Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут”

Лінійні та евклідові простори
Методичні вказівки до вивчення розділу

Київ-2013

Лінійні та евклідові простори. Методичні вказівки до вивчення розділу

Укладачі: Ю.П. Буценко, Н.М. Задерей, Г.Д. Нефьодова, Я.В. Симчук – К. НТУУ “КПІ”, 2013, – 40 с.

Навчальне видання

Лінійні та евклідові простори.
Методичні вказівки до вивчення розділу

Укладачі: Буценко Юрій Павлович, канд. фіз-мат. наук, доц.
Задерей Надія Миколаївна, канд. фіз-мат. наук, доц.
Нефьодова Галина Дмитрівна, канд. фіз-мат. наук
Симчук Ярослав Вікторович, канд. фіз-мат. наук

Відповідальний редактор О.І. Клесов, д-р фіз-мат. наук, проф.

Зміст

Лінійні простори

I. Означення лінійного простору

Існують різноманітні множини, елементи яких можна додавати один до одного та множити на числа. Такою множиною є, наприклад, множина звичайних геометричних векторів у просторі. Матриці розміром $m \times n$ теж можна додавати та множити на числа. Те ж саме стосується множини неперервних функцій і т.п. Незважаючи на різну природу елементів, операції додавання та множення на числа мають спільні властивості. Тому доцільно розглянути множину елементів будь-якої природи із двома операціями − додаванням елементів один до одного та множенням елементів на дійсні (або комплексні) числа.

Множина V називається лінійним простором, якщо:

1. Задано закон, згідно з яким кожним двом елементам $x \in V, y \in V$ відповідає елемент множини V, який називається сумою $x + y$.
2. Задано закон, згідно з яким кожному елементу $x \in V$ та кожному числу $\alpha \in \mathbb{R}$ (або $\alpha \in \mathbb{C}$) відповідає елемент αx, який називається добутком елемента на число.
3. Виконується 8 аксіом лінійного простору:

I. $x + y = y + x$;

II. $(x + y) + z = x + (y + z)$;

III. $x + \theta = \theta + x = x$. Елемент θ називається нульовим;

IV. для кожного $x \in V$, існує такий елемент $(-x) \in V$, що $x + (-x) = \theta$. Елемент $(-x)$ називається протилежним до елемента x;

V. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

VI. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

VII. $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$;

VIII. $1 \cdot x = x$.

Елементи лінійного простору називають векторами (незалежно від їх природи).

II. Наслідки з аксіом.

1. Існує лише один нульовий елемент.
2. Існує лише один протилежний елемент $-x=(-1)\cdot x$.
3. Для $\forall x\in V:\theta\cdot x=\theta$.
4. Для $\alpha\in\mathbb{R}:\alpha\cdot\theta=\theta$.

III. Приклади лінійних просторів.

1. Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$.
2. Множина упорядкованих наборів $(x_1,x_2,...,x_n)$ з n дійсних чисел утворює арифметичний простір $\mathbb{R}^n$.
3. Сукупність матриць $R^{m\times n}$ розміру $m\times n$ з означеними діями додавання матриць та множення матриці на число.
4. Множина геометричних векторів простору.
5. Множина $C[a,b]$ функцій, неперервних на $[a,b]$.
6. Множина всіх многочленів степеня $\le n$.

IV. Лінійна залежність векторів.

Вектор $b=\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+...+\alpha_na_n$, $a_i\in V$, $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $1\le i\le n$ називається лінійною комбінацією векторів $a_1,a_2,...,a_n$.

Означення. Система векторів $\{a_1,a_2,...,a_n\}$ називається *лінійно незалежною*, якщо $\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+...+\alpha_na_n=0\Leftrightarrow\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$; *лінійно залежною*, якщо хоч одне з чисел $\alpha_i\ne0$.

Приклади лінійно незалежних векторів.

1. Система $\{e_1,e_2,...,e_n\}\in\mathbb{R}^n$, $e_1=(1,0,...,0)$, $e_2=(0,1,...,0),\dots,$ $e_n=(0,0,...,1)$.
2. Два не колінеарні вектори на площині.
3. Три некомпланарні вектори у просторі.
4. Сукупність функцій $1,x,x^2,x^3,...,x^n$, $x\in\mathbb{R}$.
5. Сукупність функцій 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x,...,$ $\sin nx$, $\cos nx$.

Властивості.

1. Якщо серед векторів $a_1, a_2, ..., a_n$ є нульовий, то система лінійно залежна

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + ... + \alpha \cdot 0 + ... + 0 \cdot a_n = 0, \quad \alpha \neq 0.$$

2. Якщо серед векторів системи один з векторів є лінійною комбінацією інших, то система лінійно залежна. *Це твердження є критерієм лінійної залежності*.

V. Розмірність і базис лінійного простору.

Означення. Якщо в лінійному просторі V виконуються дві умови

1. існує система з n лінійно незалежних векторів
2. будь-яка система з $n+1$ векторів лінійно залежна

тоді n − розмірність векторного простору $\dim V = n$ (фр. − dimension)

Зауваження. Якщо простір складається з одного елемента, то його розмірність рівна нулю.

Базисом називається будь-яка впорядкована система n лінійно незалежних векторів.

Нехай $e_1, e_2, ..., e_n$ − базис n − вимірного лінійного простору, тоді $\forall x \in V$ система з $n+1$ вектора лінійно залежна, отже, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$, числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ − координати вектора x в базисі $e_1, e_2, ..., e_n$.

Властивості.

1. Координати вектора x визначаються однозначно.

   Доведення.

   Від супротивного: нехай $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$ і $x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + ... + \beta_n e_n$, тоді $0 = (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) e_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n) e_n$. Оскільки $e_1, e_2, ..., e_n$ − лінійно незалежні, то $\alpha_i = \beta_i, \; 1 \leq i \leq n$.

2. Якщо $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$, $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + ... + \beta_n e_n$, то

   $x + y = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + ... + (\alpha_n + \beta_n) e_n$.

3. $\lambda x = \lambda \alpha_1 e_1 + \lambda \alpha_2 e_2 + ... + \lambda \alpha_n e_n$.
4. Вектори x та y рівні, якщо їх відповідні координати рівні.

Тобто операції над векторами лінійного простору зводяться до відповідних операцій над їх координатами.

Приклад. Розглянемо множину квадратних матриць розміром 2×2. Вона утворює лінійний простір розмірності 4. Базисом цього простору є, наприклад, четвірка

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Їх лінійна комбінація дорівнює $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$ і може бути нульовою лише ц випадку $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

VI. Матриця системи векторів.

Нехай система векторів $x_1, x_2, ..., x_m$ своїми координатами у деякому базисі n-мірного простору V.

Матрицею системи векторів A будемо називати матрицю, кожний стовпчик якої складається з координат цих векторів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots. & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 + ... + a_{n1}e_n$$
$$x_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 + ... + a_{n2}e_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_m = a_{1m}e_1 + a_{2m}e_2 + a_{3m}e_3 + ... + a_{nm}e_n$$

Справедливі твердження.

1. Для того, щоб m векторів $n-$ вимірного лінійного простору були лінійно незалежними, необхідно і достатньо

$$rang A = m.$$

2. Для того, щоб n векторів n $-$ вимірного лінійного простору були лінійно незалежними, необхідно і достатньо

$$detA \neq 0$$

3. Якщо $rangA = r$, то максимальне число лінійно незалежних векторів цієї системи дорівнює r.

VII. Матриця переходу від одного базису до іншого.

Нехай в n-вимірному лінійному просторі V задано два базиси:

$e_1, e_2, ..., e_n$ (1) так званий старий

$e_1', e_2', ..., e_n'$ (2) так званий новий.

Зрозуміло, що кожний з векторів нового базису має у базисі $e_1, e_2, ..., e_n$ власні координати:

$$e_1' = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + ... + t_{n1}e_n$$

$$e_2' = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + ... + t_{n2}e_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e_n' = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + ... + t_{nn}e_n$$

Матриця T, стовпцями якої є координати векторів нового базису в старому базисі називається **матрицею переходу** від базису (1) до (2).

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & ... & t_{2n} \\ ..... & ...... & ... & ..... \\ t_{n1} & t_{n2} & ... & t_{nn} \end{pmatrix}$$

$\left(e_1', e_2', ..., e_n'\right) = \left(e_1, e_2, ..., e_n\right)T$, або в матричному вигляді: $e' = eT$.

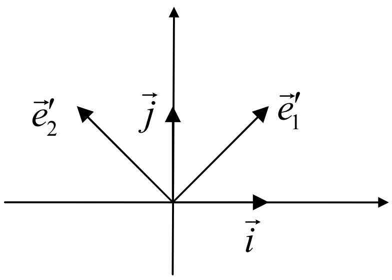
Оскільки система векторів $e_1, e_2, ..., e_n$ лінійно незалежна, то $\det T \neq 0$.

$$e = e'T^{-1}.$$

Тобто T^{-1} − матриця переходу від (2) до (1).

Висновок. Якщо є два базиси, то матриці переходу від одного до іншого взаємно обернені.

Приклад 1. На площині розглянемо два базиси: $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, та новий, одержаний з $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ поворотом на 45° проти годинникової стрілки.



$$\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right) = \left(\vec{i}, \vec{j}\right) \qquad (1)$$

$$\left(\vec{e}_1', \vec{e}_2'\right) = \left(\vec{i} + \vec{j}, -\vec{i} + \vec{j}\right) \qquad (2)$$

Координати нового базису в старому

$$\vec{e}_1' = \vec{i} + \vec{j} = (1,1)$$

$$\vec{e}_2' = -\vec{i} + \vec{j} = (-1,1)$$

$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ − матриця переходу від (1) до (2)

$$\left(\vec{e}_1', \vec{e}_2'\right) = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2, -\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right)$$

$\det T = 2$; $T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ − матриця переходу від (2) до (1).

$$e = e'T^{-1}$$

$$\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right) = \left(\vec{e}_1', \vec{e}_2'\right)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\vec{e}_1' - \vec{e}_2'}{2}, \frac{\vec{e}_1' + \vec{e}_2'}{2}\right).$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}_1' - \vec{e}_2'}{2}; \vec{e}_2 = \frac{\vec{e}_1' + \vec{e}_2'}{2}.$$

Звісно, коли система n векторів, це не так тривіально.

VIII. Зв'язок між координатами векторів в різних базисах.

Нехай $\left(e_1, e_2, ..., e_n\right)$ (1) базис

$\left(e_1', e_2', ..., e_n'\right)$ (2) базис

$$e' = eT$$

$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$ − матриця переходу від (1) до (2) базису,

$X \in V$ − деякий вектор.

Вектор X має координати в базисах (1) і (2) відповідно:

$$X = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n = (e_1....e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = ex;$$

$$X = x_1'e_1' + x_2'e_2' + ... + x_n'e_n' = (e_1'....e_n')\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix} = e'x'.$$

Маємо $X = ex = e'x' = (eT)x' = e(Tx') \quad \Rightarrow \quad ex = e(Tx')$.

Це розклад вектора по базису e, в силу однозначності розкладу, маємо $x = Tx'$;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & ... & t_{2n} \\ ..... & ...... & ... & ..... \\ t_{n1} & t_{n2} & ... & t_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix};$$

$x' = T^{-1}x$.

Приклад 2. Нехай вектор X має координати $\{1,-2\}$ в базисі (e_1,e_2). Знайти координати вектора в базисі (e_1',e_2'), якщо $e_1' = e_1; e_2' = e_1 + e_2$.

Маємо (e_1,e_2) (1), (e_1',e_2') (2), де

$$e_1' = e_1 = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 = (e_1,e_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2' = e_1 + e_2 = 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 = (e_1,e_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу від (1) до (2): $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ стовпчики координати.

$$e' = (e_1',e_2') = eT = (e_1,e_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_1, e_1 + e_2).$$

Нехай X має координати $\{1,-2\}$ в (e_1,e_2): $X = e_1 - 2e_2$.

Знайдемо $T^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

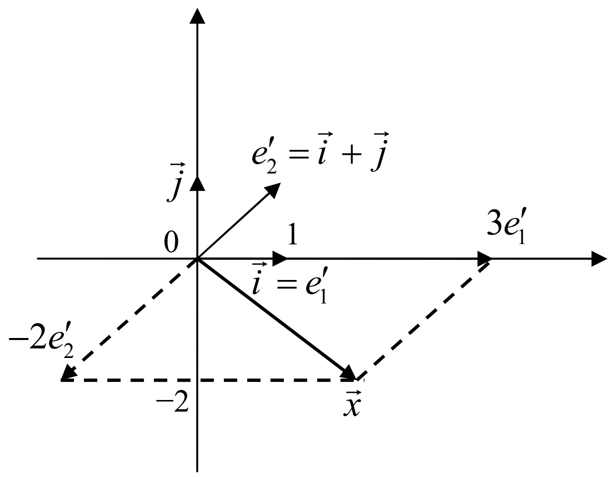
$$x' = T^{-1}x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

X має координати $\{3,-2\}$ в (e_1', e_2') (2), $X = 3e_1' - 2e_2'$.

Геометричне тлумачення.

Нехай $e_1 = \vec{i}, e_2 = \vec{j}$, $X = \{1,-2\} = \vec{i} - 2\vec{j}$, тоді $X = 3e_1' - 2e_2'$, де $e_1' = e_1; e_2' = e_1 + e_2$.

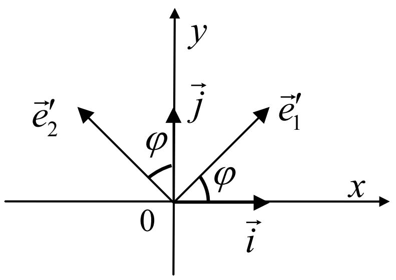


Алгебраїчне тлумачення.

$$X = \{1,-2\} = e_1 - 2e_2 = \begin{bmatrix} e_1 = e_1' \\ e_2' = e_1 + e_2 \end{bmatrix} = e_1' - 2(e_2' - e_1') = 3e_1' - 2e_2'.$$

$$\begin{cases} e_1 = e_1' \\ e_2' = e_1 + e_2 \end{cases} \Rightarrow e_2 = e_2' - e_1'.$$

Приклад 3. Розглянемо в лінійному просторі V векторів на площині базис $(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Нехай базис отримаємо поворотом векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ на деякий кут φ.



$|\vec{e}_1'| = 1$, $|\vec{e}_2'| = 1$, тому координати $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ в $(\vec{i}, \vec{j})$

$\vec{e}_1' = (\cos\varphi, \sin\varphi) = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$;

$\vec{e}_2' = (-\sin\varphi, \cos\varphi) = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi$.

Матриця T переходу від $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ до $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$

$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$

Матриця T^{-1} переходу від (2) до (1)

$$T^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Евклідові простори .

I. Означення.

Розглянемо лінійний простір V. Поряд з операцією додавання та множення на число, введемо ще одну операцію − ***скалярний добуток векторів*** .

Будь-якій парі елементів $x, y \in V$ ставиться у відповідність дійсне число, що позначається $(x, y) \in \mathbb{R}$.

Евклідовим простором називається лінійний дійсний простір, в якому введена операція множення векторів (x, y), що задовольняє аксіомам 1-4:

1^0. $(x, y) = (y, x)$

2^0. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

3^0. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

4^0. $(x, x) \geq 0$, причому $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

число $\sqrt{(x, x)}$ називається ***нормою елемента*** x і позначається $|x| = \|x\| = \sqrt{(x, x)}$;

(x, x) − скалярний квадрат .

II. Висновки з аксіом.

1. $(x, \lambda y) = (\lambda y, x) = \lambda(y, x) = \lambda(x, y)$

2. $(x, y + z) = (y + z, x) = (y, x) + (z, x) = (x, y) + (x, z)$

3. $(x, 0) = 0 \quad \forall x \quad (x, 0) = (x, 0 \cdot x) = 0 \cdot (x, x) = 0$

4. $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$

5. Нерівність ***Коші-Буняковського***

$(x,y)^2 \le (x,x)\cdot(y,y)$, де $x^2=(x,x)$ − скалярний квадрат або

$|(x,y)| \le |x|\cdot|y|$, де $|x|=\sqrt{(x,x)}$.

Доведення.

1. При $x=0$ або $y=0$ нерівність очевидна

2. Нехай $x\ne 0, y\ne 0$. $\lambda\in\mathbb{R}$ − довільне дійсне число.

$(\lambda x-y,\lambda x-y)\ge 0$, враховуючи аксіоми

$\lambda^2(x,x)-2\lambda(x,y)+(y,y)\ge 0$ це квадратне рівняння відносно λ, $D\le 0$

$4(x,y)^2-4(x,x)(y,y)\le 0 \Leftrightarrow (x,y)^2\le(x,x)\cdot(y,y)$.

6. Нерівність ***трикутника***:

$|x+y|\le|x|+|y|$

Доведення.

$(x+y)^2=(x+y,x+y)=(x,x)^2+2(x,y)+(y,y)^2\le$

$\le|x|^2+2|x|\cdot|y|+|y|^2=(|x|+|y|)^2$.

Звідси $|x+y|\le|x|+|y|$.

Рівність можлива, якщо $(x,y)=|x|\cdot|y|$. Так як обидві частини цих нерівностей невід’ємні, то нерівність зберігається при добуванні кореня.

III. Приклади евклідових просторів.

1. Множина геометричних векторів простору з операцією скалярного добутку векторів є евклідовим простором.

2. Множина $\mathbb{C}[a,b]$ функцій, неперервних на відрізку $[a,b]$, в якій визначено операцію $(f,g)=\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx$, аксіоми 1−4 виконуються.

Нормою елемента у просторі $\mathbb{C}[a,b]$ є $\|x\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$, а нерівність Коші-Буняковського має вигляд $\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$.

3. n-мірний арифметичний простір $\mathbb{R}^n$, якщо

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, то $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$.

Аксіоми 1−4 виконуються.

Нормою елемента x буде $|x| = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$.

Нерівність Коші-Буняковського має вигляд:

$(x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^2 \le (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)\cdot(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2)$.

IV. Норма вектора (довжина).

Якщо кожному вектору $x \in V$ лінійного простору поставлено у відповідність число $\|x\|$ так, що виконуються аксіоми $1^0 - 3^0$, то $\|x\|$ називається ***нормою вектора***, а V − ***нормованим векторним простором***.

1^0. $\|x\| \ge 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2^0. $\|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\|,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

3^0. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Якщо в евклідовому просторі покласти $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, то всі аксіоми виконуються:

1) $\|x\| \ge 0$ з аксіоми 4^0 евклідового простору.

2) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2(x, x)} = |\lambda|\cdot\|x\|$.

3) $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x)^2 + 2(x, y) + (y, y)^2 \le$

$$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

V. Кут між векторами. Ортогональність векторів.

З нерівності Коші-Буняковського випливає, що для всіх ненульових векторів

$$\left|(x,y)\right| \le \|x\|\cdot\|y\|,\ \frac{\left|(x,y)\right|}{\|x\|\cdot\|y\|} \le 1,\ -1 \le \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|} \le 1.$$

Тому даний вираз можна розглядати як косинус деякого кута φ між векторами x і y. $\cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Ортогональність векторів.

Два вектори ортогональні, якщо $\cos\varphi = \dfrac{(a,b)}{\|a\|\cdot\|b\|} = 0$.

Зауваження. Нульовий вектор за означенням вважаємо ортогональним до кожного вектора.

VI. Ортонормований базис.

Означення. Система векторів $x_1, x_2, ..., x_n$ $n \ge 2$ називається ***ортогональною***, якщо ці вектори попарно ортогональні: $\left(x_i, x_j\right) = 0, i \ne j$.

Теорема. Ортогональна система *ненульових* векторів лінійно незалежна.

Доведення від супротивного.

Нехай ортогональна система векторів $x_1, x_2, ..., x_n$ − лінійно залежна, тобто $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$, де $\alpha_i \ne 0$.

Скалярний добуток x_i на цей вектор

$$\left(x_i, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_i x_i + ... + \alpha_n x_n\right) = 0,$$

$$\alpha_1 \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\left(x_i, x_1\right)} + \alpha_2 \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\left(x_i, x_2\right)} + ... + \alpha_i \underset{\substack{\nparallel \\ 0}}{\left(x_i, x_i\right)} + ... + \alpha_n \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\left(x_i, x_n\right)} = 0.$$

$x_i \ne 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$, що суперечить умові.

Означення 1. Вектор x називається ***нормованим*** або ***одиничним***, якщо $\|x\| = 1$;

якщо $x \ne 0$, то $\dfrac{x}{\|x\|}$ − нормований.

Означення 2. Базис $e_1,...,e_n$ евклідового простору називається ***ортонормованим***, якщо усі базисні вектори $e_1,...,e_n$ нормовані і попарно ортогональні.

$$\left(e_i,e_j\right)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \qquad 1\leq i,j\leq n/$$

Означення. Матриця, складена з скалярних добутків векторів $e_1,...,e_n$, називається ***матрицею Грама***

$$\Gamma=\begin{pmatrix}\left(e_1,e_1\right) & \left(e_1,e_2\right) & ... & \left(e_1,e_n\right)\\ \left(e_2,e_1\right) & \left(e_2,e_2\right) & ... & \left(e_2,e_n\right)\\ .... & .... & ... & ....\\ \left(e_n,e_1\right) & \left(e_n,e_2\right) & ... & \left(e_n,e_n\right)\end{pmatrix}.$$

Якщо $e_1,e_2,...,e_n$ − ортонормований базис, то

$$\Gamma=\begin{pmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix}.$$

Матриця Грама симетрична, тому $\Gamma^T=\Gamma$.

Приклад ортонормованого базису: $\left(e_1,e_2,e_3\right)=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Зауваження 1. В довільному n-вимірному евклідовому просторі існує ортонормований базис, він може бути побудований із довільного базису $f_1,f_2,...,f_n$ за допомогою так званого процесу ортогоналізації:

1) вектор $e_1=\dfrac{f_1}{\left|f_1\right|}$;

2) знайдемо вектор e_2' із умови $\left(e_2',e_1\right)=0$ у вигляді $e_2'=f_2-\alpha e_1$, число α знаходимо так, щоб вектор e_2' був ортогональним e_1, тобто $\left(f_2-\alpha e_1,e_1\right)=0$, потім нормуємо $e_2=\dfrac{e_2'}{\left|e_2'\right|}$; таким чином, система e_1,e_2 − ортонормована;

3) вектор e_3' знайдемо у вигляді $e_3' = f_3 - \beta e_1 - \gamma e_2$ так, щоб $\left(e_3', e_1\right) = \left(e_3', e_2\right) = 0$, тобто числа β, γ визначимо з умов ортогональності, потім $e_3 = \dfrac{e_3'}{\left|e_3'\right|}$ і т.д.

Довести, що якщо $f_1, f_2, ..., f_m$ − ортогональна система елементів, то має місце ***узагальнена теорема*** Піфагора

$$\left|f_1 + f_2 + ... + f_m\right|^2 = \left|f_1\right|^2 + \left|f_2\right|^2 + ... + \left|f_m\right|^2 .$$

Доведення.

За властивостями скалярного добутку і за означенням норми

$\left|f_1 + f_2 + ... + f_m\right|^2 = \left(f_1 + f_2 + ... + f_m, f_1 + f_2 + ... + f_m\right) =$

$= \left(f_1, f_1\right) + \left(f_1, f_2\right) + ... + \left(f_m, f_m\right) = \left(f_1, f_1\right) + \left(f_2, f_2\right) + ... + \left(f_m, f_m\right) =$

$= \left|f_1\right|^2 + \left|f_2\right|^2 + ... + \left|f_m\right|^2$, добутки $\left(f_i, f_j\right) = 0,\ \ i \neq j$ внаслідок ортогональності.

Зауваження 2. Можна розширити побудову евклідових просторів, перейшовши від дійсних до комплексних просторів: 1) рідко використовується; 2) аксіома $\left(x, x\right) \geq 0$, $\left(ix, ix\right) = i^2\left(x, x\right) = -\left(x, x\right)$.

Зауваження 3 .Частіше зустрічаються так звані ***унітарні простори***, де вводять ***ермітів добуток***, там скалярний добуток

$\left(x, y\right) = \overline{\left(y, x\right)}$ − комплексно спряжене;

$\left(\alpha x, y\right) = \alpha\left(x, y\right)$;

$\left(x, \alpha y\right) = \overline{\alpha}\left(x, y\right)$.

Лінійні оператори.

I. Означення.

1) Нехай задано два лінійні простори V і W розмірності n і m.

Якщо $\forall\, x \in V$ ставиться у відповідність $y \in W$, то кажуть, що на V задано ***оператор*** (синонім відображення, функції).

$$f : V \to W \text{ або } y = f(x).$$

Тобто $\forall\, x$ $\exists$ єдиний образ $y \in W$, але для y може не існувати прообраз або прообразів декілька.

2) Якщо $V = W$, то оператор f називається оператором простору V.

3) Оператор L азивається ***лінійним***, якщо виконуються умови:

1^0. $L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2)$;

2^0. $L(\lambda x) = \lambda L(x)$.

II. Висновки з аксіом

1) $L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L(x_1) + \beta L(x_2)$;

2) $L(0) = 0$, так як $L(0) = L(0 \cdot x) = 0 \cdot L(x)$

або $L(0) = L(x - x) = L(x) - L(x) = 0$.

III. Приклади лінійних операторів

1. Оператор, який кожному вектору $x \in V$ ставить у відповідність цей самий вектор є лінійним оператором $L(x) = x$. Цей оператор називають ***тотожним оператором***.

2. Оператор ортогонального проектування векторів простору на площину або векторів площини на вісь є лінійним оператором.

3. Розглянемо множину векторів площини, що починаються в т.(0,0). L − оператор, що здійснює поворот кожного вектора на кут φ проти годинникової стрілки є лінійним.

4. За властивостями похідної $\frac{d}{dx} : f(x) \xrightarrow{D} f'(x)$ є лінійним оператором лінійного простору функцій, нескінченно диференційованих на (a,b).

IV. Матриця лінійного оператора

Нехай, L − лінійний оператор, заданий в лінійному просторі V розмірності n, що переводить базисні вектори $e_1, e_2, ..., e_n$ в вектори $L(e_1), L(e_2), ..., L(e_n)$, де

$$L(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{n1}e_n;$$

$$L(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{n2}e_n;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$L(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + ... + a_{nn}e_n.$$

Матрицею A лінійного оператора L називається матриця, стовпцями якої є координати образів базисних векторів

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2n} \\ ..... & ... & ..... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\big(L(e_1)\ L(e_2)\ ...\ L(e_n)\big) = (e_1\ e_2\ ...\ e_n)A$, $L(e) = eA$ у матричному вигляді.

Таким чином, кожному лінійному оператору відповідає матриця оператора в цьому базисі.

І навпаки, всякій матриці порядку n відповідає лінійний оператор n-вимірного простору.

Приклад 1. Матриця тотожного оператора $L(x) = x$ є одинична матриця E.

$L(e_1) = e_1 = (1,0,...,0)$;

$L(e_2) = e_2 = (0,1,...,0)$;

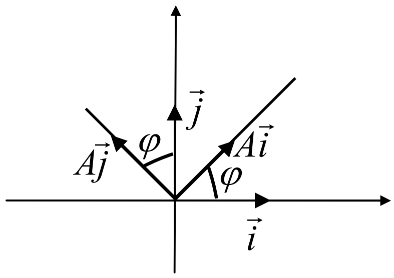
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.........

$L(e_n) = e_n = (0,0,...,1)$.

$$A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Матриця оператора повороту на кут φ має вигляд

$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$, бо



$A\vec{i}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$,

$A\vec{j}=\left(\cos\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right),\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=(-\sin\varphi,\cos\varphi)$.

Зв'язок між координатами вектора та його образу.

Нехай $x\xrightarrow{L}y$, де L − лінійний оператор.

$$y=L(x)=y_1e_1+y_2e_2+\ldots+y_ne_n=(e_1\ e_2\ \ldots\ e_n)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

З іншого боку,

$$y=L(x)=L(x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n)=x_1L(e_1)+x_2L(e_2)+\ldots+x_nL(e_n)=$$

$$=\big(L(e_1)\ L(e_2)\ \ldots\ L(e_n)\big)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(e_1\ e_2\ \ldots\ e_n)A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\Rightarrow\ Y=AX.$$

V. Зв'язок між матрицями лінійних операторів у різних базисах.

Нехай у просторі V вибрано два базиси $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ (1) $(e_1',e_2',\ldots,e_n')$ (2).

Лінійний оператор L має в базисі (1) матрицю A, а в базисі (2) матрицю B. T − матриця переходу від базису (1) до базису (2). Довільний вектор X має в кожному базисі координати:

$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ в базисі (1)

$X = \left(x_1', x_2', ..., x_n'\right)$ в базисі (2)

$L: X \to Y$, $Y = AX$ (1);

$L: X' \to Y'$, $Y' = BX'$ (2);

$X = TX'$ (3); $Y = TY'$ (4).

З (3) $\Rightarrow$ $AX = ATX'$, з (1) $\Rightarrow$ $Y = ATX'$, з (4) $\Rightarrow$ $TY' = ATX'$, $Y' = T^{-1}ATX'$, з (2) $\Rightarrow$ $B = T^{-1}AT$.

Означення. Матриця B називається подібною до матриці A, якщо існує така неособлива матриця T, що $B = T^{-1}AT$.

Отже, матриці, що задають лінійний оператор L в різних базисах − подібні.

VI. Власні числа і власні вектори лінійного оператора.

Означення. Нехай L − оператор лінійного перетворення $L: V \to V$ евклідового простору.

$A = \left(a_{ij}\right)$ − матриця лінійного оператора L розмірності $n \times n$.

Вектор x називається ***власним вектором*** лінійного перетворення, якщо

1) $x \neq 0$;

2) $Ax = \lambda x$, де $\lambda \in \mathbb{R}$ − деяке число, що називається ***власним числом*** оператора L і матриці A.

$Ax = \lambda x$, $Ax - \lambda x = 0$, $\left(A - \lambda E\right)x = 0$ − однорідна система − має нетривіальні розв'язки, якщо

$\det\left(A - \lambda E\right) = 0$ − ***характеристичне рівняння***.

Розгорнутий вигляд характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

або (якщо розкрити визначник)

$$\left(-1\right)^n \lambda^n + \left(-1\right)^{n-1} A_1 \lambda^{n-1} + \left(-1\right)^{n-2} A_2 \lambda^{n-2} + ... + + \left(-1\right)^n A_{n-1} \lambda + A_n = 0,$$

де A_1 − сума діагональних елементів матриці A (слід матриці), A_2 − сума всіх діагональних мінорів 2-го порядку, A_n − визначник матриці A.

Враховуючи теорему Вієта, маємо: сума коренів характеристичного рівняння дорівнює її сліду SpA.

1. Характеристичне рівняння − це многочлен n-го степеня, що має n коренів, дійсних або комплексних, деякі кратні.
2. Всі власні числа є коренями характеристичного рівняння, але не всі корені є власними числами (якщо простір дійсний, комплексні корені не можуть бути власними числами).
3. Система всіх характеристичних коренів називається ***спектром лінійного оператора***, причому кожне число входить в спектр стільки разів, яка його кратність.

Приклад 1. Знайти власні числа і власні вектори лінійного оператора $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(-3-\lambda)+4=0$

$\Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=-2$.

$$\lambda_1=1: \begin{matrix} Ax=1\cdot x \\ (A-E)x=0 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x+4y=0,\ X_1=\begin{pmatrix} -4t \\ t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix},\ t\neq 0;$$

$$\lambda_2=-2: \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x+y=0,\ X_2=\begin{pmatrix} -s \\ s \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ s\neq 0.$$

Кожному власному числу відповідає множина власних векторів.

Приклад 2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 8 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0$;

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)-8(2-\lambda)=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2-9)=0 \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_{2,3}=\pm 3.$$

$$\lambda_1 = 2: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} -x + y + 8z = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases}, \begin{cases} z = t \\ x = 3t \\ y = -5t \end{cases}, X_1 = t\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0.$$

$$\lambda_2 = 3: \begin{pmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} -2x + y + 8z = 0 \\ -y = 0 \\ x - 4z = 0 \end{cases}, \begin{cases} z = s \\ x = 4s \\ y = 0 \end{cases}, X_2 = s\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s \neq 0.$$

$$\lambda_3 = -3: \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} 4x + y + 8z = 0 \\ 5y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}, X_3 = p\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p \neq 0.$$

Приклад 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 9, \ \lambda_3 = -9$.

$$\lambda = 9 \quad \begin{cases} -8x - 4y - 8z = 0 \\ -4x - 2y - 4z = 0 \\ -8x - 4y - 8z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = s \\ z = t \\ y = -2s - 2t \end{matrix} \quad X_1 = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s^2 + t^2 \neq 0$$

це власний вектор, що відповідає власному числу 9.

$$\lambda = -9 \quad \begin{cases} x - 4y + z = 0 \\ 18y - 9z = 0 \\ -18y + 9z = 0 \end{cases} \quad X_2 = p\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p \neq 0.$$

Властивості власних векторів.

1. Кожному власному вектору відповідає єдине власне число.

Від супротивного. $\begin{matrix} Ax = \lambda_1 x \\ Ax = \lambda_2 x \end{matrix} \Rightarrow 0 = (\lambda_1 - \lambda_2)x \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

2. Якщо x − власний вектор, що відповідає власному числу λ, то $\alpha x \ (\alpha \neq 0)$ теж власний вектор з власним числом λ.

$A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha\lambda x = \lambda(\alpha x)$

3. Сума $x_1 + x_2$ двох власних векторів з одним і тим же власним числом є власним вектором

$$\begin{matrix} Ax_1 = \lambda x_1 \\ Ax_2 = \lambda x_2 \end{matrix} \quad A(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2).$$

4. Якщо x_1 і x_2 − власні вектори з різними власними числами λ_1 і λ_2, то вони лінійно незалежні

Доведення від супротивного. Припустимо x_1 і x_2 − лінійно залежні, тобто: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0, \quad \alpha_1 \neq 0, \quad x_1 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2$, то за властивістю 2 у них однакові власні числа.

Зауваження. Обернене твердження не має місця. Так як існують лінійно незалежні вектори, що відповідають одному власному числу.

Ортогональний оператор і його матриця.

Означення. Лінійний оператор A в n - вимірному евклідовому просторі V називається ортогональним (ізометричним), якщо він зберігає скалярний добуток векторів, тобто якщо для будь-яких векторів x та y цього простору $(Ax, Ay) = (x, y)$.

Має місце ***теорема 1***. Для того, щоб лінійний оператор A у просторі V був ортогональним необхідно і достатньо, щоб цей оператор переводив будь-який ортогональний базис в ортогональний.

Доведення.

Необхідність. Нехай лінійний оператор A у просторі V переводить ортонормований базис $e_1, e_2, ..., e_n$ в ортонормований базис $e_1' = Ae_1, e_2' = Ae_2, ..., e_n' = Ae_n$.

Тоді, якщо $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$ і $y = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n$, то

$Ax = x_1Ae_1 + x_2Ae_2 + ... + x_nAe_n = x_1e_1' + x_2e_2' + ... + x_ne_n'$,

$Ay = y_1e_1' + y_2e_2' + ... + y_ne_n', \quad (Ax, Ay) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = (x, y)$, тобто оператор A − ортогональний.

Достатність. Нехай A − ортогональний оператор у просторі V, а $e_1, e_2, ..., e_n$ − ортонормований базис простору V, то

$\left(Ae_i, Ae_j\right) = \left(e_i, e_j\right) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$, $i, j = 1, ..., n$. А це означає, що система векторів $Ae_1, Ae_2, ..., Ae_n$ − ортонормована.

Теорема 2. Лінійний оператор A у просторі E є ортогональним тоді і тільки тоді, коли $A^* A = E$, або $A^* = A^{-1}$, де A^* − спряжений з ним оператор.

Доведення. Якщо A^* − спряжений з A оператор, то за означенням $\forall x, y \in V$ виконується рівність $\left(Ax, y\right) = \left(x, A^* y\right)$.

Необхідність. Нехай A − ортогональний оператор, а A^* − спряжений з ним оператор, то $\left(x, y\right) = \left(Ax, Ay\right) = \left(x, A^*\left(Ay\right)\right) = \left(x, A^* Ay\right)$, $\forall x, y \in V$, а це можливо тільки тоді, коли $A^* A = E$ або $A^* = A^{-1}$.

Достатність. Якщо $A^* = A^{-1}$, то для $\forall x, y \in V$, $\left(Ax, Ay\right) = \left(x, A^* Ay\right) = \left(x, y\right)$, тобто A − ортогональний оператор.

Матриця ортогонального оператора.

Означення. Матриця A називається ортогональною, якщо $A^T = A^{-1}$.

Має місце **теорема**.

Кожний ортогональний оператор A в евклідовому просторі V в ортонормованому базисі задається ортогональною матрицею.

Доведення. Нехай A − ортогональний оператор у просторі V, якщо A^* − спряжений з ним. Оператору A в ортонормованому базисі $e_1, e_2, ..., e_n$ евклідового простору V відповідає матриця $A = \left\| a_{ij} \right\|, i, j = 1, ..., n$. Якщо $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ і $Y = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$ − координати векторів у цьому базисі, то $\left(x, y\right) = \left(X^T, Y\right)$. В такому разі $\left(Ax, y\right) = \left(AX\right)^T \cdot Y = X^T A^T Y = \left(x, A^T y\right)$, але $\left(Ax, y\right) = \left(x, A^* y\right)$, отже $A^* = A^T$, оскільки A − ортогональний, тобто $A^* = A^{-1}$, то $A^T = A^{-1}$, а це означає, що матриця A − ортогональна.

Нагадаємо, що стовпці матриці лінійного оператора A в деякому базисі $e_1, e_2, ..., e_n$ − це координати векторів $Ae_1, Ae_2, ..., Ae_n$, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & .... & ... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ де } \begin{pmatrix} a_{ji} \\ ... \\ a_{ni} \end{pmatrix} = Ae_j, i = 1, ..., n.$$

Якщо базис $e_1, e_2, ..., e_n$ − ортонормований, а оператор −ортогональний, то $\left(Ae_j, Ae_k\right) = a_{1j}a_{1k} + a_{2j}a_{2k} + ... + a_{nj}a_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}a_{jk} = \begin{cases} 1, \ i = k \\ 0, \ i \neq k \end{cases}$

тому що ортогональний оператор переводить ортонормований базис в ортонормований.

Отже, очевидно, що стовпці матриці ортогонального оператора утворюють ортонормовану систему.

Якщо врахувати, що $A^T = A^{-1}$, то зрозуміло, що і рядки такої матриці − ортогональна система, тобто якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ − ортогональна, то

$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \ a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1,$

$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0, \ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0.$

Наприклад, матриці $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$ − ортогональні.

Квадратичні форми

I. Лінійна та білінійна форми

Означення 1. Лінійною формою (або лінійною функцією) називається числова функція $L(x)$, визначена на елементах лінійного простору, яка кожному елементу цього простору ставить у відповідність число, при цьому

$$1)\ L(x_1+x_2)=L(x_1)+L(x_2); \qquad 2)\ L(\lambda x)=\lambda L(x).$$

Приклад 1. Нехай $\mathbb{C}[a,b]$ − лінійний простір функцій, неперервних на $[a,b]$. L − лінійна форма, яка кожній функції $f(x)$ ставить у відповідність число $\int_a^b f(x)dx$.

$$f(x)\xrightarrow{L}\int_a^b f(x)dx$$

$$L(f+g)=\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

$$L(\alpha f)=\int_a^b \alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx.$$

Якщо розглянута лінійна форма діє у просторі $L=P_n$ многочленів степеня, не вищого за n, то у базисі $1,x,...,x^n$ матриця лінійної форми матиме вигляд: $A=\begin{pmatrix} b-a & \dfrac{b^2-a^2}{2} .... \dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\end{pmatrix}$.

Приклад 2. Скалярний добуток елемента x на фіксований вектор a є $L(x)=(x,a)=\sum_{i=1}^{n}x_i a_i$ є лінійна форма відносно x.

Означення 2. Білінійною формою (або білінійною функцією) називається числова функція пари елементів $B(x,y)$ лінійного простору, яка є лінійною формою по кожному елементу:

1. $B(x_1+x_2,y)=B(x_1,y)+B(x_2,y)$, $B(x,y_1+y_2)=B(x,y_1)+B(x,y_2)$
2. $B(\lambda x,y)=\lambda B(x,y)$, $B(x,\lambda y)=\lambda B(x,y)$.

Якщо в лінійному просторі V зафіксувати базис $\left(e_1,...,e_n\right)$, в якому елементи x та y мають координати $x=\left(x_1,...,x_n\right)$, тобто $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y=\left(y_1,...,y_n\right)$, $y=\sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, то білінійна форма може бути записана у вигляді $B\left(x,y\right)=B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i ; \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_j B\left(e_i,e_j\right)$, якщо позначити $B\left(e_i,e_j\right)=b_{ij}$, то $B\left(x,y\right)=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$.

Матриця $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ ..... & \dots & .... \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$, де $b_{ij}=B\left(e_i,e_j\right)$ називається матрицею білінійної форми.

Якщо позначити $X=\left(x_1,...,x_n\right)^T$, $Y=\left(y_1,...,y_n\right)^T$, то $B\left(x,y\right)=X^T AY$.
Якщо зафіксувати новий базис у просторі V: $e_1',e_2',...,e_n'$, то $B\left(x,y\right)=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}' x_i' y_j'$ або в матричній формі $B\left(x,y\right)=\left(X'\right)^T \cdot A' \cdot Y'$, де

$$A'=\begin{pmatrix} B\left(e_1',e_1'\right) & \dots & B\left(e_1',e_n'\right) \\ ..... & \dots & ..... \\ B\left(e_n',e_1'\right) & \dots & B\left(e_n',e_n'\right) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} X'=\left(x_1',...,x_n'\right)^T \\ Y'=\left(y_1',...,y_n'\right)^T \end{matrix}.$$

Відомо, що $X=HX'$, $Y=HY'$, де H − матриця переходу від старого базису до нового, то одержимо $A'=H^T \cdot A \cdot H$.

Означення. Білінійна форма $B\left(x,y\right)$ називається симетричною, якщо $\forall x,y\in V$: $B\left(x,y\right)=B\left(y,x\right)$.
Тоді для базисних векторів $b_{ij}=B\left(e_i,e_j\right)=B\left(e_j,e_i\right)=b_{ji}$, отже матриця симетричної білінійної форми буде симетричною, тобто $B^T=B$.

Приклад білінійної симетричної форми − скалярний добуток в евклідовому просторі

$$(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j \text{ , де } a_{ij}=(e_i,e_j).$$

II. Означення квадратичної форми

Означення. Числова функція, яку можна одержати із симетричної білінійної форми $B(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$, якщо покласти $y=x$ називається ***квадратичною формою*** $B(x,x)$:

$$B(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = K(x).$$

Якщо врахувати, що $a_{ij}=a_{ji}$, $x_i x_j = x_j x_i$, то квадратичну форму можна записати у вигляді

$$B(x,x)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+\ldots+a_{nn}x_n^2.$$

Квадратична форма − однорідний багаточлен другого степеня відносно координат вектора $x=(x_1,\ldots,x_n)$.

Матриця квадратичної форми складається з коефіцієнтів при змінних $x_1,\ldots,x_n$. На головній діагоналі коефіцієнти при квадратах змінних, на всіх інших місцях половина коефіцієнтів при добутку змінних $x_i x_j$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Приклад 1. Записати матрицю квадратичної форми $K(x)$, якщо $K(x)=3x_1^2-4x_1x_2+x_2^2$.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. $K(x)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2-6x_1x_3+4x_3^2$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

ІІІ. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

Означення. Квадратична форма має канонічний вигляд (або називається канонічною), якщо всі $a_{ij}=0\ \left(i\neq j\right)$:

$$K\left(x\right)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+...+a_{nn}x_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2\,\text{.}$$

Матриця канонічної квадратичної форми має діагональний вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ .... & .... & ... & .... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

Має місце **теорема**.

Будь-яка квадратична форма шляхом вибору відповідного ортогонального базису зводиться до канонічного вигляду. Причому базис формується з власних векторів матриці цієї квадратичної форми.

Коефіцієнти при квадратах координат є власними числами матриці (враховуючи кратність).

Якщо базис ортонормований, то існує матриця B переходу від старого базису до нового базису ($\det B\neq 0\,, B$ − ортогональна), стовпчиком якої є координати ортонормованих власних векторів матриці A, тобто

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ .... & .... & ... & .... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Приклад. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду ортогональним перетворенням, знайти базис, в якому вона має канонічний вигляд, матрицю цього ортогонального перетворення, якщо

$$K\left(x_1,x_2,x_2\right)=11x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-16x_1x_3+20x_2x_3.$$

Розв'язання. Запишемо матрицю квадратичної форми в базисі e_1,e_2,e_3:

$$A=\begin{pmatrix}11 & 2 & -8\\ 2 & 2 & 10\\ -8 & 10 & 5\end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix}11-\lambda & 2 & -8\\ 2 & 2-\lambda & 10\\ -8 & 10 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0$$

одержуємо власні значення: $\lambda_1=18,\ \lambda_2=9,\ \lambda_3=-9$.

Квадратична форма автоматично набуває вигляду:

$K\left(x_1',x_2',x_3'\right)=18x_1'^2+9x_2'^2-9x_3'^2$ в базисі з власних векторів.

Знайдемо новий ортонормований базис із власних векторів, в якому квадратична форма має канонічний вигляд:

$$\vec{e}_1'=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\ \vec{e}_2'=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\ \vec{e}_3'=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right).$$

Запишемо матрицю переходу від базису e_1,e_2,e_3 до базису e_1',e_2',e_3'.

$$B=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що матриця B − ортогональна.

IV. Знаковизначеність квадратичної форми.

Означення:

1^0. Квадратична форма називається додатньо визначеною, якщо

$$K\left(x\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0\quad \forall x\neq 0$$

2^0. Квадратична форма називається невід'ємно визначеною, якщо $K(x) \geq 0 \quad \forall x \neq 0$

3^0. Квадратична форма називається від'ємно визначеною, якщо $K(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$

4^0. Квадратична форма називається недодатньою, якщо $K(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0$

5^0. В інших випадках її називають знаконевизначеною.

Так як кожну квадратичну форму можна записати у канонічному вигляді, то

1^0. Додатньо визначена − коли всі власні числа $\lambda_i > 0$

2^0. Від'ємно визначена − усі $\lambda_i < 0$

3^0. $K(x) \geq 0$, коли $\lambda_i \geq 0$

4^0. $K(x) \leq 0$, коли $\lambda_i \leq 0$

5^0. Невизначеною, коли серед λ_i є $\lambda_i > 0$, $\lambda_i > 0$ і $\lambda_i = 0$.

Критерій Сільвестра (визначення типу квадратичної форми)

Нехай матриця квадратичної форми (симетрична)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Головними мінорами матриці назвемо мінори

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots..,\ \Delta_n = \det A.$$

Для того, щоб квадратична форма з симетричною матрицею A була

1) додатньо визначеною, необхідно і достатньо, щоб головні мінори були додатні $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ ....,\ \Delta_n > 0$;
2) від'ємно визначеною, необхідно і достатньо, щоб знаки головних мінорів чергувалися, починаючи з мінуса

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \Delta_4 > 0,\ ....$$

Зауваження. Критерій Сільвестра застосовується для дослідження екстремумів функцій багатьох змінних.

Приклад 1. Дослідити на знаковизначеність квадратичну форму

$$K(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 2yz\ .$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = 2 > 0,\ \Delta = 1 > 0\ - \text{додатньо визначена.}$$

Приклад 2. $K(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 2xy$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0 - \text{додатньо визначена.}$$

Приклад 3. $K(x,y,z) = 2y^2 - x^2 - xz + 2yz$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \Delta_1 < 0,\ \Delta_2 < 0\ - \text{не є знаковизначеною.}$$

Приклад 4. $K(x,y) = \lambda x^2 + y^2 + 4xy\ .$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \Delta_1 = \lambda,\ \Delta_2 = \lambda - 4\ .$$

1) $\begin{cases} \lambda > 0 \\ \lambda - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda > 4\ -$ знакододатна

2) $\begin{cases} \lambda < 0 \\ \lambda - 4 > 0 \end{cases}$ $-$ ні при якому λ не є від’ємно визначеною.

V. Зведення загального рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду.

Нагадаємо, що загальне рівняння кривих другого порядку має вигляд:

$$\underbrace{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy}_{\textit{квадратична форма}} + \underbrace{a_{10}x + a_{01}y + a_{00}}_{\text{лінійна форма}} = 0 .$$

На основі класифікації квадратичних форм може здійснюватись класифікація геометричних образів, що їм відповідають.

I. Знаковизначена: $K(x) > 0$, або $K(x) < 0$, або $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ −

крива еліптичного типу : еліпс (коло), точка, уявний еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$.

II. Нестрого знаковизначені: $K(x) \geq 0$, $K(x) \leq 0$, або $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ −

крива гіперболічного типу : гіпербола, пара прямих, що перетинається.

III. Знаконевизначені: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ −

крива параболічного типу : парабола, пара паралельних прямих, пара прямих, що перетинаються, пара прямих, що співпадають, уявні прямі − $\varnothing$.

Будь-яке рівняння кривої можна звести до канонічного вигляду за допомогою таких кроків:

1. Скласти матрицю A квадратичної форми: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Зауважимо, що матриця A обов'язково симетрична.

2. Знайти λ_1 та λ_2 − власні значення матриці та відповідні їм власні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

3. Знайти $|\vec{e}_1|, |\vec{e}_2|$ і записати стовпці з координат векторів $\vec{h}_1 = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}, \vec{h}_2 = \frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}$

$$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix}, \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix}$$

Вектори $\vec{h}_1$ і $\vec{h}_2$ складають пару перпендикулярних векторів довжиною 1, вздовж яких прямуватимуть нові координати осей OX_1 та OY_1.

4. Скласти матрицю $B = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$

Зробити перетворення координат x та y:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

5) Підставити вирази для x і y через x_1 та y_1 у рівняння кривої.

Приклад. Звести рівняння лінії $2x^2 + 6xy + 2y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$ до канонічного вигляду і зобразити криву.

Розв'язання.

1. Матриця квадратичної форми $2x^2 + 6xy + 2y^2$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Шукаємо власні значення

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

звідки $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 5, \ \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$; отже маємо гіперболічний тип.

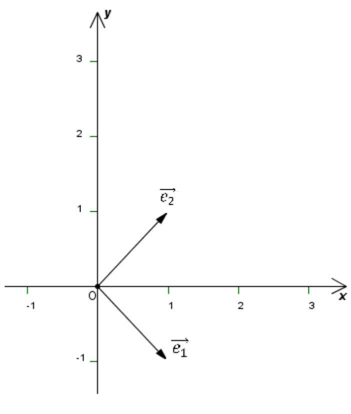
Знаходимо відповідні власні вектори:

- для $\lambda_1 = -1$ маємо $\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$, тобто $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- для $\lambda_2 = 5$ маємо $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$, тобто $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Звернемо увагу на те, що $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$. Саме ці вектори і визначають напрямок нових координатних осей OX_1, OY_1 (рис. 1).

3. Знаходимо $|\vec{e}_1| = \sqrt{2}$; $|\vec{e}_2| = \sqrt{2}$. Складаємо матрицю T із координат векторів:



$$\frac{\vec{e}_1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ і } \frac{\vec{e}_2}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Перетворюємо координати:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

тобто $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + y_1) \end{cases}$

5. Підставивши вирази для x та y у рівняння кривої (нагадаємо, що квадратична форма перетвориться на $-x_1^2+5y_1^2$), у даному випадку матимемо

$$\frac{2}{2}\left(x_1+y_1\right)^2+\frac{6}{2}\left(-x_1+y_1\right)\left(x_1+y_1\right)+\frac{2}{2}\left(-x_1+y_1\right)^2+\frac{2}{\sqrt{2}}\left(x_1+y_1\right)-\frac{2}{\sqrt{2}}\left(-x_1+y_1\right)+3=0$$

або $-x_1^2+5y_1^2+2\sqrt{2}x_1+3=0 \Leftrightarrow x_1^2-2\sqrt{2}x_1-5y_1^2-3=0$

Залишилось зробити паралельне перенесення

$$\left(x_1-\sqrt{2}\right)^2-5y_1^2=5 \qquad \begin{cases} x_1-\sqrt{2}=X \\ y_1=Y \end{cases}$$

У координатах XY матимемо рівняння гіперболи

$x^2-5y=5$ або $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{1}=1$ (рис. 2)

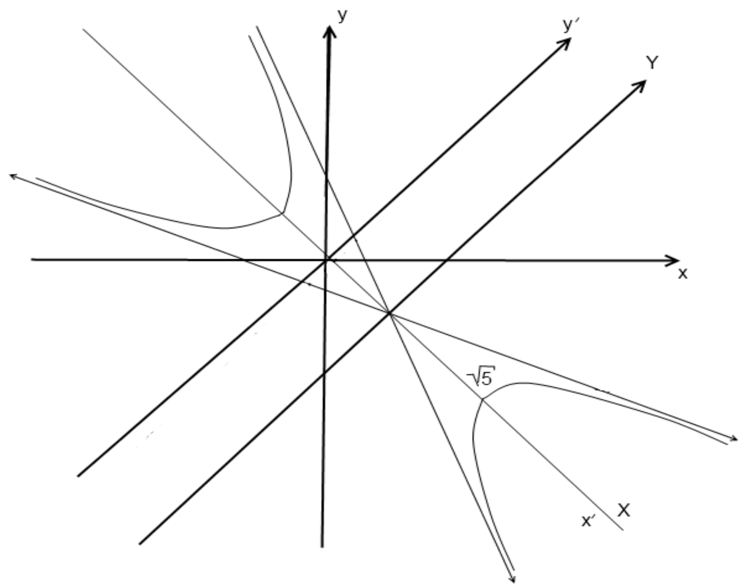


Рис.2.

Приклад 2. Звести рівняння лінії $x^2+6xy+9y^2-12x-6y-\dfrac{3}{4}=0$ до канонічного вигляду і зобразити криву.

Розв’язання.

1. Матриця квадратичної форми $x^2+6xy+9y^2$ має вигляд

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 9\end{pmatrix}$$

2. Шукаємо власні значення:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 3 & 9-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Звідки $\lambda_1=0$, $\lambda_2=10$, $\lambda_1\cdot\lambda_2=0$ - параболічний тип.

Знаходимо відповідні власні вектори:

- для λ_1=0 маємо $\begin{cases} x+3y=0 \\ 3x+9y=0 \end{cases}$, тобто $\vec{e}_1=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

- для λ_2=10 маємо $\begin{cases} -9x+3y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$, тобто $\vec{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$

Знаходимо $|\vec{e}_1|=\sqrt{10}$; $|\vec{e}_2|=\sqrt{10}$, складаємо матрицю Т із стовпців координат векторів:

$\dfrac{\vec{e}_1}{\sqrt{10}}$ і $\dfrac{\vec{e}_2}{\sqrt{10}}$ $\quad T=\begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{10}} & \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{10}} & \dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

Перетворюємо координати:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

тобто $x=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x_1+y_1)$

$y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(-x_1+y_1)$

5. Підставивши вирази для x mау у рівняння кривої у даному випадку матимемо:

$$0x_1^2+10y_1^2-12(3x_1+y_1)\frac{1}{\sqrt{10}}-6(-x_1+3y_1)\frac{1}{\sqrt{10}}-0,75=0,$$

або $10y_1^2-\dfrac{30}{\sqrt{10}}y_1-\dfrac{30}{\sqrt{10}}x_1-0,75=0$

Залишилось зробити паралельне перенесення:

$$10\left(y_1-\frac{2\cdot 3y_1}{2\sqrt{10}}+\frac{9}{4\cdot 10}\right)-3\sqrt{10}x_1-0,75=\frac{9}{4}$$

$$10\left(y_1-\frac{3}{2\sqrt{10}}\right)^2=3\sqrt{10}x_1+3 \text{ або } 10\left(y_1-\frac{3}{2\sqrt{10}}\right)^2=3\sqrt{10}\left(x_1+\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

У координатах $\begin{cases} x_1+\dfrac{1}{\sqrt{10}}=X \\ y_1-\dfrac{3}{2\sqrt{10}}=Y \end{cases}$ маємо рівняння параболи $10Y^2=3\sqrt{10}X$

Парабола симетрична відносно ÕX. Т. Õ в системі OX_1Y_1 має координати $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}};\dfrac{3}{2\sqrt{10}}\right)$; рис. 3.

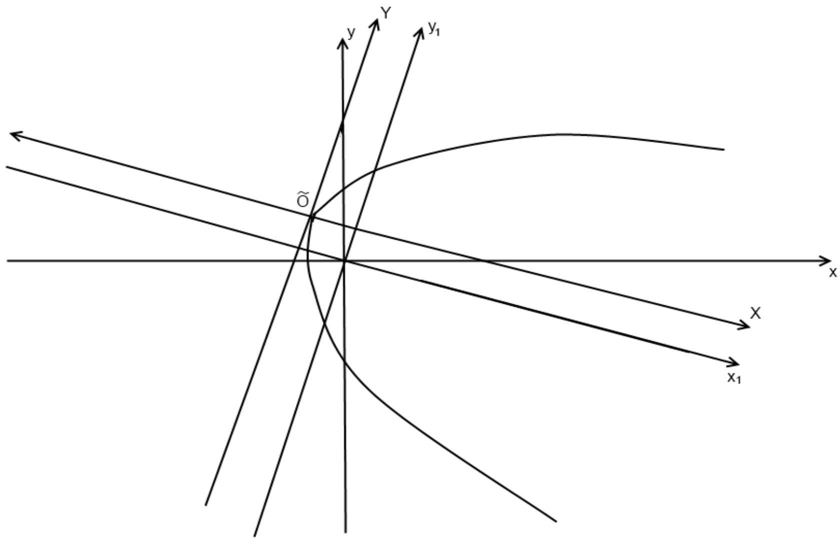


Рис.3.

Предметний покажчик

Список рекомендованої літератури

1. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейнман В.Б. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрию: под. ред. Р.Ф. Апатенок. − Мн.: Вышэйшая школа., 1986. − 272 с.
2. Жевняк Р.М. Высшая математика. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление./ Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. − Мн.: Вышэйшая школа., 1992. − 384 с.
3. Вся высшая математика: учеб./ М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко и др.− Т.1. − М.:Эдиторал УРСС.2000.− 328 с.
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометри и линейной алгебры: учеб./ Д.В. Беклемишев. − М.Физматлит, 2005.− 307 с.