

Інститут математики НАН України  
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка  
Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова  
Національний технічний університет України «КПІ»

СІМНАДЦЯТА  
МІЖНАРОДНА  
НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ  
ІМЕНІ АКАДЕМІКА  
МИХАЙЛА КРАВЧУКА

*19–20 травня 2016 р., Київ*

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ

I

Диференціальні та інтегральні рівняння,  
їх застосування

Київ — 2016

**Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Ukraine  
Taras Shevchenko National University of Kyiv  
National Pedagogical Drahomanov University  
National Technical University of Ukraine «KPI»**

**SEVENTEENTH  
INTERNATIONAL  
SCIENTIFIC  
MYKHAILO KRAVCHUK  
CONFERENCE**

*19–20 May, 2016, Kyiv*

**CONFERENCE MATERIALS  
I  
Differential and integral equations and its applications**

**Kyiv — 2016**

Институт математики НАН Украины  
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка  
Национальный педагогический университет им. М. Драгоманова  
Национальный технический университет Украины «КПИ»

СЕМНАДЦАТАЯ  
МЕЖДУНАРОДНАЯ  
НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА  
МИХАИЛА КРАВЧУКА

*19–20 мая 2016 г., Киев*

МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ

I

Дифференциальные и интегральные уравнения,  
их применение

Киев — 2016

**УДК 517.9(06)**  
**ББК 22.161.6я43**

Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19—20 травня, 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. — Київ: НТУУ «КПІ», 2016. — 304 с. — Укр., англ., рос.

Seventeenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, May 19–20, 2015, Kyiv: Conference materials. Vol. 1. Differential and integral equations and its applications. — Kyiv: NTUU «KPI», 2016. — 304 p.

Семнадцатая международная научная конференция им. акад. Михаила Кравчука, 19–20 мая, 2016 г., Киев: Материалы конф. Т. 1. Дифференциальные и интегральные уравнения, их применение. — Киев: НТУУ «КПИ», 2016. — 304 с.

**ISBN 978-617-7021-42-0**

**ISBN 978-617-7021-42-0**

©Автори

©НТУУ «КПІ», 2016



Академік Всеукраїнської академії наук  
Academician of All-Ukrainian Academy of Sciences  
Академик Всеукраинской академии наук

*Михайло Кравчук*  
*Mykhailo Kravchuk*  
*Михаил Кравчук*

1892—1942

## **XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука**

### ***Програмний комітет***

Акад. НАН України *М. Згуровський* (Україна)  
Проф. *Н. Вірченко* (Україна)  
(співголови)  
Доц. *В. Гайдей* (Україна)  
(заступник голови)  
Акад. НАН України *Ю. Якименко* (Україна)  
Акад. НАН України *М. Льченко* (Україна)  
Проф. *В. Ванін* (Україна)  
Акад. НАН України *А. Самойленко* (Україна)  
Акад. НАН України *Я. Яциків* (Україна)  
Акад. НАН України *М. Перестюк* (Україна)  
Проф. *М. Городній* (Україна)  
Проф. *М. Працьовитий* (Україна)  
Проф. *І. Парасюк* (Україна)  
Чл.-кор. НАН України *М. Горбачук* (Україна)  
Проф. *Р. Андрушків* (США)

### ***Організаційний комітет***

Акад. НАН України *М. Згуровський* (Україна)  
Проф. *Н. Вірченко* (Україна)  
(співголови)  
Доц. *В. Гайдей* (Україна)  
(заступник голови)  
Проф. *О. Клесов* (Україна)  
Проф. *С. Івасишен* (Україна)  
Проф. *М. Дудкін* (Україна)  
Проф. *О. Іванов* (Україна)  
Доц. *І. Алексєєва* (Україна)  
Доц. *О. Диховичний* (Україна)  
Доц. *Л. Федорова* (Україна)

## Sixteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference

### *Programme Committee*

Acad. NASU *M. Zgurovsky* (Ukraine)  
Prof. *N. Virchenko* (Ukraine)  
(Co-Chairs)  
Ass. Prof. *V. Haidey* (Ukraine) (Deputy Chair)  
Acad. NASU *Yu. Yakymenko* (Ukraine)  
Acad. NASU *M. Ilchenko* (Ukraine)  
Prof. *V. Vanin* (Ukraine)  
Acad. NASU *A. Samoilenko* (Ukraine)  
Acad. NASU *Ya. Yatskiv* (Ukraine)  
Acad. NASU *M. Perestiuk* (Ukraine)  
Prof. *M. Horodniy* (Ukraine)  
Prof. *M. Pratsiovytyi* (Ukraine)  
Prof. *I. Parasiuk* (Ukraine)  
Corr. Member NASU *M. Horbachuk* (Ukraine)  
Prof. *R. Andrushkiw* (USA)

### *Organizing Committee*

Acad. NASU *M. Zgurovsky* (Ukraine)  
Prof. *N. Virchenko* (Ukraine)  
(Co-Chairs)  
Ass. Prof. *V. Haidey* (Ukraine) (Deputy Chair)  
Prof. *O. Klesov* (Ukraine)  
Prof. *S. Ivashyshen* (Ukraine)  
Prof. *M. Dudkin* (Ukraine)  
Prof. *O. Ivanov* (Ukraine)  
Ass. Prof. *I. Alyeksyeyeva* (Ukraine)  
Ass. Prof. *O. Dykhovychnyi* (Ukraine)  
Ass. Prof. *L. Fedorova* (Ukraine)

## **XVI Международная научная конференция им. акад. Михаила Кравчука**

### ***Программный комитет***

Акад. НАН Украины *М. Згуровский* (Украина)  
Проф. *Н. Вирченко* (Украина)  
(сопредседатели)  
Доц. *В. Гайдей* (Украина)  
(заместитель председателя)  
Акад. НАН Украины *Ю. Якименко* (Украина)  
Акад. НАН Украины *М. Ильченко* (Украина)  
Проф. *В. Ванин* (Украина)  
Акад. НАН Украины *А. Самойленко* (Украина)  
Акад. НАН Украины *Я. Яцкив* (Украина)  
Акад. НАН Украины *Н. Перестюк* (Украина)  
Проф. *Н. Городний* (Украина)  
Проф. *Н. Працевитый* (Украина)  
Проф. *И. Парасюк* (Украина)  
Чл.-кор. НАН Украины *М. Горбачук* (Украина)  
Проф. *Р. Андрушків* (США)

### ***Организационный комитет***

Акад. НАН Украины *М. Згуровский* (Украина)  
Проф. *Н. Вирченко* (Украина)  
(сопредседатели)  
Доц. *В. Гайдей* (Украина)  
(заместитель председателя)  
Проф. *О. Клесов* (Украина)  
Проф. *С. Ивасиен* (Украина)  
Проф. *Н. Дудкин* (Украина)  
Проф. *А. Иванов* (Украина)  
Доц. *И. Алексеева* (Украина)  
Доц. *А. Дыховичный* (Украина)  
Доц. *Л. Федорова* (Украина)



## УКРАЇНСЬКИЙ ВЧЕНИЙ СВІТОВОЇ СЛАВИ

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942) — найвизначніший український математик ХХ сторіччя, всесвітньо відомий вчений, громадський діяч, академік Всеукраїнської академії наук.

«... Майже жодне явище у створенні математичної науки в Україні не сталося без його участі,... ані закладалися **перші** українські школи в місті і по селах, **перші** курси, **перші українські університети** (народний і державний),..., ані утворювалася математична термінологія або наукова мова... — нічого цього не робилося без **найактивнішої участі Михайла Кравчука**» (так писалося в характеристиці на нього, надісланій до Всеукраїнської академії наук 1929 р. у зв'язку з висуненням його кандидатури в дійсні члени академії).

Наукові праці М. Кравчука з різних галузей математики (вищої алгебри та математичного аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії імовірностей та математичної статистики тощо) увійшли до скарбниці **світової Науки**. За його ідеями й відкриттями виразно проступала перспектива поглибленого розвитку й використання їх.

Вже давно існують на сторінках наукових досліджень і **многочлени Кравчука**, і **моменти Кравчука**, і **формули Кравчука**, і **осцилятори Кравчука**, а завдяки пошукам І. Качановського виявилось, що М. Кравчук стояв біля витоків **винаходу першого у світі електронного комп'ютера!**

Увесь свій короткий вік М. Кравчук працював невпинно й творчо на благо **Науки**, на благо **Освіти рідного народу**.

**«Моя любов — Україна і математика»** — таким було його життєве кредо.

Він справжній поет формул, математика для нього — це творчість, натхнення і радість. Він педагог за покликанням. Його лекції — це і сила, й безмірна глибочинь, і краса математичної думки. На його лекції ходили як на свято.

М. Кравчук викладав математичні предмети і в Київському університеті, і у політехнічному, авіаційному, архітектурному, ветеринарно-зоотехнічному, сільськогосподарському інститутах Києва. Він відкрив талант і дав путівку у світ відкриттів видатним конструкторам **Сергію Корольову** і **Архипу Люльці**.

Пам'ять про М. Кравчука живе у **серцях київських політехніків**, де він викладав вищу математику з 1921 р. і завідував кафедрою вищої математики (1934–1938 рр). КПП від 1992 р. вже провів 13 Міжнародних наукових конференцій ім. акад. М. Кравчука. Видано його «Науково-популярні праці», «Вибрані математичні праці», книгу «Розвиток математичних ідей Михайла Кравчука», відкрито **пам'ятник** М. Кравчуку (2003 р.), створено фільм «Голгофа академіка Кравчука» (2004 р.), названо його ім'ям одну з київських **вулиць** (2009 р.)

Життя цього видатного вченого-математика спалахнуло як блискучий болід і після арешту й засуду в терорному 1938 році приречено було згоріти через кілька літ у суворих колимських таборах.

Ім'я М. Кравчука повернулось в український науковий пантеон і є зразком для наслідування та продовження його досліджень у працях сучасних і прийдешніх науковців в **Україні й далеко поза Україною**.

## OUTSTANDING UKRAINIAN MATHEMATICIAN ACADEMICIAN M. KRAVCHUK (1892–1942)

*Mykhailo Kravchuk* made significant contributions to numerous branches of mathematics and the development of **mathematical education**. In 1929 Kravchuk was elected a full member of All-Ukrainian Academy of Sciences.

Kravchuk was the author of more than 180 scientific works, including 10 monographs, in a number of branches of mathematics (algebra and number theory, theory of functions of real and complex variable, theory of differential and integral equations, mathematical statistics and probability theory, history of mathematics, Ukrainian mathematical terminology etc.)

Let us point some fundamental lines of his research:

— investigations in the theory of permutation matrices, quadratic and bilinear forms, theory of algebraic and transcendental equations;

— the creation and mathematical proof of the general method of moments and its application to the approximate solution of ordinary linear differential equations, integral equations, equations of mathematical physics;

— introduction and use of polynomials associated with the binomial distribution, now known in the world mathematical literature as **Kravchuk's polynomials**;

— analysis of complex questions in philosophy, the history of mathematics and techniques.

Mykhailo Kravchuk never learned about the role that his sci. works played in the inventions of the first electronic computer. American scientist **John Atanasoff** (1903–1995) took a great interest in Kravchuk's sci. works when he investigated the problem of **making electronic computer**.

His selfless efforts for the sake of the **development of science in Ukraine**, extraordinary **talent as teacher and reputation among students and scientific community** could not go unnoticed by authority.

**In 1938** Kravchuk was arrested and accused of involvement in a host of typical counterrevolutionary activities — changes that were common in those years in USSR. In the same year he was sentenced to 20 years of confinement and 5 years of exile and transported to concentration camps in **Kolyma**. There in consequence of cold, undernourishment and illnesses he **was died in March 9, 1942**.

He was **rehabilitated** by soviet regime only **in 1956**. But only in 1992, almost 100 years after his birth, M. Kravchuk was readmitted to membership in **the National Academy of Sciences of Ukraine**. The same year his name was entered in the International Calendar of Scientists by UNESCO. The **First Kravchuk International Conference** was held at Kyiv Polytechnic Institute "KPI" in 1992. Since that time there were 13 such **conferences, three books** of M. Kravchuk's works were **published** in Kyiv:

"Popular scientific works" (2000).

"Selected mathematical works" (2002).

"Development of the Mathematical ideas of Mykhailo Kravchuk (Krawtchouk)".

On the 20<sup>th</sup> of May 2003 the NTUU "KPI" unveiled **a statue of M. Kravchuk**.

# NEW GENERALIZATION OF THE INTEGRAL TRANSFORMS

**M. Chetvertak**

*NTUU “Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine*

[Chetvertakmaria.math@gmail.com](mailto:Chetvertakmaria.math@gmail.com)

Each mathematician or engineer who practically works with differential equations is familiar with special functions. Special functions appear under solving some boundary value problems of mathematical physics, in investigation of series, etc. (Bateman & Erdelyi, 1953; Mathai & Haubold, 2008).

The hypergeometric functions and their special and degenerated cases (the Bessel and Legendre functions, classical orthogonal polynomials such as Laguerre, Jacobi, Hermite polynomials etc.) play an increasing part in various sections of pure and applied mathematics.

In this paper the new generalized Fourier’ and Stieltjes’ integral transforms are introduced.

The new generalized integral transforms are introducing by help of the generalized confluent hypergeometric function  ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; z)$  (Virchenko, 2006):

$${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; z) = \frac{1}{B(a, c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} {}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (a; \tau) \\ (c; \beta) \end{matrix} \middle| zt^\tau \right] dt, \quad (1)$$

where  $\{\tau, \beta\} \subset \mathbb{R}, \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0, \tau > 0, \tau - \beta < 1, B(a, c)$  is the classic beta-function, and  ${}_1\Psi_1[\dots]$  is a special case of the generalized hypergeometric the Fox-Wright function (Bateman & Erdelyi, 1953):

$${}_p\Psi_q \left[ \begin{matrix} (a_i; \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j; \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + n\alpha_i)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + n\beta_j)} \frac{z^n}{n!}, \quad (2)$$

here  $z \in \mathbb{C}, a_i, b_j \in \mathbb{C}, \{\alpha_i, \beta_j\} \subset \mathbb{R}; (a_i, b_j \neq 0, i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, q),$

$$1 + \sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{i=1}^p \alpha_i \geq 0.$$

Let us notice as  $\tau = \beta = 0$  in (1) that we have the classical confluent hypergeometric function  ${}_1\Phi_1(a; c; z)$  (Bateman & Erdelyi, 1953).

## 1. The generalized Fourier’ integral transform:

$$F\{f(x; \alpha)\} = \tilde{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -r(\alpha x)) dx, \quad (3)$$

where  $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0, \{\tau, \beta\} \subset \mathbb{R}, \tau - \beta < 1, r > 0, {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(\dots)$  is  $(\tau, \beta)$ -confluent hypergeometric function of form (1).

As  $\tau = \beta = 1, r = 0$  (3) gives the classical Fourier' integral transform (Erdélyi & Bateman, 1954).

2. *The generalized Stieltjes' integral transform:*

$$\begin{aligned} & P_1^{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4} \{f(\omega); x\} = \\ & = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^\infty \frac{\omega^{\gamma_2} f(\omega)}{(x^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_1})^{\gamma_3}} {}_2\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (a_1; \tau); (a_2; \gamma) \\ (c; \beta) \end{matrix} \middle| -r \left( \frac{\omega^{\gamma_1}}{x^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_1}} \right)^{\gamma_4} \right] d\omega, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P_2^{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4} \{f(\omega); x\} = \\ & = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^\infty \frac{\omega^{\gamma_2} f(\omega)}{(x^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_1})^{\gamma_3}} {}_2\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (a_1; \tau); (a_2; \gamma) \\ (c; \beta) \end{matrix} \middle| -r \left( \frac{x^{\gamma_1}}{x^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_1}} \right)^{\gamma_4} \right] d\omega, \quad (5) \end{aligned}$$

where  $\operatorname{Re} a_1 > 0, \operatorname{Re} a_2 > 0, \operatorname{Re} c > 0, \gamma_i > 0, i = \overline{1, 4}; \{\tau, \beta\} \subset \mathbb{R}; \tau > 0;$   
 $\tau - \beta < 1; r \geq 0, {}_1\Psi_2(\dots)$  is the function of the form (2).

As  $r = 0, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = p$  the integral transforms (4), (5) coincide with the classical Stieltjes integral transforms

$$S_p \{f(x); y\} = \int_0^\infty \frac{f(x)}{(x + y)^p} dx. \quad (6)$$

## References

- Bateman, H., & Erdelyi, A. (1953). *Higher transcendental functions* (Vol. 1.). New York: McGraw-Hill.
- Mathai, A. M., & Haubold, H. J. (2008). *Special functions for applied scientists*. New York: Springer.
- Virchenko, N. (2006). On the generalized confluent hypergeometric function and its application. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 9 (2), 101–108.
- Erdélyi, A., & Bateman, H. (1954). *Tables of Integral Transforms: Based in Part on Notes Left by Harry Bateman and Compiled by the Staff of the Bateman Manuscript Project*. McGraw-Hill.

# EXACT AND NUMERICAL SOLUTION OF THE FLAT ELECTRODYNAMIC BOUNDARY VALUE PROBLEM

I. Yu. Dmitrieva, N. M. Balan

A. S. Popov Odessa National Academy of Telecommunications, Odessa, Ukraine

[irina.dm@mail.ru](mailto:irina.dm@mail.ru), [balan.n@mail.ru](mailto:balan.n@mail.ru)

The specific case of differential Maxwell equations in the Cartesian coordinate system is considered as the basic mathematical model of electromagnetic wave propagation in the flat isotropic homogeneous slow-guided structures Silin (1966). The latter are metallic, not having either magnetics ( $\mu = \mu_a = 12,56 \cdot 10^{-7}$  H/m) or dielectrics ( $\varepsilon = \varepsilon_a = 8,85 \cdot 10^{-12}$  F/m), or charges  $\vec{i} = \vec{i}(x, y, z, t)$  inside. The last restriction implies the zero value as for  $\vec{i} = 0$ , as for the charge density  $\rho(x, y, z, t) = 0$ . Moreover, perfect conductivity  $\sigma = \infty$  means that the metal is the ideal conductor. Electromagnetic field vector intensities  $\vec{E}, \vec{H} = \vec{E}, \vec{H}(x, y, z, t)$  are harmonic regarding the time argument  $t$ , i.e.  $\vec{E}, \vec{H} = \vec{E}, \vec{H}(x, y, z) \exp(i\omega t)$ , where  $i = \sqrt{-1}$  and  $\omega$  is the vibration frequency. Therefore, the aforesaid differential Maxwell system looks like

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\varepsilon_a \omega \vec{E} \\ \text{rot } \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -i\mu_a \omega \vec{H} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{rot } \vec{E} + i\mu_a \omega \vec{H} = 0 \\ i\varepsilon_a \omega \vec{E} - \text{rot } \vec{H} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

In (1), all symbols are explained earlier, and  $\varepsilon_a, \mu_a$  are absolute electric, magnetic permeability of the medium that is accepted here as an air.

At the beginning of Silin (1966), the authors declared analytical study of (1). Unfortunately, it was not proposed, though in reality such research appears almost obvious. That is why here, we suggest as the explicit solution of (1), as of the corresponding boundary value problem. The latter mathematically describes electromagnetic field behavior in the flat rectangular resonator. The importance of such devices in technical electrodynamics is well-known Pimenov (2002). Moreover, in spite of the venerable age of Silin (1966), the ideas and goals of this monograph deserve to be attained even now.

Additionally, numerical implementation of the above mentioned boundary value problem is done in the present article too.

Returning to (1) and using results of Vorobiyenko (2015), the given system is quickly reduced to the general wave equation with respect to all scalar components of the electromagnetic field vector intensities

$$\left(\Delta + \varepsilon_a \mu_a \omega^2\right) F_{kj} = 0;$$

$$F_{1j} = E_j = E_j(x, y, z), \quad F_{2j} = H_j = H_j(x, y, z), \quad \left(j = \overline{1, 3}\right), \quad (2)$$

where  $\Delta = \sum_{j=1}^3 \partial_j^2$  is the classical Laplace operator and

$$\partial_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \partial_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \partial_3^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

The unified accurate development of (2) using integral transform method Tranter (1951) by all spatial variables  $(x, y, z)$  irrespectively of specific boundary conditions was fulfilled completely in Vorobiyenko (2015).

Turning now to electromagnetic field study in the flat rectangular resonator, we construct at first the relevant mathematical model in terms of the boundary problem for particular case of (2) over space  $(x, y)$ . Here,  $x \in [0, p]$ ,  $y \in [0, q]$ , the given functions  $g_{\dots}, h_{\dots}$

$$\begin{aligned} g_{1kj}(y) &= F_{kj}(0, y), \quad g_{2kj}(y) = F_{kj}(p, y); \quad h_{1kj}(x) = F_{kj}(x, 0), \\ h_{2kj}(x) &= F_{kj}(x, q), \quad (k, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (3)$$

in the boundary conditions (3) are continuous in the corresponding intervals and obey the expofunctional law.

Application of the finite integral Fourier sin-transform Tranter (1951) to (2), (3) by the spatial variables  $(x, y)$  gives the general unknown transform regarding  $F_{kj}(x, y)$ ,  $(k, j = 1, 2)$

$$\begin{aligned} {}_{tr}F_{kj} &= \frac{\frac{\pi n}{p} \left( {}_{tr}g_{1kj} + (-1)^{n+1} {}_{tr}g_{2kj} \right) + \frac{\pi m}{q} \left( {}_{tr}h_{1kj} + (-1)^{m+1} {}_{tr}h_{2kj} \right)}{\left( \frac{\pi}{p} n \right)^2 + \left( \frac{\pi}{q} m \right)^2 - \varepsilon_a \mu_a \omega^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

In (4) and everywhere further, the left lower index “tr” denotes operation of transformation with respective formulas of transforms

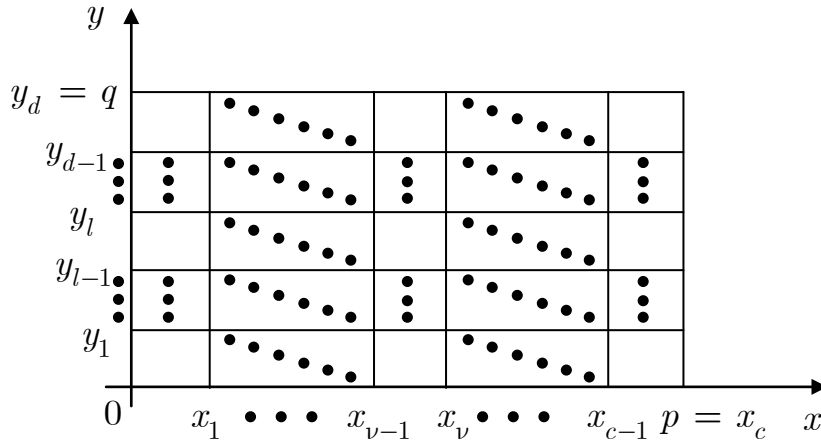
$$\begin{aligned} {}_{tr}F_{kj} &= \frac{pq}{\pi^2} \int_0^p \int_0^q F_{kj}(x, y) \sin\left(\frac{\pi n}{p} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{q} y\right) dx dy; \\ {}_{tr}g_{skj} &= \frac{q}{\pi} \int_0^q g_{skj}(y) \sin\left(\frac{\pi m}{q} y\right) dy, \quad {}_{tr}h_{skj} = \frac{p}{\pi} \int_0^p h_{skj}(x) \sin\left(\frac{\pi n}{p} x\right) dx, \quad (s, k, j = 1, 2). \end{aligned} \quad (5)$$

At last, influence of the inverse finite integral Fourier sin-transform Tranter (1951) upon (4) taking into account (5), leads to the desired exact expression uniting all scalar components of  $\vec{E}, \vec{H} = \vec{E}, \vec{H}(x, y)$

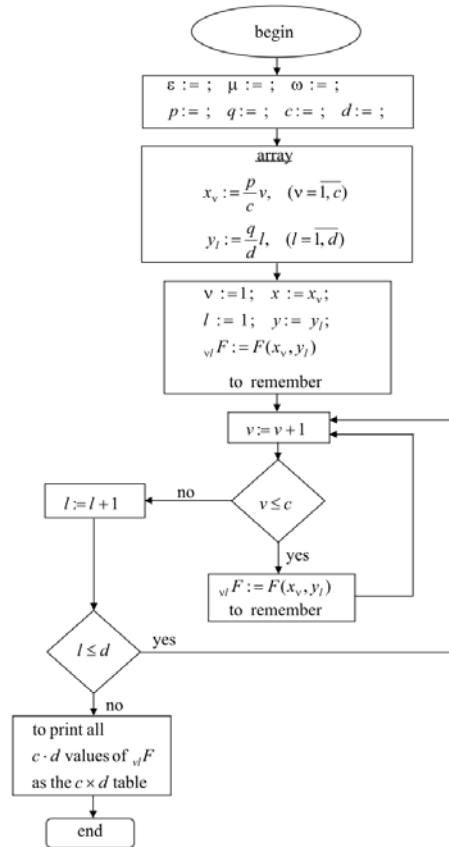
$$F_{kj}(x, y) = \left(\frac{2}{\pi^2}\right)^2 pq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} {}_{tr}F_{kj} \sin\left(\frac{\pi n}{p}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{q}y\right), \quad (k, j = 1, 2). \quad (6)$$

In (6), all symbols are from (2)–(5).

Further numerical implementation is done by the following discretization with the knots  $(x_\nu, y_l), (\nu = \overline{1, c}; l = \overline{1, d}); c, d \in \mathbb{N}$  and  $x_\nu = \frac{p}{c}\nu, y_l = \frac{q}{d}l$ .



The suggested below flow-chart is the base for the computer program investigating the electromagnetic field behavior, and several concluding pictures show the field deformation in the presence of microwave frequency.



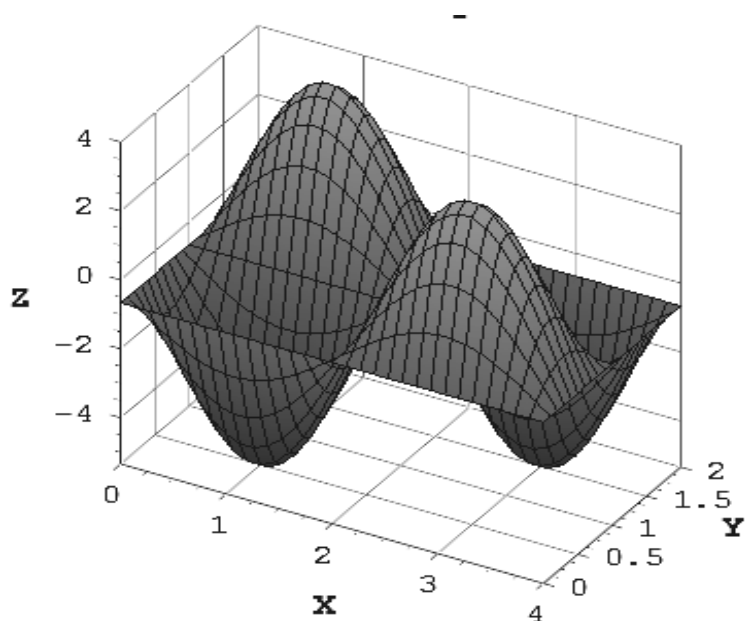


Fig. 1

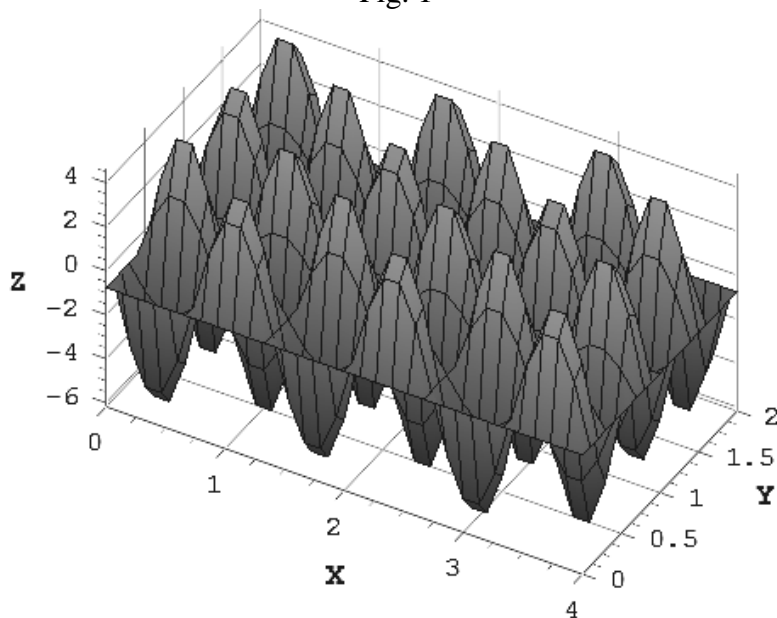


Fig. 2

### References

- Pimenov, Yu. V., Volman, V. I., & Muravtsov, A. D. (2002). *Technical electrodynamics*. Moscow: Radio i sviaz. (Russian).
- Silin, R. A., & Sazonov, V. P. (1966). *The slow-guided structures*. Moscow: Sovetskoe radio. (Russian).
- Tranter, C. J. (1951). *Integral Transforms in Mathematical Physics*. London: Methuen and Co. Ltd.; New York: John Wiley and Sons Inc.
- Vorobiyenko, P., Dmitrieva, I. (2015). Comparative analysis in study of classical differential Maxwell system for the slow-guided structures. *Hyperion Intl. J. of Econophysics*, 8 (2), 333–348.



# NONLOCAL PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF HIGHER ORDER

**P. I. Kalenyuk, Z. M. Nytrebych, I. V. Kohut, G. Kuduk**

*Lviv Polytechnic National University, Ukraine,*

*University of Rzeszow, Poland*

[pkalenyuk@gmail.com](mailto:pkalenyuk@gmail.com), [znytrebych@gmail.com](mailto:znytrebych@gmail.com),

[ikohutua@yahoo.com](mailto:ikohutua@yahoo.com), [gkuduk@onet.eu](mailto:gkuduk@onet.eu)

In the strip

$$\Omega = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, T), x \in \mathbb{R} \right\}, T > 0,$$

we consider the problem

$$\left[ \frac{\partial^n}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^n a_j \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^{n-j}}{\partial t^{n-j}} \right] U(t, x) = 0, \quad (1)$$

$$p_k \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k}{\partial t^k} U(t, x) \Big|_{t=0} + q_k \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k}{\partial t^k} U(t, x) \Big|_{t=T} = \varphi_k(x), \quad k = \overline{0, n-1},$$

(2)

in which

$$p_k \left( \frac{\partial}{\partial x} \right), q_k \left( \frac{\partial}{\partial x} \right), k = \overline{0, n-1},$$

are given differential polynomials,

$$a_j \left( \frac{\partial}{\partial x} \right), j = \overline{1, n},$$

are differential expressions with entire symbols  $a_j(\lambda)$ ,  $\varphi_k(x)$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ , are given functions.

We establish the unique solvability of problem (1), (2) in the class of entire functions under condition that the characteristic determinant of the problem is not zero and  $\varphi_k(x)$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ , are entire functions of certain orders. In our research, we use the approach proposed in Kalenyuk (2002).

## Reference

Kalenyuk, P. I., & Nytrebych, Z. M. (2002). *Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method*. Lviv: Publishing House of Lviv Polytechnic National University (in Ukrainian).

**PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS  
FOR HOMOGENEOUS PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS  
OF SECOND ORDER**

**G. Kuduk**

*Graduate of University of Rzeszow, Rzeszow, Poland*  
[gkuduk@onet.eu](mailto:gkuduk@onet.eu)

In the strip

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, T], x \in \mathbb{R}\}, T > 0,$$

we consider problem with integral conditions

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + a \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial t} + b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] U(t, x) = 0, \quad t \in (0, T), x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$\int_0^T U(t, x) dt = \phi_1(x), \quad \int_0^T t U(t, x) dt = \phi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

where

$$a \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial^i}{\partial x^i}, \quad b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial^i}{\partial x^i}$$

are differential expression with entire symbols  $a(\lambda) \neq const$ ,  $b(\lambda) \neq const$ .

$\phi_1(x), \phi_2(x) \in K_M$ , where  $K_M$  is a class of quasipolynomials

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n Q_j(x) e^{\alpha_j x}, \quad \alpha_j \in M \subset C, \text{ for } \alpha_j \neq \alpha_k, j \neq k.$$

Solution of the problem (1), (2) is represented according to the differential-symbol method (Kalenyuk & Nytrebych, 2002) in the form

$$U(t, x) = \phi_1 \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \left\{ M_0(t, \lambda) e^{\lambda x} \right\} \Big|_{\lambda=0} + \phi_2 \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \left\{ M_1(t, \lambda) e^{\lambda x} \right\} \Big|_{\lambda=0}.$$

$M_0(t, \lambda), M_1(t, \lambda)$  are solution of the problem

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + a(\lambda) \frac{d}{dt} + b(\lambda) \right] M_m(t, \lambda) = 0,$$

satisfies integral conditions

$$\int_0^T t^k M_m(t, x) dt = \delta_{km},$$

$\delta_{km}$   $m = 1, 2, k = 0, 1$  is the symbol Kronecker delta.

**Reference**

Kalenyuk, P. I. & Nytrebych, Z. M. (2002). *Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method*. Lviv: Publishing House of Lviv Polytechnic National University. (in Ukrainian).

# WEYL FUNCTION FOR ARBITRARY FRIEDRICHS' MODEL

I. Y. Lozynska-Perun

National University "Lviv Polytechnic", Lviv, Ukraine

[ivkaloz@gmail.com](mailto:ivkaloz@gmail.com)

The aim of the present paper is to determine the Weyl function for any Friedrichs' model when perturbation may be integral operator.

In our article, we also use well-known results from spectral theory (Levitan & Sargsjan, 1988; Naimark, 1969). In Gestezy, Weikard, and Zinchenko (2013) authors consider Weyl function in case of operator-valued potential. In paper Lozynska-Perun and Cheremnikh (2016) was considered branching of resolvent for Sturm—Liouville operator.

Let  $H = L^2_\rho(0, \infty)$ ,  $\rho(x) > 0$ . Suppose that interval  $[0, \infty)$  coincides with continuous spectrum of some operator

$$T : H \rightarrow H, \quad \overline{D(T)} = H.$$

Denote by  $T_\zeta = (T - \zeta)^{-1}$  the resolvent of operator  $T$ . Bilinear form of resolvent  $(T_\zeta \varphi, \psi)$  is analytic function if  $\zeta \notin [0, \infty)$ . Suppose that there exists linear space  $\Phi \subset H, \overline{\Phi} = H$ , such that form  $(T_\zeta \varphi, \psi)$ ,  $\varphi, \psi \in \Phi$  admits analytic prolongation  $(T_\zeta \varphi, \psi)_\pm$  over axis  $(0, \infty)$ . Suppose that  $T : \Phi \rightarrow \Phi$  and the multiplicity of continuous spectrum of  $T$  is  $m = 1$ . Denote

$$\Omega = \{\zeta : \text{dist}(\zeta, [0, \infty)) < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

We need two definitions: branching of resolvent and maximal operator (Lozynska-Perun & Cheremnikh, 2016). Denote by  $h_\zeta \in H$  for  $\zeta \in \Omega \setminus [0, \infty)$  analytic on  $\zeta$  element in  $H$ . Let  $a(\zeta)$ ,  $b(\zeta)$ ,  $r(\zeta)$  are some functionals in  $H$  (Lozynska-Perun & Cheremnikh, 2016) and  $B(\zeta) : \Phi \rightarrow \Phi$  is some operator.

**Definition 1.** We say that element  $h_\zeta$  separate the branching of resolvent  $T_\zeta$ ,  $\zeta \in \Omega \setminus [0, \infty)$  if

$$T_\zeta \varphi = (\varphi, b(\overline{\zeta}))h_\zeta + B(\zeta)\varphi, \quad \varphi \in \Phi, \quad \zeta \in \Omega \setminus [0, \infty), \quad (1)$$

where function  $(\varphi, b(\overline{\zeta}))$  and  $B(\zeta)\varphi$ ,  $\varphi \in \Phi$  are analytic in  $\Omega$ .

We say that scalar function  $M(\zeta)$ ,  $\zeta \in \Omega \setminus [0, \infty)$  separates the branching of  $h_\zeta$  if

$$(h_\zeta, \psi) = M(\zeta)(a(\zeta), \psi) + (r(\zeta), \psi), \quad \psi \in \Phi, \quad \zeta \in \Omega \setminus [0, \infty) \quad (2)$$

where function  $(a(\zeta), \psi)$  and  $(r(\zeta), \psi)$  are analytic in  $\Omega$  and  $M(\zeta)$  is defined up to a constant.

Some operator  $T_1 \supset T$  is called *extension* of  $T$ , if  $D(T) \subset D(T_1)$  and  $T_1\varphi = T\varphi$ ,  $\varphi \in D(T)$ .

The sense of the functionals  $a(\sigma)$ ,  $b(\sigma)$  is given by following Lemma.

**Lemma.** The functionals  $a(\sigma)$ ,  $(b(\sigma))$  in (1)–(2) are eigen functionals of operator  $T$ ,  $(T^*)$  corresponding to the point  $\sigma \in (0, \infty)$  of continuous spectrum.

**Definition 2.** An extension  $T_{\max} \supset T$  is called maximal operator for  $T$  if

1) For every elements  $\varphi \in \Phi$  and every value  $\sigma > 0$  there exists unique solution  $f_\sigma$  of the equation

$$(T_{\max} - \sigma)f_\sigma = \varphi, \quad \sigma > 0, \quad \varphi \in \Phi \quad (3)$$

and if  $f_\sigma \in \Phi$  too. We introduce the operator  $T_{\max, \sigma} : \Phi \rightarrow \Phi$  as follows

$$D(T_{\max, \sigma}) = \Phi, \quad T_{\max, \sigma}\varphi = (T_{\max} - \sigma)^{-1}\varphi = f_\sigma, \quad \sigma > 0. \quad (4)$$

2) Solution  $T_{\max, \sigma}\varphi$  admits analytic prolongation  $f_\zeta$  in the domain  $\Omega$  such that  $f_\zeta \in D(T_{\max})$  and  $(T_{\max} - \zeta)f_\zeta = \varphi$ ,  $\varphi \in \Phi$ . Denote  $T_{\max, \zeta}\varphi = f_\zeta$ , then

$$(T_{\max} - \zeta)T_{\max, \zeta}\varphi = \varphi, \quad \varphi \in \Phi, \quad \zeta \in \Omega. \quad (5)$$

We want obtain an analogy of branching when  $T$  is smooth perturbation of  $S$ , namely

$$T = S + V, \quad V = A^*B, \quad A, B : H \rightarrow G, \quad D(T) = D(S).$$

Here  $G$  is some Hilbert space,  $A, B$  are integral operators and  $R(A^*), R(B^*) \subset \Phi$ . Let  $\zeta \in \rho(T)$  and

$$h_\zeta = T_\zeta 1, \quad m(\zeta) = (T_\zeta 1, 1), \quad (6)$$

in addition, recall that

$$\left( \frac{1}{\tau + 1}, 1 \right) = -1,$$

(Lozynska-Perun & Cheremnikh, 2016).

The main result is

**Theorem.** Suppose that  $\hat{T} = T_{\max}$  satisfies conditions of Lemma 3 (Lozynska-Perun & Cheremnikh, 2016). Then the operator  $T_{\max} = S_{\max} + V$  (Lozynska-Perun & Cheremnikh, 2016) is maximal for the operator  $T = S + V$  and by analog of branching (1)–(2)

$$T_\zeta\varphi = (\varphi, b_\zeta)h_\zeta + T_{\max, \zeta}\varphi \quad (7)$$

$$(h_\zeta, \psi) = (a_\zeta, \psi)m(\zeta) + (R_\zeta, \psi), \quad (8)$$

where  $(a_\zeta, \psi)$ ,  $(\varphi, b_\zeta)$ ,  $(R_\zeta, \psi)$  for  $\zeta = \sigma \in (0, \infty)$  are eigen functionals respectively of the operators  $T$ ,  $T^*$ ,  $T_{\max}$  and as functions on  $\zeta$  they are analytic in the domain  $\Omega$ .

The eigen functionals  $a_\zeta$  and  $R_\zeta$  of  $T_{\max}$  satisfies the relation (8):

$$(a_\zeta, \psi)m(\zeta) + (R_\zeta, \psi) = (h_\zeta, \psi), \quad (9)$$

where  $h_\zeta \in H$  is eigenvector of  $T_{\max}$ .

**Definition 3.** Let linear combination of eigen functional  $a_\zeta$  of  $T$  and eigen functional  $R_\zeta$  of  $T_{\max}$  belong to  $H$ ,

$$a_\zeta \cdot m(\zeta) + R_\zeta \in H.$$

Then  $m(\zeta)$  is called *Weyl function for Friedrichs' model*  $T = S + V$ .

**Example.** Let  $A, B : H \rightarrow \mathbb{C}$ , where  $Bf = (f, \beta)$ ,  $Af = (f, \alpha)$ ,  $\alpha, \beta \in H$ . Let  $c \in \mathbb{C}$  so  $(Af, c)_\mathbb{C} = (f, \alpha)\bar{c} = (f, c\alpha) = (f, A^*c)$  where  $A^*c = c\alpha$  and by analogy  $B^*c = c\beta$ . Consider

$$Vf = A^*Bf = Bf \cdot \alpha = (f, \beta)\alpha.$$

Now

$$BS_\zeta A^*c = (S_\zeta A^*c, \beta) = c(S_\zeta \alpha, \beta).$$

Replace  $\beta$  by  $k\beta$ , where  $k \in \mathbb{C}$ , then

$$K(\zeta)c = c + BS_\zeta A^*c = c + ck(S_\zeta \alpha, \beta) = [1 + k(S_\zeta \alpha, \beta)]c,$$

and

$$K(\zeta)^{-1} = \frac{1}{1 + k(S_\zeta \alpha, \beta)}.$$

We have

$$\begin{aligned} T_\zeta \varphi &= S_\zeta \varphi - S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} BS_\zeta \varphi = S_\zeta \varphi - \frac{S_\zeta A^* BS_\zeta \varphi}{K(\zeta)} = \\ &= S_\zeta \varphi - \frac{(S_\zeta \varphi, k\beta) S_\zeta \alpha}{K(\zeta)} = S_\zeta \varphi - \frac{k(S_\zeta \varphi, \beta) S_\zeta \alpha}{1 + k(S_\zeta \alpha, \beta)}. \end{aligned}$$

Let us choose elements

$$\alpha = \frac{1}{1 + \tau} \in H \text{ and } \beta = \frac{1}{4 + \tau} \in H.$$

Therefore, we have:

$$K(\zeta) = 1 + k(S_\zeta \alpha, \beta) = 1 + k \int_0^\infty \frac{\sqrt{\tau} d\tau}{\pi(\tau - \zeta)(1 + \tau)(4 + \tau)}.$$

After the change of variables  $\sqrt{\tau} = u$  we obtain

$$\begin{aligned}
K(\zeta) &= 1 + \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2 du}{(u - \sqrt{\zeta})(u + \sqrt{\zeta})(1 + u^2)(4 + u^2)} = \\
&= 1 + \frac{k}{\pi} \cdot 2\pi i \left( \frac{u^2}{(1 + u^2)(4 + u^2)(u + \sqrt{\zeta})} \Big|_{u=\sqrt{\zeta}} + \frac{u^2}{(u^2 - \zeta)(u + i)(4 + u^2)} \Big|_{u=i} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{u^2}{(u^2 - \zeta)(u^2 + 1)(u + 2i)} \Big|_{u=2i} \right) \\
&= \frac{3(1 + \zeta)(4 + \zeta) + k(3i\sqrt{\zeta} - \zeta + 2)}{3(1 + \zeta)(4 + \zeta)}. \tag{10}
\end{aligned}$$

As  $\varphi = 1$  we have

$$(T_{\zeta}1, 1) = (S_{\zeta}1, 1) - k \cdot \frac{(S_{\zeta}1, \beta)(S_{\zeta}\alpha, 1)}{1 + k(S_{\zeta}\alpha, \beta)}. \tag{11}$$

Let us calculate

$$\begin{aligned}
(S_{\zeta}1, \beta) &= \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\tau} d\tau}{\pi(\tau - \zeta)(4 + \tau)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2 du}{(u - \sqrt{\zeta})(u + \sqrt{\zeta})(4 + u^2)} = \frac{i\sqrt{\zeta} + 2}{(4 + \zeta)}. \\
(S_{\zeta}\alpha, 1) &= \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\tau} d\tau}{\pi(\tau - \zeta)(1 + \tau)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2 du}{(u - \sqrt{\zeta})(u + \sqrt{\zeta})(1 + u^2)} = \frac{i\sqrt{\zeta} + 1}{(1 + \zeta)}.
\end{aligned}$$

Now let us calculate

$$(S_{\zeta}1, 1) = \left( \frac{1}{\tau - \zeta}, 1 \right).$$

To simplify the calculation as

$$\frac{1}{\tau - \zeta} \notin D(S)$$

let us make the next transformation

$$\frac{1}{\tau - \zeta} = \frac{1}{1 + \tau} + \left( \frac{1}{\tau - \zeta} - \frac{1}{1 + \tau} \right) = \frac{1}{1 + \tau} + \frac{1 + \zeta}{(\tau - \zeta)(1 + \tau)}.$$

Therefore, we have

$$(S_{\zeta}1, 1) = \left( \frac{1}{\tau + 1}, 1 \right) + \left( \frac{1 + \zeta}{(\tau - \zeta)(1 + \tau)}, 1 \right) = -1 + \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\tau}(1 + \zeta)d\tau}{(\tau - \zeta)(1 + \tau)} =$$

$$= -1 + \frac{(1 + \zeta)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u^2 du}{(u^2 + 1)(u^2 - \zeta)} = -1 + 2i(1 + \zeta) \left[ \frac{\sqrt{\zeta}}{2(1 + \zeta)} - \frac{i}{2(1 + \zeta)} \right] = i\sqrt{\zeta}.$$

In view of (11) we obtain Weyl function

$$m(\zeta) = (T_{\zeta} 1, 1) = i\sqrt{\zeta} - k \cdot \frac{3(i\sqrt{\zeta} + 2)(i\sqrt{\zeta} + 1)}{3(1 + \zeta)(4 + \zeta) + k(3i\sqrt{\zeta} - \zeta + 2)}.$$

In the case of non-perturbed operator  $T = S$ , that is  $k \rightarrow 0$  we have

$$m(\zeta) = i\sqrt{\zeta}.$$

### References

- Gestezy, F., Weikard R., & Zinchenko, M. (2013). Initial value problems and Weyl—Titchmarsh theory for Schrodinger operators with operator-valued potentials. *Operators and matrices*, 7 (2), 241–283.
- Levitan B. M., Sargsjan, I. S. (1988). *Operators of Sturm—Liouville and Dirac*. Moscow: Nauka.
- Lozynska-Perun, I. Y., Cheremnikh, E. V. (2016). Non-local potential and Sturm—Liouville operator. *Visnyk of Lviv University: Mechanics and Mathematics* (in print).
- Naimark, M. A. (1969). *Linear Differential Operators*. Moscow: Nauka.

# FRACTIONAL CALCULUS IN COMPOSITE CREEP MODELING

**B. P. Maslov**

*S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS Ukraine, Kyiv, Ukraine*

[maslov@inmech.kiev.ua](mailto:maslov@inmech.kiev.ua)

The use of differential equation of fractional order in linear viscoelasticity allows generalizing the classical approaches in mechanics of composites (Willis, 1982). We propose here the enhanced viscoelastic model with internal parameter of stored damage. The local and overall constitutive relations (Maslov, 2000) between the infinitesimal strain  $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$  and the Cauchy stress  $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$  fields can be expressed as hereditary integrals. At the micro-scale of individual  $r$  constituents these are presented by

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{J}_r \star \mathbf{s})(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in v_r \quad (1)$$

where  $\mathbf{x}$  denotes a material point within any phase  $r$  of the composite and  $\star$  stands for the Stieljes convolution product. Similarly, the macroscopic or effective constitutive relations can be written as

$$\langle \mathbf{e} \rangle(t) = (\tilde{\mathbf{J}} \star \langle \mathbf{s} \rangle)(t) \quad (2)$$

where  $\langle \mathbf{e} \rangle(t)$  and  $\langle \mathbf{s} \rangle(t)$  are the macroscopic, or averaged, strain and stress, the angle brackets denote spatial averaging over a representative volume element (Maslov, 2008) of the material.  $\mathbf{J}_r(t)$  and  $\tilde{\mathbf{J}}(t)$  are the local in phase  $r$  and effective creep functions of the composite, respectively. In our model suggested here the viscoelastic strain energy function  $W(t)$  is coupled with damage parameter  $D$ . The expression of  $W(t)$  is defined as:

$$2W(\mathbf{e}, t) = (1 - D(t)) \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(t_1)}{\partial t_1} \mathbf{E}(2t - t_1 - t_2) \frac{\partial \mathbf{e}(t_2)}{\partial t_2} dt_1 dt_2 \quad (3)$$

where  $\mathbf{E}(t)$  is the relaxation tensor. The internal scalar variable  $D$  models the damage (Lemaitre & Desmorat, 2005), which is assumed to be isotropic and varies between 0 for undamaged material and 1 under complete failure. The thermodynamic force associated with  $D$  is denoted as  $Y$ . Similar to (2), the constitutive equation may be written in the compliance formulation to describe creep phenomena

$$2(1 - D(t))U(\mathbf{s}, t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{s}(t_2)}{\partial t_2} \mathbf{J}(2t - t_1 - t_2) \frac{\partial \mathbf{s}(t_1)}{\partial t_1} dt_1 dt_2 \quad (4)$$

Similar to (1) in linear viscoelasticity, for the proposed viscoelastic model coupled with damage the expression of stress is written as

$$\mathbf{s}(t) = (1 - D(t)) \int_{-\infty}^t \mathbf{E}(t - t_1) \frac{\partial \mathbf{e}(t_1)}{\partial t_1} dt_1. \quad (5)$$

The stress  $\mathbf{s}(t)$  is thus related to the damage variable  $D(t)$  and to the whole history of viscoelastic strains  $\mathbf{e}(t)$  via Boltzmann's hereditary integral. The relation between the Cauchy stress  $\mathbf{s}(t)$  and the so-called effective stress  $\tilde{\mathbf{s}}(t)$  is

$$(1 - D)\tilde{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{s}(t). \quad (6)$$



The expression of the other thermodynamic force  $Y$  is derived according to

$$Y = -\partial W / \partial D. \quad (7)$$

Using the constitutive equation (3) and the previous properties, the time derivative of  $W(t)$  is

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) = & \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(t_1)}{\partial t_1} \mathbf{E}(t - t_1) dt_1 \dot{\mathbf{e}}(t) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(t_1)}{\partial t_1} \frac{\partial \mathbf{E}(2t - t_1 - t_2)}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{e}(t_2)}{\partial t_2} dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (8)$$

The damage thermodynamic force  $Y$ , or the strain energy density release rate as it is known in (Krairi & Doghri, 2014), is associated with the damage variable  $D$  and defined from (3) and (7) as

$$2Y(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(t_1)}{\partial t_1} \mathbf{E}(2t - t_1 - t_2) \frac{\partial \mathbf{e}(t_2)}{\partial t_2} dt_1 dt_2 \quad (9)$$

The intrinsic dissipation  $\phi(t)$  in the isothermal case is given by

$$\phi(t) = Y\dot{D} + (1 - D)\phi^c \geq 0. \quad (10)$$

where

$$\phi^c(t) = -\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(t_1)}{\partial t_1} \frac{\partial \mathbf{E}(2t - t_1 - t_2)}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{e}(t_2)}{\partial t_2} dt_1 dt_2 \quad (11)$$

is the viscous part of the intrinsic dissipation. For elastic behavior the relaxation tensor  $\mathbf{E}(t)$  is constant over time, and  $\phi^c(t) = 0$ . In isotropic material  $\mathbf{E}(t)$  could be written as follows (Golub, Maslov, Fernati 2016)

$$\mathbf{E}(t) = 2\mu(t)\mathbf{I}^d + 3\kappa(t)\mathbf{I}^h, \quad (12)$$

where  $\mu(t)$  and  $\kappa(t)$  are shear and bulk relaxation functions, which can be expressed using the Mittag-Leffler function

$$\mu(t) = \mu^0[1 - r_G(1 - E_\mu(t / t_G))]; \quad \kappa(t) = \kappa^0[1 - r_B(1 - E_\mu(t / t_B))]. \quad (13)$$

Here,

$$E_\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(1 + \mu n)}$$

and  $t_G$ ,  $t_B$  are the deviator and volumetric relaxation times respectively;  $r_G$ ,  $r_B$  are the corresponding moduli, and  $\mu^0$ ,  $\kappa^0$  — the instant elastic shear and bulk moduli. In this work, the concepts of generalized potential is used with the following evolution equations

$$\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) = (1 - D)\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = (1 - D) \frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{e}} \quad \dot{D}(t) = \dot{\gamma} \frac{\partial F_D}{\partial Y}. \quad (14)$$

The damage potential  $F_D$  for viscous damage evolution is chosen as

$$F_D(Y, D) = \frac{S}{1 + n} \frac{1}{1 - D} \left( \frac{Y}{S} \right)^{(1+n)} \quad (15)$$

which leads to the damage evolution law

$$\dot{D} = \left( \frac{Y}{S} \right)^n \dot{p} \geq 0. \quad (16)$$

Here  $n$ ,  $S$  are material parameters. Constitutive model parameters for high density polyethylene (Golub, Maslov & Fernati, 2016) are identified from experimental data  $S = 1.2 \text{ MPa}$ ;  $n = -1.4$ ;

Classical homogenization schemes for linear behaviors are applied to random structure composite. The overall compliance is  $\tilde{\mathbf{J}}^*(z)$ , while the overall stress applied to this composite is  $\bar{\mathbf{s}}^*(z)$ . To obtain the homogenized properties at time of monitoring  $t_m$  the correspondence principle can be used. It helps to transform the linear viscoelastic behavior into a symbolic elastic one for which the classical homogenization techniques can be applied. For that goal, we use the Laplace—Carson transform, namely

$$f^*(z) = z \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt, \quad (17)$$

where  $z$  is the complex variable, which is especially convenient. Applied to (6), it leads to linear elastic relation between transforms of strain and stress histories

$$\mathbf{e}^*(\mathbf{x}, z) = \mathbf{J}^*(z) \mathbf{s}^*(\mathbf{x}, z). \quad (18)$$

For a given real value of  $z$ , we now consider the heterogeneous composite whose microstructure is the same as the previous one but with phases obeying the linear elastic behavior defined by (3). Stress field second moments through any phase  $r$  of this linear elastic composite are defined by

$$\left\langle \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* \right\rangle_{r,z} = \left\langle \mathbf{s}^*(z) \otimes \mathbf{s}^*(z) \right\rangle_r. \quad (19)$$

where the notation  $\langle \cdot \rangle_r$  denotes the average on volume  $v_r$  of phase  $r$ . They can be obtained from the known linear homogenization scheme (Willis, 1982) by computing the partial derivatives of the stress elastic energy of the composite with respect to the fourth-order tensor  $\mathbf{J}_r^*(z)$ .

Using the proposed in Maslov (2008) method for prediction of viscoelastic properties of multicomponent isotropic materials with inclusions of different sizes and stiffness, we can determine the quasi-elastic parameters in transform domain for matrix with growing in time damage

$$\begin{aligned} \tilde{E}^*(z) &= E(1 + k_E(z) \frac{D}{1 + D})^{-1}; & k_E(z) &= \frac{(1 + \nu^*)(10 - 3\nu^*)}{2(5 - \nu^*)}, \\ \tilde{\mu}^*(z) &= \mu(1 + k(z) \frac{D}{1 + D})^{-1}; & k(z) &= \frac{5(1 + \nu^*)(2 - \nu^*)}{2(1 - 2\nu^*)(5 - \nu^*)}. \end{aligned} \quad (20)$$

These expressions obviously connect the internal parameter  $D$  with effective elasticity and compliances, so it can be determined in experiment.

Based on this correspondence principle, the existing expressions for the effective creep compliance or elastic stiffness components in the physical domain can be converted to those for the creep compliances or relaxation moduli in the Laplace-Carson domain. Following from that, the correspondence exists between the elastic problem and the viscoelastic problem. Hence, from (2) and (5) we can obtain

$$\tilde{\mathbf{J}}^*(z) = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{J}_r^*(z), \mathbf{J}_r^*(z), c_i). \quad (21)$$

Note that the volume concentration  $c_i$  remains unchanged after transforming from the time domain to the Laplace—Carson domain, as in the case of non-aged materials. The viscoelastic solution in the physical time domain is ultimately determined from the solution in the Laplace—Carson domain through performing the inverse transform

$$\tilde{\mathbf{J}}(t) = (LC)^{-1} \tilde{\mathbf{J}}^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{e^{zt}}{z} \tilde{\mathbf{J}}^*(z) dz. \quad (22)$$

But except for some simple situations, the explicit determination of the inverse operator (22) is not straightforward, and a numerical inversion is required. There exist efficient algorithms for numerically evaluating the inverse Laplace transform. We use here the Fortran90 program from NAG-Fortran library. For creep loadings, the creep function as well as the damage parameter, first and second moments of the stress field in the matrix evolutions with time have been determined in this manner.

In conclusion, it can be noticed that the viscoelastic model with internal parameter of stored damage suggested here may be useful for long-term durability prediction and nondestructive control problems of composites.

## References

- Willis, J. R. (1982). *Elasticity Theory of Composites*. – In: *Mechanics of Solids*. Oxford, New York: Pergamon Press.
- Maslov, B. P. (2000). Stress concentration in non-compressible multi-component material. *Int. Appl. Mech.*, 36 (3), 108–114.
- Lemaitre, J., & Desmorat, R. (2005). *Engineering Damage Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Maslov, B. P. (2008). Thermal stress concentration near inclusions in visco-elastic random composites. *Journal of Engineering Mathematics*, 61, 339–355.
- Krairi, A., & Doghri, V. (2014). Thermodynamically-based constitutive model for thermoplastic polymers coupling viscoelasticity, viscoplasticity and ductile damage. *International Journal of Plasticity*, 60, 163–181.
- Golub, V. P., Maslov, B. P., & Fernati, P. V. (2016). Hereditary kernels identification for isotropic viscoelastic materials under complex loading. *International Applied Mechanics*, 53 (2), 78–90.

# ON THE MOTION OF A SYMMETRICAL GYROSTAT CARRYING TWO ROTORS

**E. K. Shchetinina, Y. A. Gladka**

*Kyiv National University of Trade and Economics, Kyiv, Ukraine*

[elena-0607@bk.ru](mailto:elena-0607@bk.ru), [yuliyagladkaya@hotmail.com](mailto:yuliyagladkaya@hotmail.com)

The problem of symmetric gyrostator motion with variable gyrostatic torque characterized by rotation of two rotors with mutually orthogonal axes is considered. New solutions of the equations of motion of mechanical systems appropriate to the programmed motions of a gyrostator are obtained.

Following (Румянцев, 1970; Харламов, 1972), let's consider a system of solid bodies  $S_0, S_1, S_2$ , where  $S_0$  is the carrier body, that has a fixed point  $O$ ,  $S_1$  and  $S_2$  are geometrically symmetrical rotors, mounted on  $S_0$  and rotating around their mutually orthogonal axes of symmetry. Let  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  and  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  be the unit vectors of these axes ( $\alpha \cdot \beta = 0$ ). Let us designate

$$\lambda = \lambda_1(t)\alpha + \lambda_2(t)\beta$$

gyrostatic torque. Let us write the equations of motion of a heavy gyrostator with two rotors in vector form Горп и др. (1978).

$$\dot{\mathbf{x}} + \dot{\lambda}_1(t)\alpha + \dot{\lambda}_2(t)\beta = (\mathbf{x} + \lambda_1(t)\alpha + \lambda_2(t)\beta) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1)$$

The following notation is introduced:  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  is the angular momentum of the gyrostator,  $\boldsymbol{\omega} = a\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  is the angular velocity vector,  $a$  is the gyration tensor,  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  is a unit vector that indicated the direction of the gravitational force,  $\mathbf{s} = \overline{OCmg} = (s_1, s_2, s_3)$ , where  $m$  is the mass of the gyrostator  $g$  is acceleration of the free fall and  $C$  is the center of gravity of the gyrostator.

Equations (1) admit first integrals ( $k$  is an arbitrary constant).

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\mathbf{x} + \lambda_1(t)\alpha + \lambda_2(t)\beta) \cdot \boldsymbol{\nu} = k. \quad (2)$$

In Горп and Щетинина (2014) the conditions of existence of motions with specified properties (semi-regular precession) are considered. In this report, we study the equations of motion of a symmetric gyrostator carrying two rotating rotors, without assumptions about the properties of motion.

Consider the equation (1) and integrals (2) in the case of

$$a = \text{diag}(a_1, a_2, a_2), \quad \mathbf{s} = (s_1, 0, 0), \quad \alpha = (1, 0, 0), \quad \beta = (0, 1, 0), \quad (3)$$

the first rotor rotational axis being collinear with the axis of symmetry of gyrostator and the second rotational axis being orthogonal to that axis.

Let us write the equations (1) and integrals (2) in the case (3)

$$(x_1 + \lambda_1(t))' = a_2 \lambda_2(t) x_3 \quad (4)$$

$$\left(x_2 + \lambda_2(t)\right)' = \left[(a_1 - a_2)x_1 - a_2\lambda_1(t)\right]x_3 - s_1\nu_3 \quad (5)$$

$$\dot{x}_3 = -\left[(a_1 - a_2)x_1 - a_2\lambda_1(t)\right]x_2 - a_1\lambda_2(t)x_1 + s_1\nu_2 \quad (6)$$

$$\dot{\nu}_1 = a_2(\nu_2x_3 - \nu_3x_2), \quad \dot{\nu}_2 = a_1\nu_3x_1 - a_2\nu_1x_3, \quad \dot{\nu}_3 = a_2\nu_1x_2 - a_1\nu_2x_1 \quad (7)$$

$$\nu_1(x_1 + \lambda_1(t)) + \nu_2(x_2 + \lambda_2(t)) + \nu_3x_3 = k, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 \quad (8)$$

Quadrature integration (4)–(7) system, comprising eight variables and two integrals (8) is possible, subject to the following assumptions:

$$x_3 = 0, \quad \lambda_2(t) = \lambda_2^{(0)} = \text{const} \quad (9)$$

On the invariant set (9), the equation (4) yields the first integral

$$x_1 + \lambda_1(t) = c_1 \quad (10)$$

where  $c_1$  is an arbitrary constant. We assume it to be zero. We write the system (5)–(8), when the relations (9) and equation (10) are fulfilled and  $c_1 = 0$

$$\dot{x}_2 = -s_1\nu_3, \quad s_1\nu_2 = a_1x_1\left(x_2 + \lambda_2^{(0)}\right) \quad (11)$$

$$\dot{x}_2 = -s_1\nu_3, \quad s_1\nu_2 = a_1x_1\left(x_2 + \lambda_2^{(0)}\right) \quad (11)$$

$$\dot{\nu}_1 = -a_2\nu_3x_2, \quad \dot{\nu}_2 = a_1\nu_3x_1, \quad \dot{\nu}_3 = a_2\nu_1x_2 - a_1\nu_2x_1 \quad (12)$$

$$\nu_2\left(x_2 + \lambda_2^{(0)}\right) = k, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 \quad (13)$$

Let us choose  $\nu_2$  as the auxiliary variable. Then from the second equation (11) and the first equation (13) we obtain

$$x_2 = \frac{k}{\nu_2} - \lambda_2, \quad x_1 = \frac{s_1\nu_2^2}{a_1k} \quad (14)$$

From the first and second of the equation (12) we obtain the equation

$$\frac{d\nu_1}{d\nu_2} = -\frac{a_2x_2}{a_1x_1}$$

Substituting the expression (14) into the right side of this equation and integrating, we find the dependence

$$\nu_1(\nu_2) = \frac{1}{2s_1\nu_2^2}w(\nu_2), \quad w(\nu_2) = 2cs_1\nu_2^2 - 2a_2k\lambda_2^{(0)}\nu_2 + a_2k^2 \quad (15)$$

where  $c$  is an arbitrary constant. We substitute the expression (15) in the second equation (13):

$$\nu_3(\nu_2) = \frac{1}{2s_1\nu_2^2} \sqrt{4s_1^2\nu_2^4(1 - \nu_2^2) - w^2(\nu_2)} \quad (16)$$

The dependence is determined by the integral treatment (inversion)

$$\int_{\nu_2^{(0)}}^{\nu_2} \frac{d\nu_2}{\sqrt{4s_1^2\nu_2^4(1-\nu_2^2) - w^2(\nu_2)}} = \frac{1}{2k}(t - t_0) \quad (17)$$

that we find taking into account in the first equation (11) the value of  $x_2$  from (14) and expression (16).

Here are the basic properties of the solution:

1. The solution depends on four arbitrary constants  $c$ ,  $\nu_2^{(0)}$ ,  $k$  и  $t_0$ ,
2.  $x_1(\nu_2)$  — quadratic function,  $x_2(\nu_2)$  — fractional-linear function,
3. The dependence  $\nu_2 = \nu_2(t)$  is expressed in the form of a hyperelliptic function of time.

### References

- Горр, Г. В., Кудряшова, Л. В., Степанова, Л. А. (1978). *Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние*. Киев: Наук. думка.
- Горр, Г. В., Щетинина, Е. К. (2014). Полурегулярные прецессии тяжелого гиростата, несущего два ротора. *Механика твердого тела*, 44, 16—26.
- Румянцев, В. В. (1970). Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами. *Вестн. Моск. ун-та. Матем., мех.*, 2, 83—96.
- Харламов, П. В. (1972). Об уравнениях движения системы твердых тел. *Механика твердого тела*, 4, 52—73.

# ANALYTICAL AND APPROXIMATELY ANALYTICAL SOLUTION OF THE PLANE CONTACT PROBLEM TAKING INTO ACCOUNT THE FRICTION AND THE ROUGHNESS

**E. S. Sinchenko, A. I. Kachan, I. Y. Shapar**

*Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine*

[tomaola@mail.ru](mailto:tomaola@mail.ru)

The quasi-static plane problem about sliding with a friction of punch with the flat fundament on a surface of an elastic rough layer is considered at the linear law of deformation of a roughness. It is supposed, that the punch inclination is absent. Plane contact problems taking into account a roughness are studied in works Galin (1980), Goryacheva (2001), Titova (2012), taking into account a friction — in Galin (1980), Goryacheva (2001), taking into account both factors — in Titova (2012). However, in article Titova (2012) it is supposed, that tangential stress do not influence normal pressure.

Properties of the integral operator of the given problem are studied. On the basis of these properties the analytical solution of problems in two cases of restriction on roughness factors is received. Function of normal pressure is originally presented in the form of Neumann's series. Then this function is presented by a power series, in which coefficients are expressed through repeated series.

For reception of the approximately analytical solution the integral equation of this problem is reduce to infinite system of the linear algebraic equations concerning unknown coefficients of a power series of function of normal pressure. In work the substantiation of possibility of application of a reduction method by means of conditional test of L. V. Kantorovich and G. P. Akilov (Kantorovich & Akilov, 1984) is resulted. The numerical estimation of residual is received.

For approximate calculations selected stamp from to half-width  $a = 1$  cm., the value of the normal force acting along the axis of symmetry is equal

$$Q = 0,008625aC^{-1}g \cdot cm \cdot s^{-2}$$

where  $C = \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi E}$ ,  $E$  — the modulus of elasticity,  $\nu$  — Poisson's ratio. Numerical results are shown in figure 1–3.

The analysis of numerical results concerning influence of a roughness and a friction on contact characteristics (a function of normal pressure  $p(x)$  and a indentation  $\delta_1$ ) is carried out. With shortcut of the roughness coefficient  $B_1$  and with shortcut of the friction coefficient  $\rho$  all contact characteristics come nearer to corresponding characteristics without a roughness or a friction. The greatest value of pressure on border of a contact platform, the least value of pressure in an internal point  $x_{\min}$  of this platform are reached. With increase of a roughness coefficient or a coefficient of a point friction absciss of the least pressure is displaced from the centre to the action direction of a tangential of force.

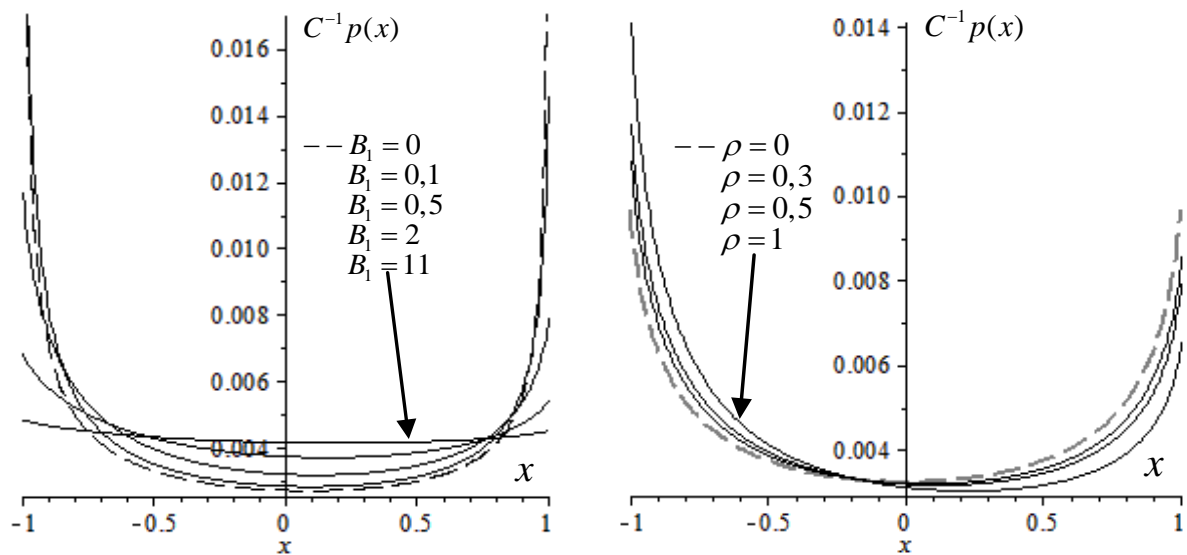


Fig. 1. Graphs pressure functions for different input values

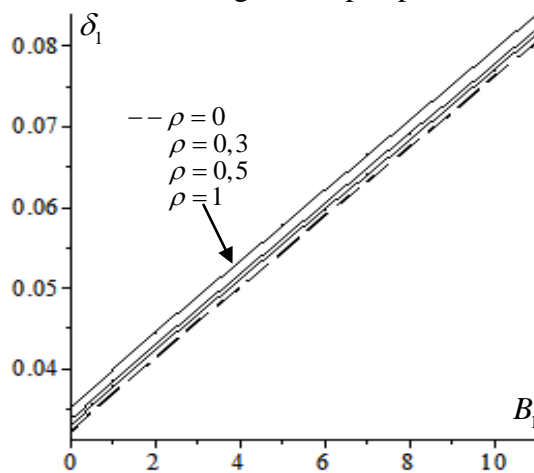


Fig. 2. The schedule of dependence depending stamp on the roughness coefficient  $B_1$

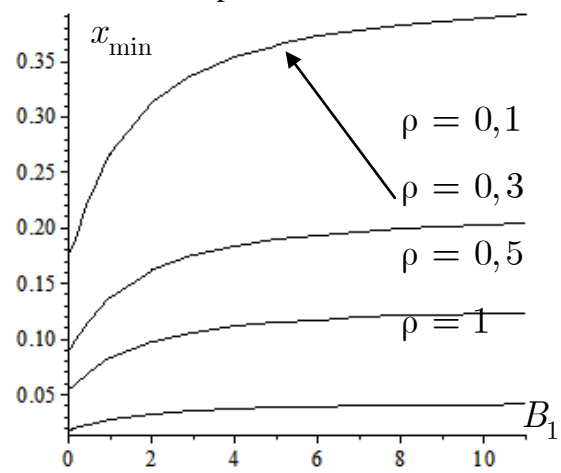


Fig. 3. Dependency Graphs  $x_{\min}$  of the roughness coefficient  $B_1$

## References

- Pauk, V., & Zastrau, B. (2004). Plane Contact Problems with Partial Slip for Rough Elastic Half-Space. *J. Theor. Appl. Mech*, 42 (1), 107–124.
- Галин, Л. А. (1980). *Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости*. Москва: Наука.
- Горячева, И. Г. (2001). *Механика фрикционного взаимодействия*. Москва: Наука.
- Канторович, Л. В., Акилов, Г. П. (1984). *Функциональный анализ*. Москва: Наука.
- Тітова, О. О., Гриценко, О. М., Дяченко, Т. А., Стасюк, О. В. (2012). Плоска контактна задача про вдавнення штамп з плоскою основою в пружну шорстку смугу при різних законах деформування шорсткості. *Вісник Запорізького національного університету. Фіз.-мат. науки*, (2), 105—113.



**STABILITY IN TERMS OF TWO MEASURES  
OF SEMIFLOWS IN SPACE  $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$**

**V. I. Slyn'ko, V. S. Denysenko**

*S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kyiv,  
Bohdan Khmelnytsky Cherkassy National University, Cherkassy, Ukraine  
vitstab@ukr.net, den\_vik@ukr.net*

The study of set differential equations (SDEs) in a metric space was initiated in monograph Lakshmikantham, Bhaskar and Devi (2006). The basic theory questions: the existence of solution of initial value problem, global existence of solutions, convergence of successive approximations and others, as well as the direct Lyapunov method and comparison method were discussed therein. Tasks of stability of stationary solutions for SDEs based on Lyapunov functions were also studied in Bhaskar and Devi (2005). The authors of paper Bhaskar and Devi (2005) consider the differential equations of the form

$$D_H u = F(t, u), \quad u(t_0) = u_0 \in \text{conv}(\mathbb{R}^n),$$

where  $u \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ ,  $F \in C(\mathbb{R}_+ \times \text{conv}(\mathbb{R}^n); \text{conv}(\mathbb{R}^n))$ ,  $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$  is a metric space of nonempty convex compacts with Hausdorff metric.

In this paper, the concept of Lyapunov is applied for more general problem i.e. study of stability in terms of two measures of semiflows in space  $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ .

Let us recall a general definition of the (local) semiflow for an arbitrary complete metric space  $(X, d)$ .

Let  $D$  be a set  $\{0\} \times X \subset D \subset \mathbb{R}_+ \times X$ , such that  $D \setminus (\{0\} \times X)$  is an open nonempty set in space  $\mathbb{R}_+ \times X$ .

**Definition 1.** *The mapping  $\mathfrak{F} : D \rightarrow X$ ,  $t \geq 0$  is called a (local) semiflow in metric space  $(X, d)$  if the following conditions are fulfilled:*

(1)  $\mathfrak{F}^0(u) = u$  for all  $u \in X$ ;

(2) for all  $(t_1, u_0) \in D$ ,  $(t_2, u_0) \in D$  such that  $(t_1 + t_2, u_0) \in D$  the following equality holds

$$\mathfrak{F}^{t_1}(\mathfrak{F}^{t_2}(u_0)) = \mathfrak{F}^{t_1+t_2}(u_0).$$

(3) for any  $\varepsilon > 0$  and  $(t_0, u_0) \in D$  there exists a positive number  $\delta = \delta(t_0, u_0, \varepsilon)$  such that for all  $(t, u_0) \in D$  the inequality  $|t - t_0| < \delta$  implies the estimate  $d(\mathfrak{F}^t(u_0), \mathfrak{F}^{t_0}(u_0)) < \varepsilon$ ;

(4) for any  $\varepsilon > 0$  and  $(t_0, u_0) \in D$  there exists a positive number  $\delta = \delta(t_0, u_0, \varepsilon)$  such that for all  $(t_0, u) \in D$  the inequality  $d(u, u_0) < \delta$  implies the

estimate  $d(\mathfrak{F}^{t_0}(u), \mathfrak{F}^{t_0}(u_0)) < \varepsilon$ ;

If  $D = \mathbb{R}_+ \times X$ , then the semiflow  $\mathfrak{F}$  is called a global semiflow.

Next we formulate the definition of stability in terms of two measures of semiflow  $\mathfrak{F}$ . Let  $h_0 \in C(\text{conv}(\mathbb{R}^n); \mathbb{R}_+)$ ,  $h \in C(\text{conv}(\mathbb{R}^n); \mathbb{R}_+)$  be the measures of initial and current variations and

$$\inf_{X \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)} h_0[X] = \inf_{X \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)} h[X] = 0.$$

**Definition 2.** The global semiflow  $\mathfrak{F}$  is

(1)  $(h_0, h)$ -stable, if for any  $\varepsilon > 0$  there exists  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  such that the inequality  $h_0[u_0] < \delta$  implies the estimate  $h[\mathfrak{F}^t(u)] < \varepsilon$  for all  $t \geq 0$ ;

(2) asymptotically  $(h_0, h)$ -stable, if it  $(h_0, h)$ -stable and there exists  $\rho > 0$  such that from inequality  $h_0[u_0] < \rho$  follows that  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h[\mathfrak{F}^t(u)] = 0$ ;

(3) practical  $(\lambda, A, T)$ -stable ( $0 < \lambda < A$ ) in terms of two measures  $(h_0, h)$  on finite time interval, if inequality  $h_0[u_0] < \lambda$  implies the estimate  $h[\mathfrak{F}^t(u)] < A$  for all  $t \in [0, T]$ .

The stability problem in terms of two measures for semiflows in space  $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$  was investigated. On the basis of comparison principle the obtained result is used to study the stability criteria for a certain semiflow in space  $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ . This semiflow, in particular, generalizes set differential equations and a set of attainability for linear control systems. The use of classic geometric inequalities and results of convex geometry ascending to works of G. Minkowskij and A. D. Aleksandrov (Aleksandrov, 1996), allows us to get the conditions of stability and practical stability for semiflows in terms of measures having a specific geometric meaning. As measures the Hausdorff metric is considered as well as the special measures constructed on the basis of the certain mixed volumes. For further study it is of interest to dissemination the obtained results to other classes of semiflows in space  $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ .

## References

- Aleksandrov, A. D. (1996). *Selected works. Part 1: Selected scientific papers*. Amsterdam: Gordon and Breach Publishers.
- Bhaskar, T. Gnana, & Devi, J. Vasundhara (2005). Set differential systems and vector Lyapunov functions. *Applied Mathematics and Computation*, 165 (3), 539–548.
- Lakshmikantham, V., Bhaskar, T. Gnana, & Devi, J. Vasundhara (2006). *Theory of set differential equations in metric spaces*. London: Cambridge Scientific Publisers.

# MODELING OF NON-STATIONARY HEAT CONDUCTION IN LAMINATED STRIPS

**N. V. Smetankina**

*The A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine*

[nsmetankina@yandex.ru](mailto:nsmetankina@yandex.ru)

Changes of temperature are often the cause of failure of structures, especially multilayer ones, when temperature difference between internal and external surfaces is significant.

The majority of publications, devoted to thermoelasticity of laminated structures, deal with deformation of such structures under conditions of steady temperature fields or dynamic temperature fields with prescribed distribution through the thickness (Telega & Bielski, 2000). The hypothesis about a piecewise-linear temperature distribution through the thickness of a laminated package is often applied (Barut, Madenci, & Tessler, 2000). However, the non-stationary character of a problem requires a more exact description of the temperature field obtained directly from solution of a heat conduction equation (Oguamanam, Hansen, & Heppler, 2004). In so doing, if the structure has a noncanonical form in plan, the majority of papers use the following numerical computation methods: the finite difference method, the boundary elements method, and finite elements method.

In the present paper a theoretical method of solution of the non-stationary heat conduction problem in laminated strips with an internal heat source is proposed.

A laminated strip of length  $l$  assembled from arbitrary number of isotropic layers ( $i = \overline{1, N}$ ) is being considered. The heat conduction equation for the  $i$ -th layer has the form

$$\nu_i \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1)$$

where  $\nu_i = \lambda_i / (\gamma_i c_i)$  is the thermal diffusivity,  $\lambda_i$  is the thermal conductivity,  $\gamma_i$  is the density of the  $i$ -th layer material,  $c_i$  is the specific heat at constant volume of the  $i$ -th layer.

For the sake of simplicity, let us consider a symmetrical problem concerning the middle of a strip  $x = l/2$ , and seek a solution in the form

$$T_i(x, z_i, t) = \sum_{k=1}^M [a_{ik}(t) f_1(\bar{z}) + b_{ik}(t) f_2(\bar{z}) + c_{ik}(t) f_3(\bar{z})] \cos(\alpha_k x), \quad (2)$$

where  $0 \leq x \leq l/2$ ,  $\alpha_k = 2\pi(k-1)/l$ ,  $t$  is time. Coordinate  $z_i$  is measured from an internal surface of each layer.

As functions  $f_r$ ,  $r = 1, 2, 3$ , we choose Legendre orthonormal polynomials of the  $(r - 1)$ -th degree for the interval  $0 \leq \bar{z} \leq 1$

$$f_1 = 1, \quad f_2 = \sqrt{3}(2\bar{z} - 1), \quad f_3 = \sqrt{5}(6\bar{z}^2 - 6\bar{z} + 1), \quad \int_0^1 f_k f_l d\bar{z} = \delta_{kl} \quad (3)$$

Here  $\bar{z} = z_i/h_i$ ,  $0 \leq z_i \leq h_i$ ;  $h_i$  is the thickness of the  $i$ -th layer.

Substituting expression (2) in equation (1) and projecting the obtained equation to the system of functions  $f_r$  (3), we can find the relationship for the  $k$ -th harmonic of a series (2)

$$\nu_i \int_0^1 \left\{ \begin{array}{l} a_{ik} \left[ \frac{f_1''}{h_i^2} - \alpha_k^2 f_1 \right] f_r \cos(\alpha_k x) \\ b_{ik} \left[ \frac{f_2''}{h_i^2} - \alpha_k^2 f_2 \right] f_r \cos(\alpha_k x) \\ c_{ik} \left[ \frac{f_3''}{h_i^2} - \alpha_k^2 f_3 \right] f_r \cos(\alpha_k x) \end{array} \right\} dz = \int_0^1 (\dot{a}_{ik} f_1 + \dot{b}_{ik} f_2 + \dot{c}_{ik} f_3) f_r \cos(\alpha_k x) dz,$$

where

$$f_r'' = \frac{d^2 f_r}{dz^2}, \quad \dot{a}_{ik} = \frac{da_{ik}}{dt}, \quad \dot{b}_{ik} = \frac{db_{ik}}{dt}, \quad \dot{c}_{ik} = \frac{dc_{ik}}{dt}.$$

In view of the orthogonality condition of the system of functions  $f_r$ , we obtain

$$\dot{a}_{ik} = \nu_i \frac{12\sqrt{5}}{h_i^2} c_{ik} - \nu_i \alpha_k^2 a_{ik}, \quad \dot{b}_{ik} = -\nu_i \alpha_k^2 b_{ik}, \quad \dot{c}_{ik} = -\nu_i \alpha_k^2 c_{ik}. \quad (4)$$

As initial conditions let us accept  $T_i(x, z_i, 0) = \text{const}$ . In the absence of heat exchange, and when the power of heat sources is equal to zero, at  $t = 0$ , it follows that

$$a_{ik}(0) = T_0, \quad b_{ik}(0) = c_{ik}(0) = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

The boundary conditions of convective heat transfer over the top and bottom surfaces of the strip are

$$\lambda_1 \nabla T_1|_{z_1=h_1} = \alpha_t (T_t - T_1|_{z_1=h_1}), \quad -\lambda_N \nabla T_N|_{z_N=0} = \alpha_b (T_b - T_N|_{z_N=0}), \quad (5)$$

where  $\alpha_t$  and  $\alpha_b$  are the convective heat transfer coefficients at the top and bottom of the strip,  $T_t$  and  $T_b$  are the temperatures of environments over the top and bottom surfaces, respectively.

Taking into account that  $\nabla T_i = \frac{\partial}{\partial z} T_i$ ,  $f_1 = 1$ , and substituting the relationship (2) into conditions (5), the following equalities are obtained:

$$\frac{\lambda_1}{h_1} (b_{1k} 2\sqrt{3} + c_{1k} 6\sqrt{5}) = \alpha_t (T_t - a_{1k} - b_{1k} \sqrt{3} - c_{1k} \sqrt{5}),$$

$$\frac{\lambda_N}{h_N} (b_{Nk} 2\sqrt{3} - c_{Nk} 6\sqrt{5}) = \alpha_b (T_b - a_{Nk} + b_{Nk} \sqrt{3} - c_{Nk} \sqrt{5}). \quad (6)$$

The conditions of equality of heat flows and temperatures on interfaces of layers are:

$$\begin{aligned} -\lambda_i \nabla T_i \Big|_{z_i=0} + \lambda_{i+1} \nabla T_{i+1} \Big|_{z=h_{i+1}} &= 0, \\ T_i \Big|_{z_i=0} - T_{i+1} \Big|_{z=h_{i+1}} &= 0, \quad i = \overline{1, N-1}. \end{aligned}$$

It follows from this that

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda_i}{h_i} (b_{ik} 2\sqrt{3} - c_{ik} 6\sqrt{5}) + \frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}} (b_{i+1,k} 2\sqrt{3} + c_{i+1,k} 6\sqrt{5}) &= 0, \\ a_{ik} - b_{ik} \sqrt{3} + c_{ik} \sqrt{5} - a_{i+1,k} - b_{i+1,k} \sqrt{3} - c_{i+1,k} \sqrt{5} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

The joint number of boundary conditions (6) and interface conditions (7) is equal to  $2NM$ . The number of unknown time-dependent functions in the given problem is equal to  $3NM$ . Referring to the second and third equations (4), we note that they have zero partial solutions, as the initial temperature field is steady. We reject these equations. It means that the change of functions  $b_{ik}(t)$  and  $c_{ik}(t)$  with time in approximation (2) is determined by their relationship from  $a_{ik}(t)$ . Then the number of unknown functions  $a_{ik}(t)$ ,  $b_{ik}(t)$  and  $c_{ik}(t)$  equals to  $3NM$ ; it is equal to the number of equations (4) for  $a_{ik}(t)$  and number of conditions (6), that is  $3NM$ .

To define the functions  $b_{ik}(t)$  and  $c_{ik}(t)$ , it is necessary to use conditions (6) and (7), expressing them in terms of  $a_{ik}(t)$ . This method allows the number of equations to be equated to the number of unknowns. The solution obtained on each time step will exactly satisfy the boundary conditions and the conditions of the interface layers. The non-stationary character of the problem will be taken into consideration owing to the functions  $a_{ik}(t)$  to be determined from the solution of Cauchy problem.

By virtue of linearity of the problem, the system of equations breaks up into  $M$  independent systems. If a heat-generating film with power  $W(x)H(t)$  is placed between the  $i$ -th and  $(i+1)$ -th layers, it is necessary to take into account, on the right-hand side of the appropriate condition (7), a harmonic

$$W_k = \frac{2}{l} \int_0^{l^*/2} W(x) \cos(\alpha_k x) dx$$

multiplied by  $H(t)$ , where  $H(t)$  is the Heaviside function.

As an example, let us arrange a heat-generating film between the first and second layers of a strip. Such arrangement of the film is usual for heated laminated glasses of vehicles.

Considering the system of conditions (6) and (7) as a system of linear algebraic equations in  $a_{ik}(t)$ ,  $b_{ik}(t)$  and  $c_{ik}(t)$

$$[\mathbf{\Gamma}] \mathbf{V} = \mathbf{Q} \quad (8)$$

for an evaluation of the right-hand sides of equations (4) in the course of integration of these equations in time, solve the system on each process step. The matrix of system  $[\mathbf{\Gamma}]$  contains  $2N$  rows and  $3N$  columns. We express parameters  $b_{ik}(t)$  and  $c_{ik}(t)$  through functions  $a_{ik}(t)$  and vector  $\mathbf{Q}$ . Transposing the columns of the matrix being coefficients at  $a_{ik}(t)$  (first, fourth, seventh and etc.) to the right-hand side of the system (8), we form a matrix  $[\mathbf{B}]$  from them. Denote those retained on the left-hand side, as the matrix  $[\mathbf{A}]$  of dimension  $2N \times 2N$ , and obtain a system

$$[\mathbf{A}] \mathbf{Y} = [\mathbf{B}] \mathbf{X} + \mathbf{Q},$$

where  $\mathbf{Y}$  is vector with components  $b_{ik}(t)$  and  $c_{ik}(t)$  ( $i = \overline{1, N}$ ), and  $\mathbf{X}$  is vector from coefficients  $a_{ik}(t)$ . This system is integrated by a modified method of expanding the solution into a Taylor series (Smetankina et al., 2008).

The functionality of the method offered is illustrated by considering the heating of five-layer strips. The change of heat-generating film power, and temperature of environment, can be given by any function of coordinates and time.

Temperature profiles over other surfaces of strips, as a whole, follow the obtained distributions but smooth out in the area of large temperature gradients along the spatial coordinate. The comparison of calculation results obtained by the proposed method to those obtained by the finite elements method has confirmed their reliability. The maximum error does not exceed 0.5 %.

The solution of such problems has practical importance, as the results of this research can be applied, for example, to the analysis of the efficiency of deicing and demisting performances of heating systems for windshields.

## References

- Barut, A., Madenci, E., & Tessler, A. (2000). Non-linear analysis of composite panels under non-uniform temperature distribution. *International Journal of Solids and Structures*, 37 (27), 3681–3713.
- Oguamanam, D. C. D., Hansen, J. S., & Heppler, G. R. (2004). Nonlinear transient response of thermally loaded laminated panels. *Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, 71 (1), 49–56.
- Smetankina, N. V., Shupikov, A. N. Sotrikhin, S. Yu., Yareschenko, V. G. (2008). A noncanonically-shape laminated plate subjected to impact loading. Theory and experiment. *Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, 75 (5), 051004-1–051004-9.
- Telega, J. J., & Bielski, W. R. (2000). Controllability and stabilization in elasticity, heat conduction and thermoelasticity: Review of recent developments. *Journal of Global Optimization*, 17 (4), 353–386.

# INSTANTANEOUS COMPACTIFICATION OF THE SUPPORT OF SOLUTIONS FOR NONLINEAR DIFFUSION-REACTION EQUATIONS

**K. V. Stiepanova**

*Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics, Kharkiv, Ukraine*

[stepanova.katerina@hneu.net](mailto:stepanova.katerina@hneu.net)

This report is devoted to the study of some qualitative properties of solutions for a wide class of nonlinear partial differential equations. We consider the Cauchy problem for quasilinear parabolic second order equation with degenerating absorption coefficient — weight function (potential  $h(t)$ ), the presence of which play the important role in the study qualitative properties of solutions.

Investigation object — instantaneous compactification property of support of the solutions of parabolic equation.

The goal of the work — to prove that Cauchy problem for quasilinear parabolic second order equation of divergent type has instantaneous compactification property of support of the solutions and to get the estimates of radius of compactification.

So, we study the behavior of the energy (generalized) solutions of following Cauchy problem for the next type of a quasilinear parabolic equation with the model representative:

$$u_t - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( |\nabla u|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + h(t) |u|^{\lambda-1} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

where  $\nabla u = \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$ ;  $p$  and  $\lambda$  are positive real numbers. Assume that

$u_0(x) \in L_q(\mathbb{R}^n)$ ,  $q > 1$  and  $h(t)$  is a continuous, nonnegative function, such that  $h(0) = 0$ .

**Definition 1.** *The function  $u(x, t) \in C(L_q(\mathbb{R}^n); (0, T)) \cap L_{q+\lambda-1}(\mathbb{R}^n \times (0, T))$  is energy (generalized) solution (1), (2), if*

$$\left| u \right|^{\frac{q-2}{p+1}} u_{x_i} \in L_{p+1}(\mathbb{R}^n \times (0, T)), \quad u_{x_i} \in L_{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n \times (0, T)), \quad (3)$$

and satisfies integral identity:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \phi(x, T) dx - \int_{\mathbb{R}^n} |u_0|^q \phi(x, 0) dx &= q \int_{\mathbb{R}^n \times (0, T)} \sum_{i=1}^n |\nabla u|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left( |u|^{q-2} u \phi \right)_{x_i} dx dt + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n \times (0, T)} |u|^q \phi_t dx dt - q \int_{\mathbb{R}^n \times (0, T)} h(t) |u|^{q+\lambda-1} \phi(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (4)$$

for  $\forall \phi(x, t) \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ , such that  $\phi$  and  $\phi_t$  are bounded and, besides,  $\nabla\phi$  has compact support.

Note here, that the existence of solutions in the above sense is well known from papers Bernis (1986 and 1988) in the case

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( |u|^{q-1} u \right) + Au + b(x, t, u) = 0,$$

where  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T_0)$ ,  $T_0 \leq \infty$ ,  $n \geq 1$ ,  $q > 0$ ;  $b(x, t, u) = |u|^{\lambda-1} u$  and operator  $A$  has variation structure.

So, as mentioned above, the main focus of the work is investigation of some inner properties of solutions of a large class of nonlinear diffusion–reaction equations.

**Definition 2.** *The problem (1), (2) has the instantaneous compactification property of support of the solutions (briefly, the ICSS property) if for any  $t > 0$  the support of an energy (generalized) solution  $u(x, t)$  is bounded even if it is unbounded for  $t = 0$ .*

The work of Evans and Knerr (1979) was the first where the ICSS property was systematically investigated in the case

$$u_t - \Delta u + b(u) = 0, \quad b(0) = 0, \quad b(s) > 0 \quad \forall s > 0.$$

The authors found the precise conditions on the behavior of the function  $b(u)$  in the neighborhood of 0, which provide ICSS property for any nonnegative, continuous bounded initial functions  $u_0(x) : u_0(x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty$ . From the papers Kersner, Nicolosi (1992) and Kalashnikov (1993) we have results about ICSS property for one-dimensional equations like

$$u_t - \left( u^m \right)_{xx} + g(x)u^p = 0, \quad m \geq 1, \quad p \in (0, 1),$$

which was established under the following conditions:

$$u_0 \leq c_0 (1 + |x|)^{-\gamma}, \quad g(x) \geq c_1 (1 + |x|)^{-\beta}, \quad 0 < \beta < \gamma(1 - p), \quad \gamma > 0, c_i > 0.$$

It should be noted that this phenomenon (ICSS property) may occur in other important physical models. For example, Gilding and Kersner (1990) for the equation

$$u_t = \left( u^m \right)_{xx} + \left( u^n \right)_x, \quad 0 < n < 1, \quad m \geq 1$$

had received the following theorem: if  $u_0(x) \sim cx^{-\frac{1}{1-n}}$  when  $x \rightarrow \infty$ , then

$u(x, t) > 0, \quad t \in \left( 0, \frac{1}{n} c^{1-n} \right), \quad x \geq x_0 > 0$  and  $u(x, t)$  has a compact support for

$t > \frac{1}{n} c^{1-n}$ . Hence the phenomenon of instantaneous compactification holds under



$u_0 = o\left(x^{-\frac{1}{1-n}}\right)$ . Analogous results were established for the first order hyperbolic equation  $u_t - \left(u^n\right)_x = 0$ ,  $0 < n < 1$ . Besides, for variational inequalities the ICSS property was investigated. But all of the mentioned results have been obtained for non-negative solution of second order equations and with assumption on initial function  $u_0(x)$ :  $u_0(x) \rightarrow 0$ ,  $|x| \rightarrow \infty$  or  $u_0(x)$  has a majorant. The main technique was the comparison principle (or maximum principle). To sum up, note here, that if  $u_0(x)$  does not have monotone majorant, then even for the simplest equation such as  $u_t - u_{xx} + u^p = 0$ ,  $0 < p < 1$  we cannot give answer about the behavior of solution as the maximum principle is inadequate.

Method has been utilized throughout work is called “energy method” (see works Diaz and Veron (1985); Antontsev, Diaz and Shmarev (1995); Veron and Shishkov (2007)). The idea of this approach consists getting special inequalities linking different energy norms of solution. The analysis of these inequalities leads to the necessary results. Universality is one of the advantages of the energy method, because it can be applied to the higher order equations. This approach finds its reflection in next theorem concerning the ICSS property of Cauchy problem for the mentioned above equation such as (1).

**Theorem 1.** *Let  $u(x, t)$  — is energy (generalized) solution of the problem (1), (2). Then in both of the cases:*

(a)  $p \geq 1$ ,  $0 < \lambda < 1$

(b)  $0 < \lambda < p$ , where  $\frac{n-2}{n+2} < p < 1$  for  $n > 2$ ; and  $0 < p < 1$  for  $n \leq 2$

*the problem (1), (2) has the ICSS property (e.g., solution  $u(x, t)$  of the problem (1), (2) is bounded for  $t > 0$ .)*

We would like to remark, that the proof of this theorem is based on the method in the spirit of paper Kersner and Shishkov (1996):

**Step 1.** In the integral identity (4) we substitute  $\phi(x, t) = u(x, t)\eta^{p+1}(x, t)$  (where  $\eta \geq 0$  is special cut-off function), integrating by parts and after some transformations we make replacement:  $w = \left|u\right|^{\frac{q-2}{p+1}} u$ . Next, we apply Young’s, Holder, Gagliardo—Nirenberg interpolation inequalities.

**Step 2.** Prove, that  $\forall \tau > 0 \quad \exists s(\tau) < \infty$  :

$$H_T(\tau, s) := E_T(\tau, s) + I_T(\tau, s) = 0 \Rightarrow w = 0 \Rightarrow u(x, t) = 0, \quad (5)$$

$$E_T(\tau, s) := \int_{\Omega(s) \times (\tau, T)} |w|^\alpha dxdt \neq 0 \text{ and } I_T(\tau, s) := \int_{\Omega(s) \times (\tau, T)} |w|^{p+1} dxdt \neq 0.$$

In order to complete proof of (5) enough to check three points:

a)  $H_T(\tau, s)$  is non-negative function as  $w := |u|^{\frac{q-2}{p+1}} u$ ,  $|w|^\alpha \geq 0$ ,  $|w|^{p+1} \geq 0$ , hence,  $E_T(\tau, s) \geq 0$  and  $I_T(\tau, s) \geq 0$ . To sum up, we have that  $H_T(\tau, s) \geq 0$ .

b)  $H_T(\tau, s)$  is non-increasing function as  $G_\tau^T(s) \rightarrow 0$ , when  $s \rightarrow \infty$ ,  $|w|^\alpha \geq 0$ ,  $|w|^{p+1} \geq 0$ , hence,  $E_T(\tau, s)$  and  $I_T(\tau, s)$  are non-increasing functions.

c) finally, we have to check inequality from analogue of lemma Stampakiya

$$H\left(\tau + H^\alpha(\tau, s), s + H^\beta(\tau, s)\right) \leq \delta H(\tau, s), \quad 0 < \delta < 1.$$

The analysis of these inequalities leads to the necessary results.

*This work was financial supported in part by Akhiezer Fund.*

### References

- Antontsev, S. N., Diaz, J. I., & Shmarev, S. I. (1995). The Support Shrinking Properties for Solutions of Quasilinear Parabolic Equations with Strong Absorption Terms. *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse Math.*, 6 (4), 5–30.
- Bernis, F. (1986). Finite speed of propagations and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equations with absorption. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A*, 104, 1–19.
- Bernis, F. (1988). Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains. *Math. Ann*, 279 (3), 373–394.
- Diaz, J. I., & Veron, L. (1985). Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 290 (2), 787–814.
- Evans, L. C., & Knerr, B. F. (1979). Instantaneous shrinking of the support of nonnegative solutions to certain parabolic equations and variational inequalities. *Illinois J. Math.*, 23, 153–166.
- Gilding, B. H., & Kersner, R. (1990). Instantaneous shrinking in nonlinear diffusion-convection. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 109, 385–394.
- Kalashnikov, A. S. (1993). On quasilinear degenerate parabolic equations with singular lower order terms and growing initial conditions. *Differentsial'nye Uravnenija*, 29 (6), 999–1009.
- Kersner, R., & Nicolosi, F. (1992). The nonlinear heat equation with absorption: effects of variable coefficients. *Journal of Math. Anal. And Appl.*, 170, 551–566.
- Kersner, R., & Shishkov, A. (1996). Instantaneous shrinking of the support of energy solutions. *Journal of Math. Anal. And Appl.*, 198, 729–750.
- Veron, L., & Shishkov, A. (2007). The balance between diffusion and absorption in semilinear parabolic equations. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 18 (1), 59–96.

# ПРО ЧАСТИННИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Т. В. Авдєєва

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

[avdeeva.tetyana@gmail.com](mailto:avdeeva.tetyana@gmail.com)

У комбінаторному аналізі при побудові генератрис різних послідовностей часто спочатку вдається знайти диференціальне рівняння, яке задовольняє дана генератриса, а вже потім генератриса шукається як розв'язок цього рівняння (Стенли, 1990; Van Lint, Wilson, 2001). Ми досліджуємо диференціальне рівняння, яке виникло при дослідженні генератрис для потужностей т. зв.  $\mathcal{D}$ -класів симетричних інверсних напівгруп (Ganyushkin, Mazorchuk, 2009).

**Теорема 1.1** Нехай  $k$  — фіксоване натуральне число. Частинним розв'язком диференціального рівняння

$$(x^2 - x)y'' + ((2k + 3)x - 1)y' + (k + 1)^2 y = 0 \quad (1)$$

є дробово-раціональна функція

$$y = \frac{1}{(x - 1)^{2k+1}} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}^2 x^i.$$

Наприклад, при  $k = 4$  маємо рівняння

$$(x^2 - x)y'' + (119x - 1)y' + 25y = 0$$

та його розв'язок

$$y = \frac{x^4 + 16x^3 + 36x^2 + 16x + 1}{(x - 1)^9};$$

а при  $k = 7$  — рівняння

$$(x^2 - x)y'' + (17x - 1)y' + 64y = 0$$

та розв'язок

$$y = \frac{x^7 + 49x^6 + 441x^5 + 1225x^4 + 1225x^3 + 441x^2 + 49x + 1}{(x - 1)^{15}}.$$

Знаючи один частинний розв'язок диференціального рівняння другого порядку, за допомогою формули Ліувілля (Степанов, 2004), можна знайти ще один, лінійно незалежний з першим, розв'язок цього рівняння.

**Теорема 2.2** Нехай функція  $y_1$  є частинним розв'язком диференціального рівняння (1),  $a_i = \binom{k}{i}^2$ . Тоді функція

$$y_2 = \frac{1}{(x - 1)^{2k+1}} \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i + 3y_1 \ln x,$$

де

$$\begin{aligned}
 b_{k-1} &= 6(ka_k + a_{k-1}), \\
 b_{k-2} &= \frac{1}{4}\left(\left(1 + (k-1)^2\right)b_{k-1} - 6(ka_k + (2-k)a_{k-1} - 2a_{k-2})\right), \\
 b_{k-3} &= \frac{6(3a_{k-3} + (k-4)a_{k-2} - (k-1)a_{k-1}) - (k-1)^2b_{k-1} + (2^2 + (k-2)^2)b_{k-2}}{9}, \\
 &\dots \\
 b_{s-1} &= \frac{-6(a_{s+1} + (k-2s)a_s + (s-k-1)a_{s-1}) - (s+1)^2b_{s+1} + (s^2 + (k-s)^2)b_s}{(k-s+1)^2},
 \end{aligned}$$

також є частинним розв'язком цього рівняння.

Зокрема, при  $k = 3$  рівняння

$$(x^2 - x)y'' + ((2k + 3)x - 1)y' + (k + 1)^2 y = 0$$

має розв'язок

$$y = \frac{72x^2 + 126x + 22}{(x-1)^7} + \frac{3(x^3 + 9x^2 + 9x + 1)}{(x-1)^7} \ln x,$$

а при  $k = 5$  рівняння

$$(x^2 - x)y'' + (13x - 1)y' + 36y = 0$$

має розв'язок

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{900x^4 + 5850x^3 + 7850x^2 + 2525x + \frac{137}{5}}{(x-1)^{11}} + \\
 &+ \frac{3(x^5 + 25x^4 + 100x^3 + 100x^2 + 25x + 1)}{(x-1)^{11}} \ln x.
 \end{aligned}$$

### Список літератури

- Ganyushkin, O., Mazorchuk, V. (2009). *Classical finite transformation semigroups. An introduction.* London: Springer-Verlag.
- Van Lint, J. H., Wilson, R. M. (2001). *A course in combinatorics* (2<sup>nd</sup> ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Стенли, Р. (1990). *Перечислительная комбинаторика.* Москва: Мир.
- Степанов, В. В. (2004). *Курс дифференциальных уравнений* (8-е изд., стер.). Москва: УРСС.

# ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ВИКРИВЛЕННЯ ОСІ НА ПОЛЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ И НАПРУЖЕНЬ ОРТОТРОПНИХ ТОРОЇДАЛЬНИХ ОБОЛОНКАХ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

О. О. Авраменко, Ю. О. Авраменко

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна*  
[iuliavra@yandex.ru](mailto:iuliavra@yandex.ru)

Оболонки постійної та змінної товщини знаходять широке застосування в різноманітних галузях сучасної техніки. Із зростанням вимог до сучасних конструкцій широке застосування отримали оболонки складної форми. До таких оболонок належать тороїдальні оболонки змінної товщини. Дослідження міцності та несучих характеристик оболонок такого типу пов'язане зі значними труднощами математичного та обчислювального характеру, обумовленими складністю системи диференціальних рівнянь у частинних похідних і відповідних граничних умов. Використання класичної теорії для дослідження напружено-деформованого стану такого типу може привести до значних похибок. Розв'язання задач про напружено-деформований стан тороїдальних оболонок змінної товщини запропоновано виконувати на основі уточненої теорії оболонок типу Тимошенка (1972). Для цього застосовується підхід, що складається з двох етапів:

- 1) застосування методу сплайн-апроксимації (Завьялов, Квасов, Мирошниченко, 1980) уздовж твірної для зведення двовимірної задачі до одновимірної;
- 2) розв'язання одержаної одновимірної крайової задачі стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації (Григоренко, Будак, Григоренко, 2010).

На основі запропонованого чисельно-аналітичного підходу проведено аналіз впливу викривлення осі на поля переміщень і напружень у тороїдальних оболонках змінної товщини під дією нормального тиску  $q = q(\eta, \theta)$ . Задача розв'язувалася при наступних вихідних даних:

Довжина оболонки вздовж осі  $0 \leq S \leq L$ ,  $L = 60$ , товщина змінюється за законом

$$h(\theta) = h_0(1 + \beta \cos 2\theta),$$

$$h_0 = 1, r = 15, \Delta\eta = \pi/3; \pi/2; 2\pi/3, \Delta\eta \cdot R = L.$$

Матеріал оболонки ортотропний і має наступні механічні параметри (Лехницький, 1977):

$$E_\eta = 5E, E_\theta = 1,25E, G_{\eta\theta} = 0,4E, G_{\eta\gamma} = G_{\theta\gamma} = 0,2E,$$

де  $E$  — модуль пружності, коефіцієнт Пуасона  $\nu_\eta = 0,045$ .

Досліджено вплив зміни кута осьового зрізу оболонки  $\Delta\eta = \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}$  та параметра зміни товщини  $\beta = 0, 0,3, 0,5, 0,7$  на нормальні переміщення та напруження тороїдальних оболонок постійного об'єму.

### Список літератури

- Григоренко, Я. М., Будає, В. Д., Григоренко, О. Я. (2010). *Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів*. Миколаїв: Іліон.
- Григоренко, Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко, А. Я. (2006). *Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей*. Киев: Академперіодика.
- Завьялов, Ю. С., Квасов, Ю. И., Мирошніченко, В. М. (1980). *Методы сплайн-функций*. Москва: Наука.
- Лехницький, С. Г. (1977). *Теория упругости анизотропного тела*. Москва: Наука.
- Тимошенко, С. П. (1972). *Курс теории упругости*. Киев: Наукова думка.

# СТРУКТУРНО-ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ МНОГОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ

Д. В. Бабич, Т. И. Дородных

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ, Киев, Украина*

[Babich\\_dv@ukr.net](mailto:Babich_dv@ukr.net), [domval@ukr.net](mailto:domval@ukr.net)

В данной работе, с использованием положений современной теории разрушения предлагается структурно-вероятностный подход к определению долговечности элементов конструкций при многоциклового усталости, связанной с прогрессирующим трещинообразованием отрывом при упругом деформировании под воздействием циклического нагружения.

При реализации структурно-вероятностного подхода к определению циклической долговечности конструктивных элементов из изотропных хрупких материалов при отрывном трещинообразовании используется статистический критерий усталостного разрушения в мерах поврежденности (плотность микро-трещин) в сочетании с приближенной моделью механизма накопления микродефектов в материале при повторяющемся нагружении (модель Даниэльса). Статистический критерий усталостного разрушения отождествляется со статистическим критерием статического разрушения (Бабич, 2011). Статистическая природа такого критерия связана со случайным (вероятностным) характером микроразрушений в микронеоднородном материале. Суть статистического критерия заключается в отождествлении значения концентрации микродефектов, вызываемого рассматриваемым видом нагружения тела, с критическим значением концентрации микродефектов, которое для данного материала является причиной начала макроразрушения (образование макротрещины) независимо от характера напряженного состояния.

Механизмы накопления микротрещин в материале зависят от свойств материала и особенностей нагружения тела (циклическость, знакопеременность, скорость нагружения и др.). В предлагаемом подходе принимается, что при циклическом знакопеременном нагружении концентрация микродефектов увеличивается только в полупериодах растяжения на этапе роста внутренних напряжений до уровня амплитудного значения. В полупериодах сжатия концентрация микродефектов с ростом циклов может изменяться только в сторону уменьшения за счет исчезновения («залечивания») образовавшихся при растяжении микротрещин в структурных элементах с пределами прочности на растяжение, равными либо меньшими значений действующих условных сжимающих напряжений (Тамуж, Куксенко, 1978).

Необходимо отметить, что явление «залечивания» имеет место не для всех материалов. Оно связано с особенностями структуры и состава материала, а реализация его возможна при высокочастотном циклическом нагружении (Тамуж, Куксенко, 1978).

При переменной скорости нагружения интенсивность роста плотности микротрещин имеет тенденцию к повышению с уменьшением скорости, в результате чего при всех прочих равных условиях максимальное значение плотности микродефектов получается при статическом нагружении (Бабич, 2011). Очевидно, с этой особенностью и возможным явлением «залечивания» связан экспериментально установленный факт увеличения долговечности конструкций с повышением частоты циклического нагружения до определенного уровня. Попутно отметим, что явление повышения временного сопротивления материалов при динамическом нагружении также связано с отмеченным выше понижением интенсивности образования трещин с ростом скорости нагружения.

Долговечность конкретной конструкции связана с интенсивностью накопления микродефектов в ее наиболее напряженных областях. Поэтому на первом этапе решается задача о напряженном состоянии конструкции. В качестве критерия разрушения структурных элементов материала отрывом принимается соотношение 1-й теории прочности.

$$\bar{\sigma}'_{33} \geq \sigma, \quad (1)$$

где  $\bar{\sigma}'_{33}$  — локальное истинное напряжение (истинные напряжения  $\bar{\sigma}'_{33}$  относятся к площадкам поврежденной среды, условные  $\sigma'_{33}$  — к площадкам сплошной среды);  $\sigma$  — случайная величина, которая обозначает пределы прочности отличающихся ориентацией анизотропных структурных элементов;  $\sigma'_{33}$  — условные напряжения в собственной системе координат индивидуальной трещины  $O'x'_1x'_2x'_3$ . Локальные напряжения  $\sigma'_{33}$  и средние напряжения  $\sigma_{kl}$ , задаваемые в неподвижной системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , отнесенной к телу, связаны преобразованием

$$\sigma'_{33} = \sigma_{kl}\alpha_{3k}\alpha_{3l}, \quad (2)$$

где  $\alpha_{3k}, \alpha_{3l}$  — направляющие косинусы локальной системы координат. Для аппроксимации распределения пределов прочности структурных элементов используется степенной закон с интегральной функцией вида

$$F_i(\sigma) = \left( \frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^{\alpha_i}. \quad (3)$$

В (3) обозначено:  $\sigma_i$  — максимальная величина предельных значений  $\sigma$  при растяжении ( $i = 1$ ) и сжатии ( $i = 2$ );  $\alpha_i$  — параметр разброса микропрочности.

Функция распределения микропрочности  $\varepsilon_i = F_i(\sigma)$  обозначает долю единичной площади ( $\varepsilon_i$ ) случайного сечения тела, на которой пределы прочности структурных элементов меньше некоторого значения  $\sigma$ . Напряжения в се-



чениях поврежденного материала при растяжении и сжатии определяются выражениями

$$\bar{\sigma}'_{33} \approx \frac{\sigma'_{33}}{1 - F_1(\bar{\sigma}'_{33})}, \bar{\sigma}'_{33} = \sigma'_{33}, \quad (4)$$

При статическом повышении напряжений до значений  $\sigma_{ij}$ , когда скорости деформации изменяются в интервале  $(10^{-6} \div 10^{-3})(1/c)$ , концентрация микротрещин в сечении тела определяется выражением

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i0} + (1 - \varepsilon_i) F_i(\bar{\sigma}'_{33}) = \varepsilon_{i0} + (1 - \varepsilon_i) \left( \frac{\bar{\sigma}'_{33}}{\sigma_i} \right)^{\alpha_i}, \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

При высокочастотном циклическом нагружении вместо (5) используется выражение

$$\varepsilon_{1i} = \varepsilon_{1(i-1)} + \left( 1 - \varepsilon_{1(i-1)} \right)^{1-\alpha_1} \left( \frac{\sigma'_{33}}{\sigma_1} \right)^{\alpha_1}, \quad (6)$$

Зависимость интенсивности трещинообразования от средней скорости циклического нагружения в соотношении (6) учитывается пошаговым нагружением до уровня напряжений  $\sigma'_{33}$  с выбором шага нагрузки в виде

$$\sigma'_{33i} = i \Delta \sigma'_{33}, \quad \Delta \sigma'_{33} = \frac{\sigma'_{33}}{m}, \quad (7)$$

где параметр  $m$  связан со скоростями нагружения и развития деформаций в материале. При известных периодах циклического нагружения  $T_c$  и собственных колебаний конструкции  $T_s$  в качестве такого параметра, предлагается использовать значение отношения  $m = \frac{T_c}{T_k}$ .

В случае  $m \leq 1$  установление заданного уровня напряжений считается условно мгновенным, а при  $m \gg 1$  — статическим.

После  $n$ -го цикла колебаний в наиболее напряженном сечении конструкции появятся разрушенные структурные элементы, плотность которых определяется соотношением

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} + \left[ \left( 1 - \varepsilon_n \right)^{1-\alpha_1} - 1 \right] \left( \sigma_{an} / \sigma_1 \right)^{\alpha_1}. \quad (8)$$

Здесь  $\varepsilon_{n-1}$  — концентрация микродефектов, образовавшихся вследствие предшествующего  $(n - 1)$ -го цикла колебаний. При наличии явления «залечивания» в полцикле сжатия исчезают трещины в элементах, у которых значения пределов прочности на растяжение в направлении сжатия равны или меньше амплитудного значения напряжения  $\sigma_{a0}$ . Если явление «залечивания» отсутствует, то в соотношении (8) второе слагаемое в квадратных скобках полагается

равным 0. Усталостное разрушение образца начинается при  $N$ -м растяжении, когда концентрация микротрещин достигнет критического значения  $\varepsilon_N = \varepsilon_{1cr}$

$$\varepsilon_{1cr} = \varepsilon_{N-1} + \left[ (1 - \varepsilon_{1cr})^{1-\alpha_1} - 1 \right] (\sigma_{aN} / \sigma_1)^{\alpha_1}. \quad (9)$$

Количеством циклов  $N$  определяется циклическая долговечность образца. Долговечность  $N$  находится путем решения последовательности уравнений типа (8) либо с помощью обратного хода вычислений на основании (9). Предлагается следующая приближенная формула для определения  $N$

$$N = \varepsilon_{1cr} \left[ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\sigma_{ai} / \sigma_1)^{\alpha_1} (1 - \varepsilon_i)^{1-\alpha_1} \right]^{-1}. \quad (10)$$

Здесь:  $\varepsilon_i = i(\varepsilon_{1cr} / k)$  — концентрации микродефектов из интервала  $[\varepsilon_{1(1)}, \varepsilon_{1cr}]$ . Параметры распределения пределов прочности структурных элементов ( $\alpha_1, \sigma_1$ ) в (3)—(10), определяемые методом моментов с использованием средних значений параметров макропрочности для выборки макрообразцов, имеют вид

$$\alpha_1 = -1 + \frac{1}{k_w} \sqrt{1 + k_w^2}, \sigma_1 = \frac{\sigma'_b (1 + \alpha_1)^{\frac{1}{\alpha_1} + 1}}{\alpha_1} \quad (11)$$

Критическое значение микродефектов для сплошной среды ( $\varepsilon_{10} = 0$ ) при растяжении определяется формулой

$$\varepsilon_{1cr} (1 - \varepsilon_{1cr})^{\alpha_1 - 1} = (\sigma'_b / \sigma_1)^{\alpha_1}. \quad (12)$$

В (11), (12) величина  $\sigma'_b$  представляет собой среднее значение предела прочности при растяжении материала, а  $k_w$  — соответствующий коэффициент вариации.

Согласно (5),(6), интенсивность приращения плотности микротрещин зависит от размеров и механических свойств повреждающейся конструкции. Интенсивность приращения плотности микротрещин от параметров циклического нагружения имеет неоднозначный характер, увеличиваясь с ростом амплитудного значения напряжений в определенном диапазоне изменения частоты нагружения и понижаясь с ростом скорости нагружения, определяемой частотой. При стремлении значений частоты возбуждения к значениям собственных частот конструкции слева ( $\omega \rightarrow \omega_k$ ) амплитудное значение напряжений  $\sigma_{an}$  возрастает. В связи с этим, согласно (6), возрастают и значения приращений плотности микродефектов с ростом циклов нагружения, в результате чего циклическая долговечность уменьшается. В случае  $\omega > \omega_k$  имеет место противополо-

ложный результат. Наиболее интенсивно долговечность конструкции уменьшается при условном равенстве частоты возбуждения и основной частоты собственных колебаний, соответствующем явлению резонанса. В этом случае долговечность будет минимальной.

### **Список литературы**

- Бабич, Д. В. (2011). Статистический критерий разрушения для хрупких материалов при статическом и повторяющихся нагружениях. *Теоретическая и прикладная механика*, 49 (3), 18—27.
- Тамуж, В. П., Куксенко, В. С. (1978). *Микромеханика разрушения полимерных материалов*. Рига: Зинатне.

# НЕПЕРЕРВНІ ОБМЕЖЕНІ ПРИ $t \in \mathbb{R}$ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

І. В. Бецко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

betskoiv@mail.ru

Досліджується питання існування і побудови неперервних розв'язків систем рівнянь вигляду

$$y^1(t+1) = J_1 y^1(t) + \tilde{F}^1(t, y^1(qt), y^2(qt)),$$

$$y^2(t+1) = J_2 y^2(t) + \tilde{F}^2(t, y^1(qt), y^2(qt)),$$

(1)

де  $J_1 = \text{diag}(J_1(\lambda_1), \dots, J_k(\lambda_k))$ ,  $J_2 = \text{diag}(J_{k+1}(\lambda_{k+1}), \dots, J_m(\lambda_m))$ ,

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m, \quad m \leq n.$$

При виконанні умов:

1)  $0 < \lambda_i < 1 \langle \lambda_j, i = 1, \dots, k, j = k+1, \dots, m, q \rangle 0$ ;

2)  $\theta = \max \left\{ \frac{2L}{1 - (\lambda^* + \delta_3)}, \frac{2L(\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)}{1 - (\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)} \right\} < 1$ ,

$\lambda^* = \max \{ \lambda_i, i = 1, \dots, k \}$ ,  $\lambda_{**} = \min \{ \lambda_j, j = k+1, \dots, m \}$ ;

3)  $|\tilde{F}^i(t, y'_1, y'_2) - \tilde{F}^i(t, y''_1, y''_2)| \leq L(|y'_1 - y''_1| + |y'_2 - y''_2|), i = 1, 2$ ,

де  $t \in \mathbb{R}$ ,  $y'_1, y'_2, y''_1, y''_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $L$  — деяка додатна стала;

4) усі компоненти вектор-функцій  $\tilde{F}^i(t, 0, 0), i = 1, 2$  є неперервними й обмеженими при всіх  $t \in \mathbb{R}$  функціями доведена наступна

**Теорема.** Нехай виконуються умови 1—4. Тоді система рівнянь (1) має неперервний і обмежений при  $t \in \mathbb{R}$  розв'язок

$$y(t) = (y^1(t), y^2(t))$$

у вигляді функціональних рядів

$$y^1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t),$$

$$y^2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t),$$

де  $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0, 1, \dots$ , — деякі неперервні й обмежені при  $t \in \mathbb{R}$  вектор-функції, які є розв'язками послідовності систем різницевих рівнянь

$$\begin{aligned} y_0^1(t+1) &= J_1 y_0^1(t) + \tilde{F}^1(t, 0, 0), \\ y_0^2(t+1) &= J_2 y_0^2(t) + \tilde{F}^2(t, 0, 0), \\ y_1^1(t+1) &= J_1 y_1^1(t) + \tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) - \tilde{F}^1(t, 0, 0), \\ y_1^2(t+1) &= J_2 y_1^2(t) + \tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) - \tilde{F}^2(t, 0, 0), \\ y_i^1(t+1) &= J_1 y_i^1(t) + \tilde{F}^1 \left( t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt) \right) - \\ &\quad - \tilde{F}^1 \left( t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt) \right), \quad i = 2, 3, \dots, \\ y_i^2(t+1) &= J_2 y_i^2(t) + \tilde{F}^2 \left( t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt) \right) - \\ &\quad - \tilde{F}^2 \left( t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt) \right). \end{aligned}$$

При виконанні умов 1—4 досліджено також властивості неперервних розв'язків системи (1) у випадку  $\tilde{F}^i(t, 0, 0) \equiv 0, i = 1, 2$ .

### Список літератури

- Бецко, І. В. (2015). Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем різнице-  
вих рівнянь. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, 2015 (4), 7—13.
- Бецко, І. В. (2016). Про існування неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь. *Нелінійні коливання*, 19 (1), 3—10.

# АЛГОРИТМ БЕЗ НАСИЧЕННЯ ТОЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНО-НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

В. І. Біленко<sup>1</sup>, К. В. Божонок<sup>1</sup>, С. Ю. Дзядик<sup>2</sup>, О. Б. Стеля<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Національний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова,

<sup>2</sup>Державний університет телекомунікацій,

<sup>3</sup>Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,

Київ, Україна

[katboz2014@gmail.com](mailto:katboz2014@gmail.com)

Актуальність подальшого розвитку та застосування апроксимаційного методу В. К. Дзядика (Дзядик, 1988; Біленко, 2013; 2015) обумовлена зростаючими вимогами при розв'язанні сучасних задач математичного та комп'ютерного моделювання до трьох основних характеристик обчислювальних алгоритмів: точності, швидкодії та інформаційної складності. При розв'язуванні подібних задач, як правило, використовуються потужні різницеві методи, методи скінченних елементів, сплайн-функції, інтегро-інтерполяційні методи та інші (Молчанов, 1988; Дейнека, 2001; Самарський, 2005). Ці методи мають основний недолік — явище насичення (відома проблема Фавара — Колмогорова в теорії наближення функцій та насичення в чисельному аналізі), наслідком якого може бути «вибух» похибок (Дзядик, 1988; Бабенко, 1978; Гаврилюк, Макаров, 2004; Гладкий, 2006).

Метою роботи є конструювання та обґрунтування оптимального в сенсі найкращого наближення алгоритму для розв'язання початково-крайових задач для рівнянь параболічного типу (Ладиженська, 1967; Дейнека, 2001; Стеля, 2011; 2015). Не обмежуючи загальності міркувань, проілюструємо застосування апроксимаційного методу до розв'язування наступної задачі: в області  $\Pi = [0; H] \times [0; \Theta]$  розглянемо рівняння параболічного типу

$$a(x, t) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = k(x, t) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u), \quad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x, 0) = \nu(x)$$

і крайовими умовами

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(H, t) = \mu_2(t),$$

де  $a(x, t)$ ,  $k(x, t)$ ,  $f(x, t, u)$  — є кусково-поліноміальні функції відповідного числа змінних.

Запропонований алгоритм узагальнює алгоритми, що були побудовані в попередніх роботах авторів (Біленко, 1992; Біленко, 2013; 2015) полягає в реалізації наступної схеми:

1. Задачу (1) запишемо в еквівалентній інтегро-функціональній формі (рівняння балансу) (Дзядик, 1988; Ладиженська, 1967; Дейнека, 2001; Молчанов, 1988):

$$L(u) = F(x, t, u), \quad (2)$$

де  $L(u)$  — алгебраїчно-нелінійний інтегральний оператор,  $F(x, t, u)$  — алгебраїчна функція трьох змінних, що одержується в результаті еквівалентного переходу.

2. Наближений розв'язок інтегро-функціонального рівняння (2) шукаємо у вигляді поліномів

$$u_{mn}(x, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} \omega_i(t) \omega_j(x), \quad (3)$$

де  $\{\omega_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$  — класичні ортогональні многочлени (Лежандра, Чебишева — Ерміта, Чебишева — Лагерра та загальні многочлени Якобі).

3. Інтегро-функціональне рівняння (2) замінюємо операторним рівнянням

$$L(u_{mn}(x, t)) = F(x, t, u_{mn}(x, t)) + \varepsilon_{mn}(x, t) \quad (4)$$

відносно поліноміального розв'язку (3) та з невідомою нев'язкою

$$\varepsilon_{mn}(x, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \delta_{ij} \tau_{ij} \omega_i(x) \omega_j(t), \quad (5)$$

де  $\delta_{00} = \frac{1}{4}$ ,  $\delta_{0j} = \delta_{i0} = \frac{1}{2}$ , якщо  $i \geq 1$  і  $j \geq 1$ , та  $\delta_{ij} = 1$ , якщо  $ij > 0$ .

4. Після виконання операцій множення та інтегрування в (4), прирівнюємо коефіцієнти при однакових членах  $x^i t^j$  і, в отриманій, таким чином, системі нелінійних алгебраїчних рівнянь, визначаємо усі невідомі коефіцієнти  $c_{ij}$  через  $\tau_{ij}$ ,  $i = \overline{0, m}$ ,  $j = \overline{0, n}$ .

Оцінку похибки алгоритму дослідимо для випадку, коли функцій  $\omega_i$  та  $\omega_j$  у формулах (3), (5) — це многочлени Чебишева першого роду

$$T_k(\cdot) = \cos(k \arccos(\cdot)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

зміщені, відповідно, на сегменти  $[0, H]$  і  $[0, \Theta]$ :  $T_i\left(2\frac{x}{H} - 1\right)$  та  $T_j\left(2\frac{t}{\Theta} - 1\right)$ .

Через  $C[\pi]$  та  $L_g^2[\pi]$  будемо позначати, відповідно, простори неперервних та сумовних з квадратом функцій при чебишовській вазі

$$g(h, \theta) := 1 / \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{h} - 1\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{2t}{\theta} - 1\right)^2} \quad (6)$$

на прямокутнику  $\pi = [0, h] \times [0, \theta]$  з загальновідомими нормами  $\|\cdot\|_{L_g^2[\pi]}$ ,  $\|\cdot\|_{C[\pi]}$ .

На основі результатів (Дзядик, 1988; Bilenko, 1992; Дейнека, 2001; Біленко, 1989; 2013) в припущенні, що  $\min_{(x,t) \in \Pi} a(x,t) \geq a_* > 0$ , доведено наступну теорему.

**Теорема.** Нехай при деяких  $h \in (0, H]$ ,  $\theta \in (0, \Theta]$  і деяких  $m, n = 1, 2, 3, \dots$  в кулі

$$\sigma(\rho) := \left\{ \psi \in C[\pi] : \|\psi\|_{C[\pi]} \leq \rho \right\}$$

існує єдиний розв'язок  $u(x, t)$  задачі (1) і єдиний розв'язок (3) операторного рівняння (4) на  $\pi$ . Тоді при вказаних  $m$  і  $n$  на  $\pi$  справедливі оцінки:

$$\text{а) } \|u(x, t) - u_{mn}(x, t)\|_X \leq K \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \delta_{ij} |\tau_{ij}|, \text{ де } K = K(h, \theta) = \text{const},$$

$$\text{б) } \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{\|u(x, y) - u_{mn}(x, y)\|_X}{E_{m, n}^{h\theta}(u)_X} = 1,$$

де  $X = C[\pi]$  або  $X = L_g^2[\pi]$  з вагою (6),  $E_{m, n}^{h\theta}(u)_X$  — найкраще наближення функції  $u(x, t)$  алгебраїчними поліномами двох змінних степені, не вище ніж  $m$  і  $n$ , відповідно.

Зазначимо, що рівність б) вказує на те, що запропонований алгоритм буде без насичення точності.

У доповіді наведені результати розв'язування модельних задач (Біленко, 2013) із монографій (Дзядик, 1988; Дейнека, 2001) та деяких практичних задач (Біленко, 2015; Стеля, 2015; Дзядик, 1973; Vozhonok, 2009).

### Список літератури

- Bilenko, V. I. (1992). Integro-approximational method for the modelling of certain class of nonlinear dynamic object. In *Proc. of the int. SYMP. on Comp math. modelling and scientific computations* (pp. 146–158). Sofia: Bulg. Acad. Sciences.
- Vozhonok, E. V. (2009). Some Existence Conditions for the Compact Extrema of Variational Functionals of Several Variables in Sobolev Space  $W_2^1$ . *Operator Theory: Advances and Applications*, 190, 141–155.
- Бабенко, К. И. (1978). О явлении насыщения в численном анализе. *Докл. АН СССР*, 241 (3), 505—508.
- Біленко, В. И. (1989). О погрешности а-метода решения интегральных уравнений Вольтерра с полиномиальными нелинейностями. *Укр. мат. журн.*, 41 (4), 537—543.
- Біленко, В. І., Воробйов, В. В., Пасенко, А. В., Підоріна, Л. І., Стеля, О. Б., Сьомик, О. Б., Шевченко, І. В. (2015). Інформаційно-математичне моделювання та прогнозування екологічного стану ґрунтових вод. *Техногенно-екологічна безпека та цивільний захист*, 8, 49–54.
- Біленко, В. І., Дерієнко, А. І., Кирилах, Н. Г. (2013). Кусково-поліноміальні наближення розв'язків жорстких задач на основі апроксимаційного методу В. К. Дзядика. *Журн. обчисл. та приклад. математики*, 2013 (2), 68—77.
- Біленко, В. І., Дзядик, С. Ю., Кирилах, Н. Г. (2015). Наближення поліномами розв'язків одного класу алгебраїчно-нелінійних крайових задач. В кн. *Матеріали XVI міжнар. наук. конференції ім. акад. Михайла Кравчука, 14—15 травня, Київ* (Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування) (с. 31—34).



- Гаврилюк, И. П., Макаров, В. Л. (2004). *Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности*. Киев: Ин-т математики НАН Украины.
- Гладкий, С. Л., Степанов, Н. А., Ясницкий, Л. Н. (2006). *Интеллектуальное моделирование физических проблем*. Под ред. Л. Н. Ясницкого. Москва — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика».
- Дейнека, В. С., Сергієнко, І. В. (2001). *Модели и методы решения задач в неоднородных средах*. Київ: Наукова думка.
- Дзядык, В.К. (1988). *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений*. Киев: Наукова думка.
- Дзядык, С. Ю. (1973). О поведении решения неоднородных дифференциальных уравнений с точкой поворота и малым параметром при производной. *Укр. мат. журн*, 25 (2), 657—662.
- Ладыженская, О. А., Солонников, В. А., Уральцева, Н. Н. (1967). *Линейные и квазilinearные уравнения параболического типа*. Москва: Наука.
- Молчанов, И. Н. (1988) *Машинные методы решения прикладных задач. Дифференциальные уравнения*. Киев: Наукова думка.
- Самарский, А. А., Михайлов, А. П. (2005). *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры*. (2-е изд., испр.). Москва: ФИЗМАТЛИТ.
- Стеля, О. Б. (2011). Моделирующий комплекс для расчета потока грунтовых вод в сложных гидрогеологических условиях. *Математическое моделирование*, 23 (4), 120—130.
- Стеля, О. Б., Потапенко, Л. І., Сіренко, І. П., Стеля, І. О. (2015). Монотонна різницева схема для нестационарного рівняння конвекції-дифузії-реакції. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка*, 2015 (4), 180—185.

# АДАПТОВАНІ РІЗНИЦЕВІ СІТКИ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ МОДЕЛІ МАСОПЕРЕНОСУ В СИСТЕМІ ГІДРОТЕХНІЧНИХ ВАЛІВ-ТЕРАС

І. М. Вергунова

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

[vergunova@bigmir.net](mailto:vergunova@bigmir.net)

Актуальним питанням є проведення ґрунтово-екологічного моніторингу земель сільськогосподарського використання зі складною поверхнею з виявленням забруднюючих речовин у зоні аерації ґрунту. За нерівномірності швидкості руху речовин на таких землях утворюються ділянки, де концентрації забруднюючих речовин набагато вищі.

Системи гідротехнічних валів-терас унаслідок складної побудови поверхні, за якою відбувається врегулювання витоків надмірної вологи (рис. 1), та наявності великих схилів є поверхнями, де розподіл забруднюючих речовин з часом отримує смугастий характер.

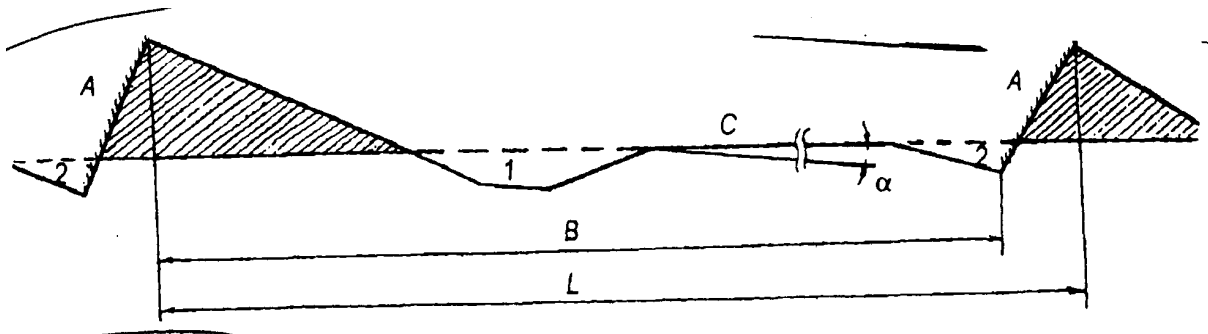


Рис. 1. Схема поперечного розрізу схилу з валами-терасами:

1 — відстань між осявими лініями валів; В — ширина смуги, що обробляється;

С — міжтерасний простір; α — крутизна схилу,

А — крутий відкіс валу, засіяний багаторічними травами;

1 — верхній ставок; 2 — нижній ставок

До розгляду пропонується модель міграції вигляду:

$$\begin{aligned} Zu &\equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Lu \equiv \\ &\equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^2 V \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} = -\lambda u_0 \phi(x) \delta(t - 0) \end{aligned}$$

в обмеженій області  $Q = \Omega \times (0 \leq t \leq T)$ , де  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  з кусково-гладкою поверхнею  $\partial\Omega$ ,  $\lambda$  — коефіцієнт напіврозпаду (розкладення),  $\phi(x_1, x_2)$  — функція, що описує поверхню валу-тераси, тобто верхню границю  $\Gamma$  області  $\Omega$ ,  $\phi(x_1, x_2) \in L_2(\Omega)$ ,  $u_0$  — поверхневе забруднення,  $u(x, t)$  — концентрація речовини в точці  $(x_1, x_2)$  в момент часу  $t$ ,  $D(x, t)$  — неперервно диференційована в

замкненій області  $\bar{Q}$ , невід’ємна та обмежена у відповідній області,  $V(x)$  — неперервна в  $\Omega$ .

Початково - крайові умови:

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\left( -\sum_{i=1}^2 D(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + Vu \right) \Big|_{x \in \Gamma} = k(\Gamma) c_0 q_0(x), \quad t \in [0, T]$$

$$\left( -\sum_{i=1}^2 D(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + Vu \right) \Big|_{x \in \partial\Omega \setminus \Gamma} = 0, \quad t \in [0, T].$$

Умови спряження на границі сусідніх терас  $i$  та  $i + 1$ :  $(\Gamma_{ii+1} \text{ та } \Gamma_{i+1i})$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{ii+1}} = \frac{\partial u_{i+1}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{i+1i}}, \quad u_i \Big|_{\Gamma_{ii+1}} = u_{i+1} \Big|_{\Gamma_{i+1i}}.$$

Тут  $k(\Gamma) = k \cdot \cos(\alpha(\Gamma))$ ,  $k$  — коефіцієнт провідності (поглинання) для поверхні,  $\alpha(\Gamma)$  — нахил відрізка поверхні тераси,  $\Gamma$  — кускова поверхня валу-тераси,  $q_0$  — потік води, що поступає з атмосферними опадами з концентрацією речовини —  $c_0$ .

Використовуючи різницеві апроксимації за допомогою методу розщеплення, отримані у Вергунова (2006), що давали абсолютно стійкий чисельний алгоритм інтегрування диференціального рівняння, розглядається методика побудови нерівномірної сітки, що отримує згущення за аналізом поведінки функції концентрації  $u(x, t)$  у випадках її доволі різкої зміни або робити їх більш рідкими, якщо зміни відбуваються дуже повільно.

Проведене розщеплення відповідного різницевого рівняння на чотири різницеві рівняння, що на кожному кроці враховують лише один напрям переносу збурень, для зони аерації кускових частин валів-терас має результатом

$$\frac{u_{i,j}^{n+1/4} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} (Z_x^+ u^{n+1/4}) =$$

$$= \frac{1}{4} (M_{xx}^- u^n + M_{xx}^+ u^{n+1/4} + M_{yy}^- u^n + M_{yy}^+ u^{n+1/4}) + \frac{\phi_{ij} \delta_{ij} \delta_0}{4};$$

$$\frac{u_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^{n+1/4}}{\Delta t} + \frac{1}{2} (Z_x^- u^{n+1/2} + Z_y^- u^{n+1/2}) =$$

$$= \frac{1}{4} (M_{xx}^- u^{n+1/2} + M_{xx}^+ u^{n+1/4} + M_{yy}^- u^{n+1/2} + M_{yy}^+ u^{n+1/4}) + \frac{\phi_{ij} \delta_{ij} \delta_0}{4};$$

$$\begin{aligned}
& \frac{u_{i,j}^{n+3/4} - u_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} + \frac{1}{2}(Z_x^- u^{n+3/4} + Z_y^- u^{n+3/4}) = \\
& = \frac{1}{4}(M_{xx}^- u^{n+1/2} + M_{xx}^+ u^{n+3/4} + M_{yy}^- u^{n+3/4} + M_{yy}^+ u^{n+1/2}) + \frac{\phi_{ij} \delta_{ij} \delta_0}{4}; \\
& \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+3/4}}{\Delta t} + \frac{1}{2}(Z_x^- u^{n+1}) = \\
& = \frac{1}{4}(M_{xx}^- u^{n+1} + M_{xx}^+ u^{n+3/4} + M_{yy}^- u^{n+3/4} + M_{yy}^+ u^{n+1}) + \frac{\phi_{ij} \delta_{ij} \delta_0}{4},
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
Z_x^+ u^{n+1} &= \frac{V_{ij}^+(u_{ij}^{n+1} - u_{i-1j}^{n+1})}{\Delta x}, & Z_x^- u^{n+1} &= \frac{V_{ij}^-(u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1})}{\Delta x}, \\
Z_y^- u^{n+1} &= \frac{V_{ij}^-(u_{i-1/2j+1}^{n+1} - u_{i-1/2j-1}^{n+1})}{\Delta y \operatorname{tg} \alpha}, \\
M_{xx}^- u^{n+1} + M_{xx}^+ u^{n+1} &= \tilde{D}_x \frac{u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}}{\Delta x^2} - \tilde{D}_x \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{i-1j}^{n+1}}{\Delta x^2}, \\
M_{yy}^- u^{n+1} + M_{yy}^+ u^{n+1} &= \\
&= \tilde{D}_y \frac{u_{i-1/2j+1}^{n+1} + u_{i-1/2j-1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1}}{\Delta y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} + \tilde{D}_y \frac{u_{i+1/2j+1}^{n+1} + u_{i+1/2j-1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1}}{\Delta y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha},
\end{aligned}$$

$$h_{i+1/2,j+1} = h_{i-1/2,j+1} = h_{i-1/2,j-1} = h_{i+1/2,j-1} = \frac{h}{2 \cos \alpha}, \quad h_{i+1,j} = h_{i-1,j} = h,$$

$\tilde{D}_x, \tilde{D}_y$  — збурені коефіцієнти дифузії,  $V_x^+, V_x^-, V_y^-$  — доданки однонапрявленого переносу.

За наведеною схемою реалізується перехід із шару  $t^n$  до шару  $t^{n+1}$  за чотири етапи з використанням шарів  $t^{n+1/4}, t^{n+1/2}, t^{n+3/4}$ . Якщо схема реалізована, то отримані значення у вузлах початково уведеної сітки є для шарів  $t^n, t^{n+1/4}, t^{n+1/2}, t^{n+3/4}, t^{n+1}$  з порядком локальної апроксимації  $O(\tau + |h|^2)$ .

Отже, для  $n + 1$  шару можна представити наступне рівняння:

$$\|Z_{\tau h}[u]_{\tau h} - [Zu]_{\tau h}\| = c_1 \tau + c_2 h^2, \quad c_1, c_2 - \text{const}, \quad (1)$$

в якому три невідомі — сталі та точний розв'язок в  $Z_{\tau h}[u_{ij}^{n+1}]$ .

За методом розщеплення для шару  $n + 1$  маємо значення  $u_{ij}^{n+1}$ , отримані на основі вузлів  $(\tau, h)$  та  $(\tau / 2, h)$ . Для отримання значення  $u_{ij}^{n+1}$  на основі вузлів  $(\tau, h / 2)$  проводяться додаткові обчислення за різницевою схемою. Обчис-

лені значення  $u_{ij}^{n+1}$  дають можливість на основі рівняння (1) сформуувати систему рівнянь

$$\begin{aligned}\|Z_{\tau h}[u_{ij}^{n+1}] - [Zu_{ij}^{n+1}]_{\tau h}\| &= c_1\tau + c_2h^2, \\ \|Z_{\tau h}[u_{ij}^{n+1}] - [Zu_{ij}^{n+1}]_{\tau h}\| &= c_1\tau / 2 + c_2h^2, \\ \|Z_{\tau h}[u_{ij}^{n+1}] - [Zu_{ij}^{n+1}]_{\tau h}\| &= c_1\tau + c_2h^2 / 4,\end{aligned}$$

після вирішення якої розглядається величина відхилення значень

$$|[u]_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}|.$$

В залежності від співвідношення цієї величини з вказаним припустимим значенням відбувається коригування кроку сітки за просторовими змінними. За умови перевищення припустимого значення на попередньому часовому шарі формується вдвічі гущіша сітка й проводяться обчислення на її основі, а потім знову проводиться порівняння з припустимим значенням відхилення. За його результатами можливе подальше загушення сітки. Якщо ж величина відхилення менша за припустиме значення, то проводиться збільшення кроку сітки.

### Список літератури

Вергунова, І. М. (2006). Метод розщеплення для неявних різницевоїх апроксимацій рівняння масопереносу. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування*, 4 (36), Ч. 1, 44—51.

**КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДЕЯКОЇ ЛІНІЙНОЇ  
СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ  
ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ВИРОДЖЕННЯМИ**

**М. Б. Віра**

*Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, Ніжин, Україна*

[VyraMaryna@mail.ru](mailto:VyraMaryna@mail.ru)

Розглядається можливість побудови асимптотичних розв'язків крайової задачі виду

$$\varepsilon^{2h} A(t) \frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon^h B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} + C(t, \varepsilon)x = f(t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$M_1 x(0, \varepsilon) + N_1 x(T, \varepsilon) = d_1(\varepsilon), \quad (2)$$

$$M_2 \frac{dx}{dt}(0; \varepsilon) + N_2 \frac{dx}{dt}(T, \varepsilon) = d_2(\varepsilon), \quad (3)$$

де  $x(t, \varepsilon)$  — шуканий  $n$ -вимірний вектор,  $t \in [0; T]$ ;  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  — малий дійсний параметр,  $h \in \mathbb{N}$ ;  $A(t)$ ,  $B(t, \varepsilon)$ ,  $C(t, \varepsilon)$ ,  $M_1, N_1$  —  $(n \times n)$ -матриці;  $M_2, N_2$  — матриці розмірності  $(n - 1) \times n$ ;  $f(t, \varepsilon)$ ,  $d_1(\varepsilon)$  —  $n$ -вимірні вектори;  $d_2(\varepsilon)$  —  $(n - 1)$ -вимірний вектор.

Передбачається, що виконуються такі умови:

1) матриці  $B(t, \varepsilon)$ ,  $C(t, \varepsilon)$  і вектор  $f(t, \varepsilon)$  допускають на відрізку  $[0; T]$  рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра  $\varepsilon$ , тобто

$$B(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(t);$$

$$C(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k C_k(t);$$

$$f(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t);$$

2) матриці  $A(t)$ ,  $B_k(t)$ ,  $C_k(t)$  і вектори  $f_k(t)$  нескінченно диференційовані на відрізку  $[0; T]$ ;

3) вектори  $d_1(\varepsilon)$ ,  $d_2(\varepsilon)$  зображаються у вигляді асимптотичних розвинень

$$d_1(\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k d_k^{(1)}; \quad d_2(\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k d_k^{(2)},$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;

4)  $\det A(t) = 0, \forall t \in [0; T]$ ;

5)  $\det C_0(t) \neq 0, \forall t \in [0; T]$ ;

б) квадратична в'язка матриць

$$L(t, \lambda) = C_0(t) + \lambda B_0(t) + \lambda^2 A(t) \quad (4)$$

регулярна при всіх  $t$  з відрізка  $[0; T]$  і зберігає на цьому відрізку сталу кронекерову структуру, тобто кратності всіх її власних значень і відповідних скінченних та нескінченних елементарних дільників є сталими на заданому відрізку;

7) в'язка матриць (4) має лише прості елементарні дільники, а саме: один нескінченний та  $(2n - 1)$  скінченних, що відповідають кореням  $\lambda_i(t)$ ,  $i = \overline{1, 2n - 1}$ , характеристичного рівняння

$$\det L(t, \varepsilon) = 0;$$

$$8) \operatorname{Re} \lambda_i(t) < 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad \operatorname{Re} \lambda_j(t) > 0, \quad j = \overline{l + 1, 2n - 1};$$

$$9) \det \begin{bmatrix} Q_0 \\ U_0 \Lambda_0 \end{bmatrix} \neq 0,$$

де

$$Q_0 = [M_1 \phi_1(0), \dots, M_1 \phi_l(0), N_1 \phi_{l+1}(T), \dots, N_1 \phi_{2n-1}(T)],$$

$$U_0 = [M_2 \phi_1(0), \dots, M_2 \phi_l(0), N_2 \phi_{l+1}(T), \dots, N_2 \phi_{2n-1}(T)],$$

$$\Lambda_0 = \operatorname{diag}\{\lambda_1(0), \dots, \lambda_l(0), \lambda_{l+1}(T), \dots, \lambda_{2n-1}(T)\},$$

$\phi_i(t)$ ,  $i = \overline{1, 2n - 1}$  — власні вектори, що відповідають власним значенням  $\lambda_i(t)$ ,  $i = \overline{1, 2n - 1}$  квадратичної в'язки (4).

Крайова задача для лінійної системи диференціальних рівнянь першого порядку досліджувалася в роботі Віра (2008). При цьому було використано метод асимптотичного інтегрування вироджених сингулярно збурених лінійних систем, розроблений в роботі Самойленко, Шкіль, Яковець (2000). У даній доповіді розглядається спосіб побудови асимптотики розв'язку крайової задачі (1)—(3) для лінійної системи диференціальних рівнянь другого порядку.

У результаті проведених досліджень дістанемо теорему.

**Теорема.** *Якщо квадратична в'язка матриць (4) має на відрізку  $[0; T]$  простий спектр і виконуються умови 1)–9), то при досить малих  $\varepsilon$  існує єдиний розв'язок крайової задачі (1)—(3), що виражається асимптотичною формулою*

$$x(t, \varepsilon) = x_m(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1-3h}),$$

у якій вектор  $x_m(t, \varepsilon)$  визначається наступним чином

$$x_m(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^k u_j^{(i)}(t) c_{k-j}^{(i)} \exp \left( \varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \\ + \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \sum_{i=l+1}^{2n-1} \sum_{j=0}^k u_j^{(i)}(t) c_{k-j}^{(i)} \exp \left( - \int_t^T \lambda_m^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \sum_{k=0}^m \varepsilon^k v_k(t),$$

де

$$\lambda_m^{(i)}(t) = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t),$$

$u_k^{(i)}(t)$ ,  $i = \overline{1, 2n-1}$ ,  $v_k(t)$  —  $n$ -вимірні вектор-функції,  $\lambda_k^{(i)}(t)$ ,  $i = \overline{1, 2n-1}$  — скалярні функції, які виражаються через коефіцієнти системи (1),  $c_k^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, 2n-1}$  — скаляри, які визначаються із крайових умов (2), (3).

### Список літератури

- Віра, М. Б. (2008). Двоточкова крайова задача для вироджених сингулярно збурених лінійних систем диференціальних рівнянь. *Науковий часопис НПП імені М. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*, 9, 47—64.
- Самойленко, А. М., Шкіль, М. І., Яковець, В. П. (2000). *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*. Київ: Вища школа.



# ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ГАММА-ФУНКЦІЇ

Н. О. Вірченко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Запровадимо узагальнену гамма-функцію у вигляді:

$${}_r\Gamma^{\tau,\beta}(\alpha;\delta,\omega;r) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t^\omega} {}_r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t^\delta}\right) dt, \quad (1)$$

де  $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$ ,  $\{\tau,\beta\} \subset \mathbb{R}$ ,  $\tau > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\tau - \beta < 1$ ,  $r > 0$ ,  $\delta \geq 1$ ,  $\omega > 0$ ,  ${}_r\Phi_1^{\tau,\beta}(\dots)$  — узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція (Virchenko, 1999):

$${}_r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{1}{B(a,c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} {}_1\Psi_1\left[\begin{matrix} (c,\tau) \\ (c,\beta) \end{matrix}; zt^\tau\right] dt, \quad (2)$$

тут  $B(a,c-a)$  — бета-функція  ${}_1\Psi_1(\dots)$  — функція Фокса — Райта (Wright, 1935).

**Лема** (про зображення функції  ${}_r\Phi_1^{\tau,\beta}$  рядом). Якщо  $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(a) > 0$ ,  $\tau > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\tau - \beta < 1$ , то справедлива формула:

$${}_r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(a + \tau n)}{\Gamma(c + \beta n)} \frac{z^n}{n!}. \quad (3)$$

Вивчено властивості, диференціальні та функціональні співвідношення для  ${}_r\Gamma^{\tau,\beta}(\dots)$ , одержано інтегральні зображення. Зокрема, справедлива

**Теорема.** При умовах існування функції  ${}_r\Gamma^{\tau,\beta}(\alpha;\delta,\omega;r)$  справедливі такі інтегральні зображення:

$${}_r\Gamma^{\tau,\beta}(\alpha;\delta,\omega;r) = r^{\frac{\alpha}{2}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(\alpha x - (\sqrt{r}e^x)^\omega\right) {}_r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r^{\frac{1-\delta}{2}}}{e^{x\delta}}\right) dx, \quad (4)$$

$${}_r\Gamma^{\tau,\beta}(\alpha;\delta,\omega;r) = r^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-(\sqrt{r}u)^\omega} {}_r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r^{\frac{1-\delta}{2}}}{u^\delta}\right) du, \quad (5)$$

де  $\operatorname{Re} \alpha > 0$ .

## Список літератури

- Virchenko, N. (1999). On some generalization of the functions of hypergeometric type. *Fractional Calculus and Appl. Analysis*, 2 (3), 233–244.
- Wright, E. M. (1935). The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. *J. London Math. Soc.*, 10, 286–293.

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕПЛО-  
МАСОПЕРЕНОСЕННЯ НА НЕСТАЦІОНАРНІ ДЕФОРМАЦІЙНІ  
ПРОЦЕСИ ҐРУНТОВОГО МАСИВУ В ОДНОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ**

**А. П. Власюк <sup>1</sup>, Н. А. Жуковська <sup>2</sup>, В. Ю. Федорчук <sup>2</sup>, Б. А. Ілляшик <sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Міжнародний економіко-гуманітарний університет

ім. акад. Степана Дем'янчука,

<sup>2</sup>Національний університет водного господарства та природокористування,

Рівне, Україна

[A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com](mailto:A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com), [N.A.Zhukovska@gmail.com](mailto:N.A.Zhukovska@gmail.com)

Розглядається масив ґрунту товщиною  $l$  в умовах тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та наявності рівня ґрунтових вод (РҐВ) (рис. 1). На рис. 1 область  $\Omega_1$  — це область повністю водонасиченого ґрунту, а  $\Omega_2$  — область ґрунту в природному стані. РҐВ розміщений на глибині  $l_1$  від водоупору ( $x = 0$ ) і вважається нерухомим.

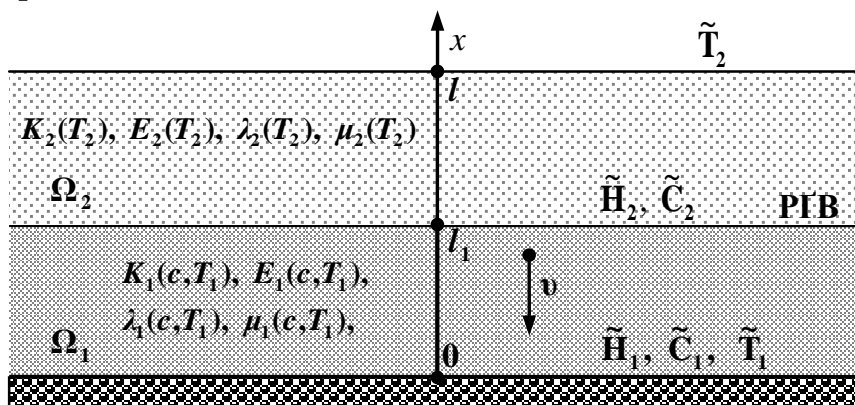


Рис. 1. Схема ґрунтового масиву при наявності РҐВ  
в одновимірному випадку

Математичну модель даної задачі в одновимірному випадку в загальноприйнятих позначеннях можна описати наступною крайовою задачею (Vlasyuk & Zhukovskaia, 2015; Власюк, Жуковська, 2015):

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_i(c, T_i) + 2\mu_i(c, T_i)) \frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} + \frac{\partial (\lambda_i(c, T_i) + 2\mu_i(c, T_i))}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial x} - \\
 & - \left( \frac{\partial (\lambda_i(c, T_i) + 2\mu_i(c, T_i))}{\partial x} T_i + \right. \\
 & \left. + (\lambda_i(c, T_i) + 2\mu_i(c, T_i)) \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) \alpha_T^{(i)} + X_i = \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, \quad x \in (0, l), \quad t > 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$X_i = \begin{cases} \gamma_{\text{зв}} + \frac{dp}{dx}, & i = 1, \\ \gamma_{\text{пп}}, & i = 2, \end{cases} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D(c, T_1) \frac{\partial c}{\partial x} \right) - v \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_m) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_T \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = n_p \frac{\partial c}{\partial t}, \quad x \in (0, l_1), t > 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) - \rho c_\rho \bar{v} \frac{\partial T_i}{\partial x} = c_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \quad x \in (0, l), t > 0, \quad (4)$$

$$v = -K(c, T_1) \frac{\partial h}{\partial x} + \nu_c \frac{\partial c}{\partial x} + \nu_T \frac{\partial T_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial n_p}{\partial t} = 0, \quad x \in (0, l_1), t > 0, \quad (5)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\partial U_i}{\partial x}, \quad \sigma_i = (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) (\varepsilon_i - \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i), \quad i = 1, 2, \quad x \in (0, l), t > 0, \quad (6)$$

$$l_1 U_1(0, t) = 0, \quad l_2 U_2(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$U_1(l_1) = U_2(l_1),$$

$$E_1(c, T_1) \frac{\partial U_1(l_1)}{\partial x} - \alpha_T^{(1)} (T_1 - T_0) = E_2(T_2) \frac{\partial U_2(l_1)}{\partial x} - \alpha_T^{(2)} (T_2 - T_0), \quad (8)$$

$$l_3 c(0, t) = \tilde{C}_1(t), \quad l_4 c(l_1, t) = \tilde{C}_2(t), \quad t > 0, \quad (9)$$

$$l_5 T_1(0, t) = \tilde{T}_1(t), \quad l_6 T_2(l, t) = \tilde{T}_2(t), \quad t > 0, \quad (10)$$

$$T_1(l_1) = T_2(l_1), \quad \lambda_T^{(1)} \frac{\partial T_1(l_1, t)}{\partial x} - \rho c_\rho v T_1(l_1, t) = \lambda_T^{(2)} \frac{\partial T_2(l_1, t)}{\partial x}, \quad (11)$$

$$l_7 h(0, t) = \tilde{H}_1, \quad l_8 h(l_1, t) = \tilde{H}_2, \quad t > 0, \quad (12)$$

$$U(x, 0) = \tilde{U}_0^{(1)}, \quad \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = \tilde{U}_0^{(2)}, \quad x \in (0, l), \quad (13)$$

$$c(x, 0) = \tilde{C}_0(x), \quad h(x, 0) = \tilde{H}_0(x), \quad x \in (0, l_1), \quad T(x, 0) = \tilde{T}_0(x), \quad x \in (0, l), \quad (14)$$

де  $\tilde{U}_0^{(1)}$ ,  $\tilde{U}_0^{(2)}$ ,  $\tilde{C}_0(x)$ ,  $\tilde{C}_1(t)$ ,  $\tilde{C}_2(t)$ ,  $\tilde{T}_0^{(i)}(x)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\tilde{T}_1(t)$ ,  $\tilde{T}_2(t)$ ,  $\tilde{H}_1$ ,  $\tilde{H}_2$  — деякі задані функції;  $L_i$ ,  $i = 1, 8$  — диференціальні оператори, що задають граничні умови для зміщень, концентрації солей, температури та напору при  $x = 0$  та  $x = l$  відповідно.

Тут: (1) — це рівняння рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту, що знаходиться у водонасиченому та природному станах;

(2) — масові сили;

- (3) — рівняння масоперенесення в неізотермічних умовах у повністю водонасиченому шарі ґрунту;
- (4) — рівняння теплоперенесення в обох шарах ґрунту;
- (5) — фільтрація підземних вод з вільної межі у водонасиченому ґрунтовому шарі;
- (6) — деформації та напруження в кожному шарі ґрунту;
- (7)—(14) — крайові умови та умови спряження для зміщень, концентрації солей, температури та напору.

### Список літератури

- Vlasyuk, A. P., & Zhukovskaya, N. A. (2015). Mathematical simulation of the stressed-strained state of the foundation of earth dams with an open surface under the influence of heat and mass transfer in two-dimensional case. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 88 (2), 329–341.
- Власюк, А. П., Жуковська, Н. А. (2015). Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтового масиву з вільною поверхнею під впливом тепло-масоперенесення розчинених у фільтраційному потоці речовин у двовимірному випадку. *Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. Серія: Технічні науки*, (3, Ч. 2), С. 409—417.

# НЕЛІНІЙНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОЇ ТЕРМОЧУТЛИВОЇ БЕЗМЕЖНОЇ ПЛАСТИНИ

В. І. Гавриш, Р. Р. Шкраб

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна

[Gavryshvasyl@gmail.com](mailto:Gavryshvasyl@gmail.com)

Сучасні електронні технології вимагають розроблення ефективних методів розв'язування нелінійних крайових задач теплопровідності для термочутливих (теплофізичні параметри залежать від температури) кусково-однорідних конструкцій, оскільки окремі їх конструкційні елементи та вузли часто функціонують в умовах інтенсивного нагрівання чи охолодження, що спричиняє залежність теплофізичних параметрів від температури. Такі породжуючі ефекти залежності фізичних величин від температурного поля та неоднорідність конструкцій у результаті впливу на них теплових навантажень, зумовлюють різноманітні збої електронних пристроїв, що приводить до їх часткового або цілковитого виходу з ладу. Тому побудова нелінійних математичних моделей теплопровідності є важливою та актуальною проблемою. Розв'язування крайових задач теплопровідності, що відображають нелінійні математичні моделі, є значно складнішим процесом, однак дає змогу точніше досліджувати термостійкість конструкцій.

Розглянуто ізотропну термочутливу шарувату безмежну пластину товщиною  $2\delta$  з теплоізолюваними лицевими поверхнями  $|z| = \delta$ , яка складається з  $n$  різнорідних шарів, що відрізняються геометричними (шириною) та теплофізичними (коефіцієнтом теплопровідності) параметрами, віднесена до декартової прямокутної системи координат  $(x, y, z)$  з початком на одній з її межових поверхонь (рис. 1). Пластина містить наскрізне включення, на межовій поверхні

$$K_0 = \{(x, 0, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$$

якої в області

$$\Omega_0 = \{(x, 0, z) : |x| \leq h, |z| \leq \delta\}$$

локально зосереджений тепловий потік з поверхневою густиною  $q_0 = const.$

На поверхнях шарів

$$K_j = \{(x, y_j, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\} (j = \overline{1, n-1})$$

та включення

$$K_{\pm} = \{(\pm h, y, z) : 0 \leq y \leq y_n, |z| \leq \delta\}$$

існує ідеальний тепловий контакт, а межова поверхня

$$K_n = \{(x, y_n, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$$

пластини теплоізолювана. У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури  $t(x, y)$  за просторовими координатами, який отримують розв'язанням нелінійного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(x, y, t) \frac{\partial t}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda(x, y, t) \frac{\partial t}{\partial y} \right] = 0 \quad (1)$$

з нелінійними крайовими умовами

$$t \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=y_n} = 0, \quad \lambda_0(t) \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0} = -q_0 S_-(h - |x|), \quad (2)$$

де

$$\lambda(x, y, t) = \sum_{j=1}^n \{ \lambda_j(t) + [\lambda_0(t) - \lambda_j(t)] S_-(h - |x|) \} N(y, y_{j-1})$$

— коефіцієнт теплопровідності неоднорідної пластини;  $\lambda_j(t), \lambda_0(t)$  — коефіцієнти теплопровідності матеріалів  $j$ -го шару пластини та включення, відповідно;  $y_0 = 0$ ;  $N(y, y_{j-1}) = S_+(y - y_{j-1}) - S_+(y - y_j)$ ;

$$S_{\pm}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0 \\ 0,5 \mp 0,5, & \zeta = 0 \\ 0, & \zeta < 0 \end{cases}$$

— асиметричні одиничні функції.

Запроваджено функцію

$$\begin{aligned} \vartheta = & \sum_{j=1}^n \{ N(y, y_{j-1}) \int_0^{t(x,y)} \lambda_j(\zeta) d\zeta + S_-(x+h) [N(y, y_{j-1}) \int_{t(-h,y)}^{t(x,y)} (\lambda_0(\zeta) - \lambda_j(\zeta)) d\zeta - \\ & - S_+(y - y_{j-1}) \int_{t(-h,y_{j-1})}^{t(x,y_{j-1})} (\lambda_0(\zeta) - \lambda_j(\zeta)) d\zeta S_+(y - y_{j-1}) + \\ & + S_+(y - y_j) \int_{t(-h,y_j)}^{t(x,y_j)} (\lambda_0(\zeta) - \lambda_j(\zeta)) d\zeta] - S_+(x-h) [N(y, y_{j-1}) \int_{t(h,y)}^{t(x,y)} (\lambda_0(\zeta) - \lambda_j(\zeta)) d\zeta - \\ & - S_+(y - y_{j-1}) \int_{t(h,y_{j-1})}^{t(x,y_{j-1})} (\lambda_0(\zeta) - \lambda_j(\zeta)) d\zeta + \\ & + S_+(y - y_j) \int_{t(h,y_j)}^{t(x,y_j)} (\lambda_0(\zeta) - \lambda_j(\zeta)) d\zeta] - S_+(y - y_{j-1}) \int_0^{t(x,y_{j-1})} \lambda_j(\zeta) d\zeta + S_+(y - y_j) \int_0^{t(x,y_j)} \lambda_j(\zeta) d\zeta \}, \quad (3) \end{aligned}$$

яку продиференційовано за змінними  $x$  та  $y$ . У результаті чого отримано:

$$\lambda(x, y, t) \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - F_1(x, y), \quad \lambda(x, y, t) \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + F_2(x, y), \quad (4)$$

де

$$F_1(x, y) = S_+ (|x| - h) \sum_{j=1}^n \left\{ \left[ (\lambda_0(t) - \lambda_j(t)) \frac{\partial t}{\partial x} \right] \Big|_{y=y_{j-1}} S_+(y - y_{j-1}) - \right. \\ \left. - \left[ \lambda_0(t) - \lambda_j(t) \right] \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{y=y_j} S_+(y - y_j) \right\},$$

$$F_2(x, y) = S_-(h - |x|) \sum_{j=1}^n \left[ (\lambda_0(t) - \lambda_j(t)) \frac{\partial t}{\partial y} \right] \Big|_{|x|=h} N(y, y_{j-1}).$$

З урахуванням виразів (4) вихідне рівняння (1) набуло такого вигляду:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} [F_1(x, y)] + \frac{\partial}{\partial y} [F_2(x, y)] = 0. \quad (5)$$

Крайові умови з використанням співвідношення (3) записано так:

$$\vartheta \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=y_n} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=0} = -q_0 S_-(h - |x|). \quad (6)$$

Запроваджена функція  $\vartheta$  (3) дала змогу звести нелінійне рівняння теплопровідності (1) до частково лінеаризованого рівняння з розривними коефіцієнтами (5) та цілком лінеаризованих крайових умов (6).

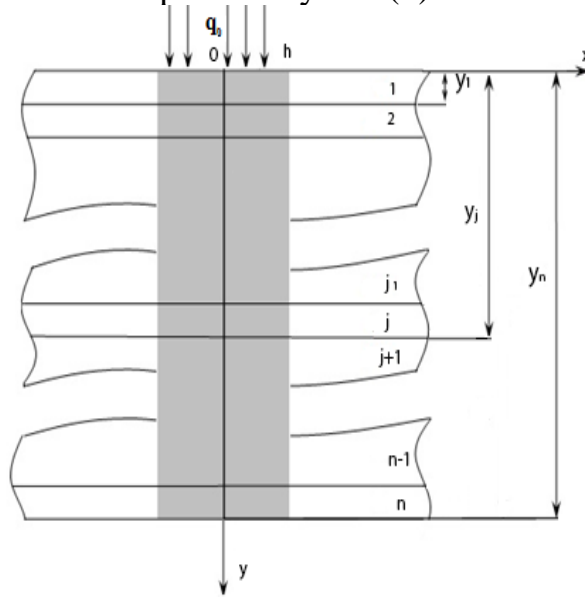


Рис. 1. Переріз ізотропної багатошарової безмежної пластини з чужорідним наскрізним включенням площиною  $z = 0$

Апроксимовано функції  $t(\pm h, y), t(x, y_j)$  виразами

$$t(\pm h, y) = t_1^{(jh)} + \sum_{k=1}^{m-1} (t_{k+1}^{(jh)} - t_k^{(jh)}) S_-(y - y_k^{(j)*}), \\ t(x, y_j) = t_1^{(j)} + \sum_{l=1}^{p-1} (t_{l+1}^{(j)} - t_l^{(j)}) S_-(x - x_l), \quad (7)$$

де  $y_k^{(j)*} \in ]y_{j-1}; y_j[; y_1^{(j)*} \leq y_2^{(j)*} \leq \dots \leq y_{m-1}^{(j)*}; x_l \in ]h; x_*[; x_* \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{p-1}; m, p$  — кількість розбиттів інтервалів  $]y_{j-1}; y_j[$  та  $]h; x_*[$  відповідно;  $t_k^{(jh)}$  ( $k = \overline{1, m}$ ),  $t_l^{(j)}$  ( $l = \overline{1, p}$ ) — невідомі апроксимаційні значення температури;  $x_*$  — значення координати, в якій температура практично дорівнює нулеві (знаходять з відповідної лінійної крайової задачі).

Після підстановки виразу (7) у співвідношення (5), одержано лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними відносно запровадженої функції  $\vartheta$

$$\Delta \vartheta = \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{l=1}^{p-1} F_j^{(l)}(y) \delta'_-(x - x_l) - S_-(h - |x|) \sum_{k=1}^{m-1} F_j^{(k)}(y) \right]. \quad (8)$$

Тут

$$F_j^{(k)}(y) = (t_{k+1}^{(jh)} - t_k^{(jh)}) [\lambda_0(t_{k+1}^{(jh)}) - \lambda_j(t_{k+1}^{(jh)})] \delta'_-(y - y_k^{(j)*});$$

$$F_j^{(l)}(y) = (t_{l+1}^{(j-1)} - t_l^{(j-1)}) [\lambda_0(t_{l+1}^{(j-1)}) - \lambda_j(t_{l+1}^{(j-1)})] S_+(y - y_{j-1}) -$$

$$-(t_{l+1}^{(j)} - t_l^{(j)}) [\lambda_0(t_{l+1}^{(j)}) - \lambda_j(t_{l+1}^{(j)})] S_+(y - y_j);$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ — оператор Лапласа в декартовій прямокутній системі}$$

координат;  $\delta_{\pm}(\zeta) = \frac{dS_{\pm}(\zeta)}{d\zeta}$  — асиметричні дельта-функції Дірака.

Застосовано інтегральне перетворення Фур'є за координатою  $x$  до рівняння (8) та умов (6) і отримано звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{2 \sin \xi h}{\xi} \sum_{k=1}^{m-1} F_j^{(k)}(y) + i \xi \sum_{l=1}^{p-1} e^{-i \xi x_l} F_j^{(l)}(y) \right] \quad (9)$$

і крайові умови

$$\left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dy} \right|_{y=y_n} = 0, \quad \left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dy} \right|_{y=0} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_0}{\xi} \sin \xi h, \quad (10)$$

де  $\bar{\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \xi x} \vartheta dx$  — трансформанта функції  $\vartheta(x, y)$ ;  $\xi$  — параметр інтегрального перетворення Фур'є;  $i = \sqrt{-1}$  — уявна одиниця.

Розв'язано задачу (9), (10), а після того застосовано обернене інтегральне перетворення Фур'є до її розв'язку. У результаті одержано вираз для функції  $\vartheta$



$$\vartheta = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \left\{ \cos \xi x \sum_{j=1}^n [2 \sin \xi h \cos \xi x \sum_{k=1}^{m-1} (\operatorname{ch} \xi(y - y_k^{(j)*}) S_-(y - y_k^{(j)*}) - \frac{\operatorname{ch} \xi y}{\operatorname{sh} \xi y_n} \operatorname{sh} \xi(y_n - y_k^{(j)*})) \times \right. \\ \times (t_{k+1}^{(\pm jh)} - t_k^{(\pm jh)}) (\lambda_0(t_{k+1}^{(\pm jh)}) - \lambda_j(t_{k+1}^{(\pm jh)})) + \sum_{l=1}^{p-1} \sin \xi(x_l - x) ((1 - \operatorname{ch} \xi(y - y_{j-1})) S_+(y - y_{j-1}) + \\ + \frac{\operatorname{ch} \xi y}{\operatorname{sh} \xi y_n} \operatorname{sh} \xi(y_n - y_{j-1})) (t_{l+1}^{(j-1)} - t_l^{(j-1)}) (\lambda_j(t_{l+1}^{(j-1)}) - \lambda_j(t_l^{(j-1)})) - ((1 - \operatorname{ch} \xi(y - y_j)) S_+(y - y_j) + \\ \left. + \frac{\operatorname{ch} \xi y}{\operatorname{sh} \xi y_n} \operatorname{sh} \xi(y_n - y_j)) (t_{l+1}^{(j)} - t_l^{(j)}) (\lambda_j(t_{l+1}^{(j)}) - \lambda_j(t_l^{(j)})) \right\} - \frac{2q_0}{\xi} \sin \xi h \cos \xi x \frac{\operatorname{ch} \xi(y - y_n)}{\operatorname{sh} \xi y_n} \} d\xi.$$

Підставлено вирази температурної залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалів для кожного зі шарів пластини та включення у співвідношення (3), (11) і після деяких перетворень отримано систему нелінійних рівнянь для визначення невідомих апроксимаційних значень температури  $t_k^{(jh)}$  ( $k = \overline{1, m}$ ) та  $t_l^{(j)}$  ( $l = \overline{1, p}$ ).

Шукане температурне поле для наведеної системи визначено за допомогою отриманого нелінійного рівняння з використанням співвідношень (3), (11) після підстановки в них конкретних виразів залежності коефіцієнта теплопровідності від температури для матеріалів кожного зі шарів пластини та включення.

Виконано числовий аналіз температури  $t$  в одношаровій пластині завширшки  $2l$  з наскрізним включенням за таких вихідних даних: матеріал пластини — кераміка ВК94-I, матеріал включення — срібло,  $n = 10$  — кількість розбиттів інтервалу  $]-l, l[$ ;  $h = l = 1$  mm,  $q_0 = 200$  W. В інтервалі температур  $[20$  °C;  $1230$  °C] наведені матеріали описують такими залежностями коефіцієнта теплопровідності від температури:

$$\lambda_1(t) = 13,67 \frac{W}{mK} (1 - 0,00064 \frac{1}{K} t), \quad \lambda_0(t) = 422,54 \frac{W}{mK} (1 - 0,00031 \frac{1}{K} t). \quad (12)$$

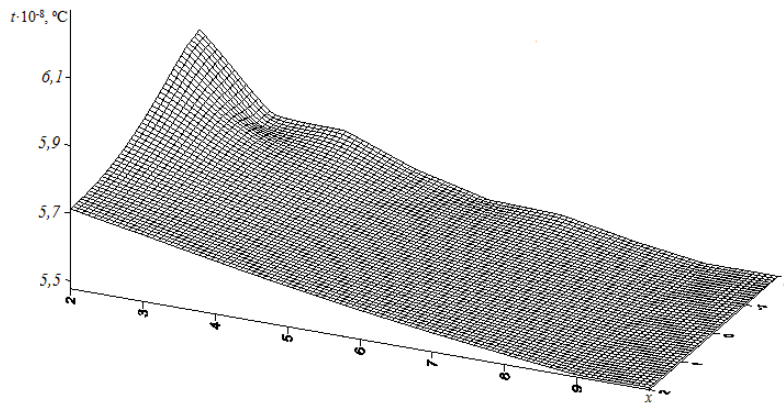


Рис. 2. Залежність температури  $t$  від координат  $x$  та  $y$

Побудовано (рис. 2) залежність температури  $t$  від координат  $x$  та  $y$ . Зазначимо, що максимум температури досягається в області зосередженого теплового потоку, а на поверхнях  $K_{\pm}$  ( $|x| = 1$ ) включення спостерігаємо виконання умов ідеального теплового контакту (відсутній стрибок температури), що відповідає розглядуваній математичній моделі.

**ГАМІЛЬТОНОВА СТРУКТУРА ДВОВИМІРНОЇ МКП-ІЄРАРХІЇ  
НА РОЗШИРЕНОМУ ФАЗОВОМУ ПРОСТОРІ  
ТА ЇЇ ДОДАТКОВИХ ОДНОРІДНИХ СИМЕТРІЙ**

**О. Є. Гентош**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
імені Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна*

[ohen@ua.fm](mailto:ohen@ua.fm)

У роботі, що пропонується, знайдено гамільтонове зображення для двовимірної МКП-ієрархії потоків Лакса з в'язями на розширеному фазовому просторі та його додаткових однорідних симетрій за допомогою перетворення Беклунда, яке пов'язує розширені двовимірні КП- та МКП-ієрархії і породжене узагальненим перетворенням подібності на спряженому просторі центрального розширення алгебри Лі інтегро-диференціальних операторів.

Розглянемо загальну Лі-алгебраїчну схему побудови ієрархії потоків Лакса на спряженому просторі до центрального розширення  $\mathfrak{g}_c := \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}$  2-коциклом Маурера — Картана алгебри Лі  $\mathfrak{g}$  інтегро-диференціальних операторів

$$A := \partial^p + \sum_{r < p} A_r \partial^r \in \mathfrak{g},$$

де

$$A_r \in C^\infty(\mathbb{S} \times \mathbb{S}; \mathbb{R}), \quad A_r := A_r(x, y), \quad p \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}, \quad \partial = \partial / \partial x, \\ x, y \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z},$$

з комутатором

$$[A, B] := A \circ B - B \circ A, \quad A, B \in \mathfrak{g}, \quad (1)$$

де символ « $\circ$ » позначає добуток операторів  $A, B \in \mathfrak{g}$  (див. Hentosh, Prykarpatsky (2007)). Відповідний комутатор на  $\mathfrak{g}_c$  має вигляд:

$$[(A, \alpha), (B, \beta)] := ([A, B], \omega(A, B)) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

де  $\omega(A, B) := (a, [\partial b / \partial y])$  — 2-коцикл Маурера — Картана,  $(\cdot, \cdot)$  — інваріантний відносно комутатора (1) скалярний добуток на  $\mathfrak{g}$  такий, що

$$(A, B) = \int_0^{2\pi} dx \operatorname{res}(AB), \quad \operatorname{res} A := A_{-1}, \quad A, B \in \mathfrak{g}. \quad (3)$$

Алгебру Лі  $\mathfrak{g}$  можна розкласти у пряму суму двох підалгебр Лі  $\mathfrak{g}_{\geq k} \subset \mathfrak{g}$  та  $\mathfrak{g}_{< k} \subset \mathfrak{g}$  трьома способами:

$$\mathfrak{g}_{\geq \kappa} := \left\{ A = \sum_{\kappa < r \leq p} A_r \partial^r \right\}, \quad \mathfrak{g}_{< \kappa} := \left\{ A = \sum_{r < \kappa} A_r \partial^r \right\},$$

тобто  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\geq \kappa} \oplus \mathfrak{g}_{< \kappa}$ ,  $\kappa = 0, 1, 2$ . Скалярний добуток (3) дозволяє ототожнити простори

$$\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}, \quad (\mathfrak{g}_{\geq \kappa})^* \simeq \mathfrak{g}_{< -\kappa}, \quad (\mathfrak{g}_{< \kappa})^* \simeq \mathfrak{g}_{> -\kappa}.$$

За допомогою ендоморфізму

$$\mathcal{R}_\kappa := (P_{\geq \kappa} - P_{< \kappa}) / 2,$$

$$P_{\geq \kappa} \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\geq \kappa}, \quad P_{< \kappa} \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{< \kappa}, \quad P_{\geq \kappa} \mathfrak{g}_{< \kappa} = 0, \quad P_{< \kappa} \mathfrak{g}_{\geq \kappa} = 0,$$

на алгебрі Лі  $\mathfrak{g}_c$  можна ввести ще один комутатор:

$$[(A, \alpha), (B, \beta)]_{\mathcal{R}_\kappa} := ([A, B]_{\mathcal{R}_\kappa}, \omega_{\mathcal{R}_\kappa}),$$

$$\mathcal{R}_\kappa := [\mathcal{R}_\kappa A, B] + [A, \mathcal{R}_\kappa B], \quad \omega(A, B)_{\mathcal{R}_\kappa} := \omega(\mathcal{R}_\kappa A, B) + \omega(A, \mathcal{R}_\kappa B),$$

який породжує на її спряженому просторі  $\mathfrak{g}_c^* \simeq \mathfrak{g}^*$ ,  $c \in \mathbb{C}$ , відносно скалярного добутку

$$((A, \alpha), (B, \beta)) = (A, B) + \alpha\beta,$$

дужки Лі — Пуассона:

$$\begin{aligned} \{\gamma, \mu\}_{\mathcal{R}_\kappa}(L) &= (l, [\nabla\gamma(L), \nabla\mu(L)]_{\mathcal{R}_\kappa}) + c\omega_{\mathcal{R}_\kappa}(A, B) := \\ &= (\nabla\gamma(L), \mathcal{L}_\kappa \nabla\mu(L)), \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\gamma, \mu \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}_c^*)$  — деякі гладкі за Фреше функціонали на  $\mathfrak{g}_c^*$ ,  $\nabla$  — оператор градієнта відносно скалярного добутку (3),  $\mathcal{L}_\kappa : T^*(\mathfrak{g}_c^*) \rightarrow T(\mathfrak{g}_c^*)$  — оператор Пуассона, який задає дужку Лі — Пуассона (4) у точці  $L \in \mathfrak{g}^*$ ,  $T(\mathfrak{g}_c^*)$  і  $T^*(\mathfrak{g}_c^*)$  — дотичний та кодотичний простори до  $\mathfrak{g}_c^*$  відповідно.

Будь-який функціонал Казимира  $\gamma \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}_c^*)$  як інваріант копрієднаної групи Лі, що відповідає алгебрі Лі  $\mathfrak{g}_c$ , задовольняє у точці  $L \in \mathfrak{g}^*$  рівняння:

$$[L - c\partial / \partial y, \nabla\gamma(L)] = 0,$$

розв'язки якого можна знайти за допомогою розкладів

$$\nabla\gamma_j(L) := \partial^j + \sum_{r < j} \sigma_{j,r} \partial^r$$

градієнтів функціоналів  $\gamma_j \in I(\mathfrak{g}_c^*)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

Дужки Лі — Пуассона (4) та функціонали Казимира  $\gamma_j \in I(\mathfrak{g}_c^*)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , породжують на  $\mathfrak{g}^*$  ієрархії гамільтонових потоків типу Лакса:

$$dl / dt_j = [(\nabla\gamma_j(L))_{\geq \kappa}, L - c\partial / \partial y], \quad j \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

де нижній індекс « $\geq \kappa$ » позначає проекцію відповідного оператора на підалгебру Лі  $\mathfrak{g}_{\geq \kappa}$ . Еволюційні рівняння (5) задають відомі двовимірні ієрархії Кадомцева — Петвіашвілі (КП-ієрархією) при  $\kappa = 0$ , модифіковану ієрархію Кадомцева — Петвіашвілі (мКП-ієрархії) — при  $\kappa = 1$  та ієрархію Гаррі — Дима (ГД-ієрархією) — при  $\kappa = 2$  (Szablikowski, 2006).

Рівняння (5) дозволяють накласти на оператор  $L \in \mathfrak{g}^*$  в'язі у вигляді:

$$L = L_{\geq \kappa} + \sum_{i=1}^N f_i \partial^{-1} f_i^* \partial^\kappa, \quad (6)$$

де  $f_i \in W := L_2(\mathbb{S} \times \mathbb{S}; \mathbb{R})$  — власні функції оператора  $(L - c\partial / \partial y)$ , пов'язані з різними власними значеннями  $\lambda_i$ ,  $f_i^* \in W$  — відповідні власні функції оператора  $(L - c\partial / \partial y)^*$ , спряженого до  $L - c\partial / \partial y$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Власні функції задовольняють такі співвідношення:

$$df_i / dt_j = (\nabla \gamma_j(L))_{\geq \kappa} f_i, \quad df_i^* / dt_j = -\partial^{-\kappa} (\nabla \gamma_j(L))_{\geq \kappa}^* \partial^\kappa f_i^*, \quad i = \overline{1, N}. \quad (7)$$

У роботах В. Ойвела та його співавторів, А. К. Прикарпатського та О. Є. Гентош досліджувалась проблема існування гамільтонового зображення для динамічної системи (5)—(7) на розширеному фазовому просторі  $\mathfrak{g}_c^* \oplus W^{2N}$ , яку було розв'язано за допомогою деякого перетворення Беклунда на цьому просторі при  $\kappa = 0$ . Застосування такого підходу у двох інших випадках пов'язане з певними труднощами. Тому виникає необхідність у пошуку нових підходів до знаходження гамільтонового зображення для динамічних систем на розширених фазових просторах при  $\kappa = 1$  та  $\kappa = 2$ . Основою запропонованого автором підходу є той факт, що при узагальненому перетворенні подібності елементів спряженого простору  $\mathfrak{g}_c^*$  траєкторії двовимірної КП-ієрархії відображаються на траєкторії двовимірної мКП-ієрархії.

Доповідь присвячена дослідженню гамільтонової структури розширеної ієрархії (5)—(7) при  $\kappa = 1$  для оператора (Szablikowski, 2006)

$$L := f_1^{-1} l f_1 - c f_1^{-1} (\partial f_1 / \partial y), \quad (8)$$

де

$L = L_{\geq 1} + q_1 + \partial^{-1} q_1^* \partial + \sum_{i=2}^N q_i \partial^{-1} q_i^* \partial$ ,  $l = l_+ + \sum_{i=1}^N f_i \partial^{-1} f_i^*$ ,  $l_+ := l_{\geq 0}$ , та оператор  $l \in \mathfrak{g}^*$  задовольняє системи еволюційних рівнянь з ієрархії (5)-(7) при  $\kappa = 0$ .

У роботі Hentosh, Prykarpatsky (2007) було показано, що при  $\kappa = 0$  ієрархія (5)—(7) для оператора  $l \in \mathfrak{g}^*$  є гамільтоною відносно дужки Пуассона, породженої оператором Пуассона  $\Theta = B'(\mathcal{L}_0 \otimes J)B'^*$ , та гамільтоніанів

$$\bar{\gamma}_j := \gamma_j \Big|_{L=f_1^{-1} l f_1 - c f_1^{-1} f_{1,y}}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Оператор  $\Theta$  було знайдено як результат перетворення Беклунда

$$B : (l_+, f_i, f_i^*)^T \mapsto (l = l_+ + \sum_{i=1}^N f_i \partial^{-1} f_i^*, f_i, f_i^*)^T, \quad i = \overline{1, N},$$

прямої суми операторів Пуассона

$$\mathcal{L}_0 : T^*(\mathfrak{g}_c^*) \rightarrow T(\mathfrak{g}_c^*) \quad \text{і} \quad J : T^*(W^{2N}) \rightarrow T(W^{2N}),$$

що діють за правилами:

$$\begin{aligned} & \overset{\mathcal{L}_0}{\delta\gamma / \delta l_+} \mapsto [\delta\gamma / \delta l_+, l_+]_+, \\ & (\delta\gamma / \delta f_i, \delta\gamma / \delta f_i^*)^T \mapsto (-\delta\gamma / \delta f_i^*, \delta\gamma / \delta f_i)^T, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

для довільного гладкого за Фреше функціонала  $\gamma \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}_c^* \oplus W^{2N})$ , на розширеному фазовому просторі  $\mathfrak{g}_c^* \oplus W^{2N}$ .

Ієрархія (5)—(7) для оператора (8) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} dL / dt_j &= [(\nabla\gamma_j(L))_{\geq 1}, L - c\partial / \partial y], \\ dq_i / dt_j &= (\nabla\gamma_j(L))_{\geq 1} q_i, \\ dq_i^* / dt_j &= -\partial^{-1}(\nabla\gamma_j(L))_{\geq 1}^* \partial q_i^*, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (9)$$

Узагальнене перетворення подібності (8) породжує на розширеному фазовому просторі  $\mathfrak{g}_c^* \oplus W^{2N}$  перетворення Беклунда

$$B_1 : \begin{pmatrix} l_+ \\ f_1 \\ f_1^* \\ f_i \\ f_i^* \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} L = f_1^{-1} l f_1 - c f_1^{-1} (\partial f_1 / \partial y) \\ q_1 = f_1^{-1} (l_+ f_1) + (\partial^{-1} f_1^* f_1) + \\ + \sum_{i=2}^N (f_1^{-1} f_i) (\partial^{-1} f_i^* f_1) - c f_1^{-1} (\partial f_1 / \partial y), \quad i = \overline{2, N}. \\ q_1^* = -(\partial^{-1} f_1^* f_1) q_i = f_1^{-1} f_i \\ q_i^* = -(\partial^{-1} f_i^* f_1) \end{pmatrix}$$

Таким чином, оператор Пуассона  $\Theta_1$ , який задає гамільтонове зображення для ієрархії (9), можна знайти за допомогою безпосередніх обчислень згідно з правилом  $\Theta_1 = B_1' \Theta B_1'^*$ . Відповідними гамільтоніанами є функціонали Казимира  $\gamma_j \in I(\mathfrak{g}_c^*)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

У статті Hentosh, Prykarpatsky (2007) також було показано, що ієрархія (5)-(7) при  $\kappa = 0$  для оператора  $l \in \mathfrak{g}^*$  володіє множиною  $N$  ієрархій додаткових однорідних симетрій. Ці ієрархії є гамільтоновими відносно оператора Пуассона  $\Theta$  та натуральних степенів власних значень асоційованої спектральної задачі як гладких за Фреше функціоналів на спільних поверхнях рівня функціоналів

$$\mu_k := \langle f_k, f_k^* \rangle, \quad k = \overline{1, N},$$

де  $\langle \dots \rangle$  — скалярний добуток на  $W$ , у просторі  $\mathfrak{g}_c^* \oplus W^{2N}$ . При перетворенні Беклунда  $B_1$  вони набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}
dL / d\tau_{j,k} &= -[\tilde{M}_k^j, L - c\partial / \partial y], \\
dq_i / d\tau_{j,k} &= (-\tilde{M}_k^j + \delta_k^i(L - c\partial / \partial y)^j)q_i, \\
dq_i^* / d\tau_{j,k} &= -\partial^{-1}(-\tilde{M}_k^j + \delta_k^i(L - c\partial / \partial y)^j)^* \partial q_i^*, \quad i = \overline{1, N},
\end{aligned} \tag{10}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_1^j &:= \sum_{\rho=0}^{j-1} (((L - c\partial / \partial y)^\rho \cdot 1) \partial^{-1} (\partial^{-1} (L - c\partial / \partial y)^{(j-1-\rho)^*} \partial q_1^*)) + \\
&\quad + ((L - c\partial / \partial y)^{j-1} q_1), \\
\tilde{M}_k^j &:= \sum_{\rho=0}^{j-1} (((L - c\partial / \partial y)^\rho q_k) \partial^{-1} (\partial^{-1} (L - c\partial / \partial y)^{(j-1-\rho)^*} \partial q_k^*)), \\
&\quad k = \overline{2, N}.
\end{aligned}$$

Гамільтонову структуру для додаткових однорідних симетрій ієрархії (10) можна отримати як результат композиції перетворень Беклунда  $B$  та  $B_1$ .

### Список літератури

- Hentosh, O. Ye., & Prykarpatsky, A. K. (2007). Integrable three-dimensional coupled nonlinear dynamical systems related with centrally extended operator Lie algebras. *Opuscula Mathematica*, 27 (2), 231–244.
- Szablikowski, B. M. (2006). Gauge transformation and reciprocal link for (2+1)-dimensional integrable field systems. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 13 (1), 117–128.

# ПРО ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

І. В. Гончар, М. Ф. Городній

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
на [goncharinna@ukr.net](mailto:goncharinna@ukr.net)

Нехай  $X$  — скінченновимірний комплексний банахів простір з нормою  $\|\cdot\|$  і нульовим елементом  $\bar{0}$ ,  $I$  — одиничний,  $A, B$  — лінійні оператори в  $X$ .

У роботі досліджується питання про існування та єдиність обмеженого розв'язку різницевого рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + y_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} = Bx_n + y_n, n \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

у якому  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — задана, а  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — шукана обмежені послідовності елементів простору  $X$ .

Покладемо

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}.$$

Нехай спектри  $\sigma(A), \sigma(B)$  операторів  $A, B$  не перетинаються з  $S$ ;  $\sigma_-(A), \sigma_-(B)$  — частини спектрів операторів  $A, B$ , які лежать всередині, а  $\sigma_+(A), \sigma_+(B)$  — зовні кола  $S$ . Вважатимемо, що множини  $\sigma_{\pm}(A), \sigma_{\pm}(B)$  непорожні. Тоді простір  $X$  розкладається у пряму суму інваріантних відносно  $A$  підпросторів

$$X = X_+(A) \dot{+} X_-(A)$$

таким чином, що звуження  $A_-, A_+$  оператора  $A$  на  $X_-(A), X_+(A)$  мають спектри  $\sigma_-(A), \sigma_+(A)$ . Також

$$X = X_+(B) \dot{+} X_-(B)$$

і звуження  $B_-, B_+$  оператора  $B$  на  $X_-(B), X_+(B)$  мають такі ж властивості.

Використовуючи результати Дороговцева (1992), ми отримали наступний результат.

**Теорема 1.1** У скінченновимірному комплексному банаховому просторі  $X$  різницеве рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  для довільної обмеженої послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

1)  $\sigma(A) \cap S = \emptyset, \sigma(B) \cap S = \emptyset$ ;

2)  $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$ .

При виконанні умов 1), 2) встановлено, що єдиний обмежений розв'язок  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  різницевого рівняння (1), що відповідає обмеженій послідовності

$\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , будується наступним чином. Позначимо через  $P_-, P_+$  проектори в  $X$  на підпростори  $X_-(A), X_+(B)$ , що відповідають зображенню

$$X = X_-(A) \dot{+} X_+(B),$$

$P_-^A, P_+^A$  — проектори в  $X$  на  $X_-(A), X_+(A)$ , що відповідають зображенню

$$X = X_-(A) \dot{+} X_+(A),$$

а  $P_-^B, P_+^B$  — проектори в  $X$  на  $X_-(B), X_+(B)$ , що відповідають зображенню

$$X = X_-(B) \dot{+} X_+(B).$$

Покладемо для кожного  $n \geq 1$

$$P_+^n = A^n P_+ A_+^{-n} P_+^A, P_-^n = I - P_+^n,$$

$$P_-^{-n} = B^{-n} P_- B_-^n P_-^B, P_+^{-n} = I - P_-^{-n},$$

$$x_1 = P_- y_0 + \sum_{\nu=-\infty}^{-1} P_- B_-^{|\nu|} P_-^B y_\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} P_+ A_+^{-\nu} P_+^A y_\nu,$$

при  $n \geq 2$

$$x_n = P_-^{n-1} y_{n-1} + A_- P_-^{n-2} y_{n-2} + \dots + A_-^{n-2} P_-^1 y_1 + \sum_{\nu=-\infty}^0 A_-^{n-1} P_- B_-^{|\nu|} P_-^B y_\nu - \sum_{\nu=n}^{\infty} P_+^{n-1} A_+^{n-1-\nu} P_+^A y_\nu,$$

при  $n \leq 0$

$$x_n = P_-^{n-1} y_{n-1} + \sum_{\nu=-\infty}^{n-2} P_-^{n-1} B_-^{|\nu|+n-1} P_-^B y_\nu - B_+^{-|n|-1} P_+ y_0 - B_+^{-|n|} P_+^{-1} y_{-1} - \dots - B_+^{-1} P_+^{-|n|} y_{-|n|} - \sum_{\nu=1}^{\infty} B_+^{n-1} P_+ A_+^{-\nu} P_+^A y_\nu.$$

### Список літератури

Дороговцев, А. Я. (1992). *Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем*. Киев: Вища школа.



**О ИССЛЕДОВАНИИ ПОЛУЯВНЫХ СИСТЕМ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
С РЕГУЛЯРНЫМИ И СИНГУЛЯРНЫМИ ПУЧКАМИ МАТРИЦ**

**Е. А. Гончаренко**

*Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина,  
[goncharenkokatya@gmail.com](mailto:goncharenkokatya@gmail.com)*

Настоящая работа посвящена приложению теории регулярных и сингулярных пучков постоянных матриц к исследованию задачи Коши вида:

$$\begin{cases} Ax + Bx' = f(t, x), \\ x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0, \end{cases} \quad (1)$$

где матрицы  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A + \lambda B$  — сингулярный пучок постоянных матриц размерности  $m \times n$ , вектор-функция  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ , где

$$D = \{(t, x) : 0 < |t| \leq a, \|x\| \leq b\}, 0 < a, b = \text{const.}$$

Согласно теории приводимости регулярного и сингулярного пучков матриц к каноническому квазидиагональному виду, задача (1) сводится к системе:

$$\begin{cases} \psi(t, z_1, z_2) = 0, \\ \frac{d}{dt} z_2 = \phi(t, z_1, z_2), \\ z_1(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \\ z_2(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{cases} \quad (2)$$

где

$$t \subseteq \mathbb{R}, z_1 : (0; t_0] \rightarrow \mathbb{R}^p, z_2 : (0; t_0] \rightarrow \mathbb{R}^l, p + l = n,$$

$$\psi : (0; t_0] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

$$\phi : (0; t_0] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l, k + l = m.$$

Вопрос о разрешимости задачи (1) сводится к первоначальному разрешению задачи для функциональной подсистемы системы (2). Найдены достаточные условия (доказано 3 теоремы) существования решений задачи (1) и исследован вопрос о числе ее решений.

**Список литературы**

- Campbell, S. L., Petzold, L. R. (1983). Canonical forms and solvable singular system of differential equations. *SIAM J. Alg. & Dis Methods*, 4, 517–521.
- Самкова, Г. Е., Шарай, Н. В. (2002). Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц. *Нелінійні коливання*, 5 (2), 224—236.

**ПРО НЕОБХІДНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ  
ДЛЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ  
У ВИПАДКУ НЕВАРІАЦІЙНОГО РОЗВ'ЯЗКУ**

**С. О. Горбонос**

*Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара,  
Дніпропетровськ, Україна  
[gorbonos.so@gmail.com](mailto:gorbonos.so@gmail.com)*

Розглядається наступна задача оптимального керування для параболічного рівняння з необмеженими коефіцієнтами:

$$y_t - \operatorname{div}(\nabla y + A(x)\nabla y) = f \text{ на } \Omega \times [0, T], \quad (1)$$

$$y = 0 \text{ на } \Gamma_1 \times [0, T], \quad \frac{\partial y}{\partial \nu_A} = u \text{ на } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (2)$$

$$y(t_0, x) = y_0 \in L^2(\Omega) \text{ на } \Omega, \quad (3)$$

$$I(u, y) = \|y - y_d\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 + \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))}^2 \rightarrow \inf, \quad (4)$$

де  $N \geq 2$ ,  $T > 0$  — задана величина,  $\Omega$  — відкрита, обмежена множина простору  $\mathbb{R}^N$  з Ліпшицевою межею,  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,  $u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$ ,  $y_d \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  і  $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  — задані розподілення, а  $A(x)$  — кососиметрична матриця, коефіцієнти якої належать до простору  $L^2$ . Особливість даного класу задач полягає в тому, що поставлена задача керування є розв'язною і має єдиний розв'язок в той час, як відповідна початково-крайова задача (1)—(3) не є коректною за Адамаром. Розглядаючи проблему досяжності розв'язків задачі оптимального керування (1)—(4) розв'язками апроксимованих задач з  $L^\infty$ -наближеннями вихідної матриці потоку  $A(x)$ , було запропоновано класифікацію розв'язків задачі оптимального керування на два класи: варіаційні і неваріаційні. У роботі Горбонос, Когут (2014) було встановлено та обгрунтовано необхідні умови оптимальності для задачі (1)—(4) у випадку, коли вона має варіаційний розв'язок, розглянемо тепер неваріаційний випадок.

**Означення 1.** Пару  $(u^*, y^*) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  називатимемо неваріаційним розв'язком задачі оптимального керування (1)—(4), якщо

$$I(u^*, y^*) = \inf_{(u, y) \in \Xi} I(u, y), \quad (u^*, y^*) \in \Xi$$

і має місце нерівність

$$\begin{aligned} \|y\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|y(T)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\neq \int_0^T \int_\Omega \langle f, y \rangle_{H^{-1}(\Omega); H_0^1(\Omega)} dx dt + \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_2} u y dH^{N-1} dt + \frac{1}{2} \|y_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Для апроксимації неваріаційних розв'язків задачі (1)—(4) було залучено оператор зрізки  $T_\varepsilon : S^N \rightarrow S^N$ , який задається наступним чином:

$$T_\varepsilon(A) = [T_\varepsilon(a_{ij})]_{i,j=1}^N \text{ для будь-якого } \varepsilon > 0,$$

де  $T_\varepsilon : R \rightarrow R$  — функція зрізки така, що

$$T_\varepsilon(s) = \max\{\min\{s, \varepsilon^{-1}\}, -\varepsilon^{-1}\}.$$

У результаті застосування оператора зрізки, отримано наступну послідовність задач оптимального керування:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t - \operatorname{div}(\nabla y + A(x)\nabla y) = f \text{ на } \Omega_\varepsilon \times [0, T], \\ y = 0 \text{ на } \Gamma_1 \times [0, T], \frac{\partial y}{\partial \nu_A} = u \text{ на } \Gamma_2 \times [0, T], \\ \frac{\partial y}{\partial \nu_A} = v \text{ на } \Gamma_\varepsilon \times [0, T], y(t_0, x) = y_0 \in L^2(\Omega) \text{ на } \Omega_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (5)$$

$$I_\varepsilon(u, v, y) = \|y - y_d\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))}^2 + \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))}^2 + \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \|v\|_{L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon))}^2, \quad (6)$$

де  $y_d \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  і  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  задані;  $y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$ ,  $u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$  — керування, а  $v \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon))$  — фіктивне керування;  $\nu$  — зовнішня нормаль одиничного вектора на  $\Gamma_2$  і  $\Gamma_\varepsilon$ ;  $\alpha$  — додатне число таке, що  $\varepsilon^{-\alpha} H^{N-1}(\Gamma_\varepsilon) \rightarrow 0$  коли  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Було встановлено, що для  $\varepsilon > 0$  відповідна задача оптимального керування (5), (6) має єдиний розв'язок  $(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon$ , а задача керування (1)—(4) є варіаційною границею послідовності задач умовної оптимізації (5), (6). При дослідженні асимптотичної поведінки розв'язків задач (5), (6), коли  $\varepsilon \rightarrow 0$ , було показано, що розв'язок задачі оптимального керування (1)—(4) можна наблизити розв'язками задач (5), (6), незалежно від того чи є розв'язок варіаційним, чи неваріаційним.

Ураховуючи той факт, що задача (5), (6) для кожного  $\varepsilon > 0$  є коректно поставленою, то, залучивши теорему О. Д. Іоффе і В. М. Тихомирова, встановлено необхідні умови оптимальності для цієї задачі. Насамкінець залучаючи певні припущення та перейшовши до границі коли  $\varepsilon \rightarrow 0$  в системі оптимальності для задачі (5), (6), отримано необхідні умови оптимальності для вихідної задачі керування (1)—(4).

### Список літератури

Горбонос, С. О., Когут, П. І. (2013). Варіаційні розв'язки задачі оптимального керування з необмеженими коефіцієнтами. *Вісник ДНУ. Серія: Моделювання*, 5 (8), 69—83.

- Горбонос, С. О., Когут, П. І. (2014). Необхідні умови оптимальності для задачі керування параболічною системою з необмеженими коефіцієнтами. *Вісник ДНУ. Серія: Моделювання*, 6 (8), 159—171.
- Горбонос, С. А. (2014). Об аппроксимации решений одного класса задач оптимального управления для параболического уравнения с неограниченными коэффициентами. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*, 5, 15—29.

## ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, Р. С. Колісник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,

Чернівці, Україна

v.gorodetskiy@chnu.edu.ua, alfaolga1@gmail.com, r.kolisnyk@chnu.edu.ua

Диференціальні рівняння, які містять коефіцієнти, необмежені в деякій області з  $\mathbb{R}^n$ , відносяться, як відомо, до сингулярних диференціальних рівнянь. До сингулярних рівнянь відносяться і еволюційні рівняння параболічного типу з оператором Бесселя

$$B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{(2\nu + 1)}{x} \frac{d}{dx}, \nu > -\frac{1}{2}$$

( $B$ -параболічні рівняння) через наявність у його структурі виразу  $\frac{1}{x}$ . Такі рів-

няння вироджуються на межі області і за внутрішніми властивостями вони близькі до рівномірно параболічних рівнянь. Побудові класичної теорії задачі Коші для сингулярних параболічних рівнянь присвячено ряд робіт (Матійчук, 1999). У класах розподілів та ультрарозподілів задача Коші для таких рівнянь вивчалася в Житомирський (1955), Городецький (1998) та інших працях.

Як відомо, оператор Бесселя можна визначити за допомогою співвідношення

$$B_\nu \phi = -F_B^{-1}[\sigma^2 F_B[\phi]],$$

де  $F_B$  — перетворення Бесселя,  $\phi$  — елемент простору, в якому вказане перетворення визначене, тому еволюційні рівняння з оператором Бесселя природно віднести до псевдодиференціальних рівнянь. До такого ж класу рівнянь слід віднести і еволюційні рівняння з оператором

$$A = F_{B_{\sigma \rightarrow x}}^{-1} [a(t, x; \sigma) F_{B_{x \rightarrow \sigma}}],$$

де  $a(t, x; \sigma)$  — функція (символ) оператора  $A$ , яка задовольняє певні умови (зокрема, є однорідною функцією аргументу  $\sigma$ , недиференційовною у точці  $\sigma = 0$ ). Оператор  $A$  надалі називатимемо *псевдобесселевим*. Еволюційні рівняння з псевдобесселевими операторами розпочали досліджувати В. В. Городецький, О. М. Ленюк та Д. І. Спіжавка

Для подальшого розвитку теорії еволюційних псевдодиференціальних рівнянь важливим є питання побудови нових класів символів, які містять відомий клас символів, що задовольняють умову «параболічності», та розвиток теорії задачі Коші для еволюційних рівнянь з операторами, побудованими за такими функціями, з початковими даними з різних функціональних просторів.

У даній роботі будуються такі класи функцій-символів, за допомогою яких будуються нові класи псевдодиференціальних операторів, зокрема, псевдобесселевих операторів нескінченного порядку. Побудовані простори основних

функцій, у яких вказані оператори є неперервними, досліджена топологічна структура таких просторів, а також просторів, що є їхніми образами при відображенні Бесселя. Досліджені топологічно спряжені простори до просторів основних функцій, властивості перетворення Бесселя узагальнених функцій із цих просторів.

Запроваджені простори основних та узагальнених функцій є природним середовищем для дослідження задачі Коші для еволюційних рівнянь з показниками однорідності  $\gamma > 0$  з обмеженими й необмеженими за часом коефіцієнтами та псевдо-Бесселевими операторами як скінченного, так і нескінченного порядків, які містять у собі відомі сингулярні рівняння параболічного типу.

Досліджена структура та властивості фундаментальних розв'язків указаних рівнянь, зокрема, встановлено, що фундаментальний розв'язок є елементом простору основних функцій при фіксованому значенні часового параметра.

Установлена коректна розв'язність задачі Коші у випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями скінченного порядку (типу розподілів), досліджена властивість локалізації (локального посилення збіжності) таких розв'язків. Розвинена теорія задачі Коші для еволюційних рівнянь, що містять псевдо-Бесселеві оператори, побудовані за змінними символами (Мартинюк, Городецький, 2012; Городецький та ін. 2013; Городецький, Мартинюк, 2014; Городецький та ін., 2014).

### Список літератури

- Городецький, В. В. (1998). *Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу*. Чернівці: Рута.
- Городецький, В. В., Мартинюк, О. В. (2014). Задача Коши для сингулярных эволюционных уравнений с псевдобесселевыми операторами бесконечного порядка. *Дифференциальные уравнения*, 50 (6), 780—794.
- Городецький, В. В., Мартинюк, О. В., Петришин, Р. І. (2013). Задача Коші для одного класу сингулярних еволюційних рівнянь. *Доповіді НАН України*, (1), 7—13.
- Городецький, В. В., Мартинюк, О. В., Петришин, Р. І. (2014). Задача Коші для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь зі змінними символами. *Нелінійні коливання*, 17 (3), 314—331.
- Житомирский, Я. И. (1955). Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя. *Математический сборник*, 36 (2), 299—310.
- Мартинюк, О. В., Городецький, В. В. (2012). Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь з необмеженими за часом коефіцієнтами. *Доповіді НАН України*, (2), 19—24.
- Матійчук, М. І. (1999). *Параболічні сингулярні крайові задачі*. Київ: Ін-т математики НАН України.

# ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА У ЗГОРТКАХ З ДОДАТКОВОЮ УМОВОЮ НА ПІВОСІ

Ю. О. Григор'єв

Одеський національний морський університет, Одеса, Україна

[y-grigoryev@mail.ru](mailto:y-grigoryev@mail.ru)

У роботі розглянута наступна екстремальна задача з операторами згортки

$$F(u) = \sum_{j=1}^n \omega_j \int_{-\infty}^{+\infty} \left| u(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k_j(x-s)u(s)ds - g_j(x) \right|^2 dx \rightarrow \text{extr}$$
$$u(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} m(x-s)u(s)ds - h(x) = 0, \quad x > 0$$

із заданими ядерними функціями  $k_j(x)$  та  $m(x)$  із класу  $L(-\infty, +\infty)$  і заданими функціями  $g_j(x)$  та  $h(x)$  із класу  $L_2(-\infty, +\infty)$ ;  $\omega_j$  — задані числа; шукана функція  $u(x)$  повинна належати класу  $L_2(-\infty, +\infty)$ .

Для скорочення запису застосовуються узагальнені ядерні функції. Наприклад,

$$u(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(x-s)u(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-s)u(s)ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(x-s)u(s)ds =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta(x-s) + \tau(x-s))u(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x-s)u(s)ds.$$

Тут  $\delta(x)$  — дельта-функція,  $\mu(x)$  — узагальнена функція.

Застосовуючи метод множників Лагранжа та перетворення Фур'є екстремальну задачу зведено до задачі Рімана теорії аналітичних функцій та розв'язано у квадратурах.

Один з наближених методів розв'язання задачі Рімана викладено в монографії Гахов, Черский (1978).

Перша екстремальна задача мінімізації квадратичного функціонала з операторами згортки була поставлена та розв'язана Н. Вінером (Wiener, 1949). Таку задачу Вінер і Хопф отримали, досліджуючи радіаційної рівноваги всередині зірок.

Задачі з операторами згортки також використовується в кібернетиці, при виділенні та фільтрації корисного сигналу з його суміші з шумом. Ще дві задачі оптимальної лінійної фільтрації, що зводяться до рівняння Вінера — Хопфа, але з конкретним ядром

$$\frac{\sin(x-s)}{x-s}$$

розв'язані в роботах Steiner (1970) та Крейн, Нудельман (1975).

**Задача.** Знайти функцію  $u(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$  за умовами

$$\sum_{j=1}^n \omega_j \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} k_j(x-s)u(s)ds - g_j(x) \right|^2 dx \rightarrow \text{extr}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} m(x-s)u(s)ds - h(x) = 0, \quad x > 0, \quad (2)$$

де  $\omega_j$  — задані дійсні сталі,  $k_j(x)$  та  $m(x)$  — задані узагальнені функції з обмеженими на зімкнутій осі образами Фур'є:

$$|K_j(x)| \leq C < \infty, \quad 0 < c \leq |M(x)| \leq C < \infty;$$

$g_j(x)$  та  $h(x)$  — задані функції простору  $L_2(-\infty, +\infty)$ .

Позначимо через

$$h_+(x) = \begin{cases} h(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad h_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ h(x), & x < 0. \end{cases}$$

Простори таких функцій позначатимемо через  $L_{2+}$  та  $L_{2-}$  відповідно, тобто

$$h_+(x) \in L_{2+}, \quad h_-(x) \in L_{2-}.$$

Позначимо через  $F(u)$  функціонал

$$F(u) = \sum_{j=1}^n \omega_j \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} k_j(x-s)u(s)ds - g_j(x) \right|^2 dx,$$

а через  $N(u)$  — оператор

$$N(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} m(x-s)u(s)ds - h(x) \text{ при } x > 0.$$

Таким чином

$$F : L_2(-\infty, +\infty) \rightarrow R, \quad N : L_2(-\infty, +\infty) \rightarrow L_2(0, +\infty).$$

Екстремальну задачу (1), (2) розв'яжемо за методом множників Лагранжа. Складемо функцію Лагранжа

$$L(u, v, \lambda) = \lambda F(u) + \langle v, N(u) \rangle.$$

За необхідними умовами екстремуму отримаємо наступну систему рівнянь



$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{+\infty} \overline{m(s-x)} v(s) ds + \\ + \sum_{j=1}^n \omega_j \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \overline{k_j(\sigma-x)} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} k_j(\sigma-s) u(s) ds - g_j(\sigma) \right] = 0, \quad (3) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} m(x-s) u(s) ds - h(x) = 0, \quad x > 0. \end{array} \right.$$

Щоб стаціонарні функції були точками екстремуму, достатньо припустити, щоб функція

$$\sum_{j=1}^n \omega_j |K_j(x)|^2$$

мала єдиний знак на зімкнутій осі, а саме, розглянута задача буде мати мінімум, якщо ця сума додатна і максимум, якщо — від'ємна.

Запишемо систему (3), (2) на всій осі

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{m(s-x)} v_+(s) ds + \\ + \sum_{j=1}^n \omega_j \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \overline{k_j(\sigma-x)} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} k_j(\sigma-s) u(s) ds - g_j(\sigma) \right] = 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} m(x-s) u(s) ds - h_+(x) = w_-(x), \quad -\infty < x < +\infty. \end{array} \right.$$

Тут через  $w_-(x)$  ми позначили невідому функцію з класу  $L_{2-}$ .

В образах Фур'є ми отримаємо наступну систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{M(x)} V^+(x) + \sum_{j=1}^n \omega_j \overline{K_j(x)} [K_j(x) U(x) - G_j(x)] = 0, \\ M(x) U(x) - H^+(x) = V^-(x), \end{array} \right.$$

звідки

$$\left\{ \begin{array}{l} |M(x)|^2 V^+(x) = -V^-(x) \sum_{j=1}^n \omega_j |K_j(x)|^2 + G(x), \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x) = \frac{H^+(x)}{M(x)} + \frac{V^-(x)}{M(x)}, \end{array} \right. \quad (5)$$

де

$$G(x) = M(x) \sum_{j=1}^n \omega_j \overline{K_j(x) G_j(x)} - H^+(x) \sum_{j=1}^n \omega_j |K_j(x)|^2.$$

Задача (4) є задачею Рімана теорії аналітичних функцій з нульовим індексом. Ця задача має єдиний розв'язок і розв'язується в квадратурах. Розв'язавши задачу (4), знайдемо  $V^-(x)$  і за формулою (5) здобудемо образ Фур'є  $U(x)$  від шуканої функції  $u(x)$ .

### Список літератури

- Steiner, A. (1970). Zum Mechanismus der Quasianalytizität gewisser Randfunktionen auf endlichen Intervallen. *Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. Math.*, 459 (1), 1–33.
- Wiener, N. (1949). *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series*. New-York: John Wiley.
- Гахов, Ф. Д., Черский, Ю. И. (1978). *Уравнения типа свертки*. Москва: Наука.
- Крейн, М. Г., Нудельман П. Я. (1975). Аппроксимация функций из  $L_2(\omega_1, \omega_2)$  передаточными функциями линейных систем с минимальной энергией. *Пробл. передачи информации*, 11 (2), 37–60.

## ОСАДКИ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРИ ВДАВЛИВАНИИ В КОРОБЧАТУЮ ОБОЛОЧКУ

**В. А. Гришин, В. А. Гришина, О. В. Реут, В. В. Реут**

*Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова,*

*Одесса, Украина*

grishin@onu.edu.ua

Решается задача о нахождении осадок двух тонких абсолютно жестких включений, вдавливаемых в бесконечную коробчатую оболочку прямоугольного профиля. Включения располагаются на противоположных гранях симметрично относительно осей симметрии.

Задача сводится к совместному плоскоизгибному напряженному состоянию полосовидной пластины с дефектами, роль которых играют включение и ребро оболочки. Математическая постановка задачи описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} D\Delta^2 w(x, y) &= Z(x, y) \\ \Delta^2 \sigma_x(x, y) &= \Phi(x, y) \end{aligned} \quad -a < x < b, x \neq 0, |y| < l$$

$$\Phi(x, y) = \partial / \partial x \left[ \Delta + (1 + \nu) \partial^2 / \partial y^2 \right] X + \partial / \partial y \left[ \Delta - (1 + \nu) \partial^2 / \partial y^2 \right] Y$$

удовлетворяющих условиям на ребре оболочки:

$$\langle v \rangle = \langle \tau_{xy} \rangle = \langle \varphi_{xy} \rangle = \langle M_{xy} \rangle = 0$$

$$\langle u \rangle = -(w_+ + w_-); \langle w \rangle = u_+ + u_-$$

$$\langle \sigma_x \rangle = -h^{-1} \left[ (V_x)_+ + (V_y)_- \right];$$

$$\langle V_x \rangle = h \left[ (\sigma_x)_+ + (\sigma_y)_- \right]$$

условиям симметрии:

$$V_y = \varphi_y = v = \tau_{xy} = 0, -a < x < b; y = 0$$

$$V_x = \varphi_x = u = \tau_{xy} = 0, x = -a, b; |y| > c$$

условиям на включениях:

$$u(-a, y) = \varphi_x(-a, y) = 0; w(-a, y) = \delta |y| < c$$

при выполнении условий равновесия на включениях:

$$\int_{-c}^c V_x(-a, y) dy = -\frac{P}{2}$$

Здесь  $P$  — нагрузка, действующая на включение;  $\delta$  — осадка включения;  $2c$  — длина включения;  $u, v, w$  — перемещения вдоль осей  $x, y, z$ ;  $\varphi_x, M_x, V_x, \sigma_x, \tau_{xy}$  — угол поворота, изгибающий момент, обобщенная попереч-

ная сила, нормальное и касательные напряжения;  $X(x, y), Y(x, y), Z(x, y)$  — нагрузка действующая на оболочку вдоль осей  $x, y, z$  соответственно.

В силу симметрии условия равновесия для касательных напряжений выполняются автоматически, а смещение включения  $\delta$  — заранее неизвестно.

Введем функции  $\chi(y)$  и  $\mu(y)$ , представляющие собой неизвестные поперечную силу и касательные напряжения на включении:

$$\chi(y) = V_x(-a, y); \mu(y) = \tau_{xy}(-a, y)$$

и которые тождественно равны нулю вне включения.

Применяя интегральное преобразование Фурье и решая задачу в трансформантах, при выделении слабосходящихся частей ядер в обратном преобразовании Фурье приходим к системе интегральных уравнений вида:

$$\int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (y-\eta)^2 \ln|y-\eta| & 0 \\ 0 & -\ln|y-\eta| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(\eta) \\ \mu(\eta) \end{bmatrix} d\eta + \\ + \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(\eta) \\ \mu(\eta) \end{bmatrix} d\eta = \begin{bmatrix} \delta_\chi(y) \\ \delta_\mu(y) \end{bmatrix}$$

где  $K_{ij}(y, \eta)$  — бесконечно дифференцируемые функции, а  $\delta_\chi(y), \delta_\mu(y)$  осадки включений, вызванные нагрузками  $\chi, \mu$  соответственно.

Первое из интегральных уравнений не имеет решения в классе интегрируемых функций и его решение следует искать в пространстве функций, имеющих неинтегрируемые особенности вида  $(1-y^2)^{-3/2}$  с применением аппарата регуляризации расходящихся интегралов (Онищук и др., 1986).

Для решения системы интегральных уравнений использовался метод ортогональных многочленов и решение разыскивалось для  $\mu(y)$  в виде разложения в ряд по многочленам Чебышева первого рода  $T_{2m+1}(s)$  и для  $\chi(y)$  в виде разложения в ряд по многочленам специального вида  $\pi_k(y)$ , образующих полную ортогональную систему и получаемых как модификация многочленов Якоби (Попов, 1982).

Получаемая бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения  $\{\chi_{2k}, \mu_{2k+1}\}$  вида:

$$\begin{pmatrix} \chi_{2l} \\ \mu_{2l+1} \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} A_{11}^{k,l} & A_{12}^{k,l} \\ A_{21}^{k,l} & A_{22}^{k,l} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{2k} \\ \mu_{2k+1} \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} c_l \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k, l = \overline{0, \infty}$$

решалась методом редукции. Здесь коэффициенты системы

$$A_{ij}^{k,l} \quad (i, j = 1, 2)$$

и правых частей  $c_l$  выражаются через быстросходящиеся интегралы, в которые входят функции Бесселя и гамма-функции для различных  $k, l = \overline{0, \infty}$ .

Для определения осадки  $\delta$  были проведены численные расчеты в случае, когда оболочка загружена силами  $P$ , приложенными к серединам включений. При этом система линейных алгебраических уравнений решалась методом редукции с сохранением пяти членов разложения, обеспечивающего точность не менее трех значащих цифр. Отметим, что при стягивании длины включения в точку, то есть при  $c \rightarrow 0$  значения осадки совпадают со значениями прогиба под точкой приложения сосредоточенной силы задачи о нагружении оболочки двумя симметрично расположенными силами.

Полученные результаты вычислений позволяют проанализировать зависимость величин осадки включений от их длин и зависимость от соотношений геометрических размеров сечения оболочки. Для примера приведем значения осадки:

$$\delta = 4,75; 3,30; 2,37; 1,82; 1,45$$

подсчитанные для четырех безразмерных значений длин включений:

$$\frac{c}{a} = 0; 0,5; 1; 1,5$$

соответственно. Значения подсчитаны при

$$\nu = 0,3; \frac{h}{a} = 0,01; \frac{a}{b} = 1$$

в безразмерном виде. При переводе в абсолютные значения их следует умножать на коэффициент  $10^4 \cdot P / Eh$ .

### Список литературы

- Гришин, В. А., Реут, В. В., Попов, Г. Я. (1990). Расчет коробчатых оболочек прямоугольного сечения. *ПММ*, 54 (4), 605—612.
- Онищук, О. В., Попов, Г. Я., Фаршайт, П. Г. (1986). Об особенностях контактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями. *ПММ*, 50 (2), 293—302.
- Попов, Г. Я. (1982). *Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений*. Москва: Наука.

**ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НАПІВЛІНІЙНОЮ  
ГІПЕРБОЛІЧНОЮ СИСТЕМОЮ З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ  
УМОВАМИ І НЕСКІНЧЕННИМ ГОРИЗОНТОМ ПЛАНУВАННЯ**

**Т. О. Дерев'янка, М. О. Середяк**

*Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна*  
[derevianko.taras@gmail.com](mailto:derevianko.taras@gmail.com), [maryan27m@gmail.com](mailto:maryan27m@gmail.com)

Еволюція деякого  $n$ -вимірному процесу  $y = y(x, t)$  в необмеженій півсмузі  $(x, t) \in \Pi = (0, l) \times (0, +\infty)$  описується виродженою напівлінійною гіперболічною системою рівнянь першого порядку

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y_i(x, t)}{\partial t} + \lambda_i(x, t) \frac{\partial y_i(x, t)}{\partial x} = f_i(y(x, t), z(x, t), x, t), i \in I_{m_1}, \\ \frac{\partial y_i(x, t)}{\partial t} = f_i(y(x, t), z(x, t), x, t), i \in I_{m_2}, \\ \frac{\partial y_i(x, t)}{\partial x} = f_i(y(x, t), z(x, t), x, t), i \in I_{m_3}, \\ z_i(x, t) = \int_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} g_i(y(\xi, t), x, t, \xi) d\xi, i \in I_{m_1} \cup I_{m_2} \cup I_{m_3}, \end{array} \right. \quad (1)$$

де  $\text{card}(I_{m_j}) = m_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ),  $y : \bar{\Pi} \rightarrow \mathbb{R}^n$  — вектор-функція розв'язку,  $\lambda_i : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i : \mathbb{R}^{2n} \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  — нелінійні функції. Без обмеження загальності, припустимо, що для всіх  $i \in I_{m_1}$  функції  $\lambda_i = \lambda_i(x, t)$  набувають додатних або від'ємних значень.

Розглянемо множини:

$$\begin{aligned} I &= I_{m_1} \cup I_{m_2} \cup I_{m_3}, \\ I_0 &= \{i \in I_{m_1} \mid \lambda_i(x, t) > 0, (x, t) \in \bar{\Pi}\}, \\ I_l &= \{i \in I_{m_1} \mid \lambda_i(x, t) < 0, (x, t) \in \bar{\Pi}\}, \end{aligned}$$

де  $\text{card}(I) = n$ ,  $\text{card}(I_0) = m_0$ ,  $\text{card}(I_l) = m_1 - m_0$ . Тобто, для (1) будемо вважати, що перші  $m_0$  функцій  $\lambda_i(x, t)$  є додатними, а інші  $(m_1 - m_0)$  — від'ємні.

Позначимо через  $\mathcal{U}$  — простір керувань, який складається з неперервно-диференційовних на  $[0, l]$  вектор-функцій

$$u(x) = (u^{(0)}(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x), u^{(3)}(x)),$$

таких, що для компактів  $U^k$  ( $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ ):

$$u^{(k)} : [0, l] \rightarrow U^k, U^k \subset \mathbb{R}^{r_k}, r_k \in \mathbb{N}.$$

Для системи (1) задаймо нелінійні початкові та нелокальні крайові умови:

$$y_i(x, 0) = y_i^0(u^{(0)}(x), x), i \notin I_{m_3}, x \in [0, l], \quad (2)$$

$$y_i(0, t) = \int_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \gamma_i^0(y_j(s, t)_{j \notin I_{m_3}}, u^{(1)}(s), s) ds, i \in I_0, t \in \mathbb{R}_+ \quad (3)$$

$$y_i(l, t) = \int_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \gamma_i^l(y_j(s, t)_{j \notin I_{m_3}}, u^{(2)}(s), s) ds, i \in I_l, t \in \mathbb{R}_+, \quad (4)$$

$$y_i(0, t) = \int_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \gamma_i^0(y_j(s, t)_{j \notin I_{m_3}}, u^{(3)}(s), s) ds, i \in I_{m_3}, t \in \mathbb{R}_+. \quad (5)$$

Тут  $u \in \mathcal{U}$ ;

$$y_i^0 : U^{(0)} \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^n (i \notin I_{m_3}), \gamma_i^0 : \mathbb{R}^{n-m_3} \times U^1 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} (i \in I_0),$$

$$\gamma_i^l : \mathbb{R}^{n-m_3} \times U^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} (i \in I_l), \gamma_i^0 : \mathbb{R}^n \times U^3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} (i \in I_{m_3});$$

$s_i^1, s_i^2 \in C[0; +\infty)$  — функції, що задовольняють умову

$$0 \leq s_i^1(t) < s_i^2(t) \leq l, \forall i \in I, \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Нехай цільовий функціонал має вигляд

$$J(u) = \iint_{\Pi} G(y(x, t), x, t) dx dt, \quad (2)$$

де  $G : \mathbb{R}^n \times \bar{\Pi} \rightarrow \bar{\Pi}$ , причому ця функція є вимірною на  $[0, +\infty)$  для довільної функції  $y$  з відповідного  $\mathcal{Q}$ . Отже, задача оптимального керування полягає в мінімізації, функціоналу (6),

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J(u),$$

де мінімум береться за тими  $u \in \mathcal{U}$ , для яких існує єдиний розв'язок задачі (1)—(5) у сенсі неперервного розв'язку еквівалентного інтегро-операторного рівняння Вольтерра другого роду.

### Список літератури

- Аргучинцев, А. В. (2007). *Оптимальное управление гиперболическими системами*. Москва: ФИЗМАТЛИТ.
- Hritoneko N., & Yatsenko Y. (2013). *Mathematical modeling in economics, ecology and the environment*. New York: Springer.
- Матвеев, А. С., Якубович, А. С. (2003). *Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи*. Санкт-Петербург: Изд-во С.-Петербургского университета.

**ПРО ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ  
НЕКАНОНІЧНИХ ТОВСТИХ ОБОЛОНОК,  
БЛИЗЬКИХ ДО ЦИЛІНДРИЧНИХ, ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ  
СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ**

**Б. І. Дзира, Д. Г. Чернописький**

*НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ,  
Івано-Франківський технічний університет нафти і газу,  
Івано-Франківськ, Україна*

Розглядаються краєві задачі про напружений стан циліндричних оболонок змінної товщини, обмежених неканонічними неортогональними поверхнями заданими рівняннями

$$S_l \sim r = r_l + \varepsilon \omega_l f(z) \quad (l = 0, 1; 0 \leq z \leq h)$$

або

$$S_l \sim r = r_l + \varepsilon \omega_l f(\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq h),$$

де  $e \ll 1$  малий параметр;  $-1 \leq \omega_l \leq 1$ ;  $r_0 = 1$ ,  $r_1 = R_1 / R_0 = \text{const} > 1$ ;  $r = R / R_0$ ,  $z = Z / R_0$  — безрозмірні циліндричні координати;  $R_0$  — характерний розмір;  $\omega_l = 0, \pm 1$  — параметр, який визначає сімейство оболонок різної конфігурації. Припускаємо, що на бокових поверхнях  $S_l$  задані зусилля, а на поверхнях  $z = 0, h$  виконуються умови (Немиш, Чернопиский, 1981) плоского торця або шарнірного опертя. Залежно від пружних постійних (ізотропні, трансверсально-ізотропні) розглянуто структуру загальних розв'язків через гармонічні функції, які залежать від спеціальних циліндричних функцій Бесселя  $J_m(\xi)$ ,  $Y_m(\xi)$  і модифікованих функцій  $I_m(\xi)$ ,  $K_m(\xi)$ . У випадку однорідних умов на  $z = 0, h$  (плоского торця і шарнірного опертя) розв'язки у наближеннях для переміщень і напружень залежать виключно від модифікованих функцій  $I_m(\xi)$ ,  $K_m(\xi)$ . Для оболонок скінченної довжини з неоднорідними умовами на торцях розв'язки, окрім функцій  $I_m(\xi)$ ,  $K_m(\xi)$  залежать від Бесселевих  $J_m(\xi)$ ,  $Y_m(\xi)$  (Немиш, Чернопиский, 1983). Замість безпосереднього обчислення функцій для розрахунку НДС оболонок змінної товщини використано алгоритми, в яких із-за складної поведінки і властивостей циліндричних функцій при зміні  $\xi \in [\xi_0, \xi_1]$  ( $\xi_0 = \xi|_{r=1}$ ;  $\xi_1 = \xi|_{r=r_1}$ ) пряме обчислення  $J_m(\xi)$ ,  $Y_m(\xi)$ ,  $I_m(\xi)$ ,  $K_m(\xi)$  замінено у виразах при постійних невідомих для переміщень і напружень на обчислення у вигляді відношень

$$0 < \left\{ \left[ \frac{I_m(\xi)}{I_{m-1}(\xi)} \right]_{m=1}^{\infty}, \left[ \frac{K_{m-1}(\xi)}{K_m(\xi)} \right]_{m=1}^{\infty}, \left[ \frac{I_{m-1}(\xi)}{I_{m-1}(\xi_1)} \right]_{m=1}^{\infty}, \left[ \frac{K_m(\xi)}{K_m(\xi_0)} \right]_{m=1}^{\infty} \right\} \leq 1.$$



Такі заміни впливають із правила Крамера при розв'язку як скінченних алгебраїчних систем рівнянь (у випадку однорідних умов на торцях (Немиш, Чернопиский, 1981; Немиш, Чернопиский, 1983) так і нескінченних (неоднорідних умов (Гринченко, 1978)) відносно невідомих згідно граничних умов на бокових і торцевих поверхнях. Таким чином, отримані відношення дозволяють розробити коректні алгоритми числового розв'язку у довільному наближенні як систем алгебраїчних рівнянь з обмеженням на величину елементів їх матриць так і при обчисленні компонентів НДС.

### Список літератури

- Гринченко, В. Т. (1978). *Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров*. Киев: Наукова думка.
- Немиш, Ю. Н., Чернопиский, Д. И. (1981). Пространственные граничные задачи теории упругости для поперечно гофрированных толстостенных цилиндров. *Прикл. механика*, 1981 (12), 20—26.
- Немиш, Ю. Н., Чернопиский, Д. И. (1983). Трехмерное напряженное состояние упругих продольно гофрированных цилиндров. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, (3), 55—62.

**ПОШИРЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО  
ІНВАРІАНТУ НА СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ  
ДРУГОГО ПОРЯДКУ**

**В. В. Довгай**

*НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна*  
[valerdov@gmail.com](mailto:valerdov@gmail.com)

Для дослідження асимптотичних властивостей розв'язків систем диференціальних рівнянь другого порядку в роботі Павлюк (1971) запропоновано метод диференціального інваріанта. У випадку скалярного рівняння в Довгай (2015). його було узагальнено на ширший клас рівнянь. В даній роботі узагальнений метод диференціального інваріанта застосовується до систем диференціальних рівнянь другого порядку.

Розглянемо задачу Коші

$$y'' + R(t)y' + P(t)y = f(t, y, y'), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \quad (1)$$

Тут  $y$  —  $n$ -вимірний вектор,  $R(t) = [r_k(t)]$ ,  $P(t) = [p_k(t)]$  — діагональні  $n \times n$  матриці з елементами  $r_k(t)$ ,  $p_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), що мають відповідно неперервні похідні першого та другого порядку при  $t \geq t_0$ ,  $n$ -вимірний вектор  $f(t, y, y')$  — неперервний при  $t \geq t_0$ ,  $|y| < +\infty$ ,  $|y'| < +\infty$ .

Разом з (1) розглянемо також матричне рівняння

$$Y'' + R(t)Y' + [P(t) + \eta(t)]Y = 0, \quad (2)$$

де  $Y$  —  $n \times n$  матриця,  $\eta(t) = [\eta_k(t)]$  — діагональна  $n \times n$  матриця з елементами  $\eta_k(t) = \frac{1}{4}q_k^{-1}(t)q_k''(t) - \frac{5}{16}[q_k^{-1}(t)q_k'(t)]^2$ ,  $q_k(t) = p_k(t) - \frac{1}{2}r_k'(t) - \frac{1}{4}r_k^2(t)$ .

Нехай  $q_k(t) > 0$  при всіх  $t \geq t_0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Тоді на основі одержаних у Довгай (2015).результатів випливає, що матриця вигляду

$$Y = C_1U_1(t, t_0) + C_2U_2(t, t_0) \quad (3)$$

є загальним розв'язком рівняння (2). У виразі (3)  $C_1$ ,  $C_2$  — довільні сталі  $n \times n$  матриці,

$$U_1(t, t_0) = V(t, t_0)T_1(t, t_0). \quad U_2(t, t_0) = V(t, t_0)T_2(t, t_0),$$

$V(t, t_0)$ ,  $T_1(t, t_0)$ ,  $T_2(t, t_0)$  — діагональні  $n \times n$  матриці з елементами  $v_k(t, t_0)$ ,  $\sin \phi_k(t, t_0)$ ,  $\cos \phi_k(t, t_0)$  відповідно, у яких

$$\phi_k(t, t_0) = \int_{t_0}^t \sqrt{q_k(s)} ds, \quad v_k(t, t_0) = q_k^{-\frac{1}{4}}(t) e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t r_k(s) ds}.$$

Позначимо через  $U_{11}(t, t_0)$  та  $U_{12}(t, t_0)$  розв'язки задач Коші для рівняння (2) з початковими умовами

$$U_{11}(t_0, t_0) = E_n, \quad U'_{11}(t_0, t_0) = 0 \quad \text{та} \quad U_{12}(t_0, t_0) = 0, \quad U'_{12}(t_0, t_0) = E_n$$

відповідно. Враховуючи (3), матимемо

$$U_{11}(t, t_0) = V(t, t_0)[-V'(t_0, t_0)T_1(t, t_0) + V^{-1}(t_0, t_0)T_2(t, t_0)],$$

$$U_{12}(t, t_0) = V(t, t_0)V(t_0, t_0)T_1(t, t_0).$$

Розглянемо тепер матричне рівняння першого порядку

$$X' + A(t)X = 0, \tag{4}$$

у якому  $2n \times 2n$  матриця  $A(t)$  має структуру

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & -E_n \\ P(t) + \eta(t) & R(t) \end{bmatrix}.$$

Якщо ввести позначення

$$U_{21}(t, t_0) = U'_{11}(t, t_0), \quad U_{22}(t, t_0) = U'_{12}(t, t_0),$$

то тоді  $2n \times 2n$  матриця  $U(t, t_0)$  вигляду

$$U(t, t_0) = \begin{bmatrix} U_{11}(t, t_0) & U_{12}(t, t_0) \\ U_{21}(t, t_0) & U_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

буде розв'язком задачі Коші для рівняння (4) з початковою умовою  $U(t_0, t_0) = E_{2n}$ . Звідси випливає, що розв'язок задачі Коші для відповідного векторного нелінійного рівняння

$$x' + A(t)x = F(t, x)$$

з початковою умовою  $x(t_0) = x_0$  буде еквівалентним розв'язку наступного інтегрального рівняння

$$x(t) = U(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t U(t, \tau)F(\tau, x(\tau))d\tau, \tag{5}$$

який в свою чергу при

$$x = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}, \quad F(t, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta(t)y + f(t, y, y') \end{bmatrix}$$

є еквівалентним розв'язку задачі (1). Для дослідження самої лише функції  $y = y(t)$  на основі (5) маємо таке інтегральне рівняння

$$y(t) = U_{11}(t, t_0)y_0 + U_{12}(t, t_0)y'_0 + \int_{t_0}^t U_{12}(t, \tau)[\eta(\tau)y(\tau) + f(\tau, y(\tau), y'(\tau))]d\tau.$$

Одержані інтегральні рівняння дозволяють застосовувати методику дослідження асимптотичних властивостей розв'язків задачі (1), описану в Павлюк (1971), на ширший клас диференціальних рівнянь, в тому числі і при наявності випадкових збурень їх параметрів.

### Список літератури

- Довгай, В. В. (2015). Узагальнення методу диференціального інваріанту для дослідження асимптотичних властивостей деяких диференціальних рівнянь другого порядку. *Матеріали XVI міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука*, Київ: НТУУ «КПІ» (Т. 1), 77—79.
- Павлюк, І. А. (1971). *Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку*. Київ: Вид-во Київського університету.

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНІЄЇ МНОЖИНИ КВАЗІНЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА

Б. П. Довгий, Є. С. Вакал, Ю. Є. Вакал

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
dovgiy\_i\_ko@i.ua, jvakal@gmail.com, iuliia.vakal@gmail.com

При описі процесу розповсюдження квазіплоских і квазімонохроматичних хвиль використовують наближені рівняння, які отримують з рівнянь Максвелла. Так при розповсюдженні хвильових пучків з урахуванням дифракції, а також неоднорідностей середовища з урахуванням умов повільної зміни комплексної амплітуди, отримуємо рівняння (або системи рівнянь) типу Шредінгера. Саме таким чином при дослідженні широкого класу нелінійних явищ виникає значна кількість прикладних задач нелінійної оптики, фізики плазми, теорії надпровідності, фізики низьких температур (Ахманов, Хохлов, 1965; Луговой, Прохоров, 1973; Насибов, 1980; Gajewski, 1979).

Розглядається математична модель, яка описує процес проходження хвилі по нелінійному середовищі з урахуванням дифракційних ефектів і осьової симетрії у вигляді рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial z} = iD \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + f(u)u, \quad (r, z) \in G = (0, a) \times (0, Z), \quad (1)$$

де  $i = \sqrt{-1}$ ,  $D > 0$ ,

з початковою та крайовими умовами

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad r \in [0, a], \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(0, z)}{\partial r} = 0, \quad u(a, z) = 0, \quad z \in [0, Z].$$

Множина процесів взаємодії хвилі з нелінійним середовищем визначається функцією  $f(u)$  з властивістю

$$(f(u))^* = -f(u). \quad (3)$$

Ураховуючи умову (3), для задачі (1), (2) можна отримати закон збереження

$$\forall z : \|u(r, z)\|^2 = \|u_0(r)\|^2, \quad (4)$$

де норма і скалярний добуток вводяться як

$$\|v(r)\|^2 = (v, v), \quad (v, v) = 2\pi \int_0^a rv(r)v^*(r) dr. \quad (5)$$

Як правило, крайові задачі даного класу не піддаються точним методам розв'язання, тому для них застосовуються наближені методи, зокрема, метод скінченних різниць.

Область  $\bar{G} = [0, a] \times [0, Z]$  покривається рівномірною різницевою сіткою, на якій інтегро-інтерполяційним методом (Самарський, 1977) побудована нелінійна різницева задача

$$y_{z,j} = iD \frac{1}{r_k} \left( r_{k-0.5} Y_{\bar{r},k} \right)_{r,k} + f(Y_k) Y_k, \quad k = \overline{1, N_r - 1}, \quad j = \overline{0, N_z - 1}; \quad (6)$$

$$Y_k \equiv y_k^\sigma = \sigma y_k^{j+1} + (1 - \sigma) y_k^j, \quad 0.5 \leq \sigma \leq 1;$$

$$y_k^0 = u_0(r_k), \quad k = \overline{0, N_r}; \quad 4h_r^{-1} y_{r,0}^{j+1} = f(Y_0) Y_0, \quad y_{N_r}^{j+1} = 0, \quad j = \overline{0, N_z - 1}. \quad (7)$$

Для різницевої задачі (6), (7) проводяться необхідні дослідження, а саме, встановлюється порядок апроксимації різницевої схеми і при певних обмеженнях її стійкість за початковими даними. Якщо вага схеми  $\sigma$  покладається рівною 0,5, то отримується повністю консервативна схема (для неї виконується різницевий аналог закону збереження (4)).

Для розв'язання нелінійної різницевої задачі використовується ітераційний метод послідовних наближень разом з методом монотонної прогонки (ММП) для комплекснозначних коефіцієнтів. Досліджується збіжність ітераційного процесу і стійкість ММП.

Для реалізації отриманих алгоритмів розроблено відповідне програмне забезпечення з використанням системи комп'ютерної математики MATLAB (Вакал, Довгий, Вакал, Попов, 2012).

Для прикладних задач нелінійної оптики виконано чисельні дослідження впливу дифракційного параметра  $D$  та інших параметрів нелінійного середовища, що моделюються функцією  $f(u)$ . Це дозволило дослідити поведінку розв'язку — розподіл амплітуди і фази комплекснозначної функції  $u(r, z)$ , а також енергетичні характеристики (5) розв'язку.

### Список літератури

- Gajewski, H. (1979). On an Initial-Boundary Value Problem for the Nonlinear Schrodinger Equation. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2 (3), 503–531.
- Ахманов, С. А., Хохлов, Р. В. (1965). *Проблемы нелинейной оптики*. Москва: ВИНТИ.
- Вакал, С. С., Довгий, Б. П., Вакал, Ю. Є., Попов, А. В. (2012). *Використання математичного пакета MATLAB для розв'язування прикладних задач: Навчальний посібник*. Київ: Український фітосоціологічний центр.
- Луговой, В. И., Прохоров, А. М. (1973). Теория распространения мощного лазерного излучения в нелинейной среде. *Успехи физических наук*, 111 (2), 203—247.
- Насибов, Ш. М. (1980). Об одном нелинейном уравнении типа Шредингера. *Дифференциальные уравнения*, 16 (4), 660—670.
- Самарский, А. А. (1977). *Теория разностных схем*. Москва: Наука.

**ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ДВОХ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ  
З НЕСИМЕТРИЧНОЮ МАТРИЦЕЮ ЗМІННОГО РАНГУ  
ПРИ ПОХІДНИХ**

**В. О. Єрмоєнко, А. М. Алілуйко**

*Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна*

[aliluyko@imath.kiev.ua](mailto:aliluyko@imath.kiev.ua)

Системи рівнянь виду

$$Lx \equiv A(t)x^{(1)} + B(t)x = f(t), \quad (1)$$

де  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^{(1)} = dx / dt$ ,  $A$  та  $B$  — квадратні матриці,

$$\text{rang } A(t) \equiv \text{const} < n \quad \forall t \in [0; T], \quad (2)$$

найбільш повно досліджені в Самойленко, Шкіль, Яковець (2000). Задача про періодичні розв'язки вивчена для систем диференціальних рівнянь з додатно визначеною симетричною лінійною частиною (Мозер, 1968), для яких умова (2) може не виконуватися.

У даному повідомленні для  $n = 2$  і несиметричної матриці  $A(t)$ ,  $0 \leq \text{rang } A(t) \leq 2$ , розглядаються достатні умови існування єдиного періодичного розв'язку системи (1) з періодичними коефіцієнтами для довільного вектора неоднорідності, а також обґрунтовується ітераційний метод Гальоркіна його наближеної побудови (випадок  $\text{rang } A \in [1, 2]$  досліджувався в Єрмоєнко (1998).

**Теорема.** *Нехай відносно системи двох рівнянь (1) виконуються такі умови:*

$$1) A, B, f \in C^r(T_1), T_1 = [0; 2\pi], A^* \neq A, r \geq 1 + k, k \geq 1,$$

де зірочка означає операцію транспонування матриці;

2) для вектора

$$\bar{\alpha} = (a_{12}, a_{22}, -a_{11}, -a_{21}),$$

де  $a_{ij}$  — елементи матриці  $A$ , можна вказати вектор

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in C^r(T_1)$$

такий, що

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \alpha \end{pmatrix} = 1 \quad \forall t \in T_1;$$

3) існують скалярні функції  $\lambda_i(t) \in C^r(T_1)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , такі, що для довільного цілого  $s = \overline{0, r}$  виконується нерівність

$$\min_{\|\xi\|=1} \langle [V(t)B(t) + (s - 1/2)(V(t)A(t))^{(1)}]\xi, \xi \rangle \geq \gamma = \text{const} > 0,$$

де

$$V(t) = \begin{pmatrix} -\lambda_1\alpha_4 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 & -\lambda_1\alpha_3 - \lambda_2\alpha_1 - \lambda_3\alpha_4 \\ \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_4 - \lambda_3\alpha_1 & \lambda_1\alpha_4 - \lambda_2\alpha_3 + \lambda_3\alpha_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Тоді система (1) має для будь-якої неоднорідності  $f(t)$  єдиний розв'язок  $x = x_0(t) \in C^k(T_1)$ . Наближення до  $x_0(t)$  знаходиться із системи рівнянь

$$S_n L u_n(t) = S_n f(t), \quad (4)$$

$$\text{де } S_n g(t) = \sum_{|k| \leq n} g_k e^{ikt}, \quad g_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-ikt} dt, \quad u_n(t) = \sum_{|k| \leq n} u_k e^{ikt}.$$

Система (4) має розв'язок  $u_n(t)$  для довільної функції  $f \in H^r(T_1)$  і для всіх  $n \geq 0$ , який при  $n \rightarrow \infty$  збігається в просторі  $C^k(T_1) \cap H^{r-1}(T_1)$  до функції  $x_0(t)$ , причому швидкість збіжності визначається нерівністю

$$\|x_0(t) - u_n(t)\|_s \leq cn^{-(k-s+1)} \|f(t)\|_r$$

для будь-якого  $s = 0, k$  і деякої додатної сталої  $c$ , яка не залежить від  $n$  та  $f$ .

Тут

$$\|\cdot\|_r^2 = (K^r \cdot, \cdot)_o, \quad K = 1 - d^2 / dt^2, \\ (\cdot, \cdot)_o = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\cdot\|^2 dt, \quad \|\Phi(t)\|_r = \max_{t \in T_1, 0 \leq \rho \leq r} \|\Phi^{(\rho)}(t)\|,$$

де  $\|\cdot\|$  — евклідова векторна або узгоджена матрична норма.

Як приклад розглянемо систему

$$\begin{cases} (\sin^2 t)x_1^{(1)} + (\sin t \cos^2 t)x_2^{(1)} + px_2 = f_1(t), \\ -(\sin^3 t)x_1^{(1)} + (\sin t - \sin t \cos t)x_2^{(1)} - px_1 = f_2(t), \end{cases} \quad (5)$$

де  $p$  — додатний параметр. Визначимо, виходячи з умов теореми, таке значення  $p$ , щоб система (5) мала при будь-якому векторі неоднорідності гладкий періодичний розв'язок.

Вектор  $\alpha$ , для якого виконується умова 2) теореми має такий вигляд

$$\alpha = (\cos^2 t; 1 - \cos t; -\sin t; \sin^2 t).$$

Здійснивши відповідний вибір  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , отримаємо матрицю (3):

$$V(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(\cos t - 1) + \beta_2 \sin t & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_1(\cos t - 1) + \beta_2 \sin t \end{pmatrix},$$

де  $\beta_1$  та  $\beta_2$  — довільні відмінні від нуля числа різних знаків. Якщо  $\beta_1 = -1$ ,  $\beta_2 = 1$ , то матриця  $(VB + B^*V^*) / 2$  стає додатно визначеною.



Здійснивши відповідні оцінки, отримаємо, що система (5) має періодичний розв'язок  $x_0(t, p) \in C^k(T_1)$ ,  $k \geq 1$ , якщо параметр  $p$  задовольняє умову

$$p \geq \gamma + (1 + k)7,4,$$

де  $\gamma$  — деяке додатне число.

### Список літератури

- Єрмоєнко, В. О. (1998). Періодичні розв'язки систем двох лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з вироджуваною несиметричною матрицею при похідних. *Укр. мат. журн.*, 50 (3), 350—356.
- Мозер, Ю. (1968). Быстросходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения. *Успехи математической науки*, 23 (4), 179—238.
- Самойленко, А. М., Шкіль, М. І., Яковець, В. П. (2000). *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями: Навчальний посібник*. Київ: Вища школа.

**ПОБУДОВА НЕПЕРЕРВНИХ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ  
ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ  
НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

**Т. О. Єр'оміна**

*НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна,  
[ierominat@ukr.net](mailto:ierominat@ukr.net)*

Розглядаються системи нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x(qt) = \Lambda x(t) + f(t, x(t+1)), \quad (1)$$

де  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Lambda$  — дійсна  $(n \times n)$ -матриця вигляду  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $q$  — деяка дійсна стала, в припущенні, що виконуються наступні умови:

1)  $|\lambda_i| \neq 0, i = 1, 2, \dots, n, q > 0$ ;

2) вектор-функція  $f(t, x)$  є неперервною обмеженою при всіх  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  і  $f(t, 0) = 0$ ;

3) для довільних  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$  виконується співвідношення

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq l|x - y|,$$

де  $l$  — деяка додатна стала. Доведено наступні теореми.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови 1)–3) і умови:*

1)  $0 < \lambda_i < 1, i = 1, \dots, n, q > 1$ ;

2)  $\Delta = \frac{l}{1 - \lambda^*} < 1$ , де  $1 > \lambda^* > \max\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$ .

*Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при  $t \geq T > 0$  ( $T$  — деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

де  $x_i(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots$  — деякі неперервні обмежені при  $t \geq T > 0$  вектор-функції.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови 1)–3) і умови:*

1)  $\lambda_i > 1, i = 1, \dots, n, 0 < q < 1$ ;

2)  $\Delta = \frac{l}{\lambda_* - 1} < 1$ , де  $1 < \lambda_* < \min\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$ .

*Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при  $t \geq T > 0$  ( $T$  — деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

де  $x_i(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots$  — деякі неперервні обмежені при  $t \geq T > 0$  вектор-функції.

Також систему (1) розглянуто при  $\lambda_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  у випадках, коли виконуються умови:

а)  $|\lambda_i| > 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $0 < q < 1$ ,

б)  $|\lambda_i| < 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $q > 1$ .

Показано, що система рівнянь (1) має розв'язки у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

де  $x_i(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , - деякі неперервні вектор-функції, що є розв'язками послідовності систем рівнянь:

$$x_0(qt) = \Lambda x_0(t), \quad (2_0)$$

$$x_1(qt) = \Lambda x_1(t) + f(t, x_0(t+1)), \quad (2_1)$$

$$x_i(qt) = \Lambda x_i(t) + f\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l(t+1)\right) - f\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l(t+1)\right), \quad i = 2, \dots, n. \quad (2_i)$$

Система рівнянь (2<sub>0</sub>) має множину неперервних при  $t \geq T > 0$  розв'язків вигляду:

$$x_0(t) = t^{\nu} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right),$$

де  $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \dots, \omega_n(\tau))$ ,  $\omega_i(\tau)$ ,  $i = 1, \dots, n$  — довільні неперервні вектор-функції, що задовольняють умові  $\omega_i(\tau+1) = \text{sign } \lambda_i \cdot \omega_i(\tau)$ , і

$$t^{\nu} = \text{diag} \left[ t^{\frac{\ln|\lambda_1|}{\ln q}}, t^{\frac{\ln|\lambda_2|}{\ln q}}, \dots, t^{\frac{\ln|\lambda_n|}{\ln q}} \right].$$

Системи рівнянь (2<sub>i</sub>),  $i = 1, 2, \dots$ , мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$x_1(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} f(q^j t, x_0(q^j t + 1)),$$

$$x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \left[ f\left(q^j t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l(q^j t + 1)\right) - f\left(q^j t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l(q^j t + 1)\right) \right],$$

$$i = 2, 3, \dots$$

**Теорема 3.** Нехай виконуються умови 1)–3) і умови:

1)  $|\lambda_i| > 1, i = 1, \dots, n, \lambda_i < 0, 0 < q < 1,$

2)  $\Delta = \frac{l}{\lambda_* - 1} < 1,$  де  $\lambda_* = \min \{|\lambda_i|, i = 1, \dots, n\}.$

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при  $t \geq T > 0$  ( $T$  — деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків

$$x(t) = x \left( t, \omega \left( \frac{\ln t}{\ln q} \right) \right),$$

що залежить від довільної неперервної вектор-функції  $\omega(\tau)$ , такої що  $\omega(\tau + 1) = -\omega(\tau).$

Подібний результат доведено для випадку б), коли  $|\lambda_i| < 1, i = 1, \dots, n, \lambda_i < 0, q > 1.$

### Список літератури

- Пелюх, Г. П. (2002). О существовании периодических решений нелинейных разностных уравнений. *Укр. мат. журн.*, 54 (12), 1623—1633.
- Пелюх, Г. П. (1994). К теории систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами. *Докл. АН РАН*, 336 (4), 451—452.
- Мартынюк, Д. И. (1972). *Лекции по качественной теории разностных уравнений*. Киев: Наукова думка.

**ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ (ФРЗК)  
ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ  
ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ**

**Т. О. Заболотько, С. Д. Івасишен**

*НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна*  
[zabolotkota@meta.ua](mailto:zabolotkota@meta.ua)

Нехай  $a, b, n$  і  $T$  — задані числа, де  $b$  і  $n$  — натуральні,  $a$  і  $T$  — дійсні, причому  $T > 0$ ;  $m := 2b$ ,  $m' := m / (m - 1)$ ;  $\Pi_H := H \times \mathbb{R}^n$ ,  $H \subset [0, T]$ ;  $X(t) := e^{at}x$ , якщо  $t \in \mathbb{R}$  і  $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ;  $\mathbb{Z}_+^n$  — сукупність усіх  $n$ -вимірних мультиіндексів;  $|k| := k_1 + \dots + k_n$ , якщо  $k := (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ ;

$$q_m(t) := \begin{cases} \frac{1}{ma}(e^{mat} - 1), & a \neq 0, \\ t, & a = 0, \end{cases} \quad t \geq 0;$$

$$E_c^{(m)}(t, x) := \exp \left\{ -c \left( q_m(t) \right)^{-1/(m-1)} |x|^{m'} \right\}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, c > 0;$$

$$\Delta_x^y f(\cdot, x) := f(\cdot, x) - f(\cdot, y).$$

Розглядається рівняння вигляду

$$\left( \partial_t - \sum_{|k| \leq m} a_k(t, x) \partial_x^k - S_a \right) u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (1)$$

де

$$S_a u := a \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} (x_j u)$$

— диференціальний вираз з необмежено зростаючими при  $|x| \rightarrow \infty$  коефіцієнтами, за таких припущень:

( $A_1$ ) коефіцієнти  $a_k, |k| \leq m$ , є комплекснозначними неперервними та обмеженими функціями в шарі  $\Pi_{[0, T]}$ , причому такими, що рівняння (1) у цьому шарі рівномірно параболічне за Петровським, тобто

$$\exists \delta > 0 \quad \forall (t, x) \in \Pi_{[0, T]} \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^n:$$

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=m} a_k(t, x) (i\sigma)^k \leq -\delta |\sigma|^m;$$

( $A_2$ ) коефіцієнти  $a_k, |k| \leq m$ , є гельдеровими за  $x$  рівномірно стосовно  $t$  з показником  $\alpha \in (0, 1]$  у такому сенсі:

$$\exists H > 0 \quad \forall \{(t, x), (t, y)\} \subset \Pi_{[0, T]} \quad \forall \beta \in (0, \alpha) :$$

$$\left| \Delta_x^y f(t, x) \right| \leq H |x - y|^\alpha \left[ \left( q_m(T) \right)^{\frac{1}{m} \left( 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right)} + |x| \right]^{-\alpha}, \quad (2)$$

де  $f$  — будь-який із коефіцієнтів  $a_k, |k| \leq m$ .

Зауважимо, що з гельдеровості в сенсі (2) коефіцієнтів випливає така зручніша для використання умова Гельдера:

$$\exists H_1 > 0 \quad \forall h \in [0, T] \quad \forall \{(t, x), (t, y)\} \subset \Pi_{[0, T]} :$$

$$\left| \Delta_x^y f(t, x) \right| \leq H_1 \left( \left( q_m(h) \right)^{\beta/m} + |X(h) - y|^\beta \right).$$

У статтях Заболотько, Івасишена, Пасічник (2012) і Заболотько, Івасишена (2014) побудовано й досліджено ФРЗК для випадків, коли коефіцієнти рівняння (1) є сталими або залежать лише від часової змінної  $t$ .

Побудова та дослідження ФРЗК  $Z$  для рівняння (1) із залежними від усіх змінних коефіцієнтами здійснюється за допомогою методу Леві. Суть цього методу полягає в тому, що ФРЗК шукається у вигляді суми головного члена — параметриксу  $Z_0$  і доданка у вигляді інтеграла з ядром  $Z_0$  і невідомою густиною  $Q$ , яка визначається із відповідного інтегрального рівняння, тобто у вигляді

$$Z(t, x; \tau, \xi) := Z_0(t, x; \tau, \xi) + W(t, x; \tau, \xi),$$

де

$$W(t, x; \tau, \xi) := \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} Z_0(t, x; \beta, y) Q(\beta, y; \tau, \xi) dy,$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Досліджено властивості функції  $Z_0$  та об'ємного потенціалу  $W$ , за допомогою яких доведено таку основну теорему.

**Теорема.** *Нехай виконуються умови  $A_1$  і  $A_2$ . Тоді для рівняння (1) існує ФРЗК  $Z$  і для нього справджуються оцінки*

$$\left| \partial_x^k Z(t, x; \tau, \xi) \right| \leq C \left( q_m(t - \tau) \right)^{-(n+|k|)/m} F_c^{(m)}(t - \tau, X(t - \tau) - \xi),$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, |k| \leq 2, \quad (3)$$

де

$$F_c^{(m)}(t, y) := \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \left( C_1 \Gamma(\alpha / m) \right) \left( q_m(t) \right)^{\alpha/m} \right]^j \times$$

$$\times \left( \Gamma(j\alpha / m + 1) \right)^{-1} E_{c\delta_0^j}^{(m)}(t, y).$$

Тут  $C, C_1, c$  і  $\delta_0$  — деякі додатні сталі,  $\Gamma$  — гамма-функція Ейлера.

**Зауваження.** Для рівняння (1) другого порядку, тобто коли  $m = 2$ , оцінки (3) поліпшуються, а саме замість оцінюючої функції  $F_c^{(2)}$  можна брати функцію  $E_c^{(2)}$ .

### Список літератури

- Заболотько, Т. О., Івасишен, С. Д. (2014). Повне аналітичне описання фундаментального розв'язку одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер.: Фіз.-мат. науки: зб. наук. пр.*, 10, 88—98.
- Заболотько, Т. О., Івасишен, С. Д., Пасічник, Г. С. (2012). Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами та деякі його застосування. *Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича*, 2 (2—3), 81—85.

# АНАЛІЗ ВПЛИВІВ ВЗАЄМОДІЙ У ДИСПЕРСНІЙ ФАЗІ НАНОПОРОШКУ $\text{BaTiO}_3$ НА РЕОЛОГІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СУСПЕНЗІЙ

М. М. Загорний, О. В. Кузьма

*Інститут проблем матеріалознавства НАН України,  
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна  
maksimmaksim@bigmir.net, olekuz6@gmail.com*

Відомо, що характер течії суспензії повинен визначатися як мікро- та нано-параметрами — розмірами і формою частинок, фізичними та хімічними особливостями фази включень, рідини, наявністю домішок, ПАР, характером взаємодії між частинками, структурою їх агрегатів — так і макро-характеристиками: середньою густиною, в'язкістю рідинної фази без домішок та ефективною в'язкістю дисперсійного середовища, концентрацією дисперсної фази [1—3]. Причому поява нано-об'єктів, частинок дисперсної фази суттєво впливають на зміну ефективною в'язкості всього середовища. Для ненасичених суспензій відомі формули Ньютона та ін., які мають добру відповідність з експериментальними даними, але при зростанні концентрації взаємодія ускладнює характер течії, починають відігравати роль міжмолекулярні зв'язки, фізико-хімічні, електростатичні сили, взаємодія між подвійними електричними шарами сусідніх частинок [2], тому отримати загальні формули для всіх випадків стає неможливим. Як і для середніх розмірів дисперсної фази, для наносуспензій продовжують мати місце гідродинамічна взаємодія [4], сили адгезії, тертя, інерції, але додаються ще і броунівські, конвекційні, сили Ван-дер-Ваальса та інші. В свою чергу, добавки до суспензій (електроліти, ПАР) зменшують впливи деяких сил, наприклад, екранують кулонівські сили між частинками, дають можливість впливати на утворення структур, їх самоорганізацію у суспензії. Аналогічно можуть проявлятися і динамічні впливи, такі як вібраційне чи акустичне збудження [4], ротаційні рухи у віскозиметрі [4] та ін.

П. А. Ребіндер і Ур'єв показали [2], що для області низьких швидкостей деформації має місце ньютонівський характер течії структурованих дисперсних систем (пасти і суспензії). Причому взаємодія включень повинна відігравати головну роль при створенні таких структур, що можна побачити на прикладі малих концентрацій. За повної відсутності твердої фази, структурні елементи утворюються за рахунок флуктуаційної дипольної взаємодії внаслідок утворення численних водневих зв'язків між гідроксильними групами дисперсantu та етанолу. Для незначних напружень зсуву залежність в'язкості є близькою до ньютонівської ділянки. При високих швидкостях зсуву флуктуаційні контакти руйнуються.

Але внесення до системи незначної кількості порошку супроводжується зменшенням незв'язаної частки дисперсantu внаслідок утворення сольватних оболонок на високорозвиненій поверхні нанопорошків та, як наслідок, виродження здатності структури до релаксації прикладеного зсувного напруження. При подальшому збільшенні концентрації, як показано в [3] на основі експери-



ментальних даних для наносуспензій титанату барію  $\text{BaTiO}_3$  із розміром частинок  $d = 2r \in [1 - 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}]$ , середнє статистичне значення  $d = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , відбувається зростання питомого ефективного об'єму дисперсної фази з одночасним розширенням сольватних адсорбційних шарів. Слід відмітити подібна залежність в'язкості для слабо взаємодіючих більших включень, наприклад, чорнил, вугільного пилу чи фракцій меленої цегли [5] із розмірами у діапазоні 0,01-0,2 мм, що на 2—3 порядки перевищують дисперсність зразків у [3], може мати місце тільки при немалих величинах швидкостей зсувів,  $D = 100 - 1000 \text{ с}^{-1}$  і середніх концентраціях, коли вплив взаємодій зменшується.

Для виявлення діапазонів подібностей експериментальних залежностей і формул для ефективної в'язкості та пояснення впливів структурованості суспензії у даній роботі був збільшений обсяг експериментальних даних при тих же параметрах суспензії  $\text{BaTiO}_3$ , розглянуті додаткові значення концентрацій, наприклад,  $c=0.15, 0.3$ , розширено діапазон величин зсувів та швидкостей обертання.

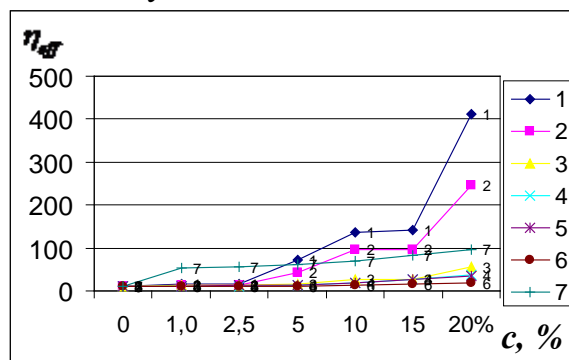


Рис. 1

Це дозволяє визначити не тільки межі початку руйнування структури в дисперсній фазі сегнетоелектрика, але і значення швидкостей обертання реометра, при якому суспензія розпадається на шари, втрачаючи ознаки однорідності. Для оцінки діапазонів формул для ефективної в'язкості, розглянуті, крім Крігера — Догерті [1, 3],

$$\eta_{eff} = \eta_1 \left(1 - \frac{c}{c_{max}}\right)^{-c_{max}[\eta_1]}, \quad (1)$$

ще формули, запропоновані Г. С. Ходаковим [5] ( $\varphi = c, \eta_{eff} = \mu$ ):

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 - \left[1,5(1 - \varphi)^{1,5} + 1\right]\varphi}, \quad \text{для } \varphi \leq 0,15, \quad (2)$$

$$\mu = \frac{k\mu_0}{1 - \left[1,5(1 - \varphi)^{1,5} + 1 + \Delta\right]\varphi}, \quad \text{для } 0,15 \leq \varphi \leq 0,5. \quad (3)$$

Одержані результати показані на рис. 1: експериментальні дані (криві 1-3) та аналітичні значення  $\eta_{eff}$  (криві 4-7). Криві 1, 2, 3 — для  $D=50, 100, 1000 \text{ сек}^{-1}$ . За формулою (1) побудована крива 4:  $D = 1000 \text{ сек}^{-1}, \quad c_{max} = 0,5236,$

$\eta_1 = [\eta] = 10,5 \text{ Па} \cdot \text{сек}^{-1}$ ; при застосуванні до цього випадку метода найменших квадратів — крива 5. Криві 6 та 7 побудовані по формулам (2) і (3) відповідно.

Слід зазначити, що з емпіричних значень для  $k=4-5$ ,  $\Delta = 0.1 - 0.3$ , запропонованих у [5], були вибрані  $\Delta = 2, k = 5$ . Деяка подібність між кривими 3 та 6 (при  $c < 15\%$ ), або 2 та 7 ( $15\% \leq c \leq 50\%$ ) проявляється, незважаючи на значні відмінності дисперсних фаз, що може пояснюватись створенням агрегатів, які і мають розміри на 2—3 порядки більші за окремі нано-частинки.

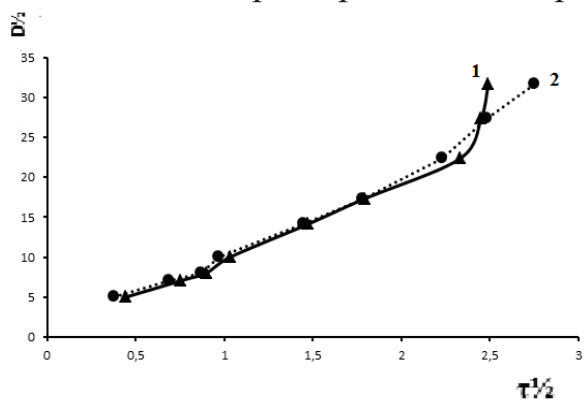


Рис. 2

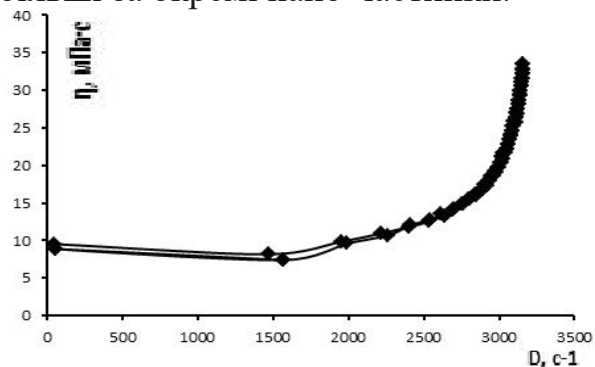


Рис. 3

Поверхнево активні речовини, ПАР, впливають на взаємодію дисперсної фази  $\text{BaTiO}_3$  навіть при незначних концентраціях. Їх вплив змінюється із зростанням швидкостей зсуву. На рис. 2 показано експериментальні криві течії слабко насиченої суспензії (0,33 %) в координатах Кесона для двох випадків: без ПАР — крива 1, та з ПВБ (30000) — крива 2.

В області малої концентрації сегнетоелектрика з уведенням ПАР крива течії апроксимується в лінійну залежність, при цьому при малих швидкостях зсуву напруга (в'язкість) стає спочатку меншою, а потім — більшою, що вказує на зміни ефекту екранування сил взаємодії.

Слід відмітити різний тип віскозиметрів — у [5] проточний, капілярний, а не ротаційний. Конструктивні особливості останнього приводять до того, що параметри швидкості зсувів (частоти обертання) не можна вибирати більше за  $1500 - 1800 \text{ сек}^{-1}$  через розшарування суспензії при середніх значеннях концентрації. Відцентрове прискорення навіть при 50 оборотах за секунду при радіусі ротора в 1 см перевищує 150 g коло поверхні обертання, фаза включень титанату барію, який має густину у 7.5 разів більшу за рідину, — етиловий спирт — збирається коло стінки, взаємодія, тертя, поштовхи о поверхні зростають. Це значно підвищує сили опору, але показники вже мають відношення не тільки до ефективної в'язкості. Для ілюстрації на рис. 3 приведено дані для концентрації 30% при значно більшому діапазоні швидкостей. Криві залежностей вказують найменші та найбільші значення. В умовах постійного зростання швидкості зсуву під час дії зсувного напруження зразок більш концентрованої суспензії краще проявляє дилатантний характер течії при зсувах від 1000 до  $1800 \text{ сек}^{-1}$ .

Додавання модифікатору ПВБ (ПАР) (рис. 4) із великою молекулярною масою змінює дилатантний характер течії суспензій ВаТіО<sub>3</sub>, особливо ослаблюючи його в області великих швидкостей зсуву.

На рис. 4 показані реологічні характеристики 30 % суспензії ВаТіО<sub>3</sub> із модифікатором ПВБ (45000). Графік а — залежність в'язкості від швидкості зсуву; б — залежність швидкості зсуву від напруги зсуву.

Можна зробити висновки, що на динамічне руйнування наносуспензій титанату барію впливають різні сили, основні з яких, як і енергія міжмолекулярної взаємодії були приведені в [3], де розглянута умова руйнування агрегатів із включень. Експериментальні дані вказують на те, що при дослідженні реологічних характеристик в ротаційному віскозиметрі треба розглянути не тільки динамічні умови руйнування структурованості та створення більшої її однорідності, але і умови того, що починається розшарування суспензії, результати для в'язкості будуть менш коректними. Руйнування структурованості можна помітити вже при  $\omega = 50 - 100 \text{ сек}^{-1}$ , розшарування (некоректні дані для  $\eta_{\text{eff}}$ ) —  $\omega \geq 1500-1800 \text{ сек}^{-1}$ .

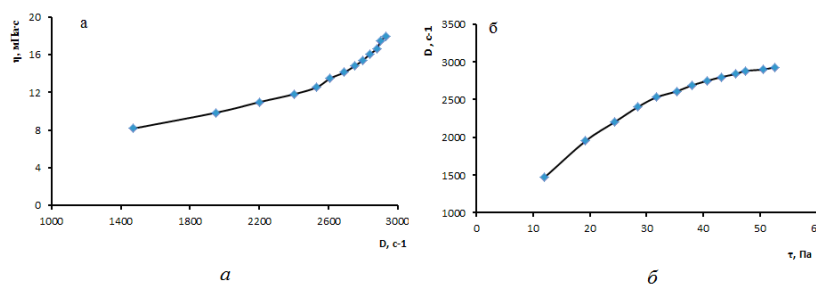


Рис. 4

Відмітимо, що додавання в рідинну фазу ПАР змінює сили притягання-відштовхування, що може використовуватись, разом із динамічними та іншими впливами, при створенні тонких плівок із наносуспензіями ВаТіО<sub>3</sub>, які широко використовуються у сучасних технологіях.

### Список літератури

1. Bergstrom, L. (2001). Colloidal Processing of Ceramics. *Handbook of Appl. Surf. Coll. Chem.* (pp. 201–208).
2. Урьев, Н. Б. (2004). Физико-химическая динамика дисперсных систем. *Успехи химии*, 73 (1), 39—62.
3. Zagorny, M., Zhygotsky, A., Ivanchuk, A., Kuzma, O., Pozniy, A., Ragulya, A. (2015). Barium Titanate Nanoparticles Self-organization from PVB-ethanol Suspensions. *J. Chem. Eng. Chem. Res.*, 2 (4), 547–555.
4. Кузьма, О. В. (2006). Особливості поведінки включень у стовпі стисливої рідини, що збурюється джерелом коливальних на осі симетрії. *Наук. вісти НТУУ «КПІ»*, (4), 66—72.
5. Ходаков, Г. С. (2003). Реология суспензий. Теория фазового течения и ее экспериментальное обоснование. *Рос. хим. журн.*, XLVII (2), 33—44.

# ПРО ВАРІАНТ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ НЕ ТОНКИХ ПЛАСТИН І ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

А. Г. Зеленський

Придніпровська державна академія будівництва та архітектури,  
Дніпропетровськ, Україна  
[a.zelensky@mail.ru](mailto:a.zelensky@mail.ru)

Варіант математичної теорії не тонких пружних пластин і пологих оболонок (Зеленський, 2006) ґрунтується на зображенні усіх компонент напружено-деформованого стану (НДС) у вигляді тривимірних функцій, кожна з яких представляється рядами по поперечній координаті  $z$  за допомогою поліномів Лежандра. Для зведення тривимірної задачі теорії пружності до двовимірної використовується варіаційний принцип Рейснера (Reissner, 1950). Важливо підкреслити, що при побудові двовимірних рівнянь граничні умови на лицевих поверхнях пластини й оболонки при цьому виконуються точно. Тривимірна гранична задача остаточно зводиться до розв'язування неоднорідної системи диференціальних рівнянь із частинними похідними відносно складових компонент переміщень

$$u_k(x, y), v_k(x, y), w_k(x, y),$$

які входять у ряди для компонент переміщень  $U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z)$ :

$$U(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(2z/h) u_k(x, y) \quad (U, V; u, v), \quad W(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}(2z/h) w_k(x, y), \quad (1)$$

де  $P_k(2z/h)$  — поліноми Лежандра,  $h$  — товщина пластини чи оболонки. Компоненти напружень і деформацій також виражаються у вигляді рядів (через складові компонент переміщень).

Система диференціальних рівнянь рівноваги представляє собою неоднорідну систему диференціальних рівнянь із частинними похідними, порядок якої залежить від кількості членів у апроксимуючих рядах (1). Вона має якісно наступний вигляд:

$$\sum_{j=0}^{\infty} L_{i,u_j} u_j + \sum_{j=0}^{\infty} L_{i,v_j} v_j + \sum_{j=0}^{\infty} L_{i,w_j} w_j = L_{i,q}(x, y), \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

де  $u_j, \dots, w_j$  — шукані функції двох незалежних змінних  $x, y$ ;  $L_{i,u_j}, L_{i,v_j}, L_{i,w_j}$  — диференціальні оператори не вище 2-го порядку;  $L_{i,q}(x, y)$  — функції інтенсивності зовнішнього поперечного навантаження. Сталі інтегрування системи диференціальних рівнянь (2) визначаються із граничних умов на бічній поверхні, які можуть бути заданими в напруженнях, у переміщеннях або в напруженнях і переміщеннях (мішана гранична задача).

У процесі отримання рівнянь (2), компонент НДС і при перетворенні (2) використовуються операції інтегрування і диференціювання рядів (1).

Виникають питання обґрунтованості, збіжності рядів, існування і єдиність розв'язків граничних задач, правомірність зведення системи до розв'язувальних рівнянь 2-го і 4-го порядків для пластин.

Позначимо замкнену область трьох змінних  $x, y, z$ , яку займає пластина (оболонка), через  $C_V$ , а відповідну область змінення  $x, y$  — через  $C_D$ .

Нехай функції  $u_k(x, y), v_k(x, y), w_k(x, y), L_{iq}(x, y)$  неперервні в  $C_D$  разом зі своїми похідними за обома змінними.

**Теорема 1.** Ряди (1) будуть збігатися рівномірно і абсолютно в області  $C_V$ , якщо будуть збігатися ряди

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, y), \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, y), \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x, y)$$

в області  $C_D$  рівномірно і абсолютно.

На основі цієї теореми доведені теорема 2 і теорема 3 про почленне інтегрування і диференціювання цих рядів.

Існування розв'язків системи (2) пов'язано з тим, що ця система є системою диференціальних рівнянь (рівнянь рівноваги), яка впливає з варіаційного рівняння Рейснера і відображує по суті мінімум функціоналу.

Єдиність розв'язку граничних задач доведена відповідною теоремою 4 про єдиність розв'язку системи (2). В основі доведення лежить припущення про не єдиність розв'язку, що в результаті призводить до суперечності.

У класі неперервних функцій і їх похідних доведена теорема про те, що визначення загальних розв'язків системи (2) для пружних не тонких пластин методом, який ґрунтується на методі (Зеленський, 2011; Зеленський, Приварников 2015), зводиться до визначення загальних розв'язків рівняння Пуассона, неоднорідних рівнянь Гельмгольца і неоднорідного бігармонічного рівняння.

### Список літератури

- Зеленський, А. Г. (2006). Аналітична теорія розрахунку не тонких пластин та оболонок і її застосування. *Теоретичні основи будівництва: Зб. наук. праць Придніпровської державної академії будівництва та архітектури та Варшавського технічного університету*, 14, 569—578.
- Reissner, E. (1950). On a variational theorem in elasticity. *J. Math. and Phys.*, 29 (2), 90—95.
- Зеленський, А. Г. (2011). Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними в теорії пластин середньої товщини. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*, 19 (7), Серія механіка, 15 (1), 81—89.
- Зеленський, А. Г., Приварников А. К. (2015). Про метод розв'язування неоднорідних рівнянь із частинними похідними в математичній теорії плит. *Международный научный журнал. Физико-математические науки*, 2015 (2), 154—159.

# ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ КРУГОВОГО ДИСКА З КРИВОЛІНІЙНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ І ТРІЩИНАМИ

**В. М. Зеленьк, Л. І. Коляса, Г. В. Івасик**

*Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна*  
[kolyasa.lubov@gmail.com](mailto:kolyasa.lubov@gmail.com), [Ivasyk\\_g@yandex.ua](mailto:Ivasyk_g@yandex.ua)

Методом сингулярних інтегральних рівнянь двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами розглядали раніше. Зокрема, досліджували термопружний стан у скінченній (Sumi, 1981), напівскінченній (Зашкільняк, 1985) і нескінченній (Shindo, Atsumi, 1975) плоскій області з чужорідними однокомпонентними включеннями і криволінійними тріщинами. Розглянута нижче модель для кругового диска з включеннями і тріщинами має важливе практичне значення для розрахунку термопружного стану в композитних матеріалах за врахування різних концентраторів напружень.

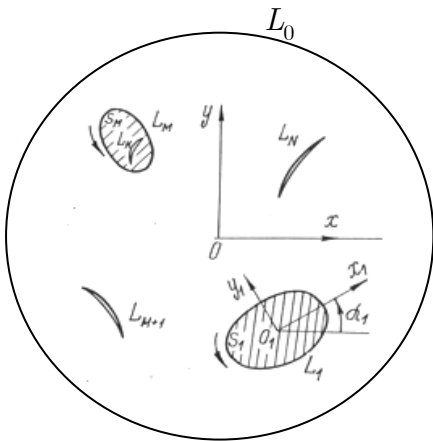


Рис. 1. Геометрія кругового диска з криволінійними включеннями і тріщинами

**Інтегральні рівняння.** Нехай кругова область  $S$ , обмежена колом  $L_0$  радіуса  $R_0$  з центром у початку основної системи координат  $xOy$ , містить включення  $S_n$  з криволінійними контурами  $L_n$  ( $n = \overline{1, M}$ ) та криволінійні тріщини (розрізи)  $L_n$  ( $n = \overline{M+1, N}$ ), що можуть знаходитись як в матриці-диску, так і у включеннях. Вважаємо, що контури  $L_n$  ( $n = \overline{1, N}$ ) не мають спільних точок. Віднесемо кожний контур  $L_n$  ( $n = \overline{1, N}$ ) до локальних систем координат  $x_n O_n y_n$ , вісь  $O_n x_n$  яких утворює кут  $\alpha_n$  з віссю  $Ox$ , а точки  $O_n$  визначають у системі координат  $xOy$  комплексні координати  $z_n^0 = x_n^0 + iy_n^0$ .

Зв'язок між координатами точок області  $S$  у локальній і основній системах координат дано співвідношеннями (рис. 1):  $z = z_n e^{i\alpha_n} + z_n^0$ ,  $z = x + iy$ ,  $z_n = x_n + iy_n$ .

Нехай круговий кусково-однорідний диск з криволінійними тріщинами нагрітий до сталої температури  $T(x, y) = T_c = \text{const} \neq 0$ , яка відрізняється від температури  $T_c = 0$  ненапруженого початкового стану. Припустимо, що на

контурах включень мають місце умови спряження (напруження неперервні, а переміщення мають розрив)

$$\begin{aligned} [N(t_n) + iT(t_n)]^+ &= [N(t_n) + iT(t_n)]^-, \\ (u_n + iv_n)^+ - (u_n + iv_n)^- &= g_n^*(t_n), \quad t_n \in L_n, \quad n = \overline{1, M}; \end{aligned} \quad (1)$$

береги тріщин у процесі деформування не контактують і на них задане самозрівноважене навантаження

$$[N(t_n) + iT(t_n)]^\pm = p_n^*(t_n), \quad n = \overline{M+1, N}; \quad (2)$$

на контурі диска  $L_0$  діють зусилля

$$N(t_0) + iT(t_0) = p_0^*(t_0), \quad t_0 \in L_0,$$

які задовольняють умови рівноваги.

Комплексні потенціали напружень для кусково-однорідного диска з тріщинами, на основі узагальнення для однорідного диска з тріщинами (Панасюк, Саврук, 1984), виберемо у вигляді, де виключена невідома функція на контурі диска  $L_0$

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z); \\ \Psi(z) &= \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z), \end{aligned} \quad (3)$$

де функції  $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$  визначають напружений стан однорідного диска без тріщин, коли на його межі задано навантаження.

Комплексні потенціали  $\Phi_1(z), \Psi_1(z), \Phi_2(z), \Psi_2(z)$  характеризують збурений термонапружений стан, зумовлений включеннями і тріщинами.

Задовольнивши з використанням потенціалів (3) крайові умови (1),(2), одержимо систему  $N$  сингулярних інтегральних рівнянь першого і другого роду відносно  $N$  невідомих функцій  $Q_k(t_k), k = \overline{1, N}$ ,

$$\begin{aligned} A_n Q_n(\tau_n) + \frac{1}{2\pi} \int_{L_n} [R_{nk}(t_k, \tau_n) Q_k(t_k) dt_k + S_{nk}(t_k, \tau_n) \overline{Q_k(t_k)} \overline{dt_k}] &= P_n(\tau_n), \\ \tau_n \in L_n, \quad n = \overline{1, M}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{L_n} [R_{nk}(t_k, \tau_n) Q_k(t_k) dt_k + S_{nk}(t_k, \tau_n) \overline{Q_k(t_k)} \overline{dt_k}] + \\ &+ \delta_{n0} \left( a_0 \frac{ds_0}{d\tau_0} - \frac{1}{2i} \frac{M_0}{(\overline{\tau_0} - z_0^0)} \cdot \frac{d\overline{\tau_0}}{d\tau_0} \right) = P_n(\tau_n), \quad \tau_n \in L_n, \quad n = \overline{M+1, N}, \end{aligned}$$

де

$$Q_k(t_k) = \begin{cases} g_k(t_k), & t_k \in L_k, \quad k = \overline{1, M}; \\ g'_k(t_k), & t_k \in L, \quad k = \overline{M+1, N}; \end{cases} \quad |z| < R_0, \quad |\zeta_k| < R_0,$$

$$\zeta_k = t_k e^{i\alpha_k} + z_k^0;$$

$g_k(t_k), k = \overline{1, M}$  — невідомі функції на контурах включень;  
 $g'_k(t_k), k = \overline{M+1, N}$ ; — невідомі функції на контурах тріщин.

$R_{nk}(t_k, \tau_n), S_{nk}(t_k, \tau_n)$  — знайдено в Зеленьак (2015),

$$P_n(\tau_n) = \left[ (\Gamma_n \beta^t - \beta_n^t) \cdot T_c + 2G_n g_n^*(\eta_n) \right] + B_n \Phi_0(\eta_n) + \\ + C_n \left[ \overline{\Phi_0(\eta_n)} + \frac{d\tau_n}{d\tau_n} (\eta_n \overline{\Phi'_0(\eta_n)} + \overline{\Psi_0(\eta_n)}) \right] + 2G_n g_n^*(\eta_n), \quad n = \overline{1, M};$$

$$P_n(\tau_n) = p_n^*(\eta_n) - \overline{\Phi_0(\eta_n)} - \overline{\Phi_0(\eta_n)} - \left[ \eta_n \overline{\Phi'_0(\eta_n)} + \overline{\Psi_0(\eta_n)} \right], \\ n = \overline{M+1, N};$$

$\beta^t = \alpha^t E / (1 + \mu)$ ,  $\chi = (3 - \mu) / (1 + \mu)$ ;  $\alpha^t, E, G, \mu$  — температурний коефіцієнт лінійного розширення, модуль пружності (Юнга), модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона. До інтегральних рівнянь (4) додано нульові функціонали [4], які забезпечують існування розв'язку системи рівнянь (4) для довільних її правих частин. У класі функцій  $g_k(t_k) \in H, k = \overline{1, M}$  і  $g'_k(t_k) \in H^*, k = \overline{M+1, N}$  система рівнянь (4) має єдиний розв'язок для довільної її правої частини за виконання умов

$$\int_{L_n} g'_n(t_n) dt_n = 0, \quad n = \overline{M+1, N},$$

які забезпечують однозначність переміщень за обходу контурів тріщин. Коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН), які характеризують напружено-деформований стан в околі вершин тріщин, знаходимо за формулою Саврук (1981).

**Висновки.** Отримано систему модифікованих сингулярних інтегральних рівнянь задачі термопружності для кругового диска з криволінійними включеннями і тріщинами, яка не містить невідомої функції на коловому контурі межі диска, що дає змогу ефективніше знаходити її числовий розв'язок.

### Список літератури

- Shindo, Y., & Atsumi, A. (1975). Thermal stresses in a laminate composite with infinitive row of parallel cracks normal to the interfaces. *Int. J. Eng. Sci.*, 13 (1), 25–43.  
 Sumi, N. (1981). Thermal stresses in a finite rectangular plate with rigid ribbon-like inclusion. *J. Therm. Stresses*, 4 (1), 83–90.



- Зашкільняк, І. М. (1985). Термоупруге состояние полуплоскости с включением и криволинейными трещинами. *Мат. методы и физ.-мех. поля*, 22, 60—65.
- Зеленяк, В. М. (2015). Термопружна взаємодія тріщини та включення у круговому диску. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*, 21, 109—116.
- Панасюк, В. В., Саврук, М. П. (1984). Плоские задачи теплопроводности и термоупругости для тел с трещинами. *Успехи механики*, 7 (2), 75—115.
- Саврук, М. П. (1981). *Двумерные задачи упругости для тел с трещинами*. Киев: Наукова думка.

## ФОРМАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ МОДЕЛІ ДИНАМІЧНОГО РУЙНУВАННЯ

Г. М. Зражевський, В. Ф. Зражевська

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка,*

*НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна*

[zgrig@univ.kiev.ua](mailto:zgrig@univ.kiev.ua), [vera.zrazhevaska@gmail.com](mailto:vera.zrazhevaska@gmail.com)

У роботі запропонований новий формальний підхід до побудови моделі динамічного руйнування, що ґрунтується на формулюванні початково-граничної задачі з сингулярними узагальненими функціями в коефіцієнтах визначальних рівнянь та співвідношення стрибок переміщень-напруження, що узагальнює співвідношення деформація-напруження. Підхід проілюстровано на прикладі моделі одновимірного динамічного крихкого руйнування. Запропонований підхід може бути поширений на дво- та тривимірні моделі динамічного пружно-пластичного руйнування.

Крихке руйнування в елементах конструкцій у багатьох випадках пов'язане з генерацією та поширенням у них пружних хвиль (Kolsky, 1953; Achenbach, 1999). Специфіка такого руйнування полягає в тому, що енергія руйнування при поширенні тріщини відбирається від енергії хвильового процесу (Achenbach, 1970; Слеп'ян, 1990), отже, модель такого процесу має бути динамічно нестационарною. У той же час, існування та поширення тріщини призводить до дифракції хвилі так і у свою чергу призводить до генерування вторинної хвилі (Ravi-Chandar, 2004). Результати експериментів свідчать, що руйнування відбувається при досягненні динамічних напружень розтягу у відбитій від вільного торця стрижня певного рівня, шляхом зародження та поширення дископодібної тріщини від осі стрижня (Kolsky, 1953; Freund, 1998). Отже, теорія міцності в цьому випадку не може бути покладена в основу моделі. Для адекватного опису потрібно базуватись на динамічній теорії руйнування (Freund, 1998).

Розглянемо лінійно пружний стрижень, який у припущенні, що в перерізі  $x = x_f$  в момент  $t = t_f$  ініціюється процес руйнування, що триває до моменту  $t = t_f + \tau_f$ . Опишемо процес руйнування зміною модуля Юнга:

$$E = E_0(1 - f(t - t_f))\delta(x - x_f) \quad (1)$$

де  $E_0$  — модуль Юнга незруйнованого матеріалу, а функція руйнування має вигляд

$$f(t) : f(0) = 0, f(\tau_f) = 1, f'(t) \geq 0, t \in [0, \tau_f],$$

$\delta(x)$  — дельта-функція Дірака.

У таких припущеннях, формальна математична постановка задачі в безрозмірних змінних має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(t - t_f) \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta(x - x_f) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in (0,1), \quad t_f < t \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad x \in (0,1), \quad t_f < t$$

$$u(x, t_f) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_f) = v_0(x), \quad 0 < x < 1$$

де  $u_0(x), v_0(x)$  визначаються динамічним станом у момент руйнування.

Модель (2) не є повною, оскільки описує будь-який процес зміни пружності в заданому перерізі, та має бути конкретизована. Як приклад, показано, що при  $f(t) = H(t)$  дана модель є фізичною, але не описує процес руйнування шляхом поширення тріщин, оскільки в цьому випадку повна механічна енергія стрижня зберігається в будь-якому інтервалі, що утримує момент руйнування. Інтерпретація  $f(t)$  є більш зрозумілою, якщо врахувати, що:

$$\sigma dx = E_0(1 - f(t - t_f)\delta(x - x_f)) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx \quad (3)$$

а отже, для крихкого руйнування:

$$[u] = [u_1](x_f, \tau) = f(\tau) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) (x_f, \tau) \quad (4)$$

Показано, що в цьому випадку

$$\Delta E(t) = -\frac{1}{2} \int_{t_f}^t f'(t - t_f) / f(t - t_f) \frac{\partial u(x_f, t)}{\partial x} [u_1](x_f, t) dt \quad (5)$$

Руйнування за цією моделлю супроводжується дисипацією енергії, а отже допускає введення енергетичного критерію руйнування. Застосування такого критерію, вочевидь, дозволяє повне визначення руйнування стрижня: переріз руйнування, момент руйнування, фрагментування чи пошкодження.

### Список літератури

- Achenbach, J. D. (1970). Crack propagation generated by a horizontally polarized shear wave. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 18, 245–259.
- Achenbach, J. D. (1970). Fracture generated by a dilatational wave. *International Journal of Fracture*, 7, 77–88.
- Achenbach, J. D. (1999). *Wave propagation in Elastic Solids*. Elsevier.
- Freund, L. B. (1998). *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge University Press, 563.
- Kolsky, H. (1953). *Stress Waves in Solid*. Oxford.
- Ravi-Chandar, K. (2004). *Dynamic Fracture*. Elsevier.
- Слепьян, Л. И. (1990). *Механика трещин*. Ленинград: Судостроение.

# ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ ДИФУЗІЇ МЕТОДОМ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Г. В. Івасик, Й. Р. Желізняк

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна

[Ivasyk-G@yandex.ua](mailto:Ivasyk-G@yandex.ua), [Zhelizniak\\_yosyf@ukr.net](mailto:Zhelizniak_yosyf@ukr.net)

Розглядаємо плоску задачу про дифузію речовини в безмежному середовищі за наявності в ньому циліндричного тіла. Динамічний стан середовища створюється об'ємними джерелами. Рівняння задачі формулюємо в будь-якій площині, перпендикулярній до твірної циліндра.

Нехай  $w = \phi(z)$  — однолисте конформне відображення області  $\bar{D}$  (зовнішності на прямої циліндра) на круг  $\bar{K}$  і  $z = h(w)$  — обернене до нього відображення. При цьому крива  $\partial D$  відображається на коло  $\partial K$ . Рівняння дифузії (Владимиров, 1981) запишемо у прямокутній системі координат з використанням комплексних змінних

$$w = u + iv, \bar{w} = u - iv$$

у вигляді

$$\partial_t^1 U = 4a^2 \partial_{w\bar{w}}^2 U - f,$$

де  $u, v$  і  $t$  — лінійні та часова координати;  $U = U(w, \bar{w}, t)$ ,  $f = f(w, \bar{w}, t)$  — дійсні функції.

Перейшовши до нових змінних  $z = h(w)$ ,  $\bar{z} = \overline{h(w)}$ , одержимо таке рівняння:

$$\partial_t^1 U = 4a^2 |\phi'(z)|^{-2} \partial_{z\bar{z}}^2 U - f.$$

Розв'язок цього рівняння в  $\bar{D}$  за однорідних початкових умов (що не є принциповим) і граничної умови

$$U|_{z \in L} = 0$$

шукаємо (Sukhorolsky, 2014) як суму ряду за системою функцій

$$\left\{ \Phi_{m,k(m)}(z, \bar{z}) \right\}_{k=1}^{\infty} \quad (m = 0, \pm 1, \dots),$$

де

$$\Phi_{-m,k(m)}(z, \bar{z}) = \Phi_{m,k(m)}(\bar{z}, z);$$

$$\Phi_{m,k(m)}(z, \bar{z}) = J_m \left( \lambda_{k(m)} \phi(z), \lambda_{k(m)} \overline{\phi(z)} \right);$$

$$J_m(w, \bar{w}) = w|w|^{-1} J_m(|w|);$$

$J_m(w, w) = J_m(w)$  — функції Бесселя першого роду  $m$ -го порядку;  $\lambda_{k(m)}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) - додатні корені рівняння  $J_m(\lambda) = 0$ . Запроваджені величини є власними функціями і власними числами крайової задачі:

$$4|\phi'(z)|^{-2} \partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 U + \lambda^2 u = 0, \quad U|_{z \in \partial D} = 0.$$

Нехай функція  $f(r, \psi) = f\{w, \bar{w}\}$  розвивається в рівномірно збіжний ряд за системою функцій  $\{e^{ik\psi}\}_{k=-\infty}^{\infty}$  в області  $[-\pi; \pi]$ ,

$$f(w, \bar{w}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{in\psi}, \quad f_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(w, \bar{w}) e^{-in\psi} d\psi \quad (1)$$

Уважаємо також, що функції  $f_n(r)$  зображуються інтегралами Фур'є — Бесселя

$$f_n(r) = \int_0^{\infty} \hat{f}_n(\lambda) J_n(r\lambda) \lambda d\lambda, \quad \hat{f}_n(\lambda) = \int_0^{\infty} f_n(r) J_n(\lambda r) r dr. \quad (2)$$

Підставляючи другу формулу (1) у другу формулу (2), одержимо перетворення функції  $f(w, \bar{w})$

$$\begin{aligned} \hat{f}_n(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} f(w, \bar{w}) e^{-in\psi} J_n(\lambda r) r dr d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} f(w, \bar{w}) J_n(\lambda \bar{w}, \lambda w) r dr d\psi. \end{aligned}$$

Обернене перетворення цієї функції одержимо з перших формул (1) і (2),

$$f(w, \bar{w}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \hat{f}_n(\lambda) J_n(r\lambda) e^{in\psi} \lambda d\lambda = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \hat{f}_n(\lambda) J_n(w\lambda, \bar{w}\lambda) \lambda d\lambda,$$

де  $J_{-n}(\lambda w, \lambda \bar{w}) \stackrel{def}{=} J_n(\lambda \bar{w}, \lambda w)$ .

Таким чином, маємо формули перетворення Фур'є — Бесселя для функції двох змінних

$$\begin{aligned} \hat{f}_n(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} f(w, \bar{w}) J_n(\lambda \bar{w}, \lambda w) r dr d\psi, \\ f(w, \bar{w}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \hat{f}_n(\lambda) J_n(w\lambda, \bar{w}\lambda) \lambda d\lambda. \end{aligned}$$

Отже, якщо функція  $f(w, \bar{w}, t)$  зображується збіжним рядом

$$f(z, \bar{z}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{m,k}(t) \Phi_{m,k(m)}(z, \bar{z}),$$

де

$$f_{m,k}(t) = \left\| J_{m,k(m)} \right\|^2 \iint_D f(z, \bar{z}, t) \Phi_{m,k(m)}(\bar{z}, z) |\phi'(z)| dx dy,$$

то узагальнений (відносно множини функцій, що розвиваються у слабо збіжні ряди за даною системою) розв'язок задачі (Владимиров, 1981) можна знайти операційним методом:

$$U(z, \bar{z}, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_{m,k(m)}(z, \bar{z}) \int_0^t e^{-a^2 \lambda_{k(m)}^2 (t-\tau)} f_{m,k}(\tau) d\tau.$$

Одержаний розв'язок задовольняє сформульовану граничну умові, оскільки

$$\begin{aligned} & J_m \left( \lambda_{k(m)} |\phi(z)|, \lambda_{k(m)} |\overline{\phi(z)}| \right) \Big|_{z \in \partial D} \\ &= J_m \left( \lambda_{k(m)} |w|, \lambda_{k(m)} |\bar{w}| \right) \Big|_{w \in \partial K} = J_m \left( \lambda_{k(m)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Розв'язок проілюстровано відображеннями

$$w = z + \sqrt{z^2 - c} \text{ і } w = \left(1/\sqrt{2}\right) \left(\sqrt{z^2 + c} + \sqrt{z^2 - c}\right),$$

що відповідають площині з еліптичним або хрестоподібним включеннями.

### Список літератури

- Sukhorolsky, M. A. (2014). Solution of Helmholtz's equation in the plane with an elliptical hole. *Mathematical modeling and computing*, 1 (2), 256–283.
- Владимиров, И. С. (1981). *Уравнения математической физики*. Москва: Наука.
- Сухорольський, М. А. (2000). Аналітичні розв'язки рівняння Гельмгольца. У кн. Луковський, І. О., Кіт, Г. С., Кушнір, Р. М. (ред.). *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* (с. 160—163). Львів: ІППММ НАН України.
- Сухорольський, М. А., Івасик, Г. В., Достойна, В. В. (2014). Розв'язки рівняння Гельмгольца в комплексних областях. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*, 5 (4), 10—15.

**ПРО ОСТАННІ РЕЗУЛЬТАТИ ПОБУДОВИ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ  
ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ  
ДЛЯ ВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ  
ТИПУ РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ З ІНЕРЦІЄЮ**

**С. Д. Івасишен<sup>1,3</sup>, І. П. Мединський<sup>2,3</sup>**

<sup>1</sup>НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ,

<sup>2</sup>Національний університет «Львівська політехніка», Львів,

<sup>3</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики

ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна

ivasyshen\_sd@mail.ru, i.p.medynsky@gmail.com

Клас рівнянь, яким присвячується доповідь, є природним узагальненням класичного рівняння дифузії з інерцією Колмогорова (1934). Таке рівняння і його різноманітні узагальнення вивчалися багатьма авторами (див. бібліографію в Eidelman, Ivasyshen and Kochubei (2004)). Метою цих досліджень є побудова й дослідження різних властивостей фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) за якомога слабших припущень на коефіцієнти рівняння. На жаль, на сьогоднішній час точних результатів, що стосуються класичних ФРЗК для вироджених рівнянь Колмогорова з коефіцієнтами, залежними від усіх змінних, майже немає. Доповідь присвячена випадку, коли коефіцієнти рівняння залежать від двох груп просторових змінних.

Уважається, що просторова змінна  $x \in \mathbb{R}^n$  складається із двох груп змінних: основної групи  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$  і групи змінних виродження  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ , де  $x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l})$ ,  $l \in \{1, 2\}$ ,  $1 \leq n_2 \leq n_1$ ,  $n = n_1 + n_2$ .

У праці [2] побудовано ФРЗК для рівняння вигляду

$$\left( \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t, x) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, x) \partial_{x_{1j}} - a_0(t, x) \right) u(t, x) = 0, \quad t \in (0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

за таких припущень на коефіцієнти.

$$\exists \delta > 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \quad \forall \sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1} :$$

$$\operatorname{Re} \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t, x) \sigma_{1j} \sigma_{1l} \geq \delta \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^2; \quad (2)$$

$a_{jl}$ ,  $a_j$  і  $a_0$  — обмежені й неперервні на  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$  комплекснозначні функції, які задовольняють умову Гельдера

$$\exists H > 0 \quad \exists \alpha \in (0, 1] \quad \forall \{t, \tau\} \subset [0, T] \quad \forall \{x, y\} \subset \mathbb{R}^n :$$

$$|a(t, x) - a(\tau, y)| \leq H (d(t, X(t - \tau); \tau, y))^\alpha, \quad (3)$$

де  $a$  — будь-який з коефіцієнтів  $a_{jl}$ ,  $a_j$  і  $a_0$ ;

$X(t) := (X_1(t), X_2(t)), X_1(t) := x_1, X_2(t) := x_2 + tx'_1,$   
 $x'_1 := (x_{11}, \dots, x_{1n_2}),$  — параметричні точки;

$$d(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|^{\frac{1}{3}}, d(t, x; \tau, y) := |t - \tau|^{\frac{1}{2}} + d(x, y)$$

— параболічні відстані. Побудований за цих умов у Eidelman et al. (2004). ФРЗК не є класичним, а в певному сенсі узагальненим. Пропонується замість умови (3), яка через параметричні точки і параболічну відстань переплітає часову і просторові змінні, використовувати для коефіцієнтів рівняння (1) наступні умови:

$$\exists H_1 > 0 \quad \exists \alpha_1 \in (0, 1] \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall \{x_1, y_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1} \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} :$$

$$|a(t, (x_1, x_2)) - a(t, (y_1, x_2))| \leq H_1 |x_1 - y_1|^{\alpha_1}, \quad (4)$$

$$\exists H_2 > 0 \quad \exists \alpha_2 \in (1/3, 2/3] \quad \forall \{t, h\} \subset [0, T] \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \quad \forall \{x_2, y_2\} \subset \mathbb{R}^{n_2} :$$

$$|a(t, (x_1, x_2)) - a(t, (x_1, y_2))| \leq H_2 (h^{3\alpha_2/2} + |X_2(h) - y_2|^{\alpha_2}). \quad (5)$$

Якщо коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови (2), (4) і (5), то за допомогою методу Леві побудовано класичний ФРЗК  $Z$  та досліджено його властивості, зокрема одержано такі оцінки похідних від функції  $Z$ :

$$\left| \partial_{x_1}^{k_1} \partial_{x_2}^{k_2} Z(t, x; \tau, \xi) \right| \leq C (t - \tau)^{-(n_1 + 3n_2 + |k_1| + 3|k_2|)/2} \times$$

$$\times \exp \left\{ -c \left( \frac{|x_1 - \xi_1|^2}{t - \tau} + \frac{|x_2 + (t - \tau)x'_1 - \xi_2|^2}{(t - \tau)^3} \right) \right\},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^{n_1}, \quad |k_1| + 2|k_2| \leq 2,$$

де  $k_l := (k_{l1}, \dots, k_{ln_l})$  —  $n_l$ -вимірний мультиіндекс,  $|k_l| := k_{l1} + \dots + k_{ln_l}$ ,  $l \in \{1, 2\}$ ,  $C$  і  $c$  — додатні сталі.

Побудова ФРЗК за вказаних умов потребувала певних модифікацій класичного методу Леві. Ці модифікації стосуються вибору параметриксу, дослідження його властивостей та поетапного застосування процедури «розморожування» коефіцієнтів. Кількість етапів збігається з кількістю груп просторових змінних. Для випадку, коли коефіцієнти рівняння (1) не залежать від змінних виродження, аналогічні результати отримано в праці Івасишена та Мединського (2014).

### Список літератури

- Eidelman, S. D., Ivasyshen, S. D., & Kochubei, A. N. (2004). *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*. In *Operator Theory: Advances and Applications*, 152. Basel: Birkhäuser.
- Kolmogorov, A. N. (1934). Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung). *Ann. Math.*, 35, 116–117.
- Івасишен, С. Д., Мединський, І. П. (2014). Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження. *Буковинський мат. журн.*, 2 (2–3), 94–106.



**ПРО ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО  
РІВНЯННЯ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ В ГРУПІ МОЛОДШИХ ЧЛЕНІВ  
КОЕФІЦІЄНТАМИ І ВИРОДЖЕННЯМИ  
НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ**

**С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник**

*НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ,*

*Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці,  
Україна*

[ivasysheh\\_sd@mail.ru](mailto:ivasysheh_sd@mail.ru), [pasichnyk@mail.ru](mailto:pasichnyk@mail.ru)

Нехай  $n_3 \leq n_2 \leq n_1$ ;  $n := n_1 + n_2 + n_3$ ; змінна  $x \in \mathbb{R}^n$  складається з трьох груп змінних

$$x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}, \quad l \in \{1, 2, 3\}.$$

Розглядається рівняння вигляду

$$\alpha(t)\partial_t u - \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} u + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} u + \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} u + b\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{x_{1j}}(x_{1j}u)\right) - au = 0, \quad (1)$$

$$t > 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

де  $a_{js}$ ,  $b$  і  $a$  — дійсні сталі, причому  $a_{js} = a_{sj}$ ,  $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$ ,  $\alpha$  і  $\beta$  — неперервні на  $[0, \infty)$  функції, для яких  $\alpha(t) > 0$ ,  $\beta(t) > 0$  при  $t > 0$  і  $\alpha(0)\beta(0) = 0$ , причому функція  $\beta$  монотонно неспадна та виконується умова параболічності

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \sigma_1 := (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s} \geq \delta |\sigma_1|^2.$$

Основними результатами для рівняння (1) є:

- 1) явна формула для фундаментального розв'язку задачі Коші  $G$ ;
- 2) властивості фундаментального розв'язку задачі Коші (точні оцінки функції  $G$  та її похідних, нормальність, формула згортки, вираження коефіцієнтів  $a_{js}$  через функцію  $G$ );
- 3) властивості породжених функцією  $G$  потенціалів;
- 4) теореми про коректну розв'язність задачі Коші у вагових  $L_p$ -просторах швидкозростаючих при  $|x| \rightarrow \infty$  функцій у випадку слабкого виродження,

тобто коли  $\int_0^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} < +\infty$ ;

- 5) інтегральне зображення розв'язків задачі Коші та розв'язків, визначених у відкритому шарі  $\Pi_{(0,T]}$ , у випадку слабкого виродження.

Подібні результати опубліковано у статтях Івасишен, Пасічник (2014, 2015) для рівняння без виродження на початковій гіперплощині.

### Список літератури

- Івасишен, С. Д., Пасічник, Г. С. (2014). Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 11 (2), 126—153.
- Івасишен, С. Д., Пасічник, Г. С. (2015). Інтегральне зображення розв'язків одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів членів. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 12 (2), 205—229.
- Івасишен, С., Пасічник, Г. (2014). Задача Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів. *Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка*, 11, 73—87.

# ЗВЕДЕННЯ ЛІНІЙНИХ НОРМАЛЬНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ ДО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
aleksei\_kalaida@comcast.net

Розглянемо нормальну лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$y'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Припустимо, що для її однорідної підсистеми  $n - 1$  рівнянь відома її фундаментальна матриця розв'язків

$$U(x) = (u_{ij}(x)), \quad i, j = \overline{1, n - 1}.$$

Без обмеження загальності вважатимемо, що це підсистема перших  $n - 1$  рівнянь системи (1), тобто система

$$y'_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}(x)y_j + a_{in}(x)y_n, \quad i = \overline{1, n - 1}. \quad (2)$$

Загальний розв'язок однорідної системи (2) (системи без останнього доданка), за припущенням, є  $(\Phi(x, x_0) = U(x)U^{-1}(x_0))$  — нормальна фундаментальна матриця)

$$\hat{z}(x) = (\hat{y}_1(x) \dots \hat{y}_{n-1}(x))^T = \Phi(x, x_0)\hat{z}_0, \Rightarrow y_i(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_{ij}(x, x_0)y_{j,0}, \quad i = \overline{1, n - 1}.$$

а за методом Лагранжа маємо загальний розв'язок системи (2)

$$z(x) = \hat{z}(x) + \int_{x_0}^x \Phi(x, s)v(s)y_n(s)ds, \quad (3)$$

$$\Phi(x, s) = U(x)U^{-1}(s), \quad v(x) = (a_{1n}(x) \dots a_{n-1,n}(x))^T$$

Підставивши в останнє рівняння

$$y'_n = a_{nn}(x)y_n + (a_{n1}(x) \dots a_{n,n-1}(x))z(x)$$

системи (1) розв'язок (3) підсистеми (2), для компоненти  $y_n$  системи (1) дістаємо інтегро-диференціальне рівняння (1, 0)-порядку типу Вольтерра

$$y'_n(x) = a_{nn}(x)y_n(x) + \Phi(x, x_0)y_{n,0} + \int_{x_0}^x \Phi(x, s)v(s)y_n(s)ds. \quad (4)$$

З рівняння (4) слідує й інтегральне рівняння Вольтерра другого роду. З рівняння (4) дістанемо  $y_n(x)$ , а підставивши це в (3), матимемо загальний розв'язок системи (1).

## Список літератури

Ляшко, И. И., Боярчук, А. К., Гай, Я. Г., Калайда, А. Ф. (1987). *Математический анализ* (Ч. 3). Киев: Вища школа.

# ІНТЕГРУВАННЯ ЛІНІЙНИХ НОРМАЛЬНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З ПОДІБНИМИ ЦИРКУЛЯНТНИМ МАТРИЦЯМИ КОЕФІЦІЄНТІВ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
aleksei\_kalaida@comcast.net

Нормальні лінійні системи диференціальних рівнянь з циркулянтною (а також  $\phi$ -циркулянтною) матрицею змінних коефіцієнтів інтегруються в квадратах за допомогою узагальненого методу Ейлера (Калайда, 2014). Це обумовлено тим, що власні вектори таких матриць є сталі. Зрозуміло, що цим методом інтегруються усі системи з матрицею коефіцієнтів, що має лише сталі власні вектори. Покажемо, що клас таких систем існує, тобто що дійсно цим методом інтегрується більш широкий клас нормальних лінійних диференціальних систем (нормальних векторних лінійних диференціальних рівнянь) зі змінними коефіцієнтами (для простоти розглядаються лише однорідні рівняння)

$$y' = A(x)y. \quad (1)$$

Помножимо рівняння (1) на неособливу матрицю  $B$ . Тоді

$$By' = BAB^{-1}(By) \Rightarrow z' = \Lambda z, \Lambda = BAB^{-1}, \quad (2)$$

якщо матриця  $B$  стала, і

$$By' + B'y = (B'B^{-1} + \Lambda)(By) \Rightarrow z' = (B'B^{-1} + \Lambda)z, \quad (3)$$

якщо матриця  $B$  змінна (зокрема, якщо  $B' = \mu(x)B$ , рівняння (3) матиме вигляд

$$z' = (\mu(x)E + \Lambda)z,$$

де  $E$  — одинична матриця). Отже, якщо матриця

$$B'B^{-1} + \Lambda = C$$

(при  $B = const$  — матриця  $\Lambda$ ) є циркулянтною матрицею, то рівняння (2), (3), а отже, і рівняння (1) інтегрується узагальненим методом Ейлера (Калайда, 2014), а саме, підстановкою

$$y = Xe^{\int \lambda(x)dx}, X = const \quad (4)$$

( $\lambda(x)$  — власні числа-функції матриці  $A(x)$ ,  $X = B^{-1}Y$ ,  $Y = const$ , — власні вектори матриці  $C$ ). При цьому шукати матрицю  $B$  не обов'язково (її можна знаходити з умови персиметричності матриці  $C$ ). Досить до рівняння (1) застосувати підстановку (4) і з'ясувати чи є власні вектори матриці  $A(x)$  сталі.

## Список літератури

Калайда, О. Ф. (2014). Про дослідження на стійкість одного класу нормальних лінійних систем диференціальних рівнянь. *Матеріали XV Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука* (Ч. 1). Київ, 132.

# ПРОСТИЙ ЯВНИЙ МЕТОД ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ЗА ЇЇ ПОВНИМ ДИФЕРЕНЦІАЛОМ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
aleksei\_kalaida@comcast.net

Йтиметься про відновлення функції за її повним диференціалом, тобто про розв'язування рівняння Пфафа

$$\sum_{j=1}^n P_j(X) dx_j = 0, X = (x_1 \dots x_n)^T, \quad (1)$$

при умовах

$$\frac{\partial P_i(X)}{\partial x_k} = \frac{\partial P_k(X)}{\partial x_i}, i \neq k, \quad (2)$$

одним співвідношенням або, що те ж саме, про побудову загального інтеграла

$$U(X) = C, \forall C = \text{const}, \quad (3)$$

рівняння (1) при умовах (2) (у двовимірному випадку див. Калайда (2016), а при елементарних інтегралах  $\int P_j(X) dx_j$  див. Калайда та ін. (1995)).

Нехай

$$P_i(X) = Q_i(X) + p_i(x_i).$$

Очевидно, що для функцій  $Q_i$  теж чинні умови (2). Тоді для (3) маємо явну рівність

$$U(X) = \int Q_i(X) dx_i + \sum_{j=1}^n \int p_j(x_j) dx_j = C. \quad (4)$$

Справедливість рівності (4) впливає безпосередньо з врахуванням рівностей (2) з рівностей  $U'_{x_i} = P_i(X)$ .

## Список літератури

- Калайда, О. Ф. (2016). Простий метод побудови загального інтеграла рівняння в повних диференціалах. Матеріали Четвертої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», 24—25 грудня 2015 року, Київ, 165. <http://matan.kpi.ua/mvstu4.html>
- Калайда, О. Ф., Галкін, О. В., Гоженко, В. В. (1995). Про один простий метод відновлення функції за її повним диференціалом. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, (1), 44—48.

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВИНЕРА — ХОПФА ДЛЯ УСТАНОВЛЕНИЯ УСЛОВИЯ ЗАРОЖДЕНИЯ ТРЕЩИНЫ КОТТРЕЛЛА

**А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, Т. В. Полищук**

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев,  
Уманский государственный педагогический университет имени Павла Тычины,  
Умань, Украина*

[a.l.kipnis@gmail.com](mailto:a.l.kipnis@gmail.com)

Существуют экспериментальные данные, свидетельствующие о том, что хрупкому разрушению тела предшествует микропластическая деформация — движение и остановка дислокаций, приводящая в результате к образованию трещин.

В соответствии с одним из изучаемых физикой твердого тела дислокационных механизмов зарождения трещин — механизмом Коттрелла (Панасюк и др., 1988), в результате объединения двух дислокаций, движущихся в пересекающихся плоскостях скольжения, образуется нескользящая дислокация, которая служит препятствием на пути движения других дислокаций и очагом зарождения трещины. Дислокации, движущиеся в обеих плоскостях скольжения, останавливаются перед этим препятствием, создавая скопление дислокаций, которое вызывает высокую концентрацию напряжений вблизи препятствия. Вследствие такой концентрации напряжений образуется трещина.

В данной работе вопрос о зарождении трещины Коттрелла рассматривается с позиций механики разрушения.

Образованию трещины предшествует возникновение и развитие в точке столкновения линий микропластического деформирования узкой зоны ослабленных связей (зоны предразрушения). С ростом внешней нагрузки длина зоны увеличивается. При некотором значении нагрузки вдоль узкой зоны ослабленных связей происходит разрыв сплошности и зарождение трещины, длина которой в значительной степени меньше размеров тела. Для определения этой разрушающей нагрузки, т.е. для установления условия зарождения трещины используется аналог деформационного критерия разрушения (Панасюк и др., 1988). Чтобы применить данный критерий, необходимо найти раскрытие зоны ослабленных связей в точке столкновения линий микропластического деформирования. С этой целью рассматривается соответствующая плоская статическая симметричная задача теории упругости для тела клиновидной конфигурации — краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных в области, представляющей собой плоскость, из точки которой исходят две полубесконечные прямые линии разрыва касательного смещения и линия разрыва нормального смещения конечной длины (задача I). На бесконечности формулируется условие, позволяющее учесть влияние внешнего поля: задана асимптотика поля напряжений, представляющая собой решение задачи, аналогичной задаче I, без линии разрыва нормального смещения (задача K), порождаемое единственным на интервале  $] - 1; 0[$  корнем  $\lambda$  ее характеристиче-

ского уравнения. Две произвольные постоянные, входящие в это решение, считаются заданными. Они характеризуют интенсивность внешнего поля и должны определяться из решения внешней задачи. Задача К решается методом разделения переменных.

Линия разрыва касательного смещения, на которой касательное напряжение равно пределу текучести на сдвиг, моделирует линию микропластического деформирования (аналог модели полос пластичности (Панасюк и др., 1988)). Линия разрыва нормального смещения, на которой нормальное напряжение равно сопротивлению отрыва, моделирует узкую зону ослабленных связей (аналог модели Леонова — Панасюка (Панасюк и др., 1988)).

В качестве примера внешней задачи рассматривается плоская статическая симметричная задача теории упругости для плоскости, из точки которой исходят две прямые линии разрыва касательного смещения конечной длины. На бесконечности действуют растягивающие напряжения в направлении, перпендикулярном биссектрисе угла между линиями разрыва.

С использованием аппарата интегрального преобразования Меллина (Уфлянд, 1967) краевая задача I сводится к функциональному уравнению Винера — Хопфа (Нобл, 1962) вида

$$\Phi^+(p) + \frac{c_1}{p+1} + \frac{c_2}{p+\lambda+1} = G(p)\Phi^-(p), \quad \text{К} \quad (1)$$

где  $\Phi^\pm(p)$  — неизвестные функции, в полосе комплексной плоскости, содержащей мнимую ось. Строится точное решение уравнения Винера — Хопфа, выражаемое через интегралы типа Коши и гамма-функции. При этом факторизация коэффициента  $G(p)$  уравнения (1) на мнимой оси осуществляется путем его расщепления на элементарно факторизуемую функцию и функцию, факторизуемую по формуле Гахова. На основе построенного решения уравнения Винера — Хопфа получена формула для раскрытия узкой зоны ослабленных связей в узловой точке. Руководствуясь деформационным критерием разрушения и приравнивая выражение для раскрытия его критическому значению, представляющему собой заданную постоянную материала, выводим уравнение, служащее для определения искомой разрушающей нагрузки. Это уравнение позволяет установить условие зарождения трещины Коттрелла.

### Список литературы

- Панасюк, В. В., Андрейкив, А. Е., Партон, В. З. (1988). *Основы механики разрушения материалов*. Киев: Наукова думка.
- Уфлянд, Я. С. (1967). *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*. Ленинград: Наука.
- Нобл, Б. (1962.) *Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных*. Москва: Издательство иностранной литературы.

# ЗАСТОСУВАННЯ АПРОКСИМАЦІЙНОГО МЕТОДУ В. К. ДЗЯДИКА ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ МОДЕЛЕЙ ЦІНОУТВОРЕННЯ НА ФІНАНСОВОМУ РИНКУ

Н. Г. Кирилаха

*Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського,*

*Кременчук, Україна*

[kirilaha.nata@yandex.ua](mailto:kirilaha.nata@yandex.ua)

У даній роботі запропоновано розглянути можливість застосування апроксимаційного методу розв'язання початково-крайових задач при дослідженні моделей ціноутворення фінансових інструментів. Актуальність розглядання цих питань впливає з необхідності адаптації українського малого і середнього бізнесу до сучасних умов інвестування та зростанням вимог до точності та надійності математичного та комп'ютерного моделювання в інвестиційному менеджменті (Самарський, 2005).

Нехай для моделювання ціни активу використовується випадковий процес з неперервним часом  $S_t$ ,  $t > 0$ , який є розв'язком стохастичного диференціального рівняння:

$$dS_t = \mu(S_t, t)S_t dt + \sigma(S_t, t)S_t dW_t, \quad (1)$$

де  $\mu(S_t, t)$ ,  $\sigma(S_t, t)$  — відповідно очікувана дохідність цінного паперу та волатильність його ціни (Шведов, 1998).

Нехай  $V(S_t, t)$  — ціна деякого опціону, що пов'язаний з даною акцією (або іншим фінансовим інструментом). Згідно з лемою Іто (Гихман, 1965):

$$dV(S_t, t) = X \cdot V(S_t, t)dt + Y \cdot V(S_t, t)dW_t, \quad (2)$$

де

$$X = \frac{1}{V} \left( \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right), \quad Y = \frac{1}{V} \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (3)$$

Розглянемо портфель цінних паперів, що складається з акцій, опціонів та безризикових облігацій з погашенням у момент часу  $T$ . При будь-якому  $t$ ,  $0 \leq t \leq T$ , позначимо через  $w_1(t)$  грошові кошти, які вкладено в акції, через  $w_2(t)$  — кошти, що вкладаються в опціони, через  $w_3(t)$  — кошти, що вкладено в облігації. Якщо  $w_i(t) > 0$  то по відповідному цінному паперу зайнята довга позиція, якщо ж  $w_i(t) < 0$  то це означає, що за відповідному паперу зайнята коротка позиція. Припустимо при будь-якому  $t$   $0 \leq t \leq T$ , виконується умова:

$$w_1(t) + w_2(t) + w_3(t) = 0. \quad (4)$$

Із цієї умови впливає

$$w_1 \frac{dS}{S} + w_2 \frac{dV}{V} + w_3 r dt = 0, \quad (5)$$

де  $r = r_t$  — банківська процентна ставка.



З цієї умови можна отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення  $w_1$  та  $w_2$ :

$$(\mu - r)w_1 + (X - r)w_2 = 0, \quad (6)$$

$$\sigma w_1 + Yw_2 = 0.$$

Ця система має відмінний від нуля розв'язок при виконанні умови

$$(\mu - r)Y = \sigma(X - r). \quad (7)$$

З цього отримаємо, що функція  $V(S, t)$  має бути розв'язком наступного диференціального рівняння в частинних похідних (Шведов, 1998):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0. \quad (8)$$

Таким чином, рівняння (8) слугує основою для визначення вартості опціонів. Для остаточного визначення  $V(S, t)$  до рівняння слід долучити початкові та крайові умови:

$$V(0, t) = K, \quad (9)$$

де  $K = \text{const} > 0$  ціна виконання опціону,

$$V(S_{\max}, t) = 0, \quad (10)$$

при  $0 \leq t \leq T$ , де  $S_{\max}$  — деяке число, значно більше, ніж  $K$ ;

$$V(S, T) = \begin{cases} S - K, & \text{якщо } S \geq K, \\ 0, & \text{якщо } S < K, \end{cases} \quad (11)$$

при  $t = T$ .

Розв'язок задачі шукаємо у прямокутнику  $[0, S_{\max}] \times [0, T]$ .

Задача (8)—(11) може бути розв'язана кінцево-різницевим методом (Шведов, 1998). Але застосування цього методу не завжди виправдано в силу можливих явищ насичення та проблем стійкості та збіжності різницевих розв'язків (Бабенко, 1978). Тому запропонуємо до розв'язання цієї задачі апроксимаційний метод Дзядика (Дзядык, 1988). Цей метод дає можливість отримати аналітичний наближений розв'язок, перевагою якого є його оптимальність у сенсі найкращих наближень та ненасиченість (алгоритм без насичення точності (Бабенко, 1978) або алгоритм інтелектуального моделювання (Гаврилюк, 2004)). Це особливо важливо при необхідності уникнення явища «вибуху похибок».

Алгоритм полягає у виконанні наступних етапів.

Інтегруємо ліву і праву частину (8) по  $t$  і двічі по  $x$  і, з урахуванням умов (9)—(11) переходимо до інтегрального рівняння вигляду:

$$W(S, t, V) = \int_0^t \int_0^S \int_0^{s'} \Phi(s'', s', \tau, V) ds'' ds' d\tau + G(S, t, V). \quad (12)$$

Зазначимо, що  $\Phi(s'', s', \tau, V)$  та  $G(S, t, V)$  є алгебраїчними многочленами своїх аргументів.

Шукаємо наближений розв'язок задачі (12) у вигляді алгебраїчного многочлена степені не вище  $n$  по  $S$  і не вище  $p$  по  $t$ :

$$V_{n,p}(S, t) = \sum_{k=0, i=0}^{n,p} \alpha_{ki} S^k t^i, \quad (13)$$

де  $\alpha_{ki}$  — невідомі шукані коефіцієнти.

Відносно  $V_{np}(S, t)$ , після підстановки у (12), отримаємо рівняння:

$$W(S, t, V_{np}) = \int_0^t \int_0^S \int_0^{s'} \Phi(s'', s', \tau, V_{np}) ds'' ds' d\tau + G(S, t, V_{np}) + \varepsilon_{NP}(S, t), \quad (14)$$

де  $\varepsilon_{NP}(S, t)$  — нев'язка-многочлен степенів  $N$  та  $P$  виду

$$\varepsilon_{NP}(S, t) = \sum_{j=n+1, i=p+1}^{N,P} \tau_{ji} \omega_j(S) \mu_i(t), \quad (15)$$

$\omega_j(\cdot)$ ,  $\mu_i(\cdot)$  — класичні ортогональні многочлени (Лежандра, Чебишова — Ерміта, Чебишова — Лагера та загальні многочлени Якобі).

З (14), з урахуванням умов (9)—(11) отримаємо відносно невідомих  $\alpha_{ki}$  систему алгебраїчних рівнянь. Застосуємо до цієї системи ітераційний метод, отримаємо послідовність наближених розв'язків  $V_{npj}(S, t)$ . Подальше дослідження алгоритму включає: доведення існування розв'язків системи (14) на кожному ітераційному кроці; доведення збіжності послідовності наближень  $V_{npj}(S, t)$  до точного розв'язку задачі (8)—(11), оцінка норми похибки наближеного розв'язку.

### Список літератури

- Bilenko, V., & Kirilaha, N. (2004). Adaptive integro-polynomial method for solving of parabolic problems with algebraic-nonlinearities. У кн. *Матеріали X міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука* (34). Київ.: Задруга.
- Бабенко, К. И. (1978). О явлении насыщения в численном анализе. *Докл. АН СССР*, 241 (3), 505—508.
- Гаврилюк, И. П., Макаров, В. Л., (2004). *Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности*. Киев: Ин-т математики НАН Украины.
- Гихман, И. И., Скороход, А. В. (1965). *Введение в теорию случайных процессов*. Москва: Наука.
- Дзядык, В. К. (1988). *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений*. Киев: Наукова думка.
- Самарский, А. А. (2005). *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры*. (2-е изд., испр.). Москва: ФИЗМАТЛИТ.
- Шведов, А. С. (1998). О математических методах, используемых при работе с опционами. *Экономический журнал ВШЭ*, 5, 385—409.

## ПРО ДЕЯКІ ТЕСТОВІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ КРУГЛОГО ЦИЛІНДРА

О. О. Кільчинський, Є. В. Массалітіна

Державний економіко-технологічний університет транспорту,  
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна  
[masevgeniia@gmail.com](mailto:masevgeniia@gmail.com)

Під час розроблення наближених аналітичних та чисельних методів дослідження пружної рівноваги пластин та оболонок корисно перевірити їх дієвість, порівнюючи з існуючими точними розв'язками відповідних тестових задач. Бажано, щоб тестові розв'язки подавались достатньо простими аналітичними виразами і дозволяли зіставляти розрахунки за різними методами не тільки в окремих точках (посередині чи на краю пластини, тощо), а на всьому проміжку можливих значень змінних. Важливе значення в цьому відношенні мають відомі (Ляв, 1935) точні розв'язки задач для пружного ізотропного тіла. Пошуку і розв'язуванню тестових задач термопружності для анізотропних тіл приділено значно менше уваги. Можливо будуть корисними наведені нижче розв'язки задач про термопружну рівновагу анізотропного циліндра.

Круглий циліндр радіуса  $R$  і висоти  $h$  віднесемо до циліндричної системи координат  $(r, \theta, z)$  з початком у його геометричному центрі  $O$  і віссю  $Oz$ , що збігається з віссю симетрії циліндра. Нехай циліндр виготовлено з однорідного трансверсально ізотропного матеріалу так, що в кожній його точці площина ізоотропії проходить паралельно площині  $z = 0$ . Позначимо через  $E$  — модуль Юнга для напрямків у площині ізоотропії, через  $E'$  — модуль Юнга в напрямку осі  $Oz$ . Нехай  $\nu$  — коефіцієнт Пуассона для стиснення у площині ізоотропії при розтягненні в цій же площині (по перпендикулярному напрямку),  $\nu'$  — коефіцієнт Пуассона для стиснення у площині ізоотропії при розтягненні в напрямку осі  $Oz$ ;  $G'$  — модуль зсуву для площин, перпендикулярних площині ізоотропії;

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

— модуль зсуву для площин, паралельних площині ізоотропії; через  $\alpha$  позначимо коефіцієнт температурного розширення для напрямків у площині ізоотропії,  $\alpha'$  — коефіцієнт температурного розширення в напрямку осі  $Oz$ . Компоненти тензорів деформацій та напружень позначимо через  $e_r, e_\theta, e_z, e_{r\theta}, e_{rz}, e_{\theta z}$  та  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ . Через  $u_r, u_\theta, u_z$  позначимо проекції вектора переміщень точок циліндра в напрямках  $r, \theta, z$ ; через  $u, v, w$  — відповідні переміщення точок серединної площини  $z = 0$ .

Припустимо, що масові сили у циліндрі відсутні, а граничні поверхні  $z = \pm 0,5h$  вільні від навантажень:

$$z = \pm 0,5h \Rightarrow \sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0. \quad (1)$$

На зовнішній циліндричній поверхні  $r = R$  нехай виконуються або умови жорсткого закріплення:

$$r = R \Rightarrow u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

або умови шарнірного оперття:

$$r = R \Rightarrow T_1 = 0, M_1 = 0, w = 0. \quad (3)$$

Через  $T_1$  і  $M_1$  тут позначено зусилля і момент:

$$T_1 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_r dz, M_1 = \int_{-0,5h}^{0,5h} z \sigma_r dz.$$

Нехай циліндр перебуває у стаціонарному осесиметричному температурному полі, що (згідно з Новацький, (1962)) визначається рівнянням :

$$\left( \lambda_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \lambda_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T = 0. \quad (4)$$

де  $T = T(r, z)$  — температура довільної точки, а  $\lambda_r$  і  $\lambda_z$  — коефіцієнти теплопровідності в радіальному та осьовому напрямках. При підборі тестових задач нами було підбрано два характерних розв'язки рівняння (4), в яких температура змінюється по висоті циліндра а) за кубічним законом та б) — за квадратичним:

$$\text{а) } T = k(zr^2 + nz^3) \quad \left( n = -\frac{2\lambda_r}{3\lambda_z}, k = \text{const} \right); \quad (5)$$

$$\text{б) } T = k(r^2 + mz^2) \quad \left( m = -2\frac{\lambda_r}{\lambda_z}, k = \text{const} \right). \quad (6)$$

Оскільки температурні поля (5), (6) є осесиметричними (температура не залежить від координати  $\theta$ ), то відповідно до поверхневого навантаження (1) та граничних умов (2), (3) напружено-деформований стан циліндра також буде осесиметричним. У всіх точках циліндра переміщення, деформації та напруження не залежатимуть від координати  $\theta$ , зокрема, матимемо:

$$u_\theta = 0, \quad e_{r\theta} = e_{\theta z} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0.$$

Дослідимо деформовано-напружений стан циліндра і наведемо розв'язки чотирьох тестових задач.

**Задача 1.** Розв'язок задачі про пружну рівновагу циліндра в температурному полі (5) при граничних умовах (1), (2) — жорстке оперття — знайдено у вигляді:

$$\begin{aligned}
u_r &= -k\alpha r \left[ \frac{1+\nu}{4}(R^2 - r^2)z + \left( \nu' \frac{E}{E'} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \frac{z^3}{3} \right], \quad u_\theta = 0, \\
u_z &= \left\{ k\alpha - \frac{1+\nu}{16}(R^2 - r^2)^2 + \left[ \nu' \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{E}{E'} \frac{R^2}{2} + \left( \nu' \frac{E}{E'} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) r^2 \right] \frac{z^2}{2} + \right. \\
&\quad \left. + \left[ 3n \left( \frac{2\nu'}{1-\nu} \frac{E}{E'} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) + \left( \nu' \frac{E}{E'} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \right] \frac{z^4}{12} \right\}. \quad (7)
\end{aligned}$$

**Задача 2.** Розв'язок задачі про пружну рівновагу циліндра в температурному полі (5) при граничних умовах (1), (3) — шарнірне опертя — знайдено у вигляді:

$$\begin{aligned}
u_r &= -k\alpha r z \left[ \frac{1+\nu}{4}r^2 + \frac{1-\nu}{4}R^2 + \left( \nu' \frac{E}{E'} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \left( \frac{h^2}{20} - \frac{z^2}{3} \right) + \frac{3}{20}nh^2 \right], \quad u_\theta = 0, \\
u_z &= k\alpha \frac{R^2 - r^2}{4} \left[ \frac{1+\nu}{4}(R^2 + r^2) + \frac{1-\nu}{2}R^2 + \left( \nu' \frac{E}{E'} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \frac{h^2}{10} + \frac{3}{10}nh^2 \right] + \\
&\quad + k\alpha \frac{z^2}{2} \left[ \left( \nu' \frac{E}{E'} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \left( r^2 - \frac{\nu'}{1-\nu} \frac{E}{E'} \frac{h^2}{10} \right) - \frac{\nu'}{1-\nu} \frac{E}{E'} \left( \frac{1-\nu}{2}R^2 + \frac{3}{10}nh^2 \right) \right] + \\
&\quad + k\alpha \frac{z^4}{2} \left[ \frac{1}{3} \left( \nu' \frac{E}{E'} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \frac{\nu'}{1-\nu} \frac{E}{E'} + \frac{n}{2} \left( \frac{2\nu'}{1-\nu} \frac{E}{E'} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \right]. \quad (8)
\end{aligned}$$

**Задача 3.** Розв'язок задачі про пружну рівновагу циліндра в температурному полі (6) при граничних умовах (1), (2) — жорстке опертя — знайдено у вигляді:

$$\begin{aligned}
u_r &= -k\alpha r \left[ \frac{1+\nu}{4}(R^2 - r^2) + \left( \nu' \frac{E}{E'} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) z^2 \right], \quad u_\theta = 0, \\
u_z &= k\alpha z \left[ \nu' \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{E}{E'} \frac{R^2}{2} + \left( \nu' \frac{E}{E'} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) r^2 + \left( \frac{2\nu'}{1-\nu} \frac{E}{E'} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) m \frac{z^2}{3} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\nu'}{1-\nu} \frac{E}{E'} \left( \nu' \frac{E}{E'} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \frac{z^2}{3} \right]. \quad (9)
\end{aligned}$$

**Задача 4.** Розв'язок задачі про пружну рівновагу циліндра в температурному полі (6) при граничних умовах (1), (3) — шарнірне опертя — знайдено у вигляді:

$$\begin{aligned}
u_r &= k\alpha r \left[ \frac{1+\nu}{4} r^2 + \frac{1-\nu}{4} R^2 + \left( \nu' \frac{E}{E'} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \left( \frac{h^2}{12} - z^2 \right) + m \frac{h^2}{12} \right], \quad u_\theta = 0, \\
u_z &= k\alpha z \left[ \left( \nu' \frac{E}{E'} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) r^2 - \frac{\nu'}{2} \frac{E}{E'} R^2 + \frac{\alpha'}{\alpha} m \frac{z^2}{3} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\nu'}{1-\nu} \frac{E}{E'} \left( m + \nu' \frac{E}{E'} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \left( \frac{z^2}{3} - \frac{h^2}{12} \right) \right].
\end{aligned} \tag{10}$$

Розв'язки задач 1—4 можна застосовувати як тестові для зіставлення з ними результатів, отриманих при застосуванні наближених методів.

### Список літератури

- Ляв, А. (1935). *Математическая теория упругости*. Москва: ОНТИ.  
 Новацкий, В. (1962). *Вопросы термоупругости*. Москва: Изд-во АН СССР.

# НЕТЕРОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З КЕРУВАННЯМ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Н. О. Козлова, В. А. Ферук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

[nkozlova@gmail.com](mailto:nkozlova@gmail.com), [feruk.viktor@gmail.com](mailto:feruk.viktor@gmail.com)

Різноманітним питанням теорії оптимального керування для функціонально-диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь і їх систем присвячено багато публікацій. У даному повідомленні, висвітлюється один підхід до дослідження лінійної крайової задачі з керуванням для інтегрального рівняння, що ґрунтується на переході від поставленої задачі до еквівалентної їй крайової задачі з керуванням для зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь, методи дослідження якої добре розвинені (Voichuk, Samoilenko, 2004; Самойленко та ін., 2002).

1. Розглянемо лінійну крайову задачу з керуванням

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \int_a^b K_1(t,s)u(s)ds, \quad Sx(\cdot) = \alpha + Ju(\cdot). \quad (1)$$

Тут сумовні з квадратом в області  $[a, b] \times [a, b]$  ядра  $K(t, s)$ ,  $K_1(t, s)$ , функція  $f \in L_2[a, b]$ , обмежені лінійні векторні функціонали

$$S = \text{col}(S_1, S_2, \dots, S_p) : L_2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

$$J = \text{col}(J_1, J_2, \dots, J_p) : L_2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

$S_i, J_i : L_2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  та вектор  $\alpha = \text{col}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$  — відомі, а функції  $x \in L_2[a, b]$  та  $u \in L_2[a, b]$  — шукані.

Будемо вважати, що породжуюча задача без керування

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad Sx(\cdot) = \alpha \quad (2)$$

при деяких неоднорідностях  $f \in L_2[a, b]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^p$  не має розв'язку.

Ставиться задача знаходження необхідних та достатніх умов, при яких, вводячи в задачу (2) функцію керування  $u(t)$ , задача (1) стає розв'язною.

2. Задачу (1) можна звести до крайової задачі з керуванням для зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь (Козлова, Ферук, 2016). Нехай  $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^\infty$  — повна ортонормальна система функцій в  $L_2[a, b]$ . Введемо до розгляду величини

$$x_i = \int_a^b x(t)\phi_i(t)dt, \quad f_i = \int_a^b f(t)\phi_i(t)dt, \quad u_i = \int_a^b u(t)\phi_i(t)dt,$$

$$a_{ij} = \int_a^b \int_a^b K(t,s) \phi_i(t) \phi_j(s) dt ds, \quad \tilde{a}_{ij} = \int_a^b \int_a^b K_1(t,s) \phi_i(t) \phi_j(s) dt ds.$$

Тоді від задачі (1) приходимо до крайової задачі з керуванням для зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь

$$x_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j = f_i + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_{ij} u_j, \quad i = \overline{1, \infty}, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_\nu \phi_j(\cdot) x_j = \alpha_\nu + \sum_{j=1}^{\infty} J_\nu \phi_j(\cdot) u_j, \quad \nu = \overline{1, p}, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |u_j|^2 < +\infty.$$

Запишемо задачу (3), (4) у векторному вигляді (Boichuk, Samoilenko, 2004)

$$Uz = \begin{bmatrix} \Lambda \\ W \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} g \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ W_1 \end{bmatrix} v = q + U_1 v, \quad (5)$$

де

$$z = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \in \ell_2, \quad g = \text{col}(f_1, f_2, \dots, f_i, \dots) \in \ell_2,$$

$$v = \text{col}(u_1, u_2, \dots, u_i, \dots) \in \ell_2,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1i} & \dots \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \dots & -a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & 1 - a_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1i} & \dots \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \dots & \tilde{a}_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$W := S\Phi(\cdot), \quad W_1 := J\Phi(\cdot),$$

$$\Phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_i(t), \dots).$$

Операторна система без керування для системи (5) має вигляд

$$Uz = q. \quad (6)$$

Для системи (6) справедливим є наступне твердження (Boichuk, Samoilenko, 2004).

**Теорема 1.** Однорідна система (6) ( $q = 0$ ) має  $r$ -параметричну сім'ю розв'язків  $z \in \ell_2$

$$z = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c, \quad \forall c \in \mathbb{R}^{d_2}. \quad (7)$$

Неоднорідна система (6) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються  $r$  лінійно незалежних умов

$$P_{\Lambda_r}^* g = 0 \quad (8)$$



та  $d_1$  лінійно незалежних умов

$$P_{Q_{d_1}}^* (\alpha - W\Lambda^+g) = 0 \quad (9)$$

і має  $r$ -параметричну сім'ю розв'язків  $z \in \ell_2$  вигляду

$$z = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c + P_{\Lambda_r} Q^+ (\alpha - W\Lambda^+g) + \Lambda^+g, \quad \forall c \in \mathbb{R}^{d_2}. \quad (10)$$

Тут  $Q = WP_{\Lambda_r}$  —  $(p \times r)$ -матриця,  $P_{\Lambda_r}$  і  $P_{Q_{d_2}}$  — матриці, які складаються із повних систем  $r$  і  $d_2$  лінійно незалежних стовпчиків матриць-проекторів  $P_{\Lambda}$  і  $P_Q$  відповідно,  $P_{\Lambda_r}^*$  і  $P_{Q_{d_1}}^*$  — матриці, які складаються із повних систем  $r$  і  $d_1$  лінійно незалежних рядків матриць-проекторів  $P_{\Lambda}^*$  і  $P_Q^*$  відповідно,  $\Lambda^+$  і  $Q^+$  — псевдообернені (за Муром — Пенроузом) матриці до  $\Lambda$  і  $Q$  відповідно,

$$\dimker \Lambda = \dimker \Lambda^* = r < \infty.$$

Виникає питання: чи можна за допомогою введення у праву частину системи (6) керування  $\{\Lambda_1 v, W_1 v\}$ , зробити систему (5), а, отже і вихідну задачу (1), розв'язними? Знайдемо необхідні та достатні умови існування розв'язку неоднорідної крайової задачі (1), при умові, що породжуюча задача (2), а, отже і операторна система (6), не мають розв'язків.

**3.** Припустимо, що умови (8), (9) не виконуються. Згідно теореми 1, неоднорідна система (5) є розв'язною тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$P_{\Lambda_r}^* (g + \Lambda_1 v) = 0, \quad P_{Q_{d_1}}^* (\alpha + W_1 v - W\Lambda^+ (g + \Lambda_1 v)) = 0. \quad (11)$$

Звідси,

$$P_{\Lambda_r}^* \Lambda_1 v = -P_{\Lambda_r}^* g, \quad P_{Q_{d_1}}^* (W_1 - W\Lambda^+ \Lambda_1) v = P_{Q_{d_1}}^* (W\Lambda^+ g - \alpha).$$

Ввівши позначення

$$D := \begin{bmatrix} P_{\Lambda_r}^* \Lambda_1 \\ P_{Q_{d_1}}^* (W_1 - W\Lambda^+ \Lambda_1) \end{bmatrix}, \quad d := - \begin{bmatrix} P_{\Lambda_r}^* g \\ P_{Q_{d_1}}^* (\alpha - W\Lambda^+ g) \end{bmatrix},$$

отримаємо

$$Dv = d. \quad (12)$$

За умови  $P_{D_{r_1}}^* d = 0$ ,  $r_1 \leq (r + d_1)$ , алгебраїчна система (12) буде розв'язною відносно  $v$  та її розв'язок буде мати вигляд (Boichuk, Samoilenko, 2004).

$$v = P_D c + D^+ d, \quad \forall c \in \ell_2. \quad (13)$$

Тут  $P_D$  — матриця-проектор на  $N(D)$ ,  $P_{D_{r_1}}^*$  — матриця, яка складається із повної системи  $r_1$  лінійно незалежних рядків матриці  $P_D^*$ ,  $D^+$  — псевдообернена (за Муром — Пенроузом) до  $D$  матриця.

Зазначимо, що за умови  $P_D = 0$ , система (12) матиме єдиний розв'язок

$$v = D^+d. \quad (14)$$

Підставивши у систему (5) замість  $v$  вираз (14), отримаємо

$$Uz = q + U_1D^+d. \quad (15)$$

За теоремою 1, система (15) буде розв'язною тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$P_{\Lambda_r}^*(g + \Lambda_1D^+d) = 0, \quad P_{Q_{d_1}}^*(\alpha - W\Lambda^+g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)D^+d) = 0$$

і її розв'язок має вигляд

$$z = P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c + \Lambda^+(g + \Lambda_1D^+d) + P_{\Lambda_r}Q^+(\alpha - W\Lambda^+g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)D^+d), \quad \forall c \in \mathbb{R}^{d_2}. \quad (16)$$

Зазначимо, що за умови  $P_{\Lambda_r} = 0$  розв'язок системи (15) є єдиним.

Використовуючи отримані результати для операторної системи (5), ми можемо зробити висновки про існування розв'язку вихідної крайової задачі (1). Справді, якщо система (5) має хоча б один розв'язок  $\{z, v\}$ , то згідно теореми Ріса — Фішера, існують елементи  $x \in L_2[a, b]$  і  $u \in L_2[a, b]$  такі, що мають місце зображення

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \phi_i(t) = \Phi(t)z, \quad u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \phi_i(t) = \Phi(t)v. \quad (17)$$

Пара  $\{x(t), u(t)\}$ , що визначається співвідношеннями (17), і є шуканим розв'язком вихідної крайової задачі (1) (Гильберт, 1998).

**Теорема 2.** *Нехай крайова задача без керування (2) є нерозв'язною. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{\Lambda_r}^*(g + \Lambda_1D^+d) = 0, \quad P_{Q_{d_1}}^*(\alpha - W\Lambda^+g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)D^+d) = 0, \quad P_{D_{r_1}}^*d = 0,$$

то крайова задача з керуванням (1) буде мати хоча б один розв'язок  $\{x(t), u(t)\}$  (17). За додаткових умов  $P_D = 0$ ,  $P_{\Lambda_r} = 0$  розв'язок  $\{x(t), u(t)\}$  крайової задачі (1) буде єдиним.

### Список літератури

- Boichuk, A. A., & Samoilenko, A. M. (2004). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*. Utrecht, Boston: VSP.
- Гильберт, Д. (1998). *Избранные труды* (Т. 2). Москва: Факториал.
- Козлова, Н. О., Ферук, В. А. (2016). Нетерові крайові задачі для інтегральних рівнянь. *Нелінійні коливання*, 19 (1), 58—66.
- Самойленко, А. М., Бойчук, А. А., Бойчук, Ан. А. (2002). Ограниченные на всей оси решения слабо возмущенных линейных систем. *Укр. мат. журн.*, 54 (11), 1517—1530.

# ПРО ДОДАТНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ ЛІУВІЛЛЯ — ГЕЛЬФАНДА

С. В. Колосова, В. С. Луханін

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна

[lanakol@ukr.net](mailto:lanakol@ukr.net), [lukhanin.volodymyr@gmail.com](mailto:lukhanin.volodymyr@gmail.com)

У цій роботі розглянемо питання існування та єдиності додатного розв'язку, а також можливість побудови двобічних наближень до цього розв'язку наступної крайової задачі:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \delta e^u \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad (\delta > 0). \end{aligned} \tag{1}$$

Рівняння задачі (1) є стаціонарним рівнянням теорії теплового займання при сталій теплопровідності (Франк-Каменецкий, 2008; Dong, Feng, 2001; Vozhkov, 2005).

Дослідження задачі (1) проводитимемо методами теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах (Красносельский, 1962; Опойцев, 1984).

Задачі (1) ставимо у відповідність еквівалентне на  $C(\Omega)$  нелінійне інтегральне рівняння

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \delta e^{u(\mathbf{s})} ds, \tag{2}$$

де  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  — функція Гріна оператора Лапласа для першої крайової задачі у області  $\Omega$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ .

Усю термінологію, що використовується в даній роботі можна знайти в (Красносельский, 1962; Опойцев, 1984).

На конусі  $K$  невід'ємних у  $C(\Omega)$  функцій розглянемо оператор

$$Au(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \delta e^{u(\mathbf{s})} ds. \tag{3}$$

Вочевидь, що оператор  $A$  є монотонним, тобто з  $u_1 \leq u_2$  випливає  $Au_1 \leq Au_2$ .

Для побудови конусного відрізка

$$\langle v_0, w_0 \rangle \subset K, \quad v_0 \leq u \leq w_0,$$

інваріантного для оператора  $A$ , у (3) покладемо  $u = v_0 = 0$  та складемо елемент

$$v_1 = Av_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \delta e^{v_0} ds = \delta \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \geq v_0.$$

Тоді будемо елемент

$$v_2 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \delta e^{v_1} d\mathbf{s} \geq v_1$$

і так далі. Якщо у (3) покласти  $u = w_0 = \beta$ , отримаємо

$$w_1 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \delta e^{w_0} d\mathbf{s} = \delta e^{\beta} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

Параметри  $\delta$  та  $\beta$  підбираємо так, щоб  $w_1 \leq w_0$ , що приводить до умови

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \beta e^{-\beta} \delta^{-1}. \quad (4)$$

Таким чином, маємо

$$v_0 \leq v_1 \leq w_1 \leq w_0,$$

отже, конусний відрізок

$$\langle v_0, w_0 \rangle, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = \beta,$$

є інваріантним для оператора  $A$ .

Нагадаємо, що оператор  $A$  вигляду (3) називається  $u_0$ -угнутим,

$$u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s},$$

якщо функція  $f(\delta, u)$  у рівнянні

$$-\Delta u = f(\delta, u)$$

невід'ємна та за змінною  $u$  задовольняє нерівність

$$f(\delta, tu) - tf(\delta, u) > 0 \quad \forall t \in (0, 1), \quad (\mathbf{x} \in \Omega),$$

за припущенням, що  $\forall u > 0$  виконуються нерівності

$$A_1 u_0(\mathbf{x}) \leq Au \leq A_2 u_0(\mathbf{x}), \quad A_1, A_2 > 0. \quad (5)$$

Дослідження оператора на  $u_0$ -угнутість приводить до умови  $\beta < 1$ , тобто шуканий додатний розв'язок  $u^*(\delta, \mathbf{x})$  задачі (1) задовольняє умові

$$0 \leq u^*(\delta, \mathbf{x}) < 1,$$

що збігається з висновками Франк-Каменецкий (2008). Умова, при якій стає неможливим стаціонарний розподіл температур, вважається критичною. З умови (4) можемо зробити висновок, що критичне значення  $\delta_{кр}$  залежить від геометричної форми та розмірів області  $\Omega$ .

Ітераційний процес для задачі (1) будуємо за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \delta e^{v_{n-1}(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \delta e^{w_{n-1}(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

де  $v_0 = 0$ ,  $w_0 = \beta$ . За умови виконання вимог (4) та  $\beta < 1$  маємо рівномірну збіжність до єдиного невід'ємного розв'язку  $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ . При цьому маємо

$$0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

### Список літератури

- Франк-Каменецкий, Д. А. (2008). *Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике*. Долгопрудный: Интеллект.
- Dong, Ye, Feng, Zhou (2001). A generalized two dimensional Emden—Fowler equation with exponential nonlinearity. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 13 (2), 141–158.
- Bozhkov, Yu. (2005). Noether Symmetries and Critical Exponents. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 1 (022), 1–12.
- Красносельский, М. А. (1962). *Положительные решения операторных уравнений: Главы нелинейного анализа*. Москва: Физматгиз.
- Опойцев, В. И., Хуродзе, Т.А. (1984). *Нелинейные операторы в пространствах с конусом*. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та.

**АБСТРАКТНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА,  
ОБОБЩАЮЩАЯ МАТРИЧНУЮ КРАЕВУЮ ЗАДАЧУ**

**А. Л. Комарницкий, Л. Н. Колмакова**

*Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина*

[lyukol@mail.ru](mailto:lyukol@mail.ru)

В линейном пространстве  $L$  рассматривается линейный ограниченный инволютивный оператор  $S$ , который порождает два проектора

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm S), \quad I \text{ — единичный оператор}$$

Пространство  $L$  раскладывается в прямую сумму образов этих проекторов:

$$L = L_+ \oplus L_-$$

Рассмотрим задачу о нахождении элементов  $\varphi^+ \in L_+$  и  $\varphi^- \in L_-$ , которые удовлетворяют условию

$$\varphi^+ = A\varphi^- + g,$$

где  $A$  — линейный ограниченный обратимый оператор, заданный на  $L$ ,  $g$  — элемент пространства  $L$ .

Для решения задачи используется метод факторизации, согласно которому оператор  $A$  представляется в виде:

$$A = X^+U(X^-)^{-1},$$

где  $X^+, X^-$  обратимые линейные операторы, заданные на  $L$  и отображающие соответственно подпространства  $L_{\pm}$  в себя.

$$U = U_1^{\varkappa_1} U_2^{\varkappa_2} \dots U_n^{\varkappa_n}$$

Операторы  $U_1, U_2, \dots, U_n$  задаются с помощью специальных аксиом:

1)  $U_j \cdot U_k = U_k \cdot U_j, \quad j, k = \overline{1, n};$

2) для любых  $\varphi^{\pm} \in L_{\pm}$

$$U_j \varphi^+ \in L_+, \quad U_j^{-1} \varphi^- \in L_-, \quad j = \overline{1, n};$$

3) для оператора  $U_j$  существует единственный с точностью до постоянно-

го множителя элемент  $h_j^+ \in L_+$  такой, что

$$U_j^{-1} h_j^+ \in L_-, \quad j = \overline{1, n};$$

4)  $U_j h_k^+ = h_k^+$ , если  $k = \overline{1, n}$  и  $j \neq k$ .

$\varkappa_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{1, n}$  — частные индексы факторизации.

Предположим  $\varkappa_j > 0, j = \overline{1, m},$

$$\varkappa_j < 0, j = \overline{m+1, l},$$

$$\varkappa_j = 0, j = \overline{l+1, n}.$$

Показано, что для разрешимости задачи необходимо и достаточно выполнение

$$- \sum_{j=m+1}^l \varkappa_j \text{ условий.}$$

И если эти условия выполнены, то общее решение зависит от  $\sum_{j=1}^m \varkappa_j$  произвольных постоянных.

Общее решение и условия разрешимости записываются в явном виде.

Подобная схема постановки и решения задачи была предложена в [1]. Однако, несмотря на многочисленные реализации той схемы, матричная краевая задача Римана не являлась её частным случаем.

В настоящей работе предложена иная аксиоматика оператора  $U$ , что устраняет этот недостаток.

Матричная краевая задача Римана на замкнутом контуре  $\ell$

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$$

уже является реализацией предлагаемой схемы.

Здесь  $G(t)$  обратимая матрица гельдеровских функций,  $g(t) \in H_\lambda$  — столбец гельдеровских функций,  $\Phi^+(t)$  состоит из функций, аналитически продолжимых внутрь контура,  $\Phi^-(t)$  — вне контура,  $S$  — оператор сингулярного интегрирования, точка 0 принадлежит области, ограниченной контуром  $\ell$ .

Оператором  $U_j$  в этом случае является диагональная квадратная матрица, у которой  $j$ -й элемент диагонали равен  $t$ , а все остальные диагональные элементы равны 1.

Элементом  $h_j^+$  является столбец, у которого в  $j$ -й строке находится постоянная функция, тождественно равная 1.

Легко видеть, что оператор  $U$  представляет диагональную матрицу с функциями  $t^{\varkappa_1}, t^{\varkappa_2}, \dots, t^{\varkappa_n}$  на диагонали.

### Список литературы

Черский, Ю. И. (1957). Общее сингулярное уравнение и уравнение типа свёртки. *Мат. сборник*, 43 (3), 277—296.

**ПЕРІОДИЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА  
ДЛЯ РІВНЯННЯ ВНУТРІШНІХ ХВИЛЬ**

**Л. І. Комарницька**

*Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,  
Дрогобич, Україна  
komlesya@gmail.com*

До вивчення періодичних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними приводять багато задач математичної фізики, що описують коливання різних систем. Зокрема, на межі двох шарів морської води, що мають різну щільність, виникає таке досить поширене явище, як внутрішні гравітаційні хвилі.

У роботі досліджується задача з періодичними умовами за часовою змінною для рівняння внутрішніх хвиль.

В області  $D = [0, T] \times \Pi$ ,  $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq \pi\}$ , розглядається задача

$$D_t^2 \Delta u + \omega^2 (D_x^2 + D_y^2) u = f(t, x, y, z), \quad (1)$$

$$u \Big|_{x=0, x=\pi} = u \Big|_{y=0, y=\pi} = u \Big|_{z=0, z=\pi} = 0, \quad (2)$$

$$\sum_{\beta=0}^1 L_{\beta,r} \left( D_t^\beta u \Big|_{t=0} - D_t^\beta u \Big|_{t=T} \right) = \phi_r(x, y, z), \quad r = 1, 2, \quad (3)$$

де  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $L_{\beta,r} = \sum_{|s| \leq 1} a_{\beta,r}^s \frac{\partial^{2|s|}}{\partial x^{2s_1} \partial y^{2s_2} \partial z^{2s_3}}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}_+$ ,  $a_{\beta,r}^s \in \mathbb{R}$ ,

$s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{Z}_+^3$ ,  $|s| = s_1 + s_2 + s_3$ .

Позначимо:

$$\chi = \omega \|k\|^{-1} \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad k \in \mathbb{N}^3, \quad \|k\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2},$$

$$A(k) = \sum_{|s| \leq 1} (-1)^{|s|} k_1^{2s_1} k_2^{2s_2} k_3^{2s_3} (a_{0,1}^s a_{1,2}^s - a_{0,2}^s a_{1,1}^s).$$

**Теорема 1.** Для єдиності розв'язку задачі (1)—(3) в просторі  $C^{(2,2)}(D)$  необхідно і досить, щоб виконувались умови

$$1 - \cos \chi T \neq 0, \quad A(k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}^3.$$

**Теорема 2.** Нехай існують сталі  $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_+$  і  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N}$  такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів  $k \in \mathbb{N}^3$  виконуються нерівності

$$|1 - \cos \chi T| \geq M_1 |k|^{-\gamma_1 - \varepsilon}, \quad (4)$$

$$|A(k)| \geq M_2 |k|^{-\gamma_2 - \varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1/2. \quad (5)$$



Якщо функція  $f(t, x, y, z)$  неперервна за  $t$ ,  $\nu$  разів ( $\nu \geq \gamma_1 + 8$ ) неперервно диференційовна за змінними  $x, y, z$  і задовольняє умови

$$D_x^{2r} f \Big|_{x=0, x=\pi} = D_y^{2r} f \Big|_{y=0, y=\pi} = D_z^{2r} f \Big|_{z=0, z=\pi} = 0, \quad r = 0, 1, \dots, [(\nu - 1) / 2],$$

а функції  $\phi_r(x, y, z)$ ,  $r = 1, 2$ ,  $\xi$  разів ( $\xi \geq \gamma_1 + \gamma_2 + 8$ ) неперервно диференційовні за змінними  $x, y, z$  і задовольняють умови

$$D_x^{2s} \phi_r \Big|_{x=0, x=\pi} = D_y^{2s} \phi_r \Big|_{y=0, y=\pi} = D_z^{2s} \phi_r \Big|_{z=0, z=\pi} = 0, \\ s = 0, 1, \dots, [(\xi - 1) / 2],$$

то існує розв'язок задачі (1)—(3) з простору  $C^{(2,2)}(D)$ , який неперервно залежить від функцій  $f(t, x, y, z)$ ,  $\phi_r(x, y, z)$ ,  $r = 1, 2$ , і зображається у вигляді ряду

$$u(t, x, y, z) = \sum_{k_1, k_2, k_3=1}^{\infty} (U_k(t) + V_k(t)) \sin k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z,$$

$$U_k(t) = \int_0^T \left( \frac{\operatorname{sgn}(t - \tau)}{2\chi} \sin \chi(t - \tau) + \frac{1}{4\chi(1 - \cos \chi T)} \sum_{|s| \leq 1} (-1)^{|s|} k_1^{2S_1} k_2^{2S_2} k_3^{2S_3} \times \right. \\ \left. \times \{ \sin \chi T [\cos \chi(t - \tau) + \cos \chi(t + T - \tau)] + \right. \\ \left. + (1 - \cos \chi T) [\sin \chi(t - \tau) + \sin \chi(t + T - \tau)] \} \right) f_k(\tau) d\tau,$$

$$V_k(t) = \sum_{|s| \leq 1} (-1)^{|s|} k_1^{2S_1} k_2^{2S_2} k_3^{2S_3} \times \\ \times [\phi_{1k}(a_{1,2}^s \chi \cos \chi t - a_{0,2}^s \sin \chi t - a_{1,2}^s \chi \cos \chi(t - T) + a_{0,2}^s \sin \chi(t - T)) - \\ - \phi_{2k}(a_{1,1}^s \chi \cos \chi t - a_{0,1}^s \sin \chi t - a_{1,1}^s \chi \cos \chi(t - T) + a_{0,1}^s \sin \chi(t + T))] \times \\ \times (2\chi(1 - \cos \chi T) A(k))^{-1},$$

де  $f_k(t), \phi_{rk}$  — коефіцієнти Фур'є функцій  $f(t, x, y, z)$ ,  $\phi_r(x, y, z)$ ,  $r = 1, 2$  відповідно.

Доведено метричні теореми про виконання оцінок (4), (5).

**Теорема 3.** Для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі  $\mathbb{R}$ ) чисел  $\frac{\pi}{T}$  нерівності (4) виконуються при  $\gamma_1 \geq 6$  для всіх (крім скінченного числа) векторів  $k \in \mathbb{N}^3$ .

Позначимо:

$$a = - \begin{vmatrix} a_{0,1}^{(1,0,0)} & a_{0,2}^{(1,0,0)} \\ a_{1,1}^{(1,0,0)} & a_{1,2}^{(1,0,0)} \end{vmatrix}, \quad b = - \begin{vmatrix} a_{0,1}^{(0,1,0)} & a_{0,2}^{(0,1,0)} \\ a_{1,1}^{(0,1,0)} & a_{1,2}^{(0,1,0)} \end{vmatrix},$$

$$c = - \begin{vmatrix} a_{0,1}^{(0,0,1)} & a_{0,2}^{(0,0,1)} \\ a_{1,1}^{(0,0,1)} & a_{1,2}^{(0,0,1)} \end{vmatrix}, d = \begin{vmatrix} a_{0,1}^{(0,0,0)} & a_{0,2}^{(0,0,0)} \\ a_{1,1}^{(0,0,0)} & a_{1,2}^{(0,0,0)} \end{vmatrix}.$$

**Теорема 4.** Для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі  $\mathbb{R}^4$ ) векторів  $(a, b, c, d)$  нерівність (5) виконується при  $\gamma_2 \geq 3$  для всіх (крім скінченного числа) векторів  $k \in \mathbb{N}^3$ .

#### Список літератури

Пташник, Б. Й., Ільків, В. С., Кміть, І. Я., Поліщук, В. М. (2002). *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними*. Київ: Наукова думка.

# ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА В НЕОДНОРІДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ПІВПРОСТОРИ

**І. М. Конет, Т. М. Пилипюк**

*Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,*

*Кам'янець-Подільський, Україна*

[konet51@ukr.net](mailto:konet51@ukr.net), [t-myh@i.ua](mailto:t-myh@i.ua)

Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t, r, \phi, z) \mid t > 0;$$

$$r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 = 0, R_{n+1} = +\infty; \phi \in [0; 2\pi); z \in (0; +\infty)\}$$

$2\pi$  – періодичного щодо кутової змінної  $\phi$  розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку (Самойленко, 2014)

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \Delta_j u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \phi, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u_j \Big|_{t=0} = g_j^1(r, \phi, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_j^2(r, \phi, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_1}{\partial r^s} \Big|_{r=0} = 0; \quad \frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s} \Big|_{r=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad (3)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + h\right) u_j \Big|_{z=0} = g_j(t, r, \phi); \quad \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1} \quad (4)$$

та умовами спряження

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left( \alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

де

$$\Delta_j = a_{rj}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

— оператор Лапласа для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;

$a_{rj}, a_{zj}, \chi_j, h, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k$  — деякі сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \quad c_{1k} \cdot c_{2k} > 0;$$

$$f(t, r, \phi, z) = \{f_1(t, r, \phi, z), f_2(t, r, \phi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \phi, z)\};$$

$$g^1(r, \phi, z) = \{g_1^1(r, \phi, z), g_2^1(r, \phi, z), \dots, g_{n+1}^1(r, \phi, z)\};$$

$$g^2(r, \phi, z) = \{g_1^2(r, \phi, z), g_2^2(r, \phi, z), \dots, g_{n+1}^2(r, \phi, z)\};$$

$g(t, r, \phi) = \{g_1(t, r, \phi), g_2(t, r, \phi), \dots, g_{n+1}(t, r, \phi)\}$  — задані обмежені неперервні функції;

$u(t, r, \phi, z) = \{u_1(t, r, \phi, z), u_2(t, r, \phi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \phi, z)\}$  — шукана двічі неперервно диференційовна функція.

Припустимо, що розв'язок задачі (1)—(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень (Громик та ін., 2011; Конет, Ленюк, 2004; Ленюк, 1993).

Побудований за відомою логічною схемою (Конет, 2013) методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовій півосі  $(0; +\infty)$  щодо змінної  $z$  (Громик, 2011), скінченного інтегрального перетворення Фур'є на проміжку  $[0; 2\pi)$  щодо кутової змінної  $\phi$  (Конет, Ленюк, 2004) та гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є — Бесселя на полярній осі  $I_n^+$  з  $n$  точками спряження щодо радіальної змінної  $r$  (Ленюк, 1993), єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)—(5) визначають функції

$$\begin{aligned} u_j(t, r, \phi, z) = & \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jk}(t - \tau, r, \rho, \phi - \alpha, z, \xi) f_k(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jk}(t, r, \rho, \phi - \alpha, z, \xi) g_k^1(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \\ & + \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} E_{jk}(t, r, \rho, \phi - \alpha, z, \xi) g_k^2(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \\ & + \sum_{k=1}^{n+1} a_{zk}^2 \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} W_{jk}(t - \tau, r, \rho, \phi - \alpha, z) g_k(\tau, \rho, \alpha) \sigma_k \rho d\alpha d\rho d\tau; \quad j = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

У формулах (6) застосовано компоненти

$$\begin{aligned} E_{jk}(t, r, \rho, \phi, z, \xi) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \varepsilon_m G(t, \lambda, \sigma) K(z, \sigma) K(\xi, \sigma) V_j(r, \lambda) V_k(\rho, \lambda) \times \\ & \times \Omega(\lambda) d\lambda d\sigma \cos(m\phi); \quad j, k = \overline{1, n+1} \end{aligned}$$

матриці впливу (функції впливу) та компоненти

$$W_{jk}(t, r, \rho, \phi, z) = E_{jk}(t, r, \rho, \phi, z, 0); \quad j, k = \overline{1, n+1}$$

тангенціальної матриці Гріна (тангенціальні функції Гріна) розглянутої задачі, де

$$G(t, \lambda, \sigma) = \frac{\sin(\Delta(\lambda, \sigma)t)}{\Delta(\lambda, \sigma)}; \Delta^2(\lambda, \sigma) = \lambda^2 + a_{z1}^2 \sigma^2 + \chi_1^2.$$

З використанням властивостей функцій впливу  $E_{jk}(t, r, \rho, \phi, z, \xi)$  і функцій Гріна  $W_{jk}(t, r, \rho, \phi, z)$ , безпосередньо перевіряється, що функції  $u_j(t, r, \phi, z)$ , визначені формулами (6), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4) та умови спряження (5) в сенсі теорії узагальнених функцій (Шилов, 1965).

Єдиність розв'язку (6) впливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу і функцій Гріна) задачі (1)—(5).

Методами з Шилов (1965), Гельфанд, Шилов (1958) можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (6) визначають обмежений класичний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)—(5).

**Зауваження 1.** У випадку  $\chi_j \equiv 0$  рівняння (1) збігається з класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням (рівнянням коливань, рівнянням д'Аламбера) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат.

**Зауваження 2.** У випадку  $\alpha_{11}^k = 0, \beta_{11}^k = 1, \alpha_{12}^k = 0, \beta_{12}^k = 1; \alpha_{21}^k = E_1^k, \beta_{21}^k = 0, \alpha_{22}^k = E_2^k, \beta_{22}^k = 0$  ( $E_1^k, E_2^k$  — модулі Юнга) умови спряження (5) є класичними умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках 1, 2 розглянута гіперболічна крайова задача математичної фізики є математичною моделлю вимушених коливних процесів у неоднорідному циліндрично-круговому півпросторі.

### Список літератури

- Гельфанд, И. М., Шилов, Г. Е. (1958). *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*. Москва: Физматгиз.
- Громик, А. П., Конет, І. М., Ленюк, М. П. (2011). *Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах*. Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ.
- Конет, І. М. (2013). *Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах*. Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ.
- Конет, І. М., Ленюк, М. П. (2004). *Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях*. Чернівці: Прут.
- Ленюк, М. П. (1993) Узагальнення інтегралу Фур'є — Бесселя. *Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач*, 2 (1), 89—101.
- Самойленко, В. Г., Конет, І. М. (2014). *Рівняння математичної фізики*. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет».
- Шилов, Г. Е. (1965). *Математический анализ. Второй специальный курс*. Москва: Наука.

# МОДЕЛЮВАННЯ ВЕЛИКИХ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ВРАХУВАННЯМ МЕНТАЛЬНОСТІ

**В. В. Корилюк**

*НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна*

[vita8521@rambler.ru](mailto:vita8521@rambler.ru)

Задачі моделювання суспільної думки в великих соціальних системах — це доволі новий підхід у формуванні суспільної думки, який спирається на розвиток моделей з асоціативною пам'яттю.

Розглянемо соціальну систему в якій всі агенти є її учасниками, формують особисту думку і отримують загальну інформацію. Зауважимо, що об'єм та вид інформації не обов'язково однакові. Існує два випадки: відкритий процес (всі агенти знають думку всіх учасників), закритий (всі агенти знають лише загальні відомості (Герасимов, 2010)).

Для полегшення опису системи ідеалізуємо суспільство. Розвиток думки який описується дискретними кроками фактичним обміном думками. У суспільстві фігурують  $N$  (не обов'язково однакових) учасників.

Кожному агенту відповідає змінна стану

$$s_i \in S = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M_i\}$$

де  $s_i$  — частина, яка відповідає за підтримку думки учасника  $i$ , (підсилення, якщо  $s_i > 0$  або послаблення, якщо  $s_i < 0$ ), і  $M_i$  — об'єм, максимально дозволений, що представляє силу думки агента  $i$  (Макаренко, 2014).

Для агентів  $i$  і  $j$  змінна  $c_{ij} \in \mathbb{R}$  — означає репутацію, яку має  $j$  в очах  $i$ .  $c_{ij}$  складають матрицю репутації

$$C = \{c_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$$

Поле впливу

$$F = \{f_i\}_{i=1,\dots,N}; f_i = \sum_j c_{ij} \frac{s_j}{M_j}, \quad c_{ii} = 0$$

де  $f_i$  — вплив на  $i$ -го агента думок всіх інших,  $\frac{s_j}{M_j}$  — наміри учасника  $j$ ,

$c_{ij} \times \frac{s_j}{M_j}$  — інформація про наміри  $j$ ,  $\sum_j c_{ij} \frac{s_j}{M_j}$  — уся доступна для  $i$  інформація про дії інших агентів, уся решта інформації учасника  $i$  може реєструватись у його початкових намірах  $s_i$  (Макаренко, 2014).

Кожен агент максимізує функцію інформаційної корисності протягом процесу прийняття рішення, узгоджується рішення індивідуума  $i$  з відповідним значенням поля впливу  $f_i$ .

Складемо рівняння, що описує динаміку зміни рішення (найпростіший варіант динаміки):

$$s_i(t+1) = \begin{cases} s_i + 1, & \text{якщо } f_i(t) > 0 \text{ і } s_i(t) < M_i, \\ s_i - 1, & \text{якщо } f_i(t) < 0 \text{ і } s_i(t) > -M_i, \\ s_i & \text{інакше.} \end{cases}$$

Початковими умовами вважаються наміри кожного агента для підтримання думки на початку її формування. Вони формуються під зовнішнім впливом системи (Макаренко, Левков, Соля, 2007).

Знаючи початкові умови для  $s_i$  і елементи матриці впливу, можна порахувати динаміку зміни думки. Така динаміка, вірогідно, вигідна для кожного агента, бо максимально використовує інформацію.

Система має таку властивість, що агенти діють з власних зацікавлень: якщо хтось виграє, то хтось інший втрачає. Головне питання, чи може динаміка кожного агента привести до спільної еволюції системи, або тільки до безладного, хаотичного руху? Система прагнучим мінімізувати свою енергію протягом процесу еволюції. Наступний крок еволюції починається з нових початкових умов, які містять нову інформацію учасників, яку вони могли одержати (Герасимов, 2010).

Матрицю репутації можна змінювати на кожному кроці еволюції, якщо учасники аналізують свою власну роботу так, як і роботу інших учасників і суспільства як ціле. Кожен агент може призначити різні коефіцієнти матриці репутації, яку буде застосовано на наступному кроці еволюції. Доцільність моделі залежить, від коректності і точності коефіцієнтів репутації (Макаренко, Левков, Соля, 2007).

Матриця  $C = \{c_{ij}\}$   $j = 1, \dots, N$  описує взаємодію агентів. Множина

$$Q^R(t) = (\{S_l^R(t)\}, \{C_{lj}^R\}) \quad i, j = 1, \dots, N$$

представляє реальний стан системи в момент  $t$ .  $Q^i(t) = (\{S_l^i(t)\}, \{C_{lj}^i\})$ ,  $i, j, l = 1, \dots, N$  — ідеальну ситуація очима  $i$ -го агента. Тоді різниця між реальною та ідеальною ситуацією:

$$D_i(t) = \|Q^i(t) - Q^R(t)\|.$$

Припустимо, що динаміка  $i$ -го учасника залежить від  $D_i(t)$  і середнього поля впливу від інших агентів. Запишемо поле впливу  $G(t) = \{g_i(t)\}$   $i = 1, \dots, N$

$$g_i(t) = \sum_{j=1}^N C_{ij}^R \frac{S_j^R(t)}{M_j}.$$

$\frac{S_j^R(t)}{M_j}$  — активність агента  $j$  в моменті  $t$ ,  $C_{ij}^R \frac{S_j^R(t)}{M_j}$  — активність

з урахуванням репутації. Формуємо  $F$  — деякий закон для реакції агента (функцію активації), для учасника:

$$S_i^R(t+1) = F(v_i(t))$$

де аргумент  $v_i(t)$  може бути:

а) мультиплікативний

$$v_i(t) = \alpha(D_i(t))g_i(t)$$

б) адитивний  $v_i(t) = g_i(t) + f_i(D_i(t))$ , де  $f_i(D_i(t))$  — деяка функція впливу.

$v_i(t)$  — розуміння  $i$  учасником тенденції в системі:

$v_i(t) > 0$  — збільшити ресурс, якщо  $v_i(t) \approx 0$  — стабільність (головна тенденція),  $v_i(t) < 0$  — зменшити ресурси.

Складемо рівняння, що описує динаміку зміни рішення з врахуванням ментальності агентів :

$$S_i^R(t+1) = \begin{cases} S_i^R(t) + 1 & \text{якщо } v_i(t) > \frac{\|G(t)\| \|S_i^R\|}{M_i} \text{ і } S_i^R(t) < M_i, \\ S_i^R(t) - 1 & \text{якщо } v_i(t) > \frac{\|G(t)\| \|S_i^R\|}{M_i} \text{ і } S_i^R(t) > -M_i, \\ 0 & \text{інакше,} \end{cases}$$

де (Макаренко, 2014)

$$\|G(t)\| = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N g_i^2(t)}}{N}$$

Системи з врахуванням ментальності набувають поширення і застосовуються у все більшій кількості різних сфер діяльності людства.

### Список літератури

- Герасимов, К. Б. (2010). *Моделирование социальных систем*. Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та.
- Макаренко, А., Левков, С., Соля, В. (2007). Подход на основе ассоциативной памяти к моделированию фондовой биржи. *Системные исследования и информационные технологии*, (4), 111–124.
- Макаренко, О. С. (2014). Математичне моделювання з врахуванням властивостей менталітету в проблемах динаміки суспільної думки. *Автоматика–2014: Матеріали 21-й Міжнародної конференції по автоматическому управленню, Киев, 23–27 сентября 2014 г.* (с. 38–39). Киев: Изд-во НТУУ «КПИ» ИПИ ППК «Политехника».



# МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПІЗНЬОЇ СТАДІЇ СЕГРЕГАЦІЇ ДОМІШКИ НА МІЖЗЕРЕННІЙ МЕЖІ У ВИПАДКУ УТВОРЕННЯ ПЛАСКИХ ВИДІЛЕНЬ НОВОЇ ФАЗИ

О. В. Коропов

Інститут прикладної фізики НАН України, Суми, Україна  
[ipfmail@ipfcentr.sumy.ua](mailto:ipfmail@ipfcentr.sumy.ua)

**1. Вступ.** Явище сегрегації в металах і стопах полягає у просторовому перерозподілу й виділенні компонентів стопу, легованих елементів або домішкових атомів з об'єму матеріалу на вільних поверхнях, дислокаціях, порах, межах зерен і міжфазних межах. Особливо інтенсивно процеси сегрегації відбуваються в конструкційних матеріалах ядерних реакторів (спеціальні неіржавіючі сталі, стопи на основі Zr тощо), які працюють в екстремальних умовах високих доз опромінення і підвищених температур (Was, 2007). Зміни елементів складу міжзеренних меж (сегрегація) будуть викликати зміни локальних властивостей матеріалу і впливати на різні фізичні й фізико-хімічні процеси, чутливі до змін складу і структури. Зокрема, сегрегація може призводити до погіршення механічної міцності меж зерен і виникненню крихкості матеріалу на межах зерен. Тому вивчення механізмів сегрегації постає як важлива й актуальна задача, зокрема, для створення нових, більш досконалих матеріалів ядерних реакторів і експлуатації вже існуючих конструкційних матеріалів.

Звернемося до розглядуваної задачі. У результаті сегрегації домішки з об'єму зерен на міжзеренній межі в її площині утворюються циліндричні виділення (острівці) з радіусом основи  $R = R(t)$  і висотою  $h$  ( $h > \delta$ ,  $\delta$  — товщина міжзеренної межі). На пізній стадії сегрегації пересичення матеріалу домішковими атомами стає дуже малим, тому зародження нових виділень на міжзеренній межі не відбувається. Отже, визначальну роль відіграє процес росту більш крупних виділень за рахунок зменшення в розмірі і зникнення дрібних; при цьому середній розмір виділення монотонно збільшується з часом  $t$ , а густина виділень монотонно спадає. Цю стадію звичайно називають визріванням Оствальда (ВО) виділень нової фази (Ostwald, 1900). Саме цю стадію будемо розглядати при деяких спрощуючих задачу припущеннях.

**2. Вихідні рівняння.** Як показано у праці Коропов (2011), швидкість дифузійного росту двовимірного виділення нової фази, розташованого на міжзеренній межі, має вигляд

$$\frac{dR}{dt} = \frac{D_B \omega \delta}{h L_B} \frac{K_1(R/L_B)}{F_0(R/L_B)} \Delta n_{BR}. \quad (1)$$

Тут  $D_B$  — коефіцієнт міжзеренної дифузії,  $\omega$  — об'єм, що припадає на один атом домішки в виділенні,  $L_B$  — характерний масштаб довжини задачі,  $K_l(z)$  — функція Макдональда  $l$ -го порядку,

$$F_0(z) \equiv K_0(z) + \frac{D_B}{\beta_B L_B} K_1(z), \quad (2)$$

$\beta_B$  — поверхневий кінетичний коефіцієнт,  $\Delta n_{BR}$  — термодинамічно рівноважний перепад густини атомів домішки в міжзеренній межі навколо виділення радіуса  $R$ .

Для виділення малого радіуса ( $R \ll L_B$ ) у випадку малих пересичень ( $\Delta_B \ll 1$ ) і  $D_B/\beta_B \rightarrow 0$  формула (1) приймає вигляд

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\mathfrak{D}}{R} \left( \Delta_B - \frac{\Gamma_B}{R} \right), \quad (3)$$

$$\mathfrak{D} \equiv \frac{D_B n_{B\infty} \omega \delta}{h K_0}, \quad K_0 \simeq - \left[ \ln(R/2L_B) + \gamma \right], \quad (4)$$

$\Delta_B = \Delta_B(t)$  — відносне пересичення твердого розчину атомів домішки в міжзеренній межі ( $\Delta_B \ll 1$ ),  $\Gamma_B \equiv \sigma_B \omega / kT$ ,  $\sigma_B$  — питома міжфазна енергія поверхні міжзеренна межа-виділення нової фази,  $k$  — стала Больцмана,  $T$  — температура,  $n_{B\infty}$  — термодинамічно рівноважне значення густини атомів домішки в міжзеренній межі поблизу пласкої поверхні міжзеренна межа-виділення нової фази ( $R \rightarrow \infty$ ),  $\gamma \approx 0.5772$  — стала Ейлера.

У безрозмірних змінних  $\rho \equiv R/R_0^* = R \Delta_{B0} / \Gamma_B$  і  $t' \equiv t/T_0$ , де  $R_0^* \equiv R^*(t)|_{t=0}$ ,  $R^*(t) = \Gamma_B / \Delta_B(t)$  — критичний радіус виділення,  $\Delta_{B0} \equiv \Delta_B(t)|_{t=0}$ ,  $T_0 \equiv R_0^{*3} / \Gamma_B \mathfrak{D}$  рівняння (3) приймає вигляд

$$\rho^2 \frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{x(t)} - 1. \quad (5)$$

Тут штрих при  $t$  вже опущений,  $x(t) \equiv R^*(t)/R_0^* = \Delta_{B0} / \Delta_B(t)$ ,  $x(0) = 1$ . Нехай  $f(\rho, t)$  — функція розподілу за розмірами (ФРР) виділень, нормована на густину виділень (число виділень на одиниці площі міжзеренної межі)  $\mathcal{N}(t)$ :

$$\int_0^\infty f(\rho, t) d\rho = \mathcal{N}(t). \quad (6)$$

ФРР  $f(\rho, t)$  задовольняє кінетичному рівнянню (Лифшиц, 1987)

$$\frac{\partial f(\rho, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( f(\rho, t) \frac{d\rho}{dt} \right) = 0, \quad f(\rho, t)|_{t=0} = f_0(\rho). \quad (7)$$

Закон збереження речовини в системі має вигляд

$$\frac{\Delta_{B0}}{Qx(t)} + \kappa \int_0^{\infty} \rho^2 f(\rho, t) d\rho = 1, \quad (8)$$

де сталі  $Q$  і  $\kappa$  запроваджено у праці (Когоров, 2012). Рівняння (5)—(8) є вихідними.

**3. Асимптотичні характеристики ВО** ( $\tau \rightarrow \infty$ ). Перейдемо до безрозмірних змінних  $u$ ,  $\tau$ :

$$u \equiv \frac{R}{R^*(t)} = \frac{R}{\Gamma_B} \Delta_B(t) = \frac{\rho}{x(t)}, \quad (9)$$

$$\tau \equiv \ln x^2 = \ln \left( \frac{R^*(t)}{R_0^*} \right)^2, \quad \tau|_{t=0} = 0, \quad \tau|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Тоді в змінних  $u$ ,  $\tau$  рівняння (5) приймає вигляд

$$u^2 \frac{du}{d\tau} = \frac{1}{2} [\eta(u-1) - u^3], \quad \eta = \eta(\tau) \equiv \frac{dt}{x^2 dx} = \frac{3dt}{dx^3} > 0. \quad (11)$$

Аналіз рівнянь (8) і (11) вказує, що при достатньо великих значеннях «часу»  $\tau$

$$\eta(\tau) = \eta_0 [1 - \varepsilon^2(\tau)], \quad \eta_0 = const, \quad (12)$$

де  $\varepsilon(\tau) > 0$ ,  $\varepsilon(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Значення  $\eta_0$  визначається умовою дотику графіка швидкості  $du^3/d\tau = 3u^2 du/d\tau$  як функції  $u$  осі абсцис:

$$\eta_0 (u-1) - u^3 = 0, \quad \frac{d}{du} [\eta_0 (u-1) - u^3] = 0. \quad (13)$$

З рівнянь (13) знаходимо  $\eta_0 = 27/4$ ; абсциса точки дотику («запираюча» точка для точок, що рухаються справа наліво вздовж осі  $u$ )  $u_0 = 3/2$ . Уточненим значенням  $\eta(\tau)$ , як можна пересвідчитись, буде

$$\eta(\tau) = \eta_0 (1 - 1/3\tau^2), \quad \eta_0 = 27/4. \quad (14)$$

З рівнянь (10), (11), (14) випливає

$$x^3(t) = \frac{4}{9} t \left[ 1 + \frac{3}{4(\ln t)^2} \right], \quad R^{*3} = \frac{4}{9} \Gamma_B \mathfrak{D}t \left\{ 1 + \frac{3}{4[\ln(\Gamma_B \mathfrak{D}t/R_0^{*3})]^2} \right\}. \quad (15)$$

Основне наближення дає

$$R^{*3} = \frac{4}{9} \Gamma_B \mathfrak{D} t, \quad \left[ \ln \left( \Gamma_B \mathfrak{D} t / R_0^{*3} \right) \right]^2 \gg 1, \quad \Delta_B = \Gamma_B / R^*. \quad (16)$$

Кінетичне рівняння для ФРР  $\phi(u, \tau)$  у змінних  $u, \tau$  поза околom точки  $u_0 = 3/2$  ( $|u - u_0| \geq \varepsilon(\tau)$ ) при  $\tau \rightarrow \infty$  має вигляд

$$\frac{\partial \phi(u, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial u} [\phi(u, \tau) V(u)] = 0, \quad V(u) \equiv - \left( u - \frac{3}{2} \right)^2 \frac{u + 3}{2u^2}. \quad (17)$$

Можна показати, що за умови  $\tau \rightarrow \infty$  прямують до нуля ФРР при  $u > u_0$  (поза околom точки  $u_0$ ) й інтегральний внесок від околу точки  $u_0$ ; тоді

$$\phi(u, \tau) = \frac{\varphi(\tau - \tau(u))}{-V(u)}, \quad u < u_0, \quad (18)$$

$$\phi(u, \tau) = 0, \quad u > u_0, \quad (19)$$

$$\tau(u) \equiv \int_0^u \frac{du'}{V(u')} = -\frac{8}{9} \ln(u + 3) - \frac{10}{9} \ln\left(\frac{3}{2} - u\right) - \left(\frac{3}{2} - u\right)^{-1} + B,$$

$B \equiv 2 \ln\left(3e^{1/3}/2^{5/9}\right)$ ,  $\tau(0) = 0$ ,  $\tau(u_0 - 0) = -\infty$ ,  $\varphi$  — довільна диференційовна функція. Скористуємося законом збереження речовини в змінних  $u, \tau$ :

$$1 - \frac{\Delta_{B0}}{Q} \exp(-\tau/2) = \kappa(\exp \tau) \int_0^\infty \phi(u, \tau) u^2 du. \quad (20)$$

Тоді при  $\tau \rightarrow \infty$  маємо

$$\varphi(\tau - \tau(u)) = A \exp(-\tau + \tau(u)), \quad (21)$$

$$\phi(u, \tau) = A \exp(-\tau) P(u), \quad (22)$$

$$A = \left( \overline{\kappa u^2} \right)^{-1}, \quad \overline{u^2} = \int_0^{u_0} u^2 P(u) du \approx 1.1824, \quad (23)$$

$$P(u) = \frac{\left(3e^{1/3}u\right)^2 \exp\left[-\left(3/2 - u\right)^{-1}\right]}{2^{1/9} (u + 3)^{17/9} \left(3/2 - u\right)^{28/9}}, \quad u \in \left[0; 3/2\right), \quad (24)$$

$$P(u) = 0, \quad u \in \left[3/2; +\infty\right). \quad (25)$$

Графік густини ймовірності  $P(u)$  зображений на рис. 1 (крива 3).

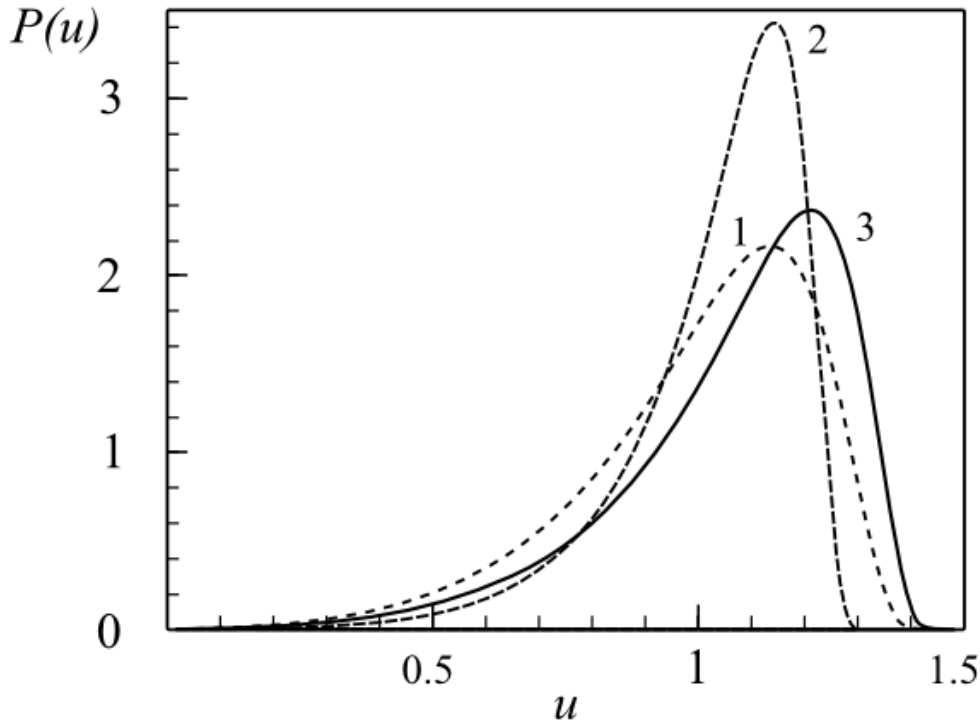


Рис. 1. Деякі функції  $P(u)$ , одержані в теорії ВО: 1 — праця Лифшиц (1987), 2 — праця Коропов, Сагалович (1987), 3 — дана робота  
Густина виділень  $\mathcal{N}(\tau \rightarrow \infty)$ :

$$\mathcal{N} = \int_0^{\infty} f(\rho, t) d\rho = \int_0^{u_0} \phi(u, \tau) du = A \exp(-\tau), \quad (26)$$

$$\mathcal{N}(t) = A \left( \frac{R_0^*}{R^*(t)} \right)^2 = \left( \frac{3}{2} \right)^{4/3} AR_0^{*2} (\Gamma_B \mathfrak{D}t)^{-2/3}, \quad (27)$$

де добуток  $AR_0^{*2}$  не залежить від  $R_0^*$ . Середній радіус виділення ( $t \rightarrow \infty$ ):

$$\bar{R}(t) = \bar{u}R^*(t), \quad \bar{u} = \int_0^{u_0} uP(u) du \approx 1.0665. \quad (28)$$

ФРР виділень  $\mathcal{F}$  у змінних  $R, t$  при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\mathcal{F}(R, t) = \frac{\mathcal{N}(t)}{R^*(t)} P\left(\frac{R}{R^*(t)}\right) = \frac{\bar{u}\mathcal{N}(t)}{\bar{R}(t)} P\left(\frac{\bar{u}R}{\bar{R}(t)}\right). \quad (29)$$

Коефіцієнт заповнення міжзерної межі виділеннями  $\mathcal{Z}$ :

$$\mathcal{Z}(t) = \pi \int_0^{\infty} R^2 \mathcal{F}(R, t) dR = \pi R_0^{*2} \int_0^{\infty} \rho^2 f(\rho, t) d\rho, \quad (30)$$

$$\mathcal{Z}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \pi \left[ R^*(t) \right]^2 \mathcal{N}(t) \overline{u^2} = \pi A R_0^{*2} \overline{u^2} = \text{const.} \quad (31)$$

Як впливає з попереднього аналізу (див. (10), (14)), наведені асимптотичні вирази справедливі за умови

$$3\tau^2 = 3(\ln x^2)^2 = 12 \left[ \ln \left( \frac{R^*(t)}{R_0^*} \right) \right]^2 \gg 1. \quad (32)$$

*The Ostwald ripening of precipitates of a newly-formed phase is a late stage of impurity segregation at the grain boundary. The paper describes a theoretical study of the Ostwald ripening of two-dimensional small-size precipitates of a newly-formed phase at the grain boundary of finite thickness, taking into account the diffusion of impurity atoms from the grain interior to the grain boundary. The precipitate growth is believed to be limited by the impurity-atom diffusion in the grain boundary. The asymptotic time dependences are found for the average and critical precipitate radius, supersaturation of solid solution of impurity atoms in the grain boundary, precipitate size distribution function, precipitate density, and for the factor of grain boundary filling with precipitates. A discussion of the limits of validity of obtained results is given.*

### Список літератури

- Was, G. S. (2007). *Fundamentals of Radiation Materials Science: Metals and Alloys*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag.
- Ostwald, W. (1900). Über die vermeintliche Isomerie des roten und gelben Quecksilberoxyds und die Oberflächenspannung fester Körper. *Zs.Phys.Chem.*, 34, 495–503.
- Koropov, A. V. (2011). Morphological Stability of Two-Dimensional New Phase Precipitate Located at the Grain Boundary. *Technical Physics*, 56 (12), 1781–1786.
- Лифшиц, И. М. (1987). *Физика реальных кристаллов и неупорядоченных систем*. Москва: Наука.
- Koropov, A. V. (2012). Ostwald Ripening of Diffusion-Limited Small-Size Precipitates at Grain Boundaries. *Journal of Nano- and Electronic Physics*, 4 (3), 03013 (8pp).
- Коропов, А. В., Сагалович, В. В. (1987). Диффузионный рост островковых пленок в среде инертного газа. *Поверхность. Физика, химия, механика*, 187 (6), 50—55.

# РЕШЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

А. И. Косолап

Украинский государственный химико-технологический университет,

Днепропетровск, Украина

[anivkos@ua.fm](mailto:anivkos@ua.fm)

Использование метода Галеркина для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, с частными производными и интегральных уравнений с квадратичными функциями приводит к необходимости решения квадратичных систем алгебраических уравнений (Флетчер, 1988). Такие уравнения могут быть решены методом Ньютона. Однако этот метод сходится локально и позволяет получить решение только при хорошем начальном приближении. Задача решения системы уравнений

$$f_i(x) = x^T A_i x + b_i^T x + c_i = 0, i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

где все  $A_i$  — симметрические матрицы,  $b_i, x \in \mathbb{E}^n$  (евклидово пространство),  $c_i$  — числа, преобразуется к решению следующей оптимизационной задаче

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^m f_i(x) \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \right\}. \quad (2)$$

В общем случае, в задаче (2) необходимо найти точку глобального максимума, так как в точке локального максимума значение целевой функции

$$\sum_{i=1}^m f_i(x) < 0$$

может быть меньше нуля и эта точка не будет решением системы (1).

Линейным преобразованием координат квадратичные функции преобразуются к каноническому виду (Ефимов, 2012). Это позволяет свести решение задачи (2) к следующей

$$\max \{ p_0^T x^2 + q_0^T x \mid p_i^T x^2 + q_i^T x + v_i \leq 0, i = 1, \dots, m, Qx = u \}, \quad (3)$$

где

$$p_i^T x = p_1 x_1^2 + \dots + p_n x_n^2.$$

Используя замену  $y_j = x_j^2, j = 1, \dots, n$ , получаем эквивалентную (3) задачу

$$\max \{ p_0^T y + q_0^T x \mid p_i^T y + q_i^T x + v_i \leq 0, i = 1, \dots, m, x_j^2 \leq y_j, j = 1, \dots, n, Qx = u, -\sum_{j=1}^n (x_j^2 - y_j) \leq 0 \}. \quad (4)$$

Задача (4) методом точной квадратичной регуляризации (Косолап, 2015) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
& \max\{\|z\|^2 \mid -p_0^T y - q_0^T x + s + \|z\|^2 \leq d, \\
& p_i^T y + q_i^T x + v_i + 2\|z\|^2 \leq d, i = 1, \dots, m, \\
& ax_j^2 + 2\|z\|^2 \leq ay_j + d, j = 1, \dots, n, \\
& Qx + 2\|z\|^2 = u + d, -a \sum_{j=1}^n (x_j^2 - y_j) + 2\|z\|^2 \leq d\},
\end{aligned} \tag{5}$$

где  $a \in (0,1)$ ,  $z = (x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_n)$ , а параметр  $s$  должен удовлетворять условию

$$s \geq \|x^*\|^2 - f_0(x^*).$$

Здесь точка  $x^*$  — решение задачи (1). В задаче (5) необходимо найти минимальное значение новой переменной  $d^*$ , для которой выполняется условие

$$2\|z^*\|^2 = d^*,$$

где  $z^*$  — решение задачи (5) при фиксированном значении  $d^*$ . Значение  $d^*$  находим методом дихотомии, решая последовательность задач (5) для  $d = d + h$ , где  $h$  — величина шага. Причем, значение  $2\|z^*\|^2 - d^*$  монотонно возрастает при увеличении шага, что позволяет быстро найти минимальное значение  $d^*$ .

Ограничения задачи (5) определяют выпуклую область. Эта область является пересечением шаров и эллипсоидов. Эллипсоиды задачи (5)

$$\begin{aligned}
& ax_j^2 - ay_j + 2\|z\|^2 \leq d, j = 1, \dots, n, \\
& -a \sum_{j=1}^n (x_j^2 - y_j) + 2\|z\|^2 \leq d
\end{aligned}$$

отличаются от шаров на величину

$$\Delta = \sqrt{\frac{d}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1-a/2}} - 1 \right).$$

Для  $d = 100$  и  $a = 0,01$  имеем  $\Delta = 0,0147$ , а для  $d = 1000$  и  $a = 0,001$  значение  $\Delta = 0,0056$ . Это позволяет аппроксимировать данные эллипсоиды шарами. Тогда задача (5) аппроксимируется следующей:

$$\max\{\|z\|^2 \mid \|z - a^i\|^2 \leq r_i^2, i = 1, \dots, N\}. \tag{6}$$

Решение задачи (6) может быть найдено методом множителей Лагранжа



$$z(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i a^i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i - 1}. \quad (7)$$

Однако проблемным является поиск множителей Лагранжа  $\lambda$ .

Покажем, что задача (6) может быть эффективно решена двойственным методом. Двойственная к задаче (6) будет следующая

$$\min \left\{ g(\lambda) \left\| \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i a^i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i - 1} - a^i \right\|^2 \leq r_i^2, i = 1, \dots, N, \sum_{i=1}^N \lambda_i - 1 \geq 0, \lambda \geq 0 \right\}, \quad (8)$$

где двойственная функция  $g(\lambda)$  равна

$$g(\lambda) = \frac{\left\| \sum_{i=1}^N \lambda_i a^i \right\|^2}{\sum_{i=1}^N \lambda_i - 1} - \sum_{i=1}^N \lambda_i \left( \|a^i\|^2 - r_i^2 \right).$$

Двойственная задача (8) является выпуклой, так как функция  $g(\lambda)$  — выпуклые, а ее ограничения определяют выпуклую область. Известно, что

$$\|z\|^2 \leq g(\lambda),$$

что используется для поиска верхних оценок целевой функции в задаче (6) (Шор, Стеценко, 1989). В задаче (6) может быть разрыв двойственности, когда оптимальные множители Лагранжа  $\lambda^*$  задачи (6) не удовлетворяют ограничениям двойственной задачи и

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^* < 1.$$

Двойственная задача (6) отличается от классической тем, что в ее ограничения добавлены ограничения исходной задачи

$$\|z(\lambda) - a^i\|^2 \leq r_i^2, i = 1, \dots, N.$$

Эти дополнительные ограничения могут привести к увеличению разрыва двойственности, но позволяют найти множители Лагранжа, которые определяют точное решение задачи (1). Решение классической двойственной задачи позволяет определить множители Лагранжа, для которых решение  $z(\lambda)$  может быть недопустимым для ограничений задачи (6) и

$$\|z(\lambda)\|^2 > g(\lambda).$$

Например, такое будет наблюдаться для следующих ограничений задачи (6)

$$(z_1 - 2)^2 + (z_2 - 3)^2 \leq 6,$$

$$(z_1 + 1)^2 + (z_2 - 1)^2 \leq 16,$$

$$(z_1 + 2)^2 + (z_2 + 2,5)^2 \leq 36,$$

$$(z_1 - 2)^2 + (z_2 - 2)^2 \leq 2,$$

$$(z_1 + 1)^2 + (z_2 - 2)^2 \leq 16.$$

Решение классической двойственной задачи

$$g(\lambda) = 9,37, \text{ а } \|z(\lambda)\|^2 = 9,507.$$

**Теорема 1.** Если задача (6) имеет решение, то для решения двойственной задачи (8) справедливо неравенство

$$\|z(\lambda)\|^2 \leq g(\lambda).$$

*Доказательство.* Представим ограничения задачи (8) в виде

$$\|z(\lambda)\|^2 - 2z(\lambda)^T a^i + \|a^i\|^2 \leq r_i^2, i = 1, \dots, N.$$

Умножим обе части неравенств на  $\lambda_i$  и сложим, получим

$$\|z(\lambda)\|^2 \sum_{i=1}^N \lambda_i - 2z(\lambda) \sum_{i=1}^N \lambda_i a^i + \sum_{i=1}^N \lambda_i \left( \|a^i\|^2 - r_i^2 \right) \leq 0$$

и учитывая (7), имеем

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \left( \|a^i\|^2 - r_i^2 \right) = \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i - 2 \right) \|z(\lambda)\|^2.$$

Откуда следует, что

$$\|z(\lambda)\|^2 \leq g(\lambda)$$

так как

$$g(\lambda) = \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i - 1 \right) \|z(\lambda)\|^2 - \sum_{i=1}^N \lambda_i \left( \|a^i\|^2 - r_i^2 \right).$$

Теорема доказана.

Заметим, что если  $i \in B$ , где  $B$  — множество индексов активных в точке максимума задачи (6) ограничений, то разрыв двойственности равен нулю.

Следующее утверждение показывает, что решение двойственной задачи (8) определяет решение прямой задачи (6) даже в том случае, когда существует разрыв двойственности.

**Теорема 2.** Если задача (6) имеет решение, то решение задачи (8) определяет множители Лагранжа, подстановка которых в формулу (7) определит решение прямой задачи (6).

**Доказательство.** Для справедливости этой теоремы необходимо, чтобы линейная система уравнений

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i (a^i - z^*) = z^*$$

имела решение, где  $z^*$  — решение задачи (6). В этой системе уравнений число переменных больше числа ограничений. Решение системы всегда можно достичь добавлением искусственных ограничений. Далее, допустим противное, что решение двойственной задачи  $\lambda^0$  определяет только точку локального максимума задачи (6). Тогда глобальному решению задачи (6) будет соответствовать другая точка  $\lambda^*$ . Выпуклое множество

$$\{\lambda \mid g(\lambda) \leq g(\lambda^*)\}$$

будет содержать внутренние точки допустимого множества задачи (8), иначе точка  $\lambda^*$  также будет решением задачи (8), что противоречит выпуклости задачи (8). Эти внутренние точки будут внутренними и для множества

$$\{\lambda \mid z(\lambda) \leq z(\lambda^*)\},$$

но тогда для этих внутренних точек будет выполняться неравенство

$$\|z(\lambda)\|^2 > g(\lambda),$$

что противоречит теореме 1. Противоречие показывает, что решение задачи (8) определяет точку глобального максимума задачи (6).

Таким образом, решение модифицированной двойственной задачи (8) позволяет определить решение задачи (6) и соответственно решение систем квадратичных уравнений.

### Список литературы

- Ефимов, Н. В. (2012). *Квадратичные формы и матрицы*. Москва: Физматлит.  
 Косолап, А. И. (2015). *Глобальная оптимизация. Метод точной квадратичной регуляризации*. Днепропетровск: ПГАСА.  
 Флетчер, К. (1988). *Численные методы на основе метода Галеркина*. Москва: Мир.  
 Шор, Н. З., Стеценко, С. И. (1989). *Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация*. Киев: Наукова думка.

# ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ВЗАЄМОДІЙ НАНОЧАСТИНОК СУСПЕНЗІЙ ПРИ АНАЛІЗІ РЕОЛОГІЧНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ, ОТРИМАНИХ РОТАЦІЙНИМ МЕТОДОМ

О. В. Кузьма

*НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна*

[olekuz6@gmail.com](mailto:olekuz6@gmail.com)

Динаміка рідинних середовищ із малими сферичними включеннями (діапазон середніх радіусів  $10^{-3}\text{ м} \leq a_b \leq 10^{-6}\text{ м}$ ) під дією вібраційних збурень поблизу випромінювача чи газового скупчення в хвильоводі, трубці, циліндричній ємності досліджувалась у роботах Кузьма (2000а, 2000б, 2006).

У них були отримані рівняння коливань твердих частинок чи пульсацій бульбашок та проведено їх дослідження методом малого параметра для моделей стисливої (Кузьма, 2006) чи нестисливої (Кузьма, 2000а, 2000б) рідинної фази. Були розглянуті потенціальні течії, у яких для малих включень умови на поверхні нехтувались, а для немалих поверхонь (стінка, сферичний випромінювач) умови задовольнялись, досліджувалась задача про напрямки руху бульбашок, щоб визначити коли вони можуть об'єднатися у скупчення (Кузьма, 2000б). Головні сили, які впливають на включення вказаного розміру — це гідродинамічні сили взаємодії з рідиною, що зазнає зовнішніх чи внутрішніх вібраційних впливів, що значно підсилюються під час резонансних явищ для газових бульбашок. Також відіграють значну роль взаємодія з сусідніми частинками, гравітаційні сили, сили дисипації. При цьому в Кузьма (2006, 2000б) останні сили вважались малими, що й дозволяло для фази рідини застосовувати модель потенціальних течій, а дисипативні члени вводились лише в рівняння коливань частинок чи бульбашок на основі гіпотези про малу в'язкість рідини та низьку концентрацію дисперсних фаз.

Зовсім інші впливи починають відігравати вирішальну роль при нанорозмірах частинок (Zagorny, Zhygotsky, Ivanchuk, Kuzma, Pozniy, Ragulya, 2015; Урьев, 2004), на включення з середніми розмірами у 10—500 нм впливають броунівський рух, міжмолекулярні взаємодії, виявляються потенціальні ями, сили Ван-дер-Ваальса, адгезія, коалесценція та ін.

У роботі Zagorny et al. (2015) були розпочато аналіз експериментальних даних для нанодисперсних суспензій титанату барію, отриманих на віскозиметрі ротаційного типу для широких діапазонів швидкостей зсуву (частот обертання), різних концентрацій, наявності чи відсутності ПАР. Показано, що вже у випадку середньо насичених концентрацій, коли  $c \geq 0,1$ , взаємодія між включеннями приводить до структурної зміни дисперсії. У цих випадках в'язкість  $\eta$  не тільки не мала, а, навпаки, є визначальним фактором течії, головним реологічним показником, а складність середовища не дозволяє застосовувати моделі потенціальних течій для рідини, як у Кузьма (2000а, 2000б, 2006). Причому ефективна в'язкість  $\eta_{eff}$  може змінюватися під час динамічних впливів, коли

агрегати починають руйнуватися, ще й залежить від концентрації, пакування включень.

Дані для аналізу були отримані в ІПМ НАНУ проф. А. В. Рагулею, М. М. Загорним та іншими співробітниками та представлені у Zagorny et al. (2015) разом з автором роботи. Вибір саме титанату барію  $\text{BaTiO}_3$  пояснюється його зростаючим застосуванням у електронних пристроях, а наносуспензії цієї речовини використовуються при виробництві тонких плівок із сегнетоелектриками. Приведені результати ефективної в'язкості  $\eta_{eff}$  вимірювались для суспензій у спиртових розчинах із середнім розміром частинок  $d = 2r = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  (рис. 1, а), визначеним за допомогою лазерної оптики. Залежності були отримані на ротаційному віскозиметрі при різних значеннях зсуву  $\tau$ , швидкостях  $D$  та різних концентраціях.

Крім аналізу кривих течії (плину) була зроблена спроба визначити умови утворення та руйнування структур (рис. 1, б) при динамічних впливах, де як критерій руйнування агрегатів включень було запропоновано використати умову перебільшення кінетичної енергії  $E$  над потенціальною енергією  $U$ , представлені для взаємодії пари сусідніх сферичних включень ( $r_1 = r_2 = r$ ).

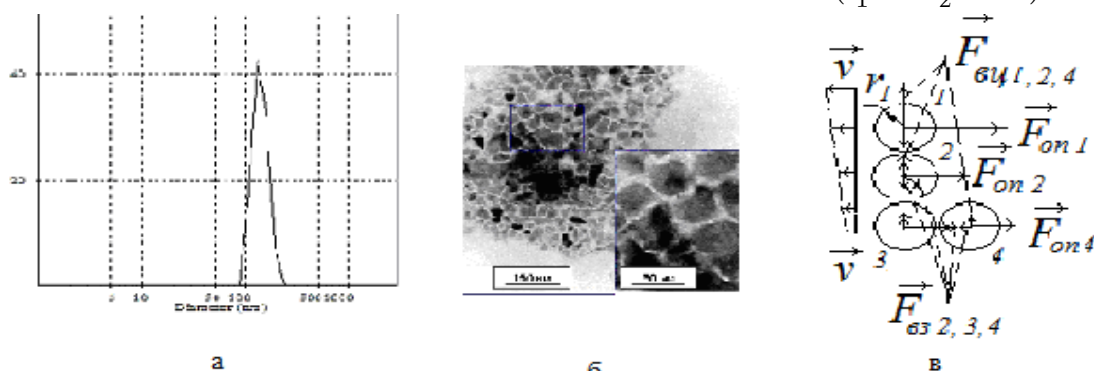


Рис. 1

У даній роботі розглянемо напрями й порядки сил, які впливають на сусідні включення, щоб з'ясувати, чи можна їх використовувати для визначення взаємодій і уточнення умов руйнування структури. Крім того, будуть приведені нові дані для  $c = 0,15$ , (15% об.), ширших діапазонів швидкостей зсуву, та інш.

Найбільша компонента сили, що викликана обертальним рухом суспензії (течії, у якій швидкість  $\bar{v}$  залежить від віддалі до осі обертання) у віскозиметрі має відцентровий характер  $F_{вц}$ . При цьому вона найбільше відрізняється для сусідніх включень при їх радіальному (вертикальному на схемі) розміщенні (рис.1, в). Різниця сил для рівних сусідніх частинок 1, 2 (для горизонтальних на схемі частинок — 3, 4 — сили  $F_{вц}$  незмінні) буде

$$F_{вц1} - F_{вц2} = (m_b - m_p)\omega^2 d, \quad (1)$$

що може призводити до руйнування структури наносуспензії при певних зсувах, швидкості обертання —  $\tau, \omega$  відповідно до Zagorny et al. (2015). Для маси включення (титанат барію) та маси витісненого об'єму рідини (етиловий спирт) використані формули та значення

$$m_b = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_b, \rho_b = 6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, m_p = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_p, \rho_p = 8 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3.$$

Крім сил (1), викликаних обертанням об'єму суспензії, на включення будуть діяти сили взаємодії  $F_b$  та опору  $F_c$ , що будуть відрізнятися для включень 1, 2 чи 3, 4 (рис.1, в). Для ньютонівського характеру рідини сили  $F_c$  можна прийняти у вигляді сил Стокса, які залежить від швидкості  $\vec{v}$ , та від в'язкості.

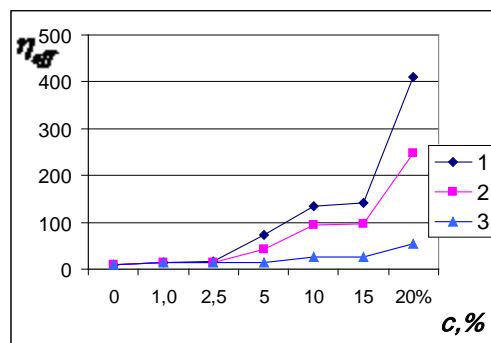


Рис. 2

Цей макро параметр  $\eta_{eff}$  набуває значень (рис. 2), отримані при різних концентраціях  $c$  (%) разом із М. М. Загорним. При цьому слід враховувати те, коли течія може мати ньютонівський характер (Zagorny et al., 2015; Урьев, 2004). На рис. 2 криві 1, 2, 3 відповідають швидкостям зсуву  $D = 50, 100, 1000 \text{ сек}^{-1}$ . Графіки підтверджують, що у діапазоні концентрацій 10—15% зміни у характері течій, особливо при невеликих швидкостях зсувів, стають помітні (крива 1 має найпомітніші злами, 2 — менші, крива 3 — майже непомітні). Це зв'язано з підвищенням взаємодії включень при зростанні концентрації ближче до максимальних значень (сферичні включення дотинаються вже при  $c_{max} = 0,5236$ , або 52,36%), коли середня віддаль між ними починає скорочуватись, а сили взаємодії — зростати.

Значення цих сил  $F_b$  при віддальях  $h_1 = 2 \cdot r = 2r = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , можна визначити як у рівняннях руху Лагранжа другого роду для включень (Кузьма, 2006), взявши похідні від потенціальної енергії  $U_b$  міжмолекулярної взаємодії (притягання та відштовхування) (Урьев, 2004):

$$F_b = \frac{\partial}{\partial h} U_b |_{h=h_1} = \frac{\partial}{\partial h} \left( r \left[ -\frac{A}{12h} - \frac{B}{h^2} - \frac{64\pi}{k^2} NT \gamma^2 e^{-k_1 h} \right] \right) |_{h=h_1} = F_{b1} + F_{b2} + F_{b3}, \quad (2)$$

На відміну від Zagorny et al. (2015) у (2) враховано ще один член,  $F_{b1}$ , який впливає на близьку взаємодію, має, як і  $F_{b2}$  характер притягання і включає параметр  $A = 10^{-19} \text{ Дж} \cdot \text{м}$ . Третій член у (2),  $F_{b3}$ , що відповідає силі відштовхування двох частинок, має меншу величину при вказаних віддальях і розмірах, та

більше проявляється при додаванні ПАР у рідинну фазу. Він менше при вказаних умовах  $F_{B1} \cdot F_{B2}$ , та відштовхування працює на руйнування агрегатів. Тому ми поки знехтуємо його впливом. Сили дисипації  $F_c$  теж не враховуємо, бо вони більше впливають на обертання, орієнтацію ланцюжка включень чи протидіють динамічним силам, ніж працюють на розрив чи збереження зв'язків. При  $B = 10^{-28}$  Дж · м,  $\omega = 2\pi \cdot 103 \text{сек}^{-1}$  порядок сил (для включення 1)  $F_{B1} = -3,2051310^{-14}$  Н,  $F_{B2} = -5,917 \cdot 10^{-15}$  Н, різниця відцентрових компонент сил для сусідніх включень  $F_{вц1} - F_{вц2} = 3,306 \cdot 10^{-19}$  Н, але сама відцентрова сила коло стінки стакану ротора ( $R = 1,5 \cdot 10^{-2}$  м) буде мати порядок,  $F_{вц1} = 3,81 \cdot 10^{-14}$  Н, який буде вже перевищувати суму сил притягання, що приведе до початку руйнування структури, агрегатів нано частинок. Цей висновок корелюється з результатами роботи (Zagorny et al., 2015).

Серед сил, розглянутих для таких суспензій, при обертаннях із  $D > 100 \text{сек}^{-1}$  найбільший вплив починають виявляти відцентрові сили (прискорення коло стінок перевищує сотню  $g$ ). Слід відмітити, що при значеннях  $D > 1800 \text{сек}^{-1}$  для середніх концентрацій у суспензії відбувається не тільки швидка руйнація агрегатів, але і розшарування суспензії — важчі за етиловий спирт частинки титанату барію залишають ділянки коло ротора, взаємодіють із стінкою значно більше, результати для в'язкості стають завищеними.

Оскільки відцентрові сили виражаються порівняно легко, то визначаючи експериментально початок руйнування структури, можна визначати і самі сили взаємодії, які мають складний фізичний характер, перевірити емпіричні частини формул для них. Визначивши роль динамічних збурень, так як і впливи на процеси утворення чи руйнування агрегатних структур добавок у рідинну фазу, можна використовувати процеси самоорганізації частинок для створення тонких плівок із сегнетоелектриками, що будуть мати задані властивості.

### Список літератури

- Zagorny, M., Zhygotsky, A., Ivanchuk, A., Kuzma, O., Pozniy, A., & Ragulya, A. (2015). Barium Titanate Nanoparticles Self-organization from PVB-ethanol Suspensions. *J. Chem. Eng. Chem. Res.*, 2 (4), 547–555.
- Кузьма, О. В. (2000а). Динаміка малих включень поблизу сфери, що коливається в обмеженому стовпі нестисливої рідини. *Вісник Київ. університету. Сер. Фіз.-мат. науки*, (2), 56—66.
- Кузьма, О. В. (2000б). Коливання газового скупчення в циліндричному об'ємі нестисливої рідини. *Наук. вісті НТУУ «КПІ»*, (1), 124—130.
- Кузьма, О. В. (2006). Особливості поведінки включень у стовпі стисливої рідини, що збурюється джерелом коливань на осі симетрії. *Наук. вісті НТУУ «КПІ»*, (4), 66—72.
- Урьев, Н. Б. (2004). Физико-химическая динамика дисперсных систем. *Успехи химии*, 73 (1), 39—62.

## ПРО РЕГУЛЯРНІСТЬ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

В. Л. Кулик, Н. В. Степаненко, Г. М. Кулик

*Сілезьський технічний університет, Глівіце, Польща,  
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна  
[Viktor.Kulyk@polsl.pl](mailto:Viktor.Kulyk@polsl.pl)*

Розглядаються системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{d\phi}{dt} = a(\phi) \quad , \quad \frac{dx}{dt} = A(\phi)x, \quad (1)$$

де  $a(\phi) \in C_{Lip}(T_m)$ ,  $A(\phi)$  — квадратна матриця, елементами якої є дійсні функції, визначені на  $m$ -вимірному торі  $T_m$ . Досліджуються умови, при яких система (1) має функцію Гріна — Самойленка  $G_0(\tau, \phi)$ , яка задовольняє експоненціальну нерівність

$$\|G_0(\tau, \phi)\| \leq K \exp\{-\gamma|\tau|\},$$

де  $K, \gamma$  — додатні постійні. Для деяких систем (1) функція  $G_0(\tau, \phi)$  може бути єдиною, для інших систем (1) може існувати таких функцій безліч. Існують системи (1) які не мають жодної функції Гріна, а при деяких малих збуреннях правих частин у системі (1) така функція з'являється. Існують системи (1), які не мають жодної функції Гріна і при будь-яких малих збуреннях правих частин в системі (1) функції Гріна не існує.

**Означення 1.** Систему (1) прийнято називати регулярною якщо вона має єдину функцію Гріна — Самойленка  $G_0(\tau, \phi)$ . У випадку, коли система (1) має безліч різних функцій Гріна, цю систему називають слабо регулярною.

Приведемо приклади регулярних і слабо регулярних систем (1).

Регулярні системи:

$$1. \begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = 1, \\ \frac{dx}{dt} = \left( 0, 1 + \sum_{n=1}^N a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi \right) x. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = \sin \phi, \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 \\ 1 & -\cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = \sin 2016\phi + \cos 2017\phi, \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi & \cos^2 \phi \\ 1 & -\sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$



$$4. \begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = \sin \phi, \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Слабо регулярні системи:

$$5. \begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = \sin \phi, \\ \frac{dx}{dt} = 2016(\cos \phi)x. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = \sin \phi, \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 3\phi & 0 \\ \sin 2016\phi & \cos 5\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Відоме наступне твердження

**Теорема 1** (Митропольский и др., 1990, с. 125). *Нехай існує квадратична форма  $V = \langle S(\phi)y, y \rangle$ ,  $S(\phi) \in C^1(T_m)$ , похідна якої в силу системи спряженої до системи (1)*

$$\frac{d\phi}{dt} = a(\phi), \quad \frac{dy}{dt} = -A^T(\phi)y \quad (2)$$

*є додатно визначена, тобто виконується нерівність*

$$\left\langle \left[ \sum_{j=1}^m \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi_j} a_j(\phi) - S(\phi)A^T(\phi) - A(\phi)S(\phi) \right] y, y \right\rangle \geq \|y\|^2. \quad (3)$$

*Тоді система(1) має принаймні одну функцію Гріна (1). Якщо ж крім того  $\det S(\phi) \neq 0, \forall \phi \in T_m$ , то система (1) і спряжена до неї (2) будуть регулярними. У протилежному випадку, якщо  $\exists \phi_0 \in T_m : \det S(\phi_0) = 0$ , то система (1) буде слабо регулярною, а спряжена до неї (2) не буде мати жодної функції Гріна.*

**Зауваження.** *Якщо в нерівності (3) матриця  $S(\phi) \in C^1(T_m)$  є невиродженою, то для оберненої матриці  $-\alpha \cdot S^{-1}(\phi) = \bar{S}(\phi)$  буде виконуватись нерівність*

$$\left\langle \left[ \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{S}(\phi)}{\partial \phi_j} a_j(\phi) + \bar{S}(\phi)A(\phi) + A^T(\phi)\bar{S}(\phi) \right] x, x \right\rangle \geq \|x\|^2. \quad (4)$$

Слід відмітити, що знаходження матриці  $S(\phi) \in C^1(T_m)$ , яка задовольняє нерівності (3) для деяких систем вигляду (1) навіть у скалярному випадку є досить трудним. Приведемо деякі цікаві приклади:

$$1. \begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = \sin \phi, \\ \frac{dx}{dt} = (\cos 3\phi)x \end{cases} \text{ спряжена система має вигляд } \begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = \sin \phi, \\ \frac{dy}{dt} = (-\cos 3\phi)y \end{cases}$$

Похідна функції  $V = -\cos \phi \cdot \exp\{4 \cos^2 \phi\} \cdot y^2$  у силу спряженої системи задовольняє нерівність  $\dot{V} \geq y^2$ . У цьому випадку скалярна функція  $S(\phi) \in C^1(T_m)$ , яка задовольняє нерівності (3), має вигляд  $S(\phi) = -\cos \phi \cdot \exp\{4 \cos^2 \phi\}$ .

$$2. \begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = \sin \phi, \\ \frac{dx}{dt} = (\cos 5\phi)x \end{cases} \text{ спряжена система має вигляд } \begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = \sin \phi, \\ \frac{dy}{dt} = (-\cos 5\phi)y \end{cases}$$

Похідна квадратичної форми  $V = -\cos \phi \cdot \exp\{5 \cos^4 \phi + 2,5 \sin^4 \phi\} \cdot y^2$  у силу спряженої системи є додатно визначеною. У цьому випадку скалярну функцію  $S(\phi) \in C^1(T_m)$ , яка задовольняє нерівності (3), запишемо у вигляді

$$S(\phi) = -1,5 \cos \phi \cdot \exp\{4 \cos^4 \phi + 2,5 \sin^4 \phi\}.$$

Виявляється, що системи вигляду

$$\frac{d\phi}{dt} = \sin \phi,$$

$$\frac{dx}{dt} = [b_1 \cos \phi + b_3 \cos 3\phi + b_5 \cos 5\phi + \dots + b_{2n+1} \cos(2n+1)\phi]x, \quad (5)$$

при виконанні нерівності

$$b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{2n+1} > 0 \quad (6)$$

для будь-якого натурального значення  $n$  будуть слабо регулярними. Якщо ж нерівність (6) не виконується то системи (5) не мають жодної функції Гріна. Наступна система

$$\frac{d\phi}{dt} = \sin \phi, \quad \frac{dx}{dt} = [b_0 + b_2 \cos 2\phi + b_4 \cos 4\phi + \dots + b_{2n} \cos 2n\phi]x,$$

буде регулярною тільки при умові  $b_0 + b_2 + b_4 + \dots + b_{2n} \neq 0$ .

Для систем вигляду

$$\frac{d\phi}{dt} = \sin 2\phi, \quad \frac{dx}{dt} = [\cos n\phi]x, \quad (7)$$

встановлено: 1) при значеннях  $n = 2, 6, 10, \dots$  система (7) буде слабо регулярною; 2) при  $n = 4, 8, 12, \dots$  система (7) буде регулярною; 3) при  $n = 1, 3, 5, \dots$  система (7) не має жодної функції Гріна.

Для наступної системи

$$\frac{d\phi}{dt} = \sin 3\phi, \quad \frac{dx}{dt} = [\cos n\phi]x, \quad (8)$$

встановлено: 1) при значеннях  $n = 3, 9, 15, \dots$  система (8) буде слабо регулярною; 2) при  $n = 6, 12, 18, \dots$  система (8) буде регулярною; 3) при  $n = 1$  система (8) не має жодної функції Гріна, а спряжена до неї

$$\frac{d\phi}{dt} = \sin 3\phi, \quad \frac{dy}{dt} = [-\cos \phi]y$$

є слабо регулярною; 4) при  $n = 2, 4, 5, \dots$  питання регулярності системи (8) залишається відкритим.

Якщо система (1) є слабо регулярною, то її завжди можна доповнити новими рівняннями так, щоб розширена система становилася регулярною. Це можна зробити наступним чином:

$$\frac{d\phi}{dt} = a(\phi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\phi)x, \quad \frac{dy}{dt} = B(\phi)x - A^T(\phi)y, \quad (9)$$

де  $B(\phi)$  — будь-яка додатно визначена  $n \times n$ -вимірна матриця. При цьому похідна в силу системи (9) невідродженої квадратичної форми

$$V = p \langle x, y \rangle + \langle S(\phi)y, y \rangle$$

при достатньо великих значеннях параметра  $p > 0$  буде додатно визначеною.

Проводячи ряд узагальнень методу доповнень, отримано наступні твердження.

**Теорема 2.** Нехай система (1) така, що існують три  $n \times n$ -вимірні, симетричні матриці  $S_j(\phi) \in C^1(T_m)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , які задовольняють наступні нерівності

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[ \frac{\partial S_1(\phi)}{\partial \phi} a(\phi) + S_1(\phi)A(\phi) + A^T(\phi)S_1(\phi) \right] x, x \right\rangle \geq \|C_1(\phi)x\|^2, \\ & \left\langle \left[ \frac{\partial S_2(\phi)}{\partial \phi} a(\phi) + S_2(\phi)A(\phi) + A^T(\phi)S_2(\phi) \right] \times \right. \\ & \quad \left. \times (C_2(\phi) + C_3(\phi))x, (C_2(\phi) + C_3(\phi))x \right\rangle \geq \|C_2(\phi)x\|^2 \\ & \left\langle \left[ \frac{\partial S_3(\phi)}{\partial \phi} a(\phi) + S_3(\phi)A(\phi) + A^T(\phi)S_3(\phi) \right] C_3(\phi)x, C_3(\phi)x \right\rangle \geq \|C_3(\phi)x\|^2, \end{aligned}$$

при деяких неперервних матрицях  $C_1(\phi)$ ,  $C_2(\phi)$ ,  $C_3(\phi) \in C^0(T_m)$ , сума

яких  $C(\phi) = C_1(\phi) + C_2(\phi) + C_3(\phi)$  має наступні властивості:

$$\det C(\phi) \neq 0 \quad \forall \phi \in T_m, \quad C(\phi)C_1(\phi) \equiv C_1(\phi)C(\phi).$$

Тоді похідна квадратичної форми

$$V = p_1 \langle S_1(\phi)x, x \rangle + p_2 \langle S_2(\phi)x, x \rangle + p_3 \langle S_3(\phi)x, x \rangle$$

в силу системи (1) при деяких дійсних значеннях параметрів  $p_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , буде додатно визначеною.

**Теорема 3.** Нехай існують  $n \times n$ -вимірні, симетричні матриці  $S_i(\phi) \in C'(T_m; a)$ ,  $i = \overline{1, k}$  які задовольняють нерівностям

$$\begin{aligned} & \left\langle \left( \dot{S}_i(\phi) + S_i(\phi)A(\phi) + A^T(\phi)S_i(\phi) \right) M_i(\phi)x, M_i(\phi)x \right\rangle \geq \\ & \geq \left\| [M_i(\phi) - M_{i+1}(\phi)]x \right\|^2, i = \overline{1, (k-1)} \end{aligned}$$

$$\left\langle \left( \dot{S}_k(\phi) + S_k(\phi)A(\phi) + A^T(\phi)S_k(\phi) \right) M_k(\phi)x, M_k(\phi)x \right\rangle \geq \|M_k(\phi)x\|^2$$

з деякими матрицями  $M_i(\phi) \in C^0(T_m)$ ,  $i = \overline{1, k}$ , причому перша з матриць  $M_1(\phi)$ , є невиродженою. Тоді похідна в силу системи (1) квадратичної форми з параметрами  $V = \lambda_1 \langle S_1(\phi)x, x \rangle + \dots + \lambda_k \langle S_k(\phi)x, x \rangle$  буде додатно визначеною при достатньо великих дійсних значеннях параметрів  $\lambda_j$

### Список літератури

- Кулик, В. Л. (2015). Конструкції функцій Ляпунова в теорії регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі. *Укр. мат. журн.*, 67 (10), 1348—1355.
- Кулик, В. Л., Кулик, А. Н., Степаненко, Н. В. (2011). Дополнение слабо регулярных линейных расширений динамических систем до регулярных. *Математический журнал, Алматы*, 11 (1 (39)), 74—86.
- Кулик, В. Л., Степаненко, Н. В. (2007). Знакозмінні функції Ляпунова в теорії лінійних розширень динамічних систем на торі. *Укр. мат. журн.*, 46 (4), 488—500.
- Митропольский, Ю. А., Самойленко, А. М., Кулик, В. Л. (1990). *Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова*. Киев: Наукова думка.
- Самойленко, А. М. (1987). *Элементы математической теории многочастотных колебаний*. Москва: Наука.

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Л. И. Кусик

*Одесский национальный морской университет,*

*Одесса, Украина*

[ludakusik@mail.ru](mailto:ludakusik@mail.ru)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = f(t, y, y'), \quad (1)$$

где  $f: [a, \omega[ \times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow R$  — непрерывная функция,  $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ,  $\Delta_{Y_i}$  ( $i \in \{0, 1\}$ ) — односторонняя окрестность  $Y_i$ ,  $Y_i$  ( $i \in \{0, 1\}$ ) равно либо 0, либо  $\pm\infty$ . При этом также предполагается, что числа  $\mu_i$  ( $i = 0, 1$ ), определяемые равенством

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{если либо } Y_i = +\infty, \text{ либо } Y_i = 0 \text{ и } \Delta_{Y_i} \text{ — правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если либо } Y_i = -\infty, \text{ либо } Y_i = 0 \text{ и } \Delta_{Y_i} \text{ — левая окрестность } 0, \end{cases}$$

таковы, что

$$\mu_0 \mu_1 > 0 \text{ при } Y_0 = \pm\infty \text{ и } \mu_0 \mu_1 < 0 \text{ при } Y_0 = 0. \quad (2)$$

Условия (2) являются необходимыми для существования у уравнения (1) решений, определенных в левой окрестности  $\omega$ , каждое из которых удовлетворяет условиям

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1). \quad (3)$$

Уравнение (1) рассмотрим на классе  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$  — решений.

**Определение 1.** Решение  $y$  уравнения (1), заданное на промежутке  $[t_0, \omega[ \subset [a, \omega[$ , называется  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -решением, где  $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$ , если для него наряду с (3) соблюдается условие

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0.$$

В данной заметке коснемся вопроса существования и поведения  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -решений дифференциального уравнения (1), когда  $\lambda_0 = 0$ , т.е. в случае, когда само решение является медленно меняющейся (Определение и свойства правильно меняющихся функций даны в Сенета (1985)), а его производная правильно меняющейся функцией ненулевого порядка при  $t \uparrow \omega$ .

Полагая,

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases}$$

введем следующее

**Определение 2.** Будем говорить, что функция  $f$  удовлетворяет условию  $(RN)_0$ , если существуют число  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ , непрерывная функция  $p: [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  и непрерывные правильно меняющиеся при  $z \rightarrow Y_i$  ( $i = 0, 1$ ) функции

$\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $i = 0, 1$ ) порядков  $\sigma_i$  ( $i = 0, 1$ ), такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций  $z_i : [t_0, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_i}$  ( $i = 0, 1$ ) ( $t_0 \in [a, \omega[$ ), удовлетворяющих условиям

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_i(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad (4)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z_0(t)}{z_0(t)} = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z_1(t)}{z_1(t)} = -1, \quad (5)$$

имеет место представление

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \alpha_0 p(t) \varphi_0(z_0(t)) \varphi_1(z_1(t)) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (6)$$

Отметим, что при выполнении условия  $(RN)_0$  знак второй производной любого  $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ -решения уравнения (1) в некоторой левой окрестности  $\omega$  совпадает с  $\alpha_0$ . Поэтому с учетом (2) имеем

$$\alpha_0 \mu_1 > 0 \quad \text{при } Y_0 = \pm\infty \quad \text{и} \quad \alpha_0 \mu_1 < 0 \quad \text{при } Y_0 = 0. \quad (7)$$

**Определение 3.** Будем говорить, что непрерывная правильно меняющаяся функция  $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $i \in \{0, 1\}$ ) порядка  $\sigma_i$  удовлетворяет условию  $S$ , если для любой непрерывно дифференцируемой медленно меняющейся функции  $l : \Delta_{Y_i} \rightarrow ]0, +\infty[$  имеет место асимптотическое соотношение

$$L_i(zl(z)) = L_i(z) [1 + o(1)] \quad \text{при } z \rightarrow Y_i \quad (z \in \Delta_{Y_i}).$$

На основании результатов работы Кусик (2012) сделаем выводы об асимптотике в окрестности особой точки  $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ -решений дифференциального уравнения вида

$$y'' = \frac{\sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t) \varphi_{k0}(y) \varphi_{k1}(y')}{\sum_{k=m+1}^{m+n} \alpha_k p_k(t) \varphi_{k0}(y) \varphi_{k1}(y')}, \quad (8)$$

где  $\alpha_k \in \{-1, 1\}$  ( $k = \overline{1, \dots, m+n}$ ),  $p_k : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $k = \overline{1, \dots, m+n}$ ) — непрерывные функции,  $\varphi_{ki} : \Delta_{Y_i} \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $k = \overline{1, \dots, m+n}; i = 0, 1$ ) — непрерывные правильно меняющиеся при  $z \rightarrow Y_i$  ( $i = 0, 1$ ) функции порядков  $\sigma_{ki}$ .

Предположим, что в случае  $\lambda_0 = 0$  для некоторых  $i \in \{1, \dots, m\}$  и  $j \in \{m+1, \dots, m+n\}$  соблюдаются неравенства

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \left[ \frac{\ln p_k(t) - \ln p_i(t)}{|\ln |\pi_\omega(t)||} \right] < \beta [\sigma_{i1} - \sigma_{k1}] \quad \text{при } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\},$$

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \left[ \frac{\ln p_k(t) - \ln p_i(t)}{|\ln |\pi_\omega(t)||} \right] < \beta [\sigma_{j1} - \sigma_{k1}] \quad \text{при } k \in \{m+1, \dots, m+n\} \setminus \{j\}, \quad (9)$$

где

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Тогда  $i$ -ое и  $j$ -ое слагаемые соответственно числителя и знаменателя правой части уравнения (8) являются главными и функция

$$f(t, y, y') = \frac{\sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t) \varphi_{k0}(y) \varphi_{k1}(y')}{\sum_{k=m+1}^{m+n} \alpha_k p_k(t) \varphi_{k0}(y) \varphi_{k1}(y')}$$

удовлетворяет условию  $(RN)_0$ , так как для любых непрерывно дифференцируемых функций  $z_s : [a, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_s}$  ( $s = 0, 1$ ), удовлетворяющих условиям (4) и (5), имеет место при  $t \uparrow \omega$  представление (6), где

$$\alpha_0 = \alpha_i \alpha_j, \quad p(t) = \frac{p_i(t)}{p_j(t)}, \quad \varphi_0(z) = \frac{\varphi_{i0}(z)}{\varphi_{j0}(z)}, \quad \varphi_1(z) = \frac{\varphi_{i1}(z)}{\varphi_{j1}(z)}.$$

Здесь  $\varphi_k$  ( $k = 0, 1$ ) — правильно меняющиеся при  $z \rightarrow Y_k$  функции порядков  $\sigma_k = \sigma_{ik} - \sigma_{jk}$  ( $k = 0, 1$ ). Введем функции  $I_{0ij}$ ,  $I_{00ij}$ , полагая

$$I_{0ij}(t) = \int_{A_{0ij}}^t \frac{p_i(\tau)}{p_j(\tau)} d\tau, \quad I_{00ij}(t) = \int_{A_{00ij}}^t \left( \frac{L_{i1} \left( \mu_1 | I_{0ij}(\tau) |^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}} \right)}{L_{j1} \left( \mu_1 | I_{0ij}(\tau) |^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}} \right)} \right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau$$

где пределы интегрирования  $A_{0ij} \in \{a; \omega\}$ ,  $A_{00ij} \in \{a_0; \omega\}$  ( $a_0 \in [a, \omega[$ ) и выбраны так, чтобы интегралы  $I_{0ij}$ ,  $I_{00ij}$  стремились либо к нулю, либо к  $\pm \infty$  при  $t \uparrow \omega$ .

**Теорема 1.** Пусть для некоторых  $i \in \{1, \dots, m\}$  и  $j \in \{m+1, \dots, m+n\}$  соблюдаются неравенства  $\sigma_{i0} - \sigma_{j0} + \sigma_{i1} - \sigma_{j1} \neq 1$ ,  $\sigma_{i1} - \sigma_{j1} \neq 1$  и условия (9), функция  $\frac{\varphi_{i1}}{\varphi_{j1}}$  удовлетворяет условию  $S$ . Тогда для существования у дифференциального уравнения (8)  $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ -решения, для которого существует

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)},$$

необходимо и достаточно, чтобы соблюдались знаковые условия (2), (7) и при  $t \in ]a, \omega[$

$$\begin{aligned} & \alpha_i \alpha_j \mu_1 (1 - \sigma_{i1} - \sigma_{j1}) I_{0ij}(t) > 0, \\ & \mu_0 \mu_1 (1 - \sigma_{i1} + \sigma_{j1}) (1 - \sigma_{i0} + \sigma_{j0} - \sigma_{i1} + \sigma_{j1}) I_{00ij}(t) > 0, \\ & \mu_0 \lim_{t \uparrow \omega} | I_{00ij}(t) |^{\frac{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}} = Y_0, \quad \mu_1 \lim_{t \uparrow \omega} | I_0(t) |^{\frac{1}{1-\sigma_1}} = Y_1, \\ & \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I'_{0ij}(t)}{I_{0ij}(t)} = \sigma_{i1} - \sigma_{j1} - 1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I'_{00ij}(t)}{I_{00ij}(t)} = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I''_{00ij}(t)}{I'_{00ij}(t)} = -1. \end{aligned}$$

Более того, для каждого такого решения при  $t \uparrow \omega$  имеют место асимптотические представления

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}} \varphi_{j0}(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))} = \alpha_{i0} \alpha_{j0} \mu_1 (1-\sigma_{i1} + \sigma_{j1}) I_{0ij}(t) \frac{L_{i1} \left( \mu_1 |I_{0ij}(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}} \right)}{L_{j1} \left( \mu_1 |I_{0ij}(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}} \right)} [1+o(1)],$$

$$\frac{y(t) \left( \varphi_{j0}(y(t)) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}}{\left( \varphi_{i0}(y(t)) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}} = \mu_1 |1-\sigma_{i1} + \sigma_{j1}|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}} \times \frac{1-\sigma_{i0} + \sigma_{j0} - \sigma_{i1} + \sigma_{j1}}{1-\sigma_{i1} + \sigma_{j1}} I_{00ij}(t) [1+o(1)],$$

причем таких решений существует при  $\omega = +\infty$  существует двухпараметрическое семейство, если  $\sigma_{i1} - \sigma_{j1} > 1$  и  $\mu_0 \mu_1 (1 - \sigma_{i0} + \sigma_{j0} - \sigma_{i1} + \sigma_{j1}) < 0$  и однопараметрическое семейство, если  $\mu_0 \mu_1 (1 - \sigma_{i0} + \sigma_{j0} - \sigma_{i1} + \sigma_{j1}) > 0$ , а при  $\omega < +\infty$  — двухпараметрическое семейство, если  $\sigma_{i1} - \sigma_{j1} < 1$  и  $\mu_0 \mu_1 (1 - \sigma_{i0} + \sigma_{j0} - \sigma_{i1} + \sigma_{j1}) > 0$  и однопараметрическое семейство, если  $\mu_0 \mu_1 (1 - \sigma_{i0} + \sigma_{j0} - \sigma_{i1} + \sigma_{j1}) < 0$ .

### Список литературы

- Кусик, Л. И. (2012). Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. *Вісник Одеського нац. ун-ту. Матем. і механ.*, 17 (1—2), 80—97.
- Сенета, Е. (1985). *Правильно меняющиеся функции*. Москва: Наука.



# ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В. А. Літовченко, Г. М. Унгурян

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,  
Чернівці, Україна

[vladlit4@mail.ru](mailto:vladlit4@mail.ru), [galuna\\_unguryan@ukr.net](mailto:galuna_unguryan@ukr.net)

Цікавий підхід до розширення класу параболічних за Шиловим систем запропонував Житомирський (1959), означивши новий клас параболічно стійких систем до зміни молодших коефіцієнтів, які він назвав параболічними системами типу Шилова зі змінними коефіцієнтами. Цей клас гармонічно доповнює клас Петровського систем зі змінними коефіцієнтами і повністю охоплює клас параболічних за Шиловим систем.

Параболічні системи типу Шилова порядку  $p$  мають структуру

$$\begin{aligned} \partial_t u(t; x) &= \{P_0(t; i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x)\}u(t; x), \\ (t; x) &\in \Pi_{(0; T]} = \{t \in (0; T], x \in \mathbb{R}^n\}, \end{aligned} \quad (1)$$

у якій  $u := \text{col}(u_1, \dots, u_m)$ , а  $P_0(t; i\partial_x)$  і  $P_1(t, x; i\partial_x)$  — матричні диференціальні вирази порядків відповідно  $p$  і  $p_1$ , коефіцієнти яких можуть залежати від часу  $t$ , а у  $P_1$  — ще й від просторової змінної  $x$ . При цьому система

$$\partial_t u(t; x) = P_0(t; i\partial_x)u(t; x), \quad (t; x) \in \Pi_{(0; T]}, \quad (2)$$

є параболічною за Шиловим з показником параболічності  $h$ ,  $0 < h \leq p$ , родом  $\mu$  та зведеним порядком  $p_0$ , а  $p_1$  задовольняє наступні умови:

$$\begin{aligned} (A_1) \quad & 0 \leq p_1 < h - n \left( 1 - \frac{h\mu}{p_0} \right) - (m-1)(p-h), \quad 0 \leq \mu; \\ (A_2) \quad & 0 \leq p_1 < h - n(1-\mu) - (m-1)(p-h), \quad \mu < 0. \end{aligned}$$

Для систем (1) Я. І. Житомирський у випадку, коли коефіцієнти диференціального виразу  $P_0$  є сталими, а коефіцієнти виразу  $P_1$  є обмеженими і залежними лише від  $x$  диференційовними до певного порядку функціями, методом послідовних наближень установив коректну розв'язність задачі Коші у класі гладких обмежених початкових функцій.

Подальше дослідження задачі Коші для параболічних систем типу Шилова зі змінними коефіцієнтами потребувало побудови фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) та всебічного його вивчення.

Для систем (1) з невід'ємним родом  $\mu$  та обмеженими неперервними за  $t$  і нескінченно диференційовними за  $x$  коефіцієнтами в роботі Літовченко, Довжицька (2010) побудовано ФРЗК та досліджено його основні властивості. Ці результати дозволили в роботах Litovchenko, Dovzhytska (2012); Литовченко,

Довжицкая (2014); Довжицька (2014) розвинути теорію задачі Коші для таких систем у просторах типу  $S$  Гельфанда і Шилова, зокрема, встановити коректну розв'язність задачі Коші з узагальненими початковими даними типу ультра-розподілів Жевре, одержати форму зображення класичних розв'язків з узагальненими граничними значеннями на початковій гіперплощині, дослідити властивості локалізації й стабілізації розв'язків, а також описати множини узагальнених початкових функцій, для яких відповідні розв'язки є елементами простору  $S$  Шварца, або того чи іншого простору типу  $S$  Гельфанда і Шилова.

У поданій роботі продовжується дослідження систем (2) при  $\mu \geq 0$  з коефіцієнтами вже обмеженої гладкості. При цьому, з'ясовуються умови мінімальної гладкості коефіцієнтів стосовно змінної  $x$ , за яких існує класичний ФРЗК, здійснюється побудова цього розв'язку та досліджуються його основні властивості.

Тут розглядатимемо лише системи (1) з  $\mu \geq 0$ , у яких диференціальні вирази  $P_0$  і  $P_1$  мають структуру

$$P_0(t; i\partial_x) = \left( P_0^{lj}(t; i\partial_x) := \sum_{|k|_+ \leq P} a_{0,k}^{lj}(t) i^{|k|_+} \partial_x^k \right)_{l,j=1}^m,$$

$$P_1(t, x; i\partial_x) = \left( P_1^{lj}(t, x; i\partial_x) := \sum_{|k|_+ \leq P_1} a_{1,k}^{lj}(t; x) i^{|k|_+} \partial_x^k \right)_{l,j=1}^m$$

і для яких окрім умови  $(A_1)$  виконується ще така:

- (B) коефіцієнти  $a_{0,k}^{lj}(t)$ ,  $a_{1,k}^{lj}(t; x)$  є неперервними за змінною  $t$  рівномірно стосовно  $x$ , диференційовними за змінною  $x$  до порядку  $\alpha_*$  включно й обмеженими разом зі своїми похідними комплекснозначними функціями в шарі  $\Pi_{[0;T]}$ .

Прикладом системи (1) при  $m = n = 1$ , для якої виконуються умови  $(A_1)$  і (B) з  $\alpha_* = 3$  є рівняння

$$\partial_t u(t; x) = \left\{ t^2 \partial_x^3 + \partial_x^2 - \sqrt{t} \partial_x + \frac{t \sqrt[3]{x^{10}}}{(1+x^2)^2} \right\} u(t; x), t \in (0; T], x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Відповідним параболічним за Шиловим рівнянням є

$$\partial_t u(t; x) = \left\{ t^2 \partial_x^3 + \partial_x^2 - \sqrt{t} \partial_x \right\} u(t; x), t \in (0; T], x \in \mathbb{R},$$

для якого  $p = p_0 = 3$ ,  $h = 2$ , а  $\mu \geq 0$ .

Зазначимо, що рівняння (3) не відноситься до класу рівнянь, параболічних за Петровським, ні до класу рівнянь, параболічних за Шиловим.

**Означення.** ФРЗК для системи (1) назвемо матричну функцію  $Z(t, x; \tau, \xi)$  розмірності  $m \times m$ , визначену для всіх  $(t; x) \in \Pi_{(\tau; T]}$  і залежну від параметричної точки  $(\tau; \xi) \in \Pi_{[0; T)}$  таку, що

- 1)  $Z$  як функція  $(t; x)$  задовольняє систему (1) в шарі  $\Pi_{(\tau; T]}$ ,  $\tau \in [0; T)$ ;
- 2) виконуються граничне співвідношення

$$Z(t, x; \tau, \cdot) \xrightarrow{t \rightarrow \tau+0} \delta(\cdot - x)I$$

у розумінні слабкої збіжності в просторі  $S'$  розподілів Шварца (тут  $I$  — одинична матриця порядку  $m$ , а  $\delta(\cdot)$  — дельта-функція Дірака).

ФРЗК для системи (1) будується у вигляді

$$Z(t, x; \tau, \xi) = G(t, \tau; x - \xi) + \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G(t, \beta; x - y) \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy, \quad (4)$$

де  $G$  — ФРЗК для системи (2), а  $\Phi$  — деяка матрична функція розмірності  $m \times m$  така, що матриця  $Z(t, x; \tau, \xi)$  є розв'язком системи (1) стосовно змінних  $t$  і  $x$ . Для знаходження матриці  $\Phi$  одержується відповідне інтегральне рівняння

$$\Phi(t, x; \tau, \xi) = K_1(t, x; \tau, \xi) + \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t, x; \beta, y) \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy,$$

в якому

$$K_1(t, x; \tau, \xi) := P_1(t, x; i\partial_x)G(\tau, \xi; x - \xi).$$

Тоді, згідно з методом послідовних наближень,

$$\Phi(t, x; \tau, \xi) = \sum_{l=1}^{\infty} K_l(t, x; \tau, \xi),$$

де

$$K_l(t, x; \tau, \xi) := \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t, x; \beta, y) K_{l-1}(\beta, y; \tau, \xi) dy, \quad l > 1.$$

Правильна така

**Теорема.** Нехай для системи (1) виконуються умови  $(A_1)$  і  $(B)$ . Тоді, при  $\alpha_* \geq p - p_1$  і  $\alpha_* > n + \gamma$ , а у випадку, коли  $p_1 \geq h(1 - \alpha)$ , то при  $\alpha_* \geq p - p_1$  матрична функція  $Z$ , що визначається рівністю (4), є ФРЗК для цієї системи. При цьому, для відповідних похідних функції  $Z$  виконуються такі оцінки:

$$\left| \partial_x^q Z(t, x; \tau, \xi) \right| \leq c(t - \tau)^{-\frac{n+|q|+\gamma}{h}} e^{-\delta \left( \frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad |q| \leq \alpha_* + p_1;$$

$$|\partial_t Z(t, x; \tau, \xi)| \leq c(t - \tau)^{-\frac{n+p+\gamma}{h}} e^{-\delta \left( \frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

де  $\gamma := (p - h)(m - 1)$ ,  $\alpha := \frac{\mu}{p_0}$ ,  $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq \tau < t \leq T$ , а оціночні сталі  $c$  і  $\delta$  не залежать від  $t$ ,  $\tau$ ,  $x$  і  $\xi$ .

### Список літератури

- Litovchenko, V. A., Dovzhytska, I. M. (2012). Cauchy problem for a class parabolic systems of Shilov type with variable coefficients. *Cent. Eur. J. Math.*, 10 (3), 1084—1102.
- Довжицька, І. М. (2014). Задача Коші для параболічних систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами та невід'ємним родом. *Автореферат дис. ... к. фіз.-мат. наук: 01.01.02*. Чернівці.
- Житомирский, Я. И. (1959). Задача Коши для некоторых типов параболических по Г. Е. Шиллову систем линейных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, 23, 925—932.
- Литовченко, В. А., Довжицька, І. М. (2014). Стабілізація рішень параболических систем типу Шилова с неотрицательным родом. *Сиб. мат. журн.*, 55 (2), 341—349.
- Літовченко, В. А., Довжицька, І. М. (2010). Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами. *Укр. мат. вісник*, 7 (4), 516—552.

# ПРО ЗАДАЧУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ У ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА

В. М. Лось

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ,  
Чернігівський національний технологічний університет, Чернігів, Україна  
[v\\_los@yahoo.com](mailto:v_los@yahoo.com)

У доповіді обговорюється застосування деяких анізотропних просторів Хермандера у теорії параболічних диференціальних рівнянь на прикладі початково-крайової задачі Діріхле для лінійного параболічного рівняння другого порядку (Лось, Мурач, 2015; Лось, 2016).

Регулярність функцій, що утворюють ці простори Хермандера, характеризується парою дійсних числових параметрів  $s$  і  $s/2$  та довільною неперервною функцією  $\varphi : [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ , повільно змінною на  $+\infty$  за Й. Караматою. Остання властивість означає, що  $\varphi(\lambda t) / \varphi(t) \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Функціональний параметр  $\varphi$  дозволяє більш тонко охарактеризувати регулярність функцій, ніж це дозволяє зробити соболевська шкала.

Нехай  $s \in \mathbb{R}$ . За означенням, гільбертів простір Хермандера  $H^{s,s/2,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$  складається з усіх повільно зростаючих розподілів  $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$  таких, що

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^s \varphi^2((1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{1/2}) |(\mathcal{F}w)(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta < \infty.$$

Тут  $\mathcal{F}w$  є перетворення Фур'є розподілу  $w$ , а  $\xi \in \mathbb{R}^n$  і  $\eta \in \mathbb{R}$  є частотними змінними, дуальними до просторової і часової змінних відповідно. В окремому випадку  $\varphi \equiv 1$  простір  $H^{s,s/2,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$  стає анізотропним простором Соболева

$$H^{s,s/2}(\mathbb{R}^{n+1}) = H^{s,s/2,1}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Простір  $H^{s,s/2,\varphi}(\Omega)$  в області  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  складається зі звужень в  $\Omega$  всіх  $w \in H^{s,s/2,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ .

Нехай  $G$  — обмежена область в  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) з межею  $\Gamma \in C^\infty$ . У скінченному циліндрі  $\Omega = G \times (0, \tau)$  розглянемо початково-крайову задачу

$$\begin{aligned} A(x, t, D_x, \partial_t) u(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in \Omega, \\ u(x, t) &= g(x, t), & (x, t) \in S := \Gamma \times (0, \tau), \\ u(x, 0) &= h(x), & x \in G. \end{aligned}$$

Тут  $A := A(x, t, D_x, \partial_t)$  — лінійний параболічний диференціальний оператор другого порядку з нескінченно-гладкими комплексними коефіцієнтами, заданими на  $\overline{\Omega}$ .

Пов'яжемо з цією задачею відображення  $C^\infty(\bar{\Omega}) \ni u \mapsto (f, g, h)$ .

**Теорема 1** (про ізоморфізми). *Для кожного  $s \geq 2$  це відображення продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму між простором  $H^{s,s/2,\varphi}(\Omega)$  і деяким гільбертовим простором  $\mathcal{Q}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$  правих частин задачі, що задовольняють умови узгодження.*

З цієї теореми випливає, що для кожної вектор-функції  $(f, g, h)$  із соболевського простору  $\mathcal{Q}^{0,0}$  задача має єдиний розв'язок  $u \in H^{2,1}(\Omega)$ . Таку функцію  $u$  називаємо узагальненим розв'язком цієї задачі із правою частиною  $(f, g, h) \in \mathcal{Q}^{0,0}$ .

Як застосування теореми про ізоморфізми дамо достатню умову того, що узагальнений розв'язок задачі є класичним.

Позначимо

$$H_{\text{loc}}^{s,s/2,\varphi}(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) : \chi f \in H^{s,s/2,\varphi}(\Omega) \quad \text{для всіх} \quad \chi \in C_0^\infty(\Omega)\}.$$

**Теорема 2** (про класичність розв'язку). *Нехай функція  $u \in H^{2,1}(\Omega)$  є узагальненим розв'язком задачі, праві частини якої задовольняють умови*

$$\begin{aligned} f &\in H_{\text{loc}}^{1+n/2,1/2+n/4,\varphi}(\Omega), \\ (f, g, h) &\in \mathcal{Q}^{-1+n/2,-1/2+n/4,\varphi} \end{aligned}$$

для деякого функціонального параметра  $\varphi$  такого, що

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r\varphi^2(r)} < \infty.$$

Тоді  $u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , тобто  $u$  є класичним розв'язком задачі.

Відмітимо, що аналоги цих результатів правильні і для загальних параболических початково-крайових задач для  $2b$ -параболических рівнянь і систем (Los, Mikhailets, Murach, 2015; Лось, Мурач, 2014; Лось, 2014).

### Список літератури

- Лось, В. М., Мурач, О. О. (2015). Теорема про ізоморфізми для деяких параболических початково-крайових задач у просторах Хермандера. *arXiv preprint arXiv:1510.06270*.
- Лось, В. М. (2016). Класичні розв'язки параболических початково-крайових задач і простори Хермандера. *Укр. мат. журн.*, (9), (прийнята до друку).
- Los, V., Mikhailets, V. A., & Murach, A. A. (2015). An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications. *arXiv preprint arXiv:1511.04688*.
- Лось, В. Н., Мурач, А. А. (2014). Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости. *Доп. НАН України*, (6), 23—31.
- Лось, В. М. (2014). Параболическі мішані задачі для систем Петровського в просторах узагальненої гладкості. *Доп. НАН України*, (10), 24—32.

## ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ СУДЕН НА ТИХІЙ ВОДІ З УРАХУВАННЯМ ВАНТАЖУ

Т. О. Лупіна

*Київська державна академія водного транспорту імені гетьмана*

*Петра Конашевича-Сагайдачного, Київ, Україна*

[lupina@i.ua](mailto:lupina@i.ua)

Однією з сучасних вимог до викладання фундаментальних дисциплін є поглиблення їх фахової спрямованості. Такі задачі викликають підвищену зацікавленість студентів і сприяють кращому засвоєнню як даної дисципліни, так і спеціальних дисциплін.

Для студентів спеціальності «Річковий та морський транспорт» при вивченні теоретичної механіки доцільно пропонувати різноманітні задачі зі статички та динаміки плаваючих тіл. До найбільш цікавих задач, на нашу думку, відносяться задачі про качку суден на тихій воді, які демонструють можливості застосування диференціальних рівнянь для отримання важливих практичних результатів, приваблюють своєю простотою та готують студентів до кращого сприйняття матеріалу курсу теорії і будови судна.

Качка судна на тихій воді, яка відбувається після припинення дії деякого початкового збурення, являє собою власні (вільні) коливання (Павловський, 2002; Сизов, 2003; Мирохин, Жинкин, Зильман, 1989).

Зупинимось на випадку бортової качки. Якщо судно, що плаває в стані рівноваги, нахилити за допомогою зовнішніх сил на малий кут  $\theta$  (рис. 1), то на нього буде діяти відновлювальний момент  $M_B = h_0 D \sin \theta$ . Для малих кутів  $\sin \theta \approx \theta$ , тому далі для відновлювального моменту приймемо вираз  $M_B = h_0 D \theta$ .

За умови припинення дії зовнішніх сил судно почне здійснювати вільні коливання. Для отримання рівняння руху, згідно з принципом д'Аламбера (нехтуючи силами опору та моментом сил інерції мас води, що захоплюються судном), потрібно до діючого відновлювального моменту додати момент інерції мас судна.

В результаті отримаємо диференціальне рівняння бортової качки

$$I_{xg} \ddot{\theta} + hD\theta = 0,$$

де  $I_{xg}$  — момент інерції мас судна відносно поздовжньої центральної осі.

Позначивши  $k = \sqrt{Dh_0 / I_{xg}}$  дане рівняння запишемо в канонічному виді:

$$\ddot{\theta} + k^2\theta = 0$$

Таким чином, качка судна на тихій воді описується неповним лінійним однорідним рівнянням другого порядку. Загальний розв'язок цього рівняння є:

$$\theta = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

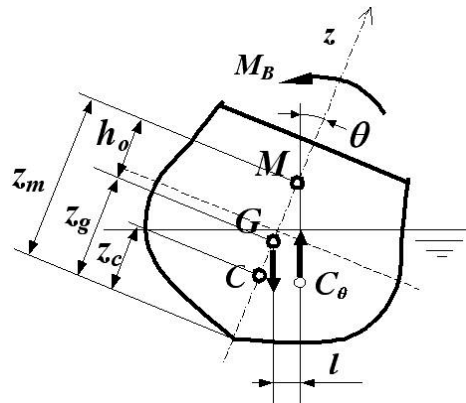


Рис. 1. Схема сил, що діють на нахилене судно:

$M_B$  — відновлювальний момент, що перешкоджає перекиданню судна;

$l$  — плече відновлювального моменту;  $D$  — вага судна;

$z_c$  — апліката центра величини;  $r$  — поперечний метацентричний радіус;

$h_0$  — початкова метацентрична висота як основна характеристика остійності судна;

$z_g$  — апліката центра ваги судна.

Якщо, наприклад, у початковий момент  $t = 0$  судно відхилено від положення рівноваги на  $\theta = \theta_0$  і при цьому початкова швидкість  $\dot{\theta} = 0$ , отримаємо  $C_1 = \theta_0$ ,  $C_2 = 0$ , і качка буде відбуватися за законом  $\theta = \theta_0 \cos kt$ .

Отже, бортова качка судна на тихій воді при відсутності сил опору являє собою гармонійні коливання з амплітудою, що визначається початковими умовами і частотою  $k = \sqrt{Dh_0 / I_{xg}}$ .

Період качки визначається через частоту з відомої залежності  $T_\theta = 2\pi / k$ .

Розглянемо задачу про бортову качку на прикладі сталевого прямокутного понтона розмірами  $L, B, H$ , масою  $m$  без вантажу (рис. 2) та з закріпленим на палубі вантажем у двох варіантах.

1. Вантаж у вигляді залізобетонної колони квадратного поперечного перерізу зі стороною  $a$ , завдовжки  $L$  і завважки  $M$  розташовано вздовж понтона посередині палуби (рис. 3).

2. Вантаж у вигляді двох однакових колон квадратного поперечного перерізу зі стороною  $b$ , завдовжки  $L$  і завважки  $M / 2$  кожна розташовано вздовж понтона біля його бортів (рис. 4).

Необхідні для розв'язку величини знаходимо за наступними формулами:

— осадка понтона  $T = (m + M) / LB\rho_{\text{води}}$ , де  $\rho_{\text{води}}$  — густина води;

— об'єм зануреної частини понтона  $V = LBT$ ;

— апліката центру величини (центру витісненого об'єму води)  $z_c = T / 2$ ;

— момент інерції ватерлінії відносно поздовжньої осі симетрії  $I_x = LB^3 / 12$ ;



— метацентричний радіус  $r = I_x / V$ ;

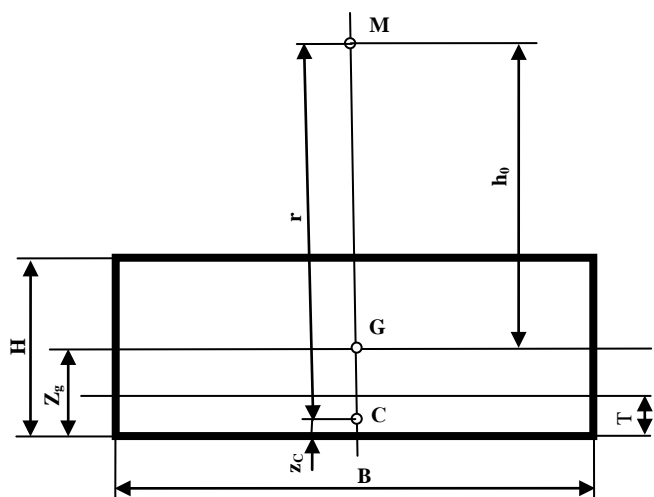


Рис. 2. Розрахункова схема понтона

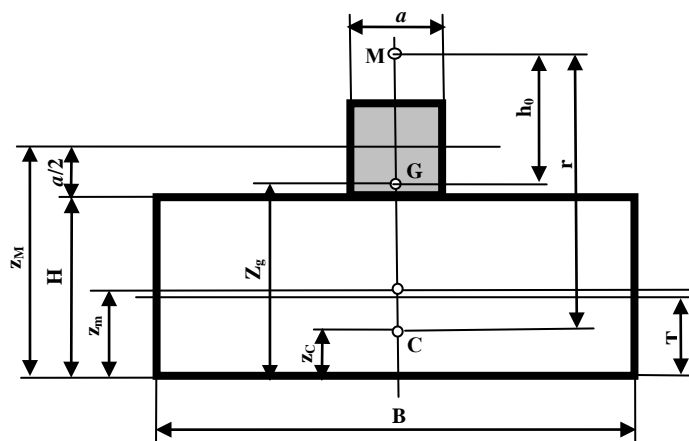


Рис. 3. Розрахункова схема понтона з вантажем (варіант 1)

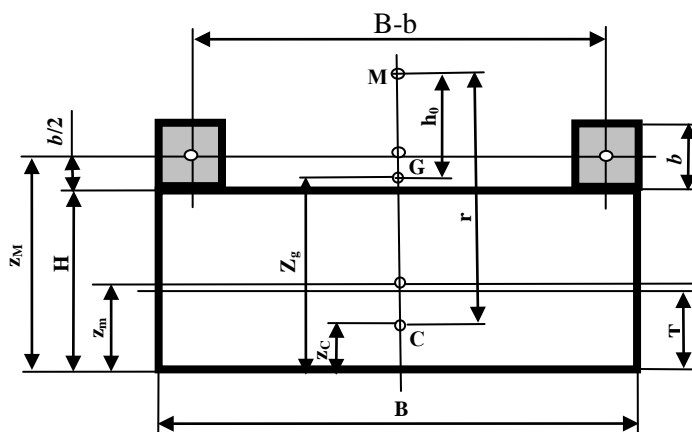


Рис. 4. Розрахункова схема понтона з вантажем (варіант 2)

— апліката центру мас понтона без вантажу  $z_m = H / 2$ ;

— апліката центру мас вантажу (колони)  $z_M = H + a / 2$ ;

— апліката центру мас вантажу (двох колон)  $z_M = H + b / 2$ ;

— апліката центру мас понтона з вантажем

$$z_g = (mz_m + Mz_M) / (m + M);$$

— початкова метацентрична висота  $h_0 = z_C + r_0 - z_g$ ;

— момент інерції колони відносно поздовжньої центральної осі

$$I_{x_{ббрус}} = \rho L \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) dz dy = \frac{\rho L a^4}{6} = \frac{M a^2}{6};$$

— момент інерції двох колон відносно поздовжньої горизонтальної осі, що проходить посередині між осями колон

$$I_{x_{вван}} = M(b^2 / 6 + (B - b)^2 / 4);$$

— момент інерції понтона з вантажем відносно горизонтальної осі, що проходить крізь загальний центр

$$\text{мас } I_{xg} = I_{x_{ппон}} + I_{x_{вван}} + (z_g - z_m)^2 m + (z_M - z_g)^2 M.$$

Прийнявши, наприклад,  $L = 12$  м,  $B = 2,4$  м,  $H = 0,9$  м,  $m = 2740$  кг,  $M = 10000$  кг,  $I_{x_{ппон}} = 2384$  кг·м<sup>2</sup>,  $a = 0,5$  м,  $b = 0,35$  м, знайдемо наступні значення періоду качки: для понтона без вантажу —  $T_0 = 0,86$  с, для понтона з однією колоною  $T_0 = 1,81$  с, і для понтона з двома колонами  $T_0 = 3,46$  с.

Згідно з Сизов (2003, період бортової качки може бути визначений за «капітанською» формулою  $T_0 = CB / \sqrt{h_0}$ , де  $C$  — коефіцієнт, який може змінюватись залежно від типу судна в діапазоні 0,5...0,86. За цією формулою отримуємо:

— для понтона без вантажу  $T_0 = 0.56...0.96$  с;

— для понтона з однією колоною  $T_0 = 2,17...3.72$  с;

— для понтона з двома колонами  $T_0 = 1.98...3.42$  с.

Отримані вище значення періоду бортової качки понтона та понтона з двома колонами, розташованими вздовж бортів, знаходяться в діапазоні значень, отримуваних за «капітанською» формулою.

Для понтона з однією колоною «капітанська» формула дає завищені значення періоду качки. Це можна пояснити як тим, що «капітанська» формула враховує момент сил інерції мас води, що захоплюються судном, так і тим, що в цьому випадку вантаж має малий момент інерції, нехарактерний для судових вантажів.

### Список літератури

Павловський, М. А. (2002). *Теоретична механіка*. Київ: Техніка.

Сизов, В. Г. (2003). *Теорія корабля*. Одеса: Фенікс.

Мирохин, Б. В., Жинкин, В. Б., Зильман, Г. И. (1989). *Теорія корабля*. Ленинград: Судостроение.

# РОЗРИВНІ ЦИКЛИ ОДНІЄЇ ІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ

К. Ю. Мамса, Ю. М. Перестюк

НТУУ «Київський політехнічний інститут»,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ekaterinamamsa@gmail.com, Perestyuk@gmail.com

Розглядається осцилятор під дією імпульсної сили

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad \dot{x} \neq 0,$$

$$\Delta \dot{x} |_{\dot{x}=0} = \alpha x, \quad \alpha < 0.$$

У лінійному випадку (коли  $\varepsilon = 0$ ) при певному значенні коефіцієнта  $\alpha = \alpha^*$  всі розв'язки такого рівняння є періодичними, а траєкторією кожного з них є двоімпульсний розривний цикл.

Запровадивши змінні  $(a, \varphi)$  за формулами

$$x = a \cos \varphi, \quad \dot{x} = a \left( -\frac{\delta}{2} \cos \varphi + \Omega \sin \varphi \right), \quad \Omega^2 = \omega^2 - \frac{\delta^2}{4},$$

дістаємо систему рівнянь

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\delta}{2} a + \frac{\varepsilon}{\Omega} f \left( a \cos \varphi, a \left( -\frac{\delta}{2} \cos \varphi + \Omega \sin \varphi \right) \right) \sin \varphi,$$

$$\operatorname{tg} \varphi \neq \frac{\delta}{2\Omega}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\Omega + \frac{\varepsilon}{a\Omega} f \left( a \cos \varphi, a \left( -\frac{\delta}{2} \cos \varphi + \Omega \sin \varphi \right) \right) \cos \varphi$$

$$a^+ |_{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2\Omega}} = a \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*}, \quad \varphi^+ |_{\operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta}{2\Omega}} = \varphi + \varphi^* - \varphi_0$$

$$\text{де } \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\delta}{2\Omega}, \quad \varphi^* = \operatorname{arctg} \frac{\alpha^* + \frac{\delta}{2}}{\Omega}.$$

Для цієї системи встановлені достатні умови на функцію  $f(x, \dot{x})$ , що забезпечують при малих значеннях параметра  $\varepsilon$  існування в ній єдиного асимптотично стійкого двоімпульсного розривного циклу.

## Список літератури

Perestyuk, Yu. (2013). Discontinuous oscillations in one impulsive system. *Journal of Mathematical Sciences*, 194 (4).

Samoilenko, A. M., & Perestyuk, N. A. (1995). *Impulsive Differential Equations*. Singapore: World Scientific.

Боголюбов, Н. Н., Митропольский, Ю. А. (1974). *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. Москва: Наука.

**ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕХНІЧНОЇ СТІЙКОСТІ ЗА МІРОЮ  
ДИНАМІЧНИХ СТАНІВ НЕСТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ  
АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ ЗМІННОЇ СТРУКТУРИ  
З РОЗРИВНИМИ ФУНКЦІЯМИ РЕГУЛЮВАННЯ**

**К. С. Матвійчук**

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ,  
Україна [model@inmech.kiev.ua](mailto:model@inmech.kiev.ua)*

Робота присвячена побудові достатніх умов технічної стійкості за мірою динамічних станів нестационарних систем автоматичного керування зі змінною структурою, в яких, з метою досягання високоякісного процесу регулювання, використовуються закомутовані внутрішнім зворотним зв'язком підсистеми фільтрування сигналів керування. Такі системи функціонують суміжно з формуючими та з виконавчими ланками процесу керування. Нестационарні параметри досліджуваного процесу змінюються в заданих діапазонах і з обмеженою швидкістю, за підхоже вибраних параметрах законів керування, з регулюванням по сигналу розбалансування, його похідних скінченного порядку і по всіх змінних параметрах заданих підсистем фільтрування керуючих сигналів. Рух заданої системи зі змінною структурою характеризується рівняннями вигляду (Матвійчук, 1999; 2006; Matviychuk, 2001).

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt_i} = x_{i+1}, i = \overline{1, n-1}; \frac{dx_n}{dt} = & - \sum_{i=1}^{n-1} \left( a_i(t) - b_m(t) A_{m-1, m-1} \Psi_i^x \right) x_i - \\ & - a_n(t) x_n - \sum_{j=1}^{m-2} \left( \sum_{i=j}^{m-1} b_{i+1}(t) A_{j,i} - b_m(t) A_{m-1, m-1} \Psi_{m-1-j}^z \right) z_{m-1-j} - \\ & - \left( \sum_{i=j}^{m-1} b_{i+1}(t) A_{0,i} + b_1(t) - b_m(t) A_{m-1, m-1} \Psi_{m-1-j}^z \right) z_{m-1} \\ \frac{dz_j}{dt} = & \frac{1}{T_j} (z_{j-1} - z_j), j = \overline{1, m-1}; T \subset I; \\ v = & - \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_i^x x_i - \sum_{j=1}^{m-1} \Psi_j^z z_j. \end{aligned} \quad (2)$$

Позначення тут і далі аналогічні Матвійчук (2006). Покладаємо, що коефіцієнти  $a_i(t), b_j(t)$  змінюються з обмеженою швидкістю в заданих діапазонах області

$$\begin{aligned} \Gamma = \{ a_i(t), \frac{da_i(t)}{dt}, b_j(t), \frac{db_j(t)}{dt} : a_{i, \min} \leq a_i(t) \leq a_{i, \max}, 0 \leq \frac{da_i(t)}{dt} \leq \\ \leq \bar{a}_{i, \max}; b_{i, \min} \leq b_j(t) \leq b_{j, \max}, 0 \leq \frac{db_i(t)}{dt} \leq \bar{b}_{j, \max}; i = \overline{1, n}; \end{aligned}$$

$$j = \overline{1, m}; a_{i, \min}, a_{i, \max}, b_{j, \min}, b_{j, \max} = \text{const}; \bar{a}_{i, \max}, \bar{b}_{j, \max} = \text{const} > 0\}. \quad (3)$$

Нехай задані закони зміни на гіперплощині  $S(s = 0)$  коефіцієнтів  $\Psi_i^x, \Psi_j^z$  наступного змісту

$$\Psi_i^x = 2^{-1} \left\{ \alpha_i^x [1 + \text{sign}(x_i s)] + \beta_i^x [1 - \text{sign}(x_i s)] \right\}, i = \overline{1, n-1}; \quad (4)$$

$$\Psi_j^z = 2^{-1} \left\{ \alpha_j^z [1 + \text{sign}(z_j s)] + \beta_j^z [1 - \text{sign}(z_j s)] \right\}, j = \overline{1, m-1}; \quad (5)$$

$$s(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i, c_i = \text{const}, c_n = 1. \quad (6)$$

Вектор фазової швидкості цієї системи на гіперплощині  $S(s = 0)$  може стрибкоподібно змінити свій напрямок, оскільки його координата  $dx_n / dt$  за припущенням може мати розриви першого роду. Для системи (1)—(6) припускаємо заданими початкові умови:

$$x_i(t_0) = x_i^0 (i = \overline{1, n}); z_j(t_0) = z_j^0 (j = \overline{1, m-1}); \quad (7)$$

де  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, z_1^0, \dots, z_{m-1}^0)$  — точка із заданої області можливих початкових значень  $\Omega_0$ . Задача Коші (1)—(7) розглядається в області

$$T \times D, D = \left\{ x_i, z_j : |x_i| < h_j, |z_j| < k_j, i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m-1} \right\},$$

$$h_i = \text{const} > 0, k_j = \text{const} > 0, x = (x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_{m-1}) \in \mathbb{R}^{n+m-1}.$$

Вважаємо, що (1)—(7) задовольняє достатнім умовам існування розв'язків, які властиві звичайним диференціальним рівнянням, котрі мають розривні праві частини. Позначимо  $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t), z_1(t), \dots, z_{m-1}(t)\}$  розв'язок задачі (1)—(7), припускаючи, що він існує. Використаємо малий параметр  $\mu \in (0, 1)$  за виконанням умов Матвийчук (2006)

$$\begin{aligned} \mu \leq L^{-1}, L = \max \left\{ \sup |\bar{Y}_l(x)|, x \in D, l = \overline{1, n+m-1} \right\}, \bar{Y}_1(x) = x_2, \\ \dots, \bar{Y}_{n-1}(x) = x_n, \bar{Y}_n(x) = f(t, x)|_w, \bar{Y}_{n+1}(x) = z_1, \dots, \bar{Y}_{m+n-1}(x) = z_{m-1}, \\ w \equiv [a_i(t) = a_{i, \min}, b_j(t) = b_{j, \min}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Нехай задані міра  $\rho(x)$ , інтервали  $T_h$ , області  $\Omega_0, \Omega(t)$  можливих початкових і поточних станів нестационарної системи (1)—(7) аналогічно Матвийчук (2006).

Ставиться задача: за заданим законом керування (2), (4)—(6) визначити умови, які забезпечують виконання за мірою

$$\rho = \rho(x) \equiv \sum_{i=1}^N x_i^2, (N = n + m - 1)$$

властивість  $x(t) \in \Omega(t), t \in T$ , для розв'язків нестационарної задачі Коші (1)—(7), що характеризує рух заданої системи автоматичного керування змінної структури зі змінними згідно з (3) параметрами, функціонально залежної від якості процесу фільтрування сигналу керування, і при всіх заданих можливих початкових значень  $x_0 \in \Omega_0$ , процесу регулювання

$$x(t_0) = x_0 \equiv (x_1^0, \dots, x_n^0, z_1^0, \dots, z_{m-1}^0), \forall x_0 \in \Omega_0. \quad (9)$$

У відповідність системі (1)—(7), (9) нехай зіставлено породжуючий автономний процес, котрий характеризується стійкою системою звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, без керування, вигляду (27) із Матвийчук (2006). За умов (27)—(33) (Матвийчук, 2006) використовуємо нормовану безумовно додатну функцію вигляду

$$V(t, x) = \exp[\beta(t)] V_1(x), V_1(x) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{b_{i,j}}{\theta} x_i x_j. \quad (10)$$

Позначимо  $\mu_i (i = \overline{1, N})$  власні значення квадратичної форми  $V_1(x)$  в (10), де  $\mu_i > 0 (i = \overline{1, N})$  за побудовою. Знаходимо справедливі нерівності:

$$V(t, x) \leq \rho(x), \forall t \in T, \forall x \in D; \rho(x) = \sum_{i,j=1}^N x_i^2 \quad (11)$$

$$0 < \exp[\beta(t)] \mu_N \leq 1, \forall t \in T, \mu_N = \max\{\mu_i, i = \overline{1, N}\}; \quad (12)$$

$$V(t, x_0) \leq \rho(x_0) \leq \gamma, \gamma = \text{const} > 0, \forall x_0 \in \Omega_0, \forall t \in T. \quad (13)$$

Для (1)—(7), (9) при (10)—(13) використовуємо задачу Коші порівняння (38), (39) із Матвийчук (2006). На розв'язках задачі (1)—(7), (9) позначаємо

$$V(t) \equiv V(t, x(t)); W(t) \equiv -\sum_{i=1}^n x_i^2(t); \Phi(t, x(t)) = \frac{d\beta(t)}{dt} V(t) +$$

$$+ \frac{1}{\theta} \exp[\beta(t)] W(t); \Phi_1(t, x(t), v, u) \equiv \frac{1}{\theta} \exp[\beta(t)]$$

$$\left\{ \left[ \sum_{i=1}^{n-1} (\bar{b}_i - a_i(t) + b_m(t) A_{m-1, m-1} \Psi_i^x) x_i(t) + (\bar{b}_n - a_n(t)) x_n(t) - \right. \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{m-2} \left( \sum_{i=j}^{m-1} b_{i+1}(t) A_{j,i} - b_m(t) A_{m-1, m-1} \Psi_{m-1-j}^z \right) z_{m-1-j}(t) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \sum_{i=1}^{m-1} b_{i+1}(t) A_{0,i} + b_1(t) - b_m(t) A_{m-1,m-1} \Psi_{m-1}^z \right] z_{m-1}(t) \Bigg] \times \\
& \quad \times \left[ \sum_{i=1}^n b_m(t) x_i(t) + \sum_{l=1}^{m-1} b_{ln}(t) z_l(t) \right] \\
& \quad - \left[ \sum_{i=1}^n b_{i1}(t) x_i(t) + \sum_{r=1}^{m-1} b_{rn}(t) z_r(t) \right] \frac{1}{T_1} \\
& \quad \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_i^x(t) x_i(t) + \sum_{k=2}^{m-1} \Psi_k^z(t) z_k(t) + (\Psi_1^z + 1) z_1(t) \right] + \\
& \quad + \sum_{l=2}^{m-2} \left[ \sum_{i=1}^n b_{il}(t) x_i(t) + \sum_{r=1}^{m-1} b_{rl}(t) z_r(t) \right] \frac{1}{T_l} [z_{l-1}(t) - z_l(t)] \Bigg\}; \\
& \quad \bar{b}_i = \text{const}, i = \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

**Теорема 1.** Нехай справедливі умови: 1. Нестационарна система (1)—(7), (9) має змінні параметри  $a_i(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ),  $b_j(t)$  ( $j = \overline{1, m}$ ), які мають властивості (3). 2. Задача Коші (1)—(7), (9) задовольняє достатні умови, за яких існує її розв'язок. 3. Існує безумовно додатна функція  $V$  вигляду (10), в якій власні значення  $\mu_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ) відповідної квадратичної форми  $V_1(x)$  мають властивість (12). 4. Справджується умова (29) з Матвийчук (2006) для породжуючого автономного процесу (27) (Матвийчук, 2006). 5. При розривних логічних законах (4) — (6) зміни параметрів  $\Psi_i^x$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ),  $\Psi_j^z$  ( $j = \overline{1, m-1}$ ), довільних початкових значеннях  $x_0 \in \Omega_0$  на розв'язках вихідної системи (1)—(7), (9) справджуються одночасно умови: а) задана в Матвийчук (2006) функція  $Z(t, V)$  справджує умову мажорювання вигляду  $\Phi(t, x(t)) \leq Z(t, V(t, x(t))), \forall t \in T$ ; б) справедлива оцінка  $\Phi_1(t, x(t), v, u) \leq M\bar{n}(t), \forall t \in T$  згідно з Матвийчук (2006); в) множини  $C_{z_0} = \{x : V(t, x) \leq z_0\}, \Omega_0$  справджують включення  $\Omega_0 \subset C_{z_0}$  при  $t = t_0$ ; г) для малого параметра  $\mu \in (0, 1)$  справедлива властивість (8); д) існує обмежений верхній розв'язок  $z(t) = z(t, t_0, z_0)$  задачі Коші порівняння (38), (39) із Матвийчук (2006), який, при заданих регулярних функціях  $\beta(t)$  і  $\eta(t)$ , задовольняє нерівність

$$(\mu, \chi)^{-1} [z(t) + \sigma(t)] \leq \eta(t), \forall t \in T; \chi = \min_{t \in T} \{ \exp[\beta(t)] \},$$

$$\sigma(t) = M \int_{t_0}^t n(\tau) d\tau, (M = \text{const} > 0); |\beta(t)| \leq K, (K = \text{const} > 0)$$

Тоді справджується наступні властивості: 1) при розривних логічних законах зміни коефіцієнтів  $\Psi_i^x(i = \overline{1, n-1}), \Psi_j^z(j = \overline{1, m-1})$  (4)—(6) вихідний нестационарний процес фільтрованого керування зі змінною структурою (1)—(7), (9) для всіх  $x_0 \in \Omega_0$  і всіх значень  $a_i(t)(i = \overline{1, n}), b_j(t)(j = \overline{1, m})$  із  $\Gamma$  (3) є технічно стійкий за мірою  $\rho$  на заданому обмеженому проміжку часу  $T \subset I$ ; 2) нестационарний процес фільтрованого керування зі змінною структурою (1)—(7), (9) технічно стійкий за мірою  $\rho$  на нескінченному інтервалі часу  $I$ , якщо умови 1—5 теореми 1 справджуються на кожному часовому проміжку  $T_h \subseteq I$ ; 3) у випадку справедливості умови

$$\rho(t) \equiv z(t) + \sigma(z) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty$$

нестационарний процес фільтрованого керування зі змінною структурою (1)—(7), (9) є асимптотично технічно стійкий за мірою  $\rho$ .

Доведення теореми 1 ґрунтується на результатах з Матвійчук (1999, 2006), Matviychuk (2001). При цьому показано, що отримані для (1)—(7), (9) умови технічної стійкості в  $T$  або в  $I$  за мірою  $\rho$  не будуть справджуватись, якщо в цих областях маємо умову:  $P(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \in T$  або  $t \in I$ . Крім того, якщо справджується нерівність  $\Phi(t, x) < -\Phi_1(t, x, v, u)$  при  $t \in I$  то процес (1)—(7), (9) стійкий по Ляпунову за мірою  $\rho$  при параметрах  $a_i(t), b_j(t)$  із області  $\Gamma$  (3).

Для заданої нестационарної системи автоматичного фільтрованого керування (1)—(7), (9) побудуємо достатні умови її технічної нестійкості за мірою  $\rho$  при  $t \in T$  або  $t \in I$ . Для цього будуть використані властивості відповідних диференціальних нерівностей і оцінок знизу, а також властивості нижніх розв'язків відповідно сформульованої задачі Коші порівняння знизу при всіх або окремих початкових значеннях  $x_0 \in \Omega_0$  процесу і при всіх значеннях параметрів з області  $\Gamma$  (3). Для  $V(t, x)$  і  $\rho(x(t))$  на розв'язках процесу (1)—(7), (9), враховуючи (11)—(13), маємо

$$V(t, x(t)) \leq \rho(x(t)). \quad (14)$$

Покладемо, що в області  $\bar{K}$  із Матвійчук (2006) задана неперервна функція  $Q(t, V)$ , яка відмінна від функції  $Z(t, V)$  і задовольняє властивість:  $Q(t, 0) \equiv 0$ , а також нехай задана функція  $\omega(t)$ , яка неперервна при  $t \in T_h \subseteq I$  із властивостями інтегрованості, аналогічними властивостям функції  $\bar{n}(t)$  в (38) з Матвійчук (2006). Нехай задані для (1)—(7), (9) функції  $Q$  і  $\omega$  породжують у  $\bar{K}$  задачу Коші порівняння знизу.



$$dr / dt = Q[t, r + \tilde{\sigma}(t)], \tilde{\sigma}(t) = M_1 \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau, t \in T_h \subseteq I; M_1 = \text{const} > 0; \quad (15)$$

$$r(t_0) = r_0 \leq V_0 \equiv \exp[\beta(t_0)] V_1(x_0), x_0 \in \Omega_0, r_0 = \text{const} \geq 0, \quad (16)$$

$$t_0 \in T_h \subseteq I; \forall x_0 \in \Omega_0.$$

**Теорема 2.** Нехай справджуються умови: 1) виконуються умови 1—4 теореми 1; 2) уздовж розв'язків задачі (1)—(7), (9) справедливі оцінки знизу

$$\text{а) } Q(t, V(t, x(t))) \leq \Phi(t, x(t)), t \in T_h \subseteq I; \quad (17)$$

$$\text{б) } M_1 \omega(t) \leq \Phi_1(t, x(t), v, u), M_1 = \text{const} > 0, t \in T_h \subseteq I; \quad (18)$$

3) існує нижній розв'язок  $\tilde{r}(t) = \tilde{r}(t, t_0, r_0)$  відповідної процесу (1)—(7), (9) задачі Коші порівняння знизу вигляду (15), (16).

Тоді при розривних логічних законах зміни коефіцієнтів  $\Psi_i^x (i = \overline{1, n-1}), \Psi_j^z (j = \overline{1, m-1})$  (4)—(6) процес автоматичного фільтрованого керування зі змінною структурою (1)—(7), (9) технічно нестійкий у  $T$  або в  $I$  за мірою  $\rho$ , якщо справедлива властивість

$$B(t) \equiv \tilde{r}(t) + \tilde{\sigma}(t) \rightarrow +\infty, t \in T \subseteq I. \quad (19)$$

Доведення теореми 2 подібне доведенню теореми 1, проте з врахуванням того, що для вихідного процесу визначаються нижні оцінки. А саме, із (14)—(18) отримуємо оцінки знизу вздовж розв'язків процесу автоматичного керування змінної структури (1)—(7), (9) вигляду

$$B(t) \leq V(t); B(t) \equiv r(t) + \tilde{\sigma}(t); r_0 \leq V_0 \equiv \exp[\beta(t_0)] V_1(x_0); t_0, z_0 \in T_h \subseteq I; \quad (20)$$

$$B(t) \leq \rho(x(t)); r_0 \leq \rho(x_0); t_0, t \in T_h \subseteq I. \quad (21)$$

Із (19)—(21) випливає справедливість твердження теореми 2 при всіх  $\forall x_0 \in \Omega_0$  і всіх значеннях параметрів  $a_i(t) (i = \overline{1, n}), b_j(t) (j = \overline{1, m})$  з області  $\Gamma(3)$ . Побудовані в роботі загальні критерії технічної стійкості й нестійкості за заданою мірою застосовані до нестационарних систем автоматичного фільтрованого керування зі змінною структурою третього порядку.

### Список літератури

- Matviychuk, K. S. (2001). Technical Stability of an Automatic Control Systems with a Changing Structure in the Neutral Case. *J. of Math. Sciences*, 107 (2), 3776—3786.
- Матвийчук, К. С. (1999). Условия технической устойчивости автономных систем управления с переменной структурой. *Проблемы управления и информатики*, (6), 5—22.
- Матвийчук, К. С. (2006). Техническая устойчивость нестационарных систем автоматического управления переменной структуры с коммутируемыми фильтрами. *Прикл. механика*, 42 (6), 110—127.

**ПРО ТОТАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ,  
ЗАЛЕЖНІ ВІД ПАРАМЕТРА**

**В. А. Михайлець, О. О. Мурач, В. О. Солдатов**

*Інститут математики НАН України, Київ, Україна*

[mikhailets@imath.kiev.ua](mailto:mikhailets@imath.kiev.ua), [murach@imath.kiev.ua](mailto:murach@imath.kiev.ua), [soldatovvo@ukr.net](mailto:soldatovvo@ukr.net)

Доповідь присвячена дослідженню найбільш загального класу лінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать простору Гельдера

$$(C^{n+1,\alpha})^m := C^{n+1,\alpha}([a,b], \mathbb{C}^m),$$

де  $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $-\infty < a < b < \infty$  і  $m \in \mathbb{N}$ . Крайові умови в цих задачах можуть містити похідні шуканих функцій до порядку  $n + 1$  включно. Для залежних від параметра крайових задач із цього класу, нами встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром їх розв'язків у просторі  $(C^{n+1,\alpha})^m$ .

Розглянемо таку крайову задачу, залежну від параметра  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ :

$$L(\varepsilon)y(t, \varepsilon) \equiv y'(t, \varepsilon) + A(t, \varepsilon)y(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \quad (1)$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) = q(\varepsilon). \quad (2)$$

Тут фіксоване число  $\varepsilon_0 > 0$ . Припускаємо, що для кожного  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$  шукана вектор-функція  $y(\cdot, \varepsilon)$  належить простору  $(C^{n+1,\alpha})^m$  і довільним чином задано матрицю-функцію  $A(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^{m \times m}$ , вектор-функцію  $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$ , вектор  $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$  і лінійний неперервний оператор  $B(\varepsilon) : (C^{n+1,\alpha})^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ . Тут  $(C^{n,\alpha})^{m \times m} := C^{n,\alpha}([a,b], \mathbb{C}^{m \times m})$ . Цю крайову задачу називаємо тотальною щодо простору Гельдера  $C^{n+1,\alpha}$ .

Пов'яжемо із нею лінійний обмежений оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) : (C^{n+1,\alpha})^m \rightarrow (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m, \quad (3)$$

де  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ .

**Теорема 1.** Для кожного  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$  оператор (3) фредгольмів з індексом нуль.

Встановимо критерій оборотності оператора (3). Нехай

$$Y(\cdot, \varepsilon) =: (y_{j,k}(\cdot, \varepsilon))_{j,k=1}^m$$

— єдиний розв'язок матричної задачі Коші

$$Y'(t, \varepsilon) = -A(t, \varepsilon)Y(t, \varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \quad Y(t_0, \varepsilon) = I_m.$$

Тут фіксована точка  $t_0 \in [a, b]$ , а  $I_m$  — одинична матриця порядку  $m$ .  
Покладемо

$$[BY(\cdot, \varepsilon)] := \left( B \begin{pmatrix} y_{1,1}(\cdot, \varepsilon) \\ \vdots \\ y_{m,1}(\cdot, \varepsilon) \end{pmatrix} \dots B \begin{pmatrix} y_{1,m}(\cdot, \varepsilon) \\ \vdots \\ y_{m,m}(\cdot, \varepsilon) \end{pmatrix} \right).$$

**Теорема 2.** Нехай  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ . Оператор (3) оборотний тоді і тільки тоді, коли

$$\det[BY(\cdot, \varepsilon)] \neq 0.$$

Для крайової задачі (1), (2) розглянемо такі граничні умови при  $\varepsilon \rightarrow 0 +$ :

- 1)  $A(\cdot, \varepsilon) \rightarrow A(\cdot, 0)$  в  $(C^{n,\alpha})^{m \times m}$ ;
- 2)  $B(\varepsilon)y \rightarrow B(0)y$  в  $\mathbb{C}^m$  для кожного  $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$ ;
- 3)  $f(\cdot, \varepsilon) \rightarrow f(\cdot, 0)$  в  $(C^{n,\alpha})^m$ ;
- 4)  $q(\varepsilon) \rightarrow q(0)$  в  $\mathbb{C}^m$ .

Окрім того розглянемо ще одну умову:

0) гранична однорідна крайова задача

$$y'(t, 0) + A(t, 0)y(t, 0) = 0, \quad a \leq t \leq b,$$

$$B(0)y(\cdot, 0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

**Базове означення.** Будемо говорити, що розв'язок крайової задачі (1), (2) неперервний за параметром  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$ , якщо виконуються такі дві умови:

- 1) існує додатне число  $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$  таке, що для кожного  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$  і

будь-яких правих частин  $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$  і  $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$  ця задача має єдиний розв'язок  $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+1,\alpha})^m$ ;

- 2) якщо виконуються граничні умови 3) і 4), то  $y(\cdot, \varepsilon) \rightarrow y(\cdot, 0)$  в  $(C^{n+1,\alpha})^m$  при  $\varepsilon \rightarrow 0 +$ .

**Основна теорема.** Розв'язок крайової задачі (1), (2) є неперервним за параметром  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$  тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умови 0), 1), 2).

Цей результат доповнює

**Теорема 3.** Нехай крайова задача (1), (2) задовольняє умови 0), 1), 2). Тоді існують додатні числа  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$  та  $c_1, c_2$  такі, що для кожного  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$  правильна двобічна оцінка

$$\begin{aligned} c_1 \left( \|L(\varepsilon)y(\cdot, 0) - f(\cdot, \varepsilon)\|_{(C^{n,\alpha})^m} + \|B(\varepsilon)y(\cdot, 0) - q(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m} \right) \\ \leq \|y(\cdot, 0) - y(\cdot, \varepsilon)\|_{(C^{n+1,\alpha})^m} \\ \leq c_2 \left( \|L(\varepsilon)y(\cdot, 0) - f(\cdot, \varepsilon)\|_{(C^{n,\alpha})^m} + \|B(\varepsilon)y(\cdot, 0) - q(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m} \right). \end{aligned}$$

Тут, числа  $\varepsilon_2, c_1, c_2$  не залежать від  $y(\cdot, \varepsilon), f(\cdot, \varepsilon)$  і  $q(\varepsilon)$ .

Згідно з теоремою 3 похибка і нев'язка розв'язку  $y(\cdot, \varepsilon)$  крайової задачі (1), (2) мають один порядок. Тут  $y(\cdot, 0)$  розглядається як наближений розв'язок цієї задачі.

Наведені в доповіді результати отримано в (Mikhailets, Murach & Soldatov, 2016).

Крайові задачі, тотальні щодо інших функціональних просторів — Соболева, Слободецького і просторів  $C^{n+1}$ , досліджено в роботах (Михайлец, Рева, 2008; Kodlyuk & Mikhailets, 2013; Гнып, Кодлюк, Михайлец, 2015), (Гнип, 2016) і (Михайлец, Чеханова, 2014; Михайлец, Чеханова, 2014) відповідно. Там встановлено достатні умови неперервності за параметром розв'язків крайових задач у цих просторах.

### Список літератури

- Kodlyuk, T. I., & Mikhailets, V. A. (2013). Solutions of one-dimensional boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces. *J. Math. Sci.*, 190 (4), 589—599.
- Mikhailets, V. A., Murach, A. A., & Soldatov, V. (2016). Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems, arXiv , 15 pp.
- Гнип, С. В. (2016). Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач у просторах Слободецького. *Укр. мат. журн.*, 68 (6) (прийнято до друку).
- Гнып, Е. В., Кодлюк, Т. И., Михайлец, В. А. (2015). Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах Соболева. *Укр. мат. журн.*, 67 (5), 584—591.
- Михайлец, В. А., Рева, Н. В. (2008). Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений. *Доповіді НАН України, 2016* (8), 28—30.
- Михайлец, В. А., Чеханова, Г. А. (2014). Некоторые классы фредгольмовых краевых задач на отрезке. *Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 11* (2), 268—273.
- Михайлец, В. А., Чеханова, Г. А. (2014). Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах  $C^{(n)}[a; b]$ . *Доповіді НАН України, 2014* (7), 24—28.
- Солдатов, В. О. (2015). Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач, тотальних щодо просторів  $C^{(n+r)}[a, b]$ . *Укр. мат. журн.*, 67 (5), 692—700.

**КУСКОВО-ОДНОРІДНА ПЛОЩИНА З МЕЖЕЮ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ  
У ФОРМІ СТОРІН КУТА  
ЗА НАЯВНОСТІ ПІВНЕСКІНЧЕНОЇ ТРІЩИНИ**

**В. М. Назаренко, О. Л. Кіпніс**

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна*  
[a.l.kipnis@gmail.com](mailto:a.l.kipnis@gmail.com)

**Постановка задачі.** Розглянемо кусково-однорідну ізотропну пружну площину з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яка в одній з частин містить симетричну внутрішню напівнескінченну тріщину (рис. 1). Береги тріщини знаходяться під дією нормального тиску, розподіленого за законом  $F / r^2$ ,  $r \geq l$  ( $F$  — задана додатна стала, що має розмірність сили).

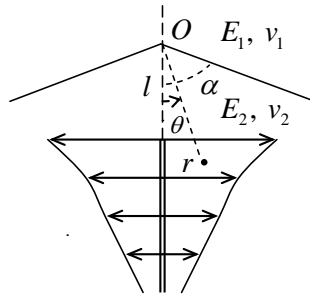


Рис. 1. Кусково-однорідна площина з напівнескінченною тріщиною

Крайові умови відповідної статичної симетричної задачі теорії пружності мають вигляд

$$\theta = \alpha, \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \quad (1)$$

$$\theta = 0, \tau_{r\theta} = 0; \theta = \pi, \tau_{r\theta} = 0, u_\theta = 0;$$

$$\theta = 0, r < l, u_\theta = 0; \theta = 0, r > l, \sigma_\theta = -F / r^2. \quad (2)$$

де  $0 \leq \theta \leq \pi$ ;  $\langle a \rangle$  — стрибок  $a$ .

Метою роботи є аналіз поведінки напружень біля кутової точки.

**Рівняння Вінера — Гопфа та його розв'язок.** Для побудови точного розв'язку задачі будемо використовувати метод Вінера — Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна (Гахов, 1977; Лаврентьев, Шабат, 1973; Нобл, 1962; Уфлянд, 1967).

Застосовуючи перетворення Мелліна до рівнянь рівноваги, умов сумісності деформацій, закону Гука та умов (1) і (2), приходимо до наступного функціонального рівняння Вінера — Гопфа:

$$\Phi^-(p) + \frac{\sigma}{p-1} = \text{ctg } p\pi G(p)\Phi^+(p), \quad (3)$$

$$G(p) = \frac{\tilde{\Delta}(p) \sin p\pi}{2\Delta_0(p) \cos p\pi},$$

$$\Delta_0(p) = (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) [\varkappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] +$$

$$+ \{(1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2)\} \times$$

$$\times \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) [\varkappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] -$$

$$- [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\varkappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha) \} e +$$

$$+ [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\varkappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha) e^2,$$

$$\tilde{\Delta}(p) = -4(\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha) [\varkappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] +$$

$$+ \{(1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2)\} \times$$

$$\times \sin 2p\pi + 4(\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha) [\varkappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] -$$

$$- [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \left[ (1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) - 4(\varkappa_2 \sin^2 p\alpha + p^2 \sin^2 \alpha) \right] \} e +$$

$$+ [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \left[ (1 + \varkappa_2)^2 - 4(\varkappa_2 \sin^2 p\alpha + p^2 \sin^2 \alpha) \right] e^2,$$

$$\Phi^-(p) = \int_0^1 \sigma_\theta(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^+(p) = \frac{E_2}{2(1 - v_2^2)} \int_1^\infty \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \Big|_{\substack{r=\rho l \\ \theta=0}} \rho^p d\rho,$$

$$e = \frac{1 + v_2}{1 + v_1} e_0, \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \quad \varkappa_{1,2} = 3 - 4v_{1,2}, \quad \sigma = \frac{F}{l^2}$$

( $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_{1,2}$  — досить малі додатні числа).

Розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$\Phi^+(p) = \frac{\sigma G^-(1)p}{K^-(1)(p-1)K^+(p)G^+(p)} \quad (\operatorname{Re} p < 0), \quad (4)$$

$$\Phi^-(p) = \frac{\sigma K^-(p)}{(p-1)G^-(p)} \left[ \frac{G^-(1)}{K^-(1)} - \frac{G^-(p)}{K^-(p)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0),$$

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0), \quad \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0 \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0 \end{cases},$$

$$p \operatorname{ctg} p\pi = K^+(p)K^-(p), \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)}$$

де  $\Gamma(z)$  — гамма-функція.

**Аналіз поведінки напружень біля кутової точки.** За допомогою (3), (4) та формули обернення Мелліна, знаходимо:

$$\sigma_{\theta}(r, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma G^{-}(1)p\tilde{\Delta}(p)l^{p+1}}{2K^{-}(1)(p-1)\Delta_0(p)K^{+}(p)G^{+}(p)} r^{-p-1} dp, \quad (5)$$

( $\gamma$  — довільна пряма, яка лежить у смузі  $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < 0$ ).

У смузі  $-1 \leq \operatorname{Re} p < 0$  підінтегральна функція у (5) має єдину особливість — простий полюс в точці  $p = -\lambda_0 - 1$ , де  $\lambda_0$  — єдиний в інтервалі  $] -1; 0[$  корінь рівняння  $\Delta_0(-\lambda - 1) = 0$ . Значення  $\lambda_0$  ( $v_1 = v_2 = 0,3$ ) наведено в таблиці .

$e_0$	$\alpha, ^{\circ}$							
	30	45	60	75	105	120	135	150
2	-0,075	-0,112	-0,112	-0,086	-0,025	-0,054	-0,089	-0,117
3	-0,132	-0,180	-0,184	-0,127	-0,037	-0,081	-0,130	-0,173
5	-0,232	-0,258	-0,248	-0,167	-0,049	-0,104	-0,168	-0,228
10	-0,310	-0,332	-0,308	-0,203	-0,059	-0,124	-0,202	-0,278

Використовуючи цю інформацію про особливу точку підінтегральної функції у (5) і застосовуючи до інтегралу (5) теорему про лишки, одержуємо наступну формулу:

$$\sigma_{\theta}(r, 0) = \Sigma r^{\lambda_0} + f(r) \quad (r \rightarrow 0),$$

$$\Sigma = \frac{\sqrt{\pi}\tilde{\Delta}(-\lambda_0 - 1)\Gamma(\lambda_0 + 3/2)G^{-}(1)}{4(\lambda_0 + 2)s_0\Gamma(\lambda_0 + 1)G^{+}(-\lambda_0 - 1)l^{\lambda_0+2}} \frac{F}{},$$

$$s_0 = \Delta_0'(-\lambda_0 - 1).$$

У цій формулі  $f(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ ;  $\Delta_0'(p)$  — похідна функції  $\Delta_0(p)$ .

Аналогічні формули мають місце для  $\sigma_{\theta}(r, \theta)$ ,  $\tau_{r\theta}(r, \theta)$ ,  $\sigma_r(r, \theta)$ .

Аналіз одержаних результатів дозволяє зробити наступні висновки. Кутова точка  $O$  є особливою точкою крайової задачі теорії пружності, що розглядається. Вона являє собою гострокінцевий концентратор напружень. При наближенні точки області до точки  $O$  напруження прямують до нескінченності.

Особливість напружень у точці  $O$  степенева. Показник степеня сингулярності напружень залежить від кута, відношення модулів Юнга та від коефіцієн-

тів Пуассона. Цей показник являє собою єдиний на інтервалі  $] - 1; 0[$  корінь певного трансцендентного рівняння.

Зі зростанням кута  $\alpha$  від нуля до  $\pi / 2$  і від  $\pi / 2$  до  $\pi$  концентрація напружень біля кутової точки спочатку посилюється, а потім послаблюється. Значенням відношення модулів Юнга, що дорівнюють 2; 3; 5; 10, відповідають значення кута найбільшої концентрації напружень, що дорівнюють  $57,3^\circ$ ;  $54,1^\circ$ ;  $46,7^\circ$ ;  $42,2^\circ$ .

Чим більше відрізняються матеріали (зі зростанням відношення модулів Юнга), тим сильніша концентрація напружень біля кутової точки. Зі зростанням відношення модулів Юнга гострий кут максимальної концентрації напружень зменшується, а тупий — збільшується.

### Список літератури

- Гахов, Ф. Д. (1977). *Краевые задачи*. Москва: Наука.
- Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В. (1973). *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва: Наука.
- Нобл, Б. (1962). *Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных*. Москва: Издательство иностранной литературы.
- Уфлянд, Я. С. (1967). *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*. Ленинград: Наука.



# КРУЧЕННЯ ІЗОТРОПНОГО ЦИЛІНДРА З НЕКАНОНІЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

В. М. Неміш

Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна  
[nemish\\_vm@ukr.net](mailto:nemish_vm@ukr.net)

Розглядається однорідний ізотропний пружний циліндр радіуса  $R$  з впаяним жорстким включенням, поверхня  $S$  якого утворена обертанням правильного п'ятикутника з заокругленими кутами навколо осі  $Oz$ . Його параметричні рівняння описуються з допомогою конформно відображуючої функції:

$$\omega(\zeta) = r_0(\zeta + \varepsilon\zeta^{-4}) \quad (\zeta = \rho e^{i\gamma}, |\varepsilon| = 0,1)$$

і в довільній меридіальній площині  $zOR$  при  $\rho = 1$  мають вигляд:

$$z = r_0^{-1} \operatorname{Re} \omega(\zeta) = \cos \gamma + \varepsilon \cos 4\gamma$$

$$R = r_0^{-1} \operatorname{Im} \omega(\zeta) = \sin \gamma - \varepsilon \sin 4\gamma.$$

Тут  $R$  — відстань від довільної точки поверхні включення  $S$  (відповідає координатній поверхні  $\rho = 1$ ) до осі  $Oz$ .

Проведено дослідження напруженого стану однорідного ізотропного циліндра з впаяним жорстким включенням у випадку кручення моментом  $M$  відносно осі  $Oz$ . При цьому припускається, що бічна і торцеві поверхні знаходяться на достатній відстані від поверхні включення  $S$  і не істотно впливають на напружено-деформований стан в її околі. Граничні умови на поверхні  $S$  жорсткого включення такі:

$$U_\alpha^{(0)} \Big|_{\rho=1} = -\hat{U}_\phi^{(0)} \Big|_{\rho=1},$$
$$U_\alpha^{(n)} \Big|_{\rho=1} = -\left[ \hat{U}_\phi^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_1^{(n-j)} U_\alpha^{(j)} \right]_{\rho=1} \quad (n \geq 1).$$

Переміщення  $U_\alpha^{(n)}$  знаходяться на основі загального розв'язку однорідних рівнянь рівноваги для ізотропного тіла, а  $\hat{U}_\phi^{(n)}$  — відома компонента основного напруженого стану тіла (без концентратора напружень) і відповідає прикладеній силі.

При дослідженні напружено-деформованого стану середовища використано варіант наближеного методу «збурення форми границі» розробленого і апробованого в наукових роботах Гузь (1970) і Неміш (1974). Основні компоненти в нульовому наближенні відповідають точному розв'язку розглянутої задачі у випадку жорсткого сферичного включення і мають вигляд:

$$U_\phi^{(0)} = \frac{2Mr_0^2}{3\pi R^4 G} (\rho^2 - \rho^{-3}) \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma},$$
$$\sigma_{\rho\phi}^{(0)} = \frac{2Mr_0}{3\pi R^4} (\rho - 4\rho^{-4}) \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma},$$

$$\sigma_{\gamma\phi}^{(0)} = \frac{4Mr_0}{3\pi R^4}(\rho - \rho^{-4})[1 - P_2(\mu)]$$

У зв'язку зі складністю поверхні  $S$ , розв'язок поставленої задачі будемо шукати у вигляді рядів, складові яких у довільному наближенні визначаються з рекурентних співвідношень

$$U_{\phi}^{(n)} = \sum_{j=0}^n \Lambda_1^{(n-j)} U_{\alpha}^{(j)},$$

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_{\rho\phi}^{(n)} \\ \sigma_{\gamma\phi}^{(n)} \end{matrix} \right\} = \sum_{j=0}^n \left[ \Lambda_5^{(n-j)} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{r\alpha}^{(j)} \\ \sigma_{\Theta\alpha}^{(j)} \end{matrix} \right\} \pm \Lambda_6^{(n-j)} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{\Theta\alpha}^{(j)} \\ \sigma_{r\alpha}^{(j)} \end{matrix} \right\} \right],$$

де  $\Lambda_1^{(j)}, \Lambda_5^{(j)}, \Lambda_6^{(j)}$  — диференціальні оператори, структура яких залежить від форми самого контура.

На поверхні жорсткого включення  $\rho = 1$  найбільшим є напруження  $\sigma_{\rho\phi}^{(2)}$ :

$$\sigma_{\rho\phi}^{(2)} = \sum_{n=1}^{12} A_n \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}.$$

Тут і раніше  $A_n$ , — числові коефіцієнти,  $G$  — модуль зсуву,  $P_n(\mu)$  — поліноми Лежандра,  $dP_n(\mu) / d\gamma$  — їхні похідні ( $\mu = \cos \gamma$ ).

Коефіцієнти концентрацій напружень при  $\rho = 1$  мають таку аналітичну структуру:

$$K_{\rho\phi}^{(0)} = \frac{\pi R^4}{2Mr_0} \sigma_{\rho\phi}^{(0)}, \quad K_{\rho\phi}^{(1)} = \frac{\pi R^4}{2Mr_0} \left( \sigma_{\rho\phi}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{\rho\phi}^{(1)} \right),$$

$$K_{\rho\phi}^{(2)} = \frac{\pi R^4}{2Mr_0} \left( \sigma_{\rho\phi}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{\rho\phi}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{\rho\phi}^{(2)} \right).$$

Дослідження показали, що поле напружень в околі жорсткого включення має ярко виражений локальний характер. Так, на відстані двох радіусів від поверхні включення ( $\rho = 3$ ) відхилення коефіцієнтів концентрації напружень (у порівнянні з жорстким сферичним включенням) не перевищує 3,8%. Тобто, якщо зовнішня поверхня циліндра (бічна і торцеві) знаходяться на відстані не менше діаметра від поверхні жорсткого включення, то не суттєво вплине на напружений стан біля включення.

### Список літератури

- Гузь, О. М. (1970). Про один метод розв'язування тривимірних лінійних задач механіки суцільного середовища для неканонічних областей. *ДАН УРСР, серія А, 4*, 352—355.
- Неміш, Ю. М. (1974). Про граничні задачі теорії пружності для просторових багатозв'язних неканонічних областей. *ДАН УРСР, серія А, 8*, 743—748.

**ПРО ЯДРО ОДНОРІДНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ У СМУЗІ  
ДЛЯ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ  
ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОМ**

**З. М. Нитребич<sup>1</sup>, О. М. Маланчук<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>Національний університет «Львівська політехніка»,

<sup>2</sup>Львівський нац. медичний ун-т ім. Д. Галицького, Львів, Україна

[znytrebich@gmail.com](mailto:znytrebich@gmail.com), [Oksana.Malan@gmail.com](mailto:Oksana.Malan@gmail.com)

В області

$$S_h \equiv \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, h), x \in \mathbb{R} \right\}, \quad h > 0,$$

досліджується множина розв'язків однорідного рівняння

$$\sum_{k=0}^2 A_k \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^{2-k} U(t, x)}{\partial t^{2-k}} = 0, \quad (1)$$

що задовольняють на границі смуги  $S_h$  однорідні крайові умови

$$\sum_{j=0}^1 a_{kj} \frac{\partial^j U}{\partial t^j}(kh, x) = 0, \quad k = 0, 1. \quad (2)$$

В умовах (2)  $a_{kj} \in \mathbb{C}$ ,  $k = 0, 1$ ,  $j = 0, 1$ , причому

$$\sum_{j=0}^1 |a_{kj}|^2 \neq 0, \quad k = 0, 1.$$

У рівнянні (1)  $A_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = 1$ ,  $A_1 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$ ,  $A_2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$  — довільні диференціальні

вирази загальною нескінченного порядку, символи  $A_1(\nu)$ ,  $A_2(\nu)$  яких для  $\nu \in \mathbb{C}$  є цілими функціями.

Для дослідження задачі (1), (2) використано диференціально-символьний метод (Каленюк, 2002).

Для задачі (1), (2) побудовано характеристичний визначник вигляду

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10}T_0(h, \nu) + a_{11} \frac{dT_0}{dt}(h, \nu) & a_{10}T_1(h, \nu) + a_{11} \frac{dT_1}{dt}(h, \nu) \end{vmatrix},$$

де  $T_0(t, \nu)$ ,  $T_1(t, \nu)$  — нормальна фундаментальна система розв'язків у точці  $t = 0$  звичайного диференціального рівняння

$$\sum_{k=0}^2 A_k(\nu) \frac{d^{2-k} T(t, \nu)}{dt^{2-k}} = 0.$$

Оскільки  $T_0(t, \nu)$ ,  $T_1(t, \nu)$  є цілими функціями за параметром  $\nu \in \mathbb{C}$ , то характеристичний визначник  $\Delta(\nu)$  є також цілою функцією.

Доведено, що якщо характеристичний визначник  $\Delta(\nu)$  є відмінним від нуля для всіх  $\nu \in \mathbb{C}$ , то ядро задачі (1), (2) у часовій смузі  $S_h$  є порожнім у класі цілих функцій.

Якщо  $\Delta(\nu) \equiv 0$ , то ядро задачі є нескінченновимірним і його елементи можна подати у вигляді

$$U(t, x) = \varphi \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left[ \{ a_{01} T_0(t, \nu) - a_{00} T_1(t, \nu) \} e^{\nu x} \right] \Big|_{\nu=0},$$

де  $\varphi(x)$  — ціла функція деякого порядку. Дію диференціального виразу  $\varphi \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \right)$

з цілим символом

$$\varphi(\nu) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \nu^j, \quad \varphi_j \in \mathbb{C},$$

на цілу  $W(t, \nu)$  розуміємо так:

$$\varphi \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \right) W = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \frac{\partial^j W}{\partial \nu^j}.$$

Для випадку, коли множина  $M \equiv \{ \nu \in \mathbb{C} : \Delta(\nu) = 0 \}$  нулів характеристичного визначника задачі (1), (2) не є порожньою, а також не збігається з  $\mathbb{C}$ , доведено існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків задачі (1), (2).

Зокрема, для нуля  $\nu = \alpha$  функції  $\Delta(\nu)$  кратності  $p_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\left( \Delta(\alpha) = \Delta'(\alpha) = \Delta''(\alpha) = \dots = \Delta^{(p_\alpha-1)}(\alpha) = 0, \Delta^{(p_\alpha)}(\alpha) \neq 0 \right)$$

вказано спосіб побудови квазіполіномних розв'язків задачі (1), (2). Ці розв'язки можна знайти у вигляді дії довільного диференціального полінома  $Q \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \right)$  сте-

пеня  $n \leq p_\alpha - 1$  на цілу функцію

$$\left[ a_{01}(\nu) T_0(t, \nu) - a_{00}(\nu) T_1(t, \nu) \right] e^{\nu x}$$

з покладанням параметра  $\nu$  після дії рівним  $\alpha$ , тобто у вигляді

$$U(t, x) = Q \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \left[ a_{01}(\nu) T_0(t, \nu) - a_{00}(\nu) T_1(t, \nu) \right] e^{\nu x} \right\} \Big|_{\nu=\alpha},$$

де  $Q(x)$  — довільний нетривіальний поліном степеня  $n \leq p_\alpha - 1$ .

Вказані дослідження застосовано до побудови ненульових розв'язків однорідних крайових задач у смугах для деяких рівнянь математичної фізики.

### Список літератури

Каленюк, П. І., Нитребич, З. М. (2002). *Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод*. Львів: Вид-во НУ «Львівська політехніка».

# ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГІБРИДНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ В МАТЕМАТИЧНІЙ ФІЗИЦІ

О. М. Нікітіна<sup>1</sup>, М. І. Шинкарик<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Чернівецький факультет НТУ «ХПІ», Чернівці,

<sup>2</sup>Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна  
[nik\\_ole4ka@mail.ru](mailto:nik_ole4ka@mail.ru), [shynkaryk\\_m@ukr.net](mailto:shynkaryk_m@ukr.net)

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку із широким застосуванням композитних матеріалів, виникає гостра потреба у вивченні фізико-технічних характеристик даних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, що математично приводить до задач інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами (Коліно, 1992; Ленюк, 1997; Конет, Ленюк, 2004). Величини, що характеризують напружений стан композита, виражаються у вигляді полі параметричного функціонального ряду, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію.

Метод гібридних інтегральних перетворень (ГПІ) використовується як ефективний математичний апарат для побудови точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру відповідних задач математичної фізики (статика, квазістатика, динаміка).

У роботі Комаров та ін. (2001) закладено основні положення теорії скінченних гібридних інтегральних перетворень (СГПІ).

Розглянемо задачу побудови СГПІ типу Лежандра — Бесселя — Фур'є на сегменті з двома точками спряження.

Побудуємо методом задачі Штурма — Ліувілля СГПІ, породжене на сегменті  $(0, R_3]$  з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором (ГДО) Лежандра — Бесселя — Фур'є.

На множині

$$I_2 = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_3 < \infty\}$$

побудуємо інтегральне перетворення (ПІ), породжене ГДО

$$M_{\nu, \alpha}^{(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2 \Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{\nu, \alpha} + \\ + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)a_3^2 \frac{d^2}{dr^2}.$$

Тут  $\theta(x)$  — одинична функція Гевісайда [1],  $\Lambda_{(\mu)}$  — узагальнений диференціальний оператор Лежандра [4];  $B_{\nu, \alpha}$  — диференціальний оператор Бесселя;  $d^2/dr^2$  — диференціальний оператор Фур'є другого порядку (Ленюк, 1997).

**Означення 1.** Областю задання ГДО  $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$  назовемо множину  $G$  вектор-функцій  $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$  з такими властивостями:

- 1) вектор-функція  $f(r) = \{\Lambda_{(\mu)}[g_1]; B_{\nu,\alpha}[g_2]; g_3''\}$  неперервна на множині  $I_2$ ;
- 2) функції  $g_j(r)$  задовольняють крайові умови:

$$\lim_{r \rightarrow 0} [r^\gamma g_1(r)] = 0, \quad \left( \alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3 \right) g_3(r) \Big|_{r=R_3} = 0;$$

- 3) функції  $g_j(r)$  задовольняють умови спряження:

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k \right) g_k(r) - \left( \alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k \right) g_{k+1}(r) \right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j, k = 1, 2.$$

Згідно з роботою Нікітіна, Шинкарик (2015) сформулюємо такі твердження.

**Теорема 1** (про дискретний спектр). Корені  $\beta_n$  трансцендентного рівняння  $\delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\beta) = 0$  складають дискретний спектр ГДО  $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ : дійсні, різні, симетричні відносно нуля й на півосі  $\beta > 0$  утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою  $\beta = \infty$ .

**Теорема 2** (про дискретну функцію). Система власних функцій  $\{V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$  ортогональна на множині  $I_2$  з ваговою функцією  $\sigma(r)$ , повна й замкнена.

**Теорема 3** (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція  $g(r) \in G$  зображається за системою  $\{v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$  абсолютно й рівномірно збіжним на множині  $I_2$  рядом Фур'є:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{R_3} g(\rho) v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\rho, \beta_n) \sigma(\rho) d\rho v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n).$$

Даний ряд Фур'є визначає пряме  $H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$  й обернене  $H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}$  СГП, породжене на множині  $I_2$  ГДО  $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ :

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)] = \int_0^{R_3} g(r) v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma(r) dr \equiv \tilde{g}_n, \quad (1)$$

$$H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) \equiv g(r). \quad (2)$$

**Теорема 4** (про основну тотожність). Якщо вектор-функція

$$f(r) = \{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)]; B_{\nu,\alpha}[g_2(r)]; g_3''(r)\}$$

неперервна на множині  $I_2$ , а функції  $g_j(r)$  задовольняють крайові умови:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[ \operatorname{sh} r \left( \frac{dg_1}{dr} v_{\nu, \alpha; 1}^{(\mu)} - g_1 \frac{dv_{\nu, \alpha; 1}^{(\mu)}}{dr} \right) \right] = 0,$$

$$\left[ \left( \alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3 \right) g_3(r) \right]_{r=R_3} = g_R$$

та умови спряження:

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k \right) g_k(r) - \left( \alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k \right) g_{k+1}(r) \right]_{r=R_k} = \omega_{jk}; \quad j, k = 1, 2,$$

то має місце основна тотожність СГП ГДО  $M_{\nu, \alpha}^{(\mu)}$ :

$$H_{\nu, \alpha}^{(\mu)} [M_{\nu, \alpha}^{(\mu)} [g(r)]] = -\beta_n^2 \tilde{g}_n - \sum_{i=1}^3 k_i^2 \tilde{g}_{in} + (\alpha_{22}^3)^{-1} v_{\nu, \alpha; 3}^{(\mu)} (R_3, \beta_n) g_R +$$

$$+ \sum_{k=1}^2 d_k [Z_{\nu, \alpha; 12}^{(\mu); k}(\beta_n) \omega_{2k} - Z_{\nu, \alpha; 22}^{(\mu); k}(\beta_n) \omega_{1k}]. \quad (3)$$

**Висновки.** Одержані формули (1), (2) та (3) складають математичний апарат для побудови інтегрального зображення точного аналітичного розв'язку відповідних крайових задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ. Інтегральні зображення носять алгоритмічний характер, що дозволяє їх успішно використовувати як в теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках. Вони можуть бути використані при вивченні стаціонарного стану композитів у випадку теплового або механічного миттєвого удару, при доведенні існування розв'язку мішаних задач математичної фізики неоднорідних середовищ тощо.

### Список літератури

- Коляно, Ю.М. (1992). *Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела*. Київ: Наукова думка.
- Комаров, Г. М., Ленюк, М. П., Мороз, В. В. (2001). *Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку*. Чернівці: Прут.
- Конет, І. М., Ленюк, М. П. (2004). *Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях*. Чернівці: Прут.
- Ленюк, М. П. (1997). *Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях*. Київ: Ін-т математики НАН України.
- Нікітіна, О. М., Шинкарик, М. І. (2015). Скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра — Бесселя — Фур'є на сегменті з двома точками спряження. *Вестник Херсонського національного технічного університету*, 2015 (3 (54)), 47—51.

# ЗАСТОСУВАННЯ ГІДРОДИНАМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛА В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ТРУБІ

Ногін М.В.

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

[nvnogin@gmail.com](mailto:nvnogin@gmail.com)

У роботах Бреховских, Гончаров (1982), Белоносов, Овсиенко (1973) розглянутий рух в'язкої нестисненої рідини в циліндричній трубі для плоского випадку, лінеаризованій постановці Нав'є — Стокса, вигляду

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\gamma \operatorname{grad} p + \nu \Delta f, \\ \operatorname{div} \bar{v} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

з умовами виду

$$\bar{v}(r, \theta, 0) = 0, \bar{v}(1, 0, t) = \bar{v}_0(\theta, t), \lim_{\rho \rightarrow \infty} \bar{v}(\rho, \theta, t) = 0 \quad (2)$$

де  $(\rho, \theta)$  — полярна система,  $\bar{v}(\rho, \theta, t)$  — вектор швидкості частинок рідини,  $t$  — час,  $\nu$  — кінетична в'язкість,  $p(\rho, \theta, t)$  — тиск,  $\gamma$  — густина рідини;  $\bar{v}_0(\theta, t)$  — заданий вектор швидкості на внутрішній поверхні труби ( $\bar{v}_0(\theta, 0) = 0$ ),  $f(\rho, \theta, t)$  — вектор об'ємних сил, що діють на частинки рідини, причому  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} f = 0$ ;  $\Delta$  — лапласіан у циліндричних координатах.

Нехай радіус труби  $R$ , вісь по осі  $Oz$ . Для внутрішньої області відмінною від нуля буде тільки компонента швидкості вздовж  $Oz$ ,

$$v_z = v(\rho), \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

У роботі Бреховских, Гончаров (1982) система Стокса спрощена відповідно має вигляд:

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \eta \Delta v = 0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

де  $\eta$  — коефіцієнт в'язкості Ньютона. Тоді

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -b = \operatorname{const}, v = v(\rho), \Delta \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right).$$

Звідси (Бреховских, Гончаров, 1982):

$$v(\rho) = \frac{b}{4\eta} (R^2 - \rho^2) \quad (4)$$

У загальному випадку, окремо, обчислені, у вигляді рядів Фур'є дотична і нормальна компоненти вектору швидкості і гідродинамічний потенціал; за методикою робіт Белоносов, Овсиенко (1973), Ли, Зинченко, Зинченко, Ногін (2014). Зокрема, для практичного застосування обчислення моменту  $M$  кінетичної енергії можна використовувати спрощену формулу зміни швидкості:



$$w(\rho, t) = \pi \left( \frac{\rho}{R^2} \right)^2 w_0 + \frac{2}{R} \frac{c_1}{k_1} e^{-\gamma k_1 t} + \\ + \frac{\gamma k_1}{\gamma^2 k_1^4 + w^2} \left( \cos wt + \frac{w}{\gamma k_1} \sin wt \right) \cdot 2\pi \int_0^R \rho J_0(k, \rho) d\rho, \quad (5)$$

де  $k_1$  — перший корінь рівняння  $J_0(x) = 0$

### Список літератури

- Белоносов, С. М., Овсиенко В. Г. (1973). Нестационарное движение цилиндра в вязкой несжимаемой жидкости. В кн. *Линейные краевые задачи математической физики*. Киев: Институт математики АН УССР.
- Бреховских, Л. М., Гончаров, В. В. (1982). *Введение в механику сплошных сред*. Москва: Наука.
- Ли, Вэнь, Зинченко, В. П., Зинченко, С. В., Ногин, Н. В. (2014). Решение задачи движения пульсирующего газа в полубесконечной среде. *Механика гироскопических систем*, 27, 34—42.

**АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ  
ДЛЯ РІВНЯНЬ НАВ'Є — СТОКСА  
МІЖ ДВОМА СПІВВІСНИМИ ЦИЛІНДРАМИ**

**М. В. Ногін**

*НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна*  
[nvnogin@gmail.com](mailto:nvnogin@gmail.com)

У даній роботі в явному вигляді одержані профілі швидкості і тиску у випадку течії Куетта між двома циліндрами з спільною віссю  $Oz$ , радіусів  $R_1$  і  $R_2$ , які обертаються навколо осі з кутовими швидкостями  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , відповідно. Тоді  $p = p(r)$ ,  $v_r = v_z = 0$ ,  $v_\phi = v(r)$ . Власне, у полярних координатах запишемо систему рівнянь Нав'є — Стокса за відповідними компонентами (Лойцянский, 1970; Бреховских, Гончаров, 1982).

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{v^2}{r} \right) \cos \phi &= \nu \left[ \frac{v}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) \right] \sin \phi \\ \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{v^2}{r} \right) \sin \phi &= -\nu \left[ \frac{v}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) \right] \cos \phi \end{aligned}$$

Звідси, очевидно:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v^2}{r}, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{v^2}{r^2},$$

тоді

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv) \right] = 0. \quad (1)$$

Далі, легко розв'яжемо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння (1) з крайовими умовами

$$v(R_1) = \omega_1 R_1, \quad v(R_2) = \omega_2 R_2$$

відповідно:

$$v(r) = \frac{k^2 \omega_2 - \omega_1}{k^2 - 1} r + \frac{k^2}{k^2 - 1} (\omega_1 - \omega_2) \frac{1}{r} \quad (2)$$

$$k = \frac{R_2}{R_1}.$$

Нарешті, функція тиску:

$$p(r) = p(R_1) + \rho \int_{R_1}^{R_2} \frac{v^2}{r} dr$$

Сюди підставимо швидкість з (2), остаточно профіль тиску:

$$p(r) = -p(R_1) + \rho R_1^2 \left[ \frac{2(k^2\omega_2 - \omega_1)k^2(\omega_2 - \omega_1)}{(k^2 - 1)^2} \ln \frac{r}{R_2} + \frac{(k^2\omega_2 - \omega_1)^2}{2(k^2 - 1)} \left( \frac{r^2}{R_1^2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \frac{k^4(\omega_2 - \omega_1)}{(k^2 - 1)^2} \left( 1 - \frac{R_1^2}{r^2} - 1 \right) \right]$$

З (2) робимо висновок, що циліндр обертається на віддалі  $r$  з кутовою швидкістю

$$\omega(r) = \frac{k^2\omega_2 - \omega_1}{k^2 - 1} + \frac{k^2}{k^2 - 1}(\omega_1 - \omega_2) \frac{R_1^2}{r^2}.$$

Тепер для моменту в'язких сил, на підставі (3) отримуємо вираз:

$$M = 2\pi\mu(R_1 - R_2)r^3 \frac{d\omega}{dr}$$

Отже,

$$M = 4\pi\mu(R_1 - R_2)(\omega_2 - \omega_1)R_1^2 \frac{k^2}{k^2 - 1}$$

тобто  $M = \text{const}$ , що і треба було довести.

### Список літератури

- Лойцянский, Л. Г. (1970). *Механика жидкости и газа*. Москва: Наука.  
 Бреховских, Л. М., Гончаров, В. В. (1982). *Введение в механику сплошных сред*. Москва: Наука.  
 Шлихтинг, Г. (1974). *Теория пограничного слоя*. Москва: Наука.

**О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ТИПА ВОЛЬТЕРРА**

**О. Д. Нуржанов, О. О. Курбанбаев**

*Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан*  
[otebay.qurbanbaev@mail.ru](mailto:otebay.qurbanbaev@mail.ru)

В данной работе изучаются вопросы обоснования применимости численно-аналитического метода А. М. Самойленко (Самойленко, Ронто, 1985; 1992), к решению краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра вида

$$\frac{dx}{dt} = f \left( t, x, \int_0^t \phi(t, s, x(s)) ds \right) \quad (1)$$

при разделяющихся двухточечных линейных краевых условиях

$$x_i(0) = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad x_j(T) = d_j, \quad j = q + 1, q + 2, \dots, n, \quad (2)$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  —  $n$ -мерный вектор; вектор-функции  $f(t, x, y)$  и  $\phi(t, s, x)$  определены и непрерывны в области

$$(t, s, x, y) \in [0, T] \times [0, T] \times D \times D_1 \quad (3)$$

где  $D$  и  $D_1$  — замкнутые ограниченные области пространства  $E_n$ ;  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  —  $n$ -мерный постоянный вектор.

Предположим, что для правой части системы (1), в области (3) выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |f(t, x, y)| &\leq M, \\ |f(t, x, y) - f(t, x', y')| &\leq K_1 |x - x'| + K_2 |y - y'|, \\ |\phi(t, s, x) - \phi(t, s, x')| &\leq \mu(t, s) |x - x'| \end{aligned}$$

где  $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)$ ,  $M_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $K_1, K_2$  —  $(n \times n)$ -мерные постоянные матрицы с неотрицательными элементами, а  $\mu(t, s)$  — непрерывная матрица-функция с неотрицательными элементами, причем

$$|\mu(t, s)| \leq \mu^0, \quad \mu^0 = \{\mu_{ij}^0\}, \quad \mu_{ij}^0 \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Пусть, кроме того, выполняются следующие дополнительные условия:

Множество  $D_\beta$  точек  $x_0 \in E_n$ , таких, что точки

$$x_0 + (A + 2C)^{-1}(d - x_0) = z_0(x_0)$$

содержатся в области  $D$  вместе со своей  $\beta$ -окрестностью, не пусто:

$$D_\beta \neq \emptyset,$$

где

$$\beta = \frac{T}{2}M + \beta_1(x_0), \beta_1(x_0) = |(A + 2C)^{-1}(d - x_0)|,$$

$$A = \begin{bmatrix} E_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-q} \end{bmatrix},$$

$E_q$  и  $E_{n-q}$  — единичные матрицы соответственно с размерами  $(q \times q)$  и  $(n - q) \times (n - q)$ .

Наибольшее собственное значение  $\lambda(Q)$  матрицы

$$Q = \frac{T}{3} \left( K_1 + \frac{3T}{2} K_2 \mu_0 \right)$$

не превышает единицы:

$$\lambda(Q) < 1.$$

При таких предположениях доказывается, что последовательность функций

$$x_{m+1}(t, x_0) = z_0(x_0) + \int_0^t \left[ f(t, x_m(t, x_0), \int_0^t \phi(t, s, x_m(s, x_0)) ds) - \right. \quad (4)$$

$$\left. - \int_0^T f(\tau, x_m(\tau, x_0), \int_0^\tau \phi(\tau, s, x_m(s, x_0)) ds) d\tau \right] dt + \frac{t}{T} (A + 2C)^{-1} (d - x_0),$$

$m = 1, 2, \dots$ ,  $x_0(t, x_0) = z_0(x_0)$  равномерно сходится при  $m \rightarrow \infty$  к точному решению краевой задачи (1), (2) при условии, что вектор-параметр  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$  является решением алгебраической системы уравнений

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T} (A + 2C)^{-1} (d - x_0) - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x^*(t, x_0), \int_0^t \phi(t, s, x^*(s, x_0)) ds) dt = 0,$$

где  $x^*(t, x_0)$  — предельная функция последовательности (4).

### Список литературы

- Самойленко, А. М., Ронто, Н. И. (1985). *Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач*. Киев: Наукова думка.
- Самойленко, А. М., Ронто Н. И. (1992). *Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений*. Киев: Наукова думка.

# РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ НАВ'Є — СТОКСА ДЛЯ КРИЛА ЛІТАКА

**В. В. Онищук**

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна*

[willy38@ukr.net](mailto:willy38@ukr.net)

**Актуальність проблеми** пов'язана з практичною необхідністю мати більш швидкі, безпечні і економічні у використанні літаки. У нинішніх конструкціях літаків їхні крила відповідають формі тонких пластин, розміщених під кутом атаки  $\alpha \approx 12^\circ$ , що є необхідним, але недостатнім для досягнення високого коефіцієнта корисної дії. В першу чергу це стосується оцінки динамічної рівноваги системи «крило літака — атмосферне повітря». З метою вирішення поставленої задачі пропонується розв'язування системи рівнянь Нав'є — Стокса у наступному вигляді:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho'} \nabla p + \left( \zeta + \frac{\nu}{2} \right) \delta_i \nabla \operatorname{div} \vec{v}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho'} \nabla p + \nabla \vec{v}'; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -(\vec{v}' \nabla) \vec{v}' + \nu \Delta \vec{v}' - \frac{1}{\rho'} \nabla p + \varsigma_{\Delta} \delta_{\Delta} \nabla \operatorname{div} h; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -(\vec{v}' \nabla) \vec{v}' - \frac{1}{\rho'} \nabla p; \quad (4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial b_{\text{м.п.}}}{\partial t} + q_{\text{б.п.}}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \rho' g \frac{\partial Q}{\partial t}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \delta_x^{0,5}}{\partial t} = \frac{\partial b_{\text{м.п.}}}{\partial t} \frac{\partial t_k}{\partial t}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \delta_y}{\partial t} = \frac{\partial b_{\text{м.п.}}}{\partial t} \frac{\partial t_k}{\partial t}, \quad (8)$$

де  $\nabla$  — оператор Гамільтона;  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $\rho'$  — щільність субстанції,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $p$  — тиску субстанції,  $\text{кгс}/\text{м}^2$ ;  $\nu$  — коефіцієнт кінематичної в'язкості,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $\zeta$  — об'ємна в'язкість субстанції,  $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$ ;  $l$  — довжина зони збуреної субстанції перед літаком;  $g$  — прискорення сил земного тяжіння,  $\text{м}/\text{с}^2$ ;  $Q$  — витрата субстанції у пристінному шарі,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $q_{\text{б.п.}}$  — витрата бокового надходження (припливу) субстанції,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $h$  — товщина активного суцільного середовища,  $\text{м}$ ;  $b$  — довжина крила;  $\delta_x$  — величина переміщення суцільного сере-

довища навколо крила при польоті літака, м;  $\delta_y$  — величина переміщення суцільного середовища по фронту крила при польоті літака, м;  $b_{м.п}$  — величина фронту атаки суцільним середовищем, м;  $t_k$  — товщина крила у мідельовому перерізі, м;  $v$  — середня швидкість переміщення субстанції, м/с.

В аналіз розв'язування рівнянь Нав'є — Стокса до теперішнього часу входило коректне розв'язання задачі Коші, оскільки можливість стійкого рішення значною мірою залежить від рівня турбулентності потоку при великих числах критерію Рейнольдса. Для розв'язання поставленої задачі пропонується наступна система рівнянь: рівняння (1) описує рух субстанції по координатах  $x$  та  $y$ ; рівняння (2) стосується стабілізації режиму турбулентності по координатах  $x$  і  $y$ ; рівняння (3) оцінює рівень турбулентності субстанції у пристінній області потоку по координатах  $x, y$  та  $z$ ; рівняння (4) стосується стабілізації режиму турбулентності в пристінному шарі шляхом усунення агента збурення субстанції, цебто тиску по координатах  $x, y$  та  $z$ ; рівняння (5) характеризує баланс субстанції, який має місце при стані динамічної рівноваги системи; рівняння (6) визначає поперечну стійкість крила; рівняння (7) визначає поздовжню стійкість крила; рівняння (8) оцінює реакцію крила на дію лобового тиску субстанції у напруженому стані.

При врахуванні поздовжньої сили стискання потоку субстанції рівняння (1) у трьохвимірному просторі виглядає наступним чином Седов (1983), Войтунский и др. (1982):

$$\rho' \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} \right) = -\rho' \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) - \frac{\partial p_x}{\partial x} + \quad (9)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{2}{3} \delta_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \right] + \rho' \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta + 0,5\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta_x \right);$$

$$\rho' \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} \right) = -\rho' \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial p_y}{\partial y} + \quad (10)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{2}{3} \delta_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \right] + \rho' \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta + 0,5\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta_y \right);$$

$$\rho' \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) = -\rho' \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial p_z}{\partial z} + \quad (11)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{2}{3} \delta_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right],$$

де  $\mu$  — коефіцієнт динамічної в'язкості;  $\zeta$  — «друга в'язкість» — об'ємна в'язкість потоку після його стискання.

Таким чином, маємо три рівняння руху субстанції навколо крила.

У розкритому вигляді рівняння (2) має наступну форму:

$$\rho' \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{2}{3} \delta_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial p_x}{\partial x} + \rho' \frac{\partial U'_x}{\partial x}; \quad (12)$$

$$\rho' \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{2}{3} \delta_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial p_y}{\partial y} + \rho' \frac{\partial U'_y}{\partial y}; \quad (13)$$

$$\rho' \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{2}{3} \delta_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial p_z}{\partial z} + \rho' \frac{\partial U'_z}{\partial z}. \quad (14)$$

Маємо три рівняння стабілізації режиму турбулентності для тривимірного простору.

Далі виконуємо сумісний розв'язок отриманих рівнянь, шляхом послідовних підстановок рівнянь (12—14) у рівняння (9—11). Таким чином, отримуємо рівняння, які відповідають стабільному режимові обтікання крила, тобто зберігаються умови автомодельності в квадратичній області опору, а саме відсутній вплив критеріїв Рейнольдса, Фруда, Ейлера, Томсона, Вебера в режимі досягнутого рівня турбулентності потоку. Досягнутий рівень турбулентності потоку відповідає динамічній рівновазі системи.

$$\frac{\partial U'_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta_x \right) = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial U'_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta_y \right) = 0; \quad (16)$$

$$\frac{\partial U'_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0; \quad (17)$$

де  $\zeta_3 = \zeta + 0,5\mu$  — загальна величина в'язкості субстанції.

У результаті аналітичного розв'язку системи рівнянь (5—8, 15—17 і 3, 4) отримані наступні основні розрахункові формули:

$$\delta_{x.d.p.} = \left( \frac{bt_k}{0,666} \right)^{0,666}. \quad (18)$$

$$\delta_{y.d.p.} = t_k b. \quad (19)$$

$$V_{d.p.x} = \frac{1}{0,333\zeta_3 \delta_x}; \quad (20)$$

$$V_{d.p.y} = \frac{1}{0,333\zeta_3 \delta_y}; \quad (21)$$

$$l_{d.p.x} = 0,333\zeta_3 \delta_x V_{d.p.x}^3 - U'_{d.p.x} - V_{d.p.x}^2 + \rho' Q_{d.p.x}; \quad (22)$$

$$Q_{d.p.x} = 0,333\zeta_3 \delta_x V_{d.p.x}^3 - U'_{d.p.x} - V_{d.p.x}^2; \quad (23)$$



$$Q_{д.р.у} = 0,333\zeta_3\delta_y V_{д.р.у}^3 - U'_{д.р.у} - V_{д.р.у}^2 + h_{д.р.} + b_{д.р.}; \quad (24)$$

$$U'_{\Delta x д.р.} = \left( \frac{0,333\zeta_{\Delta}\delta_{\Delta x}h_{д.р.}^3}{0,222\nu\delta_{\Delta x} - 0,333\nu} \right)^{0,333}; \quad (25)$$

$$U'_{\Delta y д.р.} = \left( \frac{0,333\zeta_{\Delta}\delta_{\Delta y}h_{д.р.}^3}{0,222\nu\delta_{\Delta y} - 0,333\nu} \right)^{0,333}. \quad (26)$$

### Приклад розрахунку основних характеристик динамічної системи «крило літака — атмосферне повітря».

*Вихідні дані:* довжина крила 12 м; товщина крила змінюється за довжиною від 0,6 м до 0,15 м; кут атаки  $\alpha=12^\circ$ ;  $\mu=1,2\cdot 10^{04}$  г/см сек або 1200 кг/м сек (при  $t=-10^\circ\text{C}$  на висоті польоту 10 км);  $\rho \approx 1,25$  кг/м<sup>3</sup>;  $\nu=960$  м<sup>2</sup>/сек,  $g=3,27$ — прискорення сил земного тяжіння, м/с<sup>2</sup>;

*Розрахунок основних характеристик.* Спочатку находимо значення компонент переміщення субстанції —  $\delta_x = 0,47$  м і  $\delta_y = 0,216$  м (при  $t_k = 0,30$  м і  $b_{м.п} = 0,72$  м для ПП 2-2). Далше за цими даними визначаємо компоненти швидкості потоку субстанції —  $V_{д.р.x} = 0,0046$  м/с,  $V_{д.р.y} = 0,01$  м/с,  $V_{сер} = 0,01$  м/с (при  $\zeta_3 = \delta_x + 0,666\mu + 0,5\mu = 0,47 + 1399,20 = 1400$  кг/м сек, де прийнято  $h = b_{м.п}$ ). Потім визначаємо компоненти пульсації швидкості субстанції у пристінному шарі —  $U'_{\Delta x д.р.н.ш} = U'_{\Delta y д.р.н.ш} = 0,14$  м/с, м/с (при  $\delta_{\Delta x} = \delta_{\Delta y} = 0,004$  м і  $\zeta_{\Delta} = \zeta_3 + 0,5\nu = 1400 + 480 = 1880$  кг/м·сек і  $h = 0,72$  м),  $U_{\Delta сер} = 0,34$  м/с,  $p_{\Delta x д.р.} = p_{\Delta y д.р.} = 2,24$  кгс/м<sup>2</sup>, тиск субстанції на лобову частину крила  $p_{\Delta д.р.} = 3,16$  кгс/м<sup>2</sup> або 0,003 Па,  $Q_{x.д.р.} = 0,14$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_{y.д.р.} = 1$  м<sup>3</sup>/с (при  $h_{д.р.} = 0,72$  м),  $l_{д.р.x} = 0,43$  м.

**Підсумок.** З наведених вище матеріалів видно, що при польоті літака збурення субстанції є незначним, оскільки навколишнє середовище характеризується низькими за величиною основними вихідними параметрами.

### Список літератури

- Седов, Л. И. (1983). *Механика сплошной среды*. Москва: Наука.  
 Войткунский, Я. И., Фаддеев, Ю. И., Федяевский, К. К. (1982). *Гидромеханика*. (2-е изд., перераб. и доп.). Ленинград: Судостроение.

## МЕТОДИ І ЗАСОБИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕХНО-ЕКОЛОГІЧНИХ ПОДІЙ

**В. Г. Писаренко, С. В. Корнеєв, Ю. В. Писаренко**

*Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Київ, Україна*  
[jvpisarenko@gmail.com](mailto:jvpisarenko@gmail.com)

За останні десятиріччя в усіх технічно розвинених країнах світу збільшився інтерес до проблеми прогнозування природних і техногенних катастроф великих масштабів. Одна з причин пов'язана із збільшенням масштабів техногенного впливу господарської діяльності людини на зовнішнє природне середовище.

Серед найбільш значних техногенних катастроф варто виділити такі: великі повені, розливи нафти, аварії на підприємствах хімічної промисловості з потраплянням великої кількості високотоксичних речовин у ріки і водойми, аварії на підприємствах ядерного циклу. Значну небезпеку представляють аварії надводних і підводних суден, а також літальних апаратів у різних акваторіях океану, особливо в ситуаціях, коли аварія відбувається в зоні великих глибин океану і важких штормових умов, для яких украй складно вирішити проблеми швидкого виявлення точного місця катастрофи, де відбулося затоплення потерпілого аварію транспортного засобу.

Названі небезпечні події в роботах нашого колективу дослідників (Писаренко, Писаренко, 2005; Стенин, Писаренко, Мелкумян, 2014; Писаренко, Горин, Писаренко, Крячок, Варава, Коваль, 2014) означено як техно-екологічні події (ТЕП) у природно-технічних комплексах (об'єктах техносфери) можуть у процесі розвитку привести до надзвичайних ситуацій.

Суттєвою обставиною в розробці даної задачі (створення інтелектуалізованих мобільних пристроїв для дорозвідки і нейтралізації ТЕП), є те, що вона входить як складова частина до більш загальної актуальної проблеми, що може бути позначена як створення комплексних інтелектуальних технологій підтримки прийняття рішень за ідентифікацією виниклої ТЕП й оптимальному виборі послідовності доступних заходів щодо скорочення життєвого циклу даної ТЕП з метою мінімізації матеріального збитку (створення системи УПРАВЛІННЯ ТЕП).

Поставлена задача потребує розробки комплексу методів і засобів, включаючи інформаційне, математичне, алгоритмічне, програмне, технічне, організаційне забезпечення інформаційної технології (ІТ) для проектування спеціального технопарку інтелектуалізованих роботів (ТІР) проаналізована доступна література. Проведений аналіз показав, що в літературі можна знайти опис окремих випадків застосування інтелектуалізованих автономних мобільних носіїв апаратури дистанційного зондування для забезпечення оперативного моніторингу зон ТЕП. Практична ефективність використання описаних у літературі засобів і методів низька через рівень штучного інтелекту (ШІ), або повну відсутність ШІ у більшості так званих дистанційно керованих напіваавтономних мобільних роботів. В усіх цих випадках украй важлива для робота наявність функцій адаптації до швидкозмінних умов зовнішнього середовища в процесі виконання програми обстеження.

У галузі створення інтелектуалізованих мобільних засобів інформатики подвійного призначення за останні два десятиріччя надзвичайно збільшилася увага технічно розвинених країн до нових принципів створення автономних мобільних носіїв апаратури.

Отже в Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова проводиться теоретична розробка, дослідження і практична реалізація методів і засобів, що складають ІТ дослідницького проектування, включаючи інформаційне, математичне, алгоритмічне, програмне, технічне, організаційне забезпечення інтелектуалізованих роботів, призначених для розвідки і нейтралізації небезпечних екологічних подій.

Дослідження проводяться за загальними напрямками:

1) створення принципів структурування проблеми створення системи УПРАВЛІННЯ ТЕП у цілому, включаючи створення всієї системи інформаційно-аналітичної системи керування функціонуванням ТІР (ІАС\_tir), концепції ТІР, а також реалізацію концепції і безпосередньо ТІР для конкретних предметних галузей;

2) розробка компонент ІТ для цілей створення технопарку ТІР, включаючи розробку універсальних принципів структурування як класів ТЕП, так і оптимального синтезу типів інтелектуалізованих роботів-розвідників (ІРР) як за середовищами функціонування, так і за рівнем штучного інтелекту;

3) розробка засобів і методів оптимального проектування компонентів ІАС\_tir з урахуванням темпорально-вартісного критерію;

4) формування компонент нових ІТ, спрямованих на розширення функціональних можливостей наявних типів мобільних ІРР для включення їх у розроблювальний ТІР для задач дорозвідки і нейтралізації ТЕП;

5) проектування компоненти інформаційних технологій для імітаційного моделювання функціонування варіантів спроектованих ІРР;

б) проведення апробації розроблених принципів віртуального проектування ІРР для задач обстеження об'єктів техносфери в позаштатних ситуаціях, ускладнених нестаціонарністю зовнішнього середовища.

Запропоновані технології віртуального проектування дозволяють знизити економічні збитки для народного господарства, зберегти здоров'я і життя людей за рахунок реалізації інформаційної технології скорочення життєвого циклу ТЕП, що розвивається. Особливо важливим для практики є те, що запропоновані ІТ можна застосовувати не тільки для скорочення життєвого циклу ТЕП відомих типів, але також для тих типів ТЕП, що не зустрічалися.

Розроблені загальні принципи створення ІТ як елементів ІАС підтримки прийняття рішень у складній природно-технічній системі одержали практичну апробацію у ряді задач адаптивного керування виробничими процесами господарств Укрзалізниці, на підприємствах металургійного комплексу і гірничодобувної промисловості, розв'язаних за замовленнями державних підприємств, обслідування підводного нафтопроводу.

У роботі сформульовано задачі розробки наступних інформаційних компонентів технічного завдання на систему УПРАВЛІННЯ ТЕП, що стосуються

переліку чотирьох основних режимів її роботи (рис. 1), які подано детально в розділі 2:

- режим-1: Функціонування головного ситуаційного центру (ГСЦ);
- режим-2: Формування інформаційно-аналітичної системи верхнього рівня (ІАС\_top);
- режим-3: Функціонування інформаційно-аналітичної системи верхнього рівня (ІАС\_top, включаючи ІАС\_tir);
- режим-4: Функціонування технопарку інтелектуалізованих роботів (ТІР), призначених для дорозвідки ТЕП (під керуванням ГСЦ з використанням засобів ІАС\_tir).

У зв'язку з чисельним моделюванням розміру і форми зони впливу техногенної катастрофи розглянуто клас  $V$  управляючих впливів, для якого існує рішення задачі (початкової або крайової або початково-крайової):

$$M: t, \underline{x} \rightarrow \Phi(t, \underline{x}) \in H, t, \underline{x} \in D \quad (1)$$

рівняння еволюції вектора-функції  $\Phi(t, \underline{x})$ :

$$Q_U \Phi(t, \underline{x}) = W(t, \underline{x}), \quad (2)$$

де  $W(t, \underline{x}) \in F$ ,  $F$  — функціональний простір, якому належить математична модель  $W(t, \underline{x})$  постійно діючого джерела; оператор  $Q_U$  — нелінійний, залежний від часу  $t$ , необмежений і залежний від нестационарного керування  $U(t) \in V$ .

Для всіх  $U(t) \in V$  при  $t \in (0, T)$  можна ставити задачу синтезу такого управління  $U^*(t) \in V$ , для якого розв'язок рівняння:

$$Q_U * \Phi(t, \underline{x}) = W(t, \underline{x}) \quad (3)$$

задовольняє необхідному критерію керованості:

$$\Phi_1(t, \underline{x}) < \Phi(t, \underline{x}) < \Phi_2(t, \underline{x}), \quad t \in (0, T) \quad (4)$$

з деякими заданими мажоруючими функціями  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  з простору  $V$ .

Критерій керованості (4) у різних розділах дисертації вибирається індивідуально.

Для ІРР затонулого підводного об'єкта (рис. 2) двосторонні обмеження можливих траєкторій впливають з вимоги проїхати роботу поблизу необхідної ділянки поверхні обстежуваного об'єкта за умови мінімізації ризику бути захопленим потоком вихрових придонних течій за корпусом цього затонулого об'єкта.



Рис. 2. Дослідницький робот підводного базування

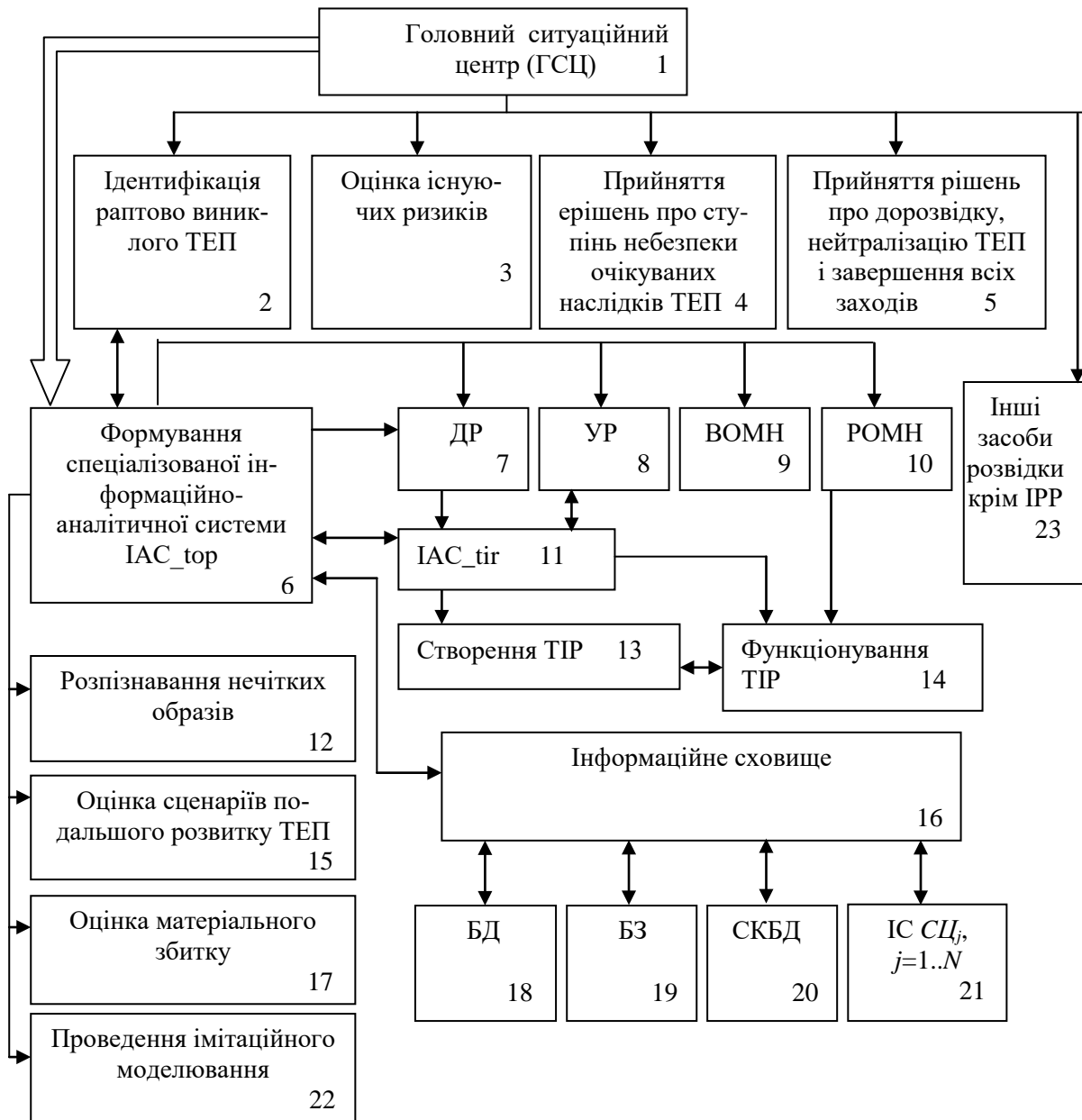


Рис. 1. Структурно-функціональна граф-схема основних режимів функціонування інтелектуальної системи УПРАВЛІННЯ\_ТЕП.

Позначення: ДР — дорозвідка; УР — уточнення ризиків;  
 ВОМН — вибір оптимальних мір нейтралізації;  
 РОМН — реалізація оптимальних мір нейтралізації.

### Список літератури

- Писаренко, В. Г., Горин, Ф. Н., Писаренко, Ю. В., Крячок, А. С., Варава, І. А., Коваль, А. С. (2014). *Інформаційні технології штучного інтелекту для шахтної безпеки*. Київ: НТУУ «КПІ» ІПІ ІПК «Політехніка».
- Писаренко, В. Г., Писаренко, Ю. В. (2005). Вопросы виртуального проектирования систем, ориентированных на создание интеллектуализированных роботов для мониторинга экстремальных состояний техносферы. Часть 1. *УСiМ*, Київ. (4), 8—18.
- Стенин, А. А., Писаренко, Ю. В., Мелкумян, Е. Ю. (2014). *Экстремальная робототехника в автоматизированном мониторинге техно-экологических происшествий*. — Київ: НТУУ «КПІ», ІПІ ІПК «ПОЛІТЕХНІКА».

**НЕКОТОРЫЕ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ  
РЯДА ВЕРОЯТНЫХ ПРИЗНАКОВ ВЛИЯНИЯ  
ПРИСУТСТВИЯ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ ВО ВСЕЛЕННОЙ  
НА АНОМАЛЬНЫХ УЧАСТКАХ ОРБИТ СОЛНЦА И ЗЕМЛИ  
ВОКРУГ ЦЕНТРА ГАЛАКТИКИ**

**В. Г. Писаренко, Ю. В. Писаренко**

*Институт кібернетики імені В. М.Глушкова НАН України, Київ, Україна*

[jvpisarenko@gmail.com](mailto:jvpisarenko@gmail.com)

Последние международные исследования с космических аппаратов, включая космический аппарат «Планк» и др., позволили обнаружить большое количество масс материи, которые себя никак не проявляют в форме «привычного для астрономии» излучения в оптическом, инфракрасном, миллиметровом и других диапазонах электромагнитных волн. При этом теоретически специалистам удалось доказать, что эти последние наблюдения черной материи указывают, во-первых, на неравномерность ее распределения в космическом пространстве в масштабах Солнечной системы нашей Галактики, но и, во-вторых, на то, что можно получить вывод о том, что масса темной материи составляет более 95% всей массы материи (святящейся и темной суммарно). Более того, анализ признаков периодичности активизации мощных процессов массопереноса в жидком ядре и мантии Земли, как планеты, коррелирует во времени с прохождением Солнечной системы, включая Землю, по галактической орбите вокруг центра нашей Галактики. В связи с этим, геофизиками и геологами выдвинуто достаточно правдоподобная гипотеза, что такая активизация массопереноса в недрах Земли (Писаренко, Писаренко, 2000) связана с прохождением нашей планеты через зоны влияния скоплений темной материи, входящей в состав нашей Галактики.

Согласно гипотезе (Писаренко, Писаренко, 2000), возможное воздействие на недра Земли невидимых масс темной материи является экстремальным эквивалентом приливных сил небесного тела на Земные недра, подобные, но в значительно больших масштабах, известным приливному эффектам от движения Луны по орбите вокруг Земли, приводящей к статистически значимому возрастанию частоты землетрясения на нашей планете.

Процессы активизации гигантского массопереноса в недрах Земли, по мнению ряда ведущих специалистов в области геофизики и геологии, связаны со сменой геологических эпох, хорошо известных в науках о Земле,— планетологии.

Логическая и математическая технология вывода гипотезы следующая:

а) твердо установленный геофизиками и геологами факт квазипериодической ритмики в активизации массопереноса в недрах планеты Земля;

б) наработанная технология в математической геофизике моделирования процессов активизации движения пластичных масс мантии земной коры Земли;

в) математический аппарат решения обратной задачи математической физики о восстановлении внешних сил в большом объеме квазитвердого те-

ла, исходя из данных о перемещении масс внутри данного объема упруго-пластичного уединенного тела (Тихонов, Самарский, 1999).

Данная гипотеза использует некоторые заключения геологов и геофизиков о квазипериодическом характере резкой (значительной) активизации массопереноса в мантии Земли, проявляющейся в катастрофических процессах вулканической деятельности, быстрого горообразования и/или опускания частей континентов Земли ниже уровня Мирового Океана Чебаненко, И. И. (1964, 1977).

Пример расчета приливных сил во вращающемся небесном теле с использованием метода общей теории относительности (Pisarenko, Kryshstal, Selivanov, 1981) получены в работе Писаренко (1977).

### Список литературы

- Pisarenko, V. G., Kryshstal, A. N., & Selivanov, Yu. A. (1981). Modelling of rotating neutron star using exact solutions of Einstein's equations. *Acta Astronautica*, 8 (8), 831–838.
- Писаренко, В. Г. (1977). Семейство точных решений уравнений общей теории относительности для метрики с вращением в присутствии материи. *ДАН Украины. Сер. А.*, (7), 645—649.
- Писаренко, Г. С., Писаренко, В. Г. (2000). Некоторые задачи нелинейной механики в геофизике, планетологии и проблемах прочности материала. *Проблемы прочности*, (05).
- Тихонов, А. Н., Самарский, А. А. (1999). *Уравнения математической физики*. Москва: Издательство Московского университета.
- Чебаненко, И. И. (1964). *Проблема складчатых поясов земной коры*. Киев: Наукова думка.
- Чебаненко, И. И. (1977). *Теоретические аспекты тектонической делимости земной коры (на примере Украины)*. — Киев: Наукова думка.

# КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТА ТЕОРІЯ БІФУРКАЦІЙ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА

О. О. Покутний

*Інститут математики НАН України,  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
alexpoker@imath.kiev.ua, lenasas@gmail.com*

*Робота підтримана грантом  
Президента України для молодих учених*

Дана доповідь присвячена дослідженню сингулярно-збуреної крайової задачі наступного вигляду

$$\varepsilon \frac{dX(t, \varepsilon)}{dt} = [A, X(t, \varepsilon)] + \varepsilon C(t)X(t, \varepsilon) + F(t), t \in J \quad (1)$$

$$lX(\cdot, \varepsilon) = a, \quad (2)$$

у просторі Гільберта  $H$ . Тут операторнозначні функції  $C(t)$ ,  $F(t)$  при кожному  $t \in R$  є обмеженими лінійними операторами;  $J$  — деякий відрізок, оператор-функція  $F(t) \in C^1(J, L(H))$ ,  $A \in L(H)$ ,  $[\cdot, \cdot]$  — комутант операторів,  $[A, X(t)] = AX(t) - X(t)A$ .

Шукається розв'язок  $X(t, \varepsilon) \in C^1(J, L(H))$  крайової задачі (1), (2), який при  $\varepsilon = 0$  обертається на один з розв'язків операторної крайової задачі

$$[A, X_0(t)] = -F(t), \quad (3)$$

$$lX_0(\cdot) = a. \quad (4)$$

Лінійний обмежений оператор  $l$  діє з простору  $C^1(J, L(H))$  у простір Гільберта  $H_1$ . Для розв'язання поставленої задачі дослідимо спочатку питання щодо розв'язності крайової задачі для операторного рівняння Ляпунова (3), (4).

Запровадимо наступне позначення

$$LX(t) := [A, X(t)] = AX(t) - X(t)A.$$

Розв'язок крайової задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді ряду

$$X(t, \varepsilon) = X_0(t) + \varepsilon X_1(t) + \varepsilon^2 X_2(t) + \dots + \varepsilon^i X_i(t) + \dots$$

Для коефіцієнта  $X_0(t)$  отримаємо крайову задачу (3), (4). Для її розв'язання будемо використовувати поняття псевдо-оберненого за Муром — Пенроузом (Бойчук, Самойленко, 2004)) та сильного псевдо-оберненого (Покутний, 2013) оператора. Операторне рівняння (3) буде розв'язним тоді й тільки тоді, коли виконується наступна умова розв'язності

$$P_{N(L^*)} F(t) = 0. \quad (5)$$

За виконання умови розв'язності (5) операторне рівняння (3) буде мати



розв'язок у вигляді

$$X_0(t) = -L^+F(t) + P_{N(L)}C,$$

для довільного лінійного обмеженого оператора  $C$  з простору Гільберта  $H$ .

Підставляючи цей розв'язок у крайову умову (4) отримаємо наступне рівняння для визначення оператора  $C$ :

$$QC = a + lL + F(\cdot). \quad (6)$$

Операторне рівняння (6) буде розв'язним тоді й тільки тоді, коли виконуватиметься умова розв'язності

$$P_{N(Q^*)}\{a + lL + F(\cdot)\} = 0. \quad (7)$$

За виконання умови (7) розв'язки рівняння (6) будуть мати вигляд

$$C = Q^+\{a + lL + F(\cdot)\} + P_{N(Q)}C_1,$$

для довільного лінійного обмеженого оператора  $C_1$  з простору  $H$ . Тоді розв'язок крайової задачі (3), (4) буде мати вигляд

$$X_0(t) = -L^+F(t) + P_{N(L)}Q^+\{a + lL + F(\cdot)\} + P_{N(L)}P_{N(Q)}C.$$

Наступні члени ряду знаходяться ітеративно.

### Список літератури

- Boichuk, A. A., & Samoilenko, A. M. (2004). *Generalized invertible operators and Fredholm Boundary-Value Problems*. Utrecht—Boston: VSP.
- Покутний, О. А. (2013). Узагальнено-обернений оператор в просторах Фреше, Банаха та Гільберта. *Вісник КНУ, серія фіз.-мат. науки*, (4), 158—161.

**ВЕКТОР-ФУНКЦІЯ ГРІНА ЗАДАЧІ КОШІ  
ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАНОГО ДВОКАЛОРИЧНОГО РІВНЯННЯ  
ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ**

**А. М. Пономаренко, С. Д. Івасишен**

*НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна*

[Ponomarenko\\_kpi@ukr.net](mailto:Ponomarenko_kpi@ukr.net)

Розглядається така задача Коші:

$$\begin{aligned} (Lu)(t, x) &= (\partial_t - a_1^2 \Delta_x - b_1)(\partial_t - a_2^2 \Delta_x - b_2)u(t, x) = f(t, x), \quad t > 0, \\ & \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(t, x)|_{t=0} &= \phi_1(x), \quad \partial_t u(t, x)|_{t=0} = \phi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$\{a_1, a_2\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \{b_1, b_2\} \subset \mathbb{R}, \quad x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \Delta_x := \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2.$$

Вектор-функцією Гріна задачі Коші називаємо вектор-функцію

$$G := (G_1, G_2, G_3)$$

таку, що для досить гладких і фінітних функцій  $f, \phi_1, \phi_2$  розв'язок задачі (1) зображується у вигляді

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi + \sum_{k=1}^2 \int_{\mathbb{R}^n} G_k(t, x - \xi) \phi_k(\xi) d\xi, \\ & \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Знайдено такі формули для компонент вектор-функції Гріна:

$$\begin{aligned} G_0(t, x) &= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z_{a_2, b_2}(t - \tau, x - \xi) Z_{a_1, b_1}(\tau, \xi) d\xi, \\ G_1(t, x) &= Z_{a_2, b_2}(t, x) - a_2^2 \left[ \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x Z_{a_2, b_2}(t - \tau, x - y) Z_{a_1, b_1}(\tau, y) dy + \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z_{a_2, b_2}(t - \tau, x - y) \Delta_\xi Z_{a_1, b_1}(\tau, y) dy \right] - \\ & \quad - b_2 \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z_{a_2, b_2}(t - \tau, x - y) Z_{a_1, b_1}(\tau, y) dy, \\ G_2(t, x) &= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z_{a_2, b_2}(t - \tau, x - \xi) Z_{a_1, b_1}(\tau, \xi) d\xi, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

де

$$Z_{a,b}(t, x) := \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \exp \left\{ bt - \frac{|x|^2}{4a^2 t} \right\}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

— фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння

$$\left( \partial_t - a_j^2 \Delta_x - b_j \right) v(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Установлено, що для функцій  $G_0$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  та їх похідних справджуються оцінки

$$\begin{aligned} \left| \partial_t^{k_0} \partial_x^k G_0(t, x) \right| &\leq C_{k_0 k} t^{-(n+2(k_0-1)+|k|)/2} (t+1)^{k_0} \exp \left\{ bt - c \frac{|x|^2}{t} \right\}, \\ \left| \partial_t^{k_0} \partial_x^k G_1(t, x) \right| &\leq C_{k_0 k} t^{-(n+k_0+|k|)/2} (t+1)^{k_0+1} \exp \left\{ bt - c \frac{|x|^2}{t} \right\}, \\ \left| \partial_t^{k_0} \partial_x^k G_2(t, x) \right| &\leq C_{k_0 k} t^{-(n+2(k_0-1)+|k|)/2} (t+1)^{k_0} \exp \left\{ bt - c \frac{|x|^2}{t} \right\}, \end{aligned}$$

де  $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+^n$ ,  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b := \max \{b_1, b_2\}$ ,  $C_{k_0 k}$  і  $c$  — додатні сталі.

Ці результати для вектор-функції Гріна використовуються подібно до того, як у працях Івасишена та Кондур (1995), Івасишин (1998) і Eidelman, Ivasyshen, Kochubei (2004), для доведення теорем про коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задачі Коші (1), а також дослідження властивостей розв'язків на необмежених часових інтервалах.

### Список літератури

- Eidelman, S. D., Ivasyshen, S. D., & Kochubei, A. N. (2004). *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type* (Vol. 152). Springer Science & Business Media.
- Івасишен, Л. М. (1998). Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних систем високого порядку по часовій змінній у півпросторі  $\mathbb{R}_+^{n+1}$ . *Доповіді НАН України*, (1), 17—23.
- Івасишен, С. Д., Кондур, О. С. (1995). Про матрицю Гріна задачі Коші для загальної параболічної за Петровським системи. *Матеріали міжнар. матем. конф., присвяченої пам'яті Ганса Гана, Чернівці* (с. 119—141). Чернівці.

# СИНГУЛЯРНІ РІВНЯННЯ КВАЗІСТАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ СТУПЕНЕВИХ ПЛАСТИН

Я. С. Пушак, А. С. Пушак

Українська академія друкарства, Львів, Україна

Yaroslav.Pushak@gmail, apushak@gmail.com

Розглянемо нескінчену багатоступеневу пластину товщиною  $2h(r)$ , на відстані  $R$  від центра, по циліндричній поверхні  $r = R$  якої діє джерело тепла потужністю  $q$ . Бокові поверхні  $z = \pm h(r)$  пластини припускаються тепло ізольованими. Для визначення виникаючого в пластині неустановленого температурного поля маємо відоме рівняння теплопровідності (Коваленко, 1964), яке в нашому випадку приймає вигляд:

$$\Delta T + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{q}{\lambda_t} \delta(r - R) S_+(\tau), \quad (1)$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $S_+(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0 & \tau \leq 0 \end{cases}$  — асиметрична функція;  $\delta(\xi)$  — дельта

функція Дірака;  $a$ ,  $\lambda_t$  — відповідно коефіцієнти теплопровідності і температуропровідності;  $\tau$  — час.

Крайові умови мають вигляд

$$T|_{r=0} \neq \infty, \quad T|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad T|_{\tau=0} = 0. \quad (2)$$

Півтовщину такої пластини можна представити у вигляді

$$h(r) = h_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (h_{k+1} - h_k) S_+(r - R_k) \quad (3)$$

де  $h_k$  — пів товщина  $k$ -ї ступеньки пластини;  $R_k$  — її зовнішній радіус. Підставимо (3) в (1), використовуючи встановлені в Коляно, Попович (1976) тотожності. У результаті приходимо до рівності

$$\Delta T + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{h_k}{h_{k+1}}\right) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_k} \delta_+(r - R_k) = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{q}{\lambda_t} \delta(r - R) S_+(\tau) \quad (4)$$

де  $\delta_+(\xi) = \frac{dS_+(\xi)}{d\xi}$ .

Застосувавши до (4) перетворення Лапласа по  $\tau$  і перетворення Ханкеля по  $r$  з врахуванням (2) отримаємо

$$\bar{T} = \frac{1}{\alpha^2 + \frac{s}{a}} \left[ \frac{qR}{\lambda_t s} I_0(\alpha R) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{h_k}{h_{k+1}}\right) \frac{d\bar{T}}{dr} \Big|_{r=R_k} R_k J_0(\alpha R_k) \right] \quad (5)$$

де  $\alpha$ ,  $s$ , — параметри перетворення Ханкеля і Лапласа відповідно;  $I_\gamma(\xi)$  — функція Бесселя першого роду.

Використовуючи обернене перетворення Ганкеля, знаходимо зображення Лапласа температури у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{T} = & \frac{qR}{\lambda_t s} \left\{ I_0 \left( r \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a}} \right) + \left[ I_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( r \sqrt{\frac{s}{a}} \right) S(r - R) - \right. \right. \\ & \left. \left. - I_0 \left( r \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \right] S(r - R) \right\} + \sum_{k=1}^{n-1} \left( 1 - \frac{h_k}{h_k + 1} \right) \frac{d\bar{T}}{dr} \Big|_{r=R_k} \times \\ & \times R_k \left\{ I_0 \left( r \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( R_k \sqrt{\frac{s}{a}} \right) + \right. \\ & \left. + \left[ I_0 \left( R_k \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( r \sqrt{\frac{s}{a}} \right) - I_0 \left( r \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( R_k \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \right] S_+(r - R_k) \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

де  $I_\nu(\xi)$  — модифікована функція Беселя;  $K_\nu(\xi)$  — функція Макдональда.

Продиференціювавши (6) по  $r$  і прийнявши  $r = R_i$ , для визначення

$\frac{d\bar{T}}{dr} \Big|_{r=R_i}$  отримаємо наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}}{dr} \Big|_{r=R_i} = & \sqrt{\frac{s}{a}} \left\langle \frac{qR}{\lambda_t s} \left[ I_1 \left( R_i \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a}} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left[ I_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_1 \left( R_i \sqrt{\frac{s}{a}} \right) + I_1 \left( R_i \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \right] S(R_i - R) \right\} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \left( 1 - \frac{h_k}{h_k + 1} \right) \frac{d\bar{T}}{dr} \Big|_{r=R_k} \cdot R_k \left\{ I_1 \left( R_1 \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( R_k \sqrt{\frac{s}{a}} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left[ I_0 \left( R_k \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_1 \left( R_i \sqrt{\frac{s}{a}} \right) + I_1 \left( R_i \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( R_k \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \right] S_+(R_i - R_k) \right\} \right\rangle. \quad (7) \end{aligned}$$

У винятку, коли  $n = 2$  (двоступенева пластинка) маємо

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}}{dr} \Big|_{r=R_1} = & \frac{qR}{\lambda_t \sqrt{as}} \left[ I_1 \left( R_1 \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a}} \right) S(R - R_1) - \right. \\ & \left. - I_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_1 \left( R_1 \sqrt{\frac{s}{a}} \right) S(R_1 - R_1) \right] \times \left[ 1 - \left( 1 - \frac{h_1}{h_2} \right) R_1 \sqrt{\frac{s}{a}} I_1 \left( R_1 \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( R_1 \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \right]^{-1} \quad (8) \end{aligned}$$

Підставивши (8) у (6) при  $n = 2$ , отримаємо для цього випадку таке зображення температури:

$$\begin{aligned}
\bar{T} = & \frac{qR}{\lambda_t s} \left[ I_0 \left( r \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a}} \right) S(R-r) + I_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( r \sqrt{\frac{s}{a}} \right) S(r-R) \right] + \\
& + \left( 1 - \frac{h_1}{h_2} \right) \frac{qRR_1}{\lambda t \sqrt{as}} \times \\
& \times \left[ I_1 \left( R_1 \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a}} \right) S(R-R_1) - I_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_1 \left( R_1 \sqrt{\frac{s}{a}} \right) S(R_1-R) \right] \times \\
& \times \left[ 1 - \left( 1 - \frac{h_1}{h_2} \right) \sqrt{\frac{s}{a}} R_1 I_1 \left( R_1 \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( R_1 \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \right]^{-1} \times \\
& \times \left[ I_0 \left( r \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( R_1 \sqrt{\frac{s}{a}} \right) S + (R_1 - r) + I_0 \left( R_1 \sqrt{\frac{s}{a}} \right) K_0 \left( r \sqrt{\frac{s}{a}} \right) S + (r - R_1) \right]. \quad (9)
\end{aligned}$$

Переходячи в (9) до оригіналів, знаходимо температурне поле в двоступеневій пластині:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{qR}{\lambda_t} \left\{ \int_0^\infty J_0(\lambda R) J_0(\lambda r) (1 - e^{-a\lambda^2 \tau}) \frac{d\lambda}{\lambda} + \left( 1 - \frac{h_1}{h_2} \right) \times \right. \\
& \times R_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda R_1)}{\omega_1^2(\lambda)} \left[ J_0(\lambda R) \left( S(R-R_1) + \frac{h_1}{h_2} S(R_1-R) \right) + \right. \\
& + \left. \left( 1 - \frac{h_1}{h_2} \right) \lambda R_1 \frac{\pi}{2} J_1(\lambda R_1) V_0(\lambda R_1, \lambda R) S(R-R_1) \right] \times \\
& \left. \times \left[ \frac{e^{-a\eta^2 \tau} - 1}{\eta} + \eta \frac{e^{-a\eta^2 \tau} - e^{-a\lambda^2 \tau}}{\lambda^2 - \eta^2} \right] d\lambda d\eta \right\}, \quad (10)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\omega_1^2(\lambda) = & \left[ 1 - \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{h_1}{h_2} \right) \lambda R_1 J_1(\lambda R_1) Y_0(\lambda R_1) \right]^2 + \\
& + \left( 1 - \frac{h_1}{h_2} \right)^2 \frac{\pi^2}{4} \lambda^2 R_1^2 J_0^2(\lambda R_1) J_1^2(\lambda R_1) \\
V_0(\lambda R_1, \lambda R) = & J_0(\lambda R_1) Y_0(\lambda R) - J_0(\lambda R) Y_0(\lambda R_1)
\end{aligned}$$

де  $Y_\nu(\xi)$  — функція Бесселя другого роду.

### Список літератури

- Коваленко, А. Д. (1964). *Круглые пластины переменной толщины*. Москва: Наука.  
Коляно, Ю. М., Попович, В. С. (1976). Об одном эффективном методе решения задач термоупругости для кусочно-однородных тел, нагреваемых внешней средой. *Физико-хим. Механика материалов*, 2, 108 — 112.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ ЛАЗЕРА С ПРОСВЕТЛЯЮЩИМСЯ ФИЛЬТРОМ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕЙ ПОДСВЕТКИ

В. А. Ранцевич, Н. В. Спичекова

*БГУИР, Минск, Беларусь*

[rvbrva@tut.by](mailto:rvbrva@tut.by), [n.spichekova@gmail.com](mailto:n.spichekova@gmail.com)

Известно, что кинетику генерации оптического квантового генератора можно описать системой уравнений Максвелла для поля и системой уравнений для матрицы плотности вещества, но решение их даже в случае простейших моделей лазеров представляет собой сложную задачу. Данную задачу можно упростить путем перехода к точечной модели, если не учитывать распределение поля и поляризацию вещества по длине активных элементов. Замена распределенной модели точечной моделью приемлема, если характеристики элементов лазера и поля излучения незначительно изменяются по длине, в противном случае, каждый элемент можно разбить на несколько частей, в пределах которых характеристики вещества и поля постоянны. Такой подход аналогичен обычному способу интегрирования системы дифференциальных уравнений (Самсон, 1979). В работах Самсон (1984, 1985) именно такие системы балансных уравнений исследованы методами качественной теории дифференциальных уравнений и полученные результаты соответствовали проведенным экспериментам. Лазер с просветляющимся фильтром является одним из интереснейших объектов исследования в теории и на практике. В резонаторе такого лазера имеется ячейка с веществом, поглощение которого уменьшается под действием генерируемого излучения, т.н. просветляющийся фильтр, что приводит к возможности наблюдать все виды режимов работы: стационарную генерацию, автоколебания, хаотические пульсации. Влияние внешней подсветки на кинетику генерации лазера с просветляющимся фильтром рассмотрено впервые в работах Ранцевич, Самсон (1987, 1989). Установлено, что облучение просветляющегося фильтра внешним источником излучения может обеспечить лазерной системе новые свойства и дает возможность бесконтактного дистанционного управления ею, управление светом с помощью света. Целью доклада является демонстрация такого управления лазером с помощью численного моделирования режимов при конкретных параметрах системы.

Рассмотрим систему балансных уравнений, описывающую динамику генератора с инерционным просветляющимся фильтром при наличии внешней подсветки  $u_0$ .

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = vu(y - 1 - x) + vu_0, \\ \frac{dy}{dt} = y_0 - y - yu, \\ \frac{dx}{dt} = q(x_0 - x - \sigma ux). \end{cases}$$

Входящие в систему переменные и параметры имеют следующий физический смысл: переменная  $u$  характеризует отношение вероятности вынужденного перехода в канале генерации к вероятности релаксации активного вещества (пропорционально плотности генерируемого излучения);  $y, y_0$  — соответственно коэффициент усиления и ненасыщенный коэффициент усиления за счет фильтра;  $x, x_0$  — коэффициент поглощения фильтра и ненасыщенный коэффициент потерь за счет фильтра;  $\sigma$  — безразмерный параметр нелинейности; параметр  $q$  обратно пропорционален времени релаксации фильтра в относительных величинах, параметр  $v$  — пропорционален скорости света, коэффициенту заполнения активным веществом резонатора, коэффициенту потерь, не зависящему от  $u$  и обратно пропорциональный вероятности релаксации;  $u_0$  характеризует интенсивность внешней подсветки. Безразмерное время  $t$  равно произведению времени на вероятность релаксации активного вещества. Переменные  $u, y, x$  и все параметры неотрицательны и изменяются в широких пределах, обусловленных выбором усиливающей среды и фильтра. Количество особых точек системы в зависимости от параметров  $x_0, y_0, \sigma$  и  $u_0$  варьируется от одной особой точки до трех. Координаты особых точек системы определяются из уравнений

$$u^3 - u^2(u_0 + B) - u(u_0(1 + \sigma) - \delta)\sigma^{-1} - u_0\sigma^{-1} = 0, \quad y = \frac{y_0}{1 + u},$$

$$x = \frac{x_0}{1 + \sigma u}.$$

Коэффициенты  $B, \delta$  зависят от параметров  $x_0, y_0, \sigma$ , которые и играют определяющую роль на возможность количественной реализации особых точек. Введение замены переменной позволяет перейти к кубическому уравнению канонического вида  $\bar{u}^3 - P\bar{u} - Q = 0$ , которое определяет двумерное многообразие катастрофы сборки. Внутри области, имеющей форму сборки, система имеет при одном и том же значении мощности внешней подсветки три изолированные особые точки, вне границы — единственную особую точку и на границе — две особые точки, одна из которых дважды вырожденная, в начале координат — единственная, трижды вырожденная особая точка. Проекция равновесной поверхности на плоскость управляющих параметров  $P, Q$  представляет собой кривую, описываемую уравнением  $27Q^2 - 4P^3 = 0$ . Полученные аналитические выражения для границ в пространстве этих параметров позволяют определить области существования различной конфигурации равновесных кривых (рис. 1).



Как видно из проведенных вычислений, области 3 и 4 с ростом  $\sigma$  сокращаются. В области 1 реализуется 1-й тип кривой, которая однозначна при  $u_0 > 0$ , в области 2 — при  $u_0 \in [0, a]$  система имеет три особые точки, в области 3 — интервал многозначности не включает  $u_0 = 0$ , в области 4 — равновесная кривая всюду однозначна, но содержит точку перегиба.

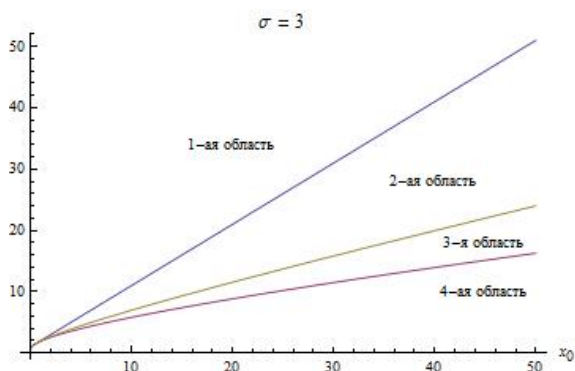


Рис.1.а

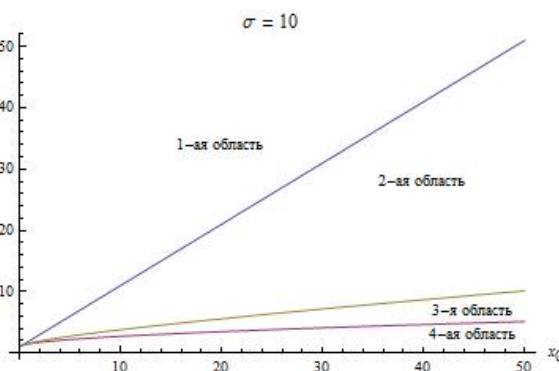


Рис.1.б

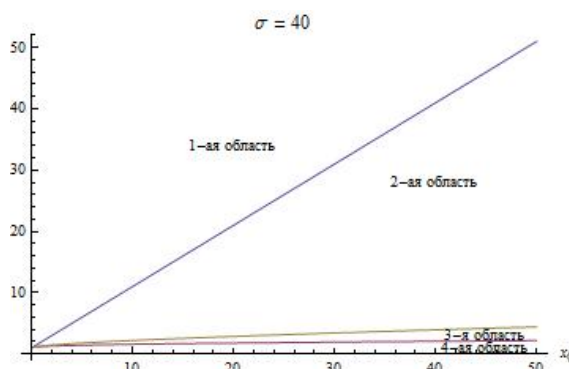


Рис. 1.в

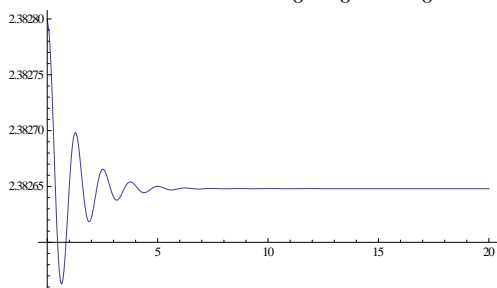
Линеаризация системы в окрестности особых точек и анализ корней характеристического уравнения позволил установить, что в случае трех особых точек, средняя всегда имеет тип седло-фокус или седло-узел, а устойчивость остальных точек определяется знаком выражения

$$T_2 = v^2 q d_0 + v q^2 d_1 + v^2 d_2 + q^2 d_3 + v q d_4 + v d_5 + q d_6,$$

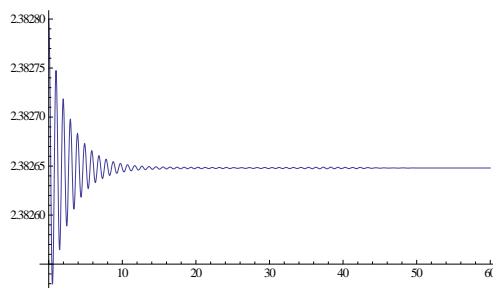
где  $d_i = d_i(x_0, y_0, \sigma, u_0)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 6$ .

Построение проекций поверхности  $T_2 = 0$  при одном и том же фиксированном значении внешней подсветки  $u_0$  на плоскость  $v, q$  для внешних особых точек позволило осуществлять подбор параметров  $v$  и  $q$  так, чтобы были различные сочетания по устойчивости у положений равновесия: два устойчивых фокуса, устойчивый узел и фокус, неустойчивый фокус и устойчивый узел и т.д. Установлено, что при малых значениях одного из параметров  $v$  или  $q$  нельзя перевести устойчивую особую точку в состояние неустойчивости никаким увеличением другого параметра релаксации. Исследование знака первой

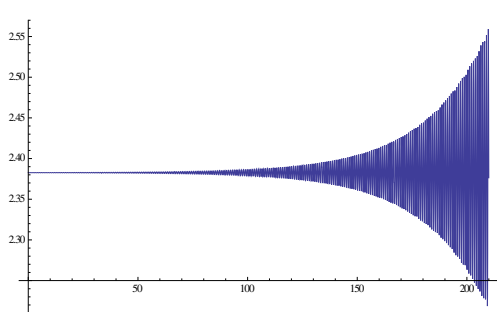
ляпуновской величины вдоль бифуркационной поверхности негрубого фокуса позволило уточнить качественную картину динамических режимов. Установлено, что в зависимости от параметров  $u_0, v, q$  можно получать моно-, би— и трехстабильность в работе лазера, а также осуществлять мягкое или жесткое возбуждение колебаний. Качественные фазовые портреты подтверждены численными расчетами на ПК. Ниже приведены расчеты интегральной кривой системы на плоскости  $t, u$  при изменении только параметра  $v$  при одних и тех же параметрах системы  $x_0, y_0, \sigma, u_0$  и одинаковых начальных данных.



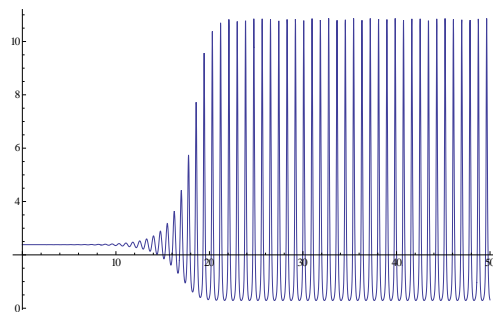
$v = 12$



$v = 20$



$v = 27$



$v = 37$

### Список литературы

- Ранцевич, В. А., Самсон А. М. (1987). Полистабильность, автоколебания и гистерезис в лазере с просветляющимся фильтром при внешней подсветке. Препринт / Ин-т физики АН БССР: №452. Минск.
- Ранцевич, В. А., Самсон, А. М. (1989). О предельных циклах динамической системы, моделирующей работу лазера. *Дифф.уравн.*, (4), 48—53.
- Самсон, А. М. (1979). *Высокочастотная автомодуляция излучения лазеров генерация сверхкоротких импульсов*. Препринт / Ин-т физики АН БССР: № 189. Минск.
- Самсон, А. М. (1984). *Равновесные состояния, автоколебания, полистабильность и гистерезисные явления в лазере с просветляющимся фильтром*. Препринт / Ин-т физики АН БССР: №321. Минск: 1984.
- Самсон, А. М. (1985). Разнообразие режимов генерации, полистабильность и гистерезисные явления в лазерах с просветляющимися фильтрами. *ЖПС*, 42 (2), 181—192.

**О ПОСТАНОВКЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА — ДАРБУ  
В ОБЛАСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ДВЕ ЛИНИИ  
СИНГУЛЯРНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ**

**И. Н. Родионова, В. М. Долгополов, М. В. Долгополов**  
*Самарский государственный аэрокосмический университет*  
*им. академика С. П. Королева, Самара, Россия*  
[mikhaildolgoplov@rambler.ru](mailto:mikhaildolgoplov@rambler.ru)

Уравнение

$$U_{\xi\eta} - \frac{p}{\eta - \xi \operatorname{sgn} \eta} U_{\xi} + \frac{p}{-\xi + \eta \operatorname{sgn} \eta} U_{\eta} - \operatorname{sgn} \eta \cdot \lambda U = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda, p — \operatorname{const}, |\lambda| < \infty, 0 < p < \frac{1}{2}$  рассматривается на множестве

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4, \quad D_1 = \{(\xi, \eta) / 0 < \xi < \eta < h\}, \\ D_2 = \{(\xi, \eta) / 0 < \eta < \xi < h\}, \quad D_3 = \{(\xi, \eta) / 0 < -\eta < \xi < h\}, \\ D_4 = \{(\xi, \eta) / 0 < \xi < -\eta < h\}, \quad h > 0.$$

Для уравнения (1) получены в явном виде решения следующих задач.

**Задача I** ( $\Delta_2$ ). На множестве  $D$  найти решение уравнения (1) непрерывное в  $\overline{D}$ , удовлетворяющее граничным условиям:

$$U(\xi, h) = \varphi_1(\xi), \quad U(\xi, -h) = \varphi_2(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq h \quad (2)$$

и условиям сопряжения

$$\nu_1(\xi) = \lim_{\eta \rightarrow \xi+0} (\eta - \xi)^{-2p} (U_{\xi} - U_{\eta}) = - \lim_{\eta \rightarrow \xi-0} (\xi - \eta)^{-2p} (U_{\xi} - U_{\eta}) = -\nu_2(\xi), \\ \nu_3(\xi) = \lim_{-\eta \rightarrow \xi-0} (\eta + \xi)^{-2p} (U_{\xi} + U_{\eta}) = - \lim_{-\eta \rightarrow \xi+0} (-\xi - \eta)^{-2p} (U_{\xi} + U_{\eta}) = -\nu_4(\xi), \\ \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) = \lim_{\eta \rightarrow 0-0} \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \right).$$

**Задача II** (со смещением). отличается от Задачи I тем, что условия (2) заменяются условиями:  $U(\xi, -h) + U(h, -\xi) = \psi_1(\xi)$ ,  $U(\xi, h) + U(h, \xi) = \psi_2(\xi)$ , а также рассматриваются два варианта сопряжения на линиях  $\eta = \xi$  и  $\eta = -\xi$ :

- а)  $\nu_1 = \nu_2, \quad \nu_3 = \nu_4,$
- б)  $\nu_1 = -\nu_2, \quad \nu_3 = -\nu_4.$

Обе задачи сводятся к совокупности однозначно разрешимых интегральных уравнений. За основу решения обеих задач взяты результаты, полученные авторами в работах, указанных в списке литературы.

### Список литературы

- Долгополов, В. М., Долгополов, М. В., Родионова, И. Н. (2009). Построение специальных классов решений некоторых дифференциальных уравнений гиперболического типа. *Доклады Академии наук, математика*, 429 (5), 583—589.
- Долгополов, В. М., Родионова, И. Н. (2012). *О постановке краевых задач для одного пространственного аналога уравнения гиперболического типа*. В Материалах Четырнадцатой международной научной конференции имени академика М. Кравчука, 19—21 апреля 2012 г., Киев (т. 1, с. 168). Киев: НТУУ «КПИ».
- Долгополов, М. В., Родионова, И. Н. (2010). *О постановке краевых задач для одного пространственного аналога гиперболического уравнения*. В Материалах Тринадцатой международной научной конференции имени академика М. Кравчука, 13—15 мая 2010 г., Киев (т. 1, с. 143). Киев: НТУУ «КПИ».
- Долгополов, М. В., Родионова, И. Н. (2011). Задачи для уравнений гиперболического типа на плоскости и в трехмерном пространстве с условиями сопряжения на характеристике. *Изв. РАН. Сер. матем.*, 75 (4), 21—28.
- Долгополов, М. В., Родионова, И. Н. (2013). *Аналог задачи  $\Delta_1$  для гиперболического уравнения второго порядка в трехмерном евклидовом пространстве*. В Материалах Международной научно-практической конференции «Математика в современном техническом университете», 19—20 апреля 2013 г., Киев (с. 51). Киев: НТУУ «КПИ».

**РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ НАСЫЩЕННОГО ПОРИСТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА**

**Е. В. Савельева, С. В. Синчило, Я. В. Симчук, И. Г. Коваленко**

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,  
НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина  
[ksav@hotmail.ru](mailto:ksav@hotmail.ru)*

Работа посвящена решению пространственно-двумерной задачи для случая действия на границе вязкоупругого пористого полупространства источника упругих перемещений. В качестве теоретической схемы, описывающей свойства среды, была выбрана классическая линейная схема Био [1, 2, 4, 7, 8].

Задача, согласно принятой теоретической схеме Био, сводится к решению системы двух связанных дифференциальных уравнений движения:

для скелета

$$\begin{aligned} (A + N) \frac{\partial e^{(s)}}{\partial x} + N \nabla^2 u^{(s)} - \rho_{11} \frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial t^2} - b \frac{\partial u^{(s)}}{\partial t} &= \rho_{12} \frac{\partial^2 u^{(f)}}{\partial t^2} - b \frac{\partial u^{(f)}}{\partial t} - Q \frac{\partial e^{(f)}}{\partial x}, \\ (A + N) \frac{\partial e^{(s)}}{\partial y} + N \nabla^2 v^{(s)} - \rho_{11} \frac{\partial^2 v^{(s)}}{\partial t^2} - b \frac{\partial v^{(s)}}{\partial t} &= \rho_{12} \frac{\partial^2 v^{(f)}}{\partial t^2} - b \frac{\partial v^{(f)}}{\partial t} - Q \frac{\partial e^{(f)}}{\partial y}; \end{aligned} \quad (1)$$

для жидкости

$$\begin{aligned} mR \frac{\partial e^{(f)}}{\partial x} - \rho_{22} \frac{\partial^2 u^{(f)}}{\partial t^2} - b \frac{\partial u^{(f)}}{\partial t} &= \rho_{12} \frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial t^2} - b \frac{\partial u^{(s)}}{\partial t} - mQ \frac{\partial e^{(s)}}{\partial x}, \\ mR \frac{\partial e^{(f)}}{\partial y} - \rho_{22} \frac{\partial^2 v^{(f)}}{\partial t^2} - b \frac{\partial v^{(f)}}{\partial t} &= \rho_{12} \frac{\partial^2 v^{(s)}}{\partial t^2} - b \frac{\partial v^{(s)}}{\partial t} - mQ \frac{\partial e^{(s)}}{\partial y}; \end{aligned} \quad (2)$$

при заданных нулевых начальных условиях

$$\begin{aligned} u^{(s)}(x, y, 0) = v^{(s)}(x, y, 0) &= \frac{\partial u^{(s)}(x, y, 0)}{\partial t} = \frac{\partial v^{(s)}(x, y, 0)}{\partial t} = \\ &= u^{(f)}(x, y, 0) = v^{(f)}(x, y, 0) = \frac{\partial u^{(f)}(x, y, 0)}{\partial t} = \frac{\partial v^{(f)}(x, y, 0)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

и граничных условиях на координатной плоскости  $xOz$

$$\begin{aligned} u^{(s)}(x, 0, t) = f_1^{(s)}(x, t), v^{(s)}(x, 0, t) &= f_2^{(s)}(x, t), \\ u^{(f)}(x, 0, t) = f_1^{(f)}(x, t), v^{(f)}(x, 0, t) &= f_2^{(f)}(x, t). \end{aligned} \quad (4)$$

В пространстве изображений, с учетом (3), соотношения (1)—(4) принимают вид

$$(A + N) \frac{\partial \bar{e}^{(s)}}{\partial x} + N \nabla^2 \bar{u}^{(s)} - p(\rho_{11}p + b) \bar{u}^{(s)} = p(\rho_{12}p - b) \bar{u}^{(f)} - Q \frac{\partial \bar{e}^{(f)}}{\partial x}; \quad (5)$$

$$(A + N) \frac{\partial \bar{e}^{(s)}}{\partial x} + N \nabla^2 \bar{v}^{(s)} - p(\rho_{11}p + b) \bar{v}^{(s)} = p(\rho_{12}p - b) \bar{v}^{(f)} - Q \frac{\partial \bar{e}^{(f)}}{\partial x}; \quad (6)$$

$$mR \frac{\partial \bar{e}^{(f)}}{\partial y} - p(\rho_{22}p + b) \bar{u}^{(f)} = p(\rho_{12}p - b) \bar{u}^{(s)} - mQ \frac{\partial \bar{e}^{(s)}}{\partial x}; \quad (7)$$

$$mR \frac{\partial \bar{e}^{(f)}}{\partial y} - p(\rho_{22}p + b) \bar{v}^{(f)} = p(\rho_{12}p - b) \bar{v}^{(s)} - mQ \frac{\partial \bar{e}^{(s)}}{\partial y} \quad (8)$$

$$\tilde{u}^{(s)}(x) = \tilde{f}_1^{(s)}(x), \tilde{v}^{(s)}(x) = \tilde{f}_2^{(s)}(x), \tilde{u}^{(f)}(x) = \tilde{f}_1^{(f)}(x), \tilde{v}^{(f)}(x) = \tilde{f}_2^{(f)}(x), \quad (9)$$

где  $p$  — параметр Лапласа.

Один из наиболее часто используемых в классической теории упругости, способов решения задач динамики связан с введением потенциала упругих перемещений (представление типа Ламе) [3]. С целью получения такого представления для пористой среды, насыщенной жидкостью, перемещения для скелета и жидкости записываются следующим образом

$$\tilde{u}^{(s)}(x) = \left( \frac{A + N}{N} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}^{(s)}}{\partial x \partial y}, \tilde{v}^{(s)} = \left( \frac{A + 2N}{N} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}^{(s)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}^{(s)}}{\partial y^2} - \frac{p}{N} (\rho_{11}p + b) \tilde{\Phi}^{(s)}, \quad (10)$$

$$\tilde{u}^{(f)}(x) = -mR \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}^{(f)}}{\partial x \partial y}, \tilde{v}^{(f)} = -p(\rho_{22}p + b) \tilde{\Phi}^{(f)} + mR \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}^{(f)}}{\partial x^2}. \quad (11)$$

При подстановке выражений (10), (11) в уравнение (5)—(8) и замене правых частей в уравнениях (6), (8), с учетом правых частей уравнений (5), (7), то есть с учетом равенств

$$p(\rho_{11}p - b) \bar{v}^{(f)} - Q \frac{\partial \bar{e}^{(f)}}{\partial y} = p(\rho_{11}p - b) \bar{v}^{(f)} - Q \frac{\partial^2 \bar{v}^{(f)}}{\partial y^2} - \frac{Q^2}{p(\rho_{12}p - b)} \frac{\partial^3 \bar{e}^{(f)}}{\partial x^2 \partial y}, \quad (12)$$

$$p(\rho_{12}p - b) \bar{v}^{(s)} - mQ \frac{\partial \bar{e}^{(s)}}{\partial y} = p(\rho_{12}p - b) \bar{v}^{(s)} - mQ \left( \frac{\partial^2 \bar{v}^{(s)}}{\partial y^2} - \frac{m^2 Q^2}{p(\rho_{12}p - b)} \frac{\partial^3 \bar{e}^{(s)}}{\partial x^2 \partial y} \right), \quad (13)$$

уравнение (5), (7) удовлетворяются тождественно.

Уравнения (6), (8) решались методом последовательных приближений, при этом в качестве первого приближения были выбраны решения однородных уравнений, соответствующих (6), (8). При этом, с учетом (11), первые однородные уравнения (1), (2) (с нулевыми правыми частями), тождественно удовлетворяются, а вторые записываются через  $\bar{\Phi}^{(s)}(x, y, p)$ ,  $\tilde{\Phi}^{(s)}(x, y, p)$ , как вспомогательные уравнения, с помощью преобразования Фурье

$$\bar{\Phi}_1^{(s)}(\alpha, y, p) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \bar{\Phi}^{(s)}(x, y, p) dx, \quad \tilde{\Phi}_1^{(s)}(\alpha, y, p) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \tilde{\Phi}^{(s)}(x, y, p) dx$$

принимают вид

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 - p^2 D_1^{(s,f)} \right) \left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 - p^2 D_2^{(s,f)} \right) \bar{\Phi}_1^{(s,f)}(\alpha, y, P) = 0 \quad (14)$$

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 - p^2 D_1^{(f)} \right) \left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \bar{\Phi}_1^{(f)}(\alpha, y, P) = 0, \quad (15)$$

где  $\alpha$  — параметр преобразования Фурье;  $D_1^{(s)} = \rho_{11}/(A + 2N)$ ,  $D_2^{(s)} = \rho_{11}/N$ ,  $D_1^{(f)} = \rho_{11}/A$ ,  $D_2^{(f)} = 0$ .

Ограниченные на бесконечности решения уравнений (10), (11) имеют вид:

$$\Phi_1^{(s)}(\alpha, y, P) = B_1^{(s)} \exp(-y\sqrt{\alpha^2 + D_1^{(s)}}) + B_2^{(s)} \exp(-y\sqrt{\alpha^2 + D_2^{(s)}}), \quad (16)$$

$$\Phi_1^{(f)}(\alpha, y, p) = B_1^{(f)} \exp(-y\sqrt{\alpha^2 + D_1^{(f)}}) + B_2^{(f)} \exp(-y\sqrt{\alpha^2 + D_2^{(f)}}). \quad (17)$$

Согласно формулам обращения для преобразования Фурье [3], найдены

$$\tilde{\Phi}^{(s)}(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \times \quad (18)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \left[ B_1^{(s)}(\alpha, p) \exp\left(-y\sqrt{\alpha^2 + p^2 D_1^{(s)}}\right) + B_{21}^{(s)}(\alpha, p) \exp\left(-y\sqrt{\alpha^2 + p^2 D_2^{(s)}}\right) \right] d\alpha$$

$$\tilde{\Phi}^{(f)}(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \times \quad (19)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \left[ B_1^{(s)}(\alpha, p) \exp\left(-y\sqrt{\alpha^2 + p^2 D_1^{(s)}}\right) + B_{21}^{(s)}(\alpha, p) \exp\left(-y\sqrt{\alpha^2 + p^2 D_2^{(s)}}\right) \right] d\alpha,$$

где  $B_1^{(s)}(\alpha, p)$ ,  $B_2^{(s)}(\alpha, p)$  и  $B_1^{(f)}(\alpha, p)$ ,  $B_2^{(f)}(\alpha, p)$  определялись из образа граничных условий (4) для перемещений скелета и жидкости.

Для второго приближения общее решение однородных уравнений строится аналогичным образом, а частные решения неоднородных уравнений (5)—(8) находятся с помощью известных результатов (17), (18) методом неопределенных коэффициентов. Новые константы, возникающие при этом, определяются также из формул (9). Подобным образом можно найти и последующие приближения. Учитывая, однако, влияние взаимосвязанности процессов фильтрации и деформации скелета, с практической точки зрения, достаточно ограничиться вторым приближением.

Процедура обращения преобразования Лапласа (переход к оригиналу в полученных решениях) является математически сложной задачей. Для многих инженерных приложений приближенное решение этой задачи, при определенных условиях, можно получить с помощью метода Р. Шепери [9], который был предложен автором для решения квазистатических задач. Суть этого приближенного метода обращения преобразования Лапласа заключается в том, что для

функции  $f(t)$  (или  $pf(p)$ ) линейно зависящей от  $\ln t$  (или от  $\ln p$ ), аппроксимация

$$f(t) \approx (p\tilde{f}(p)) = e^{w_0/t}, \quad (20)$$

где  $p = e^{w_0/t}$ , дает точный результат, причем значение параметра  $w_0$  зависит от числа Эйлера  $\gamma$  ( $w_0 = -\gamma$ ).

Для обращения полученных решений формула (20) была обобщена (с добавлением следующих приближений) для случая нестационарных динамических задач. При этом параметр определяется из соотношения

$$\frac{\pi^2}{6} + \gamma(\gamma + 2) + w_0(w_0 + 2\gamma - 2) + p \left( \frac{\pi^2}{6} + w_0(w_0 + 2\gamma) \right) = 0. \quad (21)$$

После подстановки решения уравнения (21) в формулу  $p = e^{w_0/t}$  получается выражение

$$p = \frac{1}{t} \exp \left( -\gamma + \frac{1}{1+p} \left( 1 - \sqrt{(p+0,675)(p+3,345)} \right) \right). \quad (22)$$

Таким образом, получено решение пространственно-двумерной задачи в рамках теоретической линейной схемы Био путем применения преобразования Лапласа по времени, комплексного преобразования Фурье по пространственной координате и метода последовательных приближений. Граничные условия соответствуют действию на границе среды источника упругих перемещений. Полученное решение соответствует заданию перемещения в общем виде.

### Список литературы

1. Био, М. А. (1956). Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды. *Механика, сборник переводов*, 35 (1), 140—146.
2. Ибрафиллов, Р. М., Савельева, Е. В. (2013). Двумерное волновое движение в полупространстве из насыщенного жидкостью пористого материала. *Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела*, 1, 253—257.
3. Москвитин, В. В. (1972). *Сопrotивление вязкоупругих материалов*. Москва: Наука.
4. Рушицкий, Я. Я., Ибрафиллов, Р. М. (2001). Волны в полупространстве из насыщенного жидкостью пористого материала. I, *Прикл. механика*, 37 (4), 104—111.
5. Рушицкий, Я. Я., Ибрафиллов, Р. М. (2001). Волны в полупространстве из насыщенного жидкостью пористого материала. II, *Прикл. механика*, 37 (5), 115—125.
6. Снеддон, И. Н. (1956). *Преобразование Фурье*. Москва: ИЛ.
7. Biot, M. A. (1956). Theory of propagation of elastic waves in fluid-structured porous solid. Low frequency range. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 28, 168—178.
8. Biot, M. A. (1956). Theory of propagation of elastic waves in fluid-structured porous solid.: II. Higher frequency range. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 28, 179--191.
9. Shapery, R. A. (1962). Approximate method of transform Inversion for viscoelastic stress analysis. *Processing of the Fourth U. S. Nat. Congress of App. Mech.*, 2, 1075.



# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. М. Савчин

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

[vsavchin@yandex.ru](mailto:vsavchin@yandex.ru)

Обозначим  $U = C^2([t_0, t_1], U_1), V = C([t_0, t_1], V_1)$ , где  $U_1, V_1$  — линейные нормированные пространства над полем действительных чисел  $\mathbb{R}$ .

Пусть состояние бесконечномерной динамической системы определяется функцией  $u \in U$ , удовлетворяющей условиям

$$u|_{t=t_0} = u_0, u|_{t=t_1} = u_1,$$

где  $u_0, u_1$  — заданные элементы из  $U_1$ .

Будем следовать обозначениям и терминологии работ Филиппов и др. (1992), Савчин (1994), Дубровин и др. (1986).

Пусть задана билинейная форма  $\langle \bullet, \bullet \rangle : U_1 \times V_1 \rightarrow \mathbb{R}$  и кинетическая энергия системы

$$T[u, u_t] = \langle u_t, A_u u_t \rangle,$$

где  $A_u$  — линейный дифференцируемый по Гато оператор, в общем случае, зависящий нелинейно от  $u$ .

Обозначим

$$A'_u(h; g) = \left. \left( \frac{d}{d\varepsilon} A_{u+\varepsilon g^h} \right) \right|_{\varepsilon=0};$$

$f(t, u, u_t)$  — плотность действующих на систему сил,

$$F[u] = \int_{t_0}^{t_1} T[u, u_t] dt.$$

**Теорема 1.** *Имеет место равенство*

$$\text{grad } F[u] = \frac{1}{2} (A_u + A_u^*) u_{tt} + \frac{1}{2} [A'_u(u_t; u_t) + A'^*_u(u_t; u_t) - A'^*_u(u_t; \bullet) u_t],$$

где  $(\dots)^*$  — оператор, сопряженный к оператору  $(\dots)$ .

**Теорема 2.** *Оператор  $k_{1u}$  вида*

$$k_{1u}[u_t] = \frac{1}{2} [A'_u(u_t; u_t) + A'^*_u(u_t; u_t) - A'^*_u(u_t; \bullet) u_t]$$

*определяет аналог символов Кристоффеля первого рода.*

Отметим, что уравнения движения заданной динамической системы могут быть представлены в виде

$$\frac{1}{2}(A_u + A_u^*)u_{tt} + k_{1u}[u_t] - f(t, u, u_t) = 0 \quad (1)$$

**Теорема 3.** Если существует  $(A_u + A_u^*)^{-1}$ , то оператор  $k_{2u}$  вида

$$k_{2u}[u_t] = (A_u + A_u^*)^{-1}k_{1u}[u_t]$$

определяет аналог символов Кристоффеля второго рода.

**Теорема 4.** Оператор  $\frac{D}{Dt}$ , определенный формулой

$$\frac{D_{u_t}}{Dt} = u_{tt} - (A_u + A_u^*)^{-1}k_{1u}[u_t],$$

является аналогом ковариантной производной.

**Следствие.** Эволюционное уравнение (1) может быть записано в виде

$$\frac{1}{2}(A_u + A_u^*)\frac{Du_t}{Dt} - f(t, u, u_t) = 0$$

Эта форма уравнения представляет особый интерес в плане взаимосвязи с геометрией Римана.

В докладе рассматриваются также вопросы неоднозначности определения нелинейных сопряженных операторов и, как следствие, соответствующие различные варианты геометризации бесконечномерных динамических систем. Изложение включает иллюстративные примеры.

Выявление связи между бесконечномерными динамическими системами и геометрическими представлениями и методами будет способствовать развитию динамики, делая возможным расширение области применения идей римановой геометрии и ее различных обобщений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №16-01-00450\_a).

### Список литературы

- Филиппов, В. М., Савчин, В. М., Шорохов, С. Г. (1992). Вариационные принципы для непотенциальных операторов. В кн. *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения*, 40. Москва: ВИНТИ, 3—176.
- Савчин, В. М. (1994). Об одной структуре Ли-допустимой алгебры в пространстве дифференцируемых по Гато операторов. *Математические заметки*, 55 (1), 152—153.
- Дубровин, Б. А., Новиков, С. П., Фоменко, А. Т. (1986). *Современная геометрия. Методы и приложения*. Москва: Наука.

# НЕЛОКАЛЬНІ АНЗАЦИ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

М. І. Серов, О. М. Омелян

Полтавський національний технічний університет

імені Юрія Кондратюка, Полтава, Україна

[aomelyan@ukr.net](mailto:aomelyan@ukr.net)

Системи рівнянь конвекції-дифузії часто застосовуються для моделювання процесів, що відбуваються при проходженні забрудненої рідини через багатосарові фільтри (див. наприклад Чапля, Чернуха, Дмитрук (2011); Чернуха, Гончарук, Дмитрук (2012)). Тому для вивчення таких складних процесів мають важливе значення методи, що дозволяють знаходити точні розв'язки систем рівнянь цього класу. Одним з таких методів є метод С. Лі (Овсянников, 1978; Фушич, Штелень, Серов, 1989; Olver, 1986). У той же час кількість розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП), які вдається знайти за цим методом, обмежена кількістю операторів їх ліівських симетрій. Останнім часом багато уваги приділено пошуку додаткових методів знаходження точних розв'язків нелінійних ДРЧП. Один з таких напрямків наведено в роботах Серов, Омелян, Черніга (2004), Серов, Омелян (2012), Фушич, Серов, Амеров (1992), Tychynin, Petrova (2011), Tychynin, Petrova, Tertyshnyk (2007).

У нашій роботі зосереджено увагу на підкласі систем конвекції-дифузії вигляду:

$$U_t = \partial_x [F(U)U_x + G(U)], \quad (1)$$

де  $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$ ,  $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$ ,  $G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$ ,  $f^{ab} = f^{ab}(U)$ ,  $g^a = g^a(U)$  —

довільні гладкі функції,  $a, b = \overline{1, 2}$ .

Нами встановлено, що ланцюжок нелокальних перетворень:

$$t = t, \quad x = x, \quad u^a = v^a, \quad (2)$$

де  $v^a = v^a(t, x)$  — нові невідомі функції.

$$t = x_0, \quad x = w^1, \quad v^1 = x_1, \quad v^2 = w^2, \quad (3)$$

де  $x_0, x_1$  — нові незалежні змінні,  $w^a = w^a(x_0, x_1)$  — нові залежні змінні,

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w_1^1 = z^1, \quad w_1^2 = z^2, \quad (4)$$

де  $z^a = z^a(x_0, x_1)$  — нові залежні змінні, зводить систему (1) до системи того ж класу:

$$Z_0 = \partial_1 [\Phi(Z)Z_1 + \Psi(Z)], \quad (5)$$

де

$$Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}, \quad Z_\mu = \frac{\partial Z}{\partial x_\mu}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \Phi(Z) = \begin{pmatrix} \phi^{11} & \phi^{12} \\ \phi^{21} & \phi^{22} \end{pmatrix},$$

$$\Psi(Z) = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \quad \phi^{ab} = \phi^{ab}(Z), \quad \psi^a = \psi^a(Z), \quad \mu = 0, 1,$$

причому функції  $f^{ab}(Z)$  та  $g^a(Z)$  пов'язані із функціями  $\phi^{ab}(Z)$  та  $\psi^a(Z)$  наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \phi^{11} &= (z^1)^{-2}[f^{11} + z^2 f^{12}], \\ \phi^{12} &= -(z^1)^{-1} f^{12}, \\ \phi^{21} &= (z^1)^{-3}[z^2(f^{11} + z^2 f^{12}) - (f^{21} + z^2 f^{22})], \\ \phi^{22} &= (z^1)^{-2}[f^{22} - z^2 f^{12}], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \psi^1 &= -z^1 g^1, \\ \psi^2 &= g^2 - z^2 g^1, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $f^{ab} = f^{ab}\left(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1}\right)$ ,  $\phi^{ab} = \phi^{ab}(Z)$ ,  $g^a = g^a\left(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1}\right)$ ,  $\psi^a = \psi^a(Z)$ .

Використавши формули (6), (7) зв'язку між системами (1) та (5), ми встановили у класі систем (1) підклас систем нелінійних рівнянь конвекції-дифузії:

$$\begin{aligned} z_0^1 &= \partial_1 \left[ \frac{\lambda_{11} + \lambda_{12} z^2}{(z^1)^2} z_1^1 - \frac{\lambda_{12}}{z^1} z_1^2 - \gamma_{12} z^2 \right], \\ z_0^2 &= \partial_1 \left[ \frac{z^2(\lambda_{11} + \lambda_{12} z^2) - (\lambda_{21} + \lambda_{22} z^2)}{(z^1)^3} z_1^1 + \frac{\lambda_{22} - \lambda_{12} z^2}{(z^1)^2} z_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{z^1} (\gamma_{21} + (\gamma_{22} - \gamma_{11}) z^2 - \gamma_{12} (z^2)^2) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

які за допомогою перетворень (2), (3), (4) зводяться до лінійної системи вигляду

$$U_t = \Lambda U_{xx} + \Gamma U_x, \quad (9)$$

де  $\Lambda = (\lambda_{ab})$ ,  $\Gamma = (\gamma_{ac})$  — сталі матриці.

У нашій роботі розв'язана задача знаходження нелокальних анзаців нелінійних систем рівнянь конвекції-дифузії вигляду (8).

Зокрема, систему нелінійних рівнянь конвекції-дифузії:

$$\begin{aligned} z_0^1 &= \partial_1 \left[ \frac{\lambda}{(z^1)^2} z_1^1 + \beta z^2 \right], \\ z_0^2 &= \partial_1 \left[ \frac{\lambda}{(z^1)^2} z_1^2 + \frac{\beta (z^2)^2 + 1}{z^1} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

де  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ , перетворення (2—4) зводять до лінійної системи вигляду:

$$U_t = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} U_{xx} + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} U_x, \quad \lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Зауважимо, що система (11) має значно ширший набір операторів ліівських симетрій, ніж система (10). Використовуючи знайдені оператори ліівських симетрій системи (11) та нелокальні перетворення (2—4), для нелінійної системи конвекції-дифузії (10) побудовані нелокальні анзаці, які не можливо одержати в рамках класичного методу Лі.

Зокрема, одержано наступний нелокальний анзац нелінійної системи (10)

$$\begin{aligned} z^1 &= \frac{(x_0^2 + 1)^{\frac{1}{4}} e^{-A(x_0, \tau)}}{\phi^1(\omega) \sin B(x_0, \tau) + \phi^2(\omega) \cos B(x_0, \tau)}, \\ z^2 &= \frac{\phi^1(\omega) \cos B(x_0, \tau) - \phi^2(\omega) \sin B(x_0, \tau)}{\phi^1(\omega) \sin B(x_0, \tau) + \phi^2(\omega) \cos B(x_0, \tau)}, \\ \omega &= (x_0^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \tau, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} A(x_0, \tau) &= -\frac{\alpha}{\lambda} \tau - \frac{x_0}{4\lambda(x_0^2 + 1)} \tau^2 + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{4\lambda} x_0 + \left( k_1 - \frac{\beta^2 - \alpha^2}{4\lambda} \right) \operatorname{arctg} x_0, \\ B(x_0, \tau) &= \frac{\beta}{2\lambda} (\tau + \alpha x_0) + \left( k_2 - \frac{\alpha\beta}{2\lambda} \right) \operatorname{arctg} x_0. \end{aligned}$$

### Список літератури

- Olver, P. (1986). *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. New York: Springer.
- Tychynin, V. A., & Petrova, O. V. (2011). Nonlocal symmetries and formulae for generation of solutions for a class of diffusion-convection equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 382, 20–33.
- Tychynin, V. A., Petrova, O. V., & Tertyshnyk, O. M. (2007). Symmetries and Generation of Solutions for Partial Differential Equations. *SIGMA*, 3(019), 019.
- Овсянников, Л. В. (1978). *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. Москва: Наука.
- Серов, М. І., Омелян, О. М., Черніга, Р. М. (2004). Лінеаризація систем нелінійних рівнянь дифузії за допомогою нелокальних перетворень. *Доповіді НАН України*, (10), 39—45.
- Серов, М. І., Омелян, О. М. (2012). *Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису*. Полтава: ПолтНТУ.
- Фушич, В. І., Серов, Н. І., Амеров, Т. К. (1992). О нелокальных анзацах одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности. *Доклады АН Украины*, (1), 26—30.
- Фушич, В. І., Штеленя, В. М., Серов, Н. І. (1989). *Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики*. Киев: Наукова думка.
- Чапля, Є., Чернуха, О., Дмитрук, В. (2011). Математичне моделювання стаціонарних процесів конвективно-дифузійного масопереносу у бінарних періодичних структурах. *Доповіді НАН України*, (7), 46—51.
- Чернуха, О., Гончарук, В., Дмитрук, В. (2012). Математичні моделі стаціонарних процесів конвективної дифузії в регулярних структурах. У кн. *Задачі термодифузії та методи їх розв'язку: колект. моногр.* В. П. Ляшенко (ред.). (с. 91—109). Кременчук: Кременчуцький національний університет.

# СИМЕТРІЇ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КРАМЕРСА ТА ЙОГО ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

В. І. Стогній

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

[valeriy\\_stogniy@mail.ru](mailto:valeriy_stogniy@mail.ru)

Розглядається рівняння

$$u_t = u_{yy} - yu_x + (\omega^2 x + y)u_y + u, \quad (1)$$

де  $u = u(t, x, y)$ ;  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ;  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ;  $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ ;  $u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ;  $\omega$  — деяка довільна

стала, яка задовольняє умову  $\omega^2 < \frac{1}{4}$ . Рівняння (1) є частинним випадком рівняння Крамерса (Гардинер, 1986)

$$u_t = u_{yy} - (yu)_x + ((V'(x) + y)u)_y, \quad (2)$$

яке описує рух частинки у флуктуючому середовищі із зовнішнім потенціалом  $V(x)$ , зміна якого створює силу, яка діє на частинку.

Одним із застосувань симетрійних властивостей лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними є побудова в явному вигляді фундаментальних розв'язків.

У роботі Chandrasekhar (1943) без застосування методів симетрійного аналізу диференціальних рівнянь в явному вигляді було отримано фундаментальний розв'язок рівняння (1):

$$u = \frac{\theta(t)e^t}{2\pi\sqrt{\Delta}} \exp \left\{ -\frac{A(t)x^2 + B(t)xy + C(t)y^2}{2\Delta} \right\}, \quad (3)$$

де  $\theta(t)$  — функція Хевісайда; функції  $A(t)$ ;  $B(t)$ ;  $C(t)$  і  $\Delta$  відповідно становлять:

$$A(t) = 4\omega^2 e^t + (1 - 4\omega^2)e^{2t} + \mu_1 e^{-2\mu_2 t} + \mu_2 e^{-2\mu_1 t};$$

$$B(t) = 4e^t - 2e^{-2\mu_2 t} - 2e^{-2\mu_1 t};$$

$$C(t) = 4e^t + \frac{1 - 4\omega^2}{\omega^2} e^{2t} + \frac{1}{\mu_1} e^{-2\mu_2 t} + \frac{1}{\mu_2} e^{-2\mu_1 t};$$

$$\Delta = 8e^t + \frac{1 - 4\omega^2}{\omega^2} (e^{2t} + 1) - \frac{1}{\omega^2} (e^{-2\mu_1 t} + e^{-2\mu_2 t}).$$

Дослідимо питання побудови фундаментального розв'язку (3) на основі використання максимальної алгебри інваріантності рівняння (1). Зауважимо, що цю алгебру можна отримати з роботи Spichak, Stogniy. (1998), де була проведена групова класифікація рівняння (2) по функціональному параметру  $V(x)$ .

**Означення 1.** Фундаментальним розв'язком рівняння (1) у точці  $M(0,0,0)$  називають узагальнену функцію  $u(t, x, y)$ , яка задовольняє рівняння

$$u_t - u_{yy} + yu_x - \omega^2 xu_y - yu_y - u = \delta(t, x, y), \quad (4)$$

де  $\delta$  — функція Дірака.

Конструктивний метод знаходження симетрій лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними з  $\delta$ -функцією у правій частині було запропоновано у роботах Берест (1993), Аксенов (1995), в яких було наведено й алгоритм побудови інваріантних фундаментальних розв'язків.

У випадку рівняння (4), реалізація цього методу призводить до такого результату.

**Теорема 1.** Рівняння (4) допускає алгебру Лі операторів симетрії з таким базисом скінченновимірної частини:

$$\begin{aligned} Y_1 = & \left[ (\mu_1 - \mu_2) e^{\mu_1 t} - e^{-\mu_1 t} - 2\mu_1 e^{-\mu_2 t} \right] \partial_x + \\ & + \left[ (\mu_1^2 - \omega^2) e^{\mu_1 t} + \mu_1 e^{-\mu_1 t} + 2\omega^2 e^{-\mu_2 t} \right] \partial_y + \\ & + \left[ (\omega^2 e^{-\mu_1 t} + 2\mu_1 \omega^2 e^{-\mu_2 t}) x + (-\mu_1 e^{-\mu_1 t} - 2\omega^2 e^{-\mu_2 t}) y \right] u \partial_u; \\ Y_2 = & \left[ (\mu_1 - \mu_2) e^{\mu_2 t} + 2\mu_2 e^{-\mu_1 t} + e^{-\mu_2 t} \right] \partial_x + \\ & + \left[ (\omega^2 - \mu_2^2) e^{\mu_2 t} - 2\omega^2 e^{-\mu_1 t} - \mu_2 e^{-\mu_2 t} \right] \partial_y + \\ & + \left[ (-2\mu_2 \omega^2 e^{-\mu_1 t} - \omega^2 e^{-\mu_2 t}) x + (2\omega^2 e^{-\mu_1 t} + \mu_2 e^{-\mu_2 t}) y \right] u \partial_u. \end{aligned} \quad (5)$$

Легко переконатися, що фундаментальний розв'язок (3) є інваріантним відносно операторів  $Y_1$  та  $Y_2$  з алгебри інваріантності (5), а це надає можливість побудувати розв'язок (3) як узагальнений інваріантний розв'язок рівняння (4) (див., наприклад, Берест (1993)).

### Список літератури

- Chandrasekhar, S. (1943). Stochastic Problems in Physics and Astronomy. *Reviews of Modern Physics*, 15, 1–89.
- Spichak, S. V., Stogniy, V. I. (1998). Symmetry classification and exact solutions of the Kramers equation. *J. Math. Phys.*, 39, (6), 3505–3510.
- Аксенов, А. В. (1995). Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения. Доклады АН, 342 (2), 151—153.
- Берест, Ю. Ю. (1993). Групповой анализ линейных уравнений в обобщенных функциях и построение фундаментальных решений. *Дифференциальные уравнения*, 29 (11), 1958–1970.
- Гардинер К. В. (1986). *Стохастические методы в естественных науках*. Москва: Мир.

# КОМПЛЕКСНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТЕРМОПРУЖНОСТІ АНІЗОТРОПНИХ БІМАТЕРІАЛЬНИХ ТІЛ ІЗ ІНТЕРФЕЙСОМ ВИСОКОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Г. Т. Сулим<sup>1</sup>, Я. М. Пастернак<sup>2</sup>, М. М. Томашівський<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів,

<sup>2</sup>Луцький національний технічний університет, Луцьк, Україна

[sulym@franko.lviv.ua](mailto:sulym@franko.lviv.ua), [yaroslav.pasternak@gmail.com](mailto:yaroslav.pasternak@gmail.com), [tomashmyh@gmail.com](mailto:tomashmyh@gmail.com)

Високий темп розвитку сучасних технологій вимагає швидкого та ефективного реагування на всеможливі проблеми, що виникають у проектуванні виробів та виготовленні їх складових. Поширеною при створенні більшості конструкційних елементів є ситуація поєднання двох і більше різних за механічними та теплофізичними властивостями матеріалів. Таке поєднання зумовлює утворення тонкого неоднорідного шару, який впливає на міцність і, відповідно, довговічність усього матеріалу. Загалом у науковій літературі (Kaessmair, Javili, 2014; Benvensite, Mech, 2006) виділяють два типи неідеальних теплових умов залежно від неперервності функцій теплового потоку або температури при переході через межу поділу біматеріалу. Зрозуміло, що більшість матеріалів є анізотропними і за будовою далекими від ідеальних, оскільки містять в собі різного роду включення та інші неоднорідності. Врахування всіх цих умов при виготовленні породжує важливу і водночас нелегку задачу, розв'язанню якої присвячено немало праць. Зокрема у Pasternak, Pasternak, Sulym (2014) отримано розв'язок для ідеального теплового та механічного контакту складових біматеріалу, а у Pasternak, Sulym, Tomashivksyy (2016) для неідеального теплового контакту із слабкою теплопровідністю межі поділу складових біматеріалу.

У цій роботі досліджується задача термопружності анізотропного біматеріалу із інтерфейсом високої теплопровідності, що містить у собі різного роду тонкі включення та неоднорідності. Використовуючи умову неідеального теплового контакту (інтерфейс високої теплопровідності)

$$\vartheta^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \vartheta^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} + \eta_0 \left( \theta_{,1}^{(2)}(x_1, x_2) \right) \Big|_{x_2=0} \quad (1)$$

$$\theta^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \theta^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} \quad (2)$$

та умову ідеального механічного контакту

$$\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0}, \quad \mathbf{u}^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \mathbf{u}^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} \quad (3)$$

за допомогою розширеного формалізму Стро та теорії функції комплексної змінної отримано інтегральні рівняння типу Сомільяни для анізотропного термопружного біматеріалу, що містить різного роду неоднорідності:

$$h_i(\xi) = \int_{\Gamma} \Theta_i^{\text{HCI}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} H_i^{\text{HCI}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + h_i^{\infty}(\xi),$$

$$\theta(\xi) = \int_{\Gamma} \left[ \Theta^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) - H^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}) + \theta^{\infty}(\xi),$$



$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u}^\infty(\xi) + \\
& + \int_{\Gamma} \left[ \mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}), \\
\sigma_j(\xi) = & \sigma_j^\infty(\xi) + \int_{\Gamma} \mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{t}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{u}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\
& + \int_{\Gamma} \mathbf{q}_j^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\
& + \int_{\Gamma} \mathbf{w}_j^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{4}$$

Ядра всіх інтегральних рівнянь (4) отримано у явній і замкненій формі.

Для проведення обчислень було використано модифікований метод граничних елементів (Pasternak, Pasternak, Sulym, 2013). Відповідно усі отримані інтегральні співвідношення (4) були введені у схему методу граничних елементів, що у поєднанні із математичними моделями тонких включень дозволили розв'язати деякі плоскі задачі для термопружного анізотропного біматеріалу з інтерфейсом високої теплопровідності та тонкими включеннями всередині матеріалу.

Для аналізу отриманих результатів використовуються узагальнені коефіцієнти інтенсивності (УКІН) (Сулим, 2007), які характеризують поля напружень, переміщень та температур в околі тонких неоднорідностей.

Завдяки введеному параметру  $\eta_0$  (1), у роботі вдалось проаналізувати вплив тонкого прошарку на поля напружень у біматеріалі загалом та на УКІН в околі тонких включень зокрема. Досліджено вплив інтерфейсу високої теплопровідності з врахуванням кута нахилу включення та розміщення його центру відносно межі поділу складових біматеріалу.

### Список літератури

- Benvensite, Y., & Mech, J. (2006). A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media, *Phys. Solids*, 54, 708–734.
- Kaessmair, S., Javili, A., & Steinmann, P. (2014). Thermomechanics of solids with general imperfect coherent interfaces. *Archive of Applied Mechanics*, 84 (9–11), 1409–1426.
- Pasternak, Ia. M., Pasternak, R. M., & Sulym, H. T. (2013). A comprehensive study on the 2D boundary element method for anisotropic thermoelectroelastic solids with cracks and thin inhomogeneities. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37 (2), 419–433.
- Pasternak, Ia. M., Pasternak, R. M., & Sulym, H. T. (2014). Boundary integral equations and Green's functions for 2D thermoelectroelastic bimaterial. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 48, 87–101.
- Pasternak, Ia. M., Sulym, H. T., & Tomashivskyu, M. M. (2016). Boundary integral equations for an anisotropic bimaterial with thermally imperfect interface and internal inhomogeneities. *Acta. Mech.*, 10 (1), 66–74.
- Сулим, Г. Т. (2007). *Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями*. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ.

# НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОСНОВАНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО РАСШИРЕННОГО ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА (ФРФП)

**В. А. Сущенко**  
Львов, Украина  
[ppser0lviv@gmail.com](mailto:ppser0lviv@gmail.com)

Исходным пунктом начал математических оснований ФРФП являются преобразования Галилея в абсолютном пространстве Ньютона (с единственным абсолютным временем  $t$  и отсутствием местного времени  $t'$ ).

Далее происходит переход с использованием универсального времени  $t$ , связанного с реликтовым излучением (Бёрке, 1985; Сущенко, 1992). Затем подключается локальное время  $t'$  для описания нарушения симметрии во времени в изотропном пространстве:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - v_1 t \\ t' &= \xi_i t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= x' + \frac{v_1 t'}{\xi_i} \\ t &= \frac{t'}{\xi_i} \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\xi_i = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{v_m^2}}.$$

$v_1$  остается абсолютной скоростью, так как при переходе  $x' \rightarrow x$  при  $\xi_i \neq 1$  механический принцип относительности не удовлетворяется.

В частном случае симметрии, когда коэффициент нарушения симметрии  $\xi_i = 1$  при переходе  $x' \rightarrow x$  и обратно механический принцип удовлетворяется,  $v_1$  отрывается от «внешней метки» (реликтовое излучение) и становится относительной скоростью  $v$ .

Так как поперечные направления  $y = y', z = z'$  в линейном преобразовании не участвуют, мы их не пишем

Начальное условие определяется значком  $i$  и представлены таблицей:

$i$	1	2	3	4
$\frac{x}{t}$	$v_m$	$-v_m$	$-v_m$	$v_m$
$\frac{x'}{t'}$	$v'_m$	$-v'_m$	$v'_m$	$-v'_m$

Обобщив (1):

$$x' = k(\pm v_1)[x - v_1 t]; t' = \xi_i k(\pm v) \left[ t - \frac{x}{v_1} \left( 1 - \frac{1}{k(\pm v_1) k'(\pm v'_1)} \right) \right] \quad (1)$$

$$x = k'(\pm v_1) \left[ x' + \frac{v_1 t'}{\xi_i} \right]; t' = k'(\pm v_1) \left[ \frac{t'}{\xi_i} + \frac{x'}{v_1} \left( 1 - \frac{1}{k(\pm v_1) k'(\pm v_1')} \right) \right] \quad (2)$$

Полученные преобразования (1), (2) — наиболее общие. Для конкретного случая однонаправленности  $v_m, v'_m$  ( $i = 1, 2$ ):

$$x' = \frac{x - v_1 t}{1 \mp \frac{v_1}{v_m}}; \quad t' = \frac{\xi_{1,2} \left\{ t - \frac{x}{v} \left[ 1 - \left( 1 \mp \frac{v_1}{v_m} \right) \left( 1 \pm \frac{v_1}{\xi_{1,2} v'_m} \right) \right] \right\}}{1 \mp \frac{v_1}{v_m}}$$

$$x = \frac{x' + \frac{v_1 t'}{\xi_{1,2}}}{1 \pm \frac{v_1}{\xi_{1,2} v'_m}}; \quad t = \frac{\frac{t'}{\xi_{1,2}} + \frac{x'}{v_1} \left[ 1 - \left( 1 \mp \frac{v_1}{v_m} \right) \left( 1 \pm \frac{v_1}{\xi_{1,2} v'_m} \right) \right]}{1 \pm \frac{v_1}{\xi_{1,2} v'_m}},$$

где

$$\xi_{1,2} = \frac{v_m}{v'_m} \left( 1 \mp \frac{v_1}{v_m} \right).$$

В следующих двух парах преобразований при разнонаправленности  $v_m, v'_m$  с  $\xi_{3,4}$  скобка  $\left[ 1 - \left( 1 \mp \frac{v_1}{v_m} \right) \left( 1 \mp \frac{v_1}{\xi_{3,4} v'_m} \right) \right]$  дает при  $v'_m = v_m, \xi_{3,4} = 1$  — случай симметрии — дополнительные преобразования, то есть преобразования Лоренца (ПЛ) не являются единственными в изотропном пространстве.

Обратимся к самому общему случаю: объединению движения в кинематике вариантов, когда  $v_1 < C = v_m \neq \text{const}$  и  $v_2 > v_m$ .

Используем преобразования Петров (1961)

$$x' = \alpha x + \beta t, \text{ где } \beta - (v) = -\beta(v) \text{ заменяется на } \eta_i(v)$$

$$t' = \gamma x + \delta t, \text{ где } \gamma(-v) = -\gamma(v) \text{ — на } \tilde{\eta}_i(v)$$

исходя из

$$\beta(v) = -\frac{\eta_i(v)}{v_1}; \quad \gamma(v) = -\frac{v}{\tilde{\eta}_i(v)}$$

т.е. производим замену нечетных функций на четные исходя из

$$\left. \begin{array}{l} x' = x - \frac{\eta_i}{v} t \\ t' = t - \frac{x}{v} \end{array} \right\} \eta_i(v) = v \left\{ \left( \frac{x}{t} \right)_i - \left( \frac{x'}{t'} \right)_i \left[ 1 - \left( \frac{x}{t} \right)_i \frac{1}{v} \right] \right\}$$

а из

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t - \frac{v}{\eta_i} x \end{aligned} \right\} \tilde{\eta}_i = \frac{v \left( \frac{x}{t} \right)_i \cdot \left( \frac{x'}{t'} \right)_i}{\left( \frac{x'}{t'} \right)_i - \left( \frac{x}{t} \right)_i + v}$$

Дополненные обратными преобразованиями, полученными методом подстановки I и II записываются единым по форме преобразованием с использованием малого параметра:

$$\beta = \begin{cases} \frac{v_1}{v_m}, & \text{при } v_1 < v_m \\ \frac{v_m}{v_1}, & \text{при } v_1 > v_m \end{cases}$$

что можно объяснить действием сингулярности на механику движения, изменяя II закон Ньютона при приближении текущей скорости  $v_1$  к сингулярности  $v_m$  и удалении из нее. Далее движение продолжится согласно закона Ньютона.

При переходе к материализованному изотропному пространству (Сущенко, 2013) включаем значения соответствующие значения  $y', z'$  с условиями физической инвариантности

$$\eta_i t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\eta_i t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)}{1 - \frac{\eta_i}{v_1^2}}$$

Аналогично сделано для  $\tilde{\eta}_i$  с включением сопряженных преобразований (как реакцию системы на внешнее воздействие).

Как приближение к групповости найдены у преобразований определители:  $|D|$  и  $|\tilde{D}|$  и при этом получено  $|D||\tilde{D}| = 1$ .

### Список литературы

- Бёрке, У. (1985). *Пространство — время, геометрия, космология*. Москва: Мир.
- Петров, А. З. (1961). *Пространство Эйнштейна*. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит.
- Сущенко, В. А. (1992). *Несколько измененные релятивистские соотношения скоростей*. В Материалах научно-технической конференции «Прикладные и теоретические вопросы нетрадиционной энергетики и энергосберегающих технологий» (с. 62—64). Санкт-Петербург: СПбДНТМ.
- Сущенко, В. А. (2006). *Рассмотрение нарушения симметрии во времени в изотропном пространстве*. В Материалах XI Международной научной конференции им. акад. М. Кравчука, 18—20 мая 2006 г., Киев (с. 610). Киев: НТУУ «КПИ».
- Сущенко, В. А. (2013). *К вопросу нарушения симметрии во времени в материализованном пространстве*. В Материалах Второй международной научно-практической конференции «Математика в современном техническом университете», 20—21 декабря 2013 г., Киев (с. 108—111). Киев: НТУУ «КПИ».

# ЯДРА ПУАССОНА МОДЕЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ З ВЕКТОРНОЮ ВАГОЮ

Н. І. Турчина

*НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна*

[nataturchina@gmail.com](mailto:nataturchina@gmail.com)

Нехай  $n, N, b_1, \dots, b_n$  — задані натуральні числа;  $2\vec{b} := (2b_1, \dots, 2b_n)$ ;  $b$  — найменше спільне кратне чисел  $b_1, \dots, b_n$ ;  $m_j := b / b_j, j \in \{1, \dots, n\}$ ;

$$\|k\| := \sum_{j=1}^n m_j k_j,$$

якщо  $k := (k_1, \dots, k_n)$  — мультиіндекс;

$$x := (x', x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x' := (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1};$$

$$\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, \quad \Pi^+ := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t > 0, x \in \mathbb{R}_+^n\},$$

$$\Pi' := \{(t, x') \mid t > 0, x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}.$$

В області  $\Pi^+$  розглядається така крайова задача:

$$A_0(\partial_t, \partial_x)u(t, x) := (I_N \partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k \partial_x^k)u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi^+, \quad (1)$$

$$u(t, x) \big|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (2)$$

$$B_{j0}(\partial_t, \partial_x)u(t, x) \big|_{x_n=0} := \sum_{2bk_0 + \|k\| = r_j} b_{jk_0 k} \partial_t^{k_0} \partial_x^k u(t, x) \big|_{x_n=0} = g_j(t, x'), \quad (3)$$

$$(t, x') \in \Pi', \quad j \in \{1, \dots, m\},$$

де  $u$  — матриця-стовпчик висоти  $N$ ,  $a_k$  і  $b_{jk_0 k}$  — сталі матриці розміру відповідно  $N \times N$  і  $1 \times N$ ,  $I_N$  — одинична матриця порядку  $N$ ,  $r_j \geq 0$ .

Припускається, що система рівнянь (1) є  $2\vec{b}$ -параболічною за Ейдельманом (Ейдельман, 1960), а крайові умови задовольняють умову доповняльності, подібну до тієї, яка наведена Солонниковим (Солонников, 1965).

За підходящих припущень на функції  $g_j(t, x'), j \in \{1, \dots, m\}$ , одержано формулу для розв'язків задачі (1)—(3) вигляду

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^m \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t - \tau, x' - \xi', x_n) g_j(\tau, \xi') d\xi', \quad (t, x) \in \Pi^+, \quad (4)$$

у якій функції  $G_j$  називаються ядрами Пуассона задачі.

Описано властивості цих ядер, які включають оцінки самих  $G_j$  та їх похідних.

### Список літератури

- Ейдельман, С. Д. (1960). Об одном классе параболических систем, *Доклады АН СССР*, 133 (1), 40—43.
- Солонников, В. А. (1965). О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. *Труды мат. ин-та им. В. А. Стеклова*, 83, 3—163.

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МАТРИЦ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА

Л. А. Хвощинская

Белорусский государственный аграрный технический университет,

Минск, Республика Беларусь

[ludmila.ark@gmail.com](mailto:ludmila.ark@gmail.com)

Проблема Римана теории аналитических функций почти 160 лет привлекает внимание математиков благодаря своим применениям в теории упругости, гидродинамики, электростатики и др. К решению этой проблемы применяются различные подходы (Еругин, 1982), но в общем случае есть немало вопросов, на которые еще нет однозначных ответов. В частности, вопрос построения дифференциального уравнения или системы уравнений по заданной группе монодромии. Укажем один из методов построения системы д.у. по заданной группе монодромии.

Пусть при обходе вокруг особых точек  $a_1, a_2, \infty$  система функций

$$Y(z) = (Y_1, Y_2)^T,$$

аналитическая в плоскости  $\mathbb{C} \setminus \{a_1\} \cup \{a_2\}$  имеет следующую группу монодромии:

$$V_1, V_2, V_3 = (V_1 \cdot V_2)^{-1} (V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 = E),$$

где  $V_k (k = 1, 2, 3)$  — постоянные невырожденные матрицы 2-го порядка. Обозначив  $\alpha_k, \beta_k$  характеристические числа матриц  $V_k (k = 1, 2, 3)$ , найдем числа

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \cdot \ln \alpha_k, \quad \sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \cdot \ln \beta_k.$$

Зафиксируем ветви логарифмов чисел  $\rho_1, \sigma_1, \rho_2, \sigma_2$ , например, выбирая их из условий  $0 \leq \operatorname{Re} \rho_k < 1, 0 \leq \operatorname{Re} \sigma_k \leq 1, k = 1, 2$ . Тогда ветви  $\rho_3, \sigma_3$  подбираются так, чтобы выполнялось соотношение Фукса

$$\sum_{k=1}^3 (\rho_k + \sigma_k) = 1 \text{ или } \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 = -\rho_3 + (1 - \sigma_3),$$

причем  $0 \leq \operatorname{Re}(\sigma_3 - \rho_3) < 1$ .

В работе Хвощинская (1996) с помощью методов теории аналитических функций строилась регулярная система д.у. для двух пар функций, которая в случае трех особых точек  $a_1, a_2, \infty$  имеет вид

$$\frac{dY}{dz} = Y \left( \frac{U_1}{z - a_1} + \frac{U_2}{z - a_2} \right), \quad (1)$$

где

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{\rho_3 a_1}{a_2 - a_1} & \frac{[\rho_1(a_1 - a_2) + \rho_3 a_1][\sigma_1(a_1 - a_2) + \rho_3 a_1]}{a_2 - a_1} \\ 1 & \rho_1 + \sigma_1 - \frac{\rho_3 a_1}{a_2 - a_1} \\ \frac{1}{a_1 - a_2} & \rho_2 + \sigma_2 - \frac{\rho_3 a_2}{a_1 - a_2} \end{pmatrix},$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} \frac{\rho_3 a_1}{a_1 - a_2} & \frac{[\rho_2(a_2 - a_1) + \rho_3 a_2][\sigma_2(a_2 - a_1) + \rho_3 a_2]}{a_1 - a_2} \\ 1 & \rho_2 + \sigma_2 - \frac{\rho_3 a_2}{a_1 - a_2} \\ \frac{1}{a_2 - a_1} & \rho_1 + \sigma_1 - \frac{\rho_3 a_1}{a_2 - a_1} \end{pmatrix},$$

$$U_1 + U_2 = \begin{pmatrix} -\rho_3 & \mu \\ 0 & 1 - \sigma_3 \end{pmatrix},$$

$$\mu = -a_1 [(\rho_3 + \rho_1)(\rho_3 + \sigma_1) - \rho_2 \sigma_2] - a_2 [(\rho_3 + \rho_2)(\rho_3 + \sigma_2) - \rho_1 \sigma_1].$$

Обозначим

$$W_k = \frac{1}{2\pi i} \ln V_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Если матрица  $D$  приводит матрицу  $V_3$  к нормальной жордановой форме, то (Гантмахер, 1988)

$$W_3 = D \begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} D^{-1}, \quad \text{если } \alpha_3 \neq \beta_3$$

$$\text{и } W_3 = D \begin{pmatrix} \rho_3 & (2\pi i \alpha_3)^{-1} \\ 0 & \rho_3 \end{pmatrix} D^{-1}, \quad \text{если } \alpha_3 = \beta_3.$$

Так как характеристические числа матриц  $U_k$  для  $k = 1, 2$  равны  $\rho_k, \sigma_k$ , то  $U_1 \sim W_1, U_2 \sim W_2$ ,

но

$$U_1 + U_2 \sim -W_3 + N,$$

где

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку даже в случае  $\alpha_3 = \beta_3$  выполняется равенство  $\rho_3 = \sigma_3$ , но  $\rho_3 \neq 1 - \sigma_3$ , то матрица  $U_1 + U_2$  всегда может быть приведена к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} -\rho_3 & 0 \\ 0 & 1 - \sigma_3 \end{pmatrix}$$

с помощью матрицы



$$D = \begin{pmatrix} c & \mu / (\sigma_3 - \rho_3 - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $c \neq 0$  — произвольная постоянная.

Умножая обе части системы (1) на матрицу  $D$  слева, приходим к системе ДУ

$$\frac{d}{dz}(YD) = (YD) \sum_{k=1}^2 \frac{D^{-1}U_k D}{z - a_k}$$

или

$$\frac{d\tilde{Y}}{dz} = \tilde{Y} \sum_{k=1}^2 \frac{\tilde{U}_k}{z - a_k}, \quad (2)$$

где  $\tilde{Y} = YD$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= \frac{1}{1 + \rho_3 - \sigma_3} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \rho_1 \sigma_1 - (\rho_3 + \rho_2)(\rho_3 + \sigma_2) & \frac{1}{c} [(\rho_3 + \rho_1)(\sigma_3 + \sigma_1 - 1) - \rho_2 \sigma_2] \\ c[\rho_2 \sigma_2 - (\rho_3 + \sigma_1)(\sigma_3 + \rho_1 - 1)] & (\sigma_3 + \rho_2 - 1)(\sigma_3 + \sigma_2 - 1) - \rho_1 \sigma_1 \end{pmatrix}, \\ \tilde{U}_2 &= \frac{1}{1 + \rho_3 - \sigma_3} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \rho_2 \sigma_2 - (\rho_3 + \rho_1)(\rho_3 + \sigma_1) & \frac{1}{c} [\rho_2 \sigma_2 - (\rho_3 + \rho_1)(\sigma_3 + \sigma_1 - 1)] \\ c[(\rho_3 + \sigma_1)(\sigma_3 + \rho_1 - 1) - \rho_2 \sigma_2] & (\sigma_3 + \rho_1 - 1)(\sigma_3 + \sigma_1 - 1) - \rho_2 \sigma_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если от дифференциальных матриц  $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$  потребовать выполнение условий полной интегрируемости (Еругин, 1982)

$$\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial a_1} = \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial a_2} = \frac{\tilde{U}_1 \cdot \tilde{U}_2 - \tilde{U}_2 \cdot \tilde{U}_1}{a_1 - a_2},$$

то  $c = (a_1 - a_2)^{1+\rho_3-\sigma_3}$ .

Исследования показали, что систему (2) можно получить непосредственно, воспользовавшись формулой разложения логарифма произведения двух матриц второго порядка, полученной в Хвошинская (2015). В указанной формуле достаточно заменить  $\rho_3$  на  $(-\rho_3)$ , а  $\sigma_3$  на  $(1 - \sigma_3)$ .

Рассмотрим следующий пример.

Пусть

$$V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad V_3 = (V_1 V_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \beta_1 = e^{-\frac{2\pi i}{3}}, \alpha_1 = \alpha_3 = 1, \beta_1 = \beta_3 = -1,$$

$$\rho_1 = \frac{1}{3}, \sigma_1 = \frac{2}{3}, \rho_2 = 0, \sigma_2 = \frac{1}{2}, \rho_3 = -\frac{1}{2},$$

$$\sigma_3 = 0, \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 + \rho_3 + \sigma_3 = 1.$$

Система д.у. имеет вид

$$\frac{dY}{dz} =$$

$$= Y \left[ \frac{\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9}(a_1 - a_2)^{-1/2} \\ \frac{2}{9}(a_1 - a_2)^{1/2} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}}{z - a_1} + \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{1}{9}(a_1 - a_2)^{-1/2} \\ -\frac{2}{9}(a_1 - a_2)^{1/2} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}}{z - a_2} \right]$$

Аналогично, используя представления логарифма произведения трех и четырех матриц (Хвоцинская, Жоровина, 2015), строится система д.у. проблемы Римана в случаях четырех и большего числа особых точек.

### Список литературы

- Гантмахер, Ф. Р. (1988). *Теория матриц*. Москва: Наука.
- Еругин, Н. П. (1982). *Проблема Римана*. Минск: Наука и техника.
- Хвоцинская, Л. А. (1996). К проблеме Римана в случае произвольного числа особых точек. В кн. *Тр. междунар. конф. «Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление (1996)»*, (с. 377—382).
- Хвоцинская, Л. А. (2015). Представление логарифма произведения невырожденных матриц второго порядка. В кн. *Матер. междунар. шестнадцатой научн. конф. им. акад. М. Кравчука, 14-15 мая 2015 г.* (Т. 2.) (с. 192—195). Киев: НТУУ «КПИ».
- Хвоцинская, Л. А., Жоровина, Т. Н. (2015). Уравнение связи интегральных подстановок проблемы Римана. В кн. *Тез. докл. междунар. научн. семинара «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»* (с. 84). Минск: ИМ НАН Беларуси.

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОДИНАМІКИ РУСЛОВОГО ПОТОКУ ПРИ ОБТІКАННІ ДОННИХ ГРЯД

Я. В. Ходневич, О. Є. Щодро

*Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору*

*НАН України, Київ*

*Національний університет водного господарства та природокористування,*

*Рівне, Україна*

[jvhodnevich@ukr.net](mailto:jvhodnevich@ukr.net), [alexeug@hotmail.com](mailto:alexeug@hotmail.com)

Розглядається задача чисельного моделювання динаміки водного потоку в природному руслі при обтіканні затопленої гряди наносів з висотою від 0,1 до 0,5 від глибини потоку, яка розміщена під гострим кутом до берега та відхилена вниз за течією. Відомо, що найбільш інтенсивні й глибокі місцеві розмиви дна і берегів річок виникають у результаті дії розвинутих турбулентних течій біля підніжжя донних гряд, відхилених вниз за течією (Щодро, 2000).

Обчислення кінематичних характеристик місцевої турбулентної течії за грядою наносів пропонується здійснювати шляхом поетапного наближення. На першому етапі виконується дослідження кінематичної структури руслового потоку для його одновимірного випадку на всій протяжності визначеної ділянки русла, далі — для двовимірного та тривимірного випадків. Запропоновані чисельні моделі для оцінки кінематики руслового потоку відповідають реальним умовам. Числа Фруда є досить малими ( $Fr < 1$ ) і характеризують спокійні потоки, які далекі від критичних умов. Числа Рейнольдса є досить великими ( $Re > 20000$ ) і відповідають зоні автотельності течії, коли в'язкість практично не впливає на кінематичні характеристики водного потоку.

Спочатку здійснюється моделювання рівнів вільної поверхні на ділянці непрямокутного русла значної довжини шляхом розв'язання рівняння нерівномірного плавно-змінного усталеного руху водного потоку:

$$\Delta Z_k = \frac{Q^2}{\Omega_k^2 C_k^2 H_k} \Delta l_k + \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{\Omega_{k+1}^2} - \frac{1}{\Omega_k^2} \right), \quad (1)$$

де  $\Delta Z_k$  — перепад вільної поверхні,  $Q$  — витрата потоку,  $\Delta l_k = l_k - l_{k-1}$  — відстань між сусідніми розрахунковими створами,  $l_k$  — подовжні координати,  $\Omega_k$  — площа живого перерізу,  $C_k$  — коефіцієнт Шезі,  $H_k$  — середня по перерізу русла глибина,  $g$  — прискорення вільного падіння,  $k = \overline{1, \beta}$ . За допомогою явного алгоритму, який є реалізацією методу Ейлера розв'язання (1), із врахуванням натурних даних обчислюються рівні вільної поверхні, глибини та середні швидкості руслового потоку. Далі отримані кінематичні характеристики потоку уточнюються в рамках планової задачі гідравліки.

Моделювання плану течій розглядається на ділянках, які характеризуються інтенсивним впливом потоку на дно та береги русла. Розглядаються основні рівняння відкритого потоку планової задачі:

$$\frac{1,5\sqrt{g}}{K^3 C r^2 H} \frac{\partial}{\partial r} (r H^2 u^2) + \frac{\partial (u^2)}{\partial l} = 2gJ_l - \frac{2gu^2}{C^2 H}, \quad (2)$$

$$\frac{u^2}{r} = gJ_b, \quad (3)$$

$$Q = \int_{\omega} u d\omega = const, \quad (4)$$

де  $u$  — осереднена по вертикалі швидкість;  $C, K = 0,4$  — коефіцієнти Шезі та Кармана;  $H$  — глибина потоку;  $J_l, J_b$  — подовжній та поперечний похили водної поверхні;  $Q$  — витрата потоку;  $l, b$  — подовжня та поперечна координати;  $r$  — радіус кривизни лінії току;  $\omega$  — площа поперечного перерізу.

У результаті розв'язання системи (2)—(4) за допомогою ітераційної чисельної схеми уточнюються рівні вільної поверхні, глибини, середні значення швидкостей на вертикалях розрахункової планової області. Ці характеристики потоку використовуються як початкове наближення при моделюванні динаміки турбулентної течії у тривимірній області.

Моделювання кінематичних характеристик турбулентної течії здійснюється в локальній тривимірній області, яка має форму паралелепіпеда та знаходиться біля підніжжя гряди наносів, з протилежного боку до набігаючого потоку. Розглядається система диференціальних рівнянь Рейнольдса (5), що доповнюється рівнянням нерозривності (6) та замикається рівняннями  $k - \varepsilon$  моделі турбулентності (8), (9). Значення турбулентних напруг в (5) записуються згідно градієнтної гіпотези (7).

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (6)$$

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k, \quad (7)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_D \frac{k^{3/2}}{L} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \left( C_{\varepsilon 1} \frac{p}{\varepsilon} - C_{\varepsilon 2} \right) \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (9)$$

де  $\overline{u_i}$  — компоненти вектора осередненої швидкості;  $t$  — час;  $x_i$  — координати точки;  $\overline{f_i}$  — компоненти вектора осередненої масової сили;  $\rho$  — щільність рідини;  $\overline{p}$  — осереднений гідродинамічний тиск;  $\overline{u'_i u'_j}$  — момент кореляції пульсацій швидкостей;  $i$  — номер рівняння,  $j$  — номер члена в рівнянні ( $i, j = \overline{1, 3}$ );  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon$  — коефіцієнт турбулентної в'язкості;  $k$  — кінетична енергія турбулентності;  $\varepsilon$  — швидкість дисипації енергії турбулентності;  $L$  — довжина шляху переміщення;  $C_D = 1$ ,  $\sigma_k = 1$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1,3$ ,  $C_{\varepsilon 1} = 1,44$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ ,  $C_\mu = 0,09$  — прийняті модельні константи.

Розв'язок системи рівнянь (5)—(9) дає змогу знайти донні дотичні напруги в зоні дії розвинутої турбулентної течії на дно та встановити швидкості, які дозволяють оцінити інтенсивність вимивання ґрунту.

Для ефективного дослідження кінематики турбулентної течії за донною грядою з врахуванням висоти цієї перешкоди пропонується поетапно розв'язувати стаціонарні та нестаціонарні рівняння Рейнольдса. Доведено, що такий підхід вирішує проблему стійкості розв'язків системи рівнянь Рейнольдса (Ходневич, 2011).

Здійснено верифікацію чисельної моделі для оцінки кінематики водного потоку у локальній тривимірній області. Показано, що обчислені значення швидкостей водного потоку достатньо добре наближаються до даних аналітичних розв'язків та експериментальних вимірів швидкості за донною перешкодою (Ходневич, 2015).

Запропонований обчислювальний алгоритм дозволяє здійснювати ефектне дослідження гідродинамічної структури водного потоку та його впливу на тверді границі, зокрема, на інтенсивність місцевих розмивів дна та берегів русла при наявності донних гряд.

### Список літератури

- Ходневич, Я. В. (2011). Про стійкість розв'язків системи рівнянь Рейнольдса при чисельному моделюванні кінематичних характеристик водного потоку, що обтікає руслову гряду XV *International Conference Dynamical System Modeling and Stability Investigations. Abstracts of Conference Reports. Kyiv, Ukraine, May 25–27, 2011*, с. 222.
- Ходневич, Я. В. (2015). Верифікація обчислювального алгоритму для визначення кінематичних характеристик водного потоку в локальній тривимірній області у природному руслі. XVII *International Conference Dynamical System Modeling and Stability Investigations. Abstracts of Conference Reports. Kyiv, Ukraine, May 27–29*, (с. 56). Київ.
- Щодро, А. Е. (2000). Исследование структуры и размывающей способности потока за донными уступами и грядами. *Вестник Национального технического университета Украины «КПИ». Машиностроение*, 2 (38), 205—209.

## О ПОЛИНОМАХ, ОБРАЩАЮЩИХСЯ В НУЛЬ НА КОНЦАХ ИНТЕРВАЛА [-1,1]. Ч. II

**В. В. Хорошун**

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина*  
[khoroshun\\_vv@ukr.net](mailto:khoroshun_vv@ukr.net)

Данная работа является продолжением работы Хорошун (2015) по исследованию свойств полиномов  $\mu_n(x)$ , введенных в работе Агранович, Марченко, Шестопапов (1962) при вычислении коэффициентов полученной СЛАУ-2, к которой методом задачи Римана — Гильберта была сведена исходная электродинамическая задача дифракции плоской волны на периодической решетке ( $l$  — период решетки) из бесконечно тонких и идеально проводящих лент ( $d$  — ширина щели решетки). При этом существенным образом использовались суммы такого вида:

$$\sum_{j=0}^n \mu_{n-j}(x) P_{n+j}(x),$$

где  $P_{n+j}(x)$  — полиномы Лежандра,  $x = \cos(\pi d / l)$ .

Ниже приведена сравнительная таблица для полиномов Лежандра  $P_n(x)$  и полиномов  $\mu_n(x)$ :

	полиномы Лежандра $P_n(x)$	полиномы $\mu_n(x)$
Дифференциальное уравнение	$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$	$(1 - x^2)\mu_n''(x) + n(n-1)\mu_n(x) = 0$
Производящая функция	$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$	$(1 - 2xt + t^2)^{1/2}$
Рекуррентные соотношения	$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x),$ $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, (n \geq 2)$ $nP_n(x) = xP_n'(x) - P_{n-1}'(x),$ $(n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - xP_n'(x),$	$n\mu_n(x) = (2n-3)x\mu_{n-1}(x) - (n-3)\mu_{n-2}(x),$ $\mu_0(x) = 1, \mu_1(x) = -x, (n \geq 2)$ $n\mu_n(x) = x\mu_n'(x) - \mu_{n-1}'(x),$ $(2n-1)\mu_n(x) = \mu_{n+1}'(x) - \mu_{n-1}'(x)$

Полиномы  $\mu_n(x)$  выражаются через полиномы Лежандра  $P_n(x)$ :

$$\mu_n(x) = P_n(x) - 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x), (n \geq 2)$$

Учитывая, что на концах интервала  $[-1, 1]$

$$P_n(-1) = (-1)^n, \text{ а } P_n(1) = 1,$$

получаем:

$$\mu_n(\pm 1) = 0, (n \geq 2), \text{ кроме } \mu_0(x) = 1 \text{ и } \mu_1(x) = -x.$$

Полиномы Лежандра являются частным случаем полиномов Гегенбауэра  $P_n^{(\sigma)}(x)$  при  $\sigma = \frac{1}{2}$  (Абрамовиц, Стиган, 1979; Сеге, 1962; Лебедев, 1963; Кузнецов, 1962; Никифоров, Уваров, 1984). Дифференциальное уравнение для полиномов  $\mu_n(x)$ , полученное методом производящей функции, совпадает с дифференциальным уравнением для  $P_n^{(\sigma)}(x)$  при запретном в теории классических ортогональных полиномов значении  $\sigma = -\frac{1}{2}$ . Ниже представлены решения дифференциальных уравнений для  $P_n^{(\sigma)}(x)$ ,  $P_n(x)$  и  $\mu_n(x)$ , полученные с помощью математического пакета **DEtools** системы компьютерной математики **Maple-16**.

**Полиномы Гегенбауэра (ультрасферические)  $P_n^{(\sigma)}(x)$  :**

- > restart : with( DEtools ) :
- > df := (1 - x<sup>2</sup>)DF<sup>2</sup> - (2·σ + 1)·x·DF + n·(2·σ + n) :
- > diffop2de(df, y(x), [DF, x]) :
- > dsolve(% , y(x)) ;

$$y(x) = \_C1 (-1 + x^2)^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sigma} \text{LegendreP}\left(\sigma + n - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \sigma, x\right) + \_C2 (-1 + x^2)^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sigma} \text{LegendreQ}\left(\sigma + n - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \sigma, x\right)$$

**Полиномы Лежандра  $P_n(x)$  :**

- > df := (1 - x<sup>2</sup>)DF<sup>2</sup> - 2·x·DF + n·(1 + n) :
- > diffop2de(df, y(x), [DF, x]) :
- > dsolve(% , y(x)) ;

$$y(x) = \_C1 \text{LegendreP}(n, x) + \_C2 \text{LegendreQ}(n, x)$$

Полиномы  $\mu_n(x)$ :

> df := (1 - x<sup>2</sup>)DF<sup>2</sup> + n · (-1 + n) :

> diffop2de(df, y(x), [DF, x]) :

> dsolve(%, y(x)) ;

$$y(x) = \_C1 (1 - x^2) \operatorname{hypergeom}\left(\left[1 - \frac{1}{2}n, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n\right], \left[\frac{1}{2}\right], x^2\right) + \_C2 (-x^3 + x) \operatorname{hypergeom}\left(\left[1 + \frac{1}{2}n, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}n\right], \left[\frac{3}{2}\right], x^2\right)$$

### Список литературы

- Абрамовиц, М., Стиган, И. (ред.) (1979). *Справочник по специальным функциям*. Москва: Наука.
- Агранович, З. С., Марченко, В. А., Шестопалов, В. П. (1962). Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. *ЖТФ*, 32 (4), 381—394.
- Кузнецов, Д. С. (1962). *Специальные функции*. Москва: Высшая школа.
- Лебедев, Н. Н. (1963). *Специальные функции и их приложения*. Москва; Ленинград: Физматгиз.
- Никифоров, А. Ф., Уваров, В. Б. (1984). *Основы теории специальных функций*. Москва: Наука.
- Сеге, Г. (1962). *Ортогональные многочлены*. Москва: Физматгиз.
- Хорошун, В. В. (2015). О полиномах, обращающихся в нуль на концах интервала  $[-1, 1]$ . XVI *Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука: Матеріали конференції*, 14—15 травня, Київ, (258—259). Київ: НТУУ «КПІ».



**О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ  
В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ  
С КВАДРАТОМ ФУНКЦИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ  
ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО  
УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА**

**А. О. Цуканова**

*НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина*

[shugaray@mail.ru](mailto:shugaray@mail.ru)

Пусть  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$  — полное вероятностное пространство. Рассматривается задача Коши для стохастического дифференциального уравнения типа «реакция-диффузия», содержащего запаздывание под своей «производной»,

$$d \left( u(t, x) + \int_{\mathbb{R}^d} b(t, x, u(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi \right) = \\ = \left( \Delta_x u(t, x) + f(t, u(\alpha(t)), x) \right) dt + \sigma(t, u(\alpha(t)), x) dW(t, x),$$

$$0 < t \leq T, x \in \mathbb{R}^d, u(t, x) = \phi(t, x), -r \leq t \leq 0, x \in \mathbb{R}^d, r > 0, \quad (1)$$

где  $d \in \{1, 2, \dots\}$  — произвольное натуральное число,  $T > 0$  — фиксированное,

$$\Delta_x \equiv \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 \text{ — } d\text{-мерный оператор Лапласа, } \partial_{x_i}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, i \in \{1, \dots, d\},$$

$W(t, x)$  —  $L_2(\mathbb{R}^d)$ -значный винеровский процесс,  $\{f, \sigma\} : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  и  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторые заданные функции,  $\phi : [-r, 0] \times \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  — начальные данные, а  $\alpha : [0, T] \rightarrow [-r, \infty)$  — функция запаздывания. Для так называемого *мягкого решения* задачи (1) доказана теорема существования и единственности.

Приведем некоторые необходимые обозначения, предположения, факты и определения, необходимые для дальнейшего. Пусть поток  $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$   $\sigma$ -алгебр генерируется  $L_2(\mathbb{R}^d)$ -значным ядерным  $Q$ -винеровским процессом

$$W(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e_n(x) \beta_n(t),$$

где  $\{\beta_n(t), n \in \{1, 2, \dots\}\} \subset \mathbb{R}$  — независимые одномерные броуновские движения,  $\{\lambda_n, n \in \{1, 2, \dots\}\}$  — последовательность положительных чисел, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty,$$

а  $\{e_n(x), n \in \{1, 2, \dots\}\}$  — ортонормированный базис в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  такой, что

$$\sup_{n \in \{1, 2, \dots\}} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |e_n(x)| \leq 1.$$

Для дальнейших выкладок необходимы некоторые факты теории уравнений в частных производных, приведенные ниже в виде лемм.

**Лемма 1** (Evans, 1998, с. 47). *Если в однородной задаче Коши*

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \Delta_x u(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \quad (2)$$

начальная функция  $g \in C(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$ , то решение этой задачи представляется в виде интеграла Пуассона — интегральной формулы

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t, x - \xi) g(\xi) d\xi, \quad (3)$$

где  $\mathcal{K}(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4t}\right\}$ ,  $t > 0$ ,  $\mathcal{K}(t, x) = 0$ ,  $t < 0$ , — ядро теплопроводности, причем  $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ .

**Лемма 2.** *Если  $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ , то для функции (3) справедливы следующие предельные соотношения:  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(t, x) = 0$ ,  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \partial_t u(t, x) = 0$ .*

**Лемма 3** (Ladyzhenskaya, Solonnikov Ural'tseva, 1968, с. 274). *Для производных ядра  $\mathcal{K}$  справедлива оценка  $|\partial_t^r \partial_x^s \mathcal{K}(t, x)| \leq c_{r,s} t^{-\frac{d}{2}-r-\frac{s}{2}} \exp\left\{-\frac{c_0 |x|^2}{t}\right\}$ ,*

$$c_{r,s} > 0, \quad c_0 < \frac{1}{4}.$$

Из лемм 1—3 вытекает следующий результат.

**Лемма 4** (Evans, 1998, с. 360). *Если  $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$  и  $|\nabla_x g| \in L_2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\|D_x^2 g\| \in L_2(\mathbb{R}^d)$ , то для вторых производных функции (3) справедлива оценка*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta_x u(t, x))^2 dx = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \|D_x^2 u(t, x)\|^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} \|D_x^2 g(x)\|^2 dx,$$

где  $C > 0$  — некоторая постоянная, которая зависит лишь от  $T$ ,

$$\nabla_x \equiv \left( \partial_{x_1} \quad \dots \quad \partial_{x_d} \right)^T, \quad D_x^2 \equiv \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 & \dots & \partial_{x_1 x_d} \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{x_d x_1} & \dots & \partial_{x_d}^2 \end{pmatrix} \text{ — оператор Гессе,}$$

$\|\cdot\|$  — соответствующая норма матрицы.

**Лемма 5** (Da Prato, Zabczyk, 1996, с. 188; Tessitore, Zabczyk, 1998). Операторы  $S(t) : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ , генерирующие решение задачи (2) по правилу

$$u(t, x) = (S(t)g(\cdot))(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t, x - \xi)g(\cdot)d\xi,$$

образуют  $(C_0)$ -полугруппу операторов, инфинитезимальным генератором (производящим оператором) которой является лапласиан  $\Delta_x$ , причем эта полугруппа является сжимающей, то есть справедлива оценка

$$\left\| (S(t)g(\cdot))(x) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|g(x)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad 0 \leq t \leq T, \quad g \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Считаются выполненными следующие предположения:

1)  $\alpha : [0, T] \rightarrow [-r, \alpha(T)]$  — функция из  $C^1([0, T])$ , производная которой удовлетворяет условию  $0 < \alpha' \leq 1$ ;

2)  $\{f, \sigma\} : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримые по совокупности своих аргументов функции;

3) начальная функция  $\phi : [-r, 0] \times \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathfrak{F}_0$ -измерима, независима от  $W(t, x)$ ,  $t \geq 0$ , и такая, что  $\sup_{-r \leq t \leq 0} \mathbf{E} \|\phi(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 < \infty$ . Через  $\mathfrak{B}_{2, T}$  обозначим банахово пространство всех  $L_2(\mathbb{R}^d)$ -значных  $\mathfrak{F}_t$ -измеримых для почти всех  $0 \leq t \leq T$  случайных процессов  $\Phi : [0, T] \times \Omega \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ , непрерывных по  $t$  для почти всех  $\omega \in \Omega$ , с нормой

$$\|\Phi\|_{\mathfrak{B}_{2, T}} = \sqrt{\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E} \|\Phi(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2}.$$

Дадим определение мягкого решения задачи (1).

**Определение 1.** Непрерывный случайный процесс  $u : [-r, T] \times \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется мягким решением задачи (1), если он:

1)  $\mathfrak{F}_t$ -измерим для почти всех  $-r \leq t \leq T$ ;

2) является решением уравнения

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t, x - \xi) \left( \phi(0) + \int_{\mathbb{R}^d} b(0, \xi, \phi(-r, \zeta), \zeta) d\zeta \right) d\xi - \\ - \int_{\mathbb{R}^d} b(t, x, u(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi - \int_0^t \left( \Delta_x \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t-s, x - \xi) \left( \int_{\mathbb{R}^d} b(s, \xi, u(\alpha(s), \zeta), \zeta) d\zeta \right) d\xi \right) ds +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t-s, x-\xi) f(s, u(\alpha(s)), \xi) d\xi ds + \\
& + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t-s, x-\xi) \sigma(s, u(\alpha(s)), \xi) e_n(\xi) d\xi \right) d\beta_n(s)
\end{aligned}$$

$0 \leq t \leq T$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $u(t, x) = \phi(t, x)$ ,  $-r \leq t \leq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $r > 0$ ;

3) удовлетворяет условию

$$\mathbf{E} \int_0^T \|u(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 dt < \infty.$$

Дальнейшая теорема касается существования и единственности для  $0 \leq t \leq T$  мягкого решения задачи (1) в пространстве  $\mathfrak{B}_{2,T}$ .

**Теорема 1.** *Предположим, что выполняются следующие условия:*

1) существует постоянная  $L > 0$  такая, что для функций  $\{f, \sigma\}$  выполняются условия

$$|f(t, u, x)| \leq \chi(t, x) + L|u|, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$$|f(t, u, x) - f(t, v, x)| \leq L|u - v|, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \{u, v\} \subset \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma^2(t, u, x) \leq L^2(1 + u^2), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$$(\sigma(t, u, x) - \sigma(t, v, x))^2 \leq L^2(u - v)^2, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \{u, v\} \subset \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

где функция  $\chi : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  такая, что  $\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \chi^2(t, x) dx < \infty$ ;

2) функция  $b$  удовлетворяет условиям

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |b(t, x, 0, \zeta)| d\zeta dx < \infty, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |b(t, x, 0, \zeta)| d\zeta \right)^2 dx < \infty,$$

и для нее выполняется условие Липшица по третьему аргументу вида

$$|b(t, x, u, \xi) - b(t, x, v, \xi)| \leq l(t, x, \xi)|u - v|, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^d, \quad \{u, v\} \subset \mathbb{R},$$

где функция  $l : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  такая, что

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \zeta) d\zeta} dx < \infty, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \zeta) d\zeta dx < \infty;$$

3) для любого  $x \in \mathbb{R}^d$  существуют производные  $\partial_{x_i} b$ ,  $\partial_{x_i x_j} b$ ,

$\{i, j\} \subset \{1, \dots, d\}$ , и для вектора  $\nabla_x b$  и матрицы  $D_x^2 b$  выполняются условия линейного роста и Липшица по третьему аргументу вида

$$\begin{aligned} |\nabla_x b(t, x, u, \xi)| + \|D_x^2 b(t, x, u, \xi)\| &\leq \psi(t, x, \xi)(1 + |u|), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^d, \\ u &\in \mathbb{R}, \\ \|D_x^2 b(t, x, u, \xi) - D_x^2 b(t, x, v, \xi)\| &\leq \psi(t, x, \xi)|u - v|, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^d, \\ \{u, v\} &\subset \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где функция  $\psi : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  удовлетворяет условиям

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi^2(t, x, \zeta) d\zeta dx < \infty, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t, x, \zeta) d\zeta \right)^2 dx < \infty,$$

причем для всякой точки  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  существует ее  $\delta$ -окрестность  $B_\delta(x_0)$ ,  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , и неотрицательная функция  $\varphi(t, x, x_0, \delta)$  такая, что

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \varphi(t, \cdot, x_0, \delta) \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d),$$

$$|\psi(t, x, \zeta) - \psi(t, x_0, \zeta)| \leq \varphi(t, \zeta, x_0, \delta)|x - x_0|, \quad 0 \leq t \leq T, \quad |x - x_0| < \delta, \quad \zeta \in \mathbb{R}^d.$$

Тогда, если

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t, x, \xi) d\xi dx < \frac{1}{4},$$

то задача (1) имеет единственное на  $0 \leq t \leq T$  мягкое решение  $u \in \mathfrak{B}_{2,T}$ .

### Список литературы

- Da Prato, J., & Zabczyk, J. (1992). *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. (1992). Cambridge University Press.
- Da Prato, J., & Zabczyk, J. (1996). *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*. Cambridge University Press.
- Evans, L. C. (1998). *Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, 19*. American Mathematical Society.
- Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., & Ural'tseva, N. N. (1968). *Linear and Quasi Linear Equations of Parabolic Type* (Vol. 23). American Mathematical Society.
- Mahmudov, N. I., Samoilenko, A. M., & Stanzhitskii, A. N. (2008). Existence, Uniqueness and Controllability Results for Neutral FSDEs in Hilbert Spaces. *Dynamic Systems and Applications, 17*, 54–70.
- Tessitore, G., & Zabczyk, J. (1998). Invariant Measures for Stochastic Heat Equations. *Probability and Mathematical Statistics, 18*, 271–287.

**СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ В  $L_2^p(\mathbb{R}^d)$   
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ  
ДЛЯ ОДНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ  
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПОД «ПРОИЗВОДНОЙ»**

**А. О. Цуканова**

*НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина*

[shugaray@mail.ru](mailto:shugaray@mail.ru)

Вопросам существования и единственности решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) при заданных начально-краевых условиях в различных функциональных пространствах посвящено множество работ. Вызывают интерес нелинейные СДУ в частных производных, существенным признаком которых является наличие эффекта запаздывания под «производной», — нелинейные *СДУ нейтрального типа*. В работе Mahmudov (2008) рассмотрена начальная задача для абстрактного функционального уравнения такого типа в гильбертовом пространстве, для которой введено понятие так называемого *мягкого решения*, и доказана теорема об его существовании и единственности. Однако условия этой теоремы в общем виде сложно проверять для конкретных прикладных задач. Поэтому важным является вопрос о нахождении удобных для проверки условий существования и единственности их решения, выраженных в терминах коэффициентов уравнения, — коэффициентных условий существования и единственности. Это возможно осуществить в частных случаях, один из которых рассмотрен автором.

Пусть  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$  — полное вероятностное пространство. Рассматривается задача Коши для стохастического интегро-дифференциального уравнения

$$d \left( u(t, x) + \int_{\mathbb{R}^d} b(t, x, u(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi \right) = \\ = \left( \Delta_x u(t, x) + f(t, u(\alpha(t)), x) \right) dt + \sigma(t, u(\alpha(t)), x) dW(t, x),$$

$$0 < t \leq T, x \in \mathbb{R}^d, T > 0, u(t, x) = \phi(t, x), -r \leq t \leq 0, x \in \mathbb{R}^d, r > 0, \quad (1)$$

где  $\Delta_x \equiv \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2$  —  $d$ -мерный лапласиан,  $\partial_{x_i}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ,  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,

$\{f, \sigma\} : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  и  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторые заданные функции,  $\phi : [-r, 0] \times \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  — начальные данные,  $\alpha : [0, T] \rightarrow [-r, \infty)$  — функция запаздывания, а стохастический член  $W(t, x)$  является  $L_2(\mathbb{R}^d)$ -значным винеровским процессом

$$W(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e_n(x) \beta_n(t),$$

который генерирует поток  $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$   $\sigma$ -алгебр. Здесь  $\{\beta_n(t), n \in \{1, 2, \dots\}\} \subset \mathbb{R}$  — независимые винеровские процессы,  $\{\lambda_n, n \in \{1, 2, \dots\}\}$  — последовательность положительных чисел, причем  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ , а  $\{e_n(x), n \in \{1, 2, \dots\}\}$  — ортонормированный базис в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  такой, что

$$\sup_{n \in \{1, 2, \dots\}} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |e_n(x)| \leq 1.$$

Через  $\mathfrak{B}_{p, T, \rho}$ ,  $p \geq 2$ , обозначим банахово пространство всех  $L_2^{\rho}(\mathbb{R}^d)$ -значных  $\mathfrak{F}_t$ -измеримых для почти всех  $0 \leq t \leq T$  случайных процессов  $\Phi : [0, T] \times \Omega \rightarrow L_2^{\rho}(\mathbb{R}^d)$ , непрерывных по  $t$  для почти всех  $\omega \in \Omega$ , с нормой

$$\|\Phi\|_{\mathfrak{B}_{p, T, \rho}} = \sqrt[p]{\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E} \|\Phi(t)\|_{L_2^{\rho}(\mathbb{R}^d)}^p}.$$

Здесь  $L_2^{\rho}(\mathbb{R}^d)$  — весовое гильбертово пространство с нормой

$$\|f\|_{L_2^{\rho}(\mathbb{R}^d)} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \rho(x) dx},$$

причем весовая функция  $\rho \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ,  $0 < \rho \leq 1$ , обладает следующим свойством: для каждого  $T > 0$  существует  $C_{\rho}(T) > 0$  такая, что для любого  $0 \leq t \leq T$  справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t, x - \xi) \rho(x) dx \leq C_{\rho}(T) \rho(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Считаются выполненными следующие предположения:

- 1)  $\alpha : [0, T] \rightarrow [-r, \alpha(T)]$  — функция из  $C^1([0, T])$ , производная которой удовлетворяет условию  $0 < \alpha' \leq 1$ ;
- 2)  $\{f, \sigma\} : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримые по совокупности своих аргументов функции;
- 3) начальная функция  $\phi : [-r, 0] \times \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathfrak{F}_0$ -измерима, независима от  $W(t, x)$ ,  $t \geq 0$ , и такая, что  $\sup_{-r \leq t \leq 0} \mathbf{E} \|\phi(t)\|_{L_2^{\rho}(\mathbb{R}^d)}^p < \infty$ .

**Определение 1.** Непрерывный случайный процесс  $u : [-r, T] \times \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется мягким решением задачи (1), если он:

1)  $\mathfrak{F}_t$ -измерим для почти всех  $-r \leq t \leq T$ ;

2) является решением уравнения

$$\begin{aligned}
 u(t, x) = & \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(t, x - \xi) \left( \phi(0) + \int_{\mathbb{R}^d} b(0, \xi, \phi(-r, \zeta), \zeta) d\zeta \right) d\xi - \\
 & - \int_{\mathbb{R}^d} b(t, x, u(\alpha(t), \xi), \xi) d\xi - \int_0^t \left( \Delta_x \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(t-s, x-\xi) \left( \int_{\mathbb{R}^d} b(s, \xi, u(\alpha(s), \zeta), \zeta) d\zeta \right) d\xi \right) ds + \\
 & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(t-s, x-\xi) f(s, u(\alpha(s)), \xi) d\xi ds + \\
 & + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(t-s, x-\xi) \sigma(s, u(\alpha(s)), \xi) e_n(\xi) d\xi \right) d\beta_n(s),
 \end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^d, u(t, x) = \phi(t, x), -r \leq t \leq 0, x \in \mathbb{R}^d, r > 0;$$

3) удовлетворяет условию

$$\mathbf{E} \int_0^T \|u(t)\|_{L_2^p(\mathbb{R}^d)}^p dt < \infty.$$

Для так определенного решения справедлива следующая

**Теорема 1.** *Предположим, что выполняются следующие условия:*

1) функции  $\{f, \sigma\}$  удовлетворяют условиям линейного роста и Липшица по второму аргументу, то есть существует постоянная  $L > 0$  такая, что

$$|f(t, u, x)| + |\sigma(t, u, x)| \leq L(1 + |u|), \quad 0 \leq t \leq T, u \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d,$$

$$|f(t, u, x) - f(t, v, x)| + |\sigma(t, u, x) - \sigma(t, v, x)| \leq L|u - v|,$$

$$0 \leq t \leq T, \{u, v\} \subset \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d;$$

2) функция  $b$  удовлетворяет условиям

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |b(t, x, 0, \xi)| d\xi \right)^2 \rho(x) dx < \infty, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |b(t, x, 0, \xi)| d\xi dx < \infty,$$

а также условию Липшица по третьему аргументу вида

$$|b(t, x, u, \xi) - b(t, x, v, \xi)| \leq l(t, x, \xi)|u - v|, \quad 0 \leq t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^d, \{u, v\} \subset \mathbb{R},$$

где функция  $l : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  такая, что

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{l^2(t, x, \xi)}{\rho(\xi)} d\xi \right) \rho(x) dx < \infty, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} \frac{l^2(t, x, \xi)}{\rho(\xi)} d\xi} dx < \infty;$$



3) для любого  $x \in \mathbb{R}^d$  существуют производные  $\partial_{x_i} b$ ,  $\partial_{x_i x_j} b$ ,  $\{i, j\} \subset \{1, \dots, d\}$ , и для градиента  $\nabla_x b \equiv (\partial_{x_1} b \ \dots \ \partial_{x_d} b)^T$  и матрицы Гессе

$$D_x^2 b \equiv \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 b & \dots & \partial_{x_1 x_d} b \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{x_d x_1} b & \dots & \partial_{x_d}^2 b \end{pmatrix}$$

выполняется условие линейного роста по третьему аргументу вида

$$\left| \nabla_x b(t, x, u, \xi) \right| + \left\| D_x^2 b(t, x, u, \xi) \right\| \leq \psi(t, x, \xi) (1 + |u|), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^d, \\ u \in \mathbb{R},$$

а для  $D_x^2 b$  — условие Липшица вида

$$\left\| D_x^2 b(t, x, u, \xi) - D_x^2 b(t, x, v, \xi) \right\| \leq \psi(t, x, \xi) |u - v|, \\ 0 \leq t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^d, \quad \{u, v\} \subset \mathbb{R},$$

где функция  $\psi : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  удовлетворяет условиям

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t, x, \xi) d\xi \right)^2 dx < \infty, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\psi^2(t, x, \xi)}{\rho(\xi)} d\xi dx < \infty,$$

причем для всякой точки  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  существует ее  $\delta$ -окрестность  $B_\delta(x_0)$ ,  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , и неотрицательная функция  $\varphi(t, x, x_0, \delta)$  такая, что

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \frac{\varphi(t, \cdot, x_0, \delta)}{\sqrt{\rho(\cdot)}} \in L_2(\mathbb{R}^d),$$

$$\left| \psi(t, x, \xi) - \psi(t, x_0, \xi) \right| \leq \varphi(t, \xi, x_0, \delta) |x - x_0|, \quad 0 \leq t \leq T, \quad |x - x_0| < \delta, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Тогда, если

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{l^2(t, x, \xi)}{\rho(\xi)} d\xi \right) \rho(x) dx \right)^{\frac{p}{2}} < \frac{1}{4^{p-1}},$$

то задача (1) имеет единственное на  $0 \leq t \leq T$  мягкое решение  $u \in \mathfrak{B}_{p, T, \rho}$ .

Для доказательства теоремы необходимы некоторые факты теории уравнений в частных производных, приведенные ниже в виде лемм.

**Лемма 1** (Evans, 1998, с. 47). Если в задаче Коши для однородного уравнения теплопроводности

$$\partial_t u(t, x) = \Delta_x u(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad u(0, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (2)$$

начальная функция  $g \in C(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$ , то решение этой задачи представляется в виде интеграла Пуассона — интегральной формулы

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t, x - \xi) g(\xi) d\xi, \quad (3)$$

где  $\mathcal{K}(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4t}\right\}$ ,  $t > 0$ ,  $\mathcal{K}(t, x) = 0$ ,  $t < 0$ , причем

$u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ .

**Лемма 2** (Evans, 1998, с. 360). Если  $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$  и  $|\nabla_x g| \in L_2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\|D_x^2 g\| \in L_2(\mathbb{R}^d)$ , то для вторых производных функции (3) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta_x u(t, x))^2 dx = \\ & = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \|D_x^2 u(t, x)\|^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} \|D_x^2 g(x)\|^2 dx, \end{aligned}$$

где  $C > 0$  — некоторая постоянная, зависящая лишь от  $T$ ,  $\|\cdot\|$  — соответствующая норма матрицы.

**Лемма 3** [Da Prato, 1996, с. 188]. Операторы  $S(t) : L_2^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2^p(\mathbb{R}^d)$ , генерирующие решение задачи (2) по правилу

$$u(t, x) = (S(t)g(\cdot))(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t, x - \xi) g(\cdot) d\xi,$$

образуют  $(C_0)$ -полугруппу операторов, инфинитезимальным генератором которой является  $\Delta_x$ . При этом

$$\|(S(t)g(\cdot))(x)\|_{L_2^p(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_p(T) \|g(x)\|_{L_2^p(\mathbb{R}^d)}^2, \quad 0 \leq t \leq T, \quad g \in L_2^p(\mathbb{R}^d).$$

Для мягкого решения частного случая задачи (1) — начальной задачи

$$\begin{aligned} & d \left( u(t, x) + \int_{\mathbb{R}^d} b(t, x, \xi) u(t - h, \xi) d\xi \right) = \\ & = (\Delta_x u(t, x) + f(t, u(t - h), x)) dt + \sigma(t, u(t - h), x) dW(t, x), \end{aligned}$$

$$0 < t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad T > 0, \quad u(t, x) = \phi(t, x), \quad -h \leq t \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad h > 0, \quad (4)$$

— справедлива следующая

**Теорема 2.** Предположим, что выполняются следующие условия:

1)  $\{f, \sigma\} : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  — функции из п. 1 теоремы 1;

2)  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримая функция такая, что

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|b(t, x, \xi)|^2}{\rho(\xi)} d\xi \right) \rho(x) dx < \infty, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|b(t, x, \xi)|^2}{\rho(\xi)} d\xi} dx < \infty;$$

3) для всякого  $x \in \mathbb{R}^d$  существуют производные  $\partial_{x_i} b$ ,  $\partial_{x_i x_j} b$ ,

$\{i, j\} \subset \{1, \dots, d\}$ , и для вектора  $\nabla_x b$  и матрицы  $D_x^2 b$  выполняются условия

$$|\nabla_x b(t, x, \xi)| + \|D_x^2 b(t, x, \xi)\| \leq \psi(t, x, \xi), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^d,$$

$$\|D_x^2 b(t, x, \xi) - D_x^2 b(t, x, \xi)\| \leq \psi(t, x, \xi), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^d,$$

где функция  $\psi$  удовлетворяет условиям п. 3 теоремы 1.

Тогда, если

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|b(t, x, \xi)|^2}{\rho(\xi)} d\xi \right) \rho(x) dx \right)^{\frac{p}{2}} < \frac{1}{4^{p-1}},$$

то задача (4) имеет единственное на  $0 \leq t \leq T$  мягкое решение  $u \in \mathfrak{B}_{p, T, \rho}$ .

### Список литературы

- Da Prato, J., & Zabczyk, J. (1992). *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. (1992). Cambridge University Press.
- Da Prato, J., & Zabczyk, J. (1996). *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*. Cambridge University Press.
- Evans, L. C. (1998). *Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, 19*. American Mathematical Society.
- Mahmudov, N. I., Samoilenko, A. M., & Stanzhitskii, A. N. (2008). Existence, Uniqueness and Controllability Results for Neutral FSDEs in Hilbert Spaces. *Dynamic Systems and Applications, 17*, 54–70.
- Tessitore, G., & Zabczyk, J. (1998). Invariant Measures for Stochastic Heat Equations. *Probability and Mathematical Statistics, 18*, 271–287.

**ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОЗМІННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ  
ДВОЧЛЕННИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ  
ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ ТА ШВИДКО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ**

**О. О. Чепок**

*Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна  
olacherok@ukr.net*

Розглядається диференціальне рівняння

$$y''(t) = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) |z|^{\sigma_1} \quad (1)$$

де  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ ,  $p : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ) — неперервна функція,  $\varphi_0 : \Delta_{Y_0} \rightarrow ]0, +\infty[$  — двічі неперервно диференційовна функція,  $\Delta_{Y_0} = [y_0^0, Y_0[$  або  $\Delta_{Y_0} = ]Y_0, y_0^0]$ ,  $Y_0 \in \{0, \pm\infty\}$ . При  $Y_0 = +\infty$  ( $Y_0 = -\infty$ ) вважаємо, що  $y_0^0 > 0$  ( $y_0^0 < 0$ ) відповідно. Крім того вважається, що функція  $\varphi_0(z)$  строго монотонно зростаюча на  $\Delta_{Y_0}$  та задовольняє умову

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Y_0 \\ z \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(z) \varphi_0''(z)}{(\varphi_0'(z))^2} = 1.$$

Розв'язок  $y$  рівняння (1) називається  $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$ -розв'язком, якщо

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = 1.$$

За рахунок вищевказаного означення, такі розв'язки є швидкозмінними функціями при  $t \uparrow \omega$ .

Встановлено необхідні та достатні умови існування в рівняння (1)  $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$ -розв'язків, а також знайдено асимптотичні зображення при  $t \uparrow \omega$  для таких розв'язків та їх похідних.

Введемо наступні позначення:

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty; \end{cases}$$

$$F_0(z) = \int_{A_\omega^2}^z \frac{\text{sign } y_1^0}{(\varphi_0(y) |y|)^{\frac{1}{2-\sigma_1}}} dy, \quad A_\omega^2 = \begin{cases} y_0^0, & \int_{y_0^0}^{Y_0} \frac{\text{sign } y_1^0}{(\varphi_0(y) |y|)^{\frac{1}{2-\sigma_1}}} dy = +\infty, \\ Y_0, & \int_{y_0^0}^{Y_0} \frac{\text{sign } y_1^0}{(\varphi_0(y) |y|)^{\frac{1}{2-\sigma_1}}} dy < +\infty. \end{cases}$$

$$I_2(t) = \int_{B_\omega}^t (p(\tau))^{2-\sigma_1} d\tau, \quad B_\omega^2 = \begin{cases} b, & \int_b^\omega p^{2-\sigma_1}(\tau) d\tau = +\infty; \\ \omega, & \int_b^\omega p^{2-\sigma_1}(\tau) d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Нехай функція  $\varphi_0$  з рівняння (1) задовольняє наступним умовам.

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Y_0 \\ z \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_0(z) \in \{0, +\infty\}, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow Y_0 \\ z \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\left(\frac{F_0'(z)}{F_0(z)}\right)'' \left(\frac{F_0'(z)}{F_0(z)}\right)}{\left(\left(\frac{F_0'(z)}{F_0(z)}\right)'\right)^2} = \gamma_0 \quad \gamma_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

Зауважимо, що  $\varphi_0$  є швидко змінною функцією при  $z \rightarrow Y_0$  ( $z \in \Delta_{Y_0}$ ) (Maric, 2000).

Отримано наступну теорему.

**Теорема 1.** Наступні умови є необхідними для існування  $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$ -розв'язків рівняння (1):

$$\lim_{t \uparrow \omega} F_0^{-1}(I_2(t)) = Y_0, \quad y_0^0 \alpha_0 > 0,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{F_0'(F_0^{-1}(I_2(t))) F_0^{-1}(I_2(t)) \left(\frac{I'(t)}{I_2(t)}\right)'}{I_2(t)} = \frac{\gamma_0 - 2}{\gamma_0 - 1}.$$

Ці умови також є достатніми для існування в рівняння (1) таких розв'язків, якщо

$$F_0^{-1}(t) F_0'(F_0^{-1}(t)) I_2(t) \sigma_1 < 0 \quad \text{при } t \in [a; \omega].$$

Більш того, такі розв'язки мають наступні асимптотичні зображення при  $t \uparrow \omega$

$$F_0(y(t)) = I_2(t)[1 + o(1)], \quad \frac{y'(t) F_0'(y(t))}{F_0(y(t))} = \frac{I'(t)}{I_2(t)} [1 + o(1)].$$

Для доведення теореми використано деякі теореми з роботи Евтухов, Самойленко (2010) та деякі методи з роботи Евтухов, Белозерова, (2008).

### Список літератури

- Maric, V. (2000). Regular Variation and Differential Equations, *Statistical Papers*, Springer, 34 (1), 115–131.
- Евтухов, В. М., Самойленко, А. М. (2010). Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений. *Укр. мат. журн.*, 62 (1), 52—80.
- Евтухов, В. М., Белозерова, М. А. (2008). Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка. *Укр. мат. журн.*, 60 (3), 310—331.

# АВТОМОДЕЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

В. П. Шоха

*Національний університет харчових технологій, Київ, Україна*

Автомодельність — це симетрія задачі, яка дозволяє компенсувати масштабні перетворення незалежних змінних відповідним розтягом розв'язку.

При  $n = 2$  (час  $t$  і координата  $x$ ) автомодельність означає вибір нового масштабу координати  $l(t)$  і розв'язку  $u(t)$  таких, що в нових змінних розв'язок є функцією однієї змінної  $\eta$ :

$$u(x;t) = A(t)f(\eta), \quad \eta = \frac{x}{l(t)}.$$

Коли таке перетворення вдається знайти, задача зводиться до звичайного диференціального рівняння. Інколи перетворення простіше всього знайти за допомогою аналізу розмірності фізичних величин, які входять в рівняння. Часто зручніше прямо аналізувати перетворення розтягу невідомих функцій і незалежних змінних та шукати, яку групу перетворень допускає рівняння, тобто які розтяги залишають рівняння незмінним.

Розглянемо нелінійне рівняння теплопровідності, в якому коефіцієнт температуропровідності залежить від температури, з точковою початковою умовою:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad u(x;0) = \delta(x), \quad (1)$$

де  $\delta(x)$  — дельта-функція.

Аналіз розмірностей виконаємо при перетворенні розтягу:

$$t \rightarrow \mu t, \quad x \rightarrow \lambda x, \quad u \rightarrow \chi u.$$

Щоб рівняння було інваріантним відносно такого перетворення, необхідно виконання співвідношення  $\lambda = \mu^{1/3}$ , а початкова умова зберігає вигляд, якщо  $\chi = \mu^{-1/3}$  (розмірність  $\delta$  — функції дорівнює оберненій розмірності її аргументу).

Тоді автомодельна підстановка має вигляд:

$$u(x;t) = t^{-1/3} f(\eta), \quad \eta = xt^{-1/3}. \quad (2)$$

Якщо розв'язок (2) підставити в рівняння (1), то будемо мати:

$$-\frac{1}{3}t^{-4/3}f + t^{-1/3}f'x \left(-\frac{1}{3}\right)t^{-4/3} = \left(t^{-1/3}f't^{-1/3}\right)^2 + t^{-1/3}ft^{-2/3}f''t^{-1/3};$$
$$-\frac{1}{3}f - \frac{1}{3}\eta f' = (f')^2 + ff''.$$

Отже, для функції  $f(\eta)$  отримаємо звичайне диференціальне рівняння:

$$(ff')' + \frac{1}{3}\eta f' + \frac{1}{3}f = 0.$$

Взявши один раз інтеграл та вибравши нульову константу, маємо:

$$ff' + \frac{1}{3}\eta f = 0.$$

Це рівняння має два розв'язки:

$f = 0$ , який буде справедливим при великих за абсолютним значенням  $\eta$ ,

і  $f = C - \frac{\eta^2}{6}$ .

Розв'язок у всій області:

$$f(\eta) = \begin{cases} C - \frac{\eta^2}{6}, & \eta^2 \leq 6C; \\ 0, & \eta^2 > 6C. \end{cases}$$

Константу  $C$  знайдемо з умови нормування  $\delta$ -функції:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x;t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)d\eta = 1.$$

Тоді маємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)d\eta = \int_{-\sqrt{6C}}^{\sqrt{6C}} \left( C - \frac{\eta^2}{6} \right) d\eta = \left( C\eta - \frac{\eta^3}{18} \right) \Big|_{-\sqrt{6C}}^{\sqrt{6C}} = 1;$$

$$2C\sqrt{6C} - \frac{2C\sqrt{6C}}{3} = 1; C\sqrt{6C} = \frac{3}{4}; C^3 = \frac{6}{64}; C = \frac{\sqrt[3]{6}}{4}.$$

Отже, автомоделний розв'язок має вигляд:

$$u(x;t) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{6}}{4} - \frac{x^2}{6\sqrt[3]{t^2}}, & \frac{x^2}{\sqrt[3]{t^2}} \leq \frac{3\sqrt[3]{6}}{2}; \\ 0, & \frac{x^2}{\sqrt[3]{t^2}} > \frac{3\sqrt[3]{6}}{2}. \end{cases}$$

Розв'язок має різкий край — фронт теплової хвилі. Розширення нагрітої області в даному випадку відбувається по закону  $l(t) \sim t^{1/3}$ . Площа над графіком профілю температури не змінюється.

### Список літератури

- Кузнецов, Е. А., Шапиро, Д. А. (2011). *Методы математической физики: курс лекций* (Ч. 1). Новосибирск: Новосибирский государственный университет.
- Дерендяев, Н. В. (2007). *Анализ размерности и автомоделные решения (в примерах и задачах)*. Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет.

# СОЛІТОННІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРІЗА

В. П. Шоха

Національний університет харчових технологій, Київ, Україна

Канонічне рівняння Кортевега — де Фріза має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (1)$$

У цьому рівнянні другий доданок описує нелінійні ефекти, третій — відповідає за дисперсію. Рівняння Кортевега — де Фріза описує широке коло явищ, які відбуваються в середовищах з малою дисперсією та малою нелінійністю.

Шляхом численних експериментів було з'ясовано, що рівняння (1) описує хвилі, які не змінюються після зіткнення одна з одною, які назвали *солітонами*. З точки зору фізики, солітон — це локалізоване збудження нелінійного середовища, яке має дисперсійні або дисипативні властивості, яке поширюється у просторі без зміни форми та має властивість дуальності.

Будемо досліджувати наявність неперервних розв'язків рівняння (1) типу бігучої хвилі з незмінним профілем вигляд

$$u(x;t) = f(x - ct), \quad (2)$$

які мають фізичний зміст, тобто задовольняють умовам

$$u(|x| \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(|x| \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (3)$$

Суть цих умов проста: солітон, як фізичний об'єкт, володіє енергією, умови (3) означають обмеженість його енергії. Математично з них випливає інтегрованість функції  $u(x;t)$ . Слід відзначити, що розв'язки всіх солітонних рівнянь, а не тільки рівняння Кортевега — де-Фріза, знаходяться при виконанні умов (3).

Запишемо рівняння Кортевега — де-Фріза в загальнішому вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (4)$$

де  $\beta$  — деякий параметр.

Будемо шукати розв'язок рівняння (4) у вигляді (2):

$$u = f(\eta),$$

де  $\eta = x - ct$ ,  $c$  — швидкість поширення стаціонарної хвилі.

Після підстановки отримаємо диференціальне рівняння для функції  $f(\eta)$ :

$$\beta \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{1}{2} f^2 - cf = 0,$$

яке еквівалентно рівнянню руху

$$\beta \frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{dU}{df}, \quad U = U(f) = \frac{1}{6} f^3 - \frac{c}{2} f^2$$

для частинки маси  $\beta$  в полі сили з потенціалом  $U(f)$ .



З іншої сторони, добре відомо, що обмежений розв'язок існує тільки тоді, коли рівень повної енергії частинки

$$E = \frac{\beta}{2} \left( \frac{df}{d\eta} \right)^2 + U(f)$$

розміщений всередині потенціальної ями.

Обмежений розв'язок існує при  $E(f) \leq 0$ .

Останню рівність запишемо у вигляді

$$\frac{df}{d\eta} = \pm \sqrt{\frac{2}{\beta} (E - U)}.$$

Легко довести, що потрібний нам розв'язок досягається при  $E = 0$ :

$$f(\eta) = \frac{3c}{\text{ch}^2 \frac{\eta}{\alpha}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{4\beta}{c}}.$$

Повертаючись до змінних  $x$  і  $t$ , маємо солітонний розв'язок рівняння (4):

$$u(x;t) = \frac{u_{\max}}{\text{ch}^2 \frac{x-ct}{2}} = u_{\max} \text{sech}^2 \frac{x-ct}{2}, \quad (5)$$

$$\alpha^2 c = 4\beta, \quad \alpha^2 u_{\max} = 12\beta. \quad (6)$$

Рівності (6) описують умови існування солітона: добуток ширини горба і швидкість його поширення (перша рівність) та добуток ширини горба і його висоти (друга рівність) є сталими величинами. Іншими словами, вузький солітон є більш високим і рухається швидше, ніж низький і широкий.

Відмітимо, що розв'язок (5) описує відокремлений солітон і не описує взаємодії між солітонами, тобто з цього виразу не випливає властивість дуальності.

Для рівняння (1) солітонний розв'язок має вигляд

$$u(x;t) = \frac{2}{\text{ch}^2(x-4t)} = 2 \text{sech}^2(x-4t).$$

Оскільки рівняння (1) має перший порядок по часу, то хвильовий рух є однонаправлений, так що всі відокремлені хвилі рівняння (1) будуть поширюватися в сторону зростання  $x$ .

### Список літератури

- Зейтунян, Р. Х. (1995). Нелинейные волны на поверхности воды и солитоны. *УФН*, 165 (12), 1404—1456.
- Ощепков, А. Ю. (2007). *Теория солитонов. Математическое описание и физические приложения*. Пермь: Пермский ун-т.

**ПРО ВІДТВОРЕННЯ ГРАНИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ ПОТЕНЦІАЛУ  
ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ  
РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ НА КОМПАКТІ**

**Ю. В. Шунькін, Б. А. Остудін, Я. С. Гарасим**

*Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна*  
[jurkash@gmail.com](mailto:jurkash@gmail.com)

У роботі досліджено питання, пов'язані з розрахунком осесиметричного електростатичного поля, створюваного зарядженими електродами, що моделюються сукупністю певного класу розімкнених поверхонь. Розглядувану проблему подавали у вигляді системи інтегральних рівнянь першого роду з логарифмічними особливостями в ядрах відносно шуканої густини зарядів, розподіленої на поверхнях електродів. Сукупний розв'язок такої системи, зважаючи на фізичні міркування, розглядали як елемент декартового добутку певних модифікованих просторів Гельдера, що забезпечує сингулярну поведінку густини в околі контурів розімкнених поверхонь-електродів. Для одержання наближеного розв'язку системи інтегральних рівнянь застосували метод Боголюбова — Крилова. У результаті, враховуючи інтегральне подання розв'язку так званої прямої задачі, отримували можливість знаходити потенціал шуканого електростатичного поля в будь-якій точці міжелектродного простору (Гарасим, Остудін, 2015; Ильин и др., 1987).

У контексті задекларованих досліджень розглядали одну модельну обернену задачу відтворення густини розподілу зарядів та граничного значення потенціалу на електроді, змодельованому бічною поверхнею круглого циліндра радіуса  $h > 0$ , вісь якого збігається з віссю  $oz$  запровадженої системи координат  $(z, r, \psi)$ , а відповідна твірна подається у вигляді таких параметричних рівнянь:

$$L := \{z = z(\tau) \equiv \tau, r = r(\tau) \equiv h > 0, |\tau| \leq 1; \psi = 0\}.$$

У цьому разі, враховуючи симетричність відносно осі  $or$  початкових даних, для відтворення густини розподілу зарядів  $g(\tau)$  уздовж  $L$  необхідно розв'язати таке інтегральне рівняння з неперервним ядром:

$$\int_0^1 K_h(\tau, \bar{\tau}) g(\tau) d\tau = v(\bar{\tau}), |\bar{\tau}| \leq C, C \geq 1,$$

де

$$K_h(\tau, \bar{\tau}) := [h^2 + (\tau - \bar{\tau})^2]^{-\frac{1}{2}} + [h^2 + (\tau + \bar{\tau})^2]^{-\frac{1}{2}},$$

а  $v(\bar{\tau})$  характеризує розподіл потенціалу на осі симетрії, отриманий при розв'язанні прямої задачі. Для наближеного розв'язування рівняння застосували метод регуляризації на компактї з метою максимального використання апріорної

інформації про характер поведінки шуканої функції за умов її кусково-постійної апроксимації. Розглядали випадок наближеної правої частини  $\tilde{v}(\bar{\tau})$  і точного ядра  $K_h(\tau, \bar{\tau})$ . Метод знаходження наближених значень шуканої функції  $g(\tau)$  в точках

$\tau_{j_0} := \frac{2j_0 - 1}{n}$ , тобто набору величин

$$g_{j_0} \approx g(\tau_{j_0}) (j_0 \in M_0 := \{1, 2, \dots, n\}),$$

полягає в мінімізації на компактні  $M \uparrow_{C_1}^{C_2}$  такого функціоналу:

$$F(g) := f(g) + \frac{1}{\beta} \varphi(g),$$

де  $g := (g_1, g_2, \dots, g_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ;

$$\varphi(g) := \sum_{k=1}^4 \sum_{j_k \in M_k} G_{j_k}(g) \left\{ 1 - \text{sign}[G_{j_k}(g)] \right\}$$

— штрафна функція ( $\beta$ -її параметр);

$$f(g) := \sum_{i=1}^m p_i \left[ g_{j_0} \int_{(j_0-1)/n}^{j_0/n} K_h(\tau, \bar{\tau}_i) d\tau - \tilde{v}(\bar{\tau}_i) \right]^2$$

— дискретний аналог функціоналу нев'язки;

$p_i$  — коефіцієнти деякої квадратурної формули, а  $\bar{\tau}_i$  — її абсиси (Петров, Сизиков, 2003; Тихонов и др., 1990; Турчак, 1987).

У цьому разі,

$$M_1 := \{1, 2, \dots, n-1\} \subset M_0, M_2 := \{2, 3, \dots, n-1\} \subset M_0, \\ M_3 := \{1\} \subset M_0, M_4 := \{n\} \subset M_0.$$

Оскільки наближений розв'язок шукали на множині монотонно зростаючих, обмежених, опуклих донизу функцій, то відповідний компакт можна подати у вигляді нерівностей:

$$M \uparrow_{C_1}^{C_2} := \left\{ \begin{array}{l} G_{j_1}(g) := g_{j_1+1} - g_{j_1} \geq 0, j_1 \in M_1; \\ G_{j_2}(g) := g_{j_2-1} - 2g_{j_2} + g_{j_2+1} \geq 0, j_2 \in M_2; \\ G_{j_3}(g) := g_{j_3} - C_1 \geq 0, j_3 \in M_3; \\ G_{j_4}(g) := C_2 - g_{j_4} \geq 0, j_4 \in M_4. \end{array} \right. 0 \leq C_1 \leq C_2 \leq +\infty.$$

Для мінімізації розглядуваного функціоналу використовували метод спряжених градієнтів, а для знаходження компонент вектора-градієнта отримали такі формули:

$$\frac{\partial f}{\partial k_0} = 2 \sum_{i=1}^m p_i \left[ \sum_{j_0 \in M_0} g_{j_0} \int_{(j_0-1)/n}^{j_0/n} K_h(\tau, \bar{\tau}_i) d\tau - \tilde{v}(\bar{\tau}_i) \right] \int_{(k_0-1)/n}^{k_0/n} K_h(\tau, \bar{\tau}_i) d\tau, k_0 \in M_0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial k_0} = 2 \sum_{k=1}^4 \sum_{j_k \in M_k} \frac{\partial G_{j_k}(g)}{\partial g_{k_0}} G_{j_k}(g) \{1 - \text{sign}[G_{j_k}(g)]\}, k_0 \in M_0;$$

$$\frac{\partial G_{j_k}(g)}{\partial g_{k_0}} = \begin{cases} \theta_k, k_0 \in M_3; \\ \mu_k, k_0 \in M_4; \\ \sigma_k, k_0 \in M_2; \end{cases}$$

у цьому разі  $\theta_k, \mu_k, \sigma_k$ , — компоненти векторів

$$\bar{\theta} := (-1, 1, 1, 0), \bar{\mu} := (1, 1, 0, -1), \bar{\sigma} := (0, -1, 0, 0).$$

У процесі відтворення густини розподілу зарядів стійкість отримуваних результатів перевіряли шляхом моделювання відповідних збурень величин  $\tilde{v}(\bar{\tau}_i)$ , а відновлення граничного потенціалу на  $\Gamma$  здійснювали на підставі дискретного аналогу інтегрального подання розв'язку початкової задачі. Результат чисельних експериментів при  $h = 1$  та одиничному значенні потенціалу на електроді проілюстровано на рисунках та відтворено в таблиці.

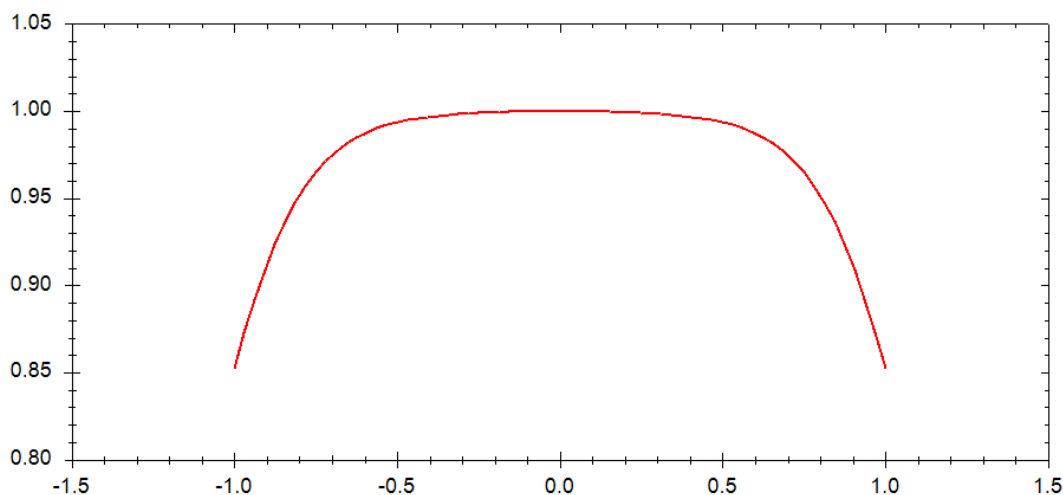


Рис. 1. Значення потенціалу на осі симетрії (розв'язок прямої задачі)

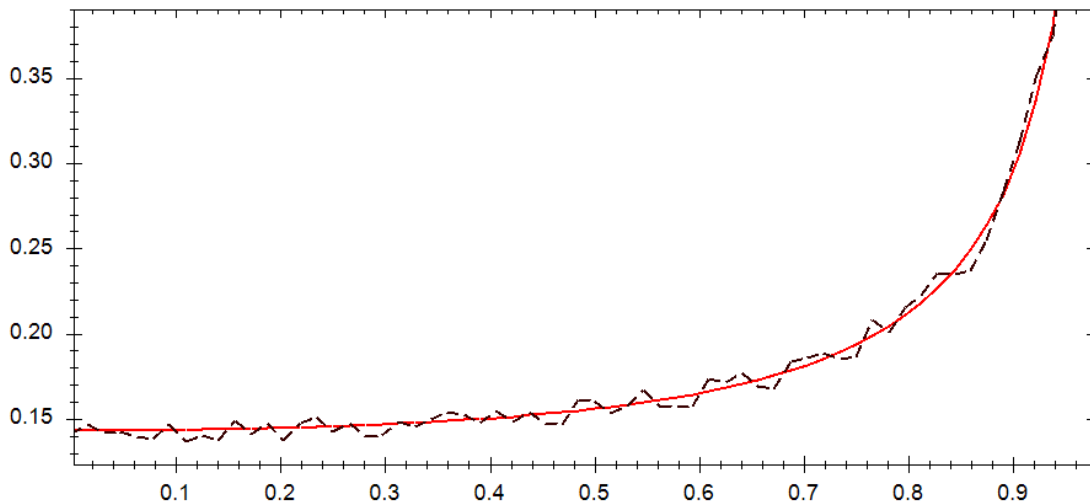


Рис. 2. Відтворена густина розподілу зарядів на  $L$  за умов збурення потенціалу на осі симетрії

Різниця між відтвореними значеннями потенціалу на  $L$  та заданими

<b>Збурена густина (<math>\delta = 5\%</math>)</b>							
$\beta/z$	0	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	1
1	0.00782	0.00723	0.00618	0.00651	0.00541	0.00474	0.0488
0.1	0.00112	0.0041	0.00468	0.00451	0.00326	0.00272	0.04449
0.01	0.00356	0.00169	0.00268	0.002	0.00094	0.00191	0.04494
<b>Збурені значення на осі симетрії (<math>\delta = 5\%</math>)</b>							
1	0.00725	0.00667	0.006	0.00522	0.00451	0.00412	0.04662
0.1	0.00305	0.00301	0.00297	0.00295	0.00301	0.00326	0.0462
0.01	0.00223	0.00226	0.0023	0.00238	0.00254	0.00289	0.04593
<b>Збурені значення на осі та збурена густина (<math>\delta = 5\%</math>)</b>							
1	0.01005	0.00927	0.00812	0.00782	0.00661	0.00591	0.06361
0.1	0.00278	0.00474	0.00510	0.00497	0.00418	0.00399	0.06046
0.01	0.00386	0.00263	0.00332	0.00292	0.00232	0.00320	0.06058

### Список літератури

- Гарасим, Я. С., Остудін, Б. А. (2015). Чисельне розв'язування однієї оберненої задачі теорії потенціалу методом регуляризації на компактi. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*. Збірник наукових праць XXI Всеукраїнської наукової конференції. Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 110—113.
- Ильин, В. П., Катешов, В. А., Куликов, Ю. В., Монастырский, И. А. (1987). *Численные методы оптимизации эмиссионных электроонно-оптических систем*. Новосибирск: Наука.
- Петров, Ю. П., Сизиков, В. С. (2003). *Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями: Учебное пособие для вузов*. Санкт-Петербург: Политехника.
- Тихонов, А. Н., Гочарский, А. В., Степанов В. В., Ягола, А. Г. (1990). *Численные методы решения некоторых задач*. Москва: Наука.
- Турчак, Л. Н. (1987). *Основы численных методов*. Москва: Наука.

**ІНТЕГРУВАННЯ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ  
ДВОХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ  
ЗА ДОПОМОГОЮ ПОДВІЙНИХ РЯДІВ**

**В. П. Яковець, О. В. Чорненька**

*Університет менеджменту освіти, Київ,  
Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, Ніжин, Україна  
[yvp-95@ukr.net](mailto:yvp-95@ukr.net), [elenagolovch@rambler.ru](mailto:elenagolovch@rambler.ru)*

Розглянемо лінійну сингулярно збурену систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x, \quad (1)$$

де  $x = x(t, \varepsilon)$  — шуканий  $n$  – вимірний вектор,  $t$  — дійсна змінна,  $t \in [0; T]$ ,  $\varepsilon > 0$  — малий дійсний параметр,  $A(t, \varepsilon)$  — квадратна матриця  $n$ -го порядку.

Системи вигляду (1) вивчалися в роботах Феценко, Шкіль, Николенко, (1966), Вазов (1968), де досліджено питання про побудову асимптотичних розв'язків цих систем у вигляді розвинень за степенями малого параметра  $\varepsilon$ . Проте, ця теорія розроблена за умови, що спектр граничної матриці  $A(t) = A(t, 0)$  не змінюється на даному проміжку. У роботі Яковець (2007) запропоновано метод, який не вимагає стабільності спектра матриці  $A(t) = A(t, 0)$ , але дозволяє побудувати розв'язок системи (1) у вигляді збіжних подвійних розвинень за степенями параметра  $\varepsilon$  та відношення незалежної змінної та параметра  $\frac{t}{\varepsilon}$ .

У даній роботі вивчається питання про побудову асимптотичного розв'язку системи рівнянь вигляду

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (2)$$

де  $x = x(t, \varepsilon)$  — шуканий двовимірний вектор,  $t$  — дійсна змінна,  $\varepsilon > 0$  — малий дійсний параметр,  $A(t, \varepsilon)$  — квадратна матриця другого порядку, яка допускає розвинення у вигляді степеневого ряду

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k. \quad (3)$$

Передбачається, що головна матриця  $A_0$  має одне власне значення  $\lambda_0$  кратності два, якому відповідає елементарний дільник такої самої кратності.

До дослідження систем (2) застосовано розроблені в роботах Яковець (2007), Самойленко, Шкіль, Яковець (2000), Яковець (1992) методи збурень та просторовий аналог діаграм Ньютонa.

Розв'язки системи (2) шукаються у вигляді

$$x_i(t, \varepsilon) = u_i(t, \varepsilon) \exp \left[ \varepsilon^{-1} \int_{t_0}^t (\lambda_0 + \lambda_i(\tau, \varepsilon)) d\tau \right], i = 1; 2, \quad (4)$$

де  $u_i(t, \varepsilon)$  — двовимірні вектори,  $\lambda_i(\tau, \varepsilon)$  — скалярні функції,  $i = 1; 2$ , які необхідно знайти.

Для визначення вигляду подвійних розвинень для  $u(t, \varepsilon)$  та  $\lambda(\tau, \varepsilon)$  виведено відповідне рівняння розгалуження

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \varepsilon D[\lambda] + \lambda^2 \sum_{r=1}^{\infty} L_{2r0} t^r + \lambda \sum_{r=1}^{\infty} L_{1r0} t^r + \\ + \lambda \sum_{r=1}^{\infty} L_{1r1} \varepsilon t^r + \sum_{r=1}^{\infty} L_{0r0} t^r + \sum_{r=1}^{\infty} L_{0r1} \varepsilon t^r = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

коефіцієнти  $L_{krs}$  якого виражаються через матриці розвинення (3), напівобернену матрицю  $H = (A_0 - \lambda_0 E)^{\sim}$ , власний вектор  $\varphi$  матриці  $A_0$ , що відповідає її власному значенню  $\lambda_0$ , та елемент нуля простору  $\psi$  матриці спряженої до  $(A_0 - \lambda_0 E)$ .

Аналізуючи коефіцієнти  $L_{krs}$  рівняння (5) та будуючи просторові діаграми Ньютона згідно з алгоритмом, який розроблено в роботі Яковець (1992), установлено вигляд формальних розв'язків системи (2). Має місце така теорема.

**Теорема 1.** *Якщо виконується умова  $(HA_1\varphi, \psi) \neq 0$ , то система (2) має два лінійно незалежних розв'язки вигляду (4), де функції  $\lambda_i(\tau, \varepsilon)$  та вектори  $u_i(t, \varepsilon)$ ,  $i = 1; 2$ , подаються у вигляді подвійних розвинень*

$$\begin{aligned} \lambda_1(t, \varepsilon) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^r \lambda_{rs}^{(1)} \varepsilon^s \left( \frac{t}{\varepsilon} \right)^r, \quad u_1(t, \varepsilon) = \varphi + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^r u_{rs}^{(1)} \varepsilon^s \left( \frac{t}{\varepsilon} \right)^r, \\ \lambda_2(t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{r+1} \lambda_{rs}^{(2)} \varepsilon^s \left( \frac{t}{\varepsilon} \right)^r, \quad u_2(t, \varepsilon) = H\varphi + \frac{t}{\varepsilon} \varphi + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{r+1} u_{rs}^{(2)} \varepsilon^s \left( \frac{t}{\varepsilon} \right)^r. \end{aligned}$$

При доведенні даної теореми обґрунтовано алгоритм визначення коефіцієнтів  $\lambda_{rs}^{(i)}$ ,  $u_{rs}^{(i)}$ ,  $i = 1; 2$ .

Досліджено також асимптотичний характер побудованого формального розв'язку. За умови, що  $Re\lambda_0 < 0$  і  $\frac{t}{\varepsilon} < 1$ , має місце оцінка

$$x_m - \tilde{x} \leq c\varepsilon^2 \left( \frac{t}{\varepsilon} \right)^{m+2},$$

де  $\tilde{x}$  — точний розв'язок системи (2), а  $x_m$  —  $m$ -наближення знайденого розв'язку (4).

Розроблений у даній роботі алгоритм застосовано до системи (2) з матрицею Ейрі

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}.$$

Отриманий у цьому випадку розв'язок співпадає з відомими результатами, які подано в роботах Федорюк (1983), Яковец (2007).

### Список літератури

- Вазов, В. (1968). *Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений*. Москва: Мир.
- Самойленко, А. М., Шкіль М. І., Яковец В. П. (2000). *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*. Київ: Вища школа.
- Федорюк, М. В. (1983). *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*. Москва: Наука.
- Фещенко, С. Ф., Шкіль Н. И., Николенко Л. Д. (1966). *Асимптотические метод в теории линейных дифференциальных уравнений*. Киев: Наукова думка.
- Яковец, В. П. (1992). *Методы возмущений в задаче асимптотического интегрирования вырождающихся сингулярно возмущенных линейных систем с двумя малыми параметрами*. Київ: Препр./ АН УССР. Ин-т. Математики; 92.34.
- Яковец, В. П. (2007). Интегрирование линейных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с помощью двойных рядов. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія І Фізико-математичні науки*, 8, 211—227.



# ЗМІСТ

Chetvertak M. <i>New generalization of the integral transforms</i> .....	11
Dmitrieva I. Yu., Balan N. M. <i>Exact and numerical solution of the flat electrodynamic boundary value problem</i> .....	13
Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M., Kohut I. V., Kuduk G. <i>Nonlocal problem for partial differential equation of higher order</i> .....	17
Kuduk G. <i>Problem with integral conditions for homogeneous partial differential equations of second order</i> .....	18
Lozynska-Perun I. Y. <i>Weyl function for arbitrary Friedrichs' model</i> .....	19
Maslov B. P. <i>Fractional calculus in composite creep modeling</i> .....	24
Shchetinina E. K., Gladka Y. A. <i>On the motion of a symmetrical gyrostat</i> .....	28
Sinchenko E. S., Kachan A. I., Shapar I. Y. <i>Analytical and approximately analytical solution of the plane contact problem taking into account the friction and the roughness</i> ...	31
Slyn'ko V. I., Denysenko V. S. <i>Stability in terms of two measures of semiflows in space <math>\text{conv}(\mathbb{R}^n)</math></i> .....	33
Smetankina N. V. <i>Modeling of non-stationary heat conduction in laminated strips</i> .....	35
Stiepanova K. V. <i>Instantaneous compactification of the support of solutions for nonlinear diffusion-reaction equations</i> .....	39
Авдеєва Т. В. <i>Про частинний розв'язок одного диференціального рівняння</i> .....	43
Авраменко О. О., Авраменко Ю. О. <i>Дослідження впливу викривлення осі на поля переміщень и напружень ортотропних тороїдальних оболонках змінної товщини</i> ....	45
Бабич Д. В., Дородных Т. И. <i>Структурно-вероятностный подход к определению долговечности элементов конструкций из хрупких материалов при многоциклової усталости</i> .....	47
Бецко І. В. <i>Неперервні обмежені при <math>t \in \mathbb{R}</math> розв'язки систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь</i> .....	52
Біленко В. І., Божонок К. В., Дзядик С. Ю., Стеля О. Б. <i>Алгоритм без насичення точності розв'язування алгебраїчно-нелінійних параболічних рівнянь</i> .....	54
Вергунова І. М. <i>Адаптовані різницеві сітки для апроксимації моделі масопереносу в системі гідротехнічних валів-терас</i> .....	58

Віра М. Б. <i>Крайова задача для деякої лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь другого порядку з виродженнями</i> .....	62
Вірченко Н. О. <i>Інтегральні зображення узагальненої гамма-функції</i> .....	65
Власюк А. П., Жуковська Н. А., Федорчук В. Ю., Ілляшик Б. А. <i>Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення на нестационарні деформаційні процеси ґрунтового масиву в одновимірному випадку</i> .....	66
Гавриш В. І., Шкраб Р. Р. <i>Нелінійна крайова задача теплопровідності для неоднорідної термочутливої безмежної пластини</i> .....	69
Гентош О. Є. <i>Гамільтонова структура двовимірної МКП-ієрархії на розширеному фазовому просторі та її додаткових однорідних симетрій</i> .....	74
Гончар І. В., Городній М. Ф. <i>Про обмежені розв'язки одного різницевого рівняння з операторними коефіцієнтами</i> .....	79
Гончаренко Е. А. <i>О исследовании полаявных систем дифференциальных уравнений с регулярными и сингулярными пучками матриц</i> .....	81
Горбонос С. О. <i>Про необхідні умови оптимальності для однієї задачі керування у випадку неваріаційного розв'язку</i> .....	82
Городецький В. В., Мартинюк О. В., Колісник Р. С. <i>Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь</i> .....	85
Григор'єв Ю. О. <i>Екстремальна задача у згортках з додатковою умовою на півосі</i> .....	87
Гришин В. А., Гришина В. А., Реут О. В., Реут В. В. <i>Осадки включений при вдавливаннии в коробчатую оболочку</i> .....	91
Дерев'янку Т. О., Середяк М. О. <i>Задача оптимального керування напівлінійною гіперболічною системою з нелокальними крайовими умовами і нескінченним горизонтом планування</i> .....	94
Дзира Б. І., Чернописький Д. Г. <i>Про особливості розрахунку напруженого стану неканонічних товстих оболонок, близьких до циліндричних, із застосуванням спеціальних функцій</i> .....	96
Довгай В. В. <i>Поширення узагальненого методу диференціального інваріанту на системи диференціальних рівнянь другого порядку</i> .....	98
Довгий Б. П., Вакал Є. С., Вакал Ю. Є. <i>Розв'язування крайових задач для однієї множини квазінелінійних рівнянь типу Шредінгера</i> .....	101
Єрьоменко В. О., Алілуйко А. М. <i>Періодичні розв'язки систем двох лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з несиметричною матрицею змінного рангу при похідних</i> .....	103

Єршоміна Т. О. Побудова неперервних обмежених розв'язків одного класу систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь .....	106
Заболотько Т. О., Івасишен С. Д. Фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для одного класу параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами .....	109
Загорний М. М., Кузьма О. В. Аналіз впливів взаємодії у дисперсній фазі нанопо-рошку $BaTiO_3$ на реологічні характеристики суспензій ....	112
Зеленський А. Г. Про варіант математичної теорії не тонких пластин і пологих оболонки .....	116
Зеленяк В. М., Коляса Л. І., Івасик Г. В. Інтегральні рівняння задачі термопружності для кругового диска з криволінійними включеннями і тріщинами .....	118
Зражевський Г. М., Зражевська В. Ф. Формальний підхід до побудови моделі динамічного руйнування.....	122
Івасик Г. В., Желізняк Й. Р. Динамічні задачі дифузії методом конформних відображень .....	124
Івасишен С. Д., Мединський І. П. Про останні результати побудови та дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого параболічного рівняння типу рівняння дифузії з інерцією.....	127
Івасишен С. Д., Пасічник Г. С. Про задачу Коші для одного ультрапараболічного рівняння зі зростаючими в групі молодших членів коефіцієнтами і виродженнями на початковій гіперплощині .....	129
Калайда О. Ф. Зведення лінійних нормальних диференціальних систем до інтегро-диференціального рівняння .....	131
Калайда О. Ф. Інтегрування лінійних нормальних диференціальних систем з подібними циркулянтним матрицями коефіцієнтів.....	132
Калайда О. Ф. Простий явний метод відновлення функції за її повним диференціалом .....	133
Каминский А. А., Кипнис Л. А., Полищук Т. В. Применение метода Винера — Хопфа для установления условия зарождения трещины Коттрелла.....	134
Кирилах Н. Г. Застосування апроксимаційного методу В. К. Дзядика при дослідженні моделей ціноутворення на фінансовому ринку .....	136
Кільчинський О. О., Массалітіна Є. В. Про деякі тестові задачі термопружності для круглого циліндра .....	139

Козлова Н. О., Ферук В. А. <i>Нетерові крайові задачі з керуванням для інтегральних рівнянь</i> .....	143
Колосова С. В., Луханін В. С. <i>Про додатні розв'язки задачі Ліувілля — Гельфанда</i> .....	147
Комарницький А. Л., Колмакова Л. Н. <i>Абстрактная задача Римана, обобщающая матричную краевую задачу</i> .....	150
Комарницька Л. І. <i>Періодична крайова задача для рівняння внутрішніх хвиль</i> .....	152
Конет І. М., Пилипюк Т. М. <i>Гіперболічна крайова задача в неоднорідному циліндрично-круговому півпросторі</i> .....	155
Корилюк В. В. <i>Моделювання великих соціально-економічних систем із врахуванням ментальності</i> .....	158
Коропов О. В. <i>Математична модель пізньої стадії сегрегації домішки на міжзеренній межі у випадку утворення плоских виділень нової фази</i> .....	161
Косолап А. И. <i>Решение квадратичных систем уравнений</i> .....	167
Кузьма О. В. <i>Про визначення характеристик взаємодій наночастинок суспензій при аналізі реологічних залежностей, отриманих ротаційним методом</i> .....	172
Кулик В. Л., Степаненко Н. В., Кулик Г. М. <i>Про регулярність лінійних розширень динамічних систем на торі</i> .....	176
Кусик Л. И. <i>Асимптотические представления одного класса решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно меняющимися нелинейностями</i> .....	181
Літовченко В. А., Унгурян Г. М. <i>Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу параболічних систем зі змінними коефіцієнтами</i> .....	185
Лось В. М. <i>Про задачу діріхле для параболічного рівняння другого порядку у просторах Хермандера</i> .....	189
Лупіна Т. О. <i>Вільні коливання суден на тихій воді з урахуванням вантажу</i> .....	191
Мамса К. Ю., Перестюк Ю. М. <i>Розривні цикли однієї імпульсної системи</i> .....	195
Матвійчук К. С. <i>Дослідження технічної стійкості за мірою динамічних станів нестационарних систем автоматичного управління змінної структури з розривними функціями регулювання</i> .....	196
Михайлець В. А., Мурач О. О., Солдатов В. О. <i>Про тотальні крайові задачі, залежні від параметра</i> .....	202
Назаренко В. М., Кіпніс О. Л. <i>Кусково-однорідна площина з межею поділу середовищ у формі сторін кута за наявності півнескінченної тріщини</i> .....	205
Неміш В. М. <i>Кручення ізотропного циліндра з неканонічним включенням</i> .....	209

Нитребич З. М., Маланчук О. М. <i>Про ядро однорідної крайової задачі у смузї для рівняння з частинними похідними другого порядку за часом</i> .....	211
Нікітіна О. М., Шинкарик М. І. <i>Застосування методу гібридних інтегральних перетворень в математичній фізиці</i> .....	213
Ногін М. В. <i>Застосування гідродинамічного потенціала в циліндричній трубї</i> .....	216
Ногін М. В. <i>Аналітичний розв'язок крайової задачі для рівнянь Нав'є — Стокса між двома співвісними циліндрами</i> .....	218
Нуржанов О. Д., Курбанбаєв О. О. <i>Приближенном решении краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра</i> .....	220
Онищук В. В. <i>Розв'язування системи рівнянь Нав'є — Стокса для крила літака</i> .....	222
Писаренко В. Г., Корнеев С. В., Писаренко Ю. В. <i>Методи і засоби дослідження техно-екологічних подій</i> .....	226
Писаренко В. Г., Писаренко Ю. В. <i>Некоторые междисциплинарные исследования ряда вероятных признаков влияния присутствия темной материи во вселенной на аномальных участках орбит Солнца и Земли вокруг центра Галактики</i> .....	230
Покутний О. О. <i>Крайові задачі та теорія біфуркацій для операторного рівняння Ляпунова</i> .....	232
Пономаренко А. М., Івасишен С. Д. <i>Вектор-функція Гріна задачі Коші для факторизованого двокалоричного рівняння теплопровідності</i> .....	234
Пушак Я. С., Пушак А. С. <i>Сингулярні рівняння квазістатичної задачі теплопровідності ступеневих пластин</i> .....	236
Ранцевич В. А., Спичекова Н. В. <i>Моделирование режимов лазера с просветляющимся фильтром при наличии внешней подсветки</i> .....	239
Родионова И. Н., Долгополов В. М., Долгополов М. В. <i>О постановке краевых задач для обобщенного уравнения Эйлера — Дарбу в области, содержащей две линии сингулярности коэффициентов</i> .....	243
Савельева Е. В., Синчило С. В., Симчук Я. В., Коваленко И. Г. <i>Решение двумерной динамической задачи для насыщенного пористого полупространства</i> .....	245
Савчин В. М. <i>Геометрические аспекты бесконечномерных динамических систем</i> .....	249
Серов М. І., Омелян О. М. <i>Нелокальні анзаци системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії</i> .....	251
Стогній В. І. <i>Симетрії лінійного рівняння Крамера та його фундаментальні розв'язки</i> .....	254

Сулим Г. Т., Пастернак Я. М., Томашівський М. М. <i>Комплексний метод побудови інтегральних рівнянь термопружності анізотропних біматеріальних тіл із інтерфейсом високої теплопровідності</i> .....	256
Сущенко В. А. <i>Начала математических оснований функционально расширенного физического пространства (ФРФП)</i> .....	258
Турчина Н. І. <i>Ядра Пуассона модельної крайової задачі для параболічної системи з векторною вагою</i> .....	261
Хвоцинская Л. А. <i>Об одном методе построения дифференциальных матриц проблемы Римана</i> .....	263
Ходневич Я. В., Щодро О. Є. <i>Математичне моделювання гідродинаміки руслового потоку при обтіканні донних гряд</i> .....	267
Хорошун В. В. <i>О полиномах, обращающихся в нуль на концах интервала [-1,1]. Ч. II</i> .....	270
Цуканова А. О. <i>О существовании и единственности в гильбертовом пространстве интегрируемых с квадратом функций решения задачи Коши для стохастического интегро-дифференциального уравнения нейтрального типа</i> .....	273
Цуканова А. О. <i>Существование и единственность в <math>L_2^p(\mathbb{R}^d)</math> решения задачи Коши для одного стохастического дифференциального уравнения реакция-диффузия в частных производных с запаздыванием под «производной»</i> .....	278
Чепок О. О. <i>Дослідження швидкозмінних розв'язків двочленних диференціальних рівнянь зі степеневими та швидко змінними нелінійностями</i> .....	284
Шоха В. П. <i>Автомодельні розв'язки нелінійного рівняння теплопровідності</i> .....	286
Шоха В. П. <i>Солітонні розв'язки рівняння Кортевега — де Фріза</i> .....	288
Шунькін Ю. В., Остудін Б. А., Гарасим Я. С. <i>Про відтворення граничних значень потенціалу осесиметричного електростатичного поля методом регуляризації на компактi</i> .....	290
Яковець В. П., Чорненко О. В. <i>Інтегрування лінійних сингулярно збурених систем двох диференціальних рівнянь за допомогою подвійних рядів</i> .....	294



Інститут математики НАН України  
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка  
Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова  
Національний технічний університет України «КПІ»

**СІМНАДЦЯТА  
МІЖНАРОДНА  
НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ  
ІМЕНІ АКАДЕМІКА  
МИХАЙЛА КРАВЧУКА  
19–20 травня 2016 р., Київ**

**МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ**

**I**

Диференціальні та інтегральні рівняння,  
їх застосування

Підписано до друку 12.05.2016.  
Формат 60x84/16. Папір офсетний.  
Ум. друк. арк. 18.75

Зам. № . Наклад 100 примірників.  
Видавництво ТОВ «Спринт-Сервіс»  
Свідоцтво: Серія ДК № 4365 від 17.07.2012  
м. Київ-70, вул. Почайнинська, 28-б