELECTRODYNAMICS

A. P. Zhivkov, M. L. Flaks

NTUU «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine

zhivkovalex@gmail.com, misha.flaks@gmail.com

Great Faraday got the title „king of physicists“ not without a reason. Listing of his findings, which can make a name for any scientist, would last much more than one page. Arguably the main discovery, which founded modern civilization, is the law of electromagnetic induction. Electric engines, turbines, Maxwell equations and electrodynamics founded by them — listing of those would take pages again. In our turn we would like to bring to notice an essential participant of these inventions — magnetic field. The latter was again of service to the king of physicists: examining a lens constructed for astronomical purposes he placed it between two poles of electromagnet. Further investigations have shown that polarized beam of light declines under the action of magnetic field [1]. Cited memoir was written in 1892. Modern quantum physics attribute it to Zeeman's effect, in which static magnetic field ‘splits’ spectral lines of Cadmium vapors. Trying to understand ‘splitted spectrums’ exactly 100 years ago in 1915 Arnold Sommerfeld modernized Bohr's atom model by considering elliptical orbits and some mysterious quantity called fine structure constant, which together with static magnetic field, that is also present in Faraday's and Zeeman's experiments, will be the second ‘character’ of our report. In his fabulous work which was republished many times [2], Sommerfeld noted that fine structure constant can be not only physical constant, but also a number, inversely proportional to the prime number 137 ($\alpha = 1/137$). Properties of 137 were described by one of this publication authors in his works [3, 4].

Mentor of many prominent physics and Noble laureate Max Born made a report 80 years ago at the congress in India about the mysterious number 137 [5]. Having no chance to describe all the merits and deepness of that report in this article, we will note only that Born noticed the following:

«Crystals are nothing but the very big molecules. If the number of atoms is given, the dimensions and energies of a crystal formed by them at low temperatures are determined by the order of magnitude of α_1 and E_1 , radius and energy of the first Bohr's orbit correspondently.»

The third character of the report emerges — low temperature.

By that time Hall effect had been well investigated and found numerous application.

The effect, discovered in 1879 by Edwin Herbert Hall, which lay in the occurrence of difference of potential perpendicular to current direction in conductor placed in static magnetic field, served as a method for determining electroconductive properties of materials in laboratories throughout the world during almost a century.

This finding was important primarily because of the fact, that the effect is based solely on the interaction between charged particles — electrons — and magnetic field, thus enabling the determination of electric charges density in the direct way.

Spine Hall effect was predicted in 1971. Tightly connected with fine structure constant spin-orbital interaction figures in its description. And finally, in 1985 when strong electromagnetic field and low temperature affects the Hall effect, it became quantized, which resulted in quantum of resistance R_k , having of course connection with fine structure constant:

$$R_k = Z_0/2\alpha \quad (1)$$

where Z_0 is the wave resistance of space.

Oppositely to linear dependency of Edwin hall, quantized effect is characterized by solely fundamental physical constants and integer numbers or even rational fractions as in the case with the fractional Hall effect.

This invariance from conductor geometry is explained by the deep connections between the effect and quanta-mechanical principles, which are in their turn based on mathematical models.

One of the discoverer of the fractional Hall effect Robert Laughlin suggested using such wave functions that their topological properties fit observed cases to explain the whole phenomena. In other words, the mathematical abstraction was proposed, which described the properties of matter with incredible precision — that was the ansatz proved by further experiments.

Discoverers developed theories that give an explanation to integer and fractional Hall effect, but it appeared that the equation for quantum of resistance (1) could be formally derived from the expressions introduced in the above-cited Born's work [5] for atomic units, in which electric charge of the electron (e_e) equals 1, and 'magnetic charge' — e_m for Bohr's magnetron $1/2\alpha$. Let's make a formal try to 'turn' wave resistance of space Z_0 into some magnetic wave resistance Z_m dividing it by some electric charge of electron and multiplying by 'magnetic' one:

$$Z_m = \frac{Z_0}{e_e} e_m = \frac{Z_0}{1} \frac{1}{2\alpha} = \frac{Z_0}{2\alpha} \quad (2)$$

Derived equation for the semi-mythical magnetic wave resistance of space exactly fits the equation (1) for the quantum of resistance. Understandably it looks more like a mathematical trick, but consider the following:

1. Dimensions of charges in atomic units are in the agreement eventually, and in the quantum Hall effect strong magnetic field plays important role, thus allowing us to assume that it interacts with a magnetic charge of the electron (Bohr's magnetron) approximately in the same way as the electric field interacts with the electric charge.

2. Clear physics in our mathematical trick is not obvious, thought there is a mentioning that 'the topological theory of the quantum Hall effect was developed and published in 1972 before the physical one merely by complexifying the Von

Neumann—Wigner theorem’ in an article of one of the most famous mathematicians of the end of the 20th century — beginning of the 21th Vladimir Arnold [6].

Considering the polemicality of the discussed materials authors decided to place the article in section IV of the conference “History and methodology of mathematics teaching”. Regretfully, attention is dominantly paid to the physical aspects of the problem (except for mathematical tricks and cited piece of Arnold’s work) due to the succinctness of a report. But such physicists as Sommerfeld (allegedly a great specialist of the integrating over the field of complex numbers), Max Born — founder of the statistical quantum physics and Vladimir Arnold — great mathematician, who called himself a physicist, all them of course made a lot more that will be spoken of during the speech itself. By the way, the mysterious number 137 is also a Gaussian biquadratic remainder (137 is a form of number $11 + i4$) — it can be found in the last work of the great mathematician [7].

References

1. Bolton H. C. Michael Faraday; his life and work // Journal of the American Chemical Society. — 1899. — **21** (3). — P. 305—306.
2. Sommerfeld A. Atombau und Spektrallinien. — Dritte umgearbeitete Auflage. — Braunschweig: F. Vieweg & Sohn Akt.-Ges., 1922.
3. Zhivkov A., Machusky E. and Frolov A. On some numerical properties of the fine structure constant // Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 2015 : Матеріали Третьої міжнародної науково-практичної конференції, Київ, 2014. — К.: НТУУ «КПІ», 2015. — С. 5—7.
4. The mysterious number 137 of QED and modern day means of information security.
5. Born M. «The Mysterious Number 137» in Proceedings of the Indian Academy of Sciences. Section A, Bangalore, 1935.
6. Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. — М.: Издательство МЦНМО, 2014.
7. Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел / Перевод Б. Б. Демьянова, общая редакция И. М. Виноградова, комментарии Б. Н. Делоне. — М.: Изд-во АН СССР, 1959.

**ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА
В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ.
СХОДИМОСТЬ ПО НОРМЕ**

Л. Г. Авраменко

*НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина
yuragoso@mail.ru*

Об использовании методов и языка функционального анализа в курсе высшей математики автор неоднократно докладывал на данной и других конференциях. И если в разделе «математический анализ функций одной действительной переменной» преимущества современного математического языка не столь очевидны, то в разделе «функции многих переменных» использование идей функционального анализа позволяет не только сделать изложение более понятным, но и избежать ошибок, продиктованных интуицией, воспитанной на одномерном случае.

Пример 1. На числовой оси $\mathbb{R}$ длина большего отрезка всегда больше длины меньшего. На числовой плоскости $\mathbb{R}^2$ введем норму вектора

$$\| (x; y) \| = \sqrt{x^2 + 100y^2}.$$

В указанной норме

$$\| (1; 0) \| = \sqrt{1^2 + 100 \cdot 0^2} = 1.$$

Часто при решении задач производится замена переменных. Рассмотрим поворот системы координат на сорок пять градусов:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'),$$

где x', y' — новые координаты; x, y — исходные координаты. Поворот системы координат не изменяет расстояний, т. е. является изометрией. Точка $(1; 0)$ в исходной системе координат имеет координаты $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ в

повернутой системе координат. В новой системе координат расстояние вычисляется по формуле

$$\| (x'; y') \|_0 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \right)^2 + 100 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \right)^2}$$

(здесь $\| \cdot \|_0$ обозначает ту же норму, но выраженную через новые координаты). Как и следовало ожидать, после подстановки убеждаемся, что

$$\left\| \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\|_0 = 1.$$

Вектор

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) + \left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

является суммой двух взаимно перпендикулярных векторов. Интуиция подсказывает, что катет всегда меньше гипотенузы. Вычислим

$$\left\| \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \right\|_0 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)\right)^2 + 100\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\right)\right)^2} = \sqrt{25, 25} > 5.$$

Катет больше гипотенузы более чем в пять раз! Таким образом, уменьшение по абсолютной величине одной из координат не всегда приводит к уменьшению длины вектора. А ведь этот факт в каждом учебнике используется при доказательстве равносильности сходимости по норме и покоординатной сходимости для конечномерных пространств. Действительно, рассмотрим доказательство этого утверждения в $\mathbb{R}^2$ для введенной выше нормы $\| \cdot \|$.

Сходимость $(x_n; y_n) \rightarrow (a; b)$ при $n \rightarrow \infty$ по норме означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| (x_n; y_n) - (a; b) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n - a)^2 + 100(y_n - b)^2} = 0.$$

Справедлива оценка

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + 100(y_n - b)^2} \geq \sqrt{(x_n - a)^2 + 0} = |x_n - a|.$$

Отсюда, переходя к пределу в неравенстве, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - a| = 0.$$

Доказательство верное, но возникает вопрос. Когда уменьшение абсолютной величины координат вектора влечет за собой уменьшение его нормы?

Теорема. Уменьшение абсолютной величины координат вектора в конечномерном пространстве влечет за собой неуменьшение его нормы тогда и только тогда, когда норма зависит лишь от абсолютных величин координат вектора (доказательство содержится в [1, с. 199]).

Теперь понятно, что пример удалось построить потому, что в повернутой системе координат норма $\| \cdot \|_0$ не являлась функцией от модулей координат вектора.

А как же равносильность сходимости по норме и покоординатной сходимости в случае произвольных норм? Она имеет место, но доказательство вытекает из эквивалентности всех норм в конечномерном пространстве, т. е. компактности единичного шара в конечномерном случае.

Пример 2. В бесконечномерном случае покоординатная сходимость не влечет за собой сходимость по норме.

Действительно, пусть l_1 — пространство суммируемых последовательностей, снабженное нормой

$$\|\bar{a}\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Рассмотрим последовательность векторов

$$\bar{a}_1 = (1; 0; 0; 0; \dots), \quad \bar{a}_2 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0; \dots\right), \quad \bar{a}_3 = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0; \dots\right), \dots$$

Числовые последовательности первых, вторых, третьих и т.д. координат векторов $\bar{a}_n$ все стремятся к нулю, в то же время последовательность $\bar{a}_n$ к нулю сходиться не может, поскольку при всех n

$$\|\bar{a}_n\| = 1,$$

а значит, все векторы $\bar{a}_n$ лежат на единичной сфере.

Выводы. Если в курсе функций многих переменных лектор ограничивается только нормами вида

$$\|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\bar{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $p \geq 1$ или нормой $\|\bar{x}\|_{\infty} = \max_{k=1, n} |x_k|$, то о

приведенных фактах не следует даже упоминать. Однако, в случае применения разнообразных замен переменных или перенормировок для корректности изложения пример 1 следует иметь в виду.

Список литературы

1. Ланкастер П. Теория матриц. — Москва: Наука, 1978. — 280 с.

АНАЛІЗ ЯКОСТІ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕСТІВ МЕТОДАМИ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ ТЕСТІВ

І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний,

А. Ф. Дудко, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

a.dyx@mail.ru

На кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ «КПІ» ведеться робота по проведенню та аналізу результатів комп'ютерного тестування. В основу цього аналізу покладено сучасні математичні статистичні методи, які традиційно розділяють на класичну теорію тестів (КТТ) та Item Response Theory (IRT). Ці два напрями використовуються комплексно та взаємодоповняльно, їх покладено в основу методики аналізу якості тестів з вищої математики [1].

Питанню застосування методів IRT авторами приділено багато уваги, але без застосування КТТ аналіз якості тестів був би незавершеним. Тому у даній доповіді особливу увагу приділено саме методам КТТ.

Дослідження якості тесту передбачає дослідження як окремих тестових завдань, так і тесту в цілому.

Аналіз тесту в цілому полягає у наступному:

- аналізу розподілу вибірки результатів;
- оцінці надійності тесту;
- оцінці критеріальної валідності тесту.

Аналіз розподілу вибірки результатів передбачає графічну інтерпретацію емпіричних даних у вигляді гістограми, аналіз розподілу вибірки індивідуальних балів та обчислення вибірових характеристик.

Оцінка надійності тесту передбачає обчислення коефіцієнту надійності тесту r , знайденого на основі методу розщеплення, та коефіцієнту надійності Кронбаха α .

Для оцінки коефіцієнта надійності r впорядковані результати тестування ділять на дві частини: в одну включають дані студентів по парних, а в іншу — по непарних завданнях. Формула для обчислення коефіцієнта надійності r має наступний вигляд:

$$r = \frac{2\tilde{r}}{1 + \tilde{r}},$$

де $\tilde{r}$ — коефіцієнт надійності для половини завдань тесту:

$$\tilde{r} = \frac{N \sum_{i=1}^N Z_i Y_i - \left(\sum_{i=1}^N Z_i \right) \left(\sum_{i=1}^N Y_i \right)}{\sqrt{N \sum_{i=1}^N (Z_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^N Z_i \right)^2} \sqrt{N \sum_{i=1}^N (Y_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^N Y_i \right)^2}},$$

де Z_i — бал i -го іспитника по парних завданнях тесту, Y_i — бал i -го іспитника по непарних завданнях тесту; N — загальна кількість іспитників.

Коефіцієнт надійності Кронбаха α знаходять за формулою

$$\alpha = \frac{L}{L-1} \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^L S_j^2}{S_X^2} \right),$$

де S_j^2 — вибіркова дисперсія по розподілу балів за j -те завдання; S_X^2 — вибіркова дисперсія по розподілу індивідуальних балів; L — загальна кількість завдань у тесті.

В якості нижньої границі припустимих значень коефіцієнта надійності обрано 0,7 [3, 336].

Оцінка критеріальної валідності тесту передбачає використання формули, в якій у якості критерію зазвичай беруться оцінки експертів, виставлені при традиційній перевірці знань учнів без використання тестів:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(X_{m_i} - \bar{X}_m)}{N \sqrt{S_X^2 \cdot S_{m_X}^2}},$$

де $X_i - \bar{X}$ — відхилення тестового бала i -го студента від середнього бала по тесту; $X_{m_i} - \bar{X}_m$ — відхилення бала i -го студента у експертів від середнього арифметичного експертних оцінок; S_X^2 — дисперсія балів учнів по тесту; $S_{m_X}^2$ — вибіркова дисперсія балів експертів; N — загальна кількість іспитників.

При значенні $\rho \geq 0,7$ вважаємо, що тест володіє високою валідністю.

Аналіз тестових завдань полягає у наступному:

- аналіз кореляційної матриці завдань;
- оцінку валідності окремих завдань;
- аналіз дистракторів завдань множинного вибору.

Аналіз кореляційної матриці завдань передбачає обчислення кореляційної матриці завдань. Для того, щоб тестові завдання не дублювали одне одного, значення кореляції між ними має бути не занадто високим ($r_{ij} \leq 0,3$). Від'ємна кореляція завдання з більшістю інших завдань говорить про потребу перегляду цього завдання, виявлення в ньому помилок, або навіть видалення з тесту.

Оцінка валідності окремих завдань передбачає обчислення значення індексу розрізняльної здатності дихотомічних завдань D_j , коефіцієнту точкової бісеріальної кореляції між дихотомічним завданням та індивідуальними балами

іспитників і коефіцієнту кореляції Пірсона між політомічним завданням та індивідуальними балами іспитників ρ_j .

Значення індексу розрізняльної здатності дихотомічних завдань знаходять за формулою:

$$D_j = p_{uj} - p_{lj},$$

де p_{uj} — частка правильних відповідей на j -те завдання для 27% іспитників з найвищими індивідуальними балами; p_{lj} — частка правильних відповідей на j -те завдання для 27% іспитників з найнижчими індивідуальними балами.

На основі практичного досвіду обрано наступні інтерпретації значень D_j : $D_j \geq 0,4$ — завдання добре функціонує; $0,3 \leq D_j \leq 0,39$ — можливо необхідна деяка корекція завдання; $0,2 \leq D_j \leq 0,29$ — завдання, яке потребує перегляду; $D_j \leq 0,19$ — завдання, яке необхідно вилучити з тесту.

Коефіцієнт кореляції Пірсона обчислюється за формулою

$$\rho_j = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(X_{ij} - \bar{X}_j)}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 \right)}},$$

де $X_i - \bar{X}$ — відхилення тестового бала i -го студента від середнього бала по тесту; $X_{ij} - \bar{X}_j$ — відхилення тестового бала i -го студента за j -те завдання від середнього бала по j -му завданню; N — загальна кількість іспитників.

Формула для обчислення точкової бісеріальної кореляції має вигляд

$$\rho_j = \frac{\bar{X}_{1j} - \bar{X}_{0j}}{S_X} \sqrt{\frac{N_{1j} \cdot N_{0j}}{N(N-1)}},$$

де $\bar{X}_{1j}$ — середнє значення індивідуальних балів іспитників, які вірно виконали j -те завдання тесту; $\bar{X}_{0j}$ — середнє значення індивідуальних балів іспитників, які невірно виконали j -те завдання тесту; S_X — стандартне відхилення вибірки індивідуальних балів; N_{1j} — кількість іспитників, які вірно виконали j -те завдання тесту; N_{0j} — кількість іспитників, які невірно виконали j -те завдання тесту; N — загальна кількість іспитників, $N = N_{1j} + N_{0j}$.

Обчислюється бісеріальний коефіцієнт кореляції [2, 424] між дихотомічним завданням та індивідуальними балами іспитників ρ_{bisj} за формулою

$$\rho_{bisj} = \frac{\bar{X}_{1j} - \bar{X}}{S_X} \sqrt{\frac{p_j}{Y_j}},$$

де $\bar{X}_{1j}$ — середнє значення індивідуальних балів іспитників, які вірно виконали j -те завдання тесту; $\bar{X}$ — середнє значення індивідуальних балів іспитників; S_X — стандартне відхилення вибірки індивідуальних балів; p_j — частка іспитників, які відповіли на j -те завдання правильно; Y_j — ордината стандартної нормальної кривої в точці з абсцисою, яка дорівнює z -оцінці, що відповідає величині p для j -го завдання (визначається за відповідною таблицею).

Для правильно складених завдань мають виконуватись наступні умови [2, 433]:

$$\rho_j \geq \frac{2}{\sqrt{N-1}}; \rho_{bisj} \geq \frac{\sqrt{pq / (N-1)}}{Y}.$$

Аналіз дистракторів завдань множинного вибору полягає у тому, що дистрактори, які обирають менше 5% іспитників, мають бути видалені або замінені.

Методи КТТ є невід'ємною складовою методики аналізу якості комп'ютерних тестів з вищої математики, яка довела свою спроможність та ефективність.

Список літератури

1. Диховичний О. О. Комплексна методика аналізу якості тестів з вищої математики / О. О. Диховичний, А. Ф. Дудко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редрада. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2015. — № 15 (22). — С. 140—144.
2. Крокер Л. Введение в классическую и современную теорию тестов: учебник / Л. Крокер, Дж. Алгина; пер. с англ. Н. Н. Найденовой, В. Н. Симкина, М. Б. Чельшковой; под общ. ред. В. И. Звонникова, М. Б. Чельшковой. — М.: Логос, 2010. — 668 с.
3. Чельшкова М. Б. Теория и практика конструирования педагогических тестов / М. Б. Чельшкова. — М.: Логос, 2002. — 431 с.

ГЕНДЕРНІ ОСОБЛИВОСТІ ПРИ АКМЕ-ВИВЧЕННІ (ВИКЛАДАННІ) МАТЕМАТИКИ

В. М. Антонов, Ю. В. Антонова-Рафі

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

vant46@mail.ru

У Національному технічному університеті України «КПІ» та Українській Академії Акмеології проводяться дослідження гендерних *кібернетично-математичних та акме-психологічних технологій та методів* з метою тестування та діагностики потенційно-ресурсних можливостей людини при вивченні (викладанні) природничих наук, зокрема *математики*.

Загально відомо, що чоловіки і жінки характеризуються різними фізичними, фізіологічними, біологічними, психологічними, соціальними, духовними, розумовими, біохімічними тощо чинниками. Визначимо для початку деякі поняття. **Гендер** (анг. gender — рід, стать): це означає, по-перше, відмінність між чоловіком і жінкою за анатомічними ознаками; по-друге, це соціальний розподіл, який часто базується на статевих відмінностях, але не обов'язково збігається з ним. **Гендерна диференціація** — процес, у якому біологічні відмінності між чоловіком і жінкою наділяються соціологічним значенням і використовуються як засоби соціальної класифікації. **Гендерна роль** (gender role — статева роль) — поведінка, яка нормативно очікується від чоловіка / жінки. Це також зовнішні прояви моделі поведінки, що дозволяють людям судити про міру приналежності когось до чоловічої чи жіночої статі. **Гендерна ідентичність** — ідентичність, що переживається відносно власної приналежності до чоловічої чи жіночої статі. **Гендерна дисфорія** — відчуття напруги чи дискомфорту в зв'язку зі своєю статтю. **Гендерна не комфортність** — не здатність відповідати соціально прийнятим характеристикам статевої поведінки. Відмінності залежать від відповідних філо-генетичних та онто-генетичних характеристик на рівні функціонування таких систем як: гормональної, ендокринної, психічної, м'язової, кровоносно-лімфатичної, мозкової, нервової, імунної, вестибулярної, аудіо-, відео-, кінестетичної та логічної. Це, зазвичай, формує різні життєві цінності, мету, природне життєпризначення тощо. **Гендерні статеві відмінності** — характеризуються множиною впливом статевих гормонів на мозок і тіло Людини. Вони мають анатомічні, фізіологічні і поведінкові особливості.

Так, наприклад, *жінки* краще (у порівняння з чоловіками) успадковують наступні статеві відмінності: музичний слух; нюх; емоційна пам'ять; праве око бачить краще; праве вухо чує краще; права півкуля містить на 15—20 % більше ніж у чоловіків нейронів, тобто сірої речовини мозку; кров тече швидше, а це уповільнює процес старіння; менше стресують; гіппокамп (пам'ять) — більше; розвинута лімбічна система (гіпоталамус, таламус), що сприяє кращому процесу пізнання та виразу емоцій тощо. Також, жінка більш біологічно стійка особа; стаєр («бігун на далекі дистанції»); здібна до невеликих навантажень, але на довгий час; втрачають менше енергії; жінка у віці 60 років може

витримати до 90% тих навантажень, з якими вона могла упоратися в 20 років; кожні 10 років життя жінка втрачає здібність до навантажень на 2%; з жінок виростає вундеркіндів менше.

Чоловік більше користується Лівую півкулею мозку (Логіка). Більше розвинута інтелектуальна компонента та логіка. Живе у середньому на 5—15 років менше жінки. Фізично сильніше і вище за жінку. Хворіють частіше за жінок (особливо психічно). Чоловічий розум — прагматичний. У **чоловіків** на відміну від жінок: мозок важче на 150—200 г; більше речовини — Глії; більше мигдалина, що відповідає за реакції організму на стреси; краще орієнтація у просторі; більше сиротину, що відповідає за фізичну активність та активність процесів пізнання; краще розвинута права півкуля і менше ліва тощо. Чоловік біологічно ослаблена особа, у порівняння з жінкою; спринтер (бігун на короткі відстані); здібний до великих навантажень, але на короткий час; втрачає більше енергії; у віці 60 років може витримати до 60% і менше тих навантажень, з якими він міг упоратися в 20 років; кожні 10 років життя втрачає здібність до навантажень на 10%; вундеркіндів серед чоловіків більше (за рахунок тестостерону).

Відомо, що *жіночий мозок* помітно відрізняється від чоловічого. Наприклад, що мозкові центри, що відповідають за слух та мовлення, містять у жінок на 11 % більше нейронів, ніж у чоловіків. Встановлено, що у жінок ця область мозку на 20 % більша, ніж у чоловіків. Розмір ділянки мозку, що відповідає за почуття і спогади, так званий *hippo campus*, у жінок також більший. Те ж саме стосується й нейронних схем, які контролюють емоції. Тому жінки, як правило, краще виражають почуття і пам'ятають емоційні події.

Однак у **чоловіків** в два з половиною рази більша ділянка мозку, що визначає сексуальний потяг, і набагато об'ємніше центри активності і агресії. Мозок жінки не тільки відрізняється від чоловічого, але й помітно активніше змінюється протягом всього життя. При розв'язанні логічних задач у жінок активуються переважно зони, що знаходяться в лобній долі мозку, — центри мовлення, контролю рухів, емоцій. Це пояснює схильність жінок до прийняття не логічних, а емоційних, інтуїтивних рішень. У чоловіків, включалися логічні центри, що дозволяє більш ретельно оцінювати всі фактори. Дослідження структури мозкової тканини, допомогли зрозуміти, що менший розмір мозку у жінок у порівнянні з чоловіками компенсується більш складною його структурою — звивин у дам набагато більше. В зонах, що відповідають за логічний аналіз і обробку абстрактної інформації, у чоловіків приблизно в шість разів більше сірої речовини, ніж у жінок. Відмінності між чоловіком і жінкою на соціальному рівні полягають у: відмінностях біологічного (генетичного) виду; існуючих соціальних умовах, які створюють більш сприятливі умови для переваги чоловіків, існуючих еволюційних умов.

Автор застосовує **кібернетично-математичний акмеологічний підхід** до проблеми якісного засвоєння знань, зокрема з **математики**. **Акмеологія** — це розквіт, вершини розвитку людини. **Акмеологія**, це наука — про гармонійний розвиток зрілої особистості; про цінності людини; про самовдосконалення,

самореалізацію, само актуалізацію людини; про *методи* (технології) акме-життєдіяльності особи у професіональному, духовному, моральному, біо-психо-фізіологічному напрямках. **Об'єкт Акмеології** — це особа, індивід, суб'єкт діяльності, що постійно гармонічно розвивається та само реалізується головним чином у професіональних досягненнях з метою досягнення свого найвищого рівня розвитку. **Предмет Акмеології** — це: **закономірності, процеси, психологічні механізми, умови та фактори, що сприяють прогресивному розвитку зрілої Особи та її високим професійним досягненням.**

Існують **різні математичні дисципліни**, що використовуються у акме-психології: «чиста», прикладна, «логістична» або «інтуїтивістська», «конструктивістська», кількісна, якісна, «нескінчена», кінцева, неперервна, дискретна, формальна, змістовна, нечислова тощо. **Сучасна психологія та математична психологія це праксеологія, тобто потужна розгалужена система теоретичних і прикладних дисциплін, що розвиваються на межах багатьох наук:** біо соціальна психологія; вікова психологія; військова психологія; генетика поведінки; генетична психологія; диференціальна психологія; експериментальна психологія; етно психологія; ергономіка; економічна психологія; зоо психологія; інженерна психологія; історична психологія; космічна психологія; клінічна психологія; медична психологія; **математична, кібернетична, ергатична** психологія; нейро психологія; психолінгвістика; психологія науки; психологія мистецтва; психофізика; психофізіологія; психометрія; психофізіологія (загальна і диференціальна); психофізіологічна біоніка і математика; психологія таланту; психологія характеру; психо фармакологія; психологія права; психологія мови; психологія людини; психологія праці; психологія соматології; психологія спорту і фізкультури; психо геронтологія; психо акмеологія; педагогічна психологія; соціальна психологія; соціо біологічна психологія; соціальна психологія; соціальна психологія мас; онто психологія; управлінська психологія; фізіологічна психологія; характерологія тощо. Тобто **акмеологічна математична психологія** - виступає на сучасному етапі як інтегратор багатьох сфер Людинознавства і основний засіб побудови її загальної теорії і практики. Автор впроваджує **комп'ютерно-експертний інструментарій** дослідження, аналізу, моделювання потенційно-ресурсних можливостей людини на основі кіберакмеологічної (КА) ергономічно-ергатичної інтелектуальної ІС з метою конструювання індивідуальної акме-моделі особи для формування технологій, алгоритмів, методологій досягнення нею власних акме- точок життєдіяльності.

КА досліджує ресурс людини, допомагає сформулювати мету, дає поради стосовно реалізації мети — бажання на основі ресурсів акме-людини та пошуку алгоритму сприятливих умов вирішення будь-яких проблем. **Кібернетично-математична акмеологія (КМА)** — це акмеологія, що використовує кібернетику і математику; це спеціальна акме-дисципліна, предметом якої є застосування кібернетично-математичних моделей і методів у акмеології. **Акмеологічна кібернетика і математика (АКМ)** — це галузь кібернетики і математики, яка стимулюється акмеологічними задачами та застосовується для

аналізу і обробки акмеологічних даних. У АКМ проводяться дослідження по використанню кібернетики і математики для обробки результатів акме-досліджень. Актуальною є проблема **акмеологічності кібернетики, математики творчості**, тому що математика і кібернетика народжені людською психікою і як наслідок їх можна розглядати як частину предметної галузі психології та акмеології. І у цій якості математика і кібернетика цікавлять психологію методично і генетично як засіб самопізнання і як наслідок народжений психікою. А генетичний аспект і створює предмет **акме-(психо) математично-кібернетичної епістемології**. **Акмеологічна кібернетично-математична епістемологія** (АКМЕ) на теперішній час обмежується сферою КМА та АКМ моделями і методами, що вже розроблені та розробляються у математичній психології та у психологічній математиці та кібернетиці. АКМЕ розглядається автором в її філо- та онтогенетичному аспектах. Предметом АКМЕ є генетичний аспект пізнання людини. **Акмеологічна праксіологічна кібернетично-математична епістемологія** використовується для побудови акмеологічно-психологічної кібернетично-математичної моделі людини та для акме- самопізнання. Результатом дослідження є проектування та реалізація **кібернетично- акмеологічної експертно-аналітичної ергатично-ергономічної інформаційної системи**, що аналізує потенційно-ресурсні можливості сучасної людини з позицій інноваційної науки — людинології. В наслідок проведеного аналізу система формує паспорт особистості, що досліджується і видає в інтерактивному режимі рекомендації, технології, методики, поради щодо удосконалення акме-життєвого шляху життєдіяльності зацікавлених особі з питань — **самості**: самовиховання, самоосвіти, самовдосконалення, самовизначення, а також відносно якості навчання і викладання, працевлаштування та гармонійного (якісного) життя.

Як показує наше дослідження Жінка — особа, що можливо, менше знає ніж чоловік, але більше і краще розуміє, особливо там, де це стосується «розмитих» ситуацій, невизначеностей, слабо визначеностей, тобто прийняття рішень в умовах недостатньої інформації, або й зовсім у випадках її відсутності.

Список літератури

1. Берн Ш. Гендерная психология. — СПб.: Питер, 2001. — 320 с.
2. Ильин Е. П. Дифференциальная психофизиология мужчины и женщины. — СПб.: Питер, 2002. — 544 с.
3. Хорни К. Женская психология. — СПб., 1993. — 195 с.
4. Головнева И. В. Особенности мотивации и социально-психологических установок персонала организации: гендерный аспект // Акмеология в Україні: теорія і практика. — 2010. — № 1. — С. 91—97.
5. Павловский В. В. Ювентология: проект интегративной науки о молодежи. — М.: Академический Проект, 2001.
6. Антонов В.М. Гармонійна акме-особистість. Монографія. — К., 2014. — 384 с.
7. Антонов В. М. Прикладна та професійна акмеологія. Монографія. — К., 2014. — 351 с.

КІБЕРНЕТИЧНО-МАТЕМАТИЧНИЙ ПРАКСІОЛОГІЧНО- АКМЕОЛОГІЧНИЙ ПІДХІД ДО ВИВЧЕННЯ (ВИКЛАДАННЯ) МАТЕМАТИКИ

В. М. Антонов

Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна

vant46@mail.ru

Розглядається підхід до вивчення (викладання) математики на основі **кібернетично-математичної акмеології (праксіології)** (КМА-П) як науки, навчальної дисципліни, галузі психологічно-акмеологічної математичної практики, що застосовується автором для підвищення ефективності навчального процесу в НТУУ «КПІ».

Систематизувати теми, до яких застосовується пропонований підхід можна наступним чином.

1. Теоретичні:

- вивчення історії математики;
- дослідження епістемології математики у її філогенетичному аспекті;
- здійснення порівняльного аналізу і узагальнення концепцій і моделей вивчення математики;
- прогнозування подальшого розвитку методології вивчення математики.

2. Практичні:

• впровадження КМА-П моделей у математичній акмеологічній галузі: диференціальній, соціальній, педагогічній, інженерній, соціологічній, етнічній, загальній, експериментальній, **гендерній**, етасологічній тощо (тобто розробка інноваційних КМА-П моделей і методів);

• розробка нових та удосконалення розроблених адекватних КМА-П моделей і методів математики;

• впровадження КМА-П у якості навчальної дисципліни, тобто задачі методологічного обґрунтування необхідності і корисності застосування кібернетики і математики у психології та акмеології; задачі усвідомлення предмету і спеціальних методів КМА-П як науки; задачі змісту навчальної дисципліни;

• розробка демонстраційних особливостей КМА-П інтерпретацій математики;

• розробка КМА-П моделей, оцінка їх адекватності і корисності для використання на практиці за допомогою психологічно-акмеологічної кваліметрії;

• систематизація КМА-П моделей і методів математики;

• розробка КМА-П моделей і методів математики для акме-(псих) діагностики, прогнозу, управління процесом навчання тощо.

3. Науково-дослідницькі задачі:

- дослідження філогенезу математичної розумової діяльності людини;

- дослідження і вивчення математичної (кібернетичної) креативності людини у онто-генезі (наприклад, у психологів, акмеологів, кібернетиків, математиків тощо);

- дослідження методів комп'ютерної діагностики, управління та прогнозування можливої поведінки людини (комп'ютерна математична психопрогностика);

- дослідження психо-акме вимірів (психологічної (акмеологічної)) кваліметрії (метрології);

- дослідження і вивчення математичного опису психологічних (акмеологічних) об'єктів.

Для вирішення перелічених задач використовується авторська технологія під назвою кібернетична акмеологія (КА). **КА** — це комп'ютерно-експертний інструментарій дослідження, аналізу, моделювання потенційно-ресурсних (внутрішніх) можливостей людини на основі **кібернетично-акмеологічної експертно-аналітичної ергономічно-ергатичної аналітичної ІС** з метою конструювання індивідуальної акме-моделі особи для формування технологій, програм, алгоритмів, методологій досягнення нею власних акме-точок креативності при вивченні природничих наук, зокрема математики; це також, системна комп'ютерно-інноваційна технологія дослідження, аналізу та синтезу потенційно-ресурсних онто- і філо-генетичних можливостей людини з метою визначення та прогнозування її акме- у різних сферах життєдіяльності та зацікавленостей та у вивченні (викладанні) математики. **КА призначена** для того щоб допомогти людині: визначити її ресурси, сформулювати мету у відповідності до ресурсів, спроектувати індивідуальний паспорт (модель) досягнення мети. **КА досліджує** ресурс людини, допомагає сформулювати конструктивну мету, дає поради стосовно реалізації мети — бажання на основі ресурсів акме- людини та пошуку алгоритму сприятливих умов для конструктиву діади: Мета — Ресурс. **Кібернетично-математична акмеологія (КМА)** — це акмеологія, що використовує кібернетику і математику; це спеціальна акме-дисципліна, предметом якої є застосування кібернетично-математичних моделей і методів у акмеології.

Акмеологічна кібернетика і математика (АКМ) — це галузь кібернетики і математики, яка стимулюється акмеологічними задачами та застосовується для аналізу і обробки акмеологічних даних. У АКМ — проводяться дослідження по використанню кібернетики і математики для обробки результатів акме-досліджень.

Актуальною є проблема **акмеологічності кібернетики, математики творчості**, тому що математика і кібернетика народжені людською психікою і як наслідок їх можна розглядати як частину предметної галузі психології та акмеології. І у цій якості математика і кібернетика цікавлять психологію (акмеологію) методично і генетично як засіб самопізнання і як наслідок народжений психікою. А генетичний аспект і створює предмет **акме- (психо) математично-кібернетичної епістемології**.

Автор вважає, що розуміння КМА як особливої специфічної науки базується на таких поняттях: КМА моделі і методи, КМА засоби, акмеологічна епістемологія математики і кібернетики, акмеологічна епістемологія математики і кібернетики у її онтологічному сенсі.

Акмеологічна кібернетично-математична епістемологія (АКМЕ) - на теперішній час обмежується сферою КМА та АКМ моделями і методами, що вже розроблені та розробляються у математичній психології та у психологічній математиці та кібернетиці. АКМЕ розглядається автором в її філо- та онтогенетичному аспектах. Предметом АКМЕ — є генетичний аспект пізнання людини.

Акмеологічна праксіологічна кібернетично-математична епістемологія використовується для побудови акмеологічно-психологічної кібернетично-математичної моделі людини та для акме-самопізнання та акме-самовдосконалення.

Основні функції **кібернетично-математичної акмеології (практиології) (КМА-П)** як науки це: кібер-акме-псих тестування та діагностика, прогностика (антиципація), управління, менеджмент та логістика. Кількісний підхід у КМА-П, як і у інших слабо формалізованих науках, базується на **кваліметрії** (психометрії) та її методах. Всі акме-явища, сутності та причини — невизначені і варіативні, і тому повинні описуватися як випадкові події, величини, функції на основі традиційного математичного апарату: теорії ймовірностей та математично-статистичних методів, а також на основі мульти-множин, помічених матриць, багатовимірних розподілів ймовірностей, стохастичних графів, варіативних алгоритмів, математично-статистичних моделей і методів для акме-психологів тощо, але відповідно до сутності акме-психології. При цьому треба використовувати математичну інтерпретацію психологічних об'єктів дослідження.

Для реалізації запропонованого підходу застосовуються розроблені креативні алгоритми. Алгоритм — це програма дій або поведінки. Алгоритми бувають: людинологічні і машинні (механістичні); комп'ютерні і некомп'ютерні; варіативні і неваріативні; стохастичні і не стохастичні; прості і складні; описові і символічно-мовні; аналітичні; графічні або табличні тощо. Наприклад, машинні (приборні) алгоритми це детерміновані алгоритми. Вони можуть бути: однозначні / неоднозначні; варіативні / неваріативні. Наприклад, комп'ютерні алгоритми — це складні, неоднозначні алгоритми. (тобто варіативні, багато варіативні але детерміновані). Робота механізму (комп'ютера) — циклічна, її легко уявити у вигляді орієнтовного графа, або у вигляді — ідеального акме-психологічного обороту. Але психологи (акмеологи) не визнають алгоритми у психології, вважаючи що людині не властива алгоритмічна діяльність мислення, «забуваючи» при цьому про стереотипи, установки, рефлексії тощо. Хоча у більшості випадків людина — творча особистість і їй властива варіативність у прийнятті рішень (ПР). Навіть проста задача для людини має багато варіантів або способів рішення. Будь-яка задача

для людини — багатоваріантна і повний набір варіантів (ПНВ) рішення - невідомий. ПНВ являє собою нечітку множину (Л.3 аде) або «нечітку» підмножину недовизначеної випадкової множини. І хоча одна людини має знайти 2—3 рішення, рідше 4—5 варіантів, то сотня людей може знайти континуальну множину варіантів (тим паче, що у житті часто хазяйнує випадковість) та багатозначність ПР та вирішення задач (теретичних, практичних). Машини і комп'ютери працюють за простими варіативними алгоритмами (ВА). Людина працює по складним ВА (СВА) (стохастичним). У СВА прості алгоритми повторюються і варіюються. СВА задається у вигляді розподілення частот або ймовірностей простих варіативних підалгоритмів. СВА по суті є стохастичним алгоритмом, а його підалгоритм — не стохастичним.

Алгоритмічна структура — це структура алгоритму + «мета алгоритм» (МА), тобто складний алгоритм, що складається з більш простих алгоритмів. Оскільки компоненти МА можуть бути не стохастичними, то існують алгоритмічні структури стохастичні і не стохастичні. Відомо, що алгоритми і створені з них алгоритмічні структури можуть бути повними і неповними. Алгоритм є повним, коли у ньому містяться усі варіанти дій і умови їх виконання, які необхідні і достатні для достовірного отримання визначеного результату. Якщо їх недостатньо для цього, то алгоритм є неповним. Автор використовує поняття алгоритмічні *евристики* / *Евристичні алгоритми* — мають відношення до неповних алгоритмів (НСА). У НСА відсутня частина варіантів, і тому результат не може бути отриманий достовірно. Але інша частина варіантів у алгоритмі залишається, і це дозволяє отримати результат з тією чи іншою ймовірністю. Евристики розглядають як проміжні результати проходу від незнання до знання. Якщо у процесі дослідження з'являються нові знання і варіанти алгоритму, то евристичні НСА замінюються на неевристичні НСА. Взагалі Алгоритми — це математичні об'єкти і вони можуть матеріалізуватися людиною у вигляді: вербальних, символічних, аналітичних, графічних, матричних описів, між якими можна побудувати взаємні інтерпретації. Складні алгоритми і алгоритмічні структури наочніше і зручніше інтерпретувати на графах та матрицях графів, а є ще аналітичні засоби.

ФРАКТАЛЬНО-АКМЕОЛОГІЧНА ГНОСЕОЛОГІЧНА КОНЦЕПЦІЯ ПРИ ВИВЧЕННІ (ВИКЛАДАННІ) МАТЕМАТИКИ

В.М. Антонов

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

vant46@mail.ru

Фракта́л (лат. *fractus* — подрібнений, дробовий) — нерегулярна, само подібна структура. В широкому розумінні фрактал означає фігуру, малі частини якої в довільному збільшенні є подібними до неї самої. Термін *фрактал* увів 1975 року Бенуа Мандельброт.

Об'єкти, які тепер називаються фракталами, досліджувались задовго до того, як їм було дано таку назву. В *етноматематиці*, наприклад в роботах Рона Еглаша «*Африканські Фрактали*», задокументовано поширені фрактальні геометричні фігури в мистецтві тубільців. В 1525 році німецький митець Альбрехт Дюрер опублікував свою працю *Керівництво Художника*, один із розділів якої має назву «Черепичні шаблони, утворені пентагонами». Пентагон Дюрера багато в чому є схожим на килим Серпінського, але замість квадратів використовуються п'ятикутники. Джексон Поллок (американський експресіоніст 50-их років) малював об'єкти, дуже схожі на фрактали.

Ідею «рекурсивної само подібності» було висунено філософом Лейбніцом, який також розробив багато з деталей цієї ідеї. В 1872 Карл Веєрштрас побудував приклад функції з не інтуїтивною особливістю, скрізь неперервної, але ніде не диференційованої — графік цієї функції тепер би називався фракталом. В 1904 Хельга Фон Кох, незадоволений занадто абстрактним та аналітичним означенням Веєрштраса, розробив більш геометричне означення схожої функції, яка тепер має назву сніжинки Коха. Ідею самоподібних кривих було далі розвинено Полем П'єром Леві, який у своїй роботі *Криві та поверхні на площині та у просторі, які складаються із частин, схожих на ціле*, виданій 1938 року, описав нову фрактальну криву, відому тепер як Крива Леві.

Георг Кантор навів приклади підмножин дійсних чисел із незвичними властивостями — ці множини Кантора тепер також визнаються як фрактали. Ітераційні функції на комплексній площині досліджувались в кінці 19 та на початку 20 століття Анрі Пуанкаре, Феліксом Кляйном, П'єром Фату та Гастоном Жюліа. Проте за браком сучасної комп'ютерної графіки у них забракло засобів відобразити красу багатьох із відкритих ними об'єктів.

В 1960-их роках, Бенуа Мандельброт почав дослідження само подібності в своїх роботах, наприклад *Яка довжина узбережжя Британії? Статистична само подібність та дробова розмірність*. Ця доповідь базувалась на ранніх роботах Луї Фрая Річардсона. В 1975 році Мандельброт використав слово *фрактал* як назву для об'єктів, розмірність Гаусдорфа яких є більшою за топологічну розмірність. Він проілюстрував своє математичне означення захоплюючими зображеннями, зробленими за допомогою комп'ютера. Ці

зображення привернули велику увагу; багато з них базувалися на рекурсії, що призвело до появи поширеного розуміння слова *фрактал*.

Множина Жюліа, фрактал, близький до множини Мандельброта. Порівняно простий клас прикладів становлять множини Кантора, в яких короткі та ще коротші (відкриті) інтервали вилучаються з одиничного інтервалу $[0;1]$, залишаючи множину, яка, можливо, буде (або не буде) само подібною при збільшенні й, можливо, матиме (або не матиме) розмірність Гаусдорфа d таку, що $0 < d < 1$. Також до прикладів фракталів належить фрактал Ляпунова, трикутник Серпінського, килим Серпінського, губка Менгера, крива дракона, крива заповнення простору, межі множин груп Кліні та крива Коха. Фрактали можуть бути детермінованими або стохастичними (наприклад, не детермінованими). Хаотичні динамічні системи іноді асоціюються з фракталами (наприклад атрактор). Об'єкти в просторі параметрів родини систем також можуть бути фракталами. Цікавим прикладом є множина Мандельброта. Ця множина містить цілі диски, тому її розмірність Гаусдорфа дорівнює топологічній розмірності, яка дорівнює 2, і вона формально не є фракталом — але що насправді є дивним, це те, що розмірність Гаусдорфа межі множини Мандельброта також дорівнює 2 (а топологічна розмірність дорівнює 1). Це було доведено М. Шішікурою 1991 року.

Само подібні множини з незвичайними властивостями в математиці

Починаючи з кінця XIX століття, в математиці з'являються приклади само подібних об'єктів з патологічними з точки зору класичного аналізу властивостями. До них можна віднести наступні (1—14):

- множина Кантора — ніде не щільну незліченну досконалу множину. Модифікувавши процедуру, можна також отримати ніде не щільну множину позитивної довжини;
- трикутник Серпінського («скатертина») і килим Серпінського — аналоги множини Кантора на площині;
- губка Менгера — аналог множини Кантора в тривимірному просторі;
- приклади Веєрштраса і Ван дер Вардена ніде не диференційованої неперервної функції;
- крива Коха — неперервна крива, що не перетинається, нескінченної довжини, яка не має дотичній ні в одній точці;
- крива Пеано — неперервна крива, що проходить через всі точки квадрата;
- траєкторія броунівської частинки також з імовірністю 1 ніде не диференційована. Її гаусдорфова розмірність дорівнює двом.

Рекурсивна процедура отримання фрактальних кривих. Існує проста рекурсивна процедура отримання фрактальних кривих на площині. Задамо довільну ломану з кінцевим числом ланок, звану генератором. Далі, замінимо в ній кожен відрізок генератором (точніше, ломаною, подібною генератору). У цій ломаній знову замінимо кожний відрізок генератором. Продовжуючи до нескінченності, в межі отримаємо фрактальну криву. Приклади таких кривих:

крива Коха (сніжинка Коха); крива Леві; крива Мінковського; крива Гільберта; ломана (крива) дракона (Фрактал Гартера — Гейтуея); крива Пеано.

За допомогою схожої процедури виходить дерево Піфагора.

Стохастичні фрактали. Природні об'єкти часто мають фрактальну форму. Для їх моделювання можуть застосовуватися стохастичні (випадкові) фрактали. Приклади стохастичних фракталів:

- траєкторія броунівського руху на площині і в просторі;
- межа траєкторії броунівського руху на площині. У 2001 році Лоулер, Шрамм і Вернер довели припущення Мандельброта про те, що її розмірність дорівнює $4/3$;
- еволюції Шрамма — Левнера — конформно — інваріантні фрактальні криві, що виникають в критичних двовимірних моделях статистичної механіки, наприклад, в моделі Ізінга і перколяції;
- різні види рандомізованих фракталів, тобто фракталів, отриманих за допомогою рекурсивної процедури, в яку на кожному кроці введений випадковий параметр. Плазма — приклад використання такого фрактала в комп'ютерній графіці.

Три поширені методи генерування фракталів.

• **Ітераційні функції** — будуються відповідно до фіксованого правила геометричних заміщень. Множина Кантора, килим Серпінського, трикутник Серпінського, крива Пеано, крива Коха, крива дракона, Т-Квадрат та губка Менгера є прикладами таких фракталів.

• **Рекурентні відношення** — Фрактали, що визначаються рекурентним відношенням в кожній точці простору (такому як площа комплексних чисел). Прикладами фракталів цього типу є множина Мандельброта, палаючий корабель та фрактал Ляпунова.

• **Випадкові процеси** — Фрактали, що генеруються з використанням стохастичних, а не детермінованих процесів, наприклад: фрактальні ландшафти, траєкторія Леві та броунівське дерево. Останній утворює так звані кластери дифузійних концентратів (diffusion-limited aggregation) та реакційних концентратів (reaction-limited aggregation).

Класифікація фракталів. Фрактали можна класифікувати відповідно до їхньої само подібності. Розрізняють три типи само подібності у фракталах.

• **Точна само подібність** — Це найсильніший тип само подібності; фрактал виглядає однаково при різних збільшеннях. У фракталів, згенерованих з використанням ітераційних функцій, часто виявляється точна само подібність.

• **Майже само подібність** — Слабка форма само подібності; фрактал виглядає приблизно (але не точно) само подібним при різних збільшеннях. Майже само подібні фрактали містять малі копії цілого фракталу у перекручених та вироджених формах. Фрактали, згенеровані з використанням рекурентних відношень, зазвичай є майже (але не точно) само подібними.

• **Статистична само подібність** — Це найслабкіша форма само подібності; фрактал має чисельні або статистичні міри, що зберігаються при збільшенні.

Найприйнятніші означення «фракталів» просто містять в собі деякий вид статистичної само подібності (розмірність фракталу, саме по собі, є чисельною мірою, що зберігається при збільшенні). Ймовірнісні фрактали є прикладами фракталів, які є статистично, але не майже й не точно само подібними.

Слід зазначити, що не всі само подібні об'єкти є фракталами; наприклад, числова вісь (евклідова пряма) є точно само подібною, але, оскільки її розмірність Гаусдорфа та топологічна розмірність дорівнюють одиниці, вона не є фракталом.

Фрактальна Акмеологія. Відомо, про якісний потужний вплив фракталів на процеси сприйняття — усвідомлення — запам'ятовування необхідної інформації людиною (1—14). Фрактали використовують для моделювання нових алгоритмів розпізнання, вивчення фізіологічних процесів впливу на людину. Існує індивідуальний фрактальний інтерес, стимул, мотивація особистості. Досліджено, що фрактальні зображення мають **«гедонічний» позитивний ефект** та впливають на формування позитивних емоцій при засвоєнні нових знань.

Автор досліджує вплив фракталів на: функціональний стан людини, її працездатність; розвиток та саморозвиток Людини як суб'єкта діяльності при вивченні природних дисциплін, зокрема математики та досягненні особою «акме» свого життя. Відомо, що фрактальні об'єкти: мистецтво, дизайн тощо **викликають:** підвищений інтерес людини у направленні позитивних емоцій. Авторський колектив проектує **Кібернетично акмеологічну математично-праксеологічну інформаційну систему** для дослідження впливу фракталів на людину.

Список літератури

1. Божокин С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. — Ижевск: РХД, 2001. — 128 с.
2. Горобец Т. Н., Ковалев В. В., Огнивов В. В. Влияние фрактального искусства на функциональное состояние человека // Акмеология. — 2014. — № 3. — С. 121—127.
3. Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. — М.: URSS, 2010. — 280 с.
4. Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А. Фракталы: от удивления к рабочему инструменту. — К.: Наукова думка, 2013. — 270 с.
5. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. — М.: Техносфера, 2006. — 488 с.
6. Ландэ Д. В. Фракталы и кластеры в информационном пространстве // Корпоративные системы. — 2005. — 6. — С. 35—39.
7. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — Ижевск: ИКИ, 2010. — 656 с.
8. Мандельброт Б. Фракталы и хаос. — Ижевск: РХД, 2009. — 400 с.
9. Мандельброт Б. Фракталы, случай и финансы. — Ижевск: РХД, 2004. — 256 с.
10. Морозов А. Д. Введение в теорию фракталов. — Ижевск: ИКИ, 2002. — 160 с.
11. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. — М.: Мир, 1993. — 176 с.
12. Федер Е. Фракталы. — М.: Мир, 1991. — 254 с.
13. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. — Ижевск: РХД, 2005. — 528 с.
14. Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. — Wiley, 2003.

**ВНЕСОК А. О. САПЕГІНА
У ЗАПОЧАТКУВАННЯ ТА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ КУРСІВ
ДЛЯ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ ОСВІТНІХ ЗАКЛАДІВ
М. В. Апостол**

Національна наукова сільськогосподарська бібліотека НААН, Київ, Україна
dnsbgb_uaan@ukr.net

З початку ХХ ст. із широким впровадженням у практику наукової обробки даних у навчальних закладах біологічного та сільськогосподарського спрямування у лекційних курсах з фахових дисциплін почали вводити математичні розділи.

Приват-доцент Імператорського Новоросійського університету селекціонер А. О. Сапегін у 1912 році одним з найперших увів, у новому на той час, курсі лекцій з «Основ теорії та методики селекції сільськогосподарських рослин» розділи з основ варіаційної статистики. За курсом лекцій ним було опубліковано підручник «Основы теории и методики селекции сельскохозяйственных растений» (1913) [1], який став у подальшому за основу для посібника з варіаційної статистики для агрономів [2]. Вказаний посібник мав шість видань (1922, 1922, 1928, 1929, 1935, 1937) російською [2—7], а у 1926 р. був виданий українською мовою [8].

З 20-х років ХХ ст. в аграрних вищих навчальних закладах, а також на курсах для навчання фахівців з селекції, агрономії були введені математичні дисципліни. В ці роки основи математичної статистики вже не були включені окремими розділами у фахових дисциплінах — у навчальних програмах вже фігурували окремі дисципліни (наприклад, «Основы загальної та сільськогосподарської статистики» або «Елементи біометрики», «Варіаційна статистика»).

У всіх навчальних курсах, що були пов'язані із математичною статистикою, у списках рекомендованої літератури обов'язково, як один з найкращих, наводився посібник з варіаційної статистики проф. А. О. Сапегіна.

У посібнику проф. А. О. Сапегін виклав основні практичні підходи до обробки та аналізу результатів дослідів, необхідні у повсякденному використанні в агрономічній та селекційній роботі. Вчений вказував на важливість статистичного оцінювання для агрономічної науки та практики, а тому й необхідність існування доступного та зрозумілого підручника для початківців.

У посібнику А. О. Сапегін наводив не тільки основні статистичні поняття та формули для проведення обчислень, а й ілюстрував їх застосування прикладами з конкретних дослідів.

А. О. Сапегін також розглянув показник відносної точності досліду та показав, що визначення відносної точності досліду можливе тільки за великої кількості значень даних, а також, що відносна точність досліду не буде однаковою з року в рік й не можна визначити за даними дрібного обліку

точність наступних дослідів. На прикладах він демонстрував необхідність щорічного визначення точності дослідів та основні практичні методи обчислення точності польового дослідів з поясненнями до них.

Крім того, А. О. Сапегін звертав увагу на інші аспекти проблеми точності дослідів, надзвичайно важливої для фахівців-агрономів та селекціонерів. Наводячи можливі підходи для вирішення задачі точності дослідів у третьому та наступних виданнях він наголошує, що єдино можливим вирішенням проблеми точності дослідів є лише використання методів на основі варіаційної статистики.

Починаючи з третього видання (з 1928 р.) посібник професора генетики і селекції Одеського сільськогосподарського інституту А. О. Сапегіна друкувався вже в Москві, що також свідчить про дійсно широке використання цього посібника в країні.

Список літератури

1. Сапегин А. А. Основы теории и методики селекции сельскохозяйственных растений / А. А. Сапегин. — Одесса, 1913. — 90 с.
2. Сапегин А. А. Вариационная статистика : элементар. учебник для агрономов / А. А. Сапегин. — Харків : [Первая Гос. Тип.], 1922. — 80 с.
3. Сапегин А. А. Вариационная статистика : элементар. учебник для агрономов / А. А. Сапегин. — 2-е изд., перераб. — Одеса : Народный Комиссариат Земледелия Украины. Одесское отд-ние изд-ва, 1922. — 80 с.
4. Сапегин А. А. Вариационная статистика / А. А. Сапегин. — 3-е изд., испр. и доп. — М. ; Л. : Госиздат, 1928. — 106 с.
5. Сапегин А. А. Вариационная статистика / А.А. Сапегин. — 4-е изд., перераб. — М.: Госиздат, 1929. — 135 с.
6. Сапегин А. А. Вариационная статистика : практ. элементарное пособие для опытников / А. А. Сапегин. — 5-е изд., испр. — М. : Сельхозгиз, 1935. — 93 с.
7. Сапегин А. А. Вариационная статистика : практ. элементарное пособие для агрономов-опытников и биологов / А. А. Сапегин. — 6-е изд., испр. — М. : ОГИЗ Сельхозгиз, 1937. — 88 с.
8. Сапегін А. А. Варіаційна статистика : елементарний підруч. для агрономів / А. А. Сапегін. — К. : Книгоспілка, 1926. — 90 с.

ПРО СТВОРЕННЯ ДИСТАНЦІЙНИХ КУРСІВ У СИСТЕМІ MOODLE

Л. В. Барановська, Г. Г. Барановська

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Lesia@baranovsky.org

Розвиток інформаційних ресурсів і засобів доступу до них, стрімкий розвиток україномовного контенту Інтернету є факторами, які змінили спосіб і підхід до навчання та самонавчання. Сьогодні в системі освіти України відбуваються суттєві зміни. Наказ МОН України (№ 293 від 07.07.2000) «Про створення Українського центру дистанційної освіти» став підґрунтям для розроблення дистанційних технологій навчання у системі вищої освіти України. Враховуючи пропозиції Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут» було створено структурний підрозділ НТУУ «КПІ» Український центр дистанційної освіти. У 2004 році наказом Міністерства освіти і науки України з метою ефективного впровадження інформаційно-комунікаційних технологій в освіту з урахуванням позитивного досвіду діяльності та на базі Українського центру дистанційної освіти НТУУ «КПІ» створено Український інститут інформаційних технологій в освіті НТУУ «КПІ».

Дистанційна форма навчання через Інтернет є ефективною і зручною формою отримання нових знань та компетенцій, підвищення рівня професійності, самоосвіти. Дистанційно через Інтернет можуть навчатися всі: учні, студенти, науковці, викладачі, люди похилого віку, люди з особливими потребами. Слухачі самі обирають час та місце для дистанційного навчання. Процес дистанційного навчання поєднує самостійне засвоєння матеріалу дистанційного курсу, перевірку своїх знань за допомогою тестів та інших завдань в дистанційному курсі. Важливою складовою є можливість активно спілкуватися з викладачем та іншими слухачами курсу в on-line та off-line режимах: чати, форуми, електронна пошта, вебінари.

У світі вже більше 20 років застосовують різні платформи підтримки дистанційного навчання (Moodle, WebCT, Lotus Learning Space, TopClass, Claroline, Campus Virtuel, Atutor, ACOLAD, Blackboard, Prométhée та ін.) [1]. Останнім часом широкого розповсюдження набувають програмно-інструментальні платформи, що вільно розповсюджуються (Open Source) та створені за принципом «загальної відкритої ліцензії» (General Public License — GPL). Основною вимогою цього принципу є те, що початковий код, необхідний для роботи програми, завжди повинен залишатися відкритим і доступним для перегляду і не може бути власністю користувача. На відміну від комерційних рішень, програмне забезпечення з відкритим вихідним кодом дозволяє реалізувати той же набір функціональних можливостей, але з істотно меншими економічними витратами. До того ж у користувачів залишається можливість доробки й адаптації конкретної системи до своїх потреб і до існуючої освітньої ситуації. Виходячи з цього в Українському інституті інформаційних технологій

в освіті НТУУ «КПІ» найбільший інтерес серед таких систем викликала платформа дистанційного навчання Moodle (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment). Це система спеціально розроблена для створення викладачами якісних онлайн-курсів і використовується більше ніж у 100 країнах світу університетами, школами, компаніями й незалежними викладачами [2].

У системі Moodle викладачами НТУУ «КПІ» створено багато курсів дистанційного навчання з різних навчальних дисциплін, у тому числі з вищої математики: «Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння», «Функції багатьох змінних. Ряди. Теорія ймовірностей» (розробник та укладач — доцент Л. В. Барановська). Кожний курс повністю охоплює певний кредитний модуль навчальної дисципліни «Вища математика». Прикріплені до дистанційного курсу студенти одержали індивідуальні паролі та мають можливість вивчати в мережі або завантажувати навчальний матеріал, який запропоновано, організовувати свою самостійну роботу. Виконуючи завдання та тести, студент може бачити еволюцію своєї діяльності на інтерфейсі комп'ютера, передавати виконані роботи на перевірку викладачеві, консультуватися у чаті з викладачем або спілкуватися з групою. Необхідно, також, відмітити велику роль, яку при цьому виконує адміністратор, який забезпечує і підтримує обслуговування системи, керує рівнями доступу до дистанційного курсу, реєструє та авторизує слухачів. Особливістю дистанційних курсів у системі Moodle є модульність, тобто можливість завантаження безлічі додаткових компонентів (модулів, блоків, мовних пакетів). Однією із важливих переваг також є те, що всі матеріали, які використовуються у курсі, зберігаються не на окремому комп'ютері, а на сервері, який дозволяє завантажувати, переміщати, змінювати або видаляти файли, документи і тощо. Moodle відрізняється простотою та доступністю для розуміння, опанувати її зможе будь-яка людина, що володіє основними навичками роботи на комп'ютері.

Список літератури

1. Ecoutin E. Mise en oeuvre des plates-formes pour la formation ouverte et à distance. — Fiche pratique 1: Les utilisations d'une plate-forme. — Paris: Algora, 2001. — Режим доступу: [http://ressources.algora.org/virtual/30/Documents/pdf/utilisation_pf\(1\).pdf](http://ressources.algora.org/virtual/30/Documents/pdf/utilisation_pf(1).pdf).
2. Oubahssi L. Conception de plates-formes logicielles pour la formation à distance, présentant des propriétés d'adaptabilité à différentes catégories d'utilisateurs et d'interopérabilité avec d'autres environnements logiciels: Thèse de doctorat ...spécialité informatique. Université René Descartes Paris V, 2005. — 301 p.

ПРО ПЛОЩУ ПЛОСКОЇ ФІГУРИ ТА ЧИСЛО π

В. Є. Березовський, С. В. Лещенко, Р. В. Ненька

Уманський національний університет садівництва, Умань, Україна

berez.volod@rambler.ru, leshchenko_63@mail.ru, ruslana66@i.ua

Відомо, що площу плоскої фігури, яка обмежена зверху графіком неперервної, невід'ємної функції $y = f(x)$, знизу віссю Ox та прямими $x = a$, $x = b$ ($b > a$) можна знайти за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Надалі будемо вважати, що поняття визначеного інтегралу введено в розгляд класичним чином. На формулу (1) спробуємо подивитися як на означення площі плоскої фігури, при цьому не проводячи строгі математичні викладки і не розглядаючи загальні випадки.

Для спрощення припустимо, що плоска фігура D обмежена гладкою, замкненою кривою без точок само перетину.

На деякій прямій L вкажемо напрям відліку і виберемо в якості початку відліку точку O , яка розташована зліва відносно фігури D .

Нехай пряма F_t (t — довільне задане число) перпендикулярна до прямої L і перетинає її в точці, яка віддалена від точки O на відстані t .

Для спрощення будемо також вважати, що плоска фігура D розташована між прямими F_a і F_b ($b > a$). Позначимо через $S(t)$ ту частину площі фігури D , яка лежить зліва від прямої F_t (рис. 1).

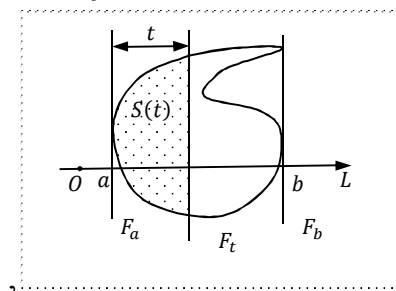


Рис. 1

Очевидно, що площа плоскої фігури D дорівнює $S = S(b) - S(a)$.

В силу формули Ньютона-Лейбніца маємо

$$S = \int_a^b S'(t) dt.$$

Звичайно, будемо вважати, що функція $S(t)$ має обмежену, кусково-неперервну похідну.

У силу того, що $S(t) = 0$ при $t < a$ і $S(t) = S$ при $t > b$, можна записати

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} S'(t) dt.$$

З'ясуємо, що собою являє функція $S'(t)$.

Позначимо через $l(t)$ довжину перетину плоскої фігури D з прямою F_t (перетином є або порожня множина, або окремі точки, або відрізок, або декілька відрізків).

Нехай Δt досить мале додатне число. Тоді різниця $S(t + \Delta t) - S(t)$ дорівнює площі тієї частини плоскої фігури D , яка знаходиться між прямими F_t і $F_{t+\Delta t}$ (рис.2).

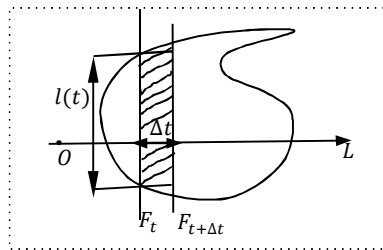


Рис.2

При досить малих значеннях Δt , очевидно, має місце наближена рівність (площі наближено рівні)

$$S(t + \Delta t) - S(t) \approx l(t) \Delta t,$$

або

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \approx l(t).$$

Тому

$$l(t) = S'(t).$$

Отже,

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} l(t) dt. \quad (2)$$

Цікавим є порівняння формули (2) з формулою для знаходження об'ємів тіл за допомогою площ поперечних перерізів

$$V = \int_a^b \theta(x) dx.$$

Формулу (2) можна, в принципі, вважати означенням площі плоскої кривої.

В якості прикладу обчислимо площу круга, обмеженого колом $x^2 + y^2 = r^2$ (рис. 3).

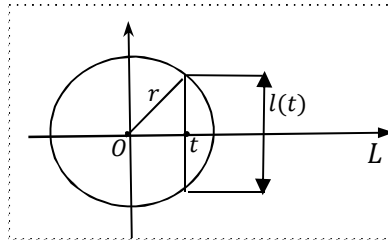


Рис.3

Очевидно, застосувавши теорему Піфагора, маємо

$$l(t) = 2\sqrt{r^2 - t^2}, \quad -r \leq t \leq r.$$

Тоді

$$\begin{aligned} S &= \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - t^2} dt = 4 \int_0^r 2\sqrt{r^2 - t^2} dt = \\ &= \left| \begin{array}{ll} t = rx & x_0 = 0 \\ dt = 4dx & x_1 = 1 \end{array} \right| = 4r^2 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Число π за означенням визначимо як площу круга радіуса 1.

Отже,

$$\pi = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

ПРО ТЕОРЕМУ КОСИНУСІВ

В. Є. Березовський, Р. В. Ненька, С. В. Лещенко

Уманський національний університет садівництва, Умань, Україна

berez.volod@rambler.ru, ruslana66@i.ua, leshchenko_63@mail.ru

Нагадаємо, що довжину r і полярний кут φ радіус-вектора точки P називають полярними координатами точки P . Зв'язок між декартовими прямокутними координатами (x, y) і полярними координатами (r, φ) визначається рівняннями

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}.$$

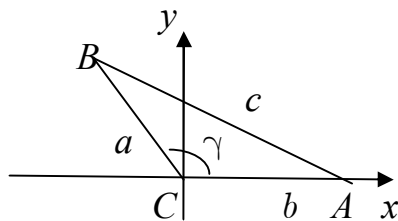
Нехай відносно полярної системи координат Or_φ задані точки $A(r_1, \varphi_1), B(r_2, \varphi_2)$. Тоді ці точки відносно декартової прямокутної системи координат мають координати $A(r_1 \cos \varphi_1; r_1 \sin \varphi_1), B(r_2 \cos \varphi_2; r_2 \sin \varphi_2)$. Тому

$$\begin{aligned} d = |AB| &= \sqrt{(r_2 \cos \varphi_2 - r_1 \cos \varphi_1)^2 + (r_2 \sin \varphi_2 - r_1 \sin \varphi_1)^2} = \\ &= \sqrt{r_2^2 \cos^2 \varphi_2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + r_2^2 \sin^2 \varphi_2 - \\ &- 2r_1 r_2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 + r_1^2 \sin^2 \varphi_1} = \sqrt{r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + r_1^2}. \end{aligned}$$

Отже,

$$d = |AB| = \sqrt{r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + r_1^2}. \quad (1)$$

Нехай маємо довільний трикутник $\triangle ABC$ зі сторонами a, b, c та кутом $\angle ABC = \gamma$. Виберемо на площині декартову прямокутну систему координат таким чином, щоб точка C була її початком, точка A належала вісі Cx , причому розміщена праворуч точки C , а точка B належала верхній півплощині.



Тоді точка A буде мати полярні координати $(b; 0)$ а точка $B(a; \gamma)$. Скориставшись формулою (1), отримаємо

$$c = \sqrt{a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2},$$

або

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Список літератури

1. Погорелов А. В. Геометрия. — М.: Наука, 1983. — 288 с.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1971. — 232 с.

**ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЗНАНЬ СЕМАНТИЧНИМИ МЕРЕЖАМИ
В ПРОЦЕСІ РЕАЛІЗАЦІЇ ФРЕЙМ-ПІДХОДУ ВИКЛАДАННЯ
МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН СТУДЕНТАМ КОМП'ЮТЕРНО-
ОРІЄНТОВНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ ВНЗ І—ІІ РІВНІВ АКРЕДИТАЦІЇ**

Т. Бохонова, В. Тихонова, О. Томащук, О. Лещинський, В. Гроза

Національний авіаційний університет, Київ, Україна

Вивчаючи і досліджуючи сучасні методи викладання навчальних дисциплін, зокрема, математичних, автори шукають підходи, які могли б стати природними в процесі навчання студентів комп'ютерно-орієнтовних спеціальностей. Одним з таких підходів може стати представлення знань. Поняття представлення знань належить напряму інженерії знань. Очевидним є той факт, що структура знань залежить від сфери їх застосування і може мати достатньо складний характер. Ця структура включає в себе різні факти з предметної області, взаємозв'язки між ними, правила дій тощо. Одним з основних питань при виборі структури є питання: які знання повинні бути представленими і в якій формі? Складність і багатоваріантність структур знань викликали до життя різні способи представлення знань, серед яких вирізняються логічні моделі, фреймові і продукційні системи, семантичні мережі. Кожний спосіб представлення має свої переваги та недоліки, і тому кожному притаманна певна структура знань. Методи розв'язання обчислювальних задач ґрунтуються, як правило, на конкретних алгоритмах. Методи представлення знань використовують для інформаційного аналізу, який часто носить якісний і, на перший погляд, суперечливий характер. У процесі навчання подібна інформація повинна бути приведена до зрозумілого вигляду.

Вивчаючи теоретичні засади використання фрейм-підходу в процесі викладання математичних дисциплін автори ставлять за мету, зокрема, вивчити можливість використання композиційних моделей представлення знань. В свою чергу, вибір фрейм-підходу викладання математичних дисциплін обумовлений тим, що теорія фреймів зароджувалась М. Мінським в межах загальної психології. Фрейм (рамка) — це одиниця представлення знань, яка зафіксована у минулому та деталі якої за необхідності можуть бути змінені згідно поточної ситуації. Тому, на думку авторів, в процесі формування фрейм-підходу може бути присутній етап побудови семантичної мережі — більш консервативного способу представлення знань для формування структури довгострокової пам'яті як певної фіксованої основи.

Семантична мережа є одним із способів представлення знань. З самого початку семантична мережа була задумана як модель представлення структури довгострокової пам'яті в психології, але надалі стала одним з основних способів представлення в інженерії знань. Представлення знань семантичними мережами само по собі є представленням простої структури, певної інформації, і тому важливими стають методи, пов'язані із застосуванням і використанням

цього представлення в системах навчання взагалі і математичних дисциплін зокрема.

Морріс в свою чергу дав точні визначення семантичним і прагматичним відношенням в семаіотиці і визначив їх як проблеми різних функціональних рівнів. Іншими словами, він визначає семантику як загальні відношення між символами і об'єктами, представленими цими символами, а прагматику — як виразні (охоплюючі) відношення між символами і авторами (або користувачами) цих символів. Спершу в психології вивчались об'єкти, які називались семантичними з точки зору відомих асоціативних властивостей, що накопичуються в системі навчання і поведінці людини, але з розвитком психології обізнаності стали вивчатись семантичні структури, які включають, зокрема, певні інформаційні об'єкти. В подальшому вивчались принципи дії людської пам'яті (способи зберігання інформації і знань), зокрема, можливі (гіпотетичні) структурні моделі довгострокової пам'яті.

Однією з перших семантичних мереж (СМ), як і саме поняття СМ була модель Квілліана (в деяких джерелах Куїлліана). В якості структурної моделі довгострокової пам'яті Квілліан запропонував модель розуміння змісту, зокрема пам'ять, яка отримала назву TLC-моделі (Teachable Language Comprehender: сприйнятний мезанізм розуміння мови). В даній моделі для описання структури довгостроковій пам'яті була використана мережева структура як спосіб представлення семантичних відношень між концептами (поняттями). Основною її ідеєю було описання значень класу, до якого належить об'єкт, його прототип і встановлення зв'язку з властивостями об'єкту (рис. 1).

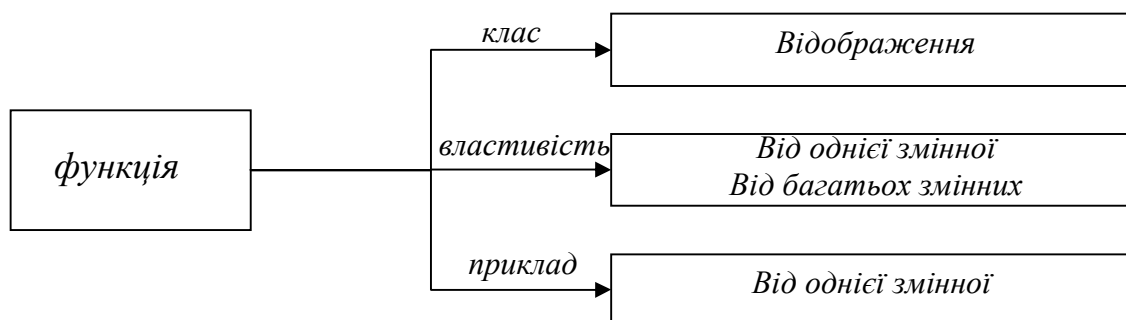


Рис. 1. Приклад мережевої структури

В моделі Квіллінга концептуальні об'єкти представлені асоціативними мережами, що містять вершини, які вказують на концепти і дуги, які показують відношення між концептами. Подібна асоціативна структура називається «площиною», концепти, що описують об'єкт, називають «вершинами типу», а зв'язані з ними відповідні властивості (асоціативні властивості) називають «вершинами лексем». В будь-якій площині існує одна вершина типу і тільки необхідне для визначення концептів, що описують їх, число вершин лексем (приклад на рис. 2).

Вершина типу «Лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку» має одну вершину лексеми «Звичайне диференціальне рівняння», яка за допомогою

вказівника утворює ще одну вершину типу, яка в свою чергу містить ще декілька вершин лексем. Вершини лексем визначають всі можливі сутності, зокрема, класи, властивості, приклади тощо. Перевага лексем в порівнянні з типами полягає в економії пам'яті з одного боку та упередження дублювання визначення концептів з іншого боку.

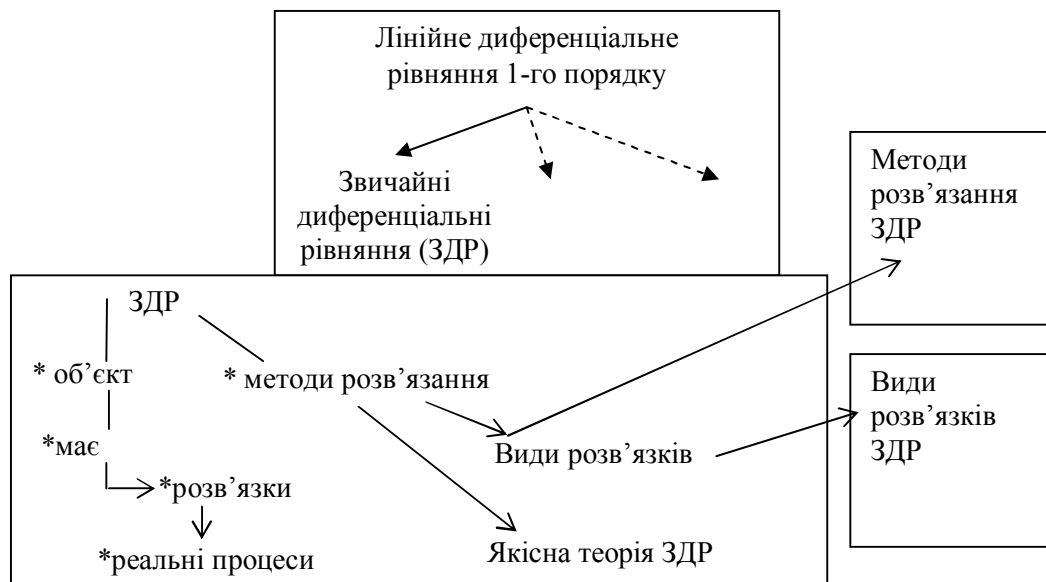


Рис. 2. Приклад моделі Квілліана

Таким чином, в TLC-моделях використовується представлення об'єктів в формі «елемент» і «властивість». Це дає можливість спроби структурування знань заміною вершини типу на елемент, а вершину лексеми на властивість. Тому інформаційні сегменти, засновані на фактах в довгостроковій пам'яті, можна представити за допомогою структур трьох типів: елементи, властивості, вказівники. Елемент представлений висновком, що називається фактом, наприклад, об'єктом, подією, поняттям тощо. Властивість визначається структурою, що описує елемент. Вказівники зв'язують елементи і властивості (рис. 3). На рисунку зображені вказані відношення. Список властивостей складається з пар «атрибут — значення». В TLC-моделі існує система правил, яка регламентує структуру вказівників «елемент — властивість». Наприклад: елемент має прототип; властивість має атрибут і значення тощо.

За допомогою цих правил можна формалізувати семантичну мережу. Елемент, що зображає поняття «Ряд Фур'є» має єдиний список властивостей, при якому атрибути властивостей та їх значення декларують твердження

«коефіцієнти ряду обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad l = T / 2,$$

$$T \text{ — період функції } f(x) = A_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin \left(\frac{2\pi k}{T} x + \phi_k \right) \gg.$$

Властивість нижнього рівня має також атрибут, що називають «бу», значення якого пов'язане з заданим елементом «Ряд Фур'є». Запропоноване представлення «інформаційного сегменту» описує контекст «Ряд Фур'є» функції $f(x)$ — це тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right),$$

коефіцієнти a_0, a_k, b_k якого визначаються за вказаними формулами через функцію $f(x)$.

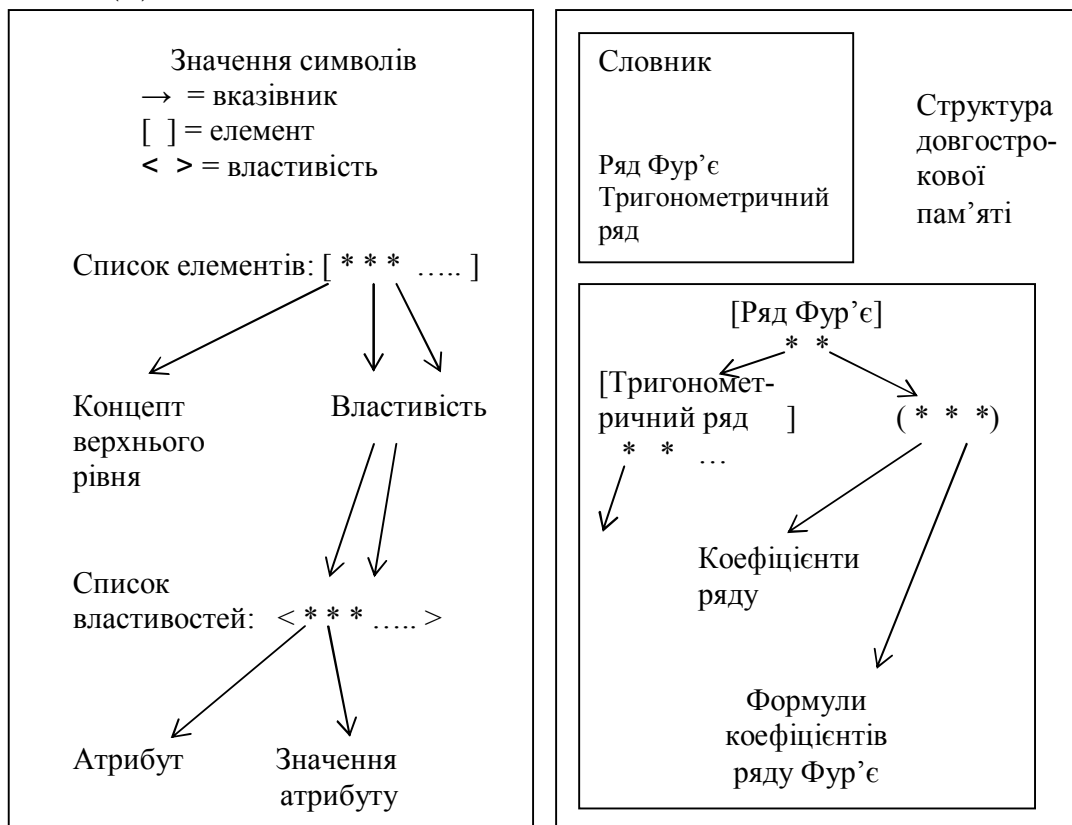


Рис. 3. Представлення знань в довгостроковій пам'яті для TLC-моделей Квілліана

Автори статті ставили за мету описати модель Квіллінга. Очевидним є той факт, що семантична мережа сама по собі є моделлю пам'яті, але вона не розкриває, яким чином здійснюється представлення знань. В подальшому автори планують розглянути семантичну мережу як метод представлення знань, структурування знань, наблизитись до процедури ефективного використання знань.

Список літератури

1. Т. Бохонова, О. Лещинський, В. Гроза, В. Тихонова, О. Томашук. Теоретичні аспекти побудови семантичних мереж у процесі реалізації фрейм-підходу викладання математичних дисциплін студентам комп'ютерно-орієнтовних спеціальностей ВНЗ I—II рівнів акредитації / Математика в сучасному технічному університеті: матеріали III Міжнар. Наук.-практ. Конф. (Київ, 25—26 груд. 2014 р.). — К.: НТТУ «КПІ», 2015. — С. 337—340.

ПРО ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ ТВОРЧОЇ ОСОБИСТОСТІ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ

О. І. Буковська

Лицей «Престиж», Київ, Україна

bukaoks@ukr.net

У статті розглядається проблема розвитку творчого мислення при вивченні математики. Наводяться приклади задач, які можуть використовуватися в освітньому процесі, а також виокремлюються фактори, які сприяють розвитку творчого мислення старшокласників, студентів при вивченні математики.

Ключові слова: *творчість, творчі здібності, допоміжна задача, продуктивне мислення.*

The problem of creative thinking at the Math's lessons are handling in this article. The examples of mathematics sums that can be used in the educational process are given, and the factors that promote the development of creative thinking of senior pupils at the Math's lessons are listed too.

Key words: *creative work, creative thinking, auxiliary problem, productive thinking.*

Відповідно до вимог, що пред'являються до сучасної школи, навчання в ній повинне орієнтуватися на розвиток творчої особистості, здатної самостійно набувати нових знань, застосовувати їх в умовах навколишньої дійсності. У зв'язку з цим проблема розвитку творчих здібностей учнів за допомогою системи розвивального навчання є однією з найбільш актуальних

Проблемі формування творчої особистості присвячено значну кількість досліджень. Більшість науковців визначають творчість як системне явище, певну сукупність взаємопов'язаних елементів: творчі здібності, творчий процес, ступінь індивідуального розвитку творчих здібностей, якостей особистості, що забезпечують творчу діяльність, яку можна стимулювати і спрямовувати в певну систему. Концептуальні засади більшості досліджень ґрунтуються на таких положеннях: пріоритетним для навчально-виховного процесу, який сприяє розвитку творчої особистості учнів на уроках різних дисциплін та в позакласній роботі, є перехід від репродуктивної діяльності до творчої, стимулювання духовного взаємозбагачення суб'єктів педагогічного процесу, зацікавленого ставлення до людини та предмета творчості; підтримка й закріплення духовних, емоційно забарвлених переживань; активне залучення дітей до емоційних ситуацій вияву активного творчого самовираження. Основою творчої активності як якості творчої особистості є її творче самосприяння та ініціатива. Тому слід надавати можливість підліткам для самостійного власного почину творчості, виявлення певної авторської позиції.

Особистісно орієнтована система навчання і виховання особистості є необхідною умовою формування творчості з урахуванням особливостей педагогічного впливу на цей процес, що, у свою чергу, потребує створення певних педагогічних умов і, насамперед, цілеспрямованої духовної взаємодії педагогів і дітей. Ефективність виховання творчої особистості в навчально-

виховному процесі може бути підвищена за таких педагогічних умов:

- упровадження поетапного розвитку творчої особистості в навчально-виховний процес;
- педагогічно доцільного традиційних та інтерактивних освітніх технологій, спрямованих на забезпечення духовної взаємодії в процесі суб'єкт-суб'єктних відносин;
- урахування індивідуальності особистості у процесі організації проблемно-пошукової діяльності;
- активізації в особистості спонукальних мотивів до творчого самовираження;
- забезпечення спеціальної діяльності вчителів та вихователів до формування творчої особистості.

Нам видається цікавим погляд на творчість Дж. Гілфорда та С. Де Боно, бо вони вважають центральною ланкою творчості дивергентне — нестандартне, нешаблонне мислення, яке спрямоване на пошук нез'ясованого, такого, що виходить за межі стандарту, шукає невідомих шляхів, чутливе до схожості та різниці між об'єктами, знаходить декілька варіантів вирішення певної проблеми з нових позицій, відкидає відоме застаріле. Звідси випливає, що на минулого дивергентному мисленні можна вибудовувати пізнавальну творчу сферу, включаючи особистість в активні пізнавальні процеси, викликаючи високу чутливість сенсорики, спрямовуючи творчу діяльність на потребу людини.

Досвід переконливо свідчить, що сучасна школа намагається реалізувати здебільшого навчальні цілі, а особистість часто залишається поза увагою. Є тільки скромні намагання педагогічної науки здійснити переорієнтацію навчально-виховного процесу з тим, щоб забезпечити розвиток особистості, підвищити її інтелект та моральність.

Виникає необхідність створення таких ситуацій, які б активізували глибинні резерви душі, що лише зрідка виникають у розміреному буденному житті. Доцільність такого підходу переконує в тому, що особистість треба спонукати до таких вчинків, створювати такі ситуації в педагогічному процесі, де вона приходить до стану піднесення та захоплення.

На наш погляд, недостатньо наукових праць, присвячених розгляду впливу творчої діяльності педагога на творчу діяльність вихованців, розробці форм і методів розвитку творчих можливостей учнів у педагогічному процесі. Вагомим надбанням сучасної педагогічної науки є вирішення вченими окремих аспектів проблеми розвитку творчої особистості, спрямованих на розкриття механізмів формування внутрішніх та зовнішніх процесів особистісного становлення як потреби в самореалізації, самоутвердженні у творчій діяльності.

Творення особистості відбувається тоді, коли в центрі уваги виявляється не якийсь середній учень, а кожен як особистість, зі своєю самобутністю, унікальністю. Ми спираємося на такі положення:

- особистісний підхід у психології творчості повинен базуватися на цілісному уявленні про творчу особистість як систему окремих психічних

властивостей індивіда;

— необхідність розробки та використання особистісно орієнтованого комплексу методів вивчення, стимуляції, розвитку та реалізації творчого потенціалу.

Для активізації продуктивного мислення корисніше розв'язати одну задачу декількома способами, ніж багато різних. Як приклад можна розглянути розв'язування ірраціонального рівняння.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 2\sqrt{9 - 3x} = 3\sqrt{2x - 2} + \sqrt{24}$$

Розв'язання: ОДЗ $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0, \\ 9 - 3x \geq 0, \\ 2x - 2 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [3; \infty) \\ x \leq 3 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad x \in \{1; 3\}$

Перевіряємо, чи є числа 1 і 3 коренями даного рівняння

$$x = 1 : 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6}, x = 1 \text{ — корінь рівняння}$$

$$x = 3 : 0 \neq 6 + 2\sqrt{6}, x = 3 \text{ не є коренем рівняння}$$

Відповідь: $x = 1$.

Приклад 2. Скільки коренів має рівняння $\cos x = \sqrt{x^2 + x - 2}$?

Якщо дане рівняння має корінь, то його значення повинно задовольняти

умову $\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x^2 + x - 3 \leq 0 \end{cases}$. Тому $x \in \left[\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; -2 \right] \cup \left[1; \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \right]$.

Якщо $x \in \left[\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; -2 \right]$, то x — кут чверті, і $\cos x < 0$, що не

задовольняє задану рівність.

Якщо $x \in \left[1; \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \right]$ функція спадає, а $\sqrt{x^2 + x - 2}$ зростає, тому

рівняння не може мати більше ніж 1 корінь.

$$f(x) = \cos x - \sqrt{x^2 + x - 2}, f(1) = \cos 1 > 0, \text{ а}$$

$$f(1,2) = \cos 1,2 - \sqrt{0,64} < \cos \frac{\pi}{3} - 0,8 < 0,$$

тому рівняння має 1 корінь, що належить інтервалу $\left[1; \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \right]$.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $x^2 + \sqrt{x} = \frac{12}{x} + 15$.

Розв'язання: дане рівняння виду $f(x) = q(x)$, причому $f(x)$ — зростаюча функція, $q(x)$ — спадна. Отже, дане рівняння має один корінь. Неважко його підібрати $x = 4$.

Відповідь: $x = 4$.

Приклад 4. Розв'язати: рівняння $\sqrt{6 + \sqrt{6 + x}} = x$.

Розв'язання: якщо розглядати функцію $f(x) = \sqrt{6 + x}$, то дане рівняння можна подати у вигляді $f(f(x)) = x$, причому функція $f(x)$ — зростаюча. Дане рівняння рівносильне рівнянню $f(x) = x$.

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + x}} = x \Leftrightarrow \sqrt{6 + x} = x \text{ ОДЗ: } [0; \infty).$$

$$6 + x = x^2, x^2 - x - 6 = 0; x_1 = 3, x_2 = -2 \text{ (За теоремою Вієта).}$$

$$x_2 = -2 \notin D(x).$$

Відповідь: $x = 3$.

Отже, на основі аналізу тенденцій розвитку психологічних досліджень проблеми творчості робимо такий важливий висновок: творчий процес — це самовираження особистості як суб'єкта у творчій діяльності, реалізація внутрішнього потенціалу. Слід відзначити, що є зміни в пізнавальній, творчій мотивації. Завдяки такому розвиваючому ефекту, творчість виконує функцію ефективного засобу духовного розвитку особистості. Багатьма науковцями та дослідниками доведено, що розвиток і формування дитини досягається за допомогою системи навчально-виховних заходів, доцільно спланованого педагогічного впливу вчителя шляхом організації певних видів діяльності, що сприяють виявам творчості, виявленню таланту дитини. Найбільш яскравою характеристикою творчого мислення в математиці є вміння розв'язувати математичні задачі.

Список літератури

1. Буковська О. І., Васильєва Д. В. Гурток з математики у 7 класі. Математичне моделювання. математики // Математика в сучасній школі. — 2014. — № 6. — С. 39—47.
2. Буковська О. І. Особливості формування ключових і предметних компетентностей учнів у навчально-виховному процесі школи повного дня // Матеріали звітної науково-практичної конференції за результатами наукових досліджень співробітників, докторантів, аспірантів, здобувачів і наукових кореспондентів Інституту педагогіки НАПН України за 2013 рік. — 2013. — С. 124—130.
3. Буковська О. І. Диференційований підхід до організації самостійної навчальної діяльності старшокласників у процесі вивчення математики // VIII міжрегіональний семінар «Зміст та специфіка сучасного науково-методичного забезпечення вступу у ВНЗ». — Київ, НАУ, 2013 р.
4. Буковська О. Розвиток креативності, критичності, творчості на уроках математики. ТЕОРІЯ та ПРАКТИКА компетентісного навчання: Навчально-методичний посібник / Рекомендовано Вченою Радою ІП НАПН України, 2014 р. — 96 с.

МИКОЛА ПАВЛОВИЧ ХОМЕНКО

(до 100-річчя від дня народження)

Т. М. Виврот

Київ, Україна

М. П. Хоменко — математик, який спеціалізувався в галузі геометрії, топології та теорії графів, народився 6 січня 1915 р. в м. Тараща Київської обл. В 1938 р. закінчив математичне відділення фіз.-мат. факультету Київського університету, згодом аспірантуру на кафедрі геометрії цього ж університету. Будучи студентом університету на 1-му і 2-му курсах слухав лекції академіка Михайла Пилиповича КРАВЧУКА з вищої алгебри (про це згодом написав в працях Сьомої Міжнародної Наукової Конференції ім. акад. М. Кравчука (14—16 травня 1998 р., Київ)).

Під час Другої Світової війни Микола Павлович служив офіцером в Радянській Армії. Повернувшись до цивільного життя, з 1.V.1945 р. почав працювати на посаді асистента кафедри математики Київського політехнічного ін-ту, згодом — на посаді доцента (з 1950 р.) кафедри вищої математики цього ж ін-ту до 25.VIII.1960 р., коли був звільнений у зв'язку з переходом на роботу в Київський Державний ун-т. Не перериваючи викладання в Київському політехнічному інституті з 1.IX.1949 р. по 1.IX.1954 р. завідував кафедрою математики, згодом — об'єднаної кафедри математики та нарисної геометрії Київського ін-ту кіно-інженерів. З серпня 1960 р. по жовтень 1961 р. працював на посаді доцента кафедри геометрії Київського університету, був заступником декана, виконуючим обов'язки декана мех.-мат. факультету. В 1961—1986 рр. працював старшим науковим співробітником Інституту математики Академії наук УРСР (нині НАН України).

Протягом багатьох років Микола Павлович читав лекції з аналітичної геометрії, диференціальної геометрії, проективної геометрії, основ геометрії, теорій поверхонь і згинань поверхонь, математичного аналізу, теорії функцій, спеціальних функцій, математичної фізики, основ сучасної алгебри, теорії чисел, топології та теорії графів в Київських університеті та політехнічному інституті, Київському та Мелітопольському педагогічних інститутах і Київському інституті кіно-інженерів.

В Інституті математики АН УРСР Микола Павлович керував науково-дослідною роботою, включеною у Всесоюзне державне планування, а саме темою № 12 з топологічної та комбінаторної теорії графів, організував і більше 20 років керував семінаром з теорії графів. 14 його аспірантів, які захистили дисертації,— кандидати наук. Є автором біля 250 наукових праць з геометрії, топології, теорії графів, комбінаторного аналізу та історії математики, уклав російсько-український словник математичної термінології: понад 20 000 термінів в «Російсько-українському словнику наукової термінології» (К.: Наукова думка, 1998).

Проект Миколи Павловича «Нові методи в теорії графів та їх застосування» був у числі науково-дослідних робіт-переможців проектів Державного комітету України з питань науки і технологій в 1992 р. (будучи на пенсії).

У двох випусках Міжнародного Біографічного Центру (Кембридж, Англія), досить детально позитивно охарактеризована наукова (8-й випуск [1]) та науково-педагогічна (9-й випуск [2]) діяльність Миколи Павловича; у великій оглядовій статті (Китай) про розвиток теорії графів у всьому світі за 250 років [3] індекс позитивної характеристики його наукової діяльності посідає п'яте місце серед всіх математиків, які займались теорією графів починаючи з 1736 р.

Микола Павлович — учасник Великої Вітчизняної війни, за що має 11 урядових нагород, всього — 13 урядових нагород та за наукову й науково-педагогічну діяльність 2 комплекти нагород Міжнародного Біографічного Центру (Кембридж, Англія).

Список літератури

1. International Who's Who of Intellectuals. Cambridge England: IBC. 8 ed. — 1990. — P. 349.
2. International Who's Who of Intellectuals. Cambridge England: IBC. Jubilee 9 ed. — 1992. — P. 332.
3. Advances in Mathematics (China). — 1984. — **13**, No. 4. — P. 241—253.



ШЛЯХИ ВДОСКОНАЛЕННЯ ПРОФЕСІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

О. В. Гнепа

Волинське державне училище культури і мистецтв, Луцьк, Україна

olchik_gnepa@ukr.net

Модернізація вітчизняної освіти, науки і культури, формування інтелектуального і духовного потенціалу нації вимагають нового підходу до професійної підготовки майбутніх педагогів, яка має ряд недоліків:

- багатопредметність та інформаційне перевантаження навчального процесу;
- переважаючу фахову теоретичну підготовку і недостатню практичну;
- формалізм і фрагментарність знань і умінь, нерозуміння їх походження,
- невміння самостійно працювати з навчальною літературою;
- домінуючими суб'єкт-об'єктними відносинами між викладачем і студентами;
- фрагментарне впровадження інноваційних технологій у навчальний процес;
- недостатній рівень мотивації до навчання і національної самосвідомості.

Шляхи подолання вказаних суперечностей вбачаємо в оновленні змісту навчального процесу вищої школи відповідно до сучасних тенденцій розвитку української освіти: неперервності, гуманізації та гуманітаризації, диференціації та інтеграції, використанні інноваційних технологій [1, с. 2; 2, с. 7].

Варто зауважити, що наступність навчання є одним із важливих принципів неперервності освіти, який значно активізує процес сприйняття матеріалу, забезпечує формування якісно нового рівня знань, дозволяє уникнути труднощів адаптації першокурсників, підвищує якість професійної підготовки вчителів математики. Включення у курси вищої математики питань з елементарної математики дозволяє систематизувати знання студентів зі шкільного курсу математики та виявити ті основні поняття і методи, які є наскрізними у всіх її розділах; показати студентам специфіку роботи вчителя математики, сприяти виробленню у них власних педагогічних технологій.

Необхідність переходу до неперервної освіти підвищує роль самостійної роботи, адже самостійність у пізнанні є основою самовдосконалення та самоосвіти. На жаль, більшість студентів не вміє працювати з навчальною літературою. Розв'язати цю проблему можна шляхом використання різноманітних форм і видів самостійної діяльності студентів; їх залучення до систематичної роботи з навчальною літературою; консультування та контролю з боку викладача. Самостійна робота з першоджерелами формує у майбутнього вчителя вміння грамотно, з мінімальними затратами часу опрацьовувати літературу, освоювати нові знання, використовувати знайдений матеріал у професійній діяльності, тобто загальні основи самоосвіти [1, с. 19; 2, с. 244—246]

Гуманістичну модель розвитку особистості реалізує концепція розвивального навчання, яка створює умови для особистісного розвитку студента як суб'єкта цієї діяльності. Інноваційність концепції полягає у відмові від установки на готові знання, засвоєнні студентом матеріалу на такому рівні труднощів, який перебуває у «зоні найближчого розвитку» його навчальних можливостей. Це означає, що студент лише тоді виявляє розумову активність, коли перед ним виникають проблеми, які потрібно розв'язати. Зауважимо, що є такі вимоги до організації навчального процесу в системі розвивального навчання: пріоритет діалогово-дискусійної форми навчальних занять; розвиток творчого мислення студентів та оволодіння ними навичками дослідницької діяльності; одержання студентом нових ідей і результатів; створення власного досвіду професійної діяльності і апробація його на практиці [4; с. 5, 16, 17, 20].

Важливим напрямом гуманізації предметів математичного циклу є використання у навчальному процесі історичного матеріалу. Історичний підхід у навчанні сприяє формуванню у студентів цілісної системи математичних знань та їх свідомому засвоєнню, умінню використовувати ці знання у майбутній професійній діяльності, позитивно впливає на розвиток особистісних якостей. Ефективні такі форми використання історичного матеріалу: вступна лекція на початку нової теми; коротка біографія видатного математика; ознайомлення студентів із висловлюваннями про математику і математиків; розв'язування історичних задач. Проте, історія математики є не лише засобом вивчення інших дисциплін, а також самостійним навчальним предметом. Лекції з історії математики доречно будувати за хронологічним принципом, а на практичних заняттях висвітлювати історію розвитку окремих математичних галузей. Обов'язковим є вивчення історії української математики [1; с. 4—5, 9, 16—21, 33].

Водночас вагомим є усвідомлення кожним викладачем педагогічного навчального закладу, що він навчає не просто студентів, а майбутніх учителів, які сприймають та оцінюють його з позиції майбутньої професійної діяльності. Використовуючи власні методи і засоби навчання, викладач дає можливість майбутнім учителям, які самі перебувають у ролі учнів, ніби зсередини побачити і відчути дидактичний вплив на рівень засвоєння нового матеріалу та емоційний ефект, який при цьому створюється [1, с. 17; 2, с. 29].

З цією метою у сучасній науці з'явилися праці, присвячені проблемі професійної спрямованості або так званій «педагогізації» навчання фахових дисциплін майбутніх вчителів математики. І. Шиманський рекомендує усі питання розглядати так, щоб студент міг використати цей матеріал у своїй педагогічній роботі: на уроках або заняттях шкільного математичного гуртка. Тобто професійно спрямоване навчання вищої математики передбачає висвітлення психолого-педагогічного компоненту у процесі підготовки студентів, наявність тісних зв'язків між математичною і методичною підготовкою, зокрема практичними рекомендаціями щодо проведення уроку, використання у майбутній роботі методів і прийомів активного навчання тощо. Отже, професійна підготовка вчителя вимагає не лише опанування студентом

теоретичного матеріалу, але й оволодіння мистецтвом навчання математики. Саме методична підготовка визначає професіоналізм учителя, оскільки спрямована на розуміння цілісного освітнього процесу з навчання математики, усвідомлення «себе у професії» та швидку адаптацію молодих вчителів до особливостей професійної діяльності. Особистісному розвитку студентів сприяє обговорення пробних уроків із керівниками педагогічної практики; призначення на ці посади викладачів, які мають значний досвід роботи у школі; наявність у структурі педагогічного університету зразкової школи [2, с. 11, 29].

Вчитель повинен вміти організувати навчання так, щоб кожен учень, незалежно від того, чим він буде займатися у майбутньому, отримав належний рівень математичної підготовки. У наш час запроваджене профільне вивчення ряду дисциплін учнями, яке є засобом їх самореалізації і професійного самовизначення. Аналіз науково-педагогічної літератури і власний досвід викладання дозволяють виділити проблеми, які виникають під час роботи з учнями у класах гуманітарного профілю: зменшення кількості годин, відсутність методичної літератури з питань викладання математики в гуманітарному класі, психофізіологічні особливості учнів, низький рівень мотивації. Зрозуміло, що існують суттєві відмінності між гуманітаріями і математиками, на які потрібно звертати особливу увагу у процесі професійної підготовки майбутніх вчителів. Для учнів класів гуманітарного профілю необхідно викладати математику емоційно, широко використовувати наочний матеріал, історичні факти, дидактичні ігри, групову роботу. Отримані в університеті знання полегшать майбутньому педагогу роботу у гуманітарному класі [2, с. 247; 3, с. 177—178].

Важливим напрямом диференціації є навчання обдарованих, талановитих дітей. Тому доцільно ввести до робочих програм з психолого-педагогічних дисциплін питання, що стосуються визначення поняття обдарованості, її основних типів, особливостей діагностування, педагогічних технологій розвитку обдарованих дітей. Кваліфікований учитель математики повинен бачити в кожному учневі творчу особистість, вміти організовувати навчальну діяльність з урахуванням рівнів і сфер вияву обдарованості, запроваджувати у своїй професійній діяльності елементи нових технологій тощо.

Поруч із диференціацією сучасної вищої освіти доцільно впроваджувати інтегративний підхід у професійну підготовку майбутніх вчителів. Його використовують із метою подолання фрагментарності знань студентів, економії часу за рахунок уникнення дублювань навчального матеріалу або укрупнення його частин, міцності засвоєних знань. Доцільно інтеграційною основою навчання математичних дисциплін розглядати історію математики. Її широке використання допомагає студентам зрозуміти складну структуру математики, шляхи і перспективи розвитку, розкриває взаємовплив, взаємопроникнення наукових теорій, тобто формує цілісну систему знань з математики [1, с. 30].

Ефективним засобом оновлення змісту математичної освіти є також поєднання традиційних форм навчання із новітніми технологіями. На нашу думку, професійне зростання майбутніх вчителів математики передбачає

ознайомлення студентів із досвідом викладачів-новаторів, педагогічними інноваціями і готовність до їх використання. Доцільно на заняттях із педагогіки розглянути такі технології: особистісно-орієнтованого, розвивального, колективного і життєтворчого навчання; інтеграційної природничої освіти тощо. Водночас вивчення у вищому навчальному закладі дисциплін із застосуванням інформаційних технологій дозволить майбутнім математикам ефективно використовувати ці інновації у своїй професійній діяльності, зокрема у плануванні та проведенні уроку, пошуку та обробці інформації, підготовці методичних матеріалів, роботі з документами тощо.

Зауважимо, що формування особистості майбутнього педагога відбувається не лише у процесі навчання, а також у позааудиторній роботі. Остання, з одного боку, є складником професійної підготовки вчителя, а з іншого — особливою формою організації студентського життя, яка має чітку професійну спрямованість. Позааудиторні заходи спрямовані на забезпечення потреб студентів у творчій діяльності за інтересами, на формування активної життєвої позиції та на стимулювання професійного самовдосконалення тощо.

Отже, пропонуємо такі шляхи вдосконалення професійної підготовки майбутніх вчителів математиків: забезпечення переважачого обсягу методичних і педагогічних дисциплін; педагогізація навчання фахових дисциплін; орієнтація на суб'єкт-суб'єктну взаємодію учасників навчального процесу; скорочення багатопредметності; дотримання наступності; використання історико-математичного матеріалу; реалізація інтегративного підходу у навчанні і розгляд історії математики як інтеграційної основи навчання дисциплін математичного циклу; вивчення специфіки викладання математики обдарованим дітям, у класах різного профілю, навчальних закладах різного типу; поєднання традиційних форм навчання із новітніми технологіями; підвищення ролі самостійної роботи; організація позааудиторної роботи; розвиток патріотизму і національної самосвідомості.

Усе це сприятиме підготовці творчого вчителя, який не лише володіє професійними знаннями, а й відрізняється стійкою мотивацією до педагогічної діяльності та постійним прагненням до самовдосконалення.

Список літератури

1. Бевз В. Г. Історія математики як інтеграційна основа навчання предметів математичного циклу у фаховій підготовці майбутніх учителів: Автореф. дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02 / В. Г. Бевз; Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова. — К., 2007. — 46 с. — укр.
2. Михалін Г. О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу / Г. О. Михалін. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2003. — 320 с.
3. Панішева О. В. Педагогічний дискурс: викладання математики у гуманітарному класі / О. В. Панішева // Педагогічні науки. Профільна освіта : зб. наук. пр. — Суми: Вид-во СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2009. — Ч. 1. — С. 174—181.
4. Семенець С. П. Теорія і практика розвивального навчання у системі методичної підготовки майбутніх учителів математики: Автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.04 / С. П. Семенець; Житомирський держ. ун-т імені Івана Франка, Житомир. — 2011. — 49 с. — укр.

ВИКОРИСТАННЯ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ ЯК ЕФЕКТИВНОЇ ФОРМИ ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

В. О. Горбачук

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
gorbachuk.vas@gmail.com

На сьогодні, українська система освіти стикається зі значними викликами в галузі підвищення якості надання освітніх послуг студентам. Це обумовлено багатьма факторами, серед яких дуже гостро постає питання ефективної, якісної і результативної організації навчального процесу у ВНЗ. Успішний навчальний процес залежить від належної комбінації таких методичних компонентів як цілі і зміст навчального матеріалу, методи, форми і засоби організації навчального процесу. В доповіді розглядається застосування лабораторно-практичного заняття (роботи) як форми організації навчального процесу при вивченні змістового модуля «Математична статистика» з дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика». Разом з тим пропонується огляд навчального посібника з розробленими лабораторно-практичними роботами (ЛПР) для вивчення цього змістового модуля, які подаються автором як альтернатива класичній формі організації навчального процесу з математичної статистики — практичним заняттям.

По своїй суті лабораторно-практичні заняття є певною комбінацією практичних занять з лабораторними роботами і дозволяють:

— активізувати процес мислення особистості в зоні актуального та найближчого розвитку за умов спілкування на рівні студент — комп'ютер, студент — комп'ютер — викладач, студент — навчальний посібник;

— експертне рейтингове (в межах модуля) оцінювання знань студентів на звичайному, технологічному (технічному), високопродуктивному та творчому рівнях під час допуску, виконання та захисту лабораторних робіт;

— одночасну індивідуальну самостійну роботу студентів групи 12 — 15 осіб з комп'ютерною підтримкою. Більш докладно зміст лабораторно-практичних занять з математичної статистики, а також їх переваги та недоліки описані в статті автора під назвою «Лабораторно-практичне заняття з математичної статистики»[1].

Далі ми пропонуємо загальний огляд навчального посібника в якому розроблені лабораторно-практичні роботи для усього модуля «Математична статистика» при вивченні дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика». Даний модуль ми розділили на наступні змістові підмодулі:

1. Первинна обробка емпіричних даних.
2. Статистична оцінка параметрів розподілу.
3. Статистична перевірка статистичних гіпотез.
4. Елементи регресійного та кореляційного аналізу.
5. Елементи дисперсійного аналізу.

До кожного з цих підмодулів розроблена повноцінна лабораторно-практична робота:

ЛПР №1. Первинна обробка емпіричних даних. Статистичні оцінки параметрів розподілу. Включає в себе дві теми з математичної статистики: «Первинна обробка емпіричних даних» та «Статистична оцінка параметрів розподілу». Після виконання даної роботи студенти мають навчитися: будувати гістограму і полігон частот, розраховувати числові характеристики варіаційного ряду (середні значення варіаційного ряду, моду, медіану, стандартне відхилення), точкові та інтервальні оцінки параметрів генеральної сукупності, знаходити довірчі інтервали.

ЛПР №2. Статистична перевірка статистичних гіпотез. Включає в себе тему «Статистичні гіпотези та статистичні критерії». Після виконання даної роботи студенти мають вміти перевіряти наступні гіпотези:

— Гіпотеза про середнє значення нормального розподілу при відомому середньому квадратичному відхиленні.

— Гіпотеза про середнє значення нормального розподілу при невідомому середньому квадратичному відхиленні.

— Гіпотеза про дисперсію нормального розподілу.

— Гіпотеза про рівність двох середніх значень.

— Гіпотеза про рівність двох дисперсій.

ЛПР №3. Статистична перевірка статистичних гіпотез. Включає в себе тему «Статистичні гіпотези та статистичні критерії». Після виконання даної роботи студенти мають вміти перевіряти гіпотези про тип розподілу генеральної сукупності (нормальний, рівномірний, біноміальний, експоненційний).

ЛПР №4. Елементи регресійного та кореляційного аналізу. Включає в себе дві теми «Визначення наявності та щільності взаємозв'язків між показниками. Коефіцієнт кореляції. Кореляційне відношення» та «Елементи регресійного аналізу. Лінійне рівняння регресії. Оцінка параметрів, перевірка адекватності. Нелінійні рівняння. Поняття багатовимірної вибірки». Після виконання даної роботи студенти мають навчитись: визначати наявність та щільність взаємозв'язків між показниками, обраховувати лінійний коефіцієнт кореляції та кореляційне відношення, будувати регресійні моделі, обчислювати лінійні та узагальнені вибіркові регресійні моделі та їх параметри, перевіряти на адекватність лінійні та узагальнені вибіркові регресійні моделі.

ЛПР №5. Елементи дисперсійного аналізу. Включає в себе однойменну тему з математичної статистики. Після виконання даної роботи студенти мають навчитись: робити однофакторний, двохфакторний та багатфакторний аналіз зв'язних та незв'язних виборок.

Структура розроблених лабораторно-практичних робіт наступна:

— тема, мета, завдання;

— теоретичні відомості;

— приклад розв'язаного завдання;

- рекомендована література;
- обладнання;
- хід роботи;
- методичні рекомендації до виконання роботи;
- контрольні запитання до ЛПР;
- домашнє завдання.

Представлені в доповіді результати використовуються в навчальному процесі в Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова під час вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика».

Список літератури

1. Горбачук В. О. «Лабораторно-практичне заняття з математичної статистики». Вища освіта України. Тематичний випуск «Педагогіка вищої школи: методологія, теорія, технології». Додаток 2, том 2, 2014 р. — С. 117—122.

**ВЕЛИКІ ПІРАМІДИ, ВЕЛИКИЙ СФІНКС ТА ХРАМИ ГІЗИ
АНТРОПОАСТРОНОМІЧНИЙ КОМПЛЕКС.
МАТЕМАТИКА, АСТРОНОМІЯ, СВІТОГЛЯД**

Г. Ю. Гриценко

*НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
yaropolkbazhaluk@gmail.com*



Найвеличнійший єгипетський храмовий комплекс, в якому 17 об'єктів, побудований в Гізі в середині III тис. до н. е.

Автором з'ясовано, що Великі піраміди, Великий Сфінкс та храми при них проектувалися за числами розвинутої математичної астрономії, дешифрованої ним, шумерської «Універсальної астрономо-математичної таблиці обернених величин» — «УАМТ».

Світогляд стародавніх єгиптян був антропо-космічним. Людина вважалася невід'ємною складовою живого Космосу, в якому світила та планети були антропоморфними Богами, які, подібно до людей, народжувалися, одружувалися, породжували дітей та помирали. Поява — відродження планет після періодів невидимості проектувалася на Людину, яка теж обов'язково повинна була воскреснути після смерті. Справжніми батьками Людини вважалися небесні Боги, оскільки у своїх періодах містили терміни народження Людини і сприяли як її народженню, так і воскресінню після смерті. Антропо-космічна філософія і втілена у пірамідах та храмах Єгипту.

Комплекс пірамід у Гізі проектувався вихідцями з Месопотамії, які привнесли в Єгипет шумерські астрономічні знання («УАМТ») та увічнили священні «числа пірамід» у Святому Письмі — Біблії.

Першими споруджувалися: піраміда Хефрена — «Піраміда Сонця» та Великий Сфінкс — «Марс — Гор», земним втіленням якого був фараон. Піраміда Мікеріна — «Піраміда Сатурна». Піраміда Хеопса — «Піраміда Місяця», найбільш досконала, зводилася останньою.

Об'єкти Гізи астрономо-математично взаємопов'язані. Піраміда та храми при ній — єдина антропо-астрономічна система.

Числа астрономії кодувалися у габаритах пірамід та Сфінкса у системі:

1 царський лікоть = 0,523 м — одна доба або місяць.

Обчислювальними одиницями були колони та скульптури у храмах, мегаліти в конструкціях, а також комірки у храмах, групування яких було обумовлене обчисленнями.

В числах розрядна кома ставилася за змістом, а нулі в кінці числа могли відкидатися або дописуватися. За «УАМТ» число «пі» = 3,125, а 2 «пі» = 6,25. Синодичні періоди планет фіксувалися у всьому діапазоні їхніх значень — від мінімальних до максимальних. Вважалося, що періоди світил та планет, а також змінні відносні кола Землі, Місяця і Сонця генеруються прецесійними швидкостями. Цикл прецесії коливався в межах:

$$69 \times 360 = 24\,840 \text{ років} \text{ — } 76 \times 360 = 27\,360 \text{ років.}$$

Змінне безнульове коло Сонця коливалося в межах:

$$69 \times 6 = 414 \text{ — } 76 \times 6 = 456.$$

Змінне безнульове коло Місяця коливалося в межах:

$$69 \times 1,5 = 103,5 \text{ — } 76 \times 1,5 = 114.$$

I. Піраміда фараона Хефрена

1. Висота — 274 царських ліктів — 143,3 м. За обмірами — 143,5 м.

2. Сторона квадратної основи — 411 ц. л. — 214,95 м. За обмірами — 215,3 м.

3. Периметр квадратної основи піраміди — 1644 ц. л.

4. Діагональ квадратної основи піраміди — 581,24177 ц. л.

5. Ребро піраміди — 399,42019 ц. л.

6. Апофема грані піраміди — 342,5 ц. л.

7. Пропорції піраміди: 3 (205,5) : 4 (274) : 5 (342,5). Прямокутний трикутник зі сторонами 3; 4; 5 Піфагором був запозичений у єгиптян.

8. Глибина «Підземної кімнати» — 13 ц. л. — 6,8 м. За обмірами — 6,8 м.

9. Периметр «Підземної кімнати» — 73,2 ц. л. — 38,28 м. Обміри — 38,8 м.

Сонце: $100\,000 : 274 = 600\,000 : 1644 = 364,9635 \text{ д.}$ $364,9635 + 0,0365 = 365 \text{ д.}$!

$13 \times 28 = 364 \text{ д.}$ 28 д. — див. «Поминальний храм». $73,2 \times 5 = 366 \text{ д.}$

Венера: 581,24 д. 274 д. — лінійна фаза Венери. $274 + 274 + 40 = 588 \text{ д.}$

40 д. — зворотній рух. 4 — число сторін основи піраміди. $4 \times 10 = 40.$

$240\,000 : 411 = 200\,000 : 342,5 = 583,9416 \text{ д.} \approx 584 \text{ д.}$ $584 \times 0,625 = 365 \text{ д.}$

Юпітер: 399,42 д.

Марс: $399,42 \times 2 = 798,84 \text{ д.} \approx 799 \text{ д.}$ $798,84 : 3 = 266,28 \text{ д.}$ — три 9-місячні дитини. $411 \times 3 = 1233.$ $1\,000\,000 : 1233 = 811,03 \text{ д.}$ — максимальний період.

$811 + 588 = 1399 \approx 1400.$ $1400 = 280 \times 5$ — Марс та Венера породжують п'ятьох 280-денних дітей.

Коло Сонця: 411.

Коло Місяця: $411 : 4 = 102,75.$ $342,5 \times 3 = 1027,5.$

Швидкість: $411 : 6 = 68,5 \text{ д.}$ $68,5 \times 360 = 274 \times 90 = 102,75 \times 240 = 411 \times 60 = 1644 \times 18 = 1233 \times 20 = 24\,660 \text{ діб, або років прецесії.}$

II. Поминальний храм при піраміді Хефрена

Обчислювальні одиниці: 2 — святилище з прилеглою коміркою; 5 комірок; 5 приміщень зі скульптурами; 12 колон-скульптур по периметру зали. Разом: 7

+ 17 = 24. 10 колон у залі; 14 колон у залі (2 + 4 + 8); 2 комірки; 2 колони у вестибулі; 4 комірки. Разом: $24 + 8 = 32$. 5 кораблів у ямах навколо храму.

П'ять комірок — стандартна кількість комірок. А. Елфорд слушно зазначив, що п'ять комірок, ймовірно, пов'язані з єгипетською легендою про народження богів протягом п'яти днів.

Венера: $24 \times 24 = 576$ д. (число з «УАМТ»).

Сатурн: $17 + 10 = 27$ д. — Місяць. $27 \times 14 = 189 \times 2 = 126 \times 3 = 378$ д.

Коло Сонця: $14 + 2 = 16$. $27 \times 16 = 432$. $12 \times 365 = 4380$. Кожна з дванадцяти колон-скульптур у залі символізувала Сонячний рік, а всі разом — коло Сонця. Число 4380 — див. «Великий Сфінкс».

Коло Місяця: $27 \times 4 = 108$.

Марс: $14 + 16 = 30$. $27 \times 30 = 378 + 432 = 810$ д. $576 + 189 = 765$ д. — Гордитя. див. «Великий Сфінкс». 189 д. — весняно-літній період сонячного року.

$24 \times 32 = 768$ д. (число з «УАМТ»). $576 + 768 = 224 \times 6 = (28 \times 8) \times 6$ — Венера та Марс породжують шістьох 8-місячних дітей.

Швидкість: $378 : 6 = 63$ р. $63 \times 360 = 378 \times 60 = 189 \times 120 = 126 \times 180 = 810 \times 28 = 108 \times 210 = 432 \times 52,5 = 22\,680$ р.

III. Нижній храм піраміди Хефрена

Обчислювальні одиниці: 23 — скульптури по периметру зали; 10 колон (5 + 5); 6 колон (3 + 3); 3 комірки першого поверху; 3 комірки над ними; 3 приміщення вестибулю; 4 Сфінкси при вході.

Венера: $(10 + 6) \times 3 \times 3 \times 4 = 576$ д. Чотири Сфінкси символізують Венеру.

$23 \times 5 \times 5 = 575$ д. $23 \times 3 \times 3 = 207$ д. — мінім. термін народження дитини.

Марс: колони ліворуч — $3 + 5 = 8$; колони праворуч — $3 + 5 = 8$.

$8 \times 8 \times 3 \times 4 = 768$ д. Чотири Сфінкси символізують Марса-Гора.

Коло Місяця: $575 \times 6 \times 3 = 10\,350$.

Коло Сонця: $1035 \times 4 = 4140$. Кожний Сфінкс символізує коло Місяця, а разом чотири Сфінкси — коло Сонця.

Швидкість: $23 \times 3 = 69$ р. $69 \times 360 = 207 \times 120 = 276 \times 90 = 1035 \times 24 = 4140 \times 6 = 24\,840$ діб, або років прецесії.

IV. Піраміда-супутниця піраміди Хефрена

1. Сторона квадратної основи — 38,4 ц. л. — 20,08 м. За обмірами — 20,1 м.

2. Глибина «Підземної кімнати» — 23 ц. л. — 12,03 м. За обмірами — 12 м.

Венера: $38,4 \times 15 = 576$ д. $23 \times 9 = 207$ д. — мінім. термін народження дитини.

Марс: $38,4 \times 20 = 768$ д.

V. Великий Сфінкс

Сфінкс символізував фараона, який був земним втіленням Марса-Гора. Єгиптяни поклонялися Сфінксу як богу Сонця.

1. Обчислювальні одиниці — лапи Сфінкса: 1; 2; 3; 4;

2. Висота — 38,25 ц. л. — 20,005 м. За обмірами — 20 м.

3. Відстань від грудей Сфінкса до його хвоста — 109,5 ц. л. — 57,27 м. За обмірами — 57,3 м.

4. Відстань від передніх лап Сфінкса до його хвоста — 137 ц. л. — 71,65 м. За Г. Хенкоком — 72 м.

5. Розмір Сфінкса у плечах — 22 ц. л. — 11,506 м. За Г. Хенкоком — 11,5 м.

6. Периметр Сфінкса — $137 + 22 + 137 + 22 = 274 + 44 = 296 + 22 = 318$ д.

Марс: $38,25 \times 20 = 765$ д. — Гор-дитя. $765 + 22 + 22 = 809$ д. — Гор-старий.

Венера: $318 + 274 = 296 \times 2 = 274 + 274 + 44 = 592$ д.

$(109,5 + 38,25) \times 4 = 147,75 \times 4 = 591$ д.

$137 - 109,5 = 27,5$. $275 + 275 + 40 = 590$ д.

$591 + 809 = 280 \times 5$. Венера та Марс породжують п'ятьох 280-денних дітей.

Перед грудьми Сфінкса стояла скульптура Людини, певно, висотою 28 ц. л., яка символізувала 280-денну дитину Марса і Венери. $28 \times 27,4 = 767,2$ д. ≈ 768 д.

Коло Місяця — 109,5.

Коло Сонця — $109,5 \times 4 = 438$. $438 + 360 = 798$ д. — Марс

$798 = 266 \times 3$ — три 9-місячні дитини. За єгипетською легендою бог Сонця Ра породив із земною жінкою трьох дітей — майбутніх царів.

Швидкість: $438 : 6 = 73$ д. $73 \times 360 = 365 \times 72 = 109,5 \times 240 = 438 \times 60 = 26\,280$ діб, або років прецесії.

VI. Храм Сфінкса

Обчислювальні одиниці — 8 колон на західній стороні храму ($6 + 2$); 8 колон на східній стороні ($6 + 2$); 6 колон на південній стороні; 6 колон на північній стороні. Разом — 28.

Марс: $6 + 6 = 12$. $12 \times 8 \times 8 = 768$ д.

Венера: $8 + 8 = 16$. $16 \times 6 \times 6 = 576$ д.

$768 + 576 = 224 \times 6 = (28 \times 28) \times 6$ — шість 8-місячних дітей Марса і Венери.

$768 + 592 = 272 \times 5 =$ п'ять 272-денних дітей. $576 + 189 = 765$ д. — Гор-дитя.

Швидкість: 76,8 д. $76,8 \times 360 = 768 \times 36 = 576 \times 48 = 108 \times 256 = 432 \times 64 = 27\,648$ д.

VII. Піраміда фараона Мікеріна

1. Висота — 126 ц. л. — 65,9 м. За А. Море — 66 м.

2. Сторона квадратної основи — 207 ц. л. — 108,26 м. За обмірами — 108,4 м.

3. Периметр основи піраміди — 828 ц. л.

4. Діагональ квадратної основи піраміди — 292,7422 ц. л.

5. Ребро піраміди — 193,133 ц. л.

6. Апофема грані піраміди — 163,059 ц. л.

7. Висота «Підземної кімнати»: 6,75 ц. л. (число з «УАМТ») — 3,53 м. За обмірами — 3,5 м.

8. Периметр «Підземної кімнати» — 33,75 ц. л. (число з «УАМТ») — 17,65 м. За обмірами — 17,6 м.

Сатурн: $126 \times 3 = 378$ д. $100\,000 : 378 = 264,55$ д. — 9-місячна дитина.
Сатурн-Род у римлян був богом хліборобства. За К. Птолемеєм у Вавилоні Сатурну поклонялися як богу Сонця — Мітрі.

Венера: $828 : 3 = 276$ д. — лінійна фаза Венери. $193,133 \times 3 = 579,4$ д.

$276 + 276 + 40 = 230 + 92 + 230 + 40 = 592$ д. $292,7422 \times 2 = 585,4844$ д.

Марс: $193,133 \times 4 = 772,533$ д. $100\,000 : 126 = 793,65$ д.

$793,65 = 264,55 \times 3$ — троє 9-місячних дітей.

Коло Землі: $126 + 274 = 400$. 274 — висота піраміди Хефрена.

Коло Місяця: $207 : 2 = 103,5$.

Коло Сонця: $207 \times 2 = 103,5 \times 4 = 414$.

Швидкості: $126 : 2 = 63$ д. $63 \times 360 = 378 \times 60 = 126 \times 180 = 22\,680$ д.

$414 : 6 = 69$ р. $69 \times 360 = 103,5 \times 240 = 414 \times 60 = 207 \times 120 = 276 \times 90 = 40 \times 621 = 24\,840$ діб, або років прецесії.

VIII. Поминальний храм піраміди Мікеріна

Обчислювальні одиниці — 6 колон ($3 + 3$); 1 — окрема комірка; 5 комірок.

Коло Місяця: $207 \times 5 = 1035$.

Коло Сонця: $828 \times 5 = 1035 \times 4 = 4140$.

Діти: $276 \times 5 = 1380$ д. — п'ять дітей.

Числа смерті: (6), $6\,000 : 33,75 = 29,63 \times 6 = 177,8$ д. — період місячних і сонячних затемнень.

(6), $6\,000 : 6,75 = 29,63 \times 30 = 888,9$ д. — 30-місячний цикл місячних затемнень.

IX. Нижній храм піраміди Мікеріна

Обчислювальні одиниці: біля західної стіни 5 квадратних комірок; 6 колон ($2 + 4$); 12 довгих комірок. Разом 23. Біля східної стіни: 4 комірки; 4 колони; 4 комірки. Разом: $8 + 4 = 12$.

Венера: $6 \times 12 = 72$. $4 + 4 = 8$. $72 \times 8 = 576$ д. $23 \times 12 = 276$ д. — лінійна фаза Венери. 276×5 — народження п'ятьох 276-денних дітей.

Марс: $4 \times 4 \times 4 = 64$. $12 \times 64 = 768$ д.

Біля піраміди Мікеріна розташована компактна група з трьох пірамід-супутниць.

X. Піраміда-супутниця № 1 піраміди Мікеріна

1. Висота — 54 ц. л. — 28,24 м. За обмірами — 28,3 м.

2. Сторона квадратної основи — 84,5 ц. л. — 44,19 м. За обмірами — 44,3 м.

3. Периметр квадратної основи піраміди — 338 ц. л.

4. Діагональ квадратної основи піраміди — 119,5 ц. л.

Венера: $84,5 \times 2 = 169$. $100\,000 : 169 = 591,72 \approx 592$ д.

Синодичний місяць: $10\,000 : 338 = 29,586$ д.

Місячний рік: $60\,000 : 169 = 29,586 \times 12 = 355,03$ д.

Юпітер: $84,5 \times 3 = 253,5$. $100\,000 : 253,5 = 394,489$ д.

Марс: $394,48$ д. $\times 2 = 788,96$ д. $119,5 \times 64 = 764,8$ д.

Царський лікоть: $400 : 764,8 = 0,5230125$ метра.

Швидкість — 84,5 д. $84,5 \times 360 = 169 \times 180 = 30\,420$ діб, або років прецесії.

Швидкість — 84,5 року протягом 1 градуса була запозичена в єгиптян Гіппархом та прийнята ним як прецесійна.

Сонячний рік: $30,42 \times 12 = 365,04$ діб.

Число смерті: $60\,000 : 338 = 177,51$ д. — період місячних і сонячних затемнень.

XI, XII. Дві однакові піраміди-супутниці № 2 і № 3 піраміди Мікеріна

1. Висота — 40,5 ц. л. — 21,18 м. За обмірами — 21,2 м.

2. Сторона квадратної основи — 60,5 ц. л. — 31,64 м. За обмірами — 31,5 м.

3. Периметр квадратної основи піраміди — 242 ц. л.

4. Діагональ квадратної основи піраміди — 85,56 ц. л.

Юпітер: $40,5 \times 10 = 405$ д.

Марс: $405 \times 2 = 810$ д.

Венера: $40,5 \times 6 = 243$ д. — період видимості Венери вранішньої або вечірньої зорі. $85,56 \times 2 = 171,12$. $100\,000 : 171,12 = 584,385$ д.

Сонячний рік: $584,385 \times 0,625 = 365,241$ д.

Габарити трьох пірамід-супутниць фіксують період Венери:

1. $54 \times 2 = 108 = 92 + 16$ — періоди верхньої та нижньої невидимостей Венери. 54 — висота піраміди-супутниці № 1.

2. Периметри основ пірамід-супутниць № 2 та № 3 — 242 д. та 242 д.

$242 + 92 + 242 + 16 = 576 + 16 = 592$ д. 242 д. — період видимості Венери вечірньої зорі та 242 д. — період видимості Венери вранішньої зорі.

Число 242 — кількість астрономічних ієрогліфів у «Фестському диску» — астрономічному обчислювальному пристрої початку II тисячоліття до н. е.

XIII. Велика піраміда фараона Хеопса

1. Висота — 281,25 ц. л. (число з «УАМТ») — 147,09 м.

За обмірами — 146,7 м. Вершина піраміди зруйнована.

2. Сторона квадратної основи — 444 ц. л. (число з «УАМТ») — 232,12 м.

За обмірами — 232,4 м.

3. Периметр квадратної основи піраміди — 1776 ц. л.

4. Діагональ квадратної основи піраміди — 627,91 ц. л.

5. Апофема грані піраміди — 358,31 ц. л.

6. Ребро піраміди — 421,509 ц. л.

7. Глибина «Підземної кімнати»: 56,25 ц. л. (число з «УАМТ») — 29,42 м. За обмірами «приблизно 30 м».

8. Відстань від вершини піраміди до низу «Підземної кімнати» — 337,5 ц. л. (число з «УАМТ»).

9. Відстань від низу піраміди до низу «Кімнати цариці» — 38,25 ц. л. — 20 м. За обмірами «приблизно 20 м».

10. Відстань від вершини піраміди до низу «Кімнати цариці» — 243 д.

$27 \times 9 = 243$ д. — 9-місячний період народження дитини.

11. Відстань від низу піраміди до низу «Кімнати царя» — 81 ц. л. — 42,36 м. За обмірами — 42,3 м.

12. Відстань від низу «Підземної кімнати» до вершини «Башти» над «Кімнатою царя» — 180,5 ц. л.

Місячний рік: $100\,000 : 281,25 = 355,55$ д. $177,6 \times 2 = 29,6 \times 12 = 355,2$ д.

Синодичний місяць: $444 : 15 = 29,6$ д.

Марс: $38,25 \times 20 = 765$ д. — Гор-дитя, який народжується в «Кімнаті цариці».

Символічний 81-річний вік (810) фараона Гора-старого, який помер і якого тимчасово для вознесіння на Сонце клали в «Кімнаті царя».

$29,6 \times 27 = 799,2$ д. $799,2 = 266,4 \times 3$ — троє 9-місячних дітей.

Венера: $29,6 \times 20 = 592$ д.

Сонячний рік: $28,125 \times 13 = 365,625$ д. $365,625 : 0,625 = 585$ д. — Венера

$180,5 \times 2 = 361$ д. $361 + 5 = 366$ д. Число 5 — кількість перекриттів у «Башті» — 5 діб — епагомени, тобто дні, що над роком. «Башта» не «розвантажувальна», як помилково вважають дослідники, а обчислювальна система, яка символізує народження п'яти Богів протягом п'яти днів, як свідчить єгипетська легенда.

Коло Сонця: висота «Кімнати царя» — 11,25 ц. л. — 5,88 м. За обмірами — 5,8 м.

$11,25 \times 40 = 450$ — коло Сонця. Сонячні числа 366 і 450 сприяли вознесінню померлого фараона-Гора на Сонце.

Відносний радіус Місяця — 281,25 до радіуса Землі = 1000. Обчислення:

$1000 \times 6,25 = 6\,250$ — коло Землі. $281,25 \times 6,25 = 1\,757,8125$ — коло Місяця. Відносні числа кіл Землі та Місяця спрощувалися множенням на 64.

$6\,250 \times 64 = 400\,000$ — відносне коло Землі за Аристотелем, а не коло Землі у грецьких стадіях, як помилково читається текст Аристотеля.

$1\,757,8125 \times 64 = 1\,125$ — відносне коло Місяця. $400 \times 1\,125 = 450\,000$ (450) — коло Сонця. У піраміді: $281,25 \times 4 = 1\,125$ — коло Місяця. 4 — чотири сторони основи піраміди. $1\,125 \times 4 = 4\,500$ — коло Сонця. 4 — чотири ребра піраміди.

Меркурій: $29,6 \times 4,5 = 44,4 \times 3 = 133,2$ д. $133,2 \times 2 = 29,6 \times 9 = 266,4$ д. — 9-місячна дитина.

Юпітер: $133,2 \times 3 = 29,6 \times 13,5 = 399,6$ д.

Марс: $399,6 \times 2 = 133,2 \times 6 = 799,2$ д. $799,2 = 266,4 \times 3$ — троє 9-місячних дітей.

$133,2 + 399,6 + 799,2 = 133,2 \times 10 = 1\,332$ д. — Меркурій-Тот — «трисмегіст» — тричі величний.

Швидкості: $444 : 6 = 74$ д. та $450 : 6 = 75$ д.

$74 \times 360 = 133,2 \times 200 = 266,4 \times 100 = 29,6 \times 900 = 177,6 \times 150 = 355,2 \times 75 = 444 \times 60 = 592 \times 45 = 26\,640$ діб, або років прецесії.

$75 \times 360 = 281,25 \times 96 = 1\,125 \times 64 = 4\,500 \times 6 = 108 \times 250 = 432 \times 62,5 = 375 \times 72 = 270 \times 100 = 27\,000$ діб, або років прецесії.

$20\,000 : 75 = 266,6$ діб — 9-місячна дитина.

Взаємозв'язок пірамід Хеопса і Хефрена

1. Діагональ основи піраміди Хефрена — $581,24177$ ц. л.

Діагональ основи піраміди Хеопса — $627,91$ ц. л.

$581,24177 \times 627,91 = 364,968$ д. ≈ 365 д.

2. Сторона основи піраміди Хефрена — 411 ц. л.

Дві сторони основи піраміди Хеопса: $444 \times 2 = 888$.

$411 \times 888 = 364,968$ д. ≈ 365 д.

3. Висота піраміди Хефрена — 274 ц. л.

Період Меркурія за пірамідою Хеопса: $44,4 \times 3 = 133,2$ д.

$274 \times 133,2 = 364,968$ д. ≈ 365 д.

4. Період Марса у «Храмі Сфінкса» — 768 д.

Відстань від вершини піраміди Хеопса до низу «Підземної кімнати» — $337,5$ д. $768 \times 337,5 = 72 \times 360 = 25\,920$ років прецесії.

XIV. Поминальний храм піраміди Хеопса

Обчислювальні одиниці: 38 колон по периметру храму; 12 колон у групі ($4 + 8$); 3 кораблі в ямах навколо храму.

Коло Сонця: $38 \times 12 = 456$

Коло Місяця: $38 \times 3 = 114$. 3 — три кораблі.

Сонячний рік: $38 \times 8 = 30,4 \times 10 = 304$ д. — період у римському календарі.

$30,04 \times 12 = 364,8$ д.

Швидкість: $456 : 6 = 76$ д. $76 \times 360 = 30,4 \times 900 = 364,8 \times 75 = 114 \times 240 = 456 \times 60 = 27\,360$ діб, або років прецесії.

Біля піраміди Хеопса розташована компактна група з трьох пірамід-супутниць.

XV. Піраміда-супутниця № 1 при піраміді Хеопса

Сторона квадратної основи — $94,5$ ц. л. — $49,42$ м. За обмірами — $49,5$ м.

Сатурн: $94,5 \times 4 = 378$ д. $94,5 \times 2 = 189$ д. — весняно-літній період року.

XVI. Піраміда-супутниця № 2 при піраміді Хеопса

Сторона квадратної основи — $93,75$ ц. л. — $49,03$ м. За обмірами — 49 м.

Коло Місяця: $93,75 \times 3 = 281,25$ — відносний радіус Місяця.

$93,75 \times 12 = 281,25 \times 4 = 1125$.

Коло Сонця: $93,75 \times 48 = 1125 \times 4 = 281,25 \times 16 = 4\,500$.

$93,75 \times 4 = 375$ д. — Нефтида-породілля — дружина Сатурна-Сета.

$100\,000 : 275 = 266,6$ діб — 9-місячна дитина.

XVII. Піраміда-супутниця № 3 при піраміді Хеопса

Сторона квадратної основи — 90 ц. л. — $47,07$ м. За обмірами — $46,9$ м.

Коло Зодіаку: $90 \times 4 = 360$ градусів кола.

Марс: $90 \times 9 = 810$ діб. $810 = 270 \times 3$. 3 — три 27-денних дитини.

Вивчення автором ряду пірамід та храмів Стародавнього Єгипту, а також єгипетських храмів римської доби показав, що вони мають тотожний антропоастрономічний зміст, який походить з шумерської «Універсальної астрономо-математичної таблиці».

ГЕОМЕТРИЧНІ АРХЕОАСТРОНОМІЧНІ ОБ'ЄКТИ ПІВНІЧНОЇ АМЕРИКИ.

МАТЕМАТИКА, АСТРОНОМІЯ, СВІТОГЛЯД

Г. Ю. Гриценко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
yaropolkbazhaluk@gmail.com

У США виявлені стародавні гігантські геометричні земляні вали у формі квадратів, кіл та восьмикутників, які приблизно датуються 1000 р. до н. е. — 500 р. н. е. Їхнє призначення та стимули зведення залишаються нез'ясованими.

За нашими дослідженнями, ці споруди проектувалися вихідцями із Стародавнього Світу: єгиптянами, фінікійцями, карфагенянами та греками, численні сліди перебування яких в Америці постійно виявляють археологи.

Прибульці привнесли у Новий Світ синкретичний антропо-космічний світогляд, невід'ємною складовою якого були розвинуті астрономо-математичні знання, що містилися у сконцентрованому вигляді в «Універсальній астрономо-математичній таблиці» («УАМТ») шумерського походження, яка була дешифрована автором.

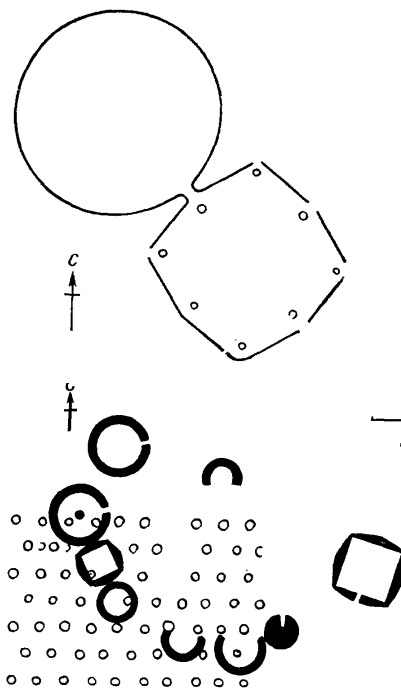
За антропокосмічним світоглядом Космос вважався живим, світила та планети були антропоморфними Богами. Вони сприяли народженню Людини та відродженню її після смерті, оскільки у своїх періодах містили числа термінів народження Людини, яка вважалася восьмою планетою — невід'ємною складовою частиною Космосу і була підпорядкована його законам. Людина повинна була обов'язково воскреснути після смерті аналогічно тому, як воскресають планети після періодів невидимості.

У гігантських земляних геометричних спорудах Північної Америки в числовій формі були закодовані періоди небесних Богів — світил та планет. Стимул зведення таких об'єктів був суто релігійно-прагматичним: збільшення людського роду та воскресіння після смерті за сприянням небесних Богів. Кожний член суспільства був особисто зацікавлений у будівництві таких «храмів» і добровільно брав у ньому участь.

Найбільші та найдавніші геометричні вали виявлені у місцевості Поверті-Пойнт на березі р. Арканзас і являють собою «шість бездоганих восьмикутників, вписаних один в одного». Поперечник споруди — 1200 м, ширина валів — 24 м, висота — до 1,8 м. На будівництво цих валів було знесено 400 000 кубометрів ґрунту. Астроном Дж. Хокінс з приводу «Восьмикутника» писав: «Уява не спроможна віднайти розумний стимул для такої праці».

Ці споруди не можуть бути дешифровані ні в який спосіб, оскільки зводилися за числами астрономії «УАМТ» і зміст їх може бути з'ясований тільки за «УАМТ». Дж. Хокінс у своїй книзі «Крім Стоунхенджа» наводить три археоастрономічні об'єкти у США, але не пояснює їхнього змісту:

1. Геометричні вали біля р. Сайото, штат Огайо, що мали вигляд кола, до якого примикає «восьмикутник», в кутах якого насипано вісім курганів. Довжини діаметра кола та діагоналі «восьмикутника» однакові і сягають 330 м. Вісім курганів можуть позначати число 8, яке відповідає восьми сторонам «восьмикутника». Коло та вісім курганів — 9 «космічних об'єктів»: «7 планет», Земля та Людина.



2. Дев'ять земляних валів у формі кіл, півкіл та квадратів також розташовані біля р. Сайото у штаті Огайо. Квадратний вал розташований дещо окремо від інших валів і, певно, символізував Землю. У Єгипті піраміди мали квадратну основу. Число 4 — 4 сторони піраміди — символізувало Землю, відносно кола якої за Аристотелем — 400 000. Всі дев'ять валів — «дев'ять космічних об'єктів».

3. «Кругла обсерваторія» в Кахокії, штат Іллінойс, — це 48 дерев'яних стовпів, встановлених по колу.

Якщо «восьмикутник» у штаті Огайо уособлював число 8, то шість «восьмикутників» у Поверті-Пойнт фіксують також число 48 (8x6). В «УАМТ» число 48 стандартне і у вигляді його співмножників фігурує в єгипетських археоастрономічних об'єктах — пірамідах та храмах.

Ряд із шести «восьмикутників»:

$$8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48$$

послідовно фіксує числа: 8; 16; 24; 32; 40; 48.

$$24 \times 32 = 48 \times 16 = 768 \text{ діб} \text{ — період Марса-Гора.}$$

Ряд:

$$8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 262\,144$$

послідовно фіксує числа: 8; 64; 512; 4096; 32 768; 262 044.

За «УАМТ»: $262\,044 : 72 = 364,0888888$ д. — календарний Сонячний рік.

За єгипетською математикою розрядна кома ставилася за змістом.

364 д. = 28×13 — календарний Сонячний рік.

«Кругла обсерваторія» в Кахокії та «Восьмикутник» в Поверті-Пойнт були обчислювальними пристроями, які фіксували числа астрономії за «УАМТ»:

1. $48 \times 12 = 578$ д. — синодичний період Венери.

2. $48 \times 16 = 768$ д. — синодичний період Марса.

3. $48 \times 9 = 432$ д. — відносно безнульове коло Сонця.

4. $48 \times 37 = 177,6$ д. — осінньо-зимовий період Сонячного року, період між місячними затемненнями, число смерті Місяця і Людини.

5. $48 \times 39 = 187,2$ д. — весняно-літній період Сонячного року.

6. $48 \times 76 = 177,6 + 187,2 = 30,4 \times 12 = 304 + 60,8 = 364,8$ д. — календарний Сонячний рік. 304 д. — період римського календаря.

Гігантські фігури в пустелі Наска у Перу — як геометричні, так і зооморфні — аналогічні за антропо-космічним змістом гігантським геометричним фігурам у Північній Америці і частково дешифровані автором.

Шумеро-єгипетська розвинута математична астрономія поширювалася у незмінному вигляді по всій Ойкумені як у Старому Світі, так і в Новому Світі. В Америці вона проіснувала до часів іспанських завоювань.

Список літератури

1. Хокинс Дж. Кроме Стоунхенджа. — М.: Мир, 1977. — С. 142—148.

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ПОБУДОВИ ІНТЕРАКТИВНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ТЕСТІВ У СИСТЕМІ L^AT_EX

Г.М. Губаль

Луцький національний технічний університет, Луцьк, Україна
niik-g@yandex.ru

Розглянемо питання про створення інтерактивних математичних тестів у видавничій системі L^AT_EX. Для цього необхідно вміти встановлювати пакети L^AT_EX і створювати pdf-документи за допомогою програм Adobe Distiller або pdftex, або dvipdfm.

Для створення інтерактивних математичних тестів у видавничій системі L^AT_EX використовується стильовий пакет eqExam і додаткові до нього пакети: hyperref (технічний пакет для pdftex), AcroTex eEducation Bundle та everyshi.

Пакет eqExam забезпечує створення питань (завдань) типу «Правильно/Неправильно», «Коротка відповідь», «Есе» («Наведення означення», «Обґрунтування теоретичної гіпотези»), «Множинного вибору».

При створенні математичних тестів за допомогою пакета eqExam друкуються питання (завдання) у спеціальному форматі і по опціях заносяться відповіді.

Пакет hyperref генерує гіпертекстові посилання зі стандартних команд перехресних посилань у L^AT_EX. AcroTex eEducation Bundle — колекція технічних пакетів для створення online інтерактивних тестів.

Наведемо деякі фрагменти прикладу документа з приєднаним пакетом eqExam.

```
\documentclass[11pt]{article}
% У преамбулі документа приєднуємо пакет eqExam із деякими опціями
\usepackage[forpaper, pointsonboth, useforms, nosolutions, online]{eqexam}
\usepackage{english, ukrainian}
% Генеруємо назву тесту
\title[T1]{Тест 1}
\author{Г.М. Губаль}
\subject{Невизначений і визначений інтеграли}
\date{2 семестр \ the\year}
\begin{document}
\maketitle
% Генеруємо початок тесту
\begin{exam}{P1}
\begin{instructions}
```

Виконати тест. За неправильні відповіді бали віднімаються від загальної кількості балів.

\end{instructions}

% Питання (завдання) типу «Правильно/Неправильно». Оцінка питання (завдання) – 2 бали

\begin{problem}[2]

\textbf{Правильно} або \textbf{Неправильно}.

\begin{parts}

\item \TF{H} Усі первісні для функції $f(x) = \sqrt{x^2 + a}$ визначаються формулою $\frac{x^2}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln|x^2 + \sqrt{x^2 + a}| + C$.

\item \TF{П} Усі первісні для функції $f(x) = \sqrt{x^2 + a}$ визначаються формулою $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C$.

\end{parts}

\end{problem}

% Питання (завдання) типу «Коротка відповідь». При відповіді необхідно вписати слово або фразу у виділене підкресленням місце. Оцінка питання (завдання) – 3 бали

\begin{problem}[3]

Кожний елементарний або найпростіший раціональний дріб є \fillin{4in} {правильним раціональним дробом}.

\begin{solution}

Правильні раціональні дроби чотирьох видів:

1) $\frac{A}{x - a}$;

2) $\frac{A}{(x - a)^k}$, $k = 2, 3, \dots$;

3) $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$;

4) $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^r}$, $r = 2, 3, \dots$;

де A, a, M, N, p, q — дійсні числа, а тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів.

\end{solution}

\end{problem}

% Питання (завдання) типу «Есе» – питання (завдання) відкритого типу, яке вимагає розгорнутої відповіді. Відводиться 15 дюймів на вертикальний пробіл для відповіді. Оцінка питання (завдання) — 4 бали

\begin{problem}[4]

Сформулювати геометричний зміст визначеного інтеграла.

```
\begin{solution}[15in]
```

Визначений інтеграл від невід’ємної неперервної функції чисельно дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції.

```
\end{solution}
```

```
\end{problem}
```

При створенні тестів доцільно нагадувати студентам перейти на наступну сторінку (щоб студенти не пропустили яку-небудь сторінку). Для цього використовується пакет `turnthepage`, за допомогою якого кожна непарна сторінка (крім останньої, якщо вона непарна) генерує повідомлення перегорнути сторінку.

При використанні опції `online` або `email` пакета `eqExam` у питаннях (завданнях) типу «Правильно/Неправильно» і типу «Коротка відповідь» порожнє місце для написання відповіді генерується в поле для введення тексту; у питаннях (завданнях) типу «Есе» вертикальний пробіл, створений для написання відповіді, генерується у багаторядкове текстове поле; у питаннях (завданнях) типу «Множинний вибір» варіанти відповідей генеруються у радіокнопки.

Подати виконаний тест можна:

— у вигляді твердої копії, для чого використовується опція `online` у преамбулі документа;

— в електронному вигляді, для чого використовується у преамбулі документа опція `email` і команда `\submitinfo` з двома параметрами: перший містить скрипт `eqAttach.asp`, а другий e-mail одержувача.

Таким чином, розглянуто особливості створення інтерактивних математичних тестів у видавничій системі $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. При цьому використано питання типу «Правильно/Неправильно», «Коротка відповідь», «Есе».

ПРО ДЕЯКІ АСПЕКТИ ПІДВИЩЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КУЛЬТУРИ У СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

О. О. Дем'яненко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

o.dem@ukr.net

Сучасне суспільство потребує фахових спеціалістів, що здатні конкурувати на ринку праці. Тому перед технічними вузами постає задача випускати спеціалістів з відповідною фундаментальною підготовкою, важливою складовою якої є математичні курси. Зрозуміло, що вивчення цих курсів базується на тих знаннях та навичках, які були отримані в школі. Нажаль, абітурієнти, а отже і першокурсники останніх років в основній своїй масі демонструють низький рівень шкільних математичних знань і математичної культури загалом. Це створює достатню кількість проблем для викладачів вузів.

Зупинимось докладніше на проблемах математичної грамотності. Практика показує, що сучасні студенти не надають належної уваги теорії, яку їм читають. Студенти не запам'ятовують ні математичні терміни, ні формулювання теорем, ні прізвища математиків, які звучать при викладенні математичної теорії. Вивчення математичних курсів зводиться до запам'ятовування та механічного застосування алгоритмів розв'язку відповідних типів задач. Зрозуміло, що такі знання не є стійкими й швидко забуваються. Це явище, на наш погляд, є частиною загальної неосвіченості сучасного молодого покоління. Можливо, доступність інформації за рахунок новітніх технологій створює у них відчуття, що пропоновані їм знання не є прикладом видатних здобутків загальнолюдського інтелекту, а є інформацією на кшталт тієї реклами, яка набридливо звучить звідусіль. Окрім того, не дивлячись на різноманітність форм викладання та контролю знань усне спілкування між викладачем та учнем майже виключене. Тому навіть кращі студенти не володіють термінологією та не можуть чітко обґрунтувати найпростіші твердження і зв'язно викласти свої думки. В результаті, як вже було сказано, запам'ятовуються тільки алгоритми і питання: «Чому треба робити саме так, щоб розв'язати цю задачу?» заганає студентів в глухий кут. З року в рік ця ситуація стає все більш проблемною і вимагає нагального розв'язання. Можна запропонувати декілька напрямків.

По-перше, ширше застосовувати ті види контролю знань, що спонукають студентів вчити теорію і вміти відтворити її з використанням традиційно прийнятих позначень та термінів. Це можуть бути і усні опитування, і теоретичні тести, і математичні диктанти, що перевіряють знання означень, формулювань теорем та формул за відповідною темою.

По-друге, готуючи лекцію, викладач має приділити увагу не тільки матеріалу по суті, але, можливо й коротко розглянути історичні аспекти питання, що розглядається. Так, наприклад, в розділі «Вступ до аналізу», що

традиційно читається в першому семестрі, пропонують два означення границі функції в точці за Коші та за Гейне і доводять їх еквівалентність. В подальшому при доведенні різних теорем використовують те означення, яке зручніше. Якщо раніше достатньо було констатувати, що два математики незалежно один від одного ввели поняття границі функції в точці кожний по-своєму, то зараз є сенс зупинитись на цьому моменті докладніше і дати коротку історичну довідку коли саме і як Коші і Гейне ввели свої означення. Можна приділити трохи часу загально філософським проблемам математичної науки та її історичного розвитку, зацентрувавши увагу на тому, що в математиці до одного результату можна йти різними шляхами.

Нарешті, прізвища математиків поруч з теоремами та формулами не повинні звучати просто як назви. Якщо навіть коротко розповідати про цих видатних людей, то математична теорія перестає бути сухим набором тверджень та логічних конструкцій, а наповнюється життям. Адже історія математики не менш захоплююча ніж сама математика.

Викладаючи теоретичний матеріал, треба звертати увагу студентів на красу та бездоганність математичних доведень, на парадоксальність неочікуваних висновків. Так, наприклад, в теорії функцій комплексної змінної за формулою Коші для аналітичних функцій можна знаходити інтеграли не інтегруючи.

Зрозуміло, що в сучасних умовах, коли скорочуються курси можна дозволити собі лише короточасні екскурси в історію математики та загальні міркування, але і від них ефект безумовний. Підвищується інтерес, виникають асоціації і, як результат, краще запам'ятовується матеріал.

Продовжуючи тему підвищення математичної грамотності у студентів технічних спеціальностей, зауважимо, що вміння записати твердження з використанням відповідних символів, або прочитати записане математичними символами твердження є дуже важливим. Цьому треба навчати. Так, на початку першого семестру студенти під час лекції все намагаються записати словами і символи, які використовує викладач, викликають подив і майже роздратування. Але поступово вони мають змогу оцінити зручність символіки і починають використовувати її самостійно.

Розглянуті моменти є частиною загальної проблеми виховання математично грамотних та освічених спеціалістів.

ПРО ПОЛІНОМИ КРАВЧУКА

Галина Дяченко, Петро Казак, Катерина Барінова

Український фізико-математичний ліцей

Київського національного університету імені Тараса Шевченка,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Поліноми Кравчука належать до класичних **ортогональних поліномів** дискретної змінної, і є рядом або скінченною сумою.

$$\sum_{x=0}^N k_n^{(p)}(x) k_m^{(p)}(x) \sigma(x) = d_n^2 \delta_{m,n}$$

де $\sigma(x) = \binom{N}{x} p^x q^{N-x}$ — **вагова функція**. Разом із межами відрізка вагова функція визначає сукупність ортогональних многочленів із точністю до сталих множників. Вибір конкретної форми цих множників називається *стандартизацією*.

Для $p = q = 1/2$ вагова функція з точністю до постійного множника $1/2^N$ зводиться до **біноміального коефіцієнта**.

$$d_n = \sqrt{\binom{N}{n} (pq)^n} \text{ — квадратична норма, } 0 < p < 1, 0 < q < 1, p + q = 1.$$

Ортогональні поліноми або **ортогональні многочлени** — послідовність **поліномів** n -го порядку $f_n(x)$, заданих на відрізку $[a, b]$, що задовольняє умовам

$$\int_a^b \sigma(x) f_n(x) f_m(x) dx = 0 \text{ для будь-яких } n \neq m$$

У математиці послідовністю **ортогональних многочленів** називають нескінченну послідовність дійсних **многочленів**

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots,$$

де кожний многочлен $f_n(x)$ має n -й показник степеня, а також два різних довільних многочлена цієї послідовності **ортогональні** між собою за деяким скалярним добутком, заданого в просторі L^2 .

Кожен із многочленів має вигляд: $f_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + \dots$

Розглянемо наступний многочлен:

$$K_n^p(x, N) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{N-x}{n-i} \binom{x}{i} p^{n-i} q^i, \quad x = 0, 1, 2, \dots, N$$

Використовуючи поліном $K_n^p(x, N)$ відтворимо алгебраїчний запис перших поліномів для найпростішого виду $p = q - \frac{1}{2}$

$$K_0(x, N) = 1,$$

$$K_1(x, N) = x - \frac{1}{2}N,$$

$$K_2(x, N) = \frac{p^2}{2}(N - x)(N - x - 1) - pq(N - x)x + \frac{q^2}{2}x(x - 1).$$

Матриці, елементами яких є значення поліномів Кравчука в невід'ємних цілих точках.

$$K^{(N)} = \begin{pmatrix} K_{00}^{(N)} & K_{01}^{(N)} & K_{02}^{(N)} & \dots & K_{0N}^{(N)} \\ K_{10}^{(N)} & K_{11}^{(N)} & K_{12}^{(N)} & \dots & K_{1N}^{(N)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{N0}^{(N)} & K_{N1}^{(N)} & K_{N2}^{(N)} & \dots & K_{NN}^{(N)} \end{pmatrix}$$

Розглянемо поліном

$$K_{ij}^{(N)} = \sum_k (-1)^k \binom{j}{k} \binom{N-j}{i-k}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j \geq k \\ N-j \geq i-k \\ i-k \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K \leq j \\ K \leq i \\ K \geq i+j-N \\ K \geq 0 \end{array} \right.$$

Обчислимо приклади кількох перших матриць, елементами яких є значення поліномів в невід'ємних цілих точках.

Вираз $\binom{j}{k}$ розкладається за формулою числа комбінацій з j по k , тобто

$$\binom{j}{k} = C_j^k = \frac{j!}{k!(j-k)!}$$

а $\binom{N-j}{i-k}$ розкладається за формулою числа комбінацій з $(N-j)$ по $(i-k)$, тобто

$$\binom{N-j}{i-k} = C_{N-j}^{i-k} = \frac{(N-j)!}{(i-k)!(N-j-i+k)!}$$

Розрахуємо матриці декількох порядків, якщо:

$$\begin{aligned}
 K_{00}^{(0)} &= (-1)^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 N=0, \quad i=0, \quad j=0, \quad k=0; &= 1 \cdot \frac{0!}{0!(0-0)!} \cdot \frac{0!}{0!(0-0)!} = \\
 &= 1 \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} = 1
 \end{aligned}$$

Матриця 0-го
порядку:
 $K^{(0)} = [1]$

$$\begin{aligned}
 N=1, \quad i=0, \quad j=0, \quad k=0; & \quad K_{00}^{(1)} = (-1)^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \\
 & \quad K_{01}^{(1)} = (-1)^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 i=0, \quad j=1, \quad k=0; &= 1 \cdot \frac{1!}{0!(1-0)!} \cdot \frac{0!}{0!(0-0)!} = \\
 &= 1 \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} = 1
 \end{aligned}$$

$$i=1, \quad j=0, \quad k=0; \quad K_{10}^{(1)} = (-1)^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Матриця 1-го
порядку:

$$i=1, \quad j=1, \quad k=1; \quad K_{11}^{(1)} = (-1)^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \quad K^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Та, обчислимо матрицю 7 порядку:

$$K^{(7)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 6 & -7 \\ 21 & -12 & 2 & 6 & -6 & 11 & 9 & 21 \\ 35 & -30 & 10 & -19 & -3 & -15 & -5 & -35 \\ 35 & -40 & -10 & -9 & -3 & 15 & -5 & 35 \\ 21 & -30 & 11 & -9 & 9 & -11 & 9 & 21 \\ 7 & -5 & 3 & -1 & -1 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ВОСЬМИЙ РЕЙТИНГ ВУЗІВ УКРАЇНИ У ПРОЕКТІ «ТОП 200 УКРАЇНА»

Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова, І. Ю. Мельник

НТУУ «Київський політехнічний інститут»,

Київський національний університет культури і мистецтв, Київ, Україна

irinam_5656@mail.ru

Наукові здобутки та педагогічні досягнення вищих навчальних закладів на сьогоднішній час нерозривно пов'язані з рейтингами, що отримують вузи при незалежному їх оцінюванні за певними критеріями.

Як зазначає відомий вчений професор Ян Садлак (Польща), президент Міжнародної обсерваторії з академічного ранжування та переваги IREG, визнаний експерт з політики, менеджменту та адміністрування вищої освіти: «Важко досягти консенсусу у відношенні найбільш правильної методології визначення університетських рейтингів. Головне, крок за кроком просуватися до партнерських відносин в інтересах зацікавлених сторін». До речі, у вересні 2009 року Папою Римським Бенедиктом XVI професор Ян Садлак був призначений до Ради директорів AVEPRO (агенція з оцінки та просування якості навчання в католицьких університетах та школах).

На останній конференції IREG-7 «Працевлаштування і академічні рейтинги — відображення та вплив», що відбулася у травні 2014 року у Лондоні, увага була зосереджена на партнерських відносинах провідних університетів з можливими роботодавцями, акцентувалася роль та значення рейтингів вузів у цьому процесі. Участь у конференції брали представники таких великих компаній роботодавців, як Siemens AG, Airbus Group, Shell International та інші. З другого боку, представники академічних вузів висвітлювали своє бачення та критерії у підготовці майбутніх професіональних кадрів.

На цій конференції було обговорено детально і проект «Топ 200 Україна», який серед багатьох різноманітних проектів рейтингів вузів, що існують в Україні, на думку учасників конференції найбільш повноцінно відтворює ідею партнерства роботодавців та представників академічного співтовариства. Слід зазначити, що професор Ян Садлак, сфера наукової діяльності якого полягає у реформуванні, трансформації та організації вищої освіти, є головою наглядової ради проекту «Топ 200 Україна».

Незважаючи на складну політичну, економічну, геополітичну ситуацію в Україні в 2014 році, прагнення нашої країни до покращення та реформування освіти, вдосконалення та розвитку усіх освітянських програм залишається незмінним. 30 травня 2014 року Центр міжнародних проектів Євроосвіта надав до розгляду восьмий рейтинг «200 кращих вузів України», тобто «Топ 200 Україна». Рейтинг складається шляхом інтегральної оцінки за трьома основними показниками — оцінки науково-педагогічного потенціалу, якості навчання та міжнародне визнання вузів. Дана методика рейтингу базується на основі міжнародних принципів оцінювання якості освіти університетів.

Передумовою цього є проведення широкого порівняльного аналізу різних вищих навчальних закладів, де досліджуються головні критерії якості освіти.

Наукова та педагогічна діяльність вищих учбових закладів за допомогою цієї методики оцінюється за інтегральним індексом, тобто агрегованим показником, що формується на основі індикаторів прямого вимірювання (80%), експертної оцінки якості належної підготовки випускників вишів представниками роботодавців середнього та великого бізнесу і академічного співтовариства (15%), а також на підставі використання міжнародних наукометричних та вебметричних даних (5%).

Інтегральний показник діяльності ВНЗ України за результатами визначення рейтингів університетів України III, IV рівнів акредитації

«Топ-200 Україна» у 2014 році

Рейтинг складено за показниками попереднього (2013) року

	Рейтинг вищих навчальних закладів в Україні в 2014 році «Топ 200 Україна»	(Інп)	(Іян)	(Імв)	(Із)
2014	ВНЗ	Оцінка якості науково-педагогічного потенціалу	Оцінка якості навчання	Оцінка міжнародного визнання	Оцінка інтегрального показника діяльності ВНЗ
1/2	Київський національний університет імені Тараса Шевченка	37,4523	20,6970	22,8104	80,9598
1/2	Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»	33,5367	23,2686	24,0975	80,9029
3	Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна	19,2575	14,6515	15,5662	49,4753
4	Національний університет «Києво-Могилянська академія»	12,9774	17,5070	15,2120	45,6965
5	Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»	17,8705	9,2902	18,5042	45,6650
6	Національний університет «Львівська політехніка»	8,7378	14,9381	21,5752	45,2513
7	Національний гірничий університет	19,0002	9,7577	15,2476	44,0057
8	Національний медичний університет імені О.О. Богомольця	26,7885	7,2622	9,0647	43,1155
9	Львівський національний університет імені Івана Франка	7,1861	15,97832	19,2373	42,4018
10	Дніпропетровський національний університет	13,1949	11,3701	17,7600	42,3251

Протягом усіх восьми років існування рейтингу «Топ 200 Україна» перші сходинки незмінно займають Національний технічний університет України «КПІ» та Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка. В цьому році

у зв'язку з дуже близькими значеннями інтегрального показника (Із) цим лідерам, що мають великий відрив від інших вишів, було надано спільне перше — друге місце у рейтингу.

Ми відчуваємо гордість за демонстрацію світового рівня інноваційної діяльності НТУУ «КПІ». Серед сучасних досягнень Київської політехніки слід відмітити запуск наносупутника «Poly TAN-1» для дослідження зміни клімату. Перший український наносупутник «Poly TAN-1» було виведено на орбіту в ніч проти 20 червня 2014 року. Наносупутники — це клас малих штучних супутників Землі, створення яких стало можливим завдяки розвитку мікромініатюризації та нанотехнологій. Нині вони все частіше використовуються для різноманітних космічних досліджень. В НТУУ «КПІ» розроблено наносупутник формату «Cubesat» (Кубсат) масою близько одного кілограма та розмірами 10×10×10 см. Він складається з чотирьох модулів: модуля енергозабезпечення, модуля радіолінії, модуля управління і модуля корисного навантаження. Створила супутник група молодих науковців та інженерів теплоенергетичного і радіотехнічного факультетів, факультету електроніки, а також Інституту телекомунікаційних систем НТУУ «КПІ». Перший український наносупутник успішно працює на навколоземній сонячно — синхронній орбіті. «Poly TAN-1» знаходиться на відстані біля 700 км від Землі, період його обертання 97,8 хвилин. При кожних п'яти з шістнадцяти його обертань протягом доби існує можливість зв'язку наносупутника зі станцією на Землі, встановленою в НТУУ «КПІ». Зв'язок триває від двох до дев'яти хвилин, за цей час розробники встигають отримати інформацію про функціонування окремих модулів та підсистем наносупутника, яка використовується для подальшої роботи.

Слід відзначити і створення випускником фізтехна НТУУ «КПІ» Єгором Анчишкіним стартапа «Viewdle» зі структурного розпізнавання образів, який був придбаний компанією Google за суму від 30 до 45 мільйонів доларів (точна сума не розголошується). Єгор Анчишкін народився у 1981 році у місті Києві, закінчив фізико-технічний інститут НТУУ «КПІ» за спеціальністю «прикладна математика». З 2006 року займався розробкою програми «Viewdle» — це унікальний алгоритм виявлення та розпізнавання осіб. Придбання «Viewdle» компанією Google було названо угодою року на українському ІТ ринку. Крім того, Єгор Анчишкін є засновником технологічної компанії Zakaz.ua, у якої великі перспективи.

Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка став лідером серед українських вишів у рейтингу Scopus, де вищі навчальні заклади ранжовані за індексом Гірша — кількісним показником, що базується на кількості наукових публікацій та кількості цитувань цих публікацій. Також КНУ ім. Тараса Шевченка має суттєвий прогрес в міжнародному рейтингу університетів QS. Цей рейтинг (QS World University Rankings) аналізує академічну репутацію 4% кращих світових університетів. У 2013—2014 році до рейтингу університетів QS потрапили й чотири українські виші: КНУ ім. Тараса Шевченка, НТУУ

«КПІ», Донецький національний університет та НТУУ «Харківський політехнічний інститут».

На жаль, у зв'язку з тим, що у минулому році змінилася методика оцінювання рейтингу Webometric, провідні українські виші НТУУ «КПІ» та КНУ ім. Тараса Шевченка, що мали високі позиції у цьому рейтингу, дещо їх понизили. Webometric — один з рейтингів університетів світу, за яким проводять дослідження ступеню представлення діяльності вищих навчальних закладів в Інтернет-просторі. Цей рейтинг складає Лабораторія кіберметрики («Sebermetrics Lab») Національної дослідницької ради Іспанії («Spanish National Research Council», CSIC), що працює при Міністерстві науки та інновацій Іспанії. Рейтинг Webometric складають двічі на рік (у червні-липні та січні), аналізуючи при цьому близько 20 000 вищих навчальних закладів. Вважають, що цей рейтинг недосконалий та містить багато недоліків, але тим не менш світові провідні виші займають у ньому найвищі сходинки.

Важливо зазначити, що у минулому році зросли партнерські відносини українських університетів з іноземними колегами. У 2013 році в освітній програмі «Темпус» (транс'європейська програма взаємообмінів між університетами) сімдесят українських вузів виграли 120 проектів. У списку лідерів — НТУУ «КПІ», Одеський національний політехнічний університет, Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича. Серед переможців конкурсу Програми «Еразмус Мундус» (освітня програма ЄС для країн, що не входять у європейське співтовариство, яка має за мету активізувати міжнародне співробітництво та мобільність серед студентів, викладачів та науковців вишів) — НТУУ «КПІ», Київський національний університет технологій та дизайну, Національний аерокосмічний університет, Одеський національний університет ім. І. І. Мечнікова, Одеський національний морський університет.

Зростання рейтингу чи утримання його на певному рівні в умовах жорсткої конкуренції неможливо без довгострокової стратегії та програми розвитку вузу. Набуття успіхів у галузі освіти та науки не передбачає лише епізодичні досягнення. Творчий, педагогічний, науковий потенціал академічного колективу на деякому етапі досягає свого критичного стану і, як наслідок, при такій стратегії дає успішний результат.

Список літератури

1. Рейтинг вищих навчальних закладів «Топ 200 Україна» — 2013/2014 рік <http://www.euroosvita.net>
2. Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д. НТУУ «КПІ» — лідер рейтингу вищих навчальних закладів «Топ 200 Україна» у 2014 році / Н. М. Задерей, Г.Д. Нефьодова // Математика в сучасному технічному університеті : Матеріали III Міжнародної наук.-практ. конф. (Київ, 25—26 груд. 2014 р.). — К. : НТУУ «КПІ», 2015. — С. 351—353.

ВІДРОДЖЕННЯ НАДБАННЯ УКРАЇНСЬКОЇ НАЦІЇ ЧЕРЕЗ ПРАВДУ ІСТОРІЇ

Т. М. Задорожня

*Національний університет ДПС України, м. Ірпінь, Україна,
TNZA@meta.ua*

Тільки пам'ять має майбутнє, тільки народ, який знає свою історію позбавлений перспективи стати народом сліпців.

В. Шендеровський

За рік після Майдану українці стали іншими вважають соціологи та політологи. Проаналізувавши, як змінилось суспільство, вони стверджують, що українці вірять, що стару систему можна змінювати і самі готові долучатися до цього процесу. Потенційним кадровим резервом «реформаторів» експерти називають волонтерів та політиків нової генерації, які вже довели ефективність своїх дій. Тобто кілька останніх місяців змінили ментальність українців більше, ніж 23 роки незалежності.

Але це лише перші маленькі цеглинки закладені в підвалини храму нашого майбутнього, ми знаходимося лише на початку складного шляху реформ. Тому сьогодні особливо потрібні професіонали, молоді і амбіційні чесні люди, які мають новий прогресивний погляд на розбудову країни і які є патріотами своєї держави. Підготовкою активних високоосвічених особистостей, що добре володіють, у першу чергу, своєю рідною українською та іноземними мовами, знають і гордяться величною історією рідної країни, покликана займатись наша освіта. В умовах поглиблення соціально-економічних реформ, які здійснюються сьогодні в Україні освіта «...покликана сприяти випрацюванню нового менталітету, формуванню нової громадської свідомості, щоби прийдешні покоління досягнули велич українського народу на історичному тлі існування людства» [5].

Позитивним чинником національного самопізнання є те, що дедалі більше самі українці і світ цікавиться українською історією. Відкриті архіви переконливо свідчать, що наша справжня історія приховувалась, а всіляких закритих тем у радянський період було набагато більше, ніж документальної правди. Не одне відкриття і не одного вченого-українця привласнили російські ідеологи. Наприклад, в енциклопедичному словнику юного математика для середнього та старшого шкільного віку (1989 року видання, наклад 500 тисяч) читаємо: «Михайло Остроградський — російський математик, один із засновників Петербурзької математичної школи, Академік Петербурзької Академії Наук». Аналогічні відомості ми читаємо і в українських виданнях: біографічний довідник О. М. Боголюбова «Математики. Механики» (1983 року видання, наклад 50 тисяч) стверджує, що Г. Ф. Вороний і М. В. Остроградський — російські математики, а М. Ф. Кравчук — радянський; УРЕ т. 8, 1982 року

видання, читаємо, що М. В. Остроградський був російським і українським математиком, а Г. Ф. Вороний — російський математик.

Справедливому, неспотвореному висвітленню історичної правди про Україну, про її геніальних творців науки сьогодні присвячують свої роботи багато вчених, але на жаль наклади якими виходить така література не дають можливості говорити про її доступність широким колам.

Просвітництву, популяризації історії про українську наукову в тому числі математичну спільноту сьогодні слід завдячувати працям Н. О. Вірченко, Л. М. Горбачука, В. А. Шендеровського, М. В. Шмигевського та ін.

Ми щиро віримо, що використовуючи своє історичне надбання сучасна система української освіти здатна забезпечити прогрес у першу чергу у духовній сфері.

Забезпечення гуманізації і націоналізації усіх рівнів освіти, формування наукового, національного світогляду у підростаючого покоління передбачає широке застосування елементів історизму й активне розкриття гуманітарного потенціалу математики і зокрема стохастики. У програмі з математики (5—12 класи) для загальноосвітніх навчальних закладів, наголошується на важливості систематичного використання у навчанні математики і, зокрема стохастики, історичного матеріалу, який підвищує інтерес до вивчення дисциплін, стимулює потяг до наукової творчості, пробуджує критичне ставлення до фактів, дає учням уявлення про математику та стохастичну як про невід’ємні складові загальнолюдської культури.

Серед елементів історизму, які можуть бути використані у навчанні математики і, зокрема стохастики, можна виділити:

- ❖ імена і біографії видатних учених, які створювали стохастичну, зокрема видатних українських математиків;
- ❖ історичні цікаві задачі, наприклад з сфери азартних ігор;
- ❖ історії відкриттів, що сприяли становленню науки;
- ❖ історичні характеристики епох в яких відбувається становлення науки чи зроблено певне відкриття.

Представлення певних біографічних мініатюр на лекціях чи практичних заняттях це безперечно глибоко творчий процес. Він не терпить ніяких догм і схематичних підходів, лише — такт, почуття міри і зацікавленість аудиторії. Кожний екскурс в історію має бути коротким, цікавим і переконливим. Звичайно після цього викладач може пропонувати більш глибоке самостійне вивчення творчості видатних математиків, представивши перелік відповідної літератури.

Використання історичних відомостей у викладанні математики і зокрема стохастики розв’язує і низку методичних завдань:

- ❖ допомагає зрозуміти логіку розвитку теми, питання, поняття, теореми;
- ❖ полегшує запам’ятовування означень, формул;
- ❖ збуджує і прищеплює інтерес та увагу, викликає творче ставлення до змісту курсу математики і стохастики зокрема;

- ❖ поглиблює розуміння стохастичного матеріалу, який вивчається;
- ❖ розширює розумовий кругозір і підвищує загальну культуру.

Враховуючи це, методично правильним є систематичне впровадження елементів історії математики і зокрема стохастики. Ці відомості можна подавати як під час аудиторних занять, так і в позааудиторній роботі: на заняттях факультативів, на засіданнях математичних гуртків. Елементи історії, що відображають біографії й творчі, інколи досить тернисті, шляхи видатних математиків це той благодатний матеріал який дозволяє, як вважав Б.Паскаль, досить серйозний і складний предмет математики зробити дещо цікавішим. Зважаючи на тенденції до систематичного скорочення годин виділених на вивчення нової ймовірнісно-статистичної змістової лінії, історичний матеріал можна рекомендувати учням і студентам для самостійного вивчення з обов'язковими подальшими виступами на математичних заняттях, конференціях, конкурсах тощо. Адже історія математики і зокрема стохастики представляє невичерпне джерело для диспутів, бесід, які будь-яке заняття зроблять цікавішим, зрозумілішим для сприйняття.

Отже, говорячи про якість освіти, замало представляти голі нові факти, теореми, формули, важливо олюднювати навчально-виховну діяльність, створювати таку атмосферу, яка б стимулювала активність особистості, спонукала до творчості і саморозвитку, відповідала б інтересам, потребам і можливостям кожного. Одним із ефективних засобів є ознайомлення учнів та студентів з життям, творчістю і педагогічною діяльністю видатних математиків, що сприятиме: розвитку інтересу до вивчення математики взагалі і зокрема ймовірнісно-статистичної лінії. А використання правдивої історичної інформації дозволить всім нам усвідомити, що наука і культура кожної нації належить людству.

Список літератури

1. Бевз В. Г. Історія математики. — Х.: Основа, 2006. — 176 с. — (Серія «Бібліотека журналу «Математика в школах України»; Вип. 2 (38)).
2. Бевз В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх вчителів. — К.: НПУ ім. Драгоманова, 2005.
3. Вірченко Н. О. Вибрані питання методики вищої математики. — К., 2003. — 282 с.
4. Типові навчальні плани для основної та старшої школи загальноосвітніх навчальних закладів у структурі 12-річної школи // Інформаційний збірник Міністерства освіти і науки України. — 2009. — №8. — С. 3—30.
5. Шендеровський В. Нехай не гасне світ науки. Книга перша. 3 вид. — К.: Простір, 2009. — 416 с.
6. Шмигевський М. В. Видатні математики. — Х.: Основа, 2004. — 176 с. — (Серія «Бібліотека журналу «Математика в школах України»; Вип. 6 (18)).

ПРО ПРОБЛЕМИ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНІЧНИХ УНІВЕРСИТЕТАХ НА СУЧАСНОМУ ЕТАПІ

I. М. Зелепугіна

Київський національний університет технологій та дизайну, Київ, Україна
zelepugina@ukr.net

Сьогодні перед освітою стоїть одна з головних вимог — створити конкурентоспроможного, відповідального, розвинутого громадянина, який має можливість і здатність навчатися впродовж життя. Тільки це забезпечить йому можливість інтегруватись у світовий та європейський простір. У сучасному інформаційному суспільстві вміння працювати з інформацією, отриманою з різних джерел, оцінювати її, пристосовувати отримані знання до нетипових ситуацій, вирішувати постійно виникаючі проблеми, підвищувати свою кваліфікацію — є показником професійності. Вміння самостійно приймати зважені, аргументовані рішення, тобто брати відповідальність на себе також є однією з головних цінностей освіти та кваліфікації спеціаліста. Крім того, випускники університетів мають бути готові до розробки технологій, які до моменту закінчення їх освіти ще не існували. Тільки якісна фундаментальна підготовка, визначальним елементом якої для інженерно-технологічних кадрів є математична освіта, забезпечить майбутньому спеціалісту здатність адаптуватися до будь-якого типу діяльності.

Широка застосовність математики в техніці, природознавстві та багатьох інших науках, робить володіння математичними знаннями основною ознакою високої кваліфікації в більшості галузей знань. З одного боку, необхідно вміння працювати з математичними моделями явищ та процесів реального світу. З іншого боку, властива математиці повнота аргументації та класифікація покликана виховувати у студентів (майбутніх спеціалістів) загальну логічну культуру мислення.

Нажаль, спостерігається зниження математичної культури як в суспільстві в цілому, так, як не дивно, і науковому товаристві, незважаючи на те, що кожне серйозне дослідження має ґрунтуватися на опрацьованій математичній моделі або статистичному матеріалі. Відбувається також зниження в технічних університетах рівня фундаментальної природничо-наукової освіти, зокрема математичної. Маємо різке (в 2 та більше разів) скорочення кількості аудиторних годин (при збільшенні годин на самостійну роботу студентів) та кількості семестрів, виділених на вивчення математики при повному повторенні змісту освітньої професійної програми. Як правило, співробітники математичних кафедр відсторонені від розробки навчальних планів, в той час як співробітники випускаючих кафедр, які складають ці плани, хоча і розуміють важливість математичної підготовки, але не замислюються над тим, як саме студенти її отримають в створених ними умовах. Зрозуміло, що простим стисненням об'єму матеріалу не обійтись, курс математики тоді стане надзвичайно концентрованим з точки зору насиченості поняттями та методами.

Оскільки основним змістом освітньої діяльності вищого навчального закладу в сучасних умовах є формування інноваційного освітньо-виховного середовища, впровадження новітніх технологій в освітній процес, при вдосконаленні методики слід керуватися такими методичними принципами:

- зберігаючи основи ядра курсу вищої математики, теоретичний матеріал необхідно подавати в сучасному вигляді, використовувати апарат, ідеї, термінологію та символіку сучасної математики;

- наближати викладення деяких розділів до функціональної трактовки, тобто курс вищої математики для технічних спеціальностей повинен мати професійну спрямованість, бути наближеним до інженерної практики;

- при вивченні різних розділів, слід виявляти зв'язки, як між розділами математики, так і між явищами реального світу та світом ідей, моделей і результатів математики;

- широко застосовувати комп'ютерні дидактичні засоби (наприклад, середовище MOODLE (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment);

- перейти від інформаційно-описових до більш активних методів навчання для розвитку у студентів творчого логічного мислення, дати їм можливість зрозуміти сучасну математику та переконатися, що на противагу пануючому уявленню про схоластичну науку, вона є інструмент практики, необхідний для розв'язання різноманітних проблем;

використовувати методи активізації самостійної роботи студентів і диференціацію та індивідуалізацію навчання.

Знову наголошую, що в умовах постійного скорочення годин на аудиторну роботу (і для практичних занять) викладач не має часу на відпрацювання студентами всіх необхідних математичних навичок та вмінь. В такій ситуації, на наш погляд, одним з шляхів є створення спеціальних комп'ютерних програм — тренажерів. Зрозуміло, що така робота потребує багато часу, коштів та об'єднання досвіду і інновацій багатьох спеціалістів, але її необхідно зробити.

Вочевидь, сучасна методика розрахунку педагогічного навантаження викладача вищої школи не враховує підвищення трудомісткості та інтенсифікації його роботи, виконання якої в повному обсязі тримається тільки на ентузіазмі викладача. Наприклад, методична робота, пов'язана зі створенням необхідних дидактичних матеріалів для індивідуальних самостійних робіт студентів, вимагає набагато більше часу, ніж той, який заплановано у педагогічному навантаженні викладача. Крім того, досвід роботи в модульному середовищі, який в нашому університеті триває вже не один рік, показує, що при всіх перевагах, а саме: наочності (можна посилатися на всі наявні там методичні матеріали), можливості on line спілкування зі студентами, зручності проведення різноманітних тестувань,— все це вимагає багато часу і зусиль від викладача.

РОЛЬ АКАДЕМІЇ НАУК ВИЩОЇ ШКОЛИ УКРАЇНИ В ПОЯВІ КНИГИ «ПАРАДОКС ГІББСА С ТОЧКИ ЗРЕННЯ МАТЕМАТИКА»

В. М. Ігнатович

НТУУ «КПІ», Київ, Україна

У травні 2010 року вийшла друком моя монографія «Парадокс Гіббса с точки зрения математика» [1]. На 2-й сторінці книги вказано: «Рекомендовано к печати Отделением математики Академии наук высшей школы Украины... Рецензент Н. А. Вирченко, д-р ф.-м. наук, проф.». Академія наук Вищої школи України і проф. Ніни Опанасівна Вірченко не лише рекомендували книгу до друку. Ця книга не була би написана, якби не їх підтримка.

Парадокс Гіббса є, мабуть, найзагадковішим фізичним парадоксом. Він виникає при розгляді питання про зміну ентропії при змішанні двох ідеальних газів (ентропію змішання ΔS_c), які хімічно не взаємодіють і спочатку розділені непроникною перегородкою. Якщо два різні ідеальні гази мають однакові початкові температурами, тиски й об'єми, а кількість кожного дорівнює одному молу, то після усунення перегородки ентропія системи зростає на величину $2R \ln 2$, де R — універсальна газова стала [2], незалежно від того, чим і наскільки відрізняються гази, що змішуються. Якщо при тих же початкових умовах змішуються тотожні ідеальні гази, то ΔS_c дорівнює нулю. Таким чином, при переході від змішання близьких за властивостями газів (навіть таких, властивості яких відрізняються на нескінченно малу величину) до змішання тотожних газів відбувається стрибок ентропії змішання від $2R \ln 2$ до нуля, що є незрозумілим. Адже параметри термодинамічних систем можуть змінюватися стрибком тільки внаслідок утворення нових хімічних сполук або фаз, а в даному випадку немає ні першого, ні другого.

Парадокс Гіббса відомий понад 100 років. Його пояснення можна знайти в багатьох курсах термодинаміки і статистичної фізики. Але в різних книгах його пояснюють по-різному, і щороку публікуються статті з новими поясненнями (див. [2, 3] і arXiv.org). І це при тому, що парадокс розглядали такі всесвітньо відомі вчені як М. Планк, Г. А. Лоренц, А. Зоммерфельд, Е. Фермі, А. Ейнштейн, Е. Шредінгер [2, 3], і йдеться у ньому про найпростіші об'єкти, що вивчаються термодинамікою — ідеальні гази.

Свого часу я звернув увагу на ту обставину, що в роботах, присвячених парадоксу Гіббса, ігнорується його логічна і математична сторона — не враховуються ті обставини, що висновок про стрибок ентропії змішання отримано шляхом міркувань, і що в парадоксі йдеться про особливості математичної поведінки функції, для якої можна вивести формулу. Маючи таку формулу, можна легко встановити причини особливостей поведінки ентропії змішання, оскільки особливості поведінки функції, яка виражається формулою, визначається видом формули, особливостями поведінки аргументів, а також можливими значеннями параметрів, які входять у формулу. Як це не дивно, але

вказані обставини ігноруються і в роботах відомих сучасних математиків академіків Російської АН В. П. Маслова і В. В. Козлова, присвячених парадоксу Гіббса (див. наприклад [4, 5]).

Виконавши виведення ряду формул, я встановив, з якими особливостями відомих формул для ентропії пов'язана поява парадокса Гіббса, виклав результати досліджень у двох коротких статтях «Анализ парадокса Гиббса (Сообщения 1 и 2)» і у 1996 році надіслав їх у «Журнал физической химии» (Москва). Отримав відмову на підставі рецензії і саму рецензію, в якій зауважень по суті не було. Зауваження докладно спростував, але редакція відмовила в публікації статті.

Вирішив, що слід зробити детальний виклад отриманих результатів, навівши всі проміжні формули. У 2001 році надіслав статтю «Анализ логических оснований парадокса Гиббса в классической термодинамике» в журнал «Успехи физических наук» (Москва). Отримав відмову на підставі рецензії, де зауважень до статті не було, а стаття не рекомендувалася до друку на тій підставі, що з приводу цього парадокса давно не було дискусій і про нього вже забули, що насправді не відповідало дійсності (див. [3]). Надсилати статтю повторно не став.

16—18 травня 2002 р. в НТУУ «КПІ» пройшла IX Міжнародна конференція ім. академіка М. Кравчука. Як провідний редактор газети НТУУ «КПІ» «Київський політехнік» я готував повідомлення про конференцію для газети і 16 травня після завершення роботи секцій (приблизно о 20 годині) підійшов до Н. О. Вірченко, щоб узгодити текст повідомлення. Ніна Опанасівна прочитала текст, зробила деякі виправлення, потім ми трохи поговорили про математику і Михайла Кравчука. Наприкінці розмови я промовив: «У мене є стаття «Парадокс Гіббса з точки зору математика». У відповідь почув: «Дайте почитати». Зауважу, що я не сказав, що маю науковий ступінь — к.т.н.

Десь через день чи два передав Н. О. Вірченко статтю. Після невдач з двома журналами особливих надій не мав і не вважав за можливе розшукувати її і запитувати про враження щодо статті. Тиждень через два випадково зустрів Ніну Опанасівну, і вона, не чекаючи моїх запитань, одразу сказала мені: «Читала Вашу статтю. Подавайте її в «Наукові вісті НТУУ «КПІ». Я дам хорошу рецензію».

Пройшло більше року, поки я переклав статтю українською, відредагував, підготував відповідно до вимог журналу і під назвою «Парадокс Гіббса з точки зору математика. Частина 1. Аналіз логічних засад висновку про парадоксальний стрибок ентропії змішання ідеальних газів в класичній термодинаміці» передав Н. О. Вірченко. Через деякий час отримав від неї виписку з протоколу засідання Вченої ради фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ» з рекомендацією статті до друку.

Восени 2003 року я подав статтю в журнал «Наукові вісті НТУУ «КПІ». Отримав відмову в публікації на підставі рецензії. Оскільки складалося враження, що рецензент статтю не читав, а лише переглянув, то, відповідаючи

на зауваження рецензента, я коротко виклав суть представлених у статті результатів. Проте у повторній рецензії рецензент підтвердив свою точку зору. Тоді я звернувся до редакції з проханням направити статтю іншому рецензенту, але відповіді не отримав.

Розповів про це Н. О. Вірченко, і на початку 2005 року вона запропонувала мені зробити доповідь про парадокс Гіббса на Академічних читаннях пам'яті засновника і першого президента Академії Наук Вищої школи України Віталія Стріхи. Виступ, на мою думку, пройшов успішно. Мене уважно слухали, задавали питання, заперечень проти висновків не висловлювали. Згодом з'явилася стаття про ці читання, у якій, зокрема, говорилося, що «...кандидат технічних наук В. М. Ігнатович презентував ще один спосіб підходу до вирішення класичного «парадоксу Гіббса» в термодинаміці, над розв'язанням якого фізики вже б'ються майже півтора сторіччя» [6, с.156].

Наприкінці 2005 року Н. О. Вірченко повідомила мені про те, що готується вихід журналу «Наукові записки АН ВШ України», куди я міг би подати статтю. І ось у 2006 році з'явилася моя перша публікація, присвячена парадоксу Гіббса [7], причому перед текстом статті вказано: «Подано академіком АН ВШ України Н. О. Вірченко». У тому ж році Ніна Опанасівна запропонувала мені взяти участь в X Міжнародній конференції ім. академіка М.Кравчука. Я підготував тези «О неоднозначности функции энтропии в классической термодинамике», які були опубліковані в збірнику матеріалів конференції.

У 2007 році Н. О. Вірченко знову запросила мене виступити на Академічних читаннях пам'яті В. Стріхи, де я зробив доповідь на тему «Дослідження можливості усунення парадокса Гіббса в рамках класичної термодинаміки». У 2008 році стаття з такою самою назвою вийшла у «Наукових записках АН ВШ України» [8]. І знову в журналі було вказано: «Подано академіком АН ВШ України Н. О. Вірченко».

У тому ж 2007 році, роздумуючи над тим, що подати на наступну конференцію ім. академіка М. Кравчука, я знайшов у своїх записках міркування щодо парадокса Гіббса десятилітньої давності, про які вже забув, перевірів і написав тези [9]. Зазначу, що ці тези, як попередні, неодноразово обговорював з Н. О. Вірченко.

У 2007 році вийшла друком моя монографія «Введение в диалектико-материалистическое естествознание» [10], в якій є глава 5 «Анализ парадокса Гиббса». На основі окремих глав цієї монографії я планував підготувати три монографії, проте книгу про парадокс Гіббса писати не збирався, оскільки вказана глава була невелика за обсягом. Але весною 2009 року, обговорюючи з Ніною Опанасівною якісь наукові проблеми, я раптом усвідомив, якими матеріалами можна було б доповнити цю главу, щоб вийшла книга про парадокс Гіббса обсягом принаймні три друкованих аркуші. Тут же поділився цими думками з Н. О. Вірченко і почув у відповідь: «Дійте!».

Пройшло більше року, перш ніж я закінчив роботу над монографією «Парадокс Гиббса с точки зрения математика» [1]. Під час роботи неодноразово

обговорював її окремі фрагменти з Ніною Опанасівною. Зауважу, що спочатку вона висловила заперечення проти назви книги: «Ви ж не математик...». Але погодилася, коли я пояснив, що не будучи математиком, я можу викласти точку зору математика на парадокс Гіббса, оскільки математичний апарат, який застосовувався у моїх дослідженнях — алгебраїчні рівняння, похідна, диференціали, визначені і невизначені інтеграли — не виходить навіть за рамки того, що я вивчав, коли був студентом Київського політехнічного інституту. Коли закінчив книгу, Н. О. Вірченко погодилася бути її рецензентом. Рекомендацію ж книги до друку дало відділення математики АН ВШ України, яке очолює Ніна Опанасівна.

Таким чином, всі основні результати моїх досліджень парадокса Гіббса були опубліковані завдяки суттєвій підтримці Н. О. Вірченко і сприянню АН ВШ України, спершу — частинами, а згодом у вигляді монографії. Без такої підтримки і сприяння названа монографія не була б не тільки опублікована, а й написана. Я не став би працювати над монографією, присвяченій проблемі, яку називають однією з великих задач науки, якби не був абсолютно впевненим в правильності отриманих результатах і переконливості своєї аргументації. А таку впевненість набув, завдяки тому, що протягом кількох років неодноразово виступав і публікував повідомлення щодо парадокса Гіббса.

Список літератури

1. Игнатович В. Н. Парадокс Гиббса с точки зрения математика: Монография. — К.: Издательская группа «АТОПОЛ», 2010. — 80 с.
URL: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/8755>.
2. Хайтун С. Д. История парадокса Гиббса. — М.: Наука, 1986. — 168 с.
3. Gibbs paradox and its resolutions / Compiled by Shu-Kun Lin. Last change: 7 November 2009 // URL: www.mdpi.org/lin/entropy/gibbs-paradox.htm.
4. Маслов В. П. Математическое разрешение парадокса Гиббса. — Математические заметки. — 2011. — Т.89. — Вып. 2. — С.272—284.
5. Козлов В. В. Кинетика бесстолкновительного газа: выравнивание температуры, возрастание грубой энтропии и парадокс Гиббса // Нелинейная динамика. — 2009. — Т. 5, №3. — С. 377—383.
6. Переяславец М. Академія вшанувала пам'ять свого президента // Психологія і суспільство. — 2005. — № 2 (20). — С.154—156.
7. Игнатович В. М. Аналіз парадокса Гіббса // Наукові записки АН Вищої школи України. — 2006. — Т. 1. — С. 32—37.
8. Игнатович В. М. Дослідження можливості усунення парадокса Гіббса в рамках класичної термодинаміки // Наукові записки АН Вищої школи України. — 2008. — Т. III. — С. 27—31.
9. Игнатович В. М. Парадокс Гиббса — результат математической некорректности // XII Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. 15—17 травня 2008 р., Київ: Матеріали конф. I. — К.: ТОВ «Задруга», 2008. — С.163—164.
10. Игнатович В. Н. Введение в диалектико-материалистическое естествознание. — К.: Издательство «ЭКМО», 2007. — 468 с.

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПІД ЧАС ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНІЧНОМУ ВНЗ

С. П. Казнадій, В. П. Мурашківська, Л. А. Руновська

Чернігівський національний технологічний університет, Чернігів, Україна
kaz_na@i.ua

У Національній доктрині розвитку освіти визначено: «**Головне завдання вищої школи** — професійна підготовка студентів, формування фахівців із вищою освітою, здатних до творчості, прийняття оптимальних рішень, таких, що володіють навичками самоосвіти й самовиховання, вміють узгоджувати свої дії з діями інших учасників спільної діяльності».

Дисципліна «Вища математика» для студентів технічних вузів є з одного боку фундаментальною, формує наукове зображення світу, з іншого боку прикладною, так як є інструментом для розв'язання професійних задач. Така двоїстість є джерелом суперечок у відповіді на питання: чи є математика ціллю або інструментом навчання, що в свою чергу впливає на вибір методів навчання і на формування комплексу задач. Ми вважаємо, що дисципліну «Вища математика» в технічному ВНЗ треба розглядати як засіб отримання якісних професійних знань, засіб розв'язання професійних задач, засіб інтелектуального розвитку. Такий підхід суттєво відрізняється від раніш прийнятого, який був спрямований на засвоєння студентом суми математичних знань і формування навичок розв'язання математичних задач.

Практична важливість тематики цього дослідження обумовлюється такими існуючими протиріччями:

- між соціальним замовленням суспільства на висококваліфікованих спеціалістів та недостатнім рівнем інформаційної культури випускників технічних ВНЗ;

- між традиційними методиками та освітніми технологіями з одного боку та сучасними вимогами до рівня знань спеціалістів (інженерів, технологів) з іншого;

- між наявністю доступних комп'ютерних математичних систем з простим та дружнім інтерфейсом, які мають найширші можливості для розв'язання формалізованих задач, та їх слабким використанням в навчальному процесі;

- між необхідністю розробки та застосування комп'ютерних підручників та інших методичних засобів для викладання математичних курсів та їх недостатньою наявністю.

Студентів технічного вузу необхідно навчати не тільки за традиційними методиками. Це пов'язано з тим, що майбутні інженери та економісти, крім знань із своєї безпосередньої предметної області, мають володіти інформаційною культурою та практичними навичками застосування нових комп'ютерних технологій.

На сучасному етапі Болонського процесу у технічних ВНЗ відбувається перерозподіл навчального навантаження на користь самостійної роботи студентів. Таким чином скорочується кількість аудиторних годин на курс вищої математики, тому він є надзвичайно концентрованим з точки зору насиченості поняттями, ідеями та методами, і багато студентів-першокурсників не в змозі «переварити» його за відведений для цього час. Тому необхідно знаходити шляхи оптимізації навчального процесу.

Засобом оптимізації процесу викладання вищої математики може бути системне впровадження нових інформаційних технологій, що в свою чергу потребує забезпечення студентів методичними та навчовими матеріалами нового типу, а саме — електронними курсами по відповідним розділам, використання в навчовому процесі комп'ютерних математичних систем (Maple, MatLab, MathCAD, Mathematica) та впровадження дистанційного навчання, яке з кожним днем набуває більш широкого застосування на різних рівнях освіти. Це пов'язано з тим, що дистанційне навчання як інноваційний освітній проект з використанням інформаційно—комп'ютерних технологій допомагає студентам реалізувати власні освітні цілі, направлені на розвиток особистості.

Використання інформаційних технологій:

- дозволить збагатити зміст і урізноманітнити форми та способи оволодіння новими темами;
- підвищить мотивацію навчально-творчої діяльності студентів на заняттях;
- дасть змогу студентам самостійно вивчати певні теми та отримати принципово нові знання для їх подальшого використання в практичній роботі.

Програма MatLab достатньо проста і зручна у використанні. Студенти комп'ютерних спеціальностей дуже швидко оволодівають нею і охоче використовують для перевірки результатів своїх розрахунків, побудови поверхонь другого порядку, тіл, обмежених поверхнями, кривих, заданих полярними або параметричними рівняннями, та при розв'язанні більш складних задач. На механічних спеціальностях використовують переважно MathCAD або Maple.

Однією з форм контролю може бути електронне тестування. На кафедрі розробляється багаторівнева система тестових завдань, що сприятиме ефективному та об'єктивному оцінюванню знань.

Список літератури

1. Ключко В. І. Нові інформаційні технології навчання математики в технічній вищій школі: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора пед. наук: спец. 13.00.02. «Теорія та методика навчання математики» // В. І. Ключко. — Вінниця, 1998. — С. 130—145.
2. Нагаєв В. М. Досвід використання тестового контролю залишкових знань за модульно-рейтинговою технологією навчання // Засоби начальної та науково-дослідної роботи: Зб. наук. пр. — Харків: ХППУ, 2001. — С. 171—180.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ДОСВІДУ РОБОТИ ІЗ ВПРОВАДЖЕННЯ СУЧАСНОГО ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ В НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЦЕС У ДВНЗ «ДДПУ»

Н. В. Кайдан, З. Д. Пашенко, О. М. Рябухо, А. В. Стьопкін, Т. В. Турка

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна

kafedra_algebry_sdpu@mail.ru

Сучасний стан розвитку суспільства вимагає від його членів бути більш інформованими, мобільними, вміти творчо і критично розмірковувати, отже мати мотивацію до саморозвитку і самонавчання. Перед викладачами вишу стоять завдання створення нових та вдосконалення існуючих засобів навчання, що сприяє зростанню ролі використання комп'ютерів в навчальному процесі.

Залучення інформаційно-комп'ютерних технологій у навчальний процес (в тому числі і в організацію самостійної роботи) майбутніх вчителів оптимізує витрати зусиль в досягненні навчальних завдань та формує у них нові моделі діяльності, засновані на використанні інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ), готуючи до творчого системного використання ІКТ у професійній діяльності.

Сучасні системи комп'ютерної математики (СКМ) активно використовуються у навчальному процесі в усьому світі. Створення на їх основі навчальних середовищ при вивченні математичних дисциплін є досить важливою складовою у підготовці викладачів математики та фізики. Нові інформаційні технології навчання (НІТН) містять в собі всеохоплюючі засоби обробки інформації. Тому відкриваються можливості широкого розвитку творчого потенціалу, пізнавальних здібностей окремо кожного студента, створюються умови диференціації навчання. За рахунок існування в складі НІТН наперед вироблених засобів автоматизації технічних, рутинних операцій, які необхідно виконувати під час дослідження різних процесів і явищ, можна значно зменшити навантаження при навчанні студентів, надати навчальній діяльності дослідного, творчого характеру, стимулювати зацікавленість та пізнавальну активність студентів.

За останні десятиріччя було розроблено низку математичних продуктів спеціального та універсального характеру, в яких реалізована значна кількість стандартних математичних функцій та операцій. Створені потужні засоби графіки для побудови двох і трьохвимірних графіків і графічних об'єктів та засоби підготовки математичних текстів до друку, які дають можливість експорту даних в інші програмні продукти та імпорту даних з них для подальшого опрацювання.

Серед сучасних пакетів, орієнтованих на розв'язування завдань математичного характеру як в чисельному, так і в символічному видах, можна виділити наступні: MathCAD, MatLab, Maple, Mathematica, Maxima, SAGE, Axiom. Перші два пакети, орієнтовані на чисельні розрахунки. Пакети Mathematica і Maple мають досить розвинені засоби символічних перетворень.

При цьому, володіючи могутніми засобами чисельних обчислень, вони набувають все більшої популярності. Серед СКМ, з погляду оцінки їх обчислювальної потужності, мовних засобів, зручності роботи і інтерпретації результатів, Maple, MatLab, Mathematica і MathCAD — безперечні лідери в своєму класі. Але головним недоліком цих пакетів є те, що вони комерційні. Тобто для користування ними необхідно придбати ліцензію, що суттєво ускладнює використання таких систем у навчальному процесі, так як придбати необхідну кількість ліцензій може не кожний навчальний заклад. Тому одним із шляхів залишається використання безкоштовних СКМ, таких як Maxima, SAGE, Axiom та розробка методик їх використання для викладання ряду дисциплін у підготовці викладачів математики.

Використання СКМ SAGE в процесі вивчення математичних дисциплін дозволить зменшити час розв'язання задач з громіздкими розрахунками, а також виконати перевірку правильності проведення розрахунків та перетворень. Специфіка СКМ SAGE дозволяє припустити, що її використання дозволить підвищити ефективність навчання студентів дисциплінам природничого циклу, а в перспективі може сприяти поступовому переходу до розв'язування нестандартних задач творчого характеру та наближенню вузівської математики до сучасної.

Система комп'ютерної алгебри Maxima — система для роботи з символьними та числовими виразами, яка містить в собі реалізацію диференціювання, інтегрування, розклади в ряди, перетворення Лапласа, розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, систем лінійних та нелінійних рівнянь, дослідження поліномів, множин, списків, векторів, матриць та тензорів. Система дозволяє будувати графіки функцій та статистичних даних в двох та трьох вимірах (полярних та декартових координатах). Maxima є універсальним математичним пакетом, який дозволяє розв'язувати велику кількість складних математичних задач без використання програмування. Пакет Maxima розроблений з урахуванням інтересів простого користувача. Реалізовано інтуїтивно зрозумілий інтерфейс, основний акцент зроблено на наочності і простоті роботи з середовищем системи комп'ютерної алгебри.

При обробці результатів курсових та кваліфікаційних випускних робіт студентам математичних спеціальностей найчастіше не вистачає можливостей звичайних офісних додатків. Через це виникає потреба в використанні більш потужнішого програмного забезпечення, насамперед пакетів математичних програм та видавничих систем класу TEX.

Більшість систем комп'ютерної математики є комерційним продуктом, що суттєво ускладнює використання таких систем у навчальному процесі ВНЗ.

Отже, маємо два шляхи розв'язання зазначеної проблеми: створення викладачами власних програмних продуктів, які будуть розраховані на вітчизняну методику навчання математики, або використання безкоштовних систем комп'ютерної математики та розробка методики їх використання для викладання ряду дисциплін у підготовці викладачів математики та фізики.

Авторами певний час досліджувалися можливості використання сучасного програмного забезпечення в навчальному процесі на фізико-математичному факультеті. Підготовлена та реалізована наскрізна програма використання ІКТ, яка охоплює весь цикл фундаментальної та професійної підготовки студентів, розроблена методика використання ІКТ для обробки результатів досліджень в курсових та кваліфікаційних роботах. Запропоновано ефективні методи організації контролю та самоконтролю самостійної роботи студентів засобами ІКТ. Систематичне застосування математичних пакетів у викладанні різних дисциплін дозволяє говорити про формування професійної компетентності майбутнього фахівця, у тому числі і його інформаційної компетентності.

За п'ять років навчання студенти опановують офісні додатки, мову структурного програмування, середовище візуального програмування, математичні пакети, видавничі системи середовище flash-програмування.

Отже, використання ІКТ в процесі навчання підвищує мотивацію учнів та студентів до навчання, сприяє розвитку інтелекту і формуванню навичок самостійної роботи з пошуку необхідної інформації, розширює обсяг навчальної інформації, забезпечує індивідуальний підхід у навчанні, підвищує якість контролю знань учнів, забезпечує гнучкість управління навчальним процесом.

Список літератури

1. Іванова К.Ю. Реалізація задачі поділу таємниці в математичному пакеті Maxima. / К. Ю. Іванова, О. М. Рябухо // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ (за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції «Актуальні питання науки і освіти»). — Слов'янськ : СДПУ, 2012. — № 2 — С. 63—69.
2. Кайдан В. П. Комп'ютерні технології як компонент процесу викладання природничо-математичних дисциплін / В. П. Кайдан, Н. В. Кайдан // Гуманізація навчально-виховного процесу : Збірник наукових праць. / [За заг. ред. проф. В. І. Сипченка]. — Вип. LXX. — Ч. II. — Слов'янськ : ДДПУ, 2014. — С. 24—30.
3. Пащенко З. Д. Організація контролю та самоконтролю результатів самостійної роботи студентів засобами ІКТ у вищих педагогічних навчальних закладах. / З. Д. Пащенко, В. Ю. Пилипенко, О. М. Рябухо // Гуманізація навчально-виховного процесу: збірник наукових праць. / [За заг. ред. проф. В.І. Сипченка]. — Вип. LXVI. — Слов'янськ : ДДПУ, 2013. — С. 155—166.
4. Рябухо О. М. Використання системи комп'ютерної математики при вивченні природничих дисциплін у вищих педагогічних навчальних закладах / О. М. Рябухо, Є. М. Пірус, Т. В. Турка // Гуманізація навчально-виховного процесу: збірник наукових праць / [За заг. ред. проф. В. І. Сипченка]. — Вип. LXIII. — Слов'янськ : ДДПУ, 2013. — С. 114—120.

ЯК ВИКЛАДАТИ ТЕМУ «ТЕОРЕМИ ПРО СЕРЕДНЄ ДЛЯ НЕПЕРЕРВНИХ ТА ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ»

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Моїй первісточці-правнученьці Ровен

Йтиметься про уточнення, узагальнення та спрощення доведення теорем про середнє в математичному аналізі (для неперервних функцій, в диференціальному та інтегральному численні) та обчислювальній математиці. Їх формулювання бажане більш повне — ствердження не про принаймні одну середню точку, а, по можливості, про гарантовану їх мінімальну кількість, подавати вираз середніх точок через відповідну обернену функцію $f^{-1} = \arcsin f$, а доведення більш простим, явним, без складних побудов. Варто при цьому нагадати слухачам означення λ — *кратного* нуля функції f як точки a , в околі (односторонньому — *односторонні*, двосторонньому — *двосторонні* нулі) якого для функції справджується рівність $f(x) = (x - a)^\lambda \phi(x)$, $\phi(a) \neq 0$, а у випадку *цілократного* (k — кратного, при $k = 1$ — *простого*) нуля — еквівалентне рівностям $f^{(i)}(a) = 0$, $i = 0, k - 1$, $f^{(k)}(a) \neq 0$. Двосторонні нулі слід поділяти на так звані *знакозмінні* ($\lambda = (2n + 1) / (2k + 1)$) та *знакосталі* ($\lambda = (2n) / (2k + 1)$) нулі як такі, при переході через які функція, відповідно, змінює та не змінює знак. У випадку цілократних нулів — кількістю усіх нулів x_j функції, як відомо, вважають суму їх кратностей k_j .

Теорема 1 (Коші). Неперервна на інтервалі (a, b) функція f при умові

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) < 0$$

має на інтервалі (a, b) непарну кількість знакозмінних нулів ζ та, можливо, певну кількість знакосталих нулів, причому $\zeta = f^{-1}(0) \in (a, b)$.

Доведення теореми традиційне, впливає з теореми Дарбу.

Наслідок. З теореми 1 слідує рівність

$$\sigma = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j = f(\zeta), \zeta, x_j \in [a, b], f_j = f(x_j), \alpha_j > 0, \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1 \Rightarrow \zeta = f^{-1}(\sigma).$$

Дійсно, для твірної функції $x \mapsto F(x) = f(x) - \sigma$, маємо $(m - \sigma)(M - \sigma) < 0$, де $m = \min f_j$, $M = \max f_j$.

Теорема 2 (Ролля). Диференційовна на інтервалі (a, b) функція f при умові

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) \lim_{x \rightarrow b-0} f'(x) < 0$$

має на цьому інтервалі лише непарне число знакозмінних нулів (середніх точок) ζ похідної $f'(x)$ ($f'(\zeta) = 0$, $\zeta = \phi^{-1}(0) \in (a, b)$, $\phi = f'$).

Доведення слідує безпосередньо з теореми 1 для похідної $f'(x)$.

При $f \in C([a, b])$, $f \in C^1(a, b)$, $f(a) = f(b)$ доведення теореми традиційне.

Наслідок 1. Між двома сусідніми дійсними нулями диференційовної функції існує лише непарне число нулів її похідної. Якщо таких нулів декілька, то, рекурентно, існують нулі і її старших похідних, а нулів найстаршої з таких похідних один простий нуль. У випадку ж алгебричних многочленів лише з дійсними нулями за основною теоремою алгебри між сусідніми дійсними нулями многочлена — лише один нуль його похідної. При наявності комплексних нулів — ні. Приклад: $P_8(x) = x^8 - 1$. Крім того, якщо алгебричний многочлен має лише дійсні нулі, то й усі його похідні (до передстаршого порядку включно) теж мають лише дійсні нулі.

Наслідок 2. Якщо диференційовна на (a, b) функція f має на кінцях відрізка $[a, b]$ дійсні нулі, відповідно, кратності m та n , то на інтервалі (a, b) існує відповідна кількість нулів усіх її похідних, принаймні, до $(m + n)$ -го порядку включно. Нулів похідної найстаршого порядку один простий.

Як наслідок з теореми Ролля слідує відповідне узагальнення решти теорем про середнє для диференційовних функцій.

Теорема 3 (Коші). Для неперервних на $[a, b]$ та диференційовних на (a, b) функцій f, g справедлива рівність

$$(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(\zeta) = 0, \zeta \in (a, b), \quad (1)$$

середніх точок ζ у цій рівності може бути лише непарна кількість.

Доведення теореми слідує з теореми Ролля для допоміжної (твірної) функції

$$x \mapsto F(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)),$$

оскільки $F(a) = F(b) = 0 \Rightarrow \exists F'(\zeta) = 0$, $\zeta = \Phi^{-1}(0) \in (a, b)$, $\Phi = F'$.

Наслідок 1. При $g(x) = x$ з рівності (1) маємо теорему Лагранжа.

Наслідок 2. Покладемо в рівності (1), замість функцій f, g , функції f^m, g^n , $m \geq 1, n \geq 1$. В результаті матимемо рівність

$$(f^m(b) - f^m(a))ng^{n-1}(\zeta)g'(\zeta) = (g^n(b) - g^n(a))mf^{m-1}(\zeta)f'(\zeta), \zeta \in (a, b),$$

з якої з урахуванням рівності (1) дістаємо рівність

$$\frac{f^{m-1}(b) + f^{m-2}(b)f(a) + \dots + f(b)f^{m-2}(a) + f^{m-1}(a)}{g^{n-1}(b) + g^{n-2}(b)g(a) + \dots + g(b)g^{n-2}(a) + g^{n-1}(a)} = \frac{m}{n} \frac{f^{m-1}(\zeta)}{g^{n-1}(\zeta)}, \zeta \in (a, b),$$

Теорема 3 (перша теорема про середнє в інтегральному численні). Для неперервних на $[a, b]$ функцій f, g при умові

$$J(b) = \int_a^b g(x)dx \neq 0$$

справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\zeta) \int_a^b g(x)dx, \zeta \in [a, b].$$

Доведення теореми випливає з теореми Ролля для твірної функції

$$x \mapsto F(x) = J(b) \int_a^x f(s)g(s)ds - J(x) \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

оскільки $F(a) = F(b) = 0$. Отже, $\exists \zeta \in [a, b] \Rightarrow F'(\zeta) = 0 \Rightarrow \zeta = \arg F'(0)$.

Теорема 4 (узагальнення теореми 2 на випадок довільної кількості функцій). Для $f_j \in C[a, b]$, $f_j \in C^1(a, b)$ $j = 1, n$, справедлива рівність

$$\sum_{j=1}^n A_j f'_j(\zeta) \prod_{i=1, i \neq j}^n \Delta f_i = 0, \Delta f_j = f_j(b) - f_j(a) \neq 0,$$

$$A_j - const, \sum_{j=1}^n A_j = 0, \zeta \in (a, b).$$

Середніх точок ζ тут може бути лише непарне число.

Доведення слідує з твірної для даного твердження функції

$$x \mapsto F(x) = \sum_{j=1}^n A_j (f_j(x) - f_j(a)) \prod_{i=1, i \neq j}^n \Delta f_i,$$

оскільки $F(a) = F(b) = 0 \Rightarrow \exists F'(\zeta) = 0, \zeta = \arg F'(0) \in (a, b)$.

Теорема 5 (про залишковий член формули Тейлора). Справедлива рівність

$$f(b) = T_n(b; a; f) + (b - a)^{n+1} f^{(n+1)}(\zeta) / (n + 1)!, \zeta \in (a, b) \quad (2)$$

($T_n(x; a; f)$ многочлен Тейлора n -го порядку з центром a функції f). Середніх точок ζ у цій рівності може бути лише непарне число.

Доведення (нетрадиційне, в стилі доведення теорем Коші, обумовлене наявністю наслідку 2 з теореми Ролля). Розглянемо твірну функцію

$$x \mapsto F(x) = (f(x) - T_n(x; a; f))(b - a)^{n+1} - (f(b) - T_n(b; a; f))((x - a)).$$

Легко перевірити, що $F(a) = \dots = F^{(n)}(a) = 0, F(b) = 0$. Тому, згідно з наслідком 2 з теореми Ролля, на інтервалі (a, b) існує непарна кількість

(принаймні, одна) точок ζ , в яких $F^{(n+1)}(\zeta) = 0 \Rightarrow \zeta = \text{arc}F^{(n+1)}(0)$. З цієї рівності і слідує рівність (2).

Теорема 6 (узагальнення теореми 5 на довільну кількість функцій). При умовах теореми 5 для функцій f_i справедлива рівність

$$\sum_{j=1}^n A_j f_j^{(n+1)}(\zeta) \prod_{i=1, i \neq j}^n (f_i(b) - T_{i,n}(b, a; f_i)) = 0,$$

$$A_j - \text{const}, \sum_{j=1}^n A_j = 0, \zeta \in (a, b),$$

Точок (нулів) ζ у даній рівності може бути лише непарне число.

Доведення теореми слідує з твірної для неї функції

$$x \mapsto F(x) = \sum_{j=1}^n A_j (f_j(x) - T_{j,n}(x, a; f_j)) \prod_{i=1, i \neq j}^n (f_i(b) - T_{i,n}(b, a; f_i)).$$

Дійсно, оскільки, $F^{(i)}(a) = 0, i = \overline{0, n}, F(b) = 0$, то за наслідком 2 з теореми Ролля існує непарне число таких точок $\zeta \in (a, b)$, що $F^{(n+1)}(\zeta) = 0, \zeta = \text{arc} F^{(n+1)}(0)$.

Нехай для функції f маємо її колоканту $K_m(x; f)$ типу Маркова — Ерміта (узагальнений многочлен, раціональна колоканта тощо) за вузлами $x_j, j = \overline{0, n}$, кратності $k_j, k_0 + \dots + k_n = m + 1$. Тоді нев'язка $r(x) = f(x) - K_m(x; f)$ на відрізку, що містить усі вузли x_j , у цих вузлах має нулі кратності k_j , тобто всього $m + 1$ нулів. Знайдемо $r(x)$.

Теорема 7 (про залишковий член колокант функції). При умовах теореми 6 (при заміні n на m) справедлива рівність

$$r(x) = \omega(x) r^{(m+1)}(\zeta) / \omega^{(m+1)}(\zeta) \Rightarrow f(x) = K_m(x; f) + \omega(x) r^{(m+1)}(\zeta) / \omega^{(m+1)}(\zeta),$$

$$\zeta \in (\lambda, \mu), \lambda = \min x_j, \mu = \max x_j.$$

де ω — так звана *буферна* функція [1], що має у вузлах x_j нулі тієї ж кратності, що й функція r . Зокрема, при $\omega(x) = (x - x_0)^{k_0} \dots (x - x_n)^{k_n}$ матимемо рівність

$$f(x) = K_m(x) + \omega(x) r^{(m+1)}(\zeta) / (m + 1)!, \zeta \in (\lambda, \mu).$$

Доведення. Розглянемо для цього твірну функцію ($x \neq t, x$ — фіксоване)

$$t \mapsto F(t) = r(t)\omega(x) - r(x)\omega(t), x \neq x_j, j = \overline{0, n}, \quad (3)$$

Тому функція F має у вузлах x_j ті ж самі нулі, а крім того, ще один нуль x , оскільки $F(x) = 0$. Отже, дана функція має всього, принаймні, $m + 2$ нулів. Тому за наслідком 2 з теореми Ролля існує принаймні одна середня точка ζ (для кожного $x \neq x_j$, тобто $\zeta = \zeta(x)$), що $F^{(m+1)}(\zeta) = 0$, $\zeta = \arcsin F^{(m+1)}(0)$. Отже, маємо рівність $r^{(m+1)}(\zeta)\omega(x) - r(x)\omega^{(m+1)}(\zeta) = 0$, звідси слідує рівність для $r(x)$

Аналогічно знаходяться і $r^{(k)}(x)$, $k = \overline{1, m-1}$.

Теорема 8 (про похибку формул чисельного диференціювання). При умовах теореми 7 справедлива рівність

$$f^{(k)}(x) = K_m^{(k)}(x; f) + \omega_{m+1-k}(x)r^{(m+1)}(\zeta_k) / \omega_{m+1-k}^{(m+1-k)}(x),$$

$$\zeta_l \in (\min \zeta_{l-1}, \max \zeta_{l-1}) \in (\lambda, \mu).$$

Доведення. Використаємо нулі похідних $r^{(k)}(x)$ та відповідні для кожного k буферні функції $x \mapsto \omega_{m+1-k}(x)$ такі, що мають своїми нулями нулі похідної $r^{(k-1)}(x)$, та аналогічну (3) твірну функцію (x — довільне фіксоване)

$$t \mapsto F_k(t) = r^{(k)}(t)\omega_{m+1-k}(x) - r^{(k)}(x)\omega_{m+1-k}(t), \quad x \neq \zeta_{l-1},$$

як таку, що має $m + 2 - k$ нулів, в той же спосіб, що й при доведенні теореми 7, дістанемо стверджену рівність (простіший спосіб її доведення наведено в [1]).

Список літератури

1. Калайда О. Ф. Чисельні методи. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2000. — 250 с.

ПРО ЗАГАЛЬНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ ФОРМУЛ СУМИ СТЕПЕНІВ ЧЛЕНІВ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ МНОГОЧЛЕННОГО ТИПУ З ЗАДАНИМ РОЗПОДІЛОМ НАТУРАЛЬНОГО АРГУМЕНТА

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Тут подається узагальнення [1] алгоритму побудови формул для скінченної суми степенів елементів послідовностей многочленного типу $a(n)$ натурального аргументу n , тобто формул для сум виду

$$S_k(n) = \sum_{j=1}^n a^k(n). \quad (1)$$

Задачі такого типу в простих випадках (наприклад, суми степенів натуральних чисел при невеликих значеннях k) розв'язують за допомогою методу повної математичної індукції тощо. Проте в загальному випадку для сум (1) це надто складно й непередбачувано. Покажемо, що цю задачу у випадку членів $a(n)$ поліноміального типу можна і доцільно розв'язувати за допомогою многочлена Лагранжа натурального аргументу n з сталим кроком сітки вузлів.

Дійсно, якщо в (1) $a(n) = p_l(n)$ — поліном l -го порядку, $l \geq 1$, то $S_k(n)$ є поліном $(l + k + 1)$ -го порядку. Тому з врахуванням рівності $S_k(0) = 0$ його можна побудувати за першими $l + k + 1$ значеннями шуканої суми (1) з рівномірним кроком $m \geq 1$ аргументу n у вигляді многочлена Лагранжа $(l + k + 1)$ -го порядку, тобто покласти

$$S_k(n) = L_{k+l+1}(n) = \sum_{j=0}^{l+k+1} \omega_j(n) S_k(n_j), \quad (2)$$
$$n_j = jm, S_k(0) = 0, \omega_j(n) = \psi_j(n) / \psi_j(n_j), \psi_j(n) = \prod_{i=0, i \neq j}^{l+k+1} (n - n_i).$$

Так, наприклад, сума квадратів членів арифметичної прогресії $a(n) = nd$ матиме вигляд (многочлен Лагранжа третього порядку за вузлами $n = 0, 1, 2, 3$)

$$S_2(n) = d^2 n(n-2)(n-3) / 2 - n(n-1)(n-3)5d^2 / 2 + \\ + n(n-1)(n-2)7d^2 / 3 = d^2 n(n+1)(2n+1) / 6.$$

Список літератури

1. Калайда О. Ф. Про один спосіб побудови формули суми степенів натуральних чисел // Третя міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті», 25—26 грудня 2014 року. Матеріали конференції. — К.: 2014. — С. 173—174. — url: matan.kpi.ua/uk/mvstu3.html.

ПРОСТЕ ДОВЕДЕННЯ ФОРМУЛИ ДЛЯ ВИЗНАЧНИКА ВАНДЕРМОНДА ТА НАСЛІДОК З НЬОГО

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Існує декілька доведень формули для визначника Вандермонда (метод індукції, за допомогою многочленів декількох змінних тощо), але усі вони надто складні, з використанням штучних неочевидних конструкцій та перетворень, вони важко відтворювані, а тому займають багато часу й напруженої уваги слухачів. Тут пропонується найпростіший, на наш погляд, спосіб доведення даної формули (що називається, в один рядок), а також цікавий і важливий наслідок з цього способу доведення для мінорів визначника Вандермонда, відповідних елементам його нижнього рядка.

Розглянемо визначник Вандермонда $(n+1)$ -го порядку — алгебричний многочлен n -го порядку змінної x

$$W_n(x_1, \dots, x_n, x) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Розкладемо його за елементами останнього рядка. Матимемо

$$W_n(x_1, \dots, x_n; x) = x^n A_0 - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} A_{n-1} x + x_1 \dots x_n A_0, \quad (2)$$
$$A_0 = W_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n),$$

де $A_i, i = 1, n-1$, — мінори визначника (1), відповідні його елементам x^{n-i} . Оскільки (1) є алгебричний многочлен n -го порядку і, як бачимо, має n нулів $x_k, k = 1, n$, то усі його нулі прості. Тому для визначника (1) маємо рівність

$$W_n(x_1, \dots, x_n, x) = A_0(x - x_1) \dots (x - x_n) =$$
$$= A_0(x^n - S_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} S_{n-1} x + (-1)^n S_n), \quad (3)$$

де, згідно теореми Вієта, S_i — симетричні многочлени нулів x_k многочлена (2). Отже, згідно (2), врахувавши структуру коефіцієнта A_0 , для визначника (1) маємо рівність

$$W_n(x_1, \dots, x_n, x) = W_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

а тому

$$W_n(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}) = W_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n)(x_{n+1} - x_1) \dots (x_{n+1} - x_n) =$$
$$= (x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})(x_{n+1} - x_1) \dots (x_{n+1} - x_n).$$

Крім того, з (2), (3) для мінорів A_i визначника (1) (і, взагалі, усіх визначників многочленного типу, тобто з останнім рядком виду (1)) слідує рівності

$$A_i = A_0 S_i.$$

ПРО ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ІНОЗЕМНИМ СТУДЕНТАМ В НАЦІОНАЛЬНОМУ АВІАЦІЙНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко

Національний авіаційний університет, Київ, Україна

karupu@ukr.net, 111ota@ukr.net, pobeda586@gmail.com

Національний авіаційний університет є авторитетним міжнародним центром підготовки спеціалістів для авіаційної та інших галузей. З 1949 року в університеті розпочалась підготовка фахівців з іноземних держав. За цей період підготовлено тисячі фахівців для багатьох країн світу. Саме тому в НАУ завжди велику увагу приділяють вирішенню різноманітних питань, пов'язаних з навчанням іноземних студентів.

У Національному авіаційному університеті іноземні студенти можуть за їх вибором навчатися українською, англійською або російською мовою. Можливість навчання російською мовою є особливо важливим для студентів з країн СНД, більшість яких достатньо добре володіє цією мовою. Можливість навчання англійською мовою є привабливою для іноземних студентів, які її знають, але ще не встигли як слід опанувати російську та українську мову. При цьому іноземні студенти мають можливість навчатися в нашому університеті без проходження мовної підготовки на підготовчому відділенні. Відмітимо, що значна частина іноземних студентів обирає навчання українською мовою.

Кафедра вищої та обчислювальної математики забезпечує викладання англійською мовою низки математичних дисциплін студентам Аерокосмічного інституту, Інституту комп'ютерних інформаційних технологій, Інституту інформаційно-діагностичних систем і Інституту аеронавігації.

У зв'язку з розвитком англомовної освіти виникає ціла низка питань щодо викладання математичних дисциплін англійською мовою. Починаючи з 2007 року ми проводимо дослідження з методики викладання математичних дисциплін іноземним та українським студентам в рамках Проекту англомовної освіти.

В англомовних групах навчаються студенти з багатьох країн з різним рівнем знань англійської мови, які не завжди добре володіють термінологією. Тому при викладанні математичних дисциплін іноземним студентам перш за все потрібно враховувати, що англійська мова не є рідною для вищезгаданих студентів і що навчання в середній школі відбувалось рідною для них мовою. Крім того необхідно пам'ятати особливості викладання математики в середніх школах відповідних країн. Необхідно також пам'ятати, що значна частина іноземних студентів є носіями мов, для яких є характерними або відмінний від звичного для нас напрямок написання тексту або ієрогліфічна писемність.

Слід відмітити, що іноземні студенти, як правило, дуже активно працюють з підручниками, особливо цінують посібники з прикладами розв'язаних задач. Для іноземних студентів, що не володіють або володіють дуже погано російською та українською мовами, особливо важливим є наявність доступних для них підручників англійською мовою. В першу чергу нами приділялась увага

написанню та виданню навчальних посібників, що стосуються частини курсу «Вища математика», що є аналогом курсу «Advanced mathematics», в якому вивчаються ряди, кратні інтеграли, векторний аналіз, теорія функцій комплексної змінної, операційне числення, теорія ймовірностей тощо. При переході НАУ на навчання за кредитно-модульною системою ці посібники перестали повністю відповідати потребам студентів. В останні роки групою викладачів кафедри вищої та обчислювальної математики створено навчальний посібник в чотирьох частинах, який повністю забезпечує супровід курсу вищої математики для студентів усіх технічних спеціальностей (див. [1—4]). Крім того, для супроводу навчання за деякими спеціальностями створено навчальний посібник з математичного аналізу [5].

Розглянемо основні, на наш погляд, проблеми, що постають при викладанні дисципліни «Математичний аналіз» та відповідних розділів дисципліни «Вища математика». Важливими є певна відмінність в підході викладачів до оцінки значущості різних тем та їх взаємозв'язків, що практикувалися ще в середній школі, і недостатня теоретична і практична підготовка студентів з деяких питань.

Слід відмітити традиційний для іноземних студентів невисокий рівень знань з тригонометрії, дуже низький рівень знань про обернені тригонометричні функції, погане вміння будувати графіки (особливо тригонометричних і складних функцій). Крім того, дуже важливою є недостатність навичок цих студентів з техніки диференціювання і інтегрування і недостатнє бажання опановувати ці навички. Хоча при цьому слід відмітити більшу готовність іноземних студентів використовувати системи комп'ютерної математики і певний рівень навичок застосування цих систем. Тому для хоча б часткової компенсації недоліків загально математичної підготовки цих студентів ми рекомендуємо активне використання систем комп'ютерної математики. Слід зауважити також, що більшість іноземних студентів краще підготовлені з питань комбінаторики, непогано знають векторну алгебру, більше вивчали наближені обчислення. Як правило, рівень сприйняття ними більш абстрактних питань є набагато нижчим. Крім того, існує досить велика кількість проблем, пов'язаних з засвоєнням іноземними студентами загальних питань диференціального та інтегрального числення, оскільки цей розділ є достатньо складним для сприйняття, особливо в технічних вузах. В зв'язку з цим ускладнюється сприйняття визначеного інтеграла як границі інтегральних сум, що знижує розуміння застосувань визначеного інтеграла.

При вивченні функцій кількох змінних та кратних інтегралів даються взнаки недоліки засвоєння попередніх тем математичного аналізу, до яких додаються проблеми, пов'язані з недоліками засвоєння теми «Криві та поверхні другого порядку», внаслідок чого побудова потрібної області дуже часто стає для студентів нездоланною проблемою. Тому для цих студентів ми надаємо рекомендації по використанню систем комп'ютерної математики при

розв'язуванні відповідних задач. Крім того, ми надаємо їм опорні матеріали по розділах курсу.

Відносно добре іноземні студенти засвоюють теорію звичайних диференціальних рівнянь, яка в невеликому обсязі включається в дисципліну «Математичний аналіз». Значну увагу слід приділяти виробленню навичок розпізнавання основних типів диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах. Відмітимо при цьому, що при чіткому викладі викладачем алгоритму розпізнавання найпростіших їх типів значна частина іноземних студентів достатньо добре засвоює ці навички. Особливо добре вони засвоюють методи розв'язування лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Детальна алгоритмізація процесу розпізнавання типів задач є дуже важливою також при навчанні розв'язуванню задач на дослідження збіжності числових рядів. Проте, крім проблеми вибору ознаки збіжності, перед студентом постає також і не менш складна проблема знаходження відповідних границь. Саме тому на цьому етапі вивчення математичного аналізу і вищої математики ми вважаємо доцільним надати студентам рекомендації по використанню систем комп'ютерної математики до обчислення границь. Ці навички студенти можуть використовувати також і при знаходженні радіуса збіжності степеневого ряду.

Слід також відмітити існування характерних для іноземних студентів проблем з розв'язуванням прикладних задач. Як правило, при навчанні їх в середній школі основна увага приділялась розв'язуванню задач економічного змісту. В той же час при роботі зі студентами, що навчаються за напрямками «Комп'ютерна інженерія», «Програмна інженерія», «Системна інженерія», «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», «Енергомашинобудування», «Електронні пристрої та системи», «Радіотехніка», «Авіоніка» та «Обслуговування повітряних суден» слід особливу увагу звертати на задачі технічного змісту.

Список літератури

1. Higher mathematics. Part 1: Manual / V. P. Denisiuk, L. I. Grishina, O. V. Karupu, T. A. Oleshko, V. V. Pakhnenko, V. K. Repeta. — Kyiv: NAU, 2006. — 268 p.
2. Higher mathematics. Part 3: Manual / V. P. Denisiuk, L. I. Grishina, O. V. Karupu, T. A. Oleshko, V. V. Pakhnenko, V. K. Repeta. — Kyiv: NAU, 2006. — 232 p.
3. Higher mathematics. Part 2: Manual / V. P. Denisiuk, V. G. Demydko., V. K. Repeta. — Kyiv: NAU, 2009. — 248 p.
4. Higher mathematics. Part 4: Manual. Theory of Probability and Elements of Mathematical Statistics / V. P. Denisiuk, V. M. Bobkov, L. I. Grishina, V. G. Demydko, O. V. Karupu, T. A. Oleshko, V. V. Pakhnenko, T. O. Pogrebetska, V. K. Repeta. — Kyiv: NAU, 2013. — 248 p.
5. Mathematical analysis: Manual / V. P. Denisiuk, V. G. Demydko., O. V. Karupu, T. A. Oleshko, V. V. Pakhnenko, V. K. Repeta. — Kyiv: NAU, 2013. — 396 p.

ОЛЕКСАНДР СТЕПАНОВИЧ СМОГОРЖЕВСЬКИЙ

С. С. Качанюк

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, Вінниця, Україна
dnv1110@gmail.com

«Шахи, живопис, складання віршів, ботаніка, іноземні мови, література — ось неповний перелік «хоббі», як говорять тепер, мого діда. З читання книжок пов'язано було багато чого в нашому домі... Від суто математичних до романів французькою мовою.»

З. Л. Берест (внучка О. С. Смогоржевського)

Багатогранна людина, хороший сім'янин, але в першу чергу — видатний український математик Олександр Степанович Смогоржевський, який зробив значний внесок в розвиток математичної освіти.

О. С. Смогоржевський народився 6 березня 1896 р. в с. Лісові Берлінці, що на Вінниччині. Після закінчення з золотою медаллю Немирівської гімназії 1916 р. вступив на фізико-математичний факультет Одеського університету.

Проте, в зв'язку з військовим часом, навчання йому довелося перервати. У 1918—1930 рр. він викладає в трудових та профшколах на Вінниччині. Деякі роки завідує школою в с. Холодовка, а потім в школі при заводі в с. Кирнасівці.

Олександр Степанович приділяє багато уваги математичній самоосвіті. У 1929 р. екстерном закінчує Київський інститут народної освіти. Надалі і до кінця своїх літ О. С. Смогоржевський працював в Київському політехнічному інституті, де розпочинав асистентом, а в 1944 р. обійняв посаду завідувача кафедри вищої математики, з 1952 р. — завідувача кафедри математичної фізики [1].

Перші наукові праці О. С. Смогоржевського належали до теорії ортогональних та унітарних перетворень. Також він розглянув побудову систем ортонормальних поліномів, пов'язаних з деякими імовірнісними схемами. В цих дослідженнях було узагальнено відповідні результати академіка М. П. Кравчука.

Наступні його праці присвячувались розвитку теорії одновимірних функцій Гріна, звичайних та узагальнених. Вони склали основу його докторської дисертації «Функції Гріна лінійних диференціальних та квазидиференціальних систем в одновимірній області», яка була успішно захищена при Київському університеті в 1945 р.

Ще однією галуззю математичних досліджень, до яких професор Смогоржевський зробив неабиякий внесок, є геометрія, і, зокрема, теорія геометричних побудов на евклідовій та гіперболічній площинах.

Але найбільш продуктивним, особливо в галузі геометричних побудов на неевклідовій площині, був для ученого повоєнний період. Розроблювані тоді питання геометричних побудов у просторі Лобачевського були підсумовані

О. С. Смогоржевським у двох монографіях. Він зумів не просто вперше розв'язати деякі складні конструктивні задачі геометрії Лобачевського, а й започаткував тут новий напрям — розв'язок конструктивних задач за допомогою обмежених засобів [3].

Великий вклад О. С. Смогоржевський зробив в створення навчальних та методичних засобів для студентів. Особливо слід відмітити підручник для університетів і педагогічних вищих навчальних закладів «Основи геометрії» (Перше видання — 1947 р., друге видання — 1954 р.).

До українського видання книги Ж. Адамара «Елементарна геометрія» професор Смогоржевський написав доповнення: «Принципи аксіоматичних побудов геометрії», «Про геометрію Лобачевського», «Короткий огляд робіт російських і радянських математиків в області елементарної геометрії».

О. С. Смогоржевський був блискучим популяризатором математичних знань. Відомі його брошури з серії «Популярні лекції по математиці»: «Метод координат» (1952), «Про геометрію Лобачевського» (1957), «Лінійка в геометричних побудовах» (1957).

Олександр Степанович часто виступав перед вчителями Києва з науково-популярними і методичними лекціями. Його можна характеризувати, як виключно чуйного, дбайливого, тактичного педагога. До останніх днів свого життя він відповідав на листи, що містили наукові чи методичні питання своїх колег і учнів [1].

Діяльність О. С. Смогоржевського високо оцінена. За плідну науково-педагогічну роботу і підготовку інженерних і наукових кадрів О. С. Смогоржевський був нагороджений двома орденами Трудового Червоного Прапора, а в 1966 р. йому було присвоєно почесне звання заслуженого діяча науки УРСР [2].

Характерною рисою науково-популярних праць професора Смогоржевського є оригінальність їх викладу та нові витончені розв'язки розглядуваних задач. Невипадково окремі його роботи в цьому жанрі були перекладені чеською, болгарською, китайською та японською мовами.

Також багато свого досвіду з геометричних наук він передав своїм учням: М. Г. Андрієвській, Р. Й. Демаховській, М. П. Хоменку, В. С. Мартиненку, М. І. Мозговій та іншим [3].

Професор Смогоржевський був людиною різносторонніх інтересів. Він віддавав свій вільний час поезії, живопису, шахам.

Олександр Степанович багатогранні наукові інтереси вдало поєднував з інтенсивним заняттям шаховою композицією, в якій досягнув неабияких успіхів. Останнім роками професора працював в галузі «казкових шахів». І склав понад 200 «казкових задач» [4].

Помер О. С. Смогоржевський 7 травня 1969 р.

Професор залишив після себе великий науковий та педагогічний спадок — більше 100 статей, монографій, навчальних публікацій.

Список літератури

1. Белый Б. Н. Александр Степанович Смогоржевский. К 75-летию со дня рождения / Б. Н. Белый, О. П. Сергунова // Математика в школе. — 2007. — № 2. С. 87.
2. Бородин А. И. Выдающиеся математики: Биогр. Слов.-справ. — 2-е изд., перераб. и доп. — К.: Рад. школа., — 1987. — 656 с.
3. Добровольський В. Життя у пошуку: До 100-річчя від дня народження О. С. Смогоржевського. // У світі математики. — 1997. — Т. 3. Вип. 3. — С. 83—87.
4. Хавін А. Учений і проблеміст // У світі математики. — 1997. — Т. 3. Вип. 3. — С. 100.

СТВОРЕННЯ RESTFUL ДОДАТКУ ДЛЯ ТЕСТУВАННЯ СТУДЕНТІВ НА БАЗІ .NET FRAMEWORK

Штефан Кашчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,

Чернівці, Україна

stiopakashchuk@gmail.com

За останні десятиріччя Інтернет-технології зазнали глобального поширення. За допомогою Інтернету люди отримали можливість спілкуватись, обмінюватись інформацією, здійснювати рекламу та інше. Для створення веб-додатків існує велика кількість фреймворків. На сьогоднішній час одним із найвідоміших інструментів для побудови сайтів є .NET Framework, який базується на використанні шаблону проектування MVC [1].

Оскільки веб-додаток містить різноманітні ресурси, на сьогодні актуальною є задача забезпечення можливості гнучкого управління даними.

За останні роки REST (Representational State Transfer) стала найпопулярнішою архітектурою при дизайні веб-сервісів і веб-API [2]. Дана архітектура дозволяє створювати гнучкі системи управління даними. Можливість доступу та редагування даних з різних видів додатків, наприклад: Web, Android або IOS (рис. 1).

Важливою задачею постає правильний вибір сервіса, який буде реалізовувати доступ до даних. .NET дозволяє вибирати з декількох хороших технологій, але вибір зупиняється на Web API, який дозволить реалізувати всі види маніпуляції даними з клієнтів різного типу[3].

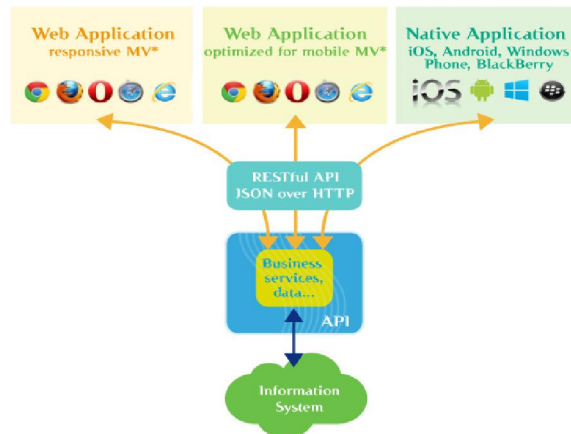


Рис. 1

Як приклад, у даній задачі для аутентифікації та авторизації на сайті використовується OWIN[4]. Він реалізує стандартний доступ до даних. В цій задачі варіант прямого зв'язку з базою даних не підходить. Тому ми створюємо свій менеджер який реалізує понад 9 інтерфейсів, методи яких будуть звертатись до сервісу, а не на пряму до бази даних.

Для цього створюємо UserStore, який унаслідуює такі інтерфейси:

***IUserStore, IUserEmailStore, IUserPasswordStore,
IUserClaimStore, IUserLockoutStore, IUserLoginStore,
IUserPhoneNumberStore, IUserRoleStore, IUserSecurityStampStore,
IUserTwoFactorStore.***

Та перевизначаємо методи всіх інтерфейсів на роботу з нашим сервісом. Таким чином створюємо всі контролери проекту.

Список літератури

1. InfoQ, InfoQ Explores: REST. — М InfoQ.com, 2010. — 127 с.
2. Jim Webber, Savas Parastatidis, Ian Robinson, REST in Practice. — O'Reilly Media, 2010. — 448 с.
3. OWIN Documentation. — [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://owin.org/>.
4. Розробка Web API — [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://habrahabr.ru/post/181988/>

ПРОБЛЕМНЕ НАВЧАННЯ ЯК ДІЄВИЙ МЕТОД НА ШЛЯХУ ДО ОСУЧАСНЕННЯ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Т. І. Клімова, Т. М. Сапронова

Одеська національна морська академія, Одеса, Україна

klimtativ@yandex.ru

Теорія проблемного навчання математики створювалася і застосовувалася до загальної середньої освіти. Очевидно, що методика проблемного навчання у вишах має свою специфіку, пов'язану з іншими цілями і завданнями професійного навчання, відмінностями у вікових і мотиваційних характеристиках школярів і студентів. Характерною ознакою навчання вищої математики майбутніх інженерів є центральна роль задач. Традиційні функції задач — опанування системи математичних знань, умінь і навичок, формування математичної культури й наукового мислення, активізація самостійної пізнавальної діяльності. На даний час зростання обсягів і складності навчальної інформації супроводжується скороченням кількості аудиторних годин на вивчення математики. У цих умовах до традиційних функцій завдань додається функція носія інформації, тобто теоретичні положення дотримуються і встановлюються через задачі. Це означає, що у викладанні вищої математики переважно пропонувати студентам найбільш універсальні, загальні методи розв'язання завдань, забезпечуючи тісний взаємозв'язок різних розділів курсу і систематичне об'єднання аналітичних, геометричних і обчислювальних методів.

У пошуковій діяльності курсантів зазвичай виділяють компоненти орієнтації, виконання і контролю. З цим узгоджується загальноприйняте в методиці навчання математики розчленовування процесу розв'язання задачі на 4 етапи:

1. аналіз умови завдання (вихідних даних і цілей);
2. складання алгоритму (плану розв'язку);
3. реалізація плану розв'язку;
4. дослідження результату розв'язку.

При такому розчленовуванні перші 2 етапи відповідають орієнтовній частині діяльності студента в процесі розв'язку задачі, третій — виконавчою, четвертий — контрольною. Під час традиційного навчання центральним є третій (виконавчий) етап, орієнтовній частині приділяється недостатньо уваги і часу, а четвертий етап — дослідження результатів розв'язку — практично відсутній. Навпаки, у проблемному навчанні основна увага приділяється першим двом і четвертому етапу. Третій (виконавчий) етап діяльності можна і потрібно частково або повністю адресувати комп'ютеру. Так, зокрема, економиться час, якого зазвичай не вистачає для реалізації четвертого — останнього етапу. Останній етап розв'язку задачі — дослідження результатів — відповідає контрольній частині діяльності і може включати наступні компоненти: обґрунтування правильності отриманого розв'язку, у тому числі перевірку використаного алгоритму і самого результату; обговорення питання

про оптимальність вибору алгоритму; виявлення нових знань, умінь і навичок, набутих у результаті розв'язку задачі (або декількох завдань).

Через специфіку математичної підготовки інженерів останній етап доцільно доповнити обговоренням можливих розширень і узагальнень вихідної проблеми і застосованого алгоритму її дозволу, практичних уживань нових знань і умінь у розв'язку навчально-дослідницьких і професійних завдань, а також тих галузей знання і конкретних завдань, де можуть використовуватися отримані результати.

На жаль, у традиційному навчанні ми зазвичай закінчуємо там, де, згідно з методикою проблемного навчання, починається важливий етап — дослідження результатів і систематизація отриманих знань. Наприклад, створюється враження, що дослідження функцій на екстремум потрібне лише для побудови їх графіків. Таким чином, засвоївши методи розв'язку простих завдань на екстремум функції однієї і багатьох змінних, студенти повинні переконатися в тому, що, по-перше, їх можна безпосередньо застосувати для розв'язку прикладних завдань відповідно до майбутньої спеціальності, а по-друге, ці методи можуть бути узагальнені для розв'язку складніших завдань. Досвід показує, що студенти в повній мірі успішно самостійно засвоюють елементи варіаційного числення, застосовуючи набуті ними методи до розв'язку простої задачі про екстремум функціонала.

Особливої уваги заслуговує обґрунтування вибору методу. Так, доцільно в курсі лінійної алгебри використовувати операторний підхід, оскільки він плідний під час вивчення лінійних диференціальних рівнянь і систем, рівнянь математичної фізики, а також під час вивчення лінійних систем у загально-технічних дисциплінах (теоретичні основи електротехніки, теплотехніки тощо). Обґрунтування вибору того чи іншого методу не завжди доступно у всьому обсязі студентам на першому етапі навчання. І все-таки нами вважається за доцільне скрізь, де це можливо, окреслювати ті проблеми, з якими студентам ще лише належить зустрітися.

В умовах лекційно-семінарської системи навчання вищої математики проблемні ситуації виявляються і створюються на лекціях — в основному під час викладу теоретичного матеріалу і на практичних заняттях — під час навчання методам розв'язку завдань. Крім того, неодмінним компонентом проблемного навчання є домашня робота студентів з виконання проблемних завдань викладача, у тому числі самостійне опанування нових розділів математики за допомогою друкарських й електронних посібників, довідкової монографічної літератури, а також ресурсів Інтернету.

Розглянемо декілька типів проблемних ситуацій і наведемо приклади їх реалізації при навчанні вищої математики.

Проблемна ситуація виникає в результаті виявлення протиріччя між новою інформацією і тими знаннями і уявленнями, які сформувалися у студентів в результаті попереднього досвіду. У цьому випадку завдання викладача полягає в тому, щоб підвести слухача до необхідності вводити нові поняття, а також

розширювати або принципово змінювати наявні уявлення, щоб усунути виявлене протиріччя.

Проблемна ситуація створюється шляхом формулювання теоретичних тверджень у вигляді завдань, для розв'язку яких необхідна трансформація наявних знань та умінь, засвоєння нових галузей їх застосування.

Наприклад, в аналітичній геометрії застосовується векторна алгебра до розв'язку наступних завдань: вивести рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно даному вектору, рівняння площини, що проходить через три дані точки, канонічні рівняння прямої в просторі тощо. При такому підході студенти засвоюють загальний метод здобуття шуканих рівнянь, вчаться досліджувати умови застосовності методу і випадки однозначного і неоднозначного розв'язку, а також відсутність розв'язку.

Ряд Тейлора вивчається в результаті розв'язку задачі про розкладання функції в степеневий ряд. У ході розв'язку цієї задачі студенти самостійно приходять до ряду Тейлора, отримують умови розкладності функцій у ряд Тейлора й обґрунтовують єдиність такого розкладання.

Зрозуміло, ми не вичерпали всього різноманіття підходів до проблемного навчання вищої математики. Роздуми про ідеї й методи проблемного навчання математики, викладені в даній статті, дають деякі підстави вважати, що при виконанні ряду умов такий синтез можливий. Однією з найважливіших умов, на наш погляд, є перерозподіл навчального часу між лекційними, практичними заняттями і самостійною роботою курсантів, а також розширення освітнього середовища на терени інформаційного простору. Проблемне навчання вимагає додаткового часу і додаткових інтелектуальних зусиль, як викладачів, так і студентів.

Список літератури

1. Овчинников П. П. та ін. Вища математика. — К.: Техніка, 2009.
2. Демидова Т. Е., Тонких А. П. Реализация проблемного обучения в вузе // Сб. Образ. система «Школа 2100»... — М., 2007.

АНІМАЦІЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ В EXCEL

Т. В. Крижановська, Т. С. Клецька, Т. М. Семененко

Державний економіко-технологічний університет транспорту, Київ, Україна
tsk9@mail.ru

Математичний апарат є універсальним інструментом дослідження завдяки використанню абстракцій. Але існує і зворотній бік медалі — вивчення математики завжди було і залишиться складним процесом для будь-якого учня, так як сухі формальні концепції сприймаються набагато важче наочних образів, з якими він зустрічається в житті. Щоб допомогти студентам подолати цей бар'єр, в курсах математики давно застосовуються різні аналогії і графічні ілюстрації.

Сучасні комп'ютери дозволяють не тільки позбавити учнів від рутинних дій, а й забезпечити більш живе представлення матеріалу. Одним з корисних і цікавих методичних прийомів є створення анімацій. Створення анімацій зазвичай передбачає використання високорівневих інструментальних засобів, таких, наприклад, як широко розповсюджена система Adobe Flash (мультимедійна платформа для створення веб-додатків, кліпів, ігор або мультимедійних презентацій). Однак ціна середовища розробки навіть з навчальною ліцензією досить висока. Використання її вимагає володіння певними навичками, а для програвання флеш-роликів потрібно встановлювати спеціальну програму.

При проведенні лекцій та практичних занять у багатьох розділах математики викладачі успішно користуються табличним процесором MS Excel. Його переваги очевидні — потрібні мінімальні навички програмування, є бібліотека вбудованих методів і можливість графічного представлення результатів. Однак одержані результати зазвичай статичні, а для учнів більш привабливі динамічні.

У цій доповіді пропонується схема, яка дозволяє для ряду навчальних завдань досить простим способом анімувати в Excel процес одержання рішення математичних задач. Для прикладу розглядається схема проведення обчислювальних експериментів з використанням методу Монте-Карло. Метод Монте-Карло використовується, коли потрібно знайти значення деякої випадкової величини. Для цього використовується випадкова величина X , математичне сподівання якої якраз дорівнює шуканому значенню. Для його оцінки після проведення серії випробувань обчислюється вибіркове середнє. Найбільш відомий приклад — це задача Буффона, яка дозволяє обчислити значення числа π .

У відповідності до схеми методу для проведення статистичних випробувань необхідно забезпечити генерацію випадкових виборок для величини з заданим законом розподілу. В Excel є генератор псевдовипадкових чисел (функція СЛЧИС), яка повертає рівномірно розподілені випадкові значення (більші нуля та менші за одиницю) і може бути достатньо просто

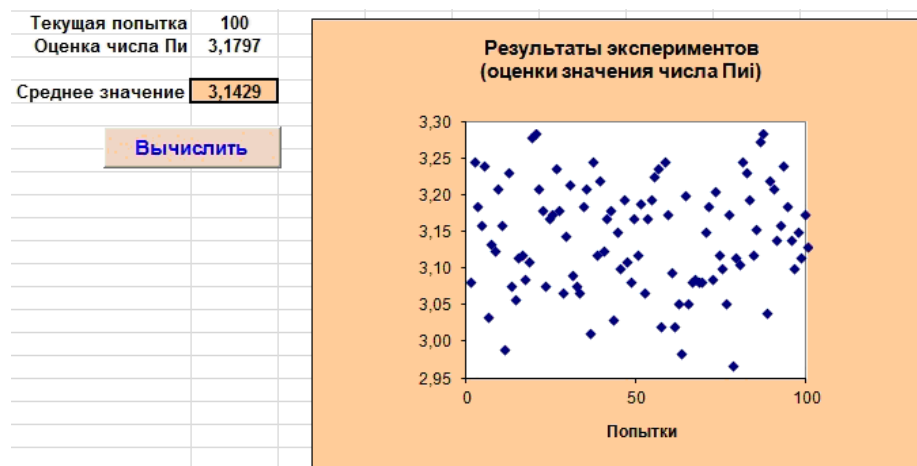
використана для розігрування випадкової величини. Обчислення вибірових середніх також не викликає труднощів.

Щоб автоматизувати процес обчислень, необхідно підготувати спеціальний макрос для циклічного виконання розрахунків. Зовнішній цикл використовується для повторення експериментів, а вкладений – для генерації вибірки. Інтерфейс користувача для лабораторної роботи містить три основні елементи. По-перше, це кнопка типу «Виконати», яка дозволяє запустити макрос. По-друге, це таблиця з розрахунками значень випадкової величини, яка циклічно заповнюється.

Использование задачи Буффона для нахождения числа Пи (метод Монте-Карло, 1000 итераций)

Итерация	theta	D	Расстояние от линии	Попытка	Результат
1	108,1901	0,1731	0,4750	1	3,0817
2	127,4387	0,0973	0,3970	2	3,2468
3	136,2397	0,4199	0,3458	3	3,1847
4	83,7848	0,3342	0,4971	4	3,1596
5	44,7541	0,2267	0,3520	5	3,2415

А третій елемент – поле для графіка, на яке після кожного експерименту наноситься точка зі знайденою оцінкою математичного сподівання. Крім того, потрібна ячейка, в якій буде міститися середнє значення обчислених оцінок.



В силу особенностей табличних процесорів всі обчислення в Excel, засновані на використанні макросів, виглядають як неквапливі. Що в даному випадку є скоріше перевагою, оскільки учень має можливість спостерігати за процесом заповнення таблиці та побудовою графіка. Якщо все ж результати виводяться занадто швидко, то завжди можна використовувати примусову затримку, яка в макросах реалізується за допомогою функції Application.wait.

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ ПІФАГОРА ЧЕРЕЗ ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ.

О. Є. Лагодзінський

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

lagodzinskyi@gmail.com

Одна з визначних проблем сучасної шкільної освіти є невміння формулювати основні поняття і доводити деякі прості шкільні теореми. Одним з найяскравіших прикладів є теорема Піфагора, визначення якої не змогли дати 30% абітурієнтів, що здавали зовнішнє незалежне тестування в 2011 році[1].

Тому спираючись на деякі з основних принципів дидактики як науковість та наочність викладеного матеріалу вважаю за потрібним розглянути деякі доведення теореми Піфагора, що спираються на ознаки подібності трикутників. При використанні такого підходу ми досягнемо таких цілей, як: засвоєння формулювання теореми Піфагора та ознак подібності трикутників., ілюстрування використання ознак подібності трикутників у прикладних задачах, розвиток культури доведення математичних фактів в учнів.

Наведемо основні умови подібності трикутників [3, 4]:

1. Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то трикутники подібні.
2. Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути між цими сторонами рівні, то такі трикутники подібні.
3. Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

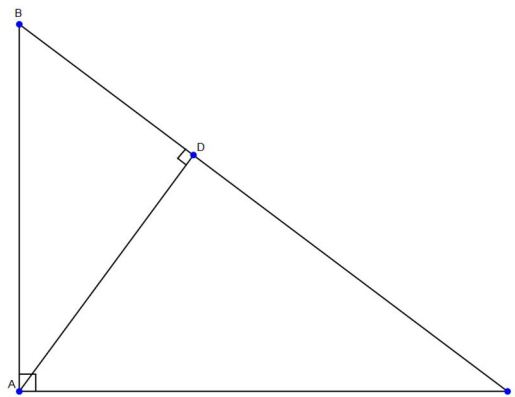
Доведення 1. [2]. Задано прямокутний трикутник $\triangle ABC$.

Проведемо висоту AD

Після чого, отримуємо три подібних між собою трикутників

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC.$$

Із $\triangle ABD$ і $\triangle ABC$



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{AB} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} \quad (1)$$

Із (1):

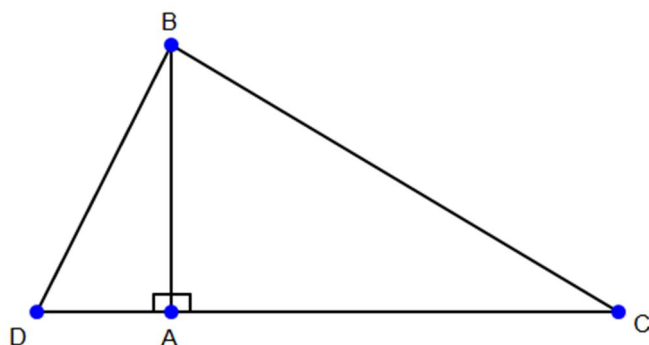
$$AB^2 = BC \cdot BD \quad (2)$$

$$AC^2 = BC \cdot DC \quad (3)$$

Додавши (2) та (3) отримуємо:

$$AC^2 + AB^2 = BC \cdot DC + BC \cdot BD = BC \cdot (BD + DC) = BC^2.$$

Доведення 2[2]. Задано прямокутний трикутник $\triangle ABC$.
 До меншої сторони AB добудуємо $\triangle ABD \sim \triangle ABC$



Легко довести, що $\triangle ABD \sim \triangle ABC \sim \triangle DBC$.

Запишемо відношення площ даних трикутників

$$S(\triangle DBC) = S(\triangle ABC) + S(\triangle ABD) \quad (4)$$

Із $\triangle ABD$ і $\triangle ABC$ маємо:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}; \quad \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AC} \quad (5)$$

Виразимо із (5) сторони трикутника:

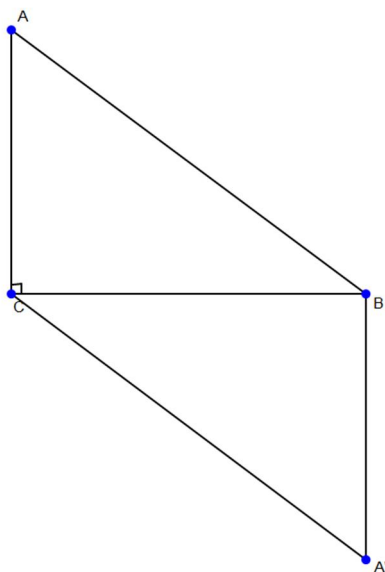
$$AD = \frac{AB^2}{AC}; \quad BD = AB \cdot \frac{BC}{AC} \quad (6)$$

Перепишемо (4) підставляючи (6), помноживши ці співвідношення на 2:

$$\frac{AB^2}{AC} \cdot AB + AB \cdot AC = \left(\frac{AB \cdot BC}{AC} \right) \cdot BC$$

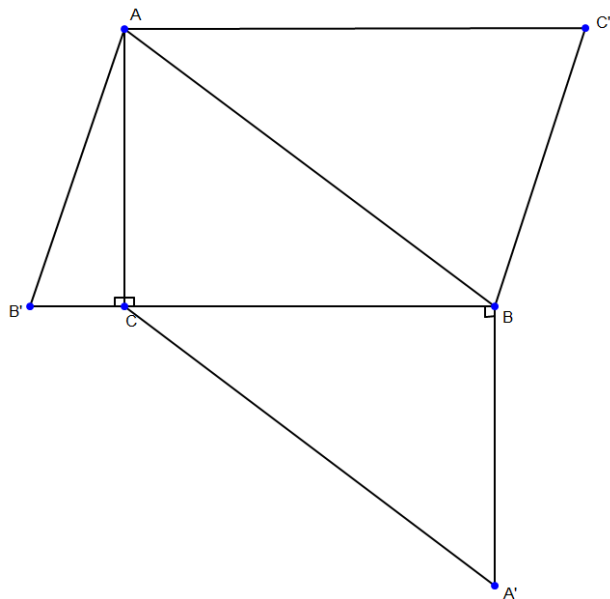
і поділивши на $\frac{AB}{AC}$ доводимо теорему Піфагора.

Доведення 3[2]. Дано прямокутний трикутник $\triangle ABC$.
 Добудуємо до нього $\triangle ABC \sim \triangle A'BC$



І ще побудуємо $\triangle ABB' \sim \triangle A'BC$ та $\triangle AC'B$ таким чином, щоб для нього була справедлива така рівність:

$$S(\triangle A'BC) + S(\triangle AB'C) = S(\triangle AC'B) \quad (7)$$



Із $\triangle AB'C$ і $\triangle ABC$:

$$B'C = \frac{AC^2}{BC}; \quad BC' = \frac{AB \cdot AC}{BC} \quad (8)$$

Перепишемо (7) підставляючи (8):

$$AC \cdot BC + \frac{AC^2}{BC} \cdot AC = AB \cdot \left(AC \cdot \frac{AB}{BC} \right)$$

і поділивши $\frac{AC}{BC}$ отримуємо:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$

Для тих, хто бажає ознайомитися з іншими доведеннями теореми Піфагора та з історією доведення рекомендую ознайомитися з сайтом [2], або книжкою [5].

Список літератури

1. <http://www.segodnya.ua/ukraine/tret-vypusknikov-ne-znaet-teoremy-pifahora.html>
2. <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/>
3. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. — М., 2006.
4. Дергачов В. А. Геометрія у визначеннях, формулах і таблицях. — Х., 2006.
5. Литцман В. Теорема Пифагора. — М., 1960.

О НЕДОСТАТКАХ ТЕСТОВОЙ СИСТЕМЫ ОЦЕНИВАНИЯ

Т. В. Маловичко

НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина

tatianamtv@rambler.ru

В настоящее время в образовании активно внедряется тестовая система оценивания. Безусловно, у неё есть масса весьма заманчивых преимуществ, например, возможность в кратчайшие сроки оценить знания большого количества учащихся, возможность проверки с помощью компьютера, что не только уменьшает нагрузку на преподавателя, но и может при правильном использовании уменьшить коррупцию. Однако наряду с достоинствами такая система оценивания имеет и большое количество недостатков, о которых часто забывают.

Одной из особенностей тестовых заданий является лаконичность ответа. Такая особенность не будет недостатком, скажем, при проверке усвоения правил расстановки артиклей в английском языке. Однако она становится огромным недостатком, например, при проверке знаний по математике. Задачи на доказательство автоматически исключаются из рассмотрения. Задачи об исследовании несобственных интегралов или рядов с положительными членами на сходимость тоже едва ли могут быть предложены в виде тестовых заданий, так как допускают всего два варианта ответа. Таким образом, правильный ответ угадывается с вероятностью 0,5, что недопустимо. Но даже задачу, ответ которой является числом, не так легко представить в виде тестового задания. Предположим, что тест содержит достаточно сложную математическую задачу. Один студент разбил её на более простые вспомогательные задачи, решил их, но собирая их результаты воедино, допустил арифметическую ошибку. Второй написал наугад неправильный результат. Третий студент угадал правильный ответ. При традиционном оценивании первый студент получил бы чуть меньше максимального количества баллов за задачу. Но при тестовом он ни получает ничего и оказывается в равном положении со вторым студентом, а третий студент совершенно незаслуженно получает максимальное количество баллов. Справедливо ли это? Дабы хоть немного исправить ситуацию, приходится исключать из тестовых заданий все задачи, решение которых требует нескольких логических шагов. Таким образом, учащиеся приучаются решать только простейшие задачи, не требующие разбиения на подзадачи. При этом даже не имеет значения, решались ли сложные задачи при подготовке, ведь большая часть учащихся мотивирована именно на успешное прохождение контроля. Таким образом, математика перестаёт тренировать логическое мышление.

Ещё хуже дело обстоит с тестовыми заданиями с готовыми вариантами ответов. Теперь учащийся может вообще не утруждать себя решением задачи, а просто угадывать ответ. Может показаться, что увеличение числа предлагаемых вариантов ответа полностью решает проблему. Например, если предлагается

задание с 5 вариантами ответа, то вероятность угадать правильный вариант всего 0,2. Однако, часто это не так, поскольку некоторые ответы учащийся может отсеять как неправдоподобные, исходя из соображений далёких от проверяемых знаний. Поясним ситуацию на примере. Человек пришёл на курсы по созданию динамических веб-сайтов и попал на входное тестирование по html, которое изучал несколько лет назад и полностью забыл. Входной контроль должен был показать крайне низкую оценку, то есть 0 или 1 по пятибалльной шкале. Однако в тесте предложены варианты ответов, и тестируемый, пользуясь знанием английского языка, выбирает из них более правдоподобные и набирает 2 балла. Далее ему предоставляется возможность просмотреть развёрнутые результаты своего тестирования и повторно пройти тест с другим вариантом задания. Теперь оценка поднялась до 3 баллов, то есть стала удовлетворительной. Однако если б тому же человеку предложили создать самую простую веб-страницу, то без дополнительной справочной информации он бы не справился. В данном случае тест оказался неинформативным. Таким образом, в большинстве тестов показательны только самые низкие результаты, показывающие, что испытуемый совершенно не ориентируется в материале, и самые высокие, показывающие при отсутствии утечки информации, что учащийся способен решить все предложенные задания. Средние результаты неинформативны.

Другой опасностью готовых вариантов ответов является то, что учащийся приучается выбирать между предложенными вариантами, а не искать новые. В ситуации, когда вариантов ответа не предлагается вовсе, он теряется. Оригинальность мышления теряется, что совершенно недопустимо.

Таким образом, хотелось бы призвать внедрять тестовую систему оценивания осторожно и только в тех ситуациях, где она не может навредить, искусственно ограничивая мышление учащихся или искажая картину успеваемости.

Список литературы

1. Шарыгин И. Ф. Что плохого в тестах? // http://scepsis.net/library/id_614.html

О ПОЛЬЗЕ КОЛЛОКВИУМА ДЛЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ВУЗОВ

Т. В. Маловичко

НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина

tatianamtv@rambler.ru

И для математиков, и для физиков теоретическая подготовка является не менее важной, чем умение решать задачи. При этом специалист должен не только знать определения и формулировки теорем, но и уметь их доказывать, глубоко понимать логические связи между основными объектами. Таким образом, контрольных работ и типовых расчётов, направленных, прежде всего, на контроль умений и навыков решения задач, недостаточно для текущего контроля подготовки специалистов физико-математических специальностей. Особую важность в этом свете приобретает устный коллоквиум — собеседование со студентом по теоретическому материалу.

Коллоквиум не только позволяет учесть степень владения теоретическим материалом при допуске к экзамену, но и позволяет студенту заблаговременно понять, что именно от него будет требоваться на экзамене, выявить пробелы в теоретической подготовке и недостаточное понимание материала. Не секрет, что многие студенты путают понимание теории с её бездумным заучиванием. Устное собеседование с преподавателем позволяет бороться с этим, позволяет студенту глубже понять материал, обратить внимание на основные взаимосвязи и тонкости доказательств. Что немаловажно для подготовки будущих преподавателей, именно регулярное проведение коллоквиумов развивает также устную речь, борется с косноязычием. Ведь преподаватель должен не только сам понимать материал, но и уметь его связно, образно и живо объяснить слушателям. Эти навыки отлично развиваются в ходе устной беседы с преподавателем.

Часто устный коллоквиум заменяют письменным. Это позволяет многократно ускорить процедуру проведения коллоквиума. Безусловно, коллоквиум даже в письменной форме более полезен, нежели его отсутствие. Но зачастую студенты либо списывают, либо вызубривают материал, совершенно не вдумываясь в его смысл. Часто можно видеть хорошую работу, автор которой едва ли ориентируется в написанном. Часто для выявления подобной ситуации достаточно всего лишь спросить студента об использованных обозначениях. Увы, многие студенты даже не понимают, что означают символы в их работе. Таким образом, письменный коллоквиум никоим образом не может заменить устный, ибо никак не борется с бездумным заучиванием материала.

Даже слушая ответы своих коллег, студенты получают возможность посмотреть на изучаемый материал под новым углом зрения, глубже понять его, что не только повышает уровень теоретической подготовки учащихся, но и позволяет им лучше подготовиться к экзамену.

Стоит ли включать вопросы, однажды вынесенные на коллоквиум, на экзамен? По моему глубочайшему убеждению, стоит. Ведь экзамен — это отличная возможность взглянуть на материал, изученный на протяжении семестра, как на единое целое, обобщить его, лучше понять взаимосвязи между его составляющими. Кроме того, при повторении пройденного, студент лучше запоминает материал. А тот факт, что часть вопросов уже выносилась на коллоквиум, добавляет студенту уверенности, уменьшает психологическую нагрузку на него.

Если время позволяет, то целесообразно разбить материал на несколько коллоквиумов. Это позволяет студенту при подготовке к следующему коллоквиуму учесть выводы, сделанные им при сдаче предыдущего коллоквиума. Он уже лучше представляет, что именно от него хочет преподаватель, более тщательно разбирает материал, обращает внимание на более тонкие связи внутри изучаемого материала. Более того, регулярные беседы с преподавателем и наблюдение за ответами других студентов, позволяют развить устную речь. К сожалению, проведение устного коллоквиума занимает очень много времени. Поэтому проведение нескольких коллоквиумов за семестр хоть и желательно, но не всегда осуществимо на практике.

Таким образом, можно рекомендовать проводить устные коллоквиумы на физико-математических специальностях не реже раза в семестр.

Список литературы

1. Копылов А. Н. Коллоквиум как средство контроля над результатами обучения в высшей школе // Аспирант и соискатель. — 2011. — № 2. — С. 108—112.
2. Буланова-Топоркова М. В. Педагогика и психология высшей школы: учебное пособие. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2002. — 544 с.

ЧУДОВІ ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІЧНОЇ СПІРАЛІ

О. В. Маляр

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Malyar95@ukr.net

З початку існування Всесвіту всі природні явища відбуваються за деякими законами. Звичайна воронка, яка утворюється водою під час витікання з раковини; лютий смерч, який спустошує все на своєму шляху; величний кругообіг гігантського космічного вихору туманностей і галактик — всі ці явища мають форму спіралей. Розглянемо ж одну з найдивовижніших, найчарівніших та найцікавіших спіралей — логарифмічну спіраль, яку великий німецький поет Йоганн Вольфганг фон Гете вважав символом життя і духовного розвитку.

Логарифмічна спіраль — особливий вид спіралі, що часто зустрічається в природі. Побачити її можна, наприклад, в витках раковини слимака; насіння, в квітках соняшника, також розміщується по кривих, що близькі до витків логарифмічної спіралі.

Після відкриття аналітичної геометрії Рене Декартом в 1637 році звичай представляти різні криві за допомогою рівнянь прийшовся до смаку тодішнім вченим. Логарифмічна спіраль була однією з тих кривих, яка в той час привернула увагу математиків.

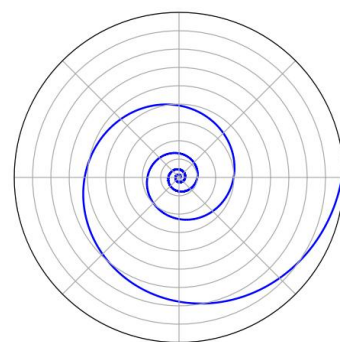


Рис. 1. Логарифмічна спіраль

Вперше про логарифмічну спіраль говориться в одному з листів французького математика Рене Декарта до Марена Мерсенна в 1638 році. Варто зазначити, що незалежно від Декарта, логарифмічна спіраль була відкрита італійським математиком Торрічеллі. Пізніше, спіраль інтенсивно досліджував Якоб Бернуллі, якого настільки вразили властивості кривої, що він називав її *Spira mirabilis* — «дивовижна спіраль». Власне термін «логарифмічна спіраль» першим вжив П'єр Варіньон.

В той час полярне рівняння логарифмічної спіралі було записано як

$$\ln r = \theta,$$

де $\ln$ — натуральний логарифм, що і пояснює її назву. В наш час рівняння спіралі записується у вигляді

$$r = e^{a\theta},$$

де θ вимірюється в радіанах.

Розглянемо властивості логарифмічної спіралі.

1. Найбільш важливою властивістю логарифмічної спіралі є те, що r (відстань від початку координат) збільшується пропорційно. Тобто, якщо θ збільшується (зменшується) в арифметичній прогресії, то r збільшується (зменшується) в геометричній. Причина полягає в тому, що $e^{a\theta}$ є загальним коефіцієнтом у відношенні

$$e^{a(\theta+\phi)} = e^{a\theta} e^{a\phi}.$$

2. Ми знаємо, що якщо θ_1 і θ_2 є значеннями θ для двох точок на кривій, що задана рівнянням $r = f(\theta)$ і s — довжина дуги між цими двома точками, то

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Для логарифмічної спіралі, $r = e^{a\theta}$. Тому

$$s = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} (e^{a\theta_2} - e^{a\theta_1}).$$

Нехай $a > 0$. Якщо зменшувати θ_1 залишаючи фіксованим θ_2 ($\theta_1 \rightarrow -\infty$), то

$$s = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} e^{a\theta_2} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} r_2.$$

Так як a і r_2 скінченні, то s є завжди скінченним числом. Тобто, щоб досягти «початку» логарифмічної спіралі від будь-якої точки на ній, треба пройти скінченну відстань.

Якщо з будь-якої точки на логарифмічній спіралі почати рух всередину по кривій, то для досягнення «початку» необхідно пройти нескінченне число повних обертів, але пройдена відстань буде скінченною.

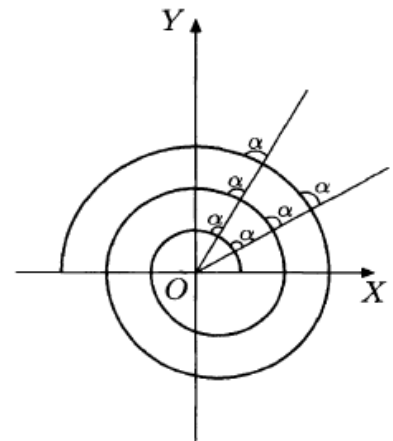
Ця властивість була виявлена Еванджелістом Торрічеллі, учнем Галілео Галілея.

3. Будь-який відрізок, що проведений через початок координат завжди перетинає логарифмічну спіраль під рівними кутами. Інакше, в будь-якій точці спіралі кут між дотичною до неї та її радіус-вектором залежить лише від параметра a і, відповідно, для кожної спіралі зберігає постійне значення.

З цієї причини логарифмічна спіраль відома також як рівнокутна.

Якщо покладемо $a = 0$ в рівнянні логарифмічної спіралі, то отримаємо $r = 1$, що є рівне одиничному колу. Таким чином, коло — особливий тип логарифмічної спіралі, швидкість зростання якого дорівнює нулю.

4. Цікавою властивістю логарифмічної спіралі є те, що вона залишається незмінною при багатьох геометричних трансформаціях, зокрема при перетворенні подібності та при інверсії. Перетворення, за допомогою яких точка (r, θ) відображається в точку $(1/r, \theta)$, відоме як інверсія. Інверсія



логарифмічної спіралі дає нам ще одну логарифмічну спіраль, яка є повернутою на певний кут.

Саме ця властивість так вразила Якоба Бернуллі, що на власному надгробку він звелів викарбувати логарифмічну спіраль та напис — «*eadem mutata resurgo*» — «змінена, я знову воскресаю».

5. Відмітимо, що логарифмічна спіраль має нескінченну кількість витків як при розкручуванні так і при скручуванні. Також вона не проходить через свій полюс.

6. Швидкість зміни напрямку кривої в будь-якій точці на ній називається кривиною в цій точці. Величина, зворотна до кривини, відома як радіус кривини. Якщо ми проведемо лінію перпендикулярно до дотичної кривої і будемо рухатися вздовж цієї лінії, ми досягнемо точки, відомої як центр кривини. Множина точок центрів кривизни кривої називається еволютою цієї кривої. Еволюта логарифмічної спіралі є логарифмічною спіраллю.

Відзначимо, що логарифмічна спіраль — єдина крива, еволюта, евольвента, каустика і подера якої також є логарифмічними спіралями.

На закінчення зазначимо, що логарифмічна спіраль знаходиться в цікавому відношенні з локсодрою — кривою на поверхні кулі, що перетинає всі меридіани під одним і тим самим кутом і визначає, таким чином, найбільш зручну орієнтацію руху судна у відкритих водах. При стереографічній проекції півкулі меридіани переходять в радіально розташовані прямі. Так як при цій проекції рівні кути переходять в рівні, то локсодрома спроектується в лінію, яка буде перетинати радіальні прямі під одним і тим же кутом, тобто в логарифмічну спіраль.

Аналогічно, якщо літак буде летіти, дотримуючись весь час одного курсу, тобто перетинаючи всі меридіани під одним і тим самим кутом, то його шлях зобразиться на карті логарифмічною спіраллю.

Застосування логарифмічної спіралі в техніці засновано на властивості цієї кривої перетинати всі свої радіус-вектори під одним кутом. Так, наприклад, у техніці часто застосовуються ножі що обертаються. Сила, з якою вони тиснуть на матеріал що розрізається, залежить від кута розрізання, тобто кута між лезом ножа і напрямом швидкості обертання. Для того, щоб тиск був сталим, потрібно щоб залишався сталим кут розрізання, а це буде у тому випадку, коли леза ножів будуть окреслені по дузі логарифмічної спіралі. Завдяки цьому лезо ножів сточується рівномірно.



Логарифмічна спіраль застосовується в теорії механізмів при проектуванні зубчастих коліс зі змінним передавальним числом (тобто відношенням їх кутових швидкостей).

У гідротехніці по логарифмічній спіралі вигинають трубу, що підводить потік води до турбіни. Завдяки такій формі труби втрати енергії при зміні напрямку течії в трубі виявляються мінімальними, і напір води використовується з максимальною продуктивністю. Можна сказати, що спіраль є математичним символом співвідношення форми і зростання.

Крім логарифмічної спіралі ніякі інші криві, здається, не привернули увагу вчених, натуралістів та художників. Британський натураліст Томсон (1860—1948) створив детальний опис природної тенденції зростання (у вигляді логарифмічної спіралі) з раковин, ріг, бивнів і т.д.

Після відродження ідей про зв'язок між грецьким мистецтвом і математикою в перші роки XX століття, увага Нового Світу була направлена на логарифмічну спіраль. У 1914 році сер Теодор Андреа Кук у своїй книзі описав роль спіральних кривих у різних галузях мистецтва, а також в природі.

Логарифмічна функція виникає у зв'язку з найрізноманітнішими природними формами. По логарифмічних спіралях розташовуються квітки в суцвіттях соняшника, закручуються раковини молюска *Nautilus*, роги гірського барана і дзьоби папуг. Один з павуків, сплітаючи павутиння, закручує нитки навколо центра по логарифмічним спіралям.

Нічні метелики, які пролітають величезні відстані, орієнтуючись по паралельним промінням місяця, інстинктивно зберігають прямий кут між напрямом руху і променем світла. Якщо вони орієнтуються на точкове джерело світла, інстинкт їх підводить, і метелики потрапляють в полум'я по логарифмічній спіралі, що скручується.

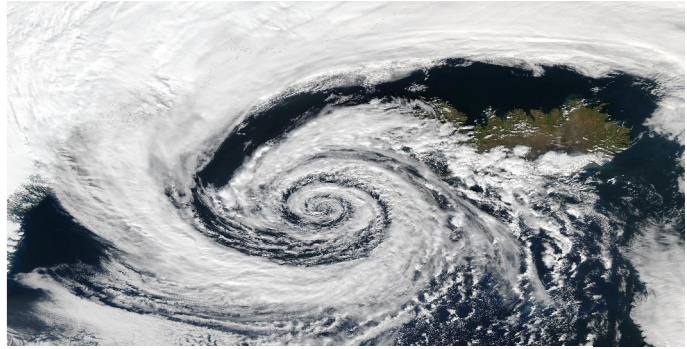
Галактики, шторми та урагани дають вражаючі приклади логарифмічних спіралей.



Втілення логарифмічної спіралі у природі



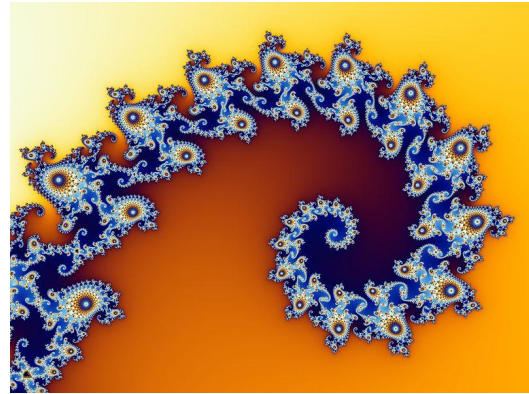
*Мушля молюска близька
за формою до
логарифмічної спіралі*



Область низького тиску над Ісландією



Спіральна галактика «Водовірт»



*Секція множини Мандельброта,
що являє собою логарифмічну
спіраль*

Список літератури

1. Савелов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения / А. А. Савелов. — М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. — 293 с.
2. Гусак А. А., Гусак Г. М. Линии и поверхности / А. А. Гусак, Г. М. Гусак. — Мн.: Вышэйшая школа, 1985. — 220 с.
3. Гиршвальд Л. Я. История открытия логарифмов / Л. Я. Гиршвальд. — Х.: Харьков. госуд. ун-т им. А. М. Горького, 1952. — 32 с.
4. История математики с древних времен до начала XIX столетия : в 3 т./ [под ред. А. П. Юшкевича]. — М.:Наука, 1970.
5. Логарифмічна спіраль : [Електронний ресурс]. — Режим доступу : https://uk.wikipedia.org/wiki/Логарифмічна_спіраль
6. Якоб Бернулли. Логарифмическая спираль : [Електронний ресурс]. — Режим доступу : <http://hijos.ru/2011/04/13/yakob-bernuli-logarifmicheskaya-spiral/>

ЧТО ТАКОЕ КОРНИ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА?

А. Х. Назиев

Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, Рязань, Россия
a.naziev@rsu.edu.ru

Эта заметка возникла из сопоставления двух решений следующей задачи [1, задача 6.125]. Найдите коэффициенты A и B уравнения

$$x^2 + Ax + B = 0, \quad (1)$$

если известно, что числа A и B являются и его корнями.

Решение 1. Пусть A и B — корни уравнения (1). Тогда, по теореме Виета,

$$\begin{cases} A + B = -A; \\ A \cdot B = B. \end{cases} \quad (2)$$

В силу первого уравнения $B = -2A$, в силу второго — $B = 0$ или $A = 1$. Поэтому 1) $A = 0$ и $B = 0$ или 2) $A = 1$ и $B = -2$. Легко проверяется, что и обратно, в каждом из этих двух случаев числа A и B являются корнями уравнения (1).

Ответ. $A = 0, B = 0$; $A = 1, B = -2$.

Похоже, что авторы задачника решали эту задачу именно так, поскольку ответ у них такой же.

Теперь представим себе ученика, который еще не изучал теоремы Виета. Он будет решать эту задачу иначе.

Решение 2. Пусть A и B — корни уравнения (1). Тогда, в силу определения корня уравнения,

$$\begin{cases} 2A^2 + B = 0; \\ B^2 + AB + B = 0. \end{cases}$$

В силу второго уравнения $B = 0$ или $B = -A - 1$. В первом случае из первого уравнения находим, что $A = 0$, во втором случае первое уравнение принимает вид

$$2A^2 - A - 1 = 0$$

и имеет два корня: $A = 1$ и $A = -\frac{1}{2}$. Таким образом, система имеет три

решения: 1) $A = 0, B = 0$; 2) $A = 1, B = -2$ и 3) $A = B = -\frac{1}{2}$. Легко

проверяется, что и обратно, в каждом из названных трёх случаев числа A и B являются корнями уравнения (1).

Ответ. $A = 0, B = 0$; $A = 1, B = -2$; $A = B = -\frac{1}{2}$.

Получился ответ, отличный от приведённого выше! Попробуем обнаружить причину расхождения.

Пусть $A = B = -\frac{1}{2}$. Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$x^2 - \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} = 0.$$

Непосредственным вычислением еще раз убеждаемся, что рассматриваемые A и B действительно являются корнями уравнения. Однако сумма их *не* равна второму коэффициенту и произведение *не* равно свободному члену! Странно... Вот ведь, читаем [2, с. 247]:

если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$,

то $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$.

Значит,

если A и B — корни уравнения $x^2 + Ax + B = 0$,

то $A + B = -A$, $AB = B$.

В частности, беря $A = B = -\frac{1}{2}$, получаем:

если $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ — корни уравнения $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$,

то $-\frac{1}{2} + -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ и $(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$.

Поскольку числа $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ действительно являются корнями уравнения

$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$, должны выполняться равенства $-\frac{1}{2} + -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ и

$(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$. Они же очевидным образом не выполняются!

А вот ещё теорема (там же, с. 20):

Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$,

то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Значит,

если A и B — корни квадратного трёхчлена $x^2 + Ax + B$,

то $x^2 + Ax + B = (x - A)(x - B)$.

В частности, при $A = B = -\frac{1}{2}$ получаем:

если $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ — корни уравнения $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$,

$$\text{то } x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = (x + \frac{1}{2})^2.$$

Снова посылка верна, значит, должно быть верным и заключение $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = (x + \frac{1}{2})^2$; оно же очевидным образом неверно.

Оценим положение. В том, что $-\frac{1}{2} + -\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$ и $(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) \neq -\frac{1}{2}$ и $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \neq (x + \frac{1}{2})^2$ — сомнений нет. Выходит, неверно, что $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ — корни уравнения $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. Фантастика: $-\frac{1}{2}$ — корЕНЬ уравнения $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$, но $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ — НЕ корНИ! Так что же это такое — корНИ уравнения?

В самом деле, что значит, что x_1 и x_2 — корНИ уравнения? Странный вопрос! Утверждать, что A и B — целые числа, значит утверждать, в точности, что A — целое число и B — целое число. Утверждать, что A и B — непустые множества, значит утверждать, в точности, что A — непустое множество и B — непустое множество. Утверждать, что A и B — россияне, значит утверждать, в точности, что A — россиянин и B — россиянин. И так — повсюду, в математике и в реальной жизни. И только в одном месте — в школьном учебнике алгебры, при изучении квадратных уравнений — язык используется иначе. Утверждать, что x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена, значит утверждать нечто иное! Что же именно?

Может быть, в приведённых выше теоремах из школьного учебника неявно предполагалось, что x_1 — меньший, а x_2 — больший корни квадратного трёхчлена? — Если и предполагалось, это совершенно неважно, ибо выражения « $x_1 + x_2$ » и « x_1x_2 » симметричны относительно « x_1 » и « x_2 ».

А может быть, дело в том, что в задаче говорится о корНЯХ уравнения (во множественном числе), т. е. неявно предполагается, что A и B различны? — Нет, о корНЯХ говорят и в тех случаях, когда корень — только один. Например, непосредственно перед приведённой выше теоремой со с. 20 читаем:

...считают, что если дискриминант квадратного трёхчлена равен нулю, то этот трёхчлен имеет два равных корня.

Чтобы понять, в чём здесь дело, сравним случаи $A = B = 0$ и $A = B = -\frac{1}{2}$. В обоих случаях A и B являются корнями уравнения

$x^2 + Ax + B = 0$, но в первом случае это — **все** корни, а во втором — **не все**. Оказывается, дело — именно в этом. Правильная формулировка приведённой

выше теоремы такова:

Теорема 1. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ и других корней у него нет. Тогда

$$\begin{cases} p &= -(x_1 + x_2); \\ q &= x_1 x_2. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда, поскольку x_1 — корень,

$$x_1^2 + px_1 + q = 0. \quad (3)$$

Значит, при всех x ,

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + px + q - (x_1^2 + px_1 + q) \\ &= (x - x_1)(x + x_1 + p). \end{aligned}$$

Это показывает, что $-(x_1 + p)$ является корнем нашего трёхчлена. Покажем, что $-(x_1 + p) = x_2$. Рассуждаем следующим образом. По условию у трёхчлена нет корней, кроме x_1 и x_2 . Значит, $-(x_1 + p) = x_1$ или $-(x_1 + p) = x_2$. Если $-(x_1 + p) = x_2$, то доказывать нечего. Если же $-(x_1 + p) = x_1$, то, в силу полученного разложения, трёхчлен имеет лишь один корень. Значит, $x_1 = x_2$ и опять $-(x_1 + p) = x_2$.

Итак, $-(x_1 + p) = x_2$. Отсюда $p = -(x_1 + x_2)$ и $q = -(x_1^2 + px_1) = x_1 \cdot -(x_1 + p) = x_1 x_2$. Это и требовалось доказать.

Верно и обратное. (Кстати, сам Виет формулировал предложение, которое в нынешних школьных учебниках называется *обратной* теоремой Виета.)

Теорема 2. Пусть x_1 и x_2 — какие угодно действительные числа и

$$\begin{cases} p &= -(x_1 + x_2); \\ q &= x_1 x_2. \end{cases}$$

Тогда x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ и других корней у него нет.

Доказательство. Действительно, пусть выполняются условия теоремы. Тогда, для любого x ,

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 \\ &= x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 \\ &= x(x - x_1) - x_2(x - x_1) \\ &= (x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Значит, для любого x ,

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Отсюда ясно, что x_1 и x_2 являются корнями квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ и других корней у него нет.

Теперь легко объяснить причину расхождения в полученных выше ответах. Строго говоря, первое из приведённых нами решений ошибочно, ибо, как показывает вторая из доказанных нами теорем, для выполнения соотношений (2) мало, чтобы числа A и B являлись корнями уравнения $x^2 + Ax + B$, нужно ещё, чтобы других корней не было. Поскольку об этом в условии задачи ничего не сказано, правильным является второе решение. Именно так и будет решать эту задачу всякий нормальный человек, не испорченный ошибочными формулировками теоремы Виета, вроде процитированных выше. (Ни один нормальный человек, услышав, что Иван и Пётр — россияне, не станет ведь думать, что, тем самым, других россиян нет!)

Список литературы

1. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: учеб. пособие / Под ред. М.И. Сканави. — 5-е изд. — М.: Высш. шк., 1988.
2. Алгебра: учеб. для 9 кл. сред. шк. / Под ред. С.А. Теляковского. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1992.

ФОРМУВАННЯ ПРОФЕСІЙНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАГІСТРІВ МОРСЬКОГО ПРОФІЛЮ ПРИ НАВЧАННІ МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННЮ

Г. В. Налева, О. В. Литвин

Одеська національна морська академія, Одеса, Україна

naleva_gv@mail.ru, litvinov.od@gmail.com

Вступ України в європейський освітній простір підсилило актуальність питання формування професійної компетентності фахівців морської галузі, здатних співробітничати з фахівцями різних країн в особливих умовах праці. Це вимагає формування наступних здатностей:

- працювати в команді;
- приймати відповідні рішення в процесі розв'язання виробничих завдань;
- діяти в ситуації невизначеності;
- приймати рішення в екстремальних ситуаціях.

У зв'язку з цим сучасна підготовка фахівців морського профілю обумовлює необхідність введення нових вимог до їхньої професійної компетентності, удосконалення процесу їх професійної підготовки, орієнтованої на інтеграцію освіти, науки й практики, що в остаточному підсумку дозволить формувати нові якості магістра, такі як конструктивність, мобільність, гнучкість, ініціативність, динамізм і інноваційність.

Викладання курсу математичного моделювання в системі професійної підготовки магістрів морського профілю повинне забезпечити відповідним апаратом вивчення спеціальних дисциплін, дати майбутнім фахівцям універсальний інструмент для їхньої професійної діяльності. Крім того, сприяти розвитку їх наукового світогляду, формуванню особистості майбутнього фахівця, що вміє якісно вирішувати професійні проблеми, швидко й адекватно реагувати на швидкозмінні умови розвитку сучасного суспільства. Слід навчити студентів грамотно формулювати та варіювати інженерну задачу, моделювати, інтерпретувати результат її розв'язання мовою реальної ситуації, перевіряти відповідність отриманих і дослідних даних. У контексті підвищення творчої активності майбутніх інженерів це можливо за умови актуалізації зв'язків між технічними проблемами та математичними методами шляхом розв'язання та дослідження професійно орієнтованих задач.

Найбільш важливою задачею професійної підготовки магістрів є формування професійної компетентності. Це припускає не тільки повідомлення магістрантам відповідних знань, але й формування в них навичок науково-дослідної та практичної роботи, а також вироблення бажання й уміння самовдосконалюватися, як особистості.

Важлива роль при формуванні професійних умінь належить компетентністному підходу, який акцентує увагу на результаті освіти, причому в якості результату розглядається не сума засвоєної інформації, а здатність

випускника вищого навчального закладу самостійно діяти в різних проблемних ситуаціях. Отже, компетентністний підхід — це підхід, при якому результати освіти визнаються значущими за межами системи освіти. Більш того, компетентністний підхід виступає як метод моделювання результатів освіти та представлення їх, як норм її якості [1].

При навчанні в магістратурі удосконалюються отримані раніше професійні компетенції та формуються компетенції більш високого порядку на основі нових інформаційних і комунікаційних технологій (ІКТ), причому з освоєнням способів і технологій формування цих компетенцій.

Для технічних спеціальностей компетенції, насамперед, повинні включати:

- здатність науково аналізувати проблеми та процеси професійної області, уміння використовувати на практиці базові знання й методи математики і природничих наук;

- здатність застосовувати знання на практиці, у тому числі утворювати математичні моделі типових професійних задач, знаходити способи їх розв'язання й інтерпретувати професійно орієнтований зміст отриманого математичного результату;

- готовність застосовувати аналітичні та чисельні методи розв'язання поставлених задач (у тому числі з використанням програмних засобів).

Що стосується шляхів придбання цих якостей, це є самостійною проблемою, розв'язання якої припускає формування відповідних навчальних планів і програм курсів, а також удосконалення методів навчання.

При складанні програми курсу математичного моделювання необхідне виділення інваріантних і варіативних складових, облік професійної значущості окремих навчальних елементів, що виражається у визначенні оптимального об'єму й терміну вивчення матеріалу, а також у встановленні послідовності їх вивчення на основі внутрішньої логічної побудови курсу й міждисциплінарних зв'язків. При визначенні змісту дисципліни інваріантна складова містить у собі методологічні основи, найважливіші поняття й закони науки, варіативна складова передбачає поглиблене вивчення окремих розділів, безпосередньо пов'язаних із професійною підготовкою.

На кафедрі вищої математики ОНМА розроблені робочі програми, цикли лекцій, лабораторних робіт і практичних занять для магістрів з дисциплін:

- «Математичне моделювання у судноводінні» для спеціальності «Судноводіння»;

- «Математичні методи наукових досліджень» для спеціальності «Автоматизоване управління технологічними процесами».

У зазначених програмах інваріантна частина включає наступні розділи:

1. Основи сучасних методів математичного моделювання технічних об'єктів, що використовуються в інженерній практиці та наукових дослідженнях (загальні поняття й означення математичного моделювання, класифікації моделей і рекомендації з їхнього використання при розв'язанні різних задач, етапи побудови математичних моделей).

2. Комп'ютерне моделювання та його етапи. Застосування прикладних пакетів програмування Simulink, Mathcad і Maple для моделювання динамічних систем.

3. Задачі оптимального управління. Варіаційне числення. Методи чисельної оптимізації.

Варіативна частина для спеціальності «Судноводіння» включає питання:

- моделювання всіх етапів гальмування судна;
- моделювання руху судна на циркуляції та за «зигзагом Кемпфа»;
- задачі оптимального керування у судноводінні.

Варіативна частина для спеціальності «Автоматизоване управління технологічними процесами» включає питання:

- моделювання динамічних систем, робота яких описується лінійними диференціальними рівняннями та їх системами;
- побудова типових характеристик (перехідної та імпульсної) систем автоматичного управління (САУ);
- задачі оптимального управління у САУ;
- дослідження стійкості розв'язків диференціальних рівнянь у САУ;
- методи пошуку екстремуму функціонала;
- стаціонарні випадкові процеси та властивості їх характеристик.

З метою вдосконалення навчального процесу професорсько-викладацький склад кафедри вищої математики ОНМА розробив навчальні посібники з тематики курсу математичного моделювання. Так в [2] розглянуті методи моделювання динамічних процесів із застосуванням пакета програмування MATLAB-Simulink. Описані основні прийоми побудови й редагування моделей у цьому пакеті. Поданий опис деяких блоків бібліотеки Simulink. Наведені приклади моделювання систем автоматичного регулювання й задач, що описують рух судна.

У посібнику [3] викладені основні відомості про математичні методи, які використовують при розв'язанні інженерних задач теорії автоматичного регулювання. Алгоритми реалізовані в середовищах Mathcad і Maple. Розрахунки вузлів автоматики, наведені в посібнику, можуть бути використані в курсовому й дипломному проектуванні систем автоматичного регулювання суднових енергетичних установок

У [4] викладено основи теорії стійкості за Ляпуновим розв'язків систем диференціальних рівнянь першого порядку та показано її застосування до систем автоматичного управління, процесів в електротехніці, а також при моделюванні енергетичних процесів. В [5] розглянуті стаціонарні випадкові процеси та їх властивості, зокрема, їх спектральний розклад. Наведені приклади конкретних процесів, що мають місце в майбутній професійній діяльності курсантів.

Для ефективного проведення лабораторних робіт з урахуванням диференційного підходу розроблені методичні вказівки з індивідуальними завданнями для кожної спеціальності окремо.

Для забезпечення високого рівня якості підготовки магістрів необхідно активно використовувати в процесі навчання інноваційні технології, наприклад, різні види лекційних занять: лекція-візуалізація, проблемна лекція, лекція-діалог, лекція-диспут, лекція-провокація. З нашого досвіду викладання курсу математичного моделювання найкращі результати дають проблемні лекції та лекції-діалоги.

Підготовка магістрів вимагає широкого використання активних методів навчання також на практичних і лабораторних заняттях, наприклад: робота в малих групах, робота в парах постійного (або змінного) складу, дискусія групи експертів тощо.

Таким чином, органічне поєднання традиційних та інноваційних методів і засобів навчання сприяють формуванню не тільки професійної компетентності, а також особистісної, комунікативної, загальнокультурної компетентностей, наслідком яких є готовність випускника до професійної діяльності.

В остаточному підсумку мета освоєння магістрами ОНМА курсу математичного моделювання в рамках компетентного підходу полягає в їхній здатності застосовувати математичні методи моделювання й наукових досліджень для розв'язання професійних задач магістерської роботи на завершальному етапі навчання та для подальшого саморозвитку як особистості й фахівця.

Список літератури

1. Иванов Д. А. Компетентностный подход в образовании. Проблемы, понятия, инструментарий / Д. А. Иванов, К. Г. Митрофанов, О. В. Соколова. — М. : АПКИППРО, 2008. — 101 с.
2. Бурденко А.Ф. Математическое моделирование в среде MATLAB — SIMULINK [Текст]: учебное пособие для курсантов и студентов морских вузов / А. Ф. Бурденко, В. Г. Попов. — Одесса: ОНМА, 2006. — 70 с.
3. Попов В. Г. Математические методы научных исследований систем автоматического регулирования. [Текст]: учебное пособие для курсантов и студентов морских вузов. / В. Г. Попов, Н. Д. Орлова. — Одесса: ОНМА, 2007. — 56 с.
4. Налева Г. В. Теория устойчивости по Ляпунову и ее приложения: учебное пособие для курсантов и студентов морских вузов / Г. В. Налева. — Одеса: ОНМА. — 2008. — 64 с.
5. Налева Г. В. Теорія ймовірностей та випадкові процеси [Текст]: навчальний посібник для курсантів і студентів вищих морських навчальних закладів / Г. В. Налева, Т. М. Івахненко. — Одеса: ОНМА, 2013. — 176 с.

БІЛІНГВАЛЬНІ ПРИЙОМИ ПРИ НАВЧАННІ ІНОЗЕМЦІВ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Н. Д. Орлова, Г. О. Петропавловська

Одеська національна морська академія, Одеса, Україна

natorl@mail.ru

Сучасний етап розвитку української системи освіти характеризується інноваційними процесами, що стрімко розгортаються, та орієнтовані на її інтеграцію у світовий освітній простір. Кількість курсантів-іноземців, що навчаються в різних вищих навчальних закладах України, збільшується з кожним навчальним роком. Ключовим завданням є розвиток у таких учнів якостей і здібностей, які дозволили б їм здійснювати професійну і соціальну діяльність у соціально-культурних умовах, що швидко змінюються. При виборі прийомів і методів навчання вищої математики студентів-іноземців на початковому етапі необхідно виходити зі змісту і цілей, що визначають пізнавальну діяльність, пов'язану з вивченням термінології мови викладання і формуванням обчислювальних і логічних навичок.

Викладачам кафедри «Вища математика» ОНМА в початковий період навчання предмету доводиться паралельно навчати курсантів також і математичній термінології російською мовою. Крім мовної проблеми слід зазначити, що турецькі і грузинські студенти в основній масі не мають достатніх обчислювальних навичок, навичок перетворення алгебраїчних виразів і розв'язування найпростіших рівнянь. При читанні лекцій і проведенні практичних занять мова і стиль викладання матеріалу, прийняті в математиці, слід адаптувати для розуміння матеріалу курсантами-іноземцями на даному етапі вивчення математики. Тому при читанні лекцій доцільно з усього обсягу математичної лексики відбирати найбільш необхідну лексику, акцентувати увагу на тих термінах і словах загальнолітературної мови, без знання котрих неможливо подальше просування по курсу вищої математики. У процесі вивчення вищої математики основну складність для її розуміння являє не тільки зміст, а й супроводжуючі усні роз'яснення, так як практично на всіх етапах навчання сприйняття матеріалу перешкоджає мовний бар'єр. В цих умовах найперше значення набуває форма подачі матеріалу, що найкращим чином забезпечує його розуміння та засвоєння. При читанні лекцій і проведенні практичних занять з вищої математики курсантам-іноземцям слід наділяти особливу увагу до змісту і темпу мовлення лектора і асистента. Мова викладача повинна бути чіткою, продуманою, уповільненою, небагатослівною і адаптованою до рівня володіння російською мовою слухачами. Викладачі, що ведуть практичні заняття, повинні використовувати позначення і математичну термінологію, прийняту при читанні лекцій. Слід пам'ятати, що швидка неадаптована мова сприймається [1] іноземцями як суцільний звуковий потік, що викликає у них роздратування, а іноді призводить до повної відмови відвідувати лекції, слухати викладача і брати участь в практичному занятті. В

даних умовах іноді буває краще промовчати і записати формулу, ніж сказати багато незрозумілого.

Розв'язання зазначених проблем можливе:

- за рахунок використання символічної мови математики, яка у своїй спільній основі є мовою міжнародною і тому зрозумілою для іноземних курсантів;

- за рахунок використання елементів білінгвального (двомовного) навчання математики, при якому іноземна мова поряд з рідною мовою виступає як інструмент вивчення математики;

- створення методичних посібників для іноземних курсантів з розділів курсу «Вища математика».

Використання символічної мови математики загалом не викликає особливих ускладнень ні в курсантів-іноземців, ні у викладача.

Необхідною умовою успішної педагогічної діяльності в області предметно-орієнтованого білінгвального навчання [3], є в ідеальному випадку володіння викладачем іноземною мовою. На першому етапі для реалізації одного з принципів білінгвального навчання слід розробити комплекс завдань щодо розвитку базових комунікативних якостей математичної мови на рідній мові (для учня) і мові викладання. Завдання формулюються з використанням термінології, символіки, графічних зображень і з словесно-логічних конструкцій математичної мови. Реалізуються білінгвальні прийоми фрагментарно, в основному на етапі повторення і закріплення в іноземців умінь і навичок для логічно і математично суцільних розділів.

Структура навчальних посібників для іноземних студентів [1,2,3], наступна:

- двомовний термінологічний словник або глосарій з тієї чи іншої математичної теми;

- резюме англійською мовою, що складається з основних математичних понять, їх визначень, властивостей і теорем, які лежать в основі математичних методів, що використовуються при виконанні завдань;

- типові вправи.

При створенні посібників слід намагатися використовувати ту лексику, яка вживається при вивченні матеріалу; тексти посібника повинні розглядатися як зразки адаптованого мовлення викладача.

У посібник обов'язково повинні бути включені вправи на відпрацювання термінологічної лексики, формування математичних знань і навичок, наведені розв'язання стандартних вправ з даної теми з докладним поясненням розв'язання задач. Наприкінці кожної теми пропонуються завдання для самостійного розв'язання й відповіді до них.

Всі завдання розділені на три рівня складності:

- розв'язання задач першого рівня показує засвоєння матеріалу на рівні D або E (шкала ECTS);

— розв’язання завдань другого рівня показує засвоєння матеріалу на аналітичному рівні С (шкала ECTS), що дозволяє розв’язувати задачі різними способами;

— розв’язання третьої групи завдань показує засвоєння матеріалу на високому рівні А або В (шкала ECTS).

Білет (тести) модульного контролю, складені лектором, являють собою критеріально-орієнтований тест [2]. Білет модульного контролю складений таким чином, щоб відповідь на кожне питання білета показувала певний рівень знань. При проведенні модульного контролю у курсантів-іноземців можна дозволити користуватися своїм конспектом лекцій і практичних занять, але оцінка модульної роботи в цьому випадку не перевищує рівня D.

Висновки. Для факультету іноземних курсантів слід внести зміни в робочі програми в бік збільшення кількості модульних контрольних робіт, як лекційних, так і практичних. Викладачам, що працюють на факультеті іноземних курсантів, розробити систему навчальних посібників для іноземців з окремих розділів математики, зміст кожного з яких має бути організовано на модульній основі відповідно до учбової програми дисципліни

Список використаної літератури

1. Лазарева Е. А. Вуколова Т. М. Развитие математической речи иностранных студентов при изучении повторительного курса математики на подготовительном факультете / Е. А. Лазарева. Т. М Вуколова. — В Сб.: Международное образование: итоги и перспективы. Материалы международной научно-практической конференции, посвященной 50-летию юбилею Центра международного образования МГУ им. М.В. Ломоносова. 22—24 ноября 2004 года. — Том 2. — М.: ЦМО МГУ, 2004. — С. 96—106.

2. Орлова Н. Д., Тихонцова Н. И. Использование элементов личностно-ориентированного обучения, при изучении курса «Высшей математики» / Н. Д. Орлова, Н. И. Тихонцова. — Дидактика математики «Проблемы и дослідження»: Міжнародний збірник наукових робіт. — 2006. — Вип. 25. — С. 214—218.

3. Салехова Л. Л. Модель билингвального обучения математике / Л. Л. Салехова / Высшее образование в России. — 2008. — № 3. — С. 156—158.

НАЙВИЗНАЧНІШІ ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ ПІФАГОРА

К. Р. Острійчук

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

k.ostryichuk@ukr.net

Під час мого дослідження для третьої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», на тему «Нові доведення теореми Піфагора знайдені школярами» [1], я зустріла велику кількість цікавих фактів про доведення теореми Піфагора. Все це свідчить про надзвичайну важливість цієї теореми для математики: з неї виводиться, або пов'язана більшість теорем геометрії.

Відомо, що задачі про прямокутні трикутники зустрічаються в єгипетських джерелах часів фараона Аменемхета I, на вавилонських глиняних табличках періоду правління царя Хаммурапі, в давньоіндійському трактаті «Вінець знання» і давньокитайському творі «Чжоу-би суань цзинь».

Як видно, теорема Піфагора змушувала замислитись математиків з найдавніших часів. Підтвердженням цього служить близько 500 різноманітних доведень даної теореми. В цьому з нею не може конкурувати жодна інша теорема. Серед знаменитих авторів доведень можна згадати Леонардо да Вінчі та двадцятого президента США Джеймса Гарфілда. Ці та інші доведення будуть розглянуті нижче.

Давньокитайське доведення

У книзі «Математика в дев'яти книгах» можна побачити таке креслення доведення [2]:

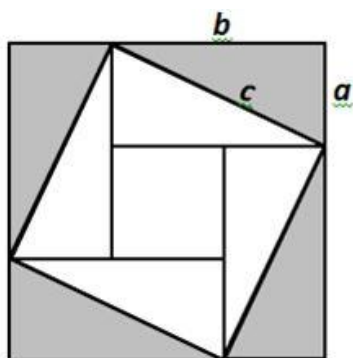


рис.1

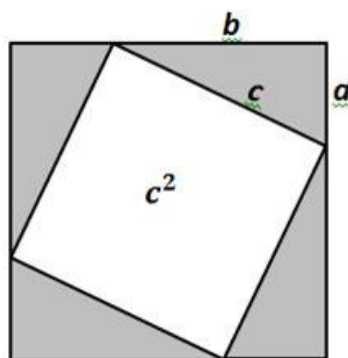


рис.2

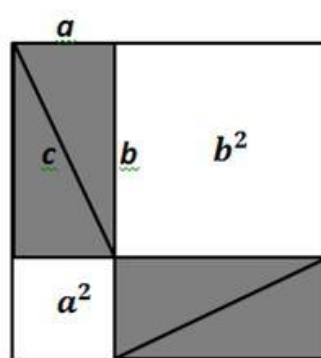


рис.3

Чотири рівні прямокутні трикутники з катетами a і b та гіпотенузою c розміщені так, що їхній зовнішній контур утворює квадрат з сторонами $a + b$, а внутрішній — квадрат з сторонами c , побудований на гіпотенузі (рис. 1).

Виріжемо внутрішній квадрат (рис. 2). Складемо 4 трикутники, що залишились в 2 прямокутники (рис. 3).

Легко побачити, що утворена «пустота» з однієї сторони дорівнює c^2 (рис. 2), а з іншої — $a^2 + b^2$ (рис. 3).

Отже, $c^2 = a^2 + b^2$.

Теорема Піфагора і «стілець нареченої»

Очевидно, що в попередньому доведенні побудова всередині квадрата на гіпотенузі не використовується. Нижче наведено ще один приклад давньокитайського доведення [2]:

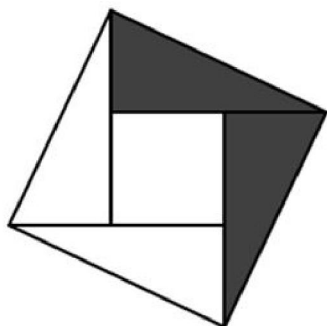


рис. 4

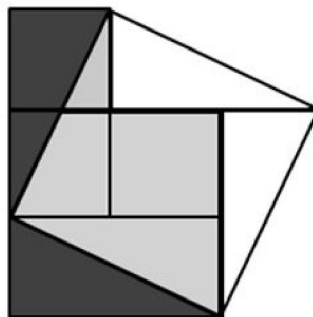


рис.5

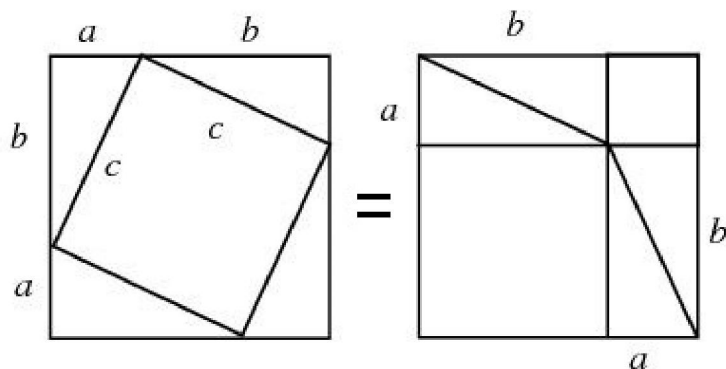
У квадраті побудованому на гіпотенузі (рис.4) виріжемо 2 заштриховані прямокутні трикутники. Прикладемо їх гіпотенузами до двох інших гіпотенуз (рис.5).

Дана фігура отримала назву «стілець нареченої». Вона складається з двох квадратів зі сторонами a і b .

Отже, $c^2 = a^2 + b^2$.

Давньоіндійське доведення

Для свого доведення математики Давньої Індії використовували внутрішню частину давньокитайського креслення [2].



Ось таке креслення можна побачити в трактаті «Вінець знання» одного з найвизначніших індійських математиків XII століття Бхаскарі [3]:

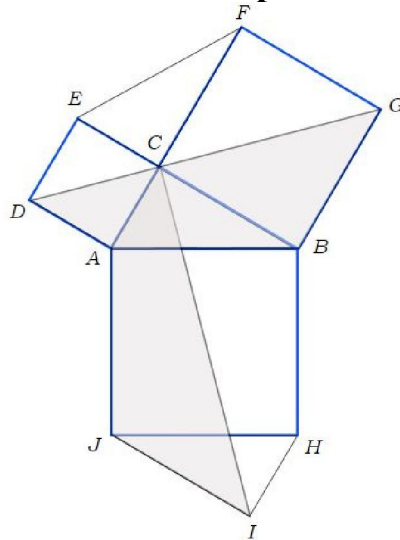
Маємо 2 рівні квадрати довжина сторін кожного дорівнює $a + b$. Розіб'ємо кожний квадрат на частини, які складаються з квадратів і прямокутних трикутників. Виріжемо з обох квадратів по 4 прямокутних трикутники.

Очевидно, що в кожному з квадратів залишаються фігури з однаковою площею.

Тобто, $c^2 = a^2 + b^2$.

До речі індуси не записували дане доведення, а супроводжували креслення до нього лише словом «Дивись!».

Доведення Леонардо да Вінчі



Головними елементами даного доведення є симетрія та рух [4].

Розглянемо креслення, як видно із симетрії, відрізок CI розсікає квадрат $ABHI$ на дві однакові частини (так як трикутники ABC і JHI рівні з побудови).

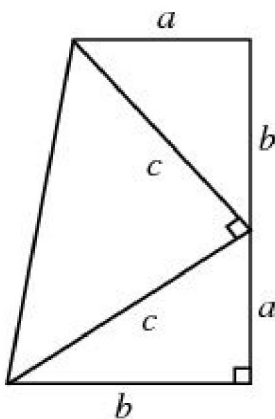
Користуючись поворотом на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо точки A , ми вбачаємо рівність заштрихованих фігур $CAJI$ і $DABG$.

Тепер ясно, що площа заштрихованої нами фігури дорівнює сумі половин площ маленьких квадратів (побудованих на катетах) і площі вихідного трикутника. З іншого боку, вона дорівнює половині площі великого квадрата (побудованого на гіпотенузі) плюс площа вихідного трикутника.

Таким чином, половина суми площ маленьких квадратів дорівнює половині площі великого квадрата, а отже сума площ квадратів, побудованих на катетах дорівнює площі квадрата, побудованого на гіпотенузі.

Доведення Гарфілда

Наприкінці хотілося б відзначити доведення XX президента США — Джеймса Гарфілда [5].



З трьох прямокутних трикутників побудуємо прямокутну трапецію.

З однієї сторони площа трапеції дорівнює

$$\frac{a+b}{2} \cdot (a+b) = \frac{1}{2}(a+b)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + ab$$

З іншої

$$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 = \frac{c^2}{2} + ab$$

Прирівнявши дані рівності, отримаємо

$$\frac{c^2}{2} + ab = \frac{a^2+b^2}{2} + ab.$$

Отже, $c^2 = a^2 + b^2$.

Список літератури

1. Математика в сучасному технічному університеті : Матеріали III Міжнар. наук.-практ. конф. (Київ, 25-26 груд. 2014 р.). — К.: НТУУ «КПІ», 2015. — 386 с.
2. http://wiki.iteach.ru/index.php/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D1%8F_%D1%83%D1%87%D0%B0%D1%89%D0%B8%D1%85%D1%81%D1%8F_%D0%A2%D0%B0%D0%B9%D0%BD%D0%B0_%D0%B4%D0%BE%D0%BA%D0%B0%D0%B7%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B0_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D1%8B_%D0%9F%D0%B8%D1%84%D0%B0%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B0
3. <http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTheorem.html>
4. <http://pifagoratheorema.blogspot.com/>
5. <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/>

ВИКОРИСТАННЯ ПАРАДОКСІВ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ У НАВЧАННІ СТУДЕНТІВ ФІЗИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

М. І. Парчук

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
mawa_013@ukr.net

В науці парадокси — несумісні (протилежні) твердження для обґрунтування кожного з яких існують правдоподібні міркування, часто виступають як певні імпульси до пошуку істини, розвитку нових теорій та методів пізнання. Незаперечною є роль парадоксів і в процесі навчання, тут їх використання сприяє мотивації та активізації пізнавальної діяльності, кращому розумінню теоретичного матеріалу, формує здатність до критичного мислення, аналізу, синтезу та оцінювання певних теоретичних положень та їх застосувань. Ще з початкової школи вчителі використовують парадоксальні задачі на заняттях з логіки, пізніше в основній та старшій школі саме парадокси та софізми допомагають зацікавити учнів, підвищити їх інтерес до вивчення математики, виховувати уважність та привчати мислити критично. Також чималу роль відіграють парадокси і в університетській освіті під час вивчення вищої математики. Особливо майбутніми педагогами. Варто зазначити, що для майбутніх вчителів досить цікавими (і такими, що сприяють реалізації міжпредметних зв'язків) є математичні парадокси, які можна інтерпретувати в термінах інших наук (навчальних дисциплін).

У доповіді представимо деякі з парадоксів, що можна використовувати на заняттях з теорії ймовірностей та математичної статистики для студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів.

Оскільки термін «парадокс» є широковживаним як у сучасній науці, так і в повсякденному житті, то покажемо спочатку, як він визначається у словниках та енциклопедіях.

В Українській Радянській Енциклопедії [3] парадокс — (від *грец.* — несподіваний, дивний) — це:

1) різновид суперечності в системі логічного доказу, що набуває вигляду своєрідного кола: ствердження певного висловлювання зумовлює його заперечення, а заперечення цього висловлювання неминуче приводить до його ствердження. Парадокси виникають як у сфері буденного мислення, так і в процесі розвитку наукових теорій. Здебільшого вони є наслідком неузгодженості вихідних положень теорії, введення в основи теорії внутрішньо суперечливих понять тощо. Про наявність парадоксів в теорії свідчить можливість доведення засобами цієї теорії двох тверджень, що суперечать одне одному, або одного складного твердження, що рівнозначне цим суперечливим твердженням;

2) думка, що разюче розходиться з усталеними поглядами, суперечить здоровому глуздові, хоч насправді може й не бути хибною».

В Академічному тлумачному словнику української мови [2] парадокс — це:

1) думка, судження, що різко розходиться із звичайним, загальноприйнятим і суперечить (іноді тільки на перший погляд) тверезому глуздові;

2) несподіване явище, яке не відповідає звичайним науковим уявленням.

Наведемо приклад одного з парадоксів, які ми рекомендуємо використовувати на заняттях з теорії ймовірностей та математичної статистики для студентів фізичних спеціальностей.

Цей парадокс доцільно розглядати під час вивчення класичного підходу до визначення ймовірності випадкової події, після введення таких понять як: простір елементарних подій, σ -алгебра випадкових подій, ймовірність, ймовірнісний простір, рівно можливі події, класичний підхід до визначення ймовірностей. Даний парадокс є нескладним з математичної точки зору, але досить важливим методологічно, оскільки дозволяє викладачеві вирішити ряд завдань:

1) акцентувати увагу студентів на межах застосовності класичного підходу до визначення ймовірності, зокрема на принциповості умови рівноймовірності елементарних подій, що сприятиме зменшенню кількості помилок при побудові математичних моделей ймовірнісних задач;

2) встановити міжпредметні зв'язки з курсом теоретичної фізики;

3) продемонструвати спільні та відмінні риси математичних та фізичних моделей, а також моделей та їх інтерпретацій;

4) сприяти глибшому усвідомленню методів теорії ймовірностей та їх застосувань.

5)

Парадокс гри в кості. «Азартні ігри» у світі фізичних частинок

Правильний гральний кубик при підкиданні з рівними шансами падає на будь-яку з граней 1, 2, 3, 4, 5 або 6. У випадку підкидання двох кубиків сума чисел, що випали, лежить в проміжку від 2 до 12. Як 9, так і 10 з чисел 1, 2, ..., 6 можна отримати двома різними способами:

$$9=3+6=4+5 \text{ і } 10=4+6=5+5.$$

У задачі з трьома кубиками і 9, і 10 можна отримати шістьма способами. Чому ж тоді 9 з'являється частіше, коли кидають два кубика, а 10, коли кидають три?

Пояснення парадокса. При розв'язанні даної задачі необхідно фіксувати порядок випадання чисел, оскільки у протилежному випадку не всі результати будуть рівноможливими і використання класичного підходу до визначення ймовірності стане некоректним. У випадку двох кубиків 9 і 10 можуть вийти наступним образом:

$$9=3+6=6+3=4+5=5+4 \text{ і } 10=4+6=6+4=5+5.$$

Це означає, що в задачі з двома кубиками 9 можна отримати чотирма способами, а 10 лише трьома. Відповідно і шанси отримати 9 більші. (Оскільки два кубики дають $6 \times 6 = 36$ різних рівноможливих пар чисел, шанси отримати

9 дорівнюють $4/36$, а 10 — $3/36$.) У випадку трьох кубиків ситуація змінюється на протилежну: 9 можна отримати 25 способами, а 10 — 26-ма способами. Тому 10 є більш ймовірним, ніж 9.

Фізична інтерпретація. Задача про гру в кості пов'язана з напрямками фізики XIX і XX століть. Припустимо, що замість грального кубика ми маємо справу з фізичними частинками. Кожна грань кубика відповідає фазовій комірці, в якій частинка виявляється випадковим чином і яка характеризує стан частинки. У цьому випадку гра в кості еквівалентна моделі Максвелла — Больцмана для фізичних частинок. У цій моделі, що використовується зазвичай для молекул газу, кожна частинка з рівними шансами потрапляє в будь-яку комірку, тому при описанні множини рівноможливих результатів варто враховувати порядок так само, як і в задачі про кості. Існує інша модель, в якій частинки нероздільні, тому при підрахунку рівноможливих результатів порядок враховувати не потрібно. Ця модель названа іменами Бозе й Ейнштейна. Використовуючи дану термінологію, можна сказати, що суть нашого парадокса полягає в тому, що гра в кості описується моделлю Максвелла — Больцмана, а не Бозе — Ейнштейна. Варто відзначити, що ні одна з цих моделей не є коректною для зв'язаних електронів, оскільки у цьому випадку в кожній комірці може виявитись не більше однієї частинки. Використовуючи термінологію гри в кості, можна сказати, що якщо на одному кубіку випала 6, то на жодному іншому випасти 6 уже не може. А це вже модель Фермі-Дірака. Виникає питання про те, застосування якої ж моделі з трьох заданих (а крім даних трьох їх існує ще багато) є коректним в конкретній ситуації. Взагалі кажучи, ми не можемо вибрати певну модель, виходячи тільки з логічних міркувань. У більшості випадків розв'язати це питання дозволяють досвід або спостереження. Однак у випадку з гральним кубиком очевидно, що коректною є модель Максвелла — Больцмана, а в даній ситуації це і є те, що нам потрібно [1].

Список літератури

1. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. — М.: Мир, 1990. — 240 с.
2. Словник української мови [Електронний ресурс] = Академічний тлумачний словник (1970—1980). — Електрон. текст. дані. — Б. м., сор. 2011. — Режим доступу: <http://sum.in.ua>, вільний. — Мова: укр. — Електронна версія «Словника української мови» в 11 томах.
3. Українська радянська енциклопедія. В 12-ти томах / За ред. М. Бажана. — 2-ге вид. — К.: Гол. редакція УРЕ, 1974—1985.

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ У ПРОФЕСІЙНІЙ ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНЬОГО ФАХІВЦЯ ЛИВАРНОГО ВИРОБНИЦТВА

І. В. Пасічник, І. В. Щербина, Т. П. Бас

Національна металургійна академія України, Дніпропетровськ, Україна

i.pasechnik@ukr.net, sherbinaiv@ukr.net

Відомо, що зміст вищої освіти визначається законом України як обумовлену цілями та потребами суспільства системою знань, умінь і навичок, що мають бути сформовані в процесі навчання з урахуванням перспектив розвитку суспільства, науки, техніки та технологій.

У змісті вищої освіти передбачена підготовка до виконання наступних видів діяльності: насамперед, діяльності, визначеної вимогами професії, спеціальності; діяльності, яка обумовлена сучасним станом суспільства та перспективами його розвитку; діяльності, орієнтованої на розвиток особливості того, хто навчається. Останні дві групи завдань забезпечують формування загальнонаукового та загальнокультурного рівня студента, складають цикл соціально-гуманітарної, фундаментальної, природно-наукової підготовки. Перша група задач забезпечує готовність випускників до практичної діяльності, складає цикл професійної підготовки.

Теоретичною основою професійної діяльності інженера, у тому числі і інженера-ливарника, є технічні науки, успішне засвоєння яких залежить від належної фундаментальної підготовки, у першу чергу, з вищої математики. Майбутній інженер вивчає математику з практичною, прикладною метою. Потреби виробництва вимагають не тільки вміння теоретично міркувати, виконувати розумові і практичні дії при розв'язуванні навчальних математичних задач з абстрактними даними, але й вміння виконувати адекватну систему дій в реальних технологічних ситуаціях. Математичний апарат є основою для аналізу проблеми, пошуку її ефективного розв'язку, складання моделей дослідницького процесу, для обробки одержаних експериментальних даних та подальшого прогнозування і прийняття остаточного рішення.

У галузях машинобудування і приладобудування використовуються литі заготовки. Литтям отримують заготовки практично будь-якої конфігурації з мінімальними припусками на обробку та високими службовими властивостями. Спеціальні види лиття дозволяють отримати відливки підвищеної точності з чистою поверхнею.

Незважаючи на тривалий розвиток і сучасне вдосконалення процесів лиття, у ливарному виробництві залишається багато проблем, які потребують розробки та застосування нових технологій та винаходів.

Отже, перед викладачами математики стоїть важлива задача — посилювати міждисциплінарні зв'язки та математизацію спеціальних дисциплін. Досвід показує, що, з одного боку, треба наповнювати математичні

курси конкретним змістом науково-технічних дисциплін, з іншого — використовувати математичні методи в курсах спеціальних дисциплін.

Розглянемо докладніше основні аспекти застосування математичних методів в професійній підготовці студентів напряму «Ливарне виробництво», а саме методи організації наукового експерименту.

Ливарне виробництво як галузь промисловості — складний комплекс технологічних операцій і процесів, що включає підготовку формувальних і шихтових матеріалів, виготовлення форм і стрижнів, плавку і заливку. Кінцевою метою цього багатоступінчастого процесу є отримання литої деталі або заготовки заданої якості. В основі більшості технологічних процесів ливарного виробництва лежать явища, які пов'язані з рухом в'язкої рідини (розплавів, суспензій, емульсій), теплообміном і дифузійми. Методом вивчення закономірностей функціонування таких складних природних і технічних систем є математичне моделювання. Математична модель є наближеним поданням реальних об'єктів, процесів або систем, що зберігає істотні риси оригіналу та описує його за допомогою математичних термінів. Побудова математичної моделі полягає у визначенні суттєвих зв'язків між тими чи іншими процесами та явищами. На основі даних експерименту висувуються гіпотези про зв'язок між величинами і факторами, які визначають модель. Тому при складанні математичної моделі від дослідника вимагається вивчити властивості досліджуваного об'єкта, вміння відокремити головні властивості від другорядних, оцінити прийняті допущення.

Основою математичної моделі служить диференціальне рівняння в частинних похідних. Так для опису тепло- і масообміну між відливкою і формою застосовують диференціальні рівняння теплопровідності Фур'є і дифузії Фіка

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D_M \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

де $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ та $\frac{\partial c}{\partial \tau}$ — швидкості перенесення тепла і речовини на відстань x ; D_M — коефіцієнт масопровідності (дифузії); t та τ — температура тіла і концентрація дифундуючої речовини відповідно. Аналітичний розв'язок крайової задачі методом інтегральних перетворень Лапласа досить трудомісткий. Узагальнена математична модель процесу прогріву форми може бути представлена системою скінченно-різницевих алгебраїчних рівнянь (метод сіток).

Математичне моделювання ливарних процесів стало невід'ємною частиною промислового виробництва виливків і ефективним інструментом зниження їх собівартості та підвищення швидкості і точності розв'язання.

Важливим аспектом застосування математичних методів є також планування експерименту: побудова інтерполяційних моделей, вивчення

кінетики явищ, оптимізація процесів. Сутність методу полягає в тому, що досліди проводяться за певною схемою-матрицею планування, яка характеризується оптимальними властивостями, а саме: алгебраїчна сума елементів кожного вектора-стовпця, за винятком стовпця вільних членів, дорівнює нулю; сума добутків двох довільно взятих векторів-стовпців матриці дорівнює нулю (ортогональність); сума квадратів елементів кожного вектора-стовпця дорівнює числу дослідів.

Завдяки зазначеним властивостям інженер-дослідник отримує максимальну інформацію про об'єкт (наприклад, багатокомпонентний сплав або формувальну суміш) при мінімальній кількості дослідів. Вплив на об'єкт різних факторів, таких як температура заливки, вміст вуглецю, кремнію, марганцю та інших елементів у сплаві, викликає зміну його стану, який оцінюється по зміні значень критерію або функції оптимізації: збільшення виходу готового литва, підвищенню механічних властивостей відливків тощо.

При цьому критерій оптимізації має характеризуватися статистичною ефективністю, тобто мати можливо меншу дисперсію.

Крім методу планування експерименту в практиці ливарного виробництва часто виникає необхідність у застосуванні спеціальних методів пошуку оптимальних розв'язків, наприклад, методу лінійного програмування для розрахунку і оптимізації шихти.

Шихта — суміш наперед підготовлених різними способами металевих компонентів, зважених і завантажених у піч як перед початком, так і в процесі плавки. Досвід багатьох ливарних цехів показує, що для традиційних марок сталі можна суттєво поліпшити якість відливків, знизити брак, зекономити витрати, якщо правильно обґрунтувати вибір і витрати вихідних матеріалів.

При розв'язуванні широкого кола задач актуальним є також застосування методів теорії ймовірностей, регресійного та дисперсійного аналізу.

Наведемо, як приклад, розв'язок наступної задачі.

Середня стійкість вибілених валків з високоміцного чавуну ЧКГ (чавун з кулястим графітом) для пакетної прокатки листа складає $\bar{T} = 202$ г. Основною причиною виходу валків із ладу є поломка шийок. Величина порогу чутливості T_0 становить 50 г. Середнє квадратичне відхилення $\sigma = 135$ г. Відносна близькість значень $\bar{T}$ та σ дає підставу припускати, що розподіл стійкості валків відповідає характеру експоненціального розподілу $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, де λ — інтенсивність відмов (величина, обернена до середнього часу безвідмовної роботи).

Відповідно до фізичного змісту величина параметру $\lambda = \frac{1}{\bar{T} - T_0} =$
 $= \frac{1}{202 - 50} \approx 0,0066$. Розрахуємо значення стійкості валків з ймовірністю 0,9,

до якого потім додамо величину порога чутливості: $T'_{0,9} = T_{0,9} + T_0$. Ймовірність безвідмовної роботи знаходимо за формулою:

$$P(T) = 1 - F(T) = e^{-\lambda T}.$$

За умовою $P(T) = 0,9$ знаходимо $T_{0,9}$:

$$0,9 = e^{-\lambda \cdot T_{0,9}}, \ln 0,9 = -\lambda \cdot T_{0,9} \cdot \ln e,$$

звідки

$$T_{0,9} = \frac{\ln 0,9}{-\lambda} = \frac{-0,1053}{-0,0066} \approx 16; T'_{0,9} = 16 + 50 = 66 \text{ (г)}.$$

Отриманий результат свідчить про те, що незважаючи на високі фізико-механічні властивості, валки з ЧКГ для даних умов малоприсадибні (для спрощення викладу розрахунок критерію χ^2 опускається).

Таким чином, аналіз моделювання різних ситуацій, що виникають у професійній діяльності інженера-ливарника, приводить до наступних висновків:

— курс вищої математики призначений для забезпечення базової математичної підготовки студентів, яка дозволяє успішно вирішувати прикладні інженерні завдання і активно використовується у професійній діяльності майбутніх фахівців;

— моделювання різних ситуацій сприяє розвитку здібностей пов'язувати теоретичний матеріал, що вивчається в курсі вищої математики, з технічними дисциплінами.

Коло прикладних задач не обмежується наведеним в доповіді і може бути розширеним. На жаль, кількість годин для вивчення вищої математики не збільшується. Один із шляхів надолуження цього недоліку — акцент на самостійну роботу студента під контролем і за допомогою викладача. Пріоритетну роль в організації цього виду навчальної роботи має забезпечення навчальною та методичною літературою та видача відповідного набору задач для самостійної індивідуальної роботи. Такий підхід підвищує мотивацію вивчення курсу вищої математики і дозволяє активізувати пізнавальну діяльність студентів.

Список літератури

1. Дурина Т. А. Теория и практика математического моделирования в современном литейном производстве: Учебное пособие. — Пенза: ПГУ, 2012. — 52 с.
2. Основы научных исследований в литейном производстве / Под общ. ред. А. Е. Кривошеева. — К.; Донецк: Вища школа, 1979. — 168 с.

УПРОВАДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ ДО ПРОГРАМ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ (ПЕРША ПОЛОВИНА XX ст.)

М. С. Поєдинок

*Національна наукова сільськогосподарська бібліотека НААН, Київ, Україна
dnsgb_uaan@ukr.net*

Використання методів математичної статистики як нового інструментарію проведення аналізу дослідних даних привело на початку XX ст. до впровадження статистичних методів при одержанні поглибленого аналізу агрономічних процесів та явищ, плануванні польового досліджу. Тоді ж було визнано, що одержання на основі математичних методів якісних та вірних висновків з аналізу та встановлення закономірних зв'язків між чинниками, які впливають на урожайність сільськогосподарських культур, неможливе без ґрунтового володіння відповідними методиками, а також знання розділів математики. Питання про уведення необхідних розділів математики, методів та підходів статистичного аналізу даних до навчальних курсів сільськогосподарських освітніх закладів були обговорені як провідними вченими-аграріями, так і математиками, статистиками.

Першими до своїх курсів лекцій увели потрібні розділи О. В. Леонтович, А. О. Сапегін, М. К. Недокучаєв. Курс лекцій О. В. Леонтовича, у якому використовувалася математична статистика, був запропонований з 1909 р. для студентів біологічних та агрономічних напрямків Київського Політехнічного інституту («Элементарное пособие к применению методов Gauss'a и Pearson'a при оценке ошибок, в статистике и биологии», 1909-1911). А. О. Сапегіним у 1912 р. було уведено розділи з варіаційної статистики до курсу лекцій «Основи теорії та методики селекції сільськогосподарських рослин» на природничому факультеті в Імператорському Новоросійському університеті («Основы теории и методики селекции сельскохозяйственных растений», 1913), професором М. К. Недокучаєвим у 1915 р. у курсі лекцій з дослідної справи на Стебутівських курсах було уведено розділ з обробки цифрових даних спостережень та врожаїв («Опытное дело в полеводстве. Теория и практика», 1929).

Стрімке поширення нових підходів на основі використання методів математичної статистики викликало необхідність обов'язкового уведення у галузевих освітніх закладах не тільки відповідних розділів до навчальних курсів, а й зовсім нові лекційні курси. До цієї справи залучалися як вчені-аграрії (А. О. Сапегін, О. К. Филиповський, С. А. Егіз, О. С. Молостов та ін.), так і вчені-математики, статистики (М. О. Каблуков, В. П. Єрмаков, О. О. Чупров, П. О. Віхляєв, М. П. Кравчук та ін.). За їх лекційними курсами видавалися посібники та підручники. Наприклад, були видані: підручник професора Московського університету М. О. Каблукова «Статистика» (декілька видань, 4-е у 1918 р.), посібник професора Московського державного університету та Петровської сільськогосподарської академії П. О. Віхляєва «Краткий курс текущей сельскохозяйственной статистики» (1920), посібник

професора Московського сільськогосподарського інституту О. В. Леонтовича «Биологическая статистика в применении к сельскому хозяйству» (1922), підручник професора генетики і селекції Одеської вищої школи А. О. Сапегіна «Вариационная статистика. Элементарный учебник для агрономов» (серія видань, 1922-1937 рр.), підручник професора Вищих курсів з селекції сільськогосподарських рослин Сорто-Насінневого Управління Цукротресту та Київського інституту народного господарства Г. О. Левитського «Элементы биометрики» (1922), посібник професора Петроградського сільськогосподарського університету С. А. Егіза «Корреляционный метод в полевом опыте» (1925), підручник професора Київського Кооперативного інституту ім. В. Л. Чубаря О. К. Филиповського «Сільсько-Господарська досвідна справа: підруч. для вищих шкіл» (1926), підручник професора Маслівського інституту селекції та насінництва ім. К. А. Тімірязєва О. С. Молостова «Методи оцінки даних польового досліду (до методики польового досліду)» (1931), посібник академіка АН СРСР та ВАСГНІЛ В. С. Нємчінова «Сельскохозяйственная статистика с основами общей теории» (1945) та ін.

У 20-х роках ХХ ст. вже було загально визнаним, що ефективно проведення аналізу дослідних даних у сільськогосподарській дослідній справі, визначення достовірності та границі похибки можливе лише за допомогою методів математичної статистики.

Навчальні плани 1927 р. для низки землевпорядних технікумів (Полтавського, Київського, Дніпропетровського, Житомирського, Одеського, Чернігівського) та сільськогосподарських інститутів Харкова, Києва, Одеси, Кам'янця-Подільського, а також сільськогосподарських технікумів Білої Церкви, Херсону, Київського інженерного меліоративного технікуму містили курси «Вища математика» та «Основи загальної та сільськогосподарської статистики». В них зазначалося, що вивчення курсів з вищої математики та сільськогосподарської статистики повинно ставитися так, щоб практичні вирішення завдань за фахом були висунуті на перший план.

Головним завданням дисципліни «Основи загальної та сільськогосподарської статистики» було – навчити одержувати і аналізувати статистичний матеріал та користуватися ним для вирішення завдань за фахом. Програма дисципліни поділялася дві частини: теорія та практика статистики. У списку рекомендованої літератури наводилися підручники проф. А. О. Сапегіна «Вариационная статистика», проф. Ю. Л. Поморського «Вариационная статистика» та ін.

Зростання значення якості вмінь при проведенні аналізу дослідних даних у вирішенні галузевих задач вимагало постійної уваги до питань викладання статистичних розділів у навчальних планах сільськогосподарських вищих навчальних закладів.

У 1940 р. проводилася Всесоюзна нарада з питань викладання статистики, на якій було затверджено нову програму курсу загальної теорії статистики. Ініціатором вдосконалення програми був директор Московської сільськогосподарської академії ім. Тімірязєва академік АН СРСР та ВАСГНІЛ В. С. Нємчінов.

ОСОБЛИВОСТІ МЕТОДИКИ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ СЛАБОЧУЮЧИМ СТУДЕНТАМ

Л. С. Попова, М. О. Харитонова

Київський національний університет технологій та дизайну, Київ, Україна

Kharytonovama@gmail.com

КНУТД — один з небагатьох вищих навчальних закладів України, де молоді люди з вадами слуху можуть отримати вищу освіту за напрямками підготовки 6.030601 «Менеджмент» та 6.051602 «Технологія виробів легкої промисловості». Таких студентів, як правило, не виділяють у окремі групи. Лекційні і практичні заняття вони слухають у загальному потоці відповідно до фаху.

Методика викладання математики студентам з вадами слуху (с. в. с.) має суттєві відмінності, пов'язані з особливостями психофізичного сприйняття ними інформації. Найбільш характерними особливостями є: перевага образного мислення перед формально-логічним, короткочасна пам'ять, слабка здатність визначати пріоритетність дій, уповільнене сприйняття матеріалу. У зв'язку з цим найбільші труднощі виникають при викладанні дисциплін з великою кількістю понять, умов, абстрактних міркувань. Саме до таких дисциплін належить математика.

У КНУТД впроваджуються інноваційні форми організації навчального процесу з використанням модульного середовища, створеного на базі популярної в останній час на Україні учбової платформи Moodle (технологія PHP+MySQL). Це допомагає викладачам у розробці гнучкішої методики викладання вищої математики студентам, які навчаються у об'єднаних потоках.

Методика організації навчального процесу в потоках, де є слабчуючі студенти відрізняється від загально прийнятої, оскільки при її розробці необхідно враховувати рівень підготовки і специфіку сприйняття та засвоєння учбового матеріалу такою категорією студентів. Оскільки у об'єднаних потоках під час лекції процес викладання нового матеріалу уповільнюється, то при розробці більш гнучкої методики потрібно:

- провести оцінку та ранжування тем по ступеням складності їх сприйняття і виключити найбільш складні розділи, які принципово не впливають на рівень засвоєння дисципліни;

- пропонувати студентам напередодні лекції знайомитись з її електронним конспектом;

- під час попереднього самостійного ознайомлення з конспектом лекції студенти мають виписати план лекції і законспектувати означення нових базових понять та виписати основні формули, це дозволяє викладачу вивільнити час, який займає переписування означень і формул з дошки;

- під час лекції більше уваги приділяти розкриттю суті нових математичних понять і розв'язанню базових задач;

- забезпечити викладання навчального матеріалу за принципом «від простого до складного»;

— у електронних конспектах лекцій і практичних занять широко використовувати візуалізацію для образного сприйняття основних математичних понять;

— перейти від «жорсткої» регламентації видів аудиторної роботи (лекції, практичні) до застосування інтегрованих форм на основі використання комп'ютерних тестів, електронних підручників та методичних вказівок;

— для контролю засвоєння теоретичного матеріалу пропонувати студентам виконувати письмові завдання — тести з теоретичного матеріалу лекції; виконані власноручно тести у електронному вигляді надсилаються викладачу;

— для контролю набутих практичних навичок проводити тренувальні електронні тести, які студенти виконують вдома;

— пропонувати студентам самостійно готувати презентації по вивчених темах.

Основний зміст лекцій викладач розповідає або біля дошки, або за допомогою презентацій. Застосування інформаційних технологій дозволяє представити матеріал разом із схемами, графіками, рисунками та різноманітними спец-ефектами для кращого образного його сприйняття.

Методика проведення практичного заняття для даної категорії студентів теж має свої особливості. Електронний конспект практичного заняття повинен обов'язково містити план заняття, перелік основних термінів та понять, які використовуються у задачах. У конспекті практичного заняття бажано описати методи розв'язання у вигляді алгоритму розв'язання базових задач, а також подати способи контролю одержаних результатів.

Підчас заняття викладач самостійно або разом із підготовленим студентом розв'язує на дошці типовий приклад, виділяючи при цьому основні кроки (алгоритм), тому що навчання студентів за принципом аналогії є найбільш доступним для *с. в. с.* Бажано проводити редагування ходу розв'язання з метою знайти оптимальний шлях від умови до відповіді.

Дуже важливим фактором навчання *с. в. с.* може стати колективне опрацювання аналогічної задачі, яке забезпечить активізацію кожного студента. Студентів можна розбити на групи по троє-четверо і по завершенні роботи проаналізувати якість результату для кожної групи.

Для студентів з вадами слуху, у яких посилено розвинуто образне мислення, дуже продуктивною може стати робота з презентаціями як на практичних заняттях, так і при виконанні самостійних завдань.

Список літератури

1. Попова Л. С. Заверика А. В. Особливості викладання теми «Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гаусса» слабочуючим студентам // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. Т. 1. — Кривий Ріг: НМетАУ, 2010. — Вип. VIII. — С. 91—96.

ДЕЯКІ НЕСТАНДАРТНІ ЗАСТОСУВАННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

В. К. Репета, Л. А. Репета

*Національний авіаційний університет,
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна*

Зазвичай, у процесі розв'язування типових задач студенти оперують лише знаннями, що стосуються певних розділів вищої математики, не встановлюючи зв'язків з іншими розділами. Це значно звужує математичний світогляд.

У цій роботі ми хочемо зацентувати увагу на можливості ефективного використання апарату комплексних чисел для розв'язання певних типів математичних завдань, умова яких, на перший погляд, ніяким чином не пов'язана з комплексними числами.

Комплексні числа відіграють важливу роль як у математиці, так і в інших науках, зокрема, фізиці, електротехніці тощо. У курсі вищої математики для технічних спеціальностей з комплексними числами студенти знайомляться на першому курсі, після чого комплексні числа зустрічаються й використовуються у таких розділах: інтегральне числення функції однієї змінної, диференціальні рівняння, ряди, теорія функції комплексної змінної, операційне числення тощо.

Використання таких завдань у навчальному процесі є корисним і цілком виправданим, адже це сприятиме підвищенню математичного рівня студентів. Важливо відмітити, що застосування такого підходу не вимагає від студентів надзвичайних зусиль та нових знань, потрібно лише вміло скористатися набутими під час опанування вищої математики знаннями та навичками.

Розглянемо кілька прикладів таких завдань.

1. Знайдемо загальний вигляд для похідної $(\operatorname{arctg} x)^{(n)}$, де $n \in \mathbb{N}$.

Перейдемо до рівносильної задачі знаходження похідної

$$\left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{(n-1)}.$$

Якщо формально підійти до цієї задачі і намагатися помітити закономірність результатів диференціювання для значень $n = 2, 3, 4, \dots$, то дуже швидко ми відчуємо значні проблеми, пов'язані, насамперед, із громіздкістю викладок. Тут слушно звернути увагу студентів на вираз $1+x^2$, його зв'язок із уявною одиницею та подання його у вигляді добутку лінійних множників. Окрім цього, слід згадати формулу для похідної $\left(\frac{1}{x} \right)^{(n)}$, яка розглядалась під час вивчення похідних вищих порядків. Подальше розв'язання

пов'язане із поданням дробу $\frac{1}{1+x^2}$ у вигляді різниці елементарних дробів та застосуванням формули

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right); \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{(n-1)} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)^{(n-1)} \\ \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{(n-1)} &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n} \right) = \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{2i(x^2+1)} \left((x+i)^n - (x-i)^n \right) \end{aligned}$$

Після належних перетворень остаточно матимемо:

$$(\arctg x)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{(x^2+1)^n} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2} \right]} (-1)^{k+1} C_n^{2k-1} x^{n+1-2k}.$$

Цінність цього прикладу, перш за все у тому, що під час його розв'язання студент повинен виробити логічний ланцюжок дій з використанням знань та умінь з різних тем вищої математики.

2. Розглянемо інтеграли

$$I_1 = \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx \text{ та } I_2 = \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx.$$

Зазвичай такі інтеграли знаходять шляхом дворазового застосування формули інтегрування частинами з подальшим розв'язанням утвореного співвідношення відносно шуканого інтеграла.

Студентам можна запропонувати таку задачу: знайти одночасно обидва інтеграли I_1 та I_2 .

Знання формули Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

та властивостей невизначених інтегралів наштовхує на такі дії:

$$\begin{aligned} I_1 + iI_2 &= \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx + i \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \int e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) dx = \\ &= \int e^{(\alpha + \beta i)x} dx = \frac{e^{(\alpha + \beta i)x}}{\alpha + \beta i} = (\alpha + \beta i) \frac{e^{(\alpha + \beta i)x}}{\alpha^2 + \beta^2} = \\ &= \frac{(\alpha + \beta i)}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} + i \frac{\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x}.$$

Звідси одержуємо:

$$I_1 = \frac{\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x}, \quad I_2 = \frac{\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x}.$$

3. Покажемо, як за допомогою комплексних представлень дійсних функцій можна ефективно проводити підсумовування.

Нехай потрібно спростити вираз

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx.$$

Використовуючи комплексне представлення: $\sin \varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi}$, матимемо

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx &= \operatorname{Im} e^{ix} + \operatorname{Im} e^{2ix} + \dots + \operatorname{Im} e^{nix} = \\ &= \operatorname{Im} \left(e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{nix} \right) = \operatorname{Im} \frac{e^{ix} (e^{nix} - 1)}{e^{ix} - 1} = \operatorname{Im} \frac{e^{ix} e^{\frac{nix}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{nix}{2}} - e^{-\frac{nix}{2}}}{2i}}{e^{\frac{ix}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}{2i}} = \\ &= \operatorname{Im} \frac{e^{\frac{n+1}{2}ix} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \operatorname{Im} \frac{\left(\cos \frac{(n+1)x}{2} + i \sin \frac{(n+1)x}{2} \right) \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Отже, перехід в область комплексних чисел, дав змогу звести задану задачу до підсумовування геометричної прогресії.

ЧУДО ИЗ КУМБАКОНАМА

И. Е. Ругалева

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

irugaleva@mail.ru

В начале 1913 года профессор Кембриджского университета Г. Г. Харди, крупнейший специалист по анализу и теории чисел, автор великолепных математических работ, получил письмо из далекого Мадраса от Сриниваза Рамануджана, работающего клерком в бухгалтерии почтового ведомства Мадраса со скромным окладом. Он сообщал, что не имеет университетского образования и после окончания школы занимается математикой, не следуя принятой системе и избрав свою дорогу. Математическое содержание письма выглядит достаточно неуклюже — вполне можно принять за самоуверенного любителя. Письмо могло не произвести на Харди впечатления, но к нему было приложено некоторое количество формул, предполагавшиеся для опубликования, если они интересны, так как автор не мог сделать из-за своей бедности. Просмотр формул насторожил Харди. Он понял, что имеет дело с незаурядным явлением, и заинтересовался. Между ними завязывается интенсивная переписка и у Харди собирается около 120 разнообразных формул.

Формулы Рамануджана касались в основном соотношений между бесконечными радикалами (рис. 2), бесконечными рядами, произведениями и цепными дробями (рис. 1, 3, 4), тождеств между интегралами. Было ясно, что они далеко выходят за пределы элементарной математики.

$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \dots = \frac{2}{\pi}$$

Рис. 1. Бесконечная сумма, вычисленная Рамануджаном

Харди долго не мог понять, как сумма знакопередающегося ряда $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ с общим членом

$$a_n = (-1)^n (4n + 1) \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots} \right)^3$$

может оказаться вдруг равной $2/\pi$. В справедливости этой удивительной формулы как приближенного равенства, можно убедиться, используя вычислительные устройства, хотя доказательство точного равенства неэлементарное. Следующую красивую формулу (рис. 2) Рамануджан получил

еще в школьные годы.
$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots}}}} = 3$$

Рис. 2. Бесконечная сумма, вычисленная Рамануджаном

Он написал последовательность очевидных равенств, а затем подставил $n = 1$.

$$n(n+2) = n\sqrt{1 + (n+1)(n+3)} = n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + (n+2)(n+4)}} = \dots$$

Вопрос о законности перехода к пределу Рамануджана не интересовал. Действуя так же, можно самостоятельно получить похожую формулу

$$\sqrt{6 + 2\sqrt{7 + 3\sqrt{8 + 4\sqrt{9 + \dots}}} = 4$$

Числовое тождество с бесконечной суммой и цепной дробью — самая красивая формула (рис. 3.) Рамануджана, истинное произведение математического искусства.

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{1 + \dots}}}}} = \sqrt{\frac{\pi e}{2}}$$

Рис. 3. Числовое тождество с бесконечной суммой и цепной дробью

Он неожиданно связывает бесконечный ряд и бесконечную цепную дробь. Удивительно, что ни ряд, ни цепная дробь не выражаются через известные постоянные π и e , а их сумма непостижимым образом оказывается равной $\sqrt{\pi e / 2}$. Возникают вопросы: известны ли данные формулы; если да, то самостоятельно ли получены автором письма; если нет, то верны ли они? Харди понимает, что ситуация парадоксальна: он, несомненно, выдающийся специалист по современному анализ, имеет дело с россыпью неизвестных ему формул! Большое впечатление на Харди произвели формулы с бесконечными рядами (см. рис. 1). После их изучения он приходит к выводу: «...в распоряжении Рамануджана должны быть какие-то очень общие теоремы, которые он от меня скрывает». [1] Особо удивили Харди соотношения с бесконечными цепными дробями (одно из более поздних соотношений этого типа показано на рис. 3): «... эти соотношения поставили меня полностью в тупик: я никогда не видел ничего подобного. Достаточно бросить на них один взгляд, чтобы убедиться в том, что они могли быть написаны только математиком самого высшего класса». [2]

Как же сложился математик, который так удивил Харди? Сриниваза Рамануджан родился 22 декабря 1887 г. на юге Индии в селении Эрод. Его детство протекало в маленьком городок Кумбаконам (в 260 км. от Мадраса), где его отец работал в небольшой текстильной лавке. Рамануджан принадлежал к касте браминов, но богатство уже давно не было уделом его родственников. Его родители, а мать особенно, были глубоко религиозны. Детство, проведенное в городе, где каждый камень связан с древней религией, в окружении людей ощущающих всю принадлежность к высшей касте, сыграло большую роль в становлении Рамануджана. Рамануджан учится в школе с 5

лет, в 10 лет заканчивает начальную школу, начинает проявлять незаурядные способности, получает стипендию, обеспечивающую обучение в средней школе за половинную плату. Получив от студента из Мадраса двухтомное руководство по тригонометрии Лони, в 14 лет, изучил тригонометрию, а студент имел возможность пользоваться его консультацией в решении задач. В 16 лет к Рамануджану попала двухтомное руководство «Синопсис элементарных результатов чистой и прикладной математики» английского математика Карра, написанного в 1880—1886 гг., сыгравшее огромную роль в его формировании. В книге, которая в основном посвящена алгебре, тригонометрии, анализу, аналитической геометрии, было собрано 6165 теорем и формул, почти без доказательств, с минимальными пояснениями. Книга Карра стимулировала мальчика к самостоятельному выводу формул. Постепенно меняется область его основных интересов: магические квадраты, потом квадратура, затем наступает очередь бесконечных рядов. Он находит π с точностью, позволяющей вычислить длину экватора с ошибкой, не превышающей 1—2 м. Для формирования математического мира книга Карра оказала большое влияние, но имела и другие последствия, так как не содержала доказательств, впоследствии у него складывается своеобразный метод установления математической истины. Утверждается, что он сам открыл «формулу Эйлера о синусе и косинусе» и был очень расстроен, найдя эту формулу во втором томе Лони. Математическая судьба Рамануджана фактически полностью решилась в эти годы — направление научных поисков, способ думать он уже никогда не менял. К сожалению, Рамануджан формировался в тяжелых условиях. При правильном математическом развитии он стал бы математиком с лучшей профессиональной подготовкой. Смог бы Рамануджан увидеть так много, если бы с детства был обучен правилам поведения в математике, доводил бы свои результаты до публикаций со строгими доказательствами, строил бы свой математический мир на базе всего достигнутого человечеством, а не на сравнительно небольшом числе фактов? Такой уверенности нет. Постепенно коллекция наблюдений над конкретными числами уходит у Рамануджана на второй план перед миром формул, которые становятся на первое место и представляют самостоятельную цель. Внутренняя красота формулы имеет для Рамануджана бесконечную ценность. Его формулы можно рассматривать как прекрасные картины. Однажды математик Харди навещал Рамануджана в больнице, рассказав ему, что приехал на такси с непримечательным номером «1729». Рамануджан разволновался и воскликнул: «Харди, ну как же, Харди, это же число — наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы кубов двумя различными способами!». Меньшего числа, обладающего таким свойством, нет. Замечено, что «каждое натуральное число было личным другом Рамануджана». 1729 — это число Рамануджана — Харди — наименьшее число, представимое в виде суммы двух кубов двумя способами:

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3.$$

Харди понимает, что от него требуется не оценка результатов безвестного любителя, а спасение огромного дарования. Ему кажется, что Рамануджан сообщает малую толику своих знаний, чувствуя, что он обладает очень общими результатами, приводя лишь частные иллюстрации

В 1910 г. Рамануджан показывает свои математические результаты Рамасвари Айару, основателю Индийского математического общества, затем Сешу Айару, преподавателю Кумбаконамского колледжа, и Рамачандра Рао, крупному чиновнику, получившему математическое образование; позднее они стали биографами Рамануджана, который помогает ему из своих средств, затем устраивает клерком Сриниваза Рамануджан в почтовое управление. В 1911 г. появляется в печати сообщение Сешу Айара о результатах Рамануджана и его собственная статья. В судьбе Рамануджана начинают принимать участие влиятельные английские чиновники. С 1913 г. два года он получает небольшую специальную стипендию, которой хватает на скромную жизнь. Рамануджан оставляет карьеру клерка и становится «профессиональным математиком», встретив среди окружающих определенное число поклонников.

В формировании математического мира Рамануджана было важно, что начальный запас математических фактов (в основном почерпнутый из книги Карра) объединился у него с огромным запасом наблюдений над конкретными числами. Он коллекционировал такие факты с детства. Его школьный товарищ вспоминал, что Рамануджан знал огромное число знаков в разложениях e , π и других чисел в десятичные дроби. Он обладал поразительными способностями подмечать арифметические закономерности, терпеливо рассматривая огромный числовой материал — искусство, которым виртуозно владели Эйлер и Гаусс, но которое было в значительной степени утрачено к XX веку.

Гений Рамануджана оказался созвучен не только прошлому, но и будущему математики. Арифметические формулы Рамануджана нередко оказывались ключевыми на новых этапах алгебраической теории чисел, и можно было только удивляться, как он смог увидеть их, не зная того, без чего их увидеть нельзя. А потом пришло возрождение интереса к конкретным явным формулам как внутри математики, так и в сфере ее приложений. Современная математическая и теоретическая физика обращаются порой к весьма абстрактным разделам математики, и при этом очень изысканные явные формулы играют важную роль. Прошло более полувека, и сегодня мы отчетливо видим то, что не могли предвидеть Харди и его современники. Гений Рамануджана созвучен не только прошлому, но и будущему математики. Красота формул Рамануджана даровала им способность возрождаться при самых необычных обстоятельствах.

Список литературы

1. Павлов К. В. Сриниваз Рамануджан / К. В. Павлов // Энциклопедический Фонд. — Санкт-Петербург, 2010.: <http://www.russika.ru/t.php?t=4200>
2. Прасолов В.В. «Задачи по алгебре, арифметике и анализу» / В. В. Прасолов — М.: Просвещение, 2005.

МЕТОД АНАЛОГІЇ ЯК ЗАСІБ ОРГАНІЗАЦІЇ ВНУТРІШНЬОПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ У НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У ПРОФІЛЬНІЙ СТАРШІЙ ШКОЛІ

О. В. Савонюк

Криворізький національний університет, Кривий Ріг, Україна

olga.vsk@ukr.net

Для досягнення основних цілей навчання математики в профільній старшій школі важливо, щоб школярі не лише знали і вміли застосовувати на практиці теоретичний матеріал, але й усвідомлювали методи пізнання, які застосовуються у навчальному курсі. Серед основних методів пізнання в школі: аналіз, синтез, порівняння, аналогія тощо. Аналогія виступає у процесі навчання математики як дидактичний прийом і як метод наукового пізнання, також допомагає прослідковувати і працювати з внутрішньопредметними зв'язками під час навчання математики.

Застосуванню методу аналогії у навчальному процесі присвячені роботи Ф. П. Агап'єва, В. П. Вахтерова, О. І. Скафи та інших. Роль аналогії у творчості та розвитку мислення школярів досліджували Ю. К. Бабанський [1], І. Я. Лернер, О. О. Столяр [10], Г. П. Бевз [2] та інші.

Основна функція аналогії полягає у тому, що на основі раніше вивчених понять формулюємо нові схожі поняття, встановлюємо окремі їх властивості. Знаходимо відповідність між властивостями понять, що вивчаються, і вже вивченими раніше, та переносимо інші властивості раніше вивчених понять на ті, що вивчаються. Таким чином, маємо два види повторення: повторюється раніше вивчений навчальний матеріал і методом аналогії відкриваються нові знання; вивчається новий навчальний матеріал і методом аналогії визначається його схожість з раніше вивченим.

Наприклад, вивчаючи паралельні площини учні мають пригадати аналогічне поняття «паралельні прямі», тим самим організовується повторення основної властивості паралельних прямих, ознаки паралельності прямих і властивості паралельних прямих, які будуть справджуватися і для паралельних площин.

У загальних методиках викладання математики аналогія часто розглядалася як евристичний метод, який сприяє пошукам шляхів доведення теорем і розв'язування задач. Г. П. Бевз [2] радить користуватися аналогіями в навчанні для кращого усвідомлення навчального матеріалу, його узагальнення та систематизації, вироблення в учнів навичок творчого розв'язування задач. О. П. Ерднієв [5] наголошує на евристичній функції методу аналогії. З цього приводу він зазначає, що з її допомогою можна:

- підвести учнів до відкриття нового твердження і допомогти сформулювати його;
- вказати на спосіб або метод доведення цього твердження;
- допомогти знайти шлях розв'язання задачі.

3. І. Слєпкань вбачає роль аналогії у тому, що «з її допомогою можна полегшити процес навчання, здійснюючи перехід від відомого до невідомого, від близького до далекого [9].

Для дослідження проблеми застосування методу аналогії у навчанні стереометрії важливе значення мають роботи Д. Пойа. Вчений стверджував, що навчання математики, як й інших предметів, є практично неможливим без використання індукції та аналогії. «Можливо,— пише він,— не існує відкриттів ні в елементарній, ні у вищій математиці, ні, навіть, в будь—якій іншій галузі, які могли б бути зроблені без цих операцій, особливо без аналогії» [8]. Автор зауважує, що багато задач часто легше розв'язати, ніж одну, бо при розв'язанні серії типових задач, що пов'язані тісною аналогією, виникає принцип розв'язання. Підкреслюючи важливу роль аналогії у розв'язанні задач, Д. Пойа обґрунтував процес розв'язання задачі методом спеціально дібраних додаткових задач, точніше ланцюга еквівалентних задач. Хоча допоміжна задача не гарантує розв'язання основної, але частина її розв'язання може стати частиною розв'язання основної задачі, зробити основну задачу більш зрозумілою, оживити пам'ять, розширити сферу пошуку [8].

У шкільній практиці навчання математики існують два способи встановлення умовиводів за аналогією:

1. Після формулювання висновку за аналогією він зразу доводиться або відхиляється.

2. Після формулювання висновку за аналогією він взагалі не досліджується через брак часу або відсутність на даному етапі необхідних для цього знань.

В обох способах визначальним є факт появи припущення, зробленого на основі аналогії. Важливим є те, що умовивід за аналогією є первинний: він здійснюється незалежно від можливості довести зроблене припущення у даний момент часу. Після формулювання можливого твердження учнями робляться спроби доведення його істинності.

Результати аналізу шкільних підручників з геометрії дають підстави для висновку про те, що в процесі вивчення стереометрії на основі зв'язків з планіметрією можна отримати пари аналогічних понять. Застосовуючи список аналогічних понять під час вивчення теорем, тверджень і розв'язування задач можна зробити висновки.

Багато тверджень та теорем викладаються у підручниках із стереометрії, аналогічно до тверджень у планіметрії, відповідно до їх змісту, форми і порядку вивчення.

Деякі шляхи і способи міркувань для їх доведень у планіметрії, застосовуються для доведень відповідних тверджень у стереометрії. Це показує можливість і необхідність застосування аналогії у процесі вивчення стереометрії.

Деякі математичні методи, зокрема метод векторів, метод координат викладаються і застосовуються у вивченні стереометрії відповідно до того, як

викладалися і застосовувалися у планіметрії. Однак, мета, зміст і роль цих методів у стереометрії значно розширюється, порівняно із планіметрією.

Обсяг знань курсу стереометрії не завжди відповідає обсягу знань курсу планіметрії. Наприклад, трикутник вивчається більш широко у розділах підручників із планіметрії, аніж тетраедр у курсі стереометрії.

Можна стверджувати, що по-перше, автори досить мало роблять посилань на матеріал, який може виступати аналогом у вивченні нового; по-друге, термін «аналогія» чи «аналогічно» частіше використовується у введенні нових понять, для повторення схеми доведення, проведення деяких міркувань аніж при розв'язуванні задач; по-третє, автори не вдаються до побудови порівняльних таблиць і наведення аналогічних понять чи тверджень, що можливо спонукало б учителів на використання аналогії у навчальному процесі; по-четверте, той матеріал, який вводиться за допомогою аналогії носить репродуктивний характер, і не вимагає продуктивного, творчого перенесення способу доведення чи розв'язування задач. Все це приводить до висновку про те, що можливості застосування аналогії як методу навчання стереометрії недостатньо реалізуються в школі.

Дана проблема не повністю досліджена: не розглядається організація спільної діяльності вчителя і учнів спрямована на засвоєння методу аналогії та прийомів його застосування, що підлягає принципу двоїстості (заміні одних геометричних понять іншими). У шкільних підручниках і посібниках не достатньо практичних завдань для послідовного формування операційного складу вмінь застосовувати аналогію. Є необхідність у доборі змісту навчального матеріалу, який би сприяв формуванню зазначених прийомів евристичної діяльності учнів на уроках стереометрії.

Аналогія — ефективний метод навчання стереометрії. У її основі лежить перенесення знань з планіметрії (понять, властивостей фігур і зв'язків між ними, способів діяльності) на нові стереометричні знання і, навпаки, у процесі доведення тверджень і розв'язування задач курсу стереометрії використовуються властивості фігур на площині і відповідні способи діяльності. Вивчення стереометрії передбачає використання аналогії і між певними просторовими фігурами та їх властивостями.

Розгляд теми «Координати і вектори у просторі» в 11-му класі дозволить повторити навчальний матеріал із стереометрії 10-го класу і застосувати новий підхід до вивчення прямих і площин у просторі. Окремим завданням вивчення теми «Координати і вектори» є узагальнення векторного і координатного методів у випадку простору.

Таким чином, на етапі введення понять теми «Координати і вектори у просторі» учні мають прослідкувати зв'язки між вже відомими поняттями на площині і новими в просторі. Пропонується така схема вивчення поняття:

- *1 етап:* На етапі мотивації навчальної діяльності виконується розв'язання задачі у двовимірному просторі. Після успішного розв'язання перед учнями ставиться проблемна задача, яка вимагає роботи у тривимірному просторі.

•2 *етап*: Учні разом з вчителем знаходять шляхи розв'язання проблемної задачі, самостійно прийшовши до означення вже не нового поняття.

•3 *етап*: Робота над означенням, діалог між вчителем і учнем, розгляд суттєвих і несуттєвих ознак, прикладів і контрприкладів.

•4 *етап*: Відпрацювання нового означення на задачах різного рівня складності.

Реалізація на етапі введення понять за допомогою методу аналогії, доречна в процесі вивчення стереометрії на основі зв'язків з планіметрією, оскільки можна отримати пари аналогічних понять. Застосовуючи список аналогічних понять, під час вивчення понять та їх властивостей, розв'язування задач ми показали, що багато означень та теорем викладаються у підручниках із стереометрії, аналогічно до тверджень у планіметрії, відповідно до їх змісту, форми і порядку вивчення.

Список літератури

1. Бабанский Ю. К. Оптимизация процесса обучения / Ю. К. Бабанский. — М. : Педагогика, 1977. — 347 с.
2. Бевз Г. П. Методика викладання математики: [навч. посіб.] / Г. П. Бевз. — К.: Вища школа, 1989. — 367 с.
3. Бурда М. І. Особистісна орієнтація змісту профільного навчання / М. І. Бурда // Профільне навчання: Теорія і практика: Зб. наук. праць за матеріалами методолог. семінару АПН України. — К. : Пед. преса, 2006. — С. 100—104.
4. Далингер В. А. Об аналогиях в планиметрии и стереометрии / В. О. Далингер // Математика в школе. — 1995. — № 6. — С. 18—24.
5. Эрдниев О. П. Аналогия в теоремах о прямой Эйлера, окружности и сфере / О. П. Эрдниев // Математика в школе. — 1998. — № 3. — С. 7—14.
6. Концепція профільного навчання в старшій школі: за станом на 21 жовтня 2013 р. / Затверджено Рішенням колегії Міністерства і науки України 27 серпня 2013 р. протокол № 4/1—2. — [Електронний ресурс]. — Режим доступу: www.uazakon.com/document/fpart86/idx86618.htm.
7. Навчальні програми для профільного навчання. Програми факультативів, спецкурсів, гуртків. Математика. — К.: Навчальна книга, 2009. — С.4—11.
8. Пойа Д. Как решать задачу / Д. Пойа . — М. : Учпедгиз, 1959. — 208 с.
9. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике: [метод. пособие] / З. И. Слепкань. — К.: Рад. шк., 1983. — 192 с.
10. Столяр О. О. Педагогика математики: [учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов] / А. А. Столяр. — М. : Высшая школа, 1986. — 414 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Е. А. Сдвижкова, О. В. Бугрим

Национальный горный университет, Днепрпетровск, Украина

bugrim@yahoo.com

Процесс обучения в высшей школе должен быть источником воспитания будущего специалиста. Подготовка высококвалифицированного специалиста зависит от многочисленных факторов, в том числе и от математического образования. Это объясняется тем, что курс математики служит основой для понимания других фундаментальных курсов (физики, теоретической и прикладной механики), а также обеспечивает потребности специальных кафедр при преподавании общих и специальных дисциплин (электротехники, информатики, теории моделирования и других).

Общий курс высшей математики, читаемый студентам всех специальностей, расширяется за счет введения специальных разделов, имеющих практическое применение для тех или иных специальностей. К таким разделам относятся следующие:

- операционное исчисление;
- теория поля;
- ряд Фурье и преобразование Фурье;
- теория чисел;
- теория вероятностей и математическая статистика.

Отбор лекционного и практического материала ведется с учетом профессиональной направленности.

Характерной чертой обучения высшей математике будущих инженеров является центральная роль задач. Традиционные функции задач — овладение системой математических знаний, умений и навыков, формирование математической культуры и научного мышления, активизация самостоятельной познавательной деятельности. В настоящее время рост объемов и сложности учебной информации сопровождается сокращением количества аудиторных часов на изучение математики. В этих условиях к традиционным функциям задач добавляется функция носителя информации, т. е. теоретические положения сообщаются и усваиваются через задачи.

Студенты изучают тему «Определенный интеграл». Дается определение и

геометрический смысл определенного интеграла: $\int_a^b f(x)dx$ — представляет

площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, отрезком $[a, b]$ оси Ox и, в общем случае, прямыми $x = a$ и $x = b$, параллельными оси Ox . В части этой формулировки студенты часто считают, что функция $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$.

В процессе лекции студентам не сообщаются различные возможные ситуации, возникающие при решении такой задачи.

На практических занятиях рассматриваются примеры.

1. Вычислить площадь, ограниченную графиком функции $y = \sin x$ и осью Ox на отрезке $[0, \pi]$. В результате решения получаем

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = 2.$$

2. Вычислить площадь, ограниченную графиком функции $y = \cos x$ и осью Ox на отрезке $[0, \pi]$. Аналогично получаем решение

$$S = \int_0^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0.$$

Студентам предоставляется возможность самостоятельно разобраться в возникшей ситуации в результате чего возникает вопрос о свойстве аддитивности определенного интеграла относительно отрезка интегрирования. Делается чертеж.

3. Не вычисляя интеграла показать, что $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$, используя

геометрический образ и опыт, полученный при решении предыдущего примера. Далее, студенты, осмысливая ситуацию, самостоятельно приходят к выводу,

что для нечетной функции $f(x) \int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Предлагается несколько примеров, в которых используется сделанное заключение.

Показать, что

$$\int_{-3}^3 \frac{\sin x + 3 \operatorname{tg} x - x^5}{x^2} dx = 0; \quad \int_{-1}^1 \frac{e^{-x} + e^x}{\sin x} dx = 0.$$

Также, используя геометрическую интерпретацию определенного интеграла, студентам предоставляется возможность (на практических занятиях или дома) показать, что для четной функции $f(x)$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Такие несложные теоретические упражнения позволяют развить наблюдательность и проявить более осмысленный подход при изучении материала.

В рассмотренных ситуациях просматриваются элементы проблемного обучения, которые можно разделить на четыре этапа:

- постановка и анализ условий задачи;
- составление плана (алгоритма решения);

- реализация плана решения;
- исследование результатов решения.

При таком членении первые два этапа отвечают ориентировочной части деятельности студента в процессе решения задачи, третий — исполнительский, четвертый — контрольный. При традиционном обучении центральным является третий этап, ориентировочной части уделяется недостаточно внимания и времени, а четвертый этап — исследование результата решения — практически отсутствует. Напротив, в проблемном обучении основное внимание уделяется первым двум и четвертому этапу. Третий (исполнительский) этап деятельности можно и нужно частично или полностью предоставить компьютеру.

Последний этап — исследование результатов — включает в себя следующие компоненты:

- обоснование правильности полученного решения;
- обсуждение вопроса об оптимальности выбранного алгоритма;
- выявление новых знаний, приобретенных в результате решения задачи.

Этот этап дополняется обсуждением возможных расширений и обобщений и применением новых знаний в решении учебно-исследовательских и профессиональных задач, а также тех областей знаний, где могут использоваться полученные результаты.

Для оптимизации учебного процесса предлагается параллельное изучение некоторых разделов высшей математики. Приведем примеры.

1. Дается определение функции одной переменной и двух переменных.
2. Рассматривается понятие и геометрический смысл функции одной и двух переменных и области их определения. Здесь же предлагаются пример.

Найти область определения функций $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
 Дать геометрическую интерпретацию области определения и самой функции в обоих случаях.

3. Дается понятие предела для обоих видов функции, условие непрерывности.
4. Рассматривается исследование функции на экстремум.

При рассмотрении последнего пункта на основе исследования функции одной переменной на экстремум, студентам предлагается самостоятельно обобщить эти сведения на функцию двух переменных.

Преподаватель выполняет роль консультанта.

В качестве учебно-исследовательской работы студентам предлагается самостоятельно изучить метод наименьших квадратов и решить примеры. В дальнейшем эти знания применяют при изучении и использовании линейной корреляции в математической статистике.

Аналогично можно внедрять параллельное изучение других разделов: определенный и двойной интеграл, криволинейные интегралы первого и второго рода, теория вероятностей и математическая статистика.

**ЯКІВ ЧЕПІГА ЯК АВТОР ПІДРУЧНИКІВ З МАТЕМАТИКИ
(ЗА МАТЕРІАЛАМИ ФОНДІВ ПЕДАГОГІЧНОГО МУЗЕЮ УКРАЇНИ)**

О. Сівков, В. Гайдей

Педагогічний музей України,

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Цьогоріч минає 140 років від дня народження Якова Феофановича Чепіги (1875—1938), видатного українського педагога, психолога, видавця, громадського і культурного діяча. Я. Чепіга відомий як викладач, автор праць з питань виховання, букварів, навчальних посібників, зокрема і підручників з математики.

Розглянемо кілька навчальних посібників з математики авторства Я. Чепіги, що зберігаються у фондах Педагогічного музею України.

У 1923 році в Києві в Державному видавництві України вийшов «Задачник для початкового навчання. Рік перший». Він відкривається розділом під назвою «Один, багато, нічого», який містить чимало пропозицій, запитань до школяра. Учень поступово привчається мати справу з числами: «Скільки ніжок у стола? Скільки кутків в класній кімнаті? скільки стін? Скільки ніг у людини? а в корови? у коня? у собаки? в курки?» [1, с. 8]. Автор намагається розвивати у дитини абстрактне мислення: розділ насичений дрібними ілюстраціями з коментарями: 3 миші, 4 кухлі. За прикладами відчувається, що посібник розрахований на дитину, що близька до природи, сільського господарства. В ньому є загадки з математичними мотивами: «Два брата через гору живуть і ніколи один до одного в гості не ходять» (Очі)» [1, с. 6]. Зустрічаються тексти пісень, в яких вказується кількість предметів:

Посадила стара мати
Три ясені в полі,
А невістка посадила
Високу тополю.
Три явори посадила
Сестра при долині,
А дівчина заручена
Червону калину [1, с. 8].

Відзначимо, що такий підхід ніколи не зведе вивчення математики до нудного і сухого. Кожна цифра і кожна дія (множення, ділення та ін.) будуть здаватися незвичайною музикою, у якій народжується математичний світ. Поступово завдання у «Задачнику» стають складнішими. Учневі пропонується помножити, поділити. Завершується підручник таблицями множення, ділення, швидкою лічбою.

Того ж 1923 року побачив світ «Задачник для початкового навчання. Рік другий». Його перший розділ — «Додавання й віднімання (без переходу за десятків)». Підручник містить математичні завдання з прикладами з торгівлі, господарства: «Візник купив у одного хазяїна 20 пудів вівса, а в другого 6

пудів. Скільки пудів вівса купив він у обох хазяїв?» [2, с. 4]. Ілюстрацій в задачнику немає. Перша його частина без назви, а друга називається «Відділ практичних задач на всі дії. Господарство».

В 1923 році вийшов з друку «Задачник для початкового навчання в трудових школах. Рік третій». Він починається «Повторними вправами з числами до тисячі (сотнями й десятками)» і завершується «Задачами практичними», до яких входять «Господарство», «Худоба», «Поле, луки, ліс», «Діаграми». Деякі задачі відображають інтерес до політичного життя, змін в країні. «7 листопаду 1917 року влада перейшла до рук пролетаріату. Це сталося в жовтні місяці по старому стилю, от чому ця подія називається жовтневою революцією. Полічіть, скільки пройшло часу від 7 листопаду 1917 року до того дня, коли ви прочитали цю задачу?» [3, с. 68].

1927 рік — дата виходу книги «Життя та числа. Задачник за комплексами. Рік третій». Яків Чепіга видав кілька посібників зі схожими назвами. В 1928 році в Харкові вийшла його книга болгарською мовою «Живота и числата». Цей підручник має три розділи: «Перший триместр», «Другий триместр», «Третій триместр». В ньому відображені потреба в математичних знаннях у господарстві, на виробництві. Наприкінці 1920-х рр. більш зримою у радянських підручниках стає ідеологічна складова: деякі глави називаються «Жовтневі свята», «Дні пам'яті Шевченка та Лютнева революція», «День Ілліча». Книга оздоблена небагатьма дрібними ілюстраціями.

До того ж періоду відноситься «Методика усної лічби та вправи у перших групах семирічки» (серія «Робітна бібліотека вчителя»).

Таким чином, короткий аналіз цих видань, доступних для зацікавленого дослідника, дає нам загальне уявлення про діяльність Якова Чепіги як автора підручників з математики. Точна наука математика вивчається за методикою Я. Чепіги досить оригінально. Вона пов'язана з практичними реальностями життя. Вчений радить учителям у молодшій школі починати вивчення математики з її історії, мотивуючи це тим, що все «що роблять люди, залежить від минулого й

нестримно впливає на майбутнє, і поміж всім існує найзакономірніший зв'язок. Математика, як точна наука, дає змогу на конкретних прикладах виявити вловимі форми функцій і досконалий вияв їх може прищепити дітям глибоке переконання в тому, що в нашому світі домінують неодмінні закони, а це переконання надає всій нашій діяльності не тільки певної сили, а ще й сприяє утворенню правильного світогляду» [6, с. 114].

Використані джерела

1. Чепіга Я. Задачник для початкового навчання. Рік перший / Я. Чепіга. — К.: Державне видавництво України, 1923. — 80 с.
2. Чепіга Я. Задачник для початкового навчання. Рік другий / Я. Чепіга. — К.: Державне видавництво України, 1923. — 72 с.
3. Чепіга Я. Задачник для початкового навчання в трудових школах. Рік третій / Я. Чепіга. — К.: Державне видавництво України, 1923. — 99 с.

4. Чепіга Я. Життя та числа. Задачник за комплексами. Рік третій / Я. Чепіга. — Харків: Державне видавництво України, 1927. — 97 с.
5. Чепіга Я. Методика усної лічби та вправи у перших групах семирічки / Я. Чепіга. — К.: Радянська школа, [1930?]. — 19 с.
6. Чепіга Я. Методика навчання в трудовій школі першого концентру / Яків Чепіга. — [2-ге видання доповн. та змінене]. — Харків : Радянська школа, 1931. — 288 с. — (Робітна бібліотека вчителя).

Бібліографія математичних праць Я. Чепіги (з фондів Педагогічного музею України)

1. Чепіга Я. Задачник для початкових народних шкіл / Я. Чепіга. — К.; Відень: Видавництво «Українська школа», 1918. — 65 с.
2. Чепіга Я. Задачник для початкового навчання. Рік перший / Я. Чепіга. — К.: Державне видавництво України, 1923. — 80 с.
3. Чепіга Я. Задачник для початкового навчання. Рік другий / Я. Чепіга. — К.: Державне видавництво України, 1923. — 72 с.
4. Чепіга Я. Задачник для початкового навчання в трудових школах. Рік третій / Я. Чепіга. — К.: Державне видавництво України, 1923. — 99 с.
5. Чепіга Я. Задачник для трудових шкіл. I-й концентр / Я. Чепіга. — К.: Державне видавництво України, 1924. — 88 с.
6. Чепіга Я. Життя та числа. Задачник за комплексами. Рік третій / Я. Чепіга. — Харків: Державне видавництво України, 1927. — 97 с.
7. Чепіга Я. Живота и числата. Задачник по комплексната система. Четверта година / Я. Чепига. — Харков: Центрвидав, 1928. — 86 с.
8. Чепига Я. Жизнь и числа. Задачник по комплексам. Год четвертый / Я. Чепига. — К.: Государственное издательство Украины, 1929. — 112 с.
9. Чепіга Я. Методичні уваги до «робочої» книжки з математики / Я. Чепіга. — Харків: Радянська школа, 1931. — 56 с.
10. Чепіга Я. Методика роботи з підручником математики. I рік навчання. Методлист / Я. Чепіга. — Харків: Радянська школа, 1932. — 32 с.
11. Чепіга Я. Методика усної лічби та вправи у перших групах семирічки / Я. Чепіга. — К.: Радянська школа, [1930?]. — 19 с.

РОЛЬ КУРСУ ЗА ВИБОРОМ «ДЕЯКІ ПИТАННЯ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ З ТОЧКИ ЗОРУ ВИЩОЇ» У ПРОФЕСІЙНІЙ ПІДГОТОВЦІ ВЧИТЕЛЯ

Л. О. Соколенко

Чернігівський національний педагогічний університет імені Т. Г. Шевченка,

Чернігів, Україна

liliy9@micro.net.ua

Під поняттям «професійна підготовка майбутнього вчителя» в педагогіці й методиці розуміють єдність змісту, структури, цілей навчання й виховання студентів, способів реалізації набутих знань, навичок і вмінь у роботі з учнями. Професійна підготовка передбачає цілеспрямовану діяльність із засвоєння знань студентами та оволодіння ними навичками й уміннями, які будуть використані для стимулювання розвитку особистості учня [2].

Серед функцій сучасної професійної підготовки майбутнього вчителя виділяють *фахову функцію*, яка забезпечує розв'язання питань набуття студентами теоретичних знань зі спеціальності, вироблення практичних умінь і навичок, необхідних для здійснення професійної діяльності. Її зміст визначається: фундаментальними дисциплінами за спеціальністю; навчальними предметами фахового спрямування; навчальними дисциплінами з методики навчання шкільних предметів та курсами за вибором, на яких шкільні дисципліни розглядаються з позицій загальних ідей та понять фундаментальних наук, що складають їх основу.

Говорячи про професійну підготовку вчителя математики, слід зазначити, що вчитель повинен знати не тільки шкільний курс, а й розуміти його з позиції сучасної математики та застосування її методів у інших галузях знань та життєвій діяльності людини.

Висококваліфікованого вчителя математики неможливо уявити без розуміння загальних тенденцій розвитку математики, її методології, структури і архітектури методів пізнання, історії розвитку та застосувань [7].

Сформульовані вище положення переконують у необхідності включення до системи підготовки сучасного вчителя математики спецкурсу, який надавав би можливість студентам — майбутнім учителям математики, усвідомити свій предмет з точки зору вищої математики, об'єднати розрізнені факти, систематизувати їх на основі загальних ідей математики і логіки.

Такий курс — «Наукові основи шкільного курсу математики» читається за авторськими програмами для студентів спеціальності «математика» у вітчизняних та зарубіжних університетах [7], [9] та ін. За основу робочих програм цієї дисципліни взято матеріали посібників [1], [3].

Робочі програми згаданого курсу та аналогічних до нього курсів «Математика шкільного курсу математики», «Теоретичні основи взаємозв'язку шкільного курсу алгебри і початків аналізу та вузівського курсу математичного

аналізу», «Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої» певним чином відрізняються.

Враховуючи попередній досвід, традиції та вимоги сьогодення викладачі НПУ імені М. П. Драгоманова пропонують зміст курсу «НОШКМ» для студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів прив'язувати до всіх змістових ліній шкільного курсу математики [7].

Під час читання аналогічних курсів мають місце інші підходи. Так, згадуючи методичний спецкурс «Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої», який на початку 90-х років минулого століття читав у Чернігівському педагогічному інституті імені Т. Г. Шевченка завідувач кафедри математичного аналізу, доктор фізико-математичних наук, професор Я. О. Ройтберг, слід зазначити, що курс давав можливість випускникам фізико-математичного факультету осмислити зміст шкільного курсу алгебри і початків аналізу з точки зору математичного аналізу. На лекційних заняттях розкривались теоретичні питання пов'язані зі змістом шкільного курсу алгебри і початків аналізу з точки зору вищої математики, зокрема алгебри і математичного аналізу. Згаданий спецкурс був аналогом курсу «НОШКМ», але він обмежувався розглядом питань пов'язаних з поняттями, що є предметом вивчення курсу алгебри і початків аналізу старшої школи.

Значна увага приділялась питанням пов'язаним з множиною дійсних чисел, границею та неперервністю функції, елементарним функціям курсу алгебри і початків аналізу, задачам, що приводять до поняття похідної, диференціала, первісної та інтеграла, застосуванням цих понять на практиці, диференціальним рівнянням та методиці їх вивчення в школі, нестандартним задачам курсу алгебри і початків аналізу [8].

Професійна спрямованість навчання математичному аналізу майбутнього вчителя математики, яка передбачає його фундаментальну математичну підготовку, об'єднання загальнонаукової і методичної ліній, зв'язок зі шкільним курсом математики та неперервність процесу формування методичної культури вчителя математики, були предметом вивчення багатьох математиків, серед яких Н. Я. Віленкін, Г. О. Михалін, А. Г. Мордкович, О. П. Томащук, Н. М. Шунда та ін.

Результати їх наукових досліджень, представлені у роботах [4—6, 10 та ін.], корисно розглядати під час читання курсу «Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої».

Зважаючи на вищезгадані факти, приходимо до висновку про необхідність та важливість читання для студентів випускних курсів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів курсу за вибором *«Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої»*.

Метою курсу є систематизація знань студентів на основі загальних математичних і логічних ідей, які покладено в основу сучасного шкільного курсу математики.

Основні завдання курсу:

1. Проаналізувати курс шкільної математики з точки зору фундаментальних математичних ідей: множина, відповідність, відображення, відношення, математична структура, алгебраїчна операція тощо.

2. Показати розвиток понять числа, функції, величини, алгоритму, фігури, які відіграють важливу роль у курсі сучасної шкільної математики.

3. Розкрити роль і місце найважливіших понять сучасної математики в шкільному курсі.

4. Сприяти усвідомленню студентами змісту теоретико-множинного, алгебраїчного, логічного аспектів у викладі основ шкільної математики.

5. Вчити встановлювати зв'язки між різними розділами математики, виконувати аналіз шкільної математики з точки зору відображених у ній фундаментальних математичних ідей та понять.

6. Вчити здійснювати порівняльний аналіз означень ключових математичних понять шкільного курсу математики з загальнонауковими.

7. Формувати готовність майбутнього вчителя математики викладати шкільний курс на належному рівні науковості та строгості, здійснювати навчальний процес за будь-яким альтернативним діючим підручником.

Пропонуємо один з можливих варіантів змісту згаданого курсу за вибором.

Програма курсу може складатись з таких тем:

1. *Математика як наука. Методологічні основи математики.* Предмет математики та її характерні риси. Основні етапи розвитку математики. Математичні методи пізнання.

Питання теорії чисел та алгебри у шкільному курсі математики.

2. Теорія множин і шкільна математика. 3. Відповідності і відношення у шкільній математиці. 4. Логічна структура арифметики та її навчання. Теоретико-множинний та аксіоматичний підходи до побудови арифметики цілих невід'ємних чисел. 5. Розширення поняття про число. 6. Розвиток поняття степеня. 7. Вирази. Числові вирази. Вирази від змінної. Тотожні перетворення виразів. 8. Рівняння. Основні теореми про рівносильність рівнянь та наслідки з них. 9. Нерівності. Основні теореми про рівносильність нерівностей та наслідки з них.

Питання математичного аналізу у шкільному курсі математики.

10. Порівняльний аналіз означень загальнонаукових понять, пов'язаних з функцією, з означеннями цих понять у ШКМ. Основні елементарні функції та методика їх навчання у шкільному та вузівському курсах математики. 11. Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь та нерівностей. 12. Границя. 13. Неперервність. 14. Похідна та її застосування. 15. Невизначений інтеграл, визначений інтеграл та їх застосування.

Елементи аналітичної геометрії в курсі геометрії основної школи.

16. Елементи векторної алгебри. 17. Метод координат на площині. 18. Пряма лінія на площині.

Елементи аналітичної геометрії в курсі геометрії старшої школи.

19. Вектори у просторі. 20. Метод координат у просторі. 21. Площина у просторі.

Геометричні величини

22. Поняття величини. 23. Довжина відрізка. 24. Площа фігури. 25. Об'єм тіла та його вимірювання.

Всі запропоновані теми програми мають безпосереднє відношення до шкільного курсу математики. Розкриваючи їх зміст слід звертати увагу студентів на виклад даного матеріалу у вузівських курсах та в курсі шкільної математики, а саме, на означення відповідних понять; доведення основних властивостей; застосування відомих з курсу вищої математики фактів, властивостей та ознак, до розв'язування задач курсу шкільної математики.

Список літератури.

1. Виленкин Н. Я., Дудничев К. И., Калужин Л. А., Столяр А. А. Современные основы школьного курса математики: Пособие для студентов пед. ин.-тов. — М.: Просвещение, 1980. — 240 с.
2. Кузьмінський А. І., Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А. Наукові засади методичної підготовки майбутнього вчителя математики. — Черкаси: Вид. від. ЧНУ імені Богдана Хмельницького, 2009. — 320 с.
3. Любецкой В. О. Основные понятия школьной математики. — М.: Просвещение, 1987. — 400 с.
4. Михалін Г. О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2003. — 320 с.
5. Михалін Г. О., Томащук О. П. Удосконалення деяких логічних прогалів шкільного курсу математики засобами математичного аналізу. — К.: УДПУ, 1995. — 96 с.
6. Михалін Г. О., Томащук О. П. Що повинен знати учитель математики про елементарні функції. — К.: УДПУ, 1995. — 102 с.
7. Працьовитий М. В. «Наукові основи шкільного курсу математики» в системі підготовки сучасного вчителя математики / М. В. Працьовитий, С. В. Ніколаєнко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі: Зб. наукових праць. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. — № 5. — С.17—24.
8. Соколенко Л. О. Шкільна математика з точки зору вищої // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки. — 2011. — Вип. 83. — С. 126—128.
9. Таточенко В. І. Програма спецкурсу «Наукові основи шкільного курсу математики» для магістрів. Херсонський державний університет // <http://dls.ksu.kherson.ua>
10. Шунда Н. М. Формування знань про елементарні функції у професійній підготовці вчителя математики: Автореферат дис. докт. пед. наук. 13.00.04. — К.: УДПУ, 1996. — 56 с.

ПРОПЕДЕВТИКА ВИВЧЕННЯ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

О. С. Сушко

*Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
teacher_math@i.ua*

Протягом останніх 30—40 років відбулись кардинальні зміни світового фінансового ринку, наріжними каменями якого стали позиковий капітал та ризик. Як зазначається в документах Організації економічного співробітництва та розвитку (ОЕСР) [1, с. 9]: «інновації та зростаюча складність продуктів кредитного ринку перекладає додаткові фінансові ризики на плечі фізичних осіб, яким складно зрозуміти умови своїх кредитів. ...Наслідки непоінформованих кредитних рішень можуть бути катастрофічними».

Внаслідок світової фінансової кризи 2008 року довіра до офіційної фінансової системи була підірвана. Світовий Банк та ОЕСР поставили перед собою завдання підтримати програми фінансового навчання та забезпечення захисту прав споживачів фінансових послуг, аргументовано стверджуючи, що фінансова освіта споживачів є тим фундаментом, що має підтримувати нормальне функціонування ринків капіталу та економіки в цілому [2].

По всьому світу урядовими органами запроваджуються заходи щодо підвищення фінансової грамотності населення та вироблення ефективних шляхів покращення захисту споживачів фінансових послуг. Світовим Банком проведені дослідження з оцінки фінансової грамотності населення кількох країн, що раніше сповідували принципи централізованої економіки, зокрема України, на основі якого розроблено рекомендації урядовим та освітнім установам щодо створення належної інституційної основи для захисту споживачів та належної практики фінансової освіти.

Одним із заходів з реорганізації фінансової освіти та підготовки грамотного фінансового споживача став експеримент, започаткований в 2012 році (лист МОНмолодьспорту №1/9-156 від 29.02.12 р.), по впровадженню курсу за вибором для загальноосвітніх навчальних закладів «Фінансова грамотність». Так у 2013—2014 н.р. в експерименті взяло участь 450 шкіл, близько 14000 учнів з 25 регіонів України [3].

Зазначимо також, що входження України до європейського та світового освітнього простору передбачає приведення нашої системи освіти у відповідність з багаторівневою системою Європи, яка описана в документах Болонського процесу. Для ефективної підготовки учнів до навчання у вищих навчальних закладах у старшій школі впроваджується профільне навчання (за напрямками — гуманітарний, фізико-математичний, економічний та ін.). У старшій школі передбачається близько десяти напрямків, у кожному з яких приблизно 30% навчального часу буде виділено на спеціальні курси за вибором учня.

Реалізація цих ідей можлива за умови усвідомлення учнями власних схильностей для відповідального вибору навчального предмета з метою

поглибленого вивчення. Тому актуальними є *проблеми впровадження педагогічних технологій ранньої спеціалізації, розробки пропедевтичних курсів, щоб профіль навчання був вибраний якомога раніше.*

У доповіді представляються результати дослідження проблеми пропедевтики навчання фінансової математики у школі. При цьому виділяється два основні етапи: 1) вивчення елементів фінансової математики у процесі навчання математики учнів основної школи (розв'язування задач прикладного фінансово-економічного змісту); 2) спеціальний курс або факультатив з елементів фінансової математики для учнів 10—11 класів.

Розглянемо детальніше кожен із запропонованих етапів.

Відомо, що у практиці навчання математики більше спостерігається інтерес учнів до розв'язування задач прикладного спрямування, ніж до теоретичних чи тренувальних вправ. Проте, на жаль, навчально-методична та педагогічна література не надає особливої уваги використанню математики у фінансовій сфері (так, в основній школі елементи фінансової математики вивчаються тільки в темі «Відсотки»!).

Розв'язування математичних задач фінансового змісту та введення їх в навчальну програму основної школи сприяє створенню необхідного емоційного настрою, активності учнів у навчанні та розширенню сфери практичного застосування вмінь та навичок учнів, отриманих в процесі вивчення математики.

Поняття **математичної задачі фінансового змісту** як *задачі, яка ознайомлює з застосуванням математичних понять, операцій та законів у фінансовій сфері* запропонувала Л. Межейнікова [4]. У шкільній практиці до задач фінансового змісту, які можуть використовуватися в процесі вивчення математики в основній школі відносять такі види текстових задач:

- Задачі на оподаткування;
- Задачі на банківські розрахунки;
- Задачі на страхування;
- Задачі на сімейний бюджет;
- Задачі на цінні папери.

В доповіді будуть наведені приклади таких задач та з'ясовано місце їх вивчення у курсі математики основної школи.

Для профільної старшої школи ми пропонуємо програму спецкурсу «Елементи фінансової математики», розрахованої на 35 год. (1 год. на тиждень), яка пройшла апробацію в ліцеї № 100 «Поділ» м. Києва.

Метою вивчення спецкурсу «Елементи фінансової математики» є ознайомлення учнів з можливими методами застосування шкільного курсу математики до розв'язання прикладних задач у сфері фінансів, бізнесу та економіки. У програмі та відповідному курсі розглядаються задачі, які розв'язуються алгебраїчними методами і базуються на вмінні користуватися розрахунковими формулами, виконувати аналіз елементарних функцій і розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи з шкільного курсу математики.

При опрацюванні програмового матеріалу доцільно застосовувати різноманітні форми навчання: від лекції та доповіді до ділової гри, в основу якої покладені задачі економічного та фінансового змісту.

Орієнтовні результати:

Мати уявлення про: економічні задачі, що ґрунтуються на основі поняття множини; висловлення та висловлювальні форми (предикати); відношення слідування та рівносильності між реченнями; застосування алгебри логіки в економічних задачах; граfi та графіки в економічному плануванні; математичний аналіз в бізнесі, економіці; функціональні моделі економіки; методи визначення рівняння прямої; прості відсотки та дисконт; складні відсотки; прості анuitети; рівняння вартості; відстрочений анuitет; складний анuitет; викупні фонди та амортизацію; поняття ренти.

Знати: означення висловлення та предиката; зміст слів «і», «або», «не», «всі», «деякі»; основні логічні прийоми формування понять; синтез і аналіз; порівняння, абстракцію, абстрагування; логічний закон; основні та неосновні логічні закони; класифікацію економічних моделей; функціональні моделі економіки (функція попиту, функція пропозицій виробництва, прогноз прибутку); модель статистичної рівноваги ринку; модель міжвідомчого балансу; інтерполювання функцій; лінійне рівняння попиту і пропозицій; аналіз прибутковості — збитковості; нелінійні функції та їх застосування в економіці; обчислення поточної та загальної вартості в задачах на прості відсотки; дисконтний та відсотковий вексель, відсоткову ставку; оформлення векселя; складні відсотки; сукупний дохід і дійсну вартість для дробових періодів часу; анuitет, анuitетні зобов'язання; рівняння вартості; види акцій; торгівлю акціями; викупний фонд та графік ренти.

Вміти: застосовувати теоретичні відомості про множини до розв'язування задач економічного характеру; застосовувати синтез і аналіз, логічні закони (основні та неосновні) при розв'язуванні економічних задач; застосовувати системи лінійних рівнянь та нерівностей при розв'язуванні економічних завдань; використовувати прості та складені відсотки в задачах економічного характеру; обчислювати поточну вартість анuitетних зобов'язань; розв'язувати задачі, які ґрунтуються на поняттях викупних фондів та амортизації.

Висновок. Виділивши та проаналізувавши два етапи пропедевтики навчання фінансової математики в школі: розв'язання задач фінансового змісту на уроках з математики в основній школі та вивчення факультативного курсу з фінансової математики в старшій школі, можна констатувати наступне:

1. У шкільному курсі математики основної школи задачі з фінансовим змістом можуть розглядатися і розв'язуватися при вивченні діаграм, рівнянь (лінійних, квадратних, їх систем), натуральних чисел, звичайних дробів, відсотків тощо.

2. Продовжуючи навчання у старшій школі і обираючи відповідний профіль навчання для більш широкого розуміння фінансової математики як науки старшокласникам варто пропонувати відвідувати спеціальні курси

(гуртки, факультативи). Метою яких буде сприяння формуванню знань, умінь та навичок, необхідних для успішного вивчення різних профільних дисциплін у загальноосвітніх школах до навчання у вищих навчальних закладах економічного напрямку.

Список літератури

1. Financial Literacy and Consumer Protection: Overlooked Aspects of the Crisis, June 2009, p.1. OECD [Electronic resource]. — Available at: <http://www.oecd.org/finance/financial-markets/43138294.pdf>
2. Susan L. Rutledge «Consumer Protection and Financial Literacy: Lessons from Nine Country Studies» / The World Bank. — 2010. — June. — P. 10.
3. Курс «Фінансова грамотність»: Моніторинг впровадження [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://finrep.kiev.ua>.
4. Межейнікова Л. С. Активізація пізнавальної діяльності учнів основної школи в процесі розв'язування математичних задач фінансового змісту : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «теорія і методика навчання (математика)» / Лада Станіславівна Межейнікова; Нац. пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. — Київ, 2005. — 20 с.

ОТ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ДО ТОПОЛОГИИ

Н. А. Хамедова

Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами,

Ташкент, республика Узбекистан

n.azimovna@mail.ru

История развития геометрии фактически является историей зарождения и становления математики как науки, так же эта история связана с развитием стран, культур, науки и искусства. Первоначальные сведения о геометрии появились в странах Востока — в Ассирии, Вавилоне, Индии в связи с потребностями быта, экономических отношений, астрономии, имея своей задачей простейшие измерения на земле и на небе. С Востока геометрия проникла в Египет, развивалась жрецами, которые решали измерительные, вычислительные задачи при строительстве больших сооружений, при установлении границ земельных участков после разлива Нила. Египетская геометрия уже имела отвлеченный характер и была более абстрагированной. Эта геометрия стала объектом интереса греческих ученых и получила свое дальнейшее развитие в Ионийской и Пифагорейской философских школах. В древней Греции, стране более высокой культуры и развития, к геометрии предъявлялись требования гораздо разнообразнее, чем в предшествующих странах. Здесь наукой занимались в специальных школах, а не в храмах, как в Египте и поэтому абстракция в геометрии шла гораздо быстрее. Но потребовалось более трех столетий, чтобы геометрия сложилась как цельная наука. Она исходила из начальных положений: определений понятий с которыми она оперирует, и формулировки аксиом, которые доказательству не подлежат. За ними следовала непрерывная цепь доказательств. В конце IV века до нашей эры центр эллинской культуры переносится из Афин в Александрию, в город, основанный Александром Македонским. В начале III века до нашей эры появляется сочинение Евклида «Начала», состоящее из 13 книг. В своем сочинении Евклид изложил в строгой логической связи геометрию, что получило всеобщее признание и вплоть до конца XVIII столетия «Начала» остаются единственным источником геометрических знаний и учебником.

Но, на протяжении многих веков, изложенная Евклидом геометрия подвергалась критике и анализу со стороны математиков, особенно постулат о параллельных прямых, которую пытались вывести из всех остальных или заменить. «Трудно было себе представить, сколько сил было на это затрачено. В течение двух тысяч лет — от Птолемея до Лежандра — вряд ли можно указать выдающегося геометра, который не испытал бы своих сил на этой неблагодарной работе», — пишет В. Ф. Каган в своей книге о Лобачевском [1, с. 17]. Для доказательства этого постулата некоторыми математиками был выбран способ от противного, то есть предположения обратного. К удивлению обратное высказывание не приводило к противоречию, а наоборот, получалась стройная система логических рассуждений, истинность которых можно было

беспрепятственно доказывать или выводить из предыдущих. В XIII веке Среднеазиатский математик Насир ад-Дин ат-Тусий предложил доказать равенство суммы углов треугольника $2d$, не пользуясь постулатом о параллельных линиях. Тогда, считал он, можно будет строго доказать сам постулат на основе остальных [2, с.66].

Именно таким путем, независимо друг от друга шли три геометра: в первой половине 18 столетия итальянский математик Саккери, во второй половине того же столетия философ и математик Ламберт в Германии, в начале 19 столетия французский геометр Лежандр. Но заключительное слово было сказано русским ученым Николаем Васильевичем Лобачевским.

1926 году Н. В Лобачевским были изложены основные моменты новой теории, полученной заменой 5-го постулата на противоположный, на заседании физико-математического отделения Казанского университета, а в 1829 году он опубликовал статью «О началах геометрии» в «Казанском вестнике». Это было началом построения новой геометрии, отличной от Евклидовой, хотя бы тем, что в этой геометрии из одной точки, не лежащей на данной прямой, можно было провести бесконечно много прямых, параллельных ей. В этой геометрии сумма углов треугольника отличается от $2d$, то есть она меньше развернутого угла. Еще здесь не работает теорема Пифагора. Эта геометрия впоследствии была названа гиперболической. В качестве метрики в ней можно выбирать очень большие расстояния, существующие во вселенной, исчисляемые в нескольких световых лет.

Необходимость изучения линий и поверхностей в трехмерном пространстве вытекает из их роли в человеческой деятельности. Линии, по которым движутся небесные тела — эллипсы (траектории планет), параболы и гиперболы (траектории комет). Искусственные спутники и космические ракеты движутся по достаточно сложным кривым. Так же балки различных сооружений (мостов, каркасов зданий) прогибаются по различным линиям.

Наша планета — эллипсоид вращения, следовательно, вопросы геодезии и картографии требуют знания методов различных расчетов, связанных с измерениями на земном шаре.

Поверхность зеркал прожекторов — параболоид вращения. Антенны радиотелескопов и арки мостов имеют параболическую форму. Корпуса кораблей, самолетов, ракет представляют сложную форму.

Огромное значение для науки и практики представляет изучение неевклидовых геометрий и геометрий многомерных пространств.

Нужно сказать, что изучение геометрических фигур происходит при помощи некоторых методов. Одним из таких методов является метод преобразований. Преобразование означает переход одной фигуры к другой. В преобразовании фигуры движением или подобием полученная фигура обладает теми же свойствами, как данная фигура и отличается от него лишь положением или пропорциональными размерами. В параллельном же проектировании сохраняются параллельность отрезков или прямых, отношения длин отрезков,

лежащих на параллельных прямых, но длины сторон и углы изменятся. Таким образом, устанавливается родство между фигурами, которые преобразовываются в проектировании друг в друга. Например, окружность и эллипс, квадрат и параллелограмм. Свойства таких фигур можно изучать с помощью алгебры, преобразовывая уравнения фигур, переходящих одна в другую в параллельном проектировании и изучать их свойства на самом удобном из них.

Возможность еще больших обобщений изучения линий или других геометрических фигур дает центральное проектирование. В нем окружность, в зависимости расположения плоскости проектирования, может перейти в окружность, эллипс, параболу или гиперболу. Следовательно, эти фигуры имеют общие свойства и при решении задач можно воспользоваться их более удобными образами в центральной проекции. Наконец, топологические или взаимно однозначные и взаимно непрерывные преобразования позволяют выявить еще более скрытые общие свойства геометрических фигур. С помощью топологических преобразований окружность может обратиться в эллипс или в любой многоугольник, но не может перейти в открытую линию, так как нельзя разрывать фигуру, при этом из одной точки разрыва получатся две точки, так же нельзя складывать в восьмерку, при этом две точки окружности превратятся в одну точку, при этом нарушается взаимно однозначность преобразования.

«Лобачевский положил начало широкой эволюции геометрии, которая в своих основах казалась совершенно законченной наукой. На основе его идей геометрия разрослась в огромное здание, в котором классическая геометрия Евклида составляет только фундамент», — такую оценку дает В. Ф. Каган Лобачевскому и предполагает, что все эти вопросы ещё далеки от окончательного разрешения. [1, с. 78]. Неевклидовы геометрии на плоскости имеют свое развитие и в нынешнее время — открываются новые теории и их практические применения учеными Узбекистана [3].

Список литературы

- 1 Каган В. Ф. Великий русский ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке. — М.: Гостехиздат, 1948. — 84 с.
2. Матвиевская Г. П. К истории математики Средней Азии IX—XV веков. — Ташкент: Издательство АН Узб., 1962. — 125 с.
3. Ортикбаев А. А. Современный взгляд на древнюю науку // Математика и информатика. — 2004. — № 4. — С. 45.

ВИДАТНИЙ ПОПУЛЯРИЗАТОР ФІЗИКИ НА ДОНЕЧЧИНІ БОРИС ТАДЕЙОВИЧ ЄРИЦПОХОВ

С.М. Чуйко, К. К. Білоусова, Е. Є. Яблочанська

*Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна
chujko-slav@inbox.ru*

Борис Тадейович (Борис Фадеевич) Єрицпохов народився 11 травня 1912 року у місті Артемівськ Донецької області. Батько Бориса Тадейовича з 1918 р. був народним суддею, а згодом — захисником. У 1930—1933 роках Борис Тадейович навчався в Артемівському інституті соціального виховання, де отримав кваліфікацію викладача. У 1933—1934 р.р. працював лаборантом у кабінеті фізики в Артемівському педагогічному інституті; у 1934—1941 р.р. — викладачем фізики в Артемівському педагогічному інституті.

Під час Великої вітчизняної війни Борис Тадейович за станом здоров'я не був відправлений на фронт і був назначений черговим радіовузла у місті Артемівськ. Після визволення міста у серпні 1943 р. працював директором радіовузла, згодом — старшим викладачем фізики педагогічного інституту, був занесений на дошку пошани. Темою дисертації було обрано аксіоматику фізики; вона була схвалена професором М. Д. Галанінім.

За рік (1950 р.) до закриття Артемівського педагогічного інституту Бориса Тадейовича було звільнено разом із усіма викладачами у зв'язку з тим, що всі вони під час Великої вітчизняної війни перебували в окупації.

У 1951—1954 роках Б. Т. Єрицпохов працював у Краснопахорському аграрному технікумі. У 1952 р. надрукував першу статтю у журналі «Фізика в школі». З 1954 по 1960 роки Б. Т. Єрицпохов працював викладачем фізики та математики в Артемівському музичному училищі.

1962—1977 роках Борис Тадейович Єрицпохов був призначений старшим викладачем кафедри фізики Слов'янського педагогічного інституту (на сьогодні — Донбаський державний педагогічний університет). У цей час Борис Тадейович опублікував низку наукових праць [1—5].

26 березня 1976 р. Борис Тадейович Єрицпохов захистив кандидатську дисертацію у науково-дослідному Інституті змісту та методів викладання Академії педагогічних наук (Москва), після чого йому була присвоєна наукова ступінь кандидата педагогічних наук. У 1978 р. — виконував обов'язки завідувача кафедри фізики. Після захисту кандидатської дисертації Б.Т. Єрицпохов опублікував статтю [6].

Бориса Тадейовича Єрицпохова високо цінували як викладача; його яскраві, емоційні лекції завжди супроводжувалися демонстраціями та прикладами з науки і техніки, історичними відомостями.

Протягом багатьох років Б.Т. Єрицпохов очолював загальноінститутську групу товариства Знання, групу аналізу інституту, природно-наукову секцію товариства Знання міста Слов'янська та Слов'янського державного педагогічного університету.

Вийшов Борис Тадейович на пенсію 15 липня 1982 року, але з 1 вересня 1982 року був поновлений на посаді старшого викладача.

Борис Тадейович Єрицпохов був нагороджений багатьма грамотами та відзнаками, медаллю «Ветеран праці». Його діяльність була важливою віхою історії Донбаського державного педагогічного університету та освітянської громадськості Донеччини.

Автори висловлюють щиру вдячність бібліографу Донбаського державного педагогічного університету Ользі Костянтинівні Гайко за сприяння у пошуках публікацій Бориса Тадейовича Єрицпохова.

Вибрані праці Б. Т. Єрицпохова

1. Ерицпохов Б.Ф. К изучению закона Гей-Люссака // Физика в школе. — 1962. — № 2. — С. 76—77.
2. Ерицпохов Б. Ф. Омметр из школьного демонстрационного гальванометра // Физика в школе. — 1965. — № 6. — С. 67—70.
3. Єрицпохов Б. Ф. Закон збереження та відносності енергії // Радянська школа. — 1972.
4. Єрицпохов Б. Ф. Основні закони (аксіоми) механіки в курсі педінститутів // Методика викладання фізики. — К., 1973. — С. 164—169.
5. Ерицпохов Б. Ф. Методика изучения основных законов механики на факультативных занятиях в старших классах средней школы: автореф. дис. ... канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения (физика) НИИ содерж. и методов обучения АПН СССР. — М., 1975. — 20 с.
6. Ерицпохов Б. Ф. Построение изображений наклонных предметов // Квант. — 1981. — № 5. — С. 37—40.

ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ІНОЗЕМНИХ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

І. Л. Шинковська, І. П. Заєць

НМетАУ, Дніпропетровськ, Україна

Принципові зміни в суспільстві, курс держави на європейську інтеграцію вимагають зростання рівня підготовки студентів ВНЗ, що обумовлює кардинальні зміни в структурі учбового процесу. Поряд з проблемою надання студентам базисних предметних знань, акцент робиться на формуванні активної, самостійної особистості, яка здібна творчо використовувати отримані знання у своїй професійній діяльності. Саме тому, при значному зменшенні числа аудиторних занять з вищої математики при кредитно-модульній системі навчання, домінуючою є самостійна робота студентів, число годин на котру істотно зростає. Зміст, об'єм та форми цієї роботи необхідно визначити під час тематичного планування лекційних та практичних занять та своєчасно доводити до відома студентів.

Великий об'єм самостійної роботи, передбачений програмою, створює ряд проблем. Студенту — першокурснику надзвичайно психологічно важко адаптуватися не тільки до умов вуза, а й до кредитно-модульної системи навчання, раціональної організації самостійної роботи. Значні труднощі відчують й іноземні студенти.

Самостійна робота в учбовому процесі розглядається як одна з головних форм організації навчання. Вона містить різні види індивідуальної та колективної учбової діяльності, яка здійснюється на аудиторних та позааудиторних заняттях з урахуванням індивідуальних особливостей та пізнавальних можливостей студентів під керівництвом викладача або без його безпосередньої участі.

Щоб студенти були в змозі самостійно успішно опановувати та закріплювати певні теми та розділи програми з «Вищої математики» викладач повинен виконати велику методичну роботу (підготувати навчально-методичні посібники, електронні підручники, банки завдань для контрольних та індивідуальних робіт і т.п.). При вивченні курсу дисципліни іноземні студенти повинні чітко уявляти, які теми вони будуть вивчати самостійно, які домашні та індивідуальні завдання вони повинні виконати к певному терміну.

Як відомо, іноземні слухачі відчують труднощі при конспектуванні лекцій, тому ще не в змозі швидко та грамотно записати ключові положення. Саме цьому на початку навчання їм видається повний курс лекцій в електронному та друкованому вигляді для самостійного опрацювання. При такому оснащенні на лекції студенти, в головному, слухають, відповідають на питання, обговорюють запропоновану тему. В результаті об'єм розглянутого в аудиторії матеріалу збільшується, а також залишається час на його закріплення у вигляді розв'язання типових прикладів. Поза аудиторією студент має

можливість ще раз опрацювати лекцію, звертаючись до додаткової літератури, що теж надається викладачем.

На практичних заняттях іноземні слухачі теж працюють самостійно. Після розгляду декількох прикладів на дошці, викладач видає кожному студенту індивідуальні завдання різної складності. Така методика дозволяє працювати індивідуально з кожним студентом. Слабкі розв'язують прості задачі та закріплюють матеріал, а більш сильним пропонується більш складні та нестандартні задачі. Варто звернути увагу на те, що використання задач професійної спрямованості є необхідною умовою для формування майбутніх спеціалістів. Одночасно з конспектом лекцій студентам видається набір задач та тестів до кожної лекції в електронному вигляді, щоб вони мали змогу самостійно відповісти на питання та розв'язати запропоновані задачі, перевіряючи свій рівень засвоєння матеріалу. Питання, які постають при цьому, обговорюються з викладачем на консультації.

Студент на протязі семестру також отримує індивідуальне семестрове завдання, яке він повинен виконати самостійно, керуючись розробленими навчально-методичними матеріалами. Згідно з робочим планом, є теми, які відводяться на самостійне вивчення. Викладач повинен надати студентам список літератури, використовуючи яку вони готують доповіді та виступають з ними.

Досвід роботи з іноземними студентами показує, що полегшати засвоєння достатньо складних математичних термінів допомагає глосарій, що складає викладач дисципліни, бо на уроках російської мови ці терміни не вивчаються. Повторюючи терміни на російській, англійській та французькій мовах, викладач встановлює більш тісний контакт зі студентами та допомагає краще засвоювати теоретичний матеріал та швидше усвідомити суть розв'язувальної задачі. Контроль за виконаною самостійною роботою можна проводити у формі співбесіди, перевірки конспектів, захисту рефератів, проведення письмових контрольних робіт, науково-практичних конференцій.

Наявний досвід викладання вищої математики іноземним слухачам дозволяє зробити висновки, що самостійна робота в навчальному процесі сприяє наступним факторам:

- поглибленню та розширенню знань;
- формуванню інтересу до пізнавальної діяльності;
- оволодінню прийомами процесу пізнання;
- розвитку пізнавальних здібностей.

Саме тому, вона стає головним резервом підвищення ефективності підготовки спеціалістів.

ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА ПО МАТЕМАТИКЕ И МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВАЯ СИСТЕМА ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ

В. И. Юринок, Т. С. Яцкевич, Л. А. Раевская

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
vyurinok@tut.by

Использование инновационных технологий при изложении курса высшей математики в вузе влечет за собой внесение изменений в структуру и содержание образования. Сегодня нужны такие методы обучения студентов, которые не только бы облегчали и ускоряли передачу знаний, обучали их приемам самостоятельной деятельности, но и подготовили бы специалистов, умеющих применять математические методы и владеющих навыками использования информационных технологий в своей будущей профессиональной деятельности.

Проблема обучения математике в вузе усугубляется низким уровнем школьного образования, связанного с введением тестирования по математике. У студентов младших курсов практически нет теоретической базы для понимания высшей математики.

Нами проведен сравнительный анализ оценок аттестата, результатов тестирования и успеваемости в вузе студентов первого и второго курса. Результаты анализа показали, что студенты имели в школе более высокие знания по математике, по сравнению с большинством других предметов, т.к. средняя оценка, полученная в школе по математике, значительно превышает средний балл аттестата. В целом же оценки по математике весьма высоки.

Однако при сдаче тестирования знание предмета на оценки выше пяти баллов сумело продемонстрировать лишь около 40% поступивших в вуз. Остальные же сдали тестирование всего на 4...5 баллов. Потому зависимости между оценкой, полученной в школе, и результатами тестирования практически не наблюдается. Баллы по результатам тестирования оказались значительно ниже оценок, полученных в школе, что в принципе не удивительно, так как основная задача централизованного тестирования — ранжировать абитуриентов. Однако баллы, полученные студентами в ходе сдачи высшей математики по итогам трех сессий, оказались еще ниже, чем по результатам централизованного тестирования. Лишь около 15% студентов смогло сдать высшую математику на оценки выше пяти баллов. Остальные же — подавляющее большинство — получили по высшей математике 4...5 баллов. Причем при сборе информации учитывалась итоговая оценка по высшей математике за семестр, и не учитывалось то, что этот предмет некоторые сдавали по несколько раз, получая на предварительном этапе неудовлетворительные оценки. Так же стоит отметить, что при сборе информации не были учтены студенты, не доучившиеся до третьего семестра.

Поэтому, если учесть все вышеперечисленное, то следует ожидать еще более низких результатов в экзаменационную сессию.

Результаты нашего исследования свидетельствуют о том, что в школе ученик может подготовиться к конкретному занятию и получить за это высокую оценку, однако такой подход не проходит в вузе, так как к экзамену требуется подготовить материал большого объема, который невозможно выучить за один день. К таким требованиям вчерашний школьник оказывается не готов. Поэтому он не в состоянии демонстрировать целостные знания, обладая которыми можно претендовать на хорошую оценку. По результатам статистического анализа нами отмечено, что средний балл, полученный по высшей математике, значительно уступает среднему баллу общей успеваемости. Это еще раз доказывает, что высшая математика является одним из самых сложных предметов, преподаваемых в техническом университете.

Не вызывает сомнений тот факт, что курс высшей математики останется основой фундаментальной подготовки инженера. Поэтому традиционное математическое образование, особенно в части практических занятий и самостоятельной работы, необходимо дополнить применением компьютерных математических пакетов, с которыми знакомы практически все. Необходимо активно вести поиск методов и форм их включения в практику проведения различных видов занятий.

Инструментом приобретения базовых знаний по математике, на наш взгляд, может стать учебно–методический комплекс дисциплины. Сегодня это очень актуально, так как в вузах наблюдается тенденция уменьшения учебных часов, отведенных на изучение курса математики, невозможность предоставления достаточной индивидуальной консультации студенту (в среднем 4 часа в семестре на группу).

Практические занятия при изучении курса высшей математики являются важным звеном в системе связей между всеми формами и видами учебной и самостоятельной работы студентов. Именно здесь преподаватель получает возможность закрепить и углубить знания студентов, полученные на лекциях, добиться их осмысленного, творческого применения в конкретных задачах. Кроме того, практические знания позволяют всесторонне изучить характеристику деятельности каждого студента, непосредственно управлять их самостоятельной работой через систему контролируемых индивидуально-дифференцируемых заданий.

Индивидуализации процесса обучения математике, активизации учебно-познавательной деятельности студентов на практических занятиях, а также при выполнении внеаудиторных заданий способствует использование целостной системы учебно-методического обеспечения и самостоятельной учебной работы. Основными компонентами такой системы, на наш взгляд, являются:

1) методические материалы (указания, программы, инструкции и т.п.), направляющие и обеспечивающие самостоятельную учебно-познавательную деятельность студентов, помогающие им составить план и программу работы,

получить требуемую информацию об условиях выполнения запланированной работы (что и где изучить, где познакомиться с методами решения задач, на что обратить внимание и т.д.);

2) сборники заданий для аудиторных занятий и внеаудиторной самостоятельной работы. Объем и трудоемкость таких заданий разработаны нами с учетом бюджета времени студентов и исключают чрезмерную загруженность студентов. Эти пособия студенты получают в начале семестра;

3) задания для контроля знаний студентов.

Ценность практических занятий определяется не количеством решенных задач, а качеством разбора путей их решения. На наш взгляд, почти по всем темам курса математики, физики и других наук можно подобрать задачи, цель которых — продемонстрировать несколько способов решения. Одним из необходимых условий, дающих возможность студенту получить навыки самообразования, является полноценная самостоятельная работа студентов при выполнении внеаудиторных заданий. Если студент после аудиторных занятий не брался за проработку лекционного материала, не выполнял домашних заданий, то фактически самостоятельной работы не было.

Качеству усвоения математики способствует выполнение типовых расчетов в процессе обучения. Индивидуальные типовые расчеты, разработанные на кафедрах высшей математики, состоят из теоретических вопросов и упражнений, задач и примеров. Для выполнения типового расчета устанавливается график, в котором указывается, какие теоретические вопросы и задачи должны быть решены к концу каждой контрольной недели. Важную роль при выполнении типового расчета имеют консультации. На консультациях, встречаясь с преподавателем, студенты разрешают возникшие у них затруднения и получают необходимые методические указания.

Практический опыт свидетельствует о том, что качество управления обучением и его результаты оцениваются не только по данным текущего понимания учебного материала и выполнения студентами намеченных действий, но и по прочности усвоения полученных знаний и навыков. Для этого необходим рубежный контроль. Во время рубежного контроля, помимо знаний фактического материала, проверяется способность к обобщению, систематизации материала, переносу умений и навыков в новые нестандартные условия. Непрерывное повышение требований к качеству подготовки специалистов вызывает необходимость совершенствовать формы и методы такого контроля. Одной из эффективных форм рубежного контроля, стимулирующих учебно-познавательную активность студентов, являются тематический контроль и учет знаний. При такой форме контроля преподаватель получает наиболее современную и объективную информацию об успешности усвоения учебного материала, а также обеспечивается регулярность и систематичность контроля. Организация тематического контроля позволяет привести в систему знания студентов, делает их более осознанными. Студенты приучаются к регулярной самостоятельной работе, а

преподаватель своевременно выявляет пробелы в знаниях отдельных студентов и принимает конкретные меры по их устранению.

Эффективности рубежного контроля способствует модульно-рейтинговая система оценки, которая предусматривает:

- блочный принцип структуризации содержания обучения;
- позапное усвоение блока;
- рейтинговый контроль.

Модульно-рейтинговая система оценки знаний, умений и навыков студента позволяет обеспечить качество и оценить результаты обучения каждого студента.

Рейтинг знаний каждого студента по усвоению блока определяется количеством баллов, полученных на контрольных точках, суммируемых с баллами текущего контроля (мини-контрольные, выполнение домашних заданий и др.). Рейтинговая оценка знаний учитывается на итоговом экзамене (студент может быть освобожден от сдачи материала блока при высоком рейтинге).

СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЯК МЕТОД ВИЯВЛЕННЯ ПРИХОВАНИХ ПОВІДОМЛЕНЬ В КОНТЕЙНЕРАХ АУДІО-ФОРМАТУ

Ю. П. Буценко, Н. С. Греков, Ю. Г. Савченко
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
armchairdoc@yandex.ua

Розглянемо задачу виявлення прихованих стего-повідомлень у аудіо файлах. Обмежимося випадком використання методу найменш значущого біта [1], який полягає у зміні молодших розрядів вибірок аудіо-сигналу.

Для ілюстрації зміни статистичної інформації було обрано три файли:

queen_dear_friends.wav,
vivaldi_sinfonia_in_c_major_presto.wav,
hs-noclue.wav.

Їх основні характеристики наведено у таблиці 1.

Табл. 1. Основні характеристики аудіо-файлів

Ім'я файла	queen_dear_friends.wav	vivaldi_sinfonia_in_c_major_presto.wav	hs-noclue.wav
Параметр			
Стиль	Популярна музика	Симфонічна музика	Мовленнєвий сигнал
Формат	WAV	WAV	WAV
Стиснення	-	-	-
Кількість каналів	1	1	1
Біт у вибірці	8	8	8
Частота дискретизації	44100 Гц	44100 Гц	22050 Гц
Кількість вибірок	2929536	2880000	351360

Для отримання статистичної інформації, мовою python, було написано програму, яка по чергово порівнює останні біти двох сусідніх вибірок. За допомогою програми (теж написана мовою python), яка дозволяє записувати один аудіо-файл у інший аудіо-файл використовуючи метод НЗБ, було записано мовленнєвий сигнал

hs-noclue.wav

у файл

queen_dear_friends.wav

і

vivaldi_sinfonia_in_c_major_presto.wav.

Графічно отримані результати зображені на рис. 1.

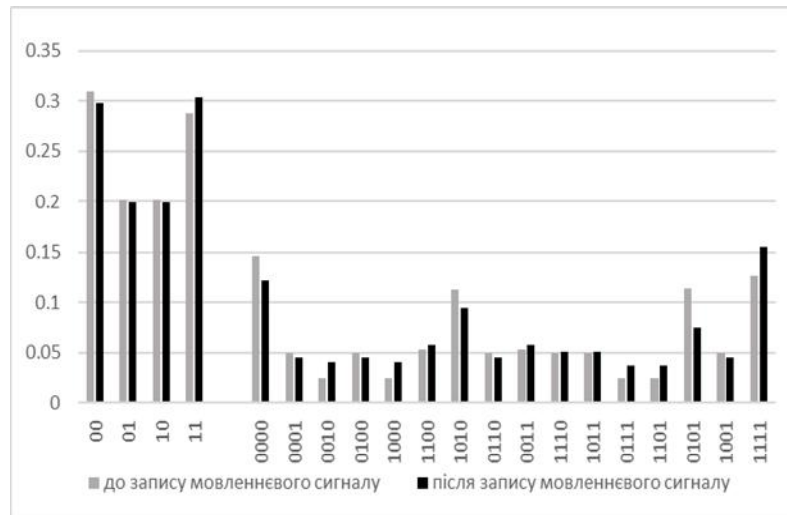


Рис. 1. Статистична інформація аудіо-файлу
vivaldi_sinfonia_in_c_major_presto.wav
до і після запису мовленнєвого сигналу

Отримана інформація дозволяє розглядати завдання виявлення стегоповідомлень як статистичну задачу виявлення невідповідності розподілу по групах символів типу розподілів, характерним для даного типу контейнерів. Може бути запропоновано декілька підходів до вирішення такого завдання. Найприроднішим є застосування критерію узгодженості Пірсона, статистика якого має вигляд:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^m \frac{(n_k - n_k^*)^2}{n_k^*},$$

де $m = 2^n$ — кількість можливих позицій у розподілі, n_k — наявні частоти, n_k^* — частоти, характерні для порожніх контейнерів.

Нульова гіпотеза про збіг розподілів відкидається, якщо значення статистики перевищує відповідний вибраному рівню значущості квантиль розподілу хі-квадрат. Однак, у випадку розподілів розрідженого типу (коли багато з ймовірностей або відносних частот близькі до нуля), а саме такими є аналізовані розподіли, асимптотика статистики хі-квадрат виявляється непередбачуваною. У роботі [2] пропонується побудова емпіричної функції розподілу статистики шляхом семпліювання:

$$\tilde{F}(x^2) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n I[x^2 > x_j^2],$$

де N — кількість семплів, x_j — значення статистики для j -го семпла, $I[\dots]$ — індикатор події.

Відзначимо, що застосування такої методики в нашому випадку цілком виправдано за умови заміни семплів випадково обраними файлами досліджуваного типу. Також перспективним є використання специфічного виду емпіричної функції розподілу, побудованої за наведеними вище даними. Добре

відомо, що, наприклад, критерії Колмогорова і омега-квадрат, що спираються на статистики:

$$K_n = \sup [F^*(t) - F_n(t)], \omega_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [F^*(t) - F_n(t)]^2 dt,$$

де n — об'єм вибірки, $F^*(t)$ — функція розподілу для пустого контейнера, $F_n(t)$ — функція розподілу для досліджуваного файлу.

Зазначені статистики є більш потужними, ніж критерій хі-квадрат. На жаль, ці критерії мають обґрунтовану асимптотику статистик лише в разі безперервних розподілів. Однак, у роботі [4] запропонована методика, що дозволяє за допомогою перетворення Смирнова емпіричної функції розподілу використовувати їх і в разі дискретних розподілів. У цьому випадку генерується вибірка $y_1, \dots, y_m$ обсягу m значень рівномірно розподіленої на інтервалі $[0,1]$ випадкової величини. Якщо γ_k — емпіричні відносні частоти, то функція розподілу $F_n(t)$ має стрибки величини γ_k в точках з абсцисами k . Побудувавши значення

$$Z_k = F_n(k-1) + y_k \gamma_k,$$

зведемо зазначені вище статистики до виду:

$$K_n = \max [F_n(z) - z], 0 \leq z \leq 1$$

$$\omega^2 = \int_0^1 [F_n(z) - z]^2 dz$$

Питання збіжності розподілів таких статистик потребує додаткового вивчення. Відзначимо, що в наведеному прикладі в завантаженому контейнері проглядається наявність суміші розподілів різних типів:

$$F_n(t) = \alpha F^*(T) + (1 - \alpha) F_1(t),$$

де $F_1(t)$ — функція розподілу для завантаженого контейнера. Це дозволяє використовувати процедуру послідовного перебору (з певною дискретністю) значень параметра суміші до досягнення максимального рівня згоди, що дає можливість оцінити обсяг прихованого повідомлення.

Список літератури

1. Грибунин В. Г., Оков И. Н., Туринцев И. В. Цифровая стеганография. — М.: Солон-Пресс, 2002. — 272 с.
2. Целых В. Р., Воронцов К. В. Критерии согласия для разреженных дискретных распределений и их применение в тематическом моделировании // Машинное обучение и анализ данных. — 2012. — Т.1, № 4. — С. 437—447.
3. Лемешко Ю. Б. Непараметрические критерии согласия: Руководство по применению. — М. Инфра-М, 2014. — 163 с.

ІЗ СПОГАДІВ ВИДАТНОГО УЧНЯ ПРО СВОГО ВЧИТЕЛЯ

З. П. Ординська, В. О. Гайдей

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

*Життя прикрашають дві речі:
можливість вивчати математику
й можливість викладати її
С. Пуассон*

У наш буремний час подана нижче стаття багато в чому допоможе молодим людям, які не байдужі до математики, визначитись в своєму житті.

Конспект статті В. І. Арнольда про А. М. Колмогорова, яку надруковано 1988 року в газеті мехмату МДУ «За передовою факультет», був наданий доценту З. П. Ординській професором В. В. Булдігіним (1946—2012), який завідував кафедрою вищої математики (згодом — математичного аналізу та теорії ймовірностей) Київського політехнічного інституту понад чверть століття.

Подамо стислі біографічні довідки з Вікіпедії на Вчителя і його Учня.

Андрій Миколайович Колмогоров (уроджений Катаєв, 12 (25) квітня 1903, Тамбов — 20 жовтня 1987, Москва) — радянський математики, один з видатних математиків XX століття.

А. М. Колмогоров — один із засновників сучасної теорії ймовірностей, ним одержано важливі результати в топології, геометрії, математичній логіці, класичній механіці, теорії турбулентностей, теорії складності алгоритмів, теорії інформації, теорії функцій, теорії тригонометричних рядів, теорії міри, теорії наближення функцій, теорії множин, теорії диференціальних рівнянь, теорії динамічних систем, функціональному аналізі і ще в багатьох галузях математики і її застосувань. Він також автор праць з філософії, історії, методології і викладання математики, статичної фізики.

«Як і будь-яка наука, математика потребує перш за все надійного знання того, що вже було зроблено з досліджуваного питання. Однак не варто думати, що в математиці складніше, ніж в інших науках, зробити щось нове. Досвід говорить про протилежне: здібні математики зазвичай починають самостійні наукові дослідження дуже рано. Якщо математичні відкриття, які було зроблено в 16- або 17-річному віці, є все ж винятками, що з особливою ретельністю зібрані в популярних книжках з історії математики, то початок серйозної наукової роботи в 19—20 років на середніх курсах університетів досить типово для біографій багатьох наших вчених» [1].

Володимир Ігорович Арнольд (12 червня 1937, Одеса — 3 червня 2010, Париж) — радянський і російський математик, автор праць в галузі топології, теорії диференціальних рівнянь, теорії особливостей гладких відображень і теоретичної механіки. Один з найвидатніших математиків XX століття.

Автор багатьох статей про роль і місце математики і математичної освіти в сучасному світі.

Андрей Николаевич Колмогоров
(к 85-летию со дня рождения)

В. И. Арнольд

Андрей Николаевич Колмогоров прожил большую и счастливую жизнь. Колмогоров — Пуанкаре — Гаусс — Эйлер — Ньютон: всего пять таких жизней отделяют нас от истоков нашей науки.

Пушкин сказал как-то, что он оказал на юношество и российскую словесность больше влияния, чем всё министерство народного образования, несмотря на полное неравенство средств. Таким же было влияние Колмогорова на математику.

Я познакомился с Андреем Николаевичем в студенческие годы. Тогда он был деканом мехмата. Это были годы расцвета факультета, годы расцвета математики. Уровня, который достиг тогда факультет, благодаря, прежде всего А. Н. Колмогорову и И. Г. Петровскому, он более никогда не достигал и вряд ли когда достигнет.

Андрей Николаевич был замечательным деканом. Он говорил, что надо прощать талантливым людям их талантливость, и спас не одного из известных сейчас математиков от исключения из университета.

Снимая буйных студентов со стипендии, этот декан сам же помогал им пережить трудное время. От других известных мне профессоров Андрея Николаевича отличало полное уважение к личности студента. Он всегда ожидал услышать от студента что-то новое, неожиданное и в высшей степени обладал той заразительной увлеченностью наукой, которая, прежде всего и нужна студентам: «Действительно хорошо преподавать математику,— говорил Андрей Николаевич,— может только человек, который сам ею увлечен и воспринимает ее как живую, развивающуюся науку». Менее всего заботясь о формальном совершенстве своих лекций, Андрей Николаевич был замечательным учителем. Мне кажется, он руководствовался в своем преподавании принципами, которые сформулировал Эйнштейн: «Кажется почти чудом, что современные методы обучения ещё не совсем удушили святую любознательность, ибо это нежное растение требует, наряду со свободой, прежде всего, поощрения. Большая ошибка думать, что чувство долга и принуждение способствуют тому, чтобы находить радость в том, чтобы искать и узнавать. Здоровое хищное животное отказалось бы от пищи, если бы ударами бича его заставляли непрерывно есть мясо, особенно если принудительно предлагаемая еда не им выбрана...».

В наш век больших научных коллективов кажется, что пора крупных индивидуальных достижений в науке ушла в прошлое. Для Андрея Николаевича характерны, однако, крупные достижения.

В развитии каждой области науки можно различить три стадии:

1-я — пионерская: прорыв в новую область, яркое и обычно неожиданное открытие, часто опровергающее сложившиеся представления.

Затем следует техническая стадия, длительная и трудоемкая; теория обрастает деталями, становится труднодоступной и громоздкой, но зато охватывает все большее число приложений.

Наконец, в 3-й стадии появляется новый, более общий взгляд на проблему и на ее связи с другими, по-видимому, более далекими от нее вопросами; делается возможным прорыв в новую область исследования.

Для математических работ Андрея Николаевича Колмогорова характерно то, что он являлся пионером и первооткрывателем во многих областях математики: ему принадлежат яркие достижения в теории вероятностей, теории функций, функциональном анализе, топологии, теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, теории турбулентного движения жидкости и т. д. Трудно указать область математического анализа, в которой Андрей Николаевич Колмогоров не сделал бы существенного вклада, где бы он не решил старых (порой двухсотлетних) проблем.

Первую свою знаменитую работу (пример расходящегося почти всюду ряда Фурье суммируемой функции) Андрей Николаевич выпустил в 19 лет (в качестве курьеза упомяну, что Фреше говорил мне в 1965 г.: «О, Колмогоров! Это тот замечательный молодой человек, который построил почти всюду расходящийся ряд Фурье!» — для Фреше все работы Колмогорова по теории вероятностей, динамическим системам, турбулентности имели меньшую цену, чем эта студенческая работа). Сам Андрей Николаевич всегда высоко ценил спортивно-математические достижения и этой первой работой гордился, но самым трудным своим спортивным достижением считал работу о 13-й проблеме Гильберта.

Технических усовершенствований и обобщений построенной теории Андрей Николаевич обычно старался избегать. Зато на 3-й стадии работы, когда нужно осмыслить полученные результаты и увидеть новые пути, на стадии создания фундаментальных обобщений теории, Андрею Николаевичу принадлежат замечательные достижения. Среди более чем трехсот опубликованных статей имеются исследования по механике, геологии, биологии, кристаллизации металлов, теории стрельбы, теории стихосложения, теории передачи информации, теории автоматов и т. д.

В самой математике Андрей Николаевич всегда старался выбирать такие проблемы, решение которых приближает нас к познанию природы и к овладению ее силами. Сам он говорил о своей прикладной деятельности так: «Занимаясь с некоторым успехом, а иногда и с пользой, довольно широким кругом практических приложений математики, я остаюсь в основном чистым математиком. Восхищаясь математиками, которые превратились в больших представителей нашей техники, вполне оценивая значение для будущего человека вычислительных машин и кибернетики, я все же думаю, что чистая математика в ее традиционном аспекте ещё не потеряла своего законного почетного места среди других наук. Гибельным могло бы для нее оказаться только чрезмерно резкое расслоение математиков на два течения: одни

культивируют абстрактные новейшие отделы математики, не ориентируясь отчетливо в их связях с породившим их реальным миром, другие заняты «приложениями», не восходя до исчерпывающего анализа их теоретических основ... Мне хочется подчеркнуть законность и достоинство позиции математика, понимающего место и роль своей науки в развитии естественных наук, техники, да и всей человеческой культуры, способного развить свою собственную науку в соответствии с этими общими потребностями».

Эти слова Андрея Николаевича о законности и достоинстве позиции математика, вынесенные в 1963 г. на обложку посвященного ему номера «Огонька», — его кредо и научное завещание.

Актуальность его мыслей и предостережений становится с каждым годом всё очевидней по мере того, как сбывается предсказание Лагранжа: «Места по математике в Академии Наук сделаются тем, чем уже стали кафедры арабского языка в университетах...».

Професор В. М. Тихомиров (учень Колмогорова) спробував порівняти біографії Гільберта і Колмогорова.

Але про це же в наступній статті.

Серед інших праць В. І. Арнольда, які присвячені науковій і педагогічній діяльності А. М. Колмогорова, можна також прочитати [2] та [3].

Список літератури

1. Колмогоров А. Н. О профессии математика / А. Н. Колмогоров. — 3-е изд., дополненное. — М. : Изд-во Московского университета, 1960. — 32 с.
2. Арнольд В. И. Новый обскурантизм и российское просвещение / В. И. Арнольд. — М.: ФАЗИС, 2003. — 60 с.
3. Арнольд В. И. О печальной судьбе «академических» учебников / В. И. Арнольд // Школьное обозрение. — 2002. — № 5.

ЗМІСТ

Секція III. Теорія ймовірностей та математична статистика

Kuzmin V. N. <i>On the two approaches to calculating the best linear regression</i>	12
Verovkina G. V. <i>The interpolation representation of some classes of random fields</i>	14
Zhurakovskiy B. M. <i>Periodogram estimations of scale parameter and amplitude of the almost periodic signal</i>	17
Авдеева Т. В., Ильичева Л. М. <i>К вопросу о несмещенности оценки при функции потерь, равной квадрату ошибки</i>	19
Блажівська І. П. <i>Конзистентність корелограмної оцінки перехідної функції лінійної системи з внутрішнім шумом</i>	21
Гаврилів О. С. <i>Про варіації внутрі області в абстрактному вінерівському просторі</i>	22
Гончаренко Я. В., Дивляш Н. В. <i>Задачі математичної статистики для одного класу сингулярних розподілів салемівського типу</i>	24
Дьогтева І. О. <i>Побудова моделі марковського процесу за заданою функцією надійності</i>	28
Зражевська Н. Г. <i>Дослідження на сильну залежність фінансових рядів, що описують індекси фондових ринків</i>	30
Іванов О. В., Орловський І. В. <i>Асимптотична поведінка М-оцінок параметрів нелінійної регресії із сингулярним спектром</i>	31
Ільєнко М. К. <i>Уточнення умов збіжності майже напевно рядів багатовимірних регресійних послідовностей</i>	32
Ільченко О. В., Шовкопляс Т. В. <i>Про єдиність узагальненого розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь у частинних похідних параболічного типу з випередженням</i>	34
Коломієць Т. Ю. <i>Розподіл одновимірного блукання частинки в ерлангівському середовищі 3-го порядку</i>	37
Кривулина Э. Ф., Хучраева Т. С., Шляхов С. М. <i>Вероятностный метод оценки надежности стойки по устойчивости на основе теории стационарных случайных процессов</i>	39
Лапач С. М. <i>Застосування непараметричної регресії при наявності викидів</i>	43
Луз М. М., Моклячук М. П. <i>Мінімаксна фільтрація процесів зі стаціонарними приростами у випадку стаціонарного шуму</i>	46
Москвичова К. К. <i>Про асимптотичні розклади моментів оцінки коваріаційної функції випадкового шуму</i>	51
Павленков В. В. <i>Властивість правильної зміни унітарних лінійних операторів</i>	53
Приймак М. В., Маєвський О. В., Мацюк О. В., Шимчук Г. В. <i>Інтервальні рекурентні потоки та їх класифікація</i>	55
Присяжная М. В. <i>Метод беспризнакового распознавания с использованием эллипсов Петунина</i>	60
Приходько В. В. <i>Про асимптотичну нормальність оцінки мінімального контрасту параметра спектральної щільності шуму в моделі регресії</i>	64

Приходько О. Д. Асимптотична поведінка інтегрального функціоналу від розв'язку стохастичного диференціального рівняння.....	66
Прохоренко Н. В. Розподіл максимуму поля ченцова по кривим і його зв'язок з інтегральними рівняннями Парка — Параньяна	70
Радченко С. Г. Технология RASTA в регрессионном анализе	72
Савич І. М. Про μ -припустимість спектральної щільності сильно залежного випадкового шуму нелінійних моделях регресії.....	74
Тимошенко О. А. Поведінка розв'язків неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь на нескінченності.....	78
Тупко О. С. Порівняльний аналіз методів формування інвестиційного портфелю цінних паперів.....	79
Фіжук Р. В. Про обчислення граничних коваріацій М-оцінок параметрів регресії.....	83
Філонов Ю. П., Шутовський О. М. Функціонал від однорідного загального марківського ланцюга та межа неергодичності.....	84

Секція IV. Історія та методика математики

Zhivkov A. P., Flaks M. L. Static magnetic field and fine structure constant in Electrodynamics.....	88
Авраменко Л. Г. Элементы функционального анализа в курсе высшей математики. Сходимость по норме.....	91
Алексеева І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Дудко А. Ф., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. Аналіз якості комп'ютерних тестів методами класичної теорії тестів	94
Антонов В. М., Антонова-Рафі Ю. В. Гендерні особливості при акме-вивченні (викладанні) математики	98
Антонов В. М. Кібернетично-математичний праксіологічно-акмеологічний підхід до вивчення (викладання) математики.....	102
Антонов В. М. Фрактально-акмеологічна гносеологічна концепція при вивченні (викладанні) математики	106
Апостол М. В. Внесок А. О. Сапєгіна у започаткування та викладання математичних курсів Для сільськогосподарських освітніх закладів	110
Барановська Л. В., Барановська Г. Г. Про створення дистанційних курсів у системі MOODLE	120
Березовський В. Є., Лещенко С. В., Ненька Р. В. Про площу плоскої фігури та число π	114
Березовський В. Є., Ненька Р. В., Лещенко С. В. Про теорему косинусів.....	117
Бохонова Т., Тихонова В., Томашук О., Лещинський О., Гроза В. Представлення знань семантичними мережами в процесі реалізації фрейм-підходу викладання математичних дисциплін студентам комп'ютерно-орієнтовних спеціальностей ВНЗ I—II рівнів акредитації.....	118
Буковська О. І. Про деякі особливості формування творчої особистості при вивченні математики	112
Виврот Т. М. Микола Павлович Хоменко	126

Гнепа О. В. <i>Шляхи вдосконалення професійної підготовки майбутніх вчителів математики</i>	128
Горбачук В. О. <i>Використання лабораторно-пактичного заняття як ефективної форми організації навчального процесу при вивченні математичної статистики</i>	132
Гриценко Г. Ю. <i>Великі піраміди, великий сфінкс та храми Гізи. Антропо-астрономічний комплекс. Математика, астрономія, світогляд</i>	135
Гриценко Г. Ю. <i>Геометричні археоастрономічні об'єкти Північної Америки. Математика, астрономія, світогляд</i>	143
Губаль Г. М. <i>Деякі аспекти побудови інтерактивних математичних тестів у системі LATEX</i>	146
Дем'яненко О. О. <i>Про деякі аспекти підвищення математичної культури у студентів технічних спеціальностей</i>	149
Дяченко Г., Казак П., Барінова К. <i>Про поліноми Кравчука</i>	151
Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Мельник І. Ю. <i>Восьмий рейтинг вузів України у проекті «ТОП 200 УКРАЇНА»</i>	154
Задорожня Т. М. <i>Відродження надбання української нації через правду історії</i>	158
Зелепугіна І. М. <i>Про проблеми викладання вищої математики в технічних університетах на сучасному етапі</i>	161
Ігнатович В. М. <i>Роль академії наук вищої школи України в появі книги «Парадокс Гіббса з точки зрення математика»</i>	163
Казнадій С. П., Мурашківська В. П., Руновська Л. А. <i>Про застосування інформаційних технологій під час викладання вищої математики в технічному ВНЗ</i>	167
Кайдан Н. В., Пашенко З. Д., Рябухо О. М., Стьопкін А. В., Турка Т. В. <i>Узагальнення досвіду роботи з впровадження сучасного програмного забезпечення в навчальний процес у ДВНЗ «ДДПУ»</i>	169
Калайда О. Ф. <i>Як викладати тему «Теореми про середнє для неперервних та диференційовних функцій»</i>	172
Калайда О. Ф. <i>Про загальний метод побудови формул суми степенів членів послідовностей многочленного типу з заданим розподілом натурального аргумента</i>	177
Калайда О. Ф. <i>Просте доведення формули для визначника Вандермонда та наслідок з нього</i>	178
Карупу О. В., Олешко Т. А., Пахненко В. В. <i>Про викладання математичного аналізу іноземним студентам в національному авіаційному університеті</i>	180
Качанюк С. С. <i>Олександр Степанович Смогоржевський</i>	183
Кашук Ш. <i>Створення RESTFul додатку для тестування студентів на базі .NET Framework</i>	186
Клімова Т. І., Сапронова Т. М. <i>Проблемне навчання як дієвий метод на шляху до осучаснення викладання вищої математики</i>	188
Крижановська Т. В., Клецька Т. С., Семененко Т. М. <i>Анімація обчислювальних експериментів в EXCEL</i>	191
Лагодзінський О. Є. <i>Доведення теореми Піфагора через подібність трикутників</i>	193

Маловичко Т. В. <i>О недостатках тестовой системы оценивания</i>	196
Маловичко Т. В. <i>О пользе коллоквиума для физико-математических специальностей вузов</i>	198
Маляр О. В. <i>Чудові властивості логарифмічної спіралі</i>	200
Назиев А. Х. <i>Что такое корни квадратного трёхчлена?</i>	205
Налева Г. В., Литвин О. В. <i>Формування професійної компетентності магістрів морського профілю при навчанні математичному моделюванню</i>	210
Орлова Н. Д., Петропавловська Г. О. <i>Білінгвальні прийоми при навчанні іноземців вищій математиці</i>	214
Острійчук К. Р. <i>Найвизначніші доведення теореми Піфагора</i>	217
Парчук М. І. <i>Використання парадоксів теорії ймовірностей в навчанні студентів фізичних спеціальностей</i>	221
Пасічник І. В., Щербина І. В., Бас Т. П. <i>Застосування математичних методів у професійній підготовці майбутнього фахівця ливарного виробництва</i>	224
Поєдинок М. С. <i>Упровадження математичної статистики до програм сільськогосподарських вищих навчальних закладів (перша половина ХХ ст.)</i>	288
Попова Л. С., Харитоновна М. О. <i>Особенности методики викладання вищої математики слабочуючим студентам</i>	230
Репета В. К., Репета Л. А. <i>Деякі нестандартні застосування комплексних чисел до розв'язання завдань з вищої математики</i>	232
Ругалева И. Е. <i>Чудо из Кумбаконама</i>	235
Савонюк О. В. <i>Метод аналогії як засіб організації внутрішньопредметних зв'язків у навчання математики у профільній старшій школі</i>	239
Сдвижкова Е. А., Бугрим О. В. <i>Использование некоторых педагогических технологий в курсе высшей математики</i>	243
Сівков О., Гайдей В. <i>Яків Чепіга як автор підручників з математики (за матеріалами фондів Педагогічного музею України)</i>	246
Соколенко Л. О. <i>Роль курсу за вибором «Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої» у професійній підготовці вчителя</i>	249
Сушко О. С. <i>Пропедевтика вивчення фінансової математики в шкільному курсі математики</i>	253
Хамедова Н. А. <i>От евклидовой геометрии до топологии</i>	257
Чуйко С. М., Білоусова К. К., Яблочанська Е. Є. <i>Видатний популяризатор фізики на Донеччині Борис Тадейович Єрицпохов</i>	260
Шинковська І. Л., Заєць І. П. <i>Організація самостійної роботи з вищої математики для іноземних студентів технічних спеціальностей</i>	262
Юринок В. И., Яцкевич Т. С., Раевская Л. А. <i>Организация самостоятельной работы студента по математике и модульно-рейтинговая система оценки знаний</i>	264
Буценко Ю. П., Греков Н. С., Савченко Ю. Г. <i>Статистичний аналіз як метод виявлення прихованих повідомлень в контейнерах аудіо-формату</i>	268
Ординська З. П., Гайдей В. О. <i>Із спогадів видатного учня про свого вчителя</i>	271

Інститут математики НАН України
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова
Національний технічний університет України «КПІ»

**ШІСТНАДЦЯТА
МІЖНАРОДНА
НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ
ІМЕНІ АКАДЕМІКА
МИХАЙЛА КРАВЧУКА**
14–15 травня 2015 р., Київ

**МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ
III**

Теорія ймовірностей та математична статистика.
Історія та методика математики

Підписано до друку 28.04.2015.
Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 17

Зам. № . Наклад 100 примірників.
Видавництво ТОВ «Спринт-Сервіс»
Свідоцтво: Серія ДК № 4365 від 17.07.2012
м. Київ-70, вул. Почайнинська, 28-б