Національний технічний університет України «КПІ»

ДРУГА МІЖНАРОДНА НАУКОВО-ПРАКТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ

«МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ»

20–21 грудня 2013 року, Київ

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ

Київ — 2013

УДК 51 (082)
ББК 22.1я43

Друга міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті», 20–21 грудня 2013 р., Київ: Матеріали конф. — К.: НТУУ «КПІ», 2013. — 340 с. — Укр., рос., англ.,білорус.

Вторая международная научно-практическая конференция «Математика в современном техническом университете», 29–21 декабря 2013 г., Киев: Материалы конф. — К.: НТУУ «КПИ», 2013. — 340 с. — Укр., рос., англ.,білорус.

ISBN 978-617-7021-10-9

Оргкомітет Другої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»:

Проф. О. І. Клесов (Україна) (голова)
Проф. Н. О. Вірченко (Україна)
Проф. О. В. Іванов (Україна)
Доц. О. О. Диховичний (Україна)
Доц. В. О. Гайдей (Україна) (секретар)

Оргкомитет Второй международной научно-практической конференции «Математика в современном техническом университете»:

Проф. О. И. Клесов (Украина) (председатель)
Проф. Н. А. Вирченко (Украина)
Проф. А. В. Иванов (Украина)
Доц. А. А. Дыховичный (Украина)
Доц. В. А. Гайдей (Украина) (секретарь)

I

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В СУМІЖНИХ НАУКАХ

OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR DEGENERATE HYPERBOLIC SYSTEM WITH INFINITE HORIZON PLANNING

Taras Derevianko
Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine
taras_derevianko@ukr.net

We consider a process $y = y(x,t)$, which is described by a semilinear hyperbolic system in unbounded domain $\Pi = (0,1) \times (0,+\infty)$

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} = f_i(y(x,t),x,t),\, i \in I_{m_1}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t} = f_i(y(x,t),x,t),\, i \in I_{m_2}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} = f_i(y(x,t),x,t),\, i \in I_{m_3}, \qquad (3)$$

where $card(I_{m_j}) = m_j,\, j = 1,2,3$. The value of function λ_i $(i \in I_{m_1})$ is positive or negative for any $(x,t) \in \overline{\Pi}$.

Suppose a component y_i of the process y is subject to initial condition

$$y_i(x,0) = y_i^0(u^{(0)}(x),x),\, x \in [0,l],\, i \in I_{m_1} \cup I_{m_2} \qquad (4)$$

and boundary conditions

$$y_i^+(0,t) = \gamma_i^0(y^-(0,t),u^{(1)}(t),t),\, t \in \mathsf{R}_+, \qquad (5)$$

$$y_i^-(1,t) = \gamma_i^l(y^+(l,t),u^{(2)}(t),t),\, t \in \mathsf{R}_+, \qquad (6)$$

$$y_i(0,t) = \gamma_i^0(u^{(3)}(t),t),\, t \in \mathsf{R}_+,\, i \in I_{m_3}, \qquad (7)$$

where y_+ contains the components of y that correspond to positive eigenvalues and y_- the corresponding negative eigenvalues. The controls $u^{(j)} \in U^j$ $(j = 0,1,2,3)$ are continuously differentiable functions, where U^j — compact set.

Optimal control problem consists of finding a solution of semilinear hyperbolic system (1)–(7) and corresponding control functions such that minimized the following functional

$$J(u^{(0)},u^{(1)},u^{(2)},u^{(3)}) =$$

$$= \int_0^{+\infty} G_0(y_-(0,t),y_+(1,t),y_j(1,t)\big|_{j \in I_{m_3}},t)dt + \iint_\Pi G(y(x,t),x,t)dxdt,$$

where $G_0 : \mathsf{R}^{m_1+m_3} \times \mathsf{R}_+ \to \mathsf{R}_+$, $G : \mathsf{R}^{m_1+m_2+m_3} \times \overline{\Pi} \to \overline{\Pi}$ are nonlinear functions.

Reference

1. *Argutchyncev A. V.* Optimal control of hyperbolic systems. — M.: Fizmatlit, 2007. — 168 p. (in Russian)

2. *Nguyen N.T.* Model predictive optimal control of a time-delay distributed-parameter system // NASA Ames Research Center, Moffett Field, CA 94035.

3. *Rozhdestvenskii B. L., Yanenko N. N.* Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics. — M.: Nauka, 1978. — 592 p. (in Russian)

ПСЕВДОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С МАТРИЦАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ПАРАМЕТРА

З. Ж. Алеуова
Казахско-русский международный университет, Актобе, Казахстан
zaleuova@mail.ru

Установлены достаточные условия существования и единственности псевдопериодического решения квазилинейной системы с матрицей, зависящей от параметров.

Рассмотрим линейную систему неоднородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = P(\alpha)x + f(\tau, e\tau + \alpha, \alpha) \tag{1}$$

с псевдопериодическим свободным членом $f(\tau, t, \alpha)$ с вектор-периодом (θ, ω, ω)

$$f(\tau + \theta, t + k\omega, \alpha + k\omega) = f(\tau, t, \alpha) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m), k \in \mathbb{Z}^m \tag{2}$$

где $\tau \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $e = (1, ..., 1) - m -$вектор, $P(\alpha) - n \times n -$матрица, зависящая от вектор-параметра

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^m,$$

$t = (t_1, ..., t_m) -$вектор, $x = (x_1, ..., x_n)$ — искомая вектор-функция. $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $k\omega = (k_1\omega_1, ..., k_m\omega_m)$, $\omega_0 = \theta$, $\omega_1, ..., \omega_m$ — рационально независимые положительные периоды.

Поставим задачу об исследовании (θ, ω, ω) — псевдопериодических решений

$$\begin{aligned} &x(\tau + \theta, e\tau + \alpha + k\omega, \alpha + k\omega) = \\ &= x(\tau, e\tau + \alpha, \alpha) \in C^{(1,1,\alpha)}_{\tau,t,\alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m), k \in \mathbb{Z}^m \end{aligned} \tag{1_*}$$

линейной системы (1).

Заметим, что когда $\alpha = 0$, то псевдопериодическая функция обращается в квазипериодическую функцию $\tau \in \mathbb{R}$ по Бору.

Для наших целей достаточно ограничиваться рассмотрением решений дифференциальных уравнений $x(\tau, e\tau + \alpha, \alpha)$ с непрерывными $\omega -$периодическими начальными данными

$$x(0, \alpha, \alpha) = u(\alpha), u(\alpha + k\omega) = u(\alpha) \in C(\mathbb{R}^m), k \in \mathbb{Z}^m \tag{3}$$

для всех $k \in \mathbb{Z}^m$.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{d\tau} = P(\alpha)x. \tag{4}$$

Пусть матрица $P(\alpha)$ удовлетворяет следующим условиям:

1^0. Периодична по $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^m$ с вектор-периодом $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ и непрерывна или непрерывно дифференцируема. Следовательно, имеем соотношение

$$P(\alpha + k\omega) = P(\alpha) \in C_\alpha^{(q)}(\mathbb{R}^m), \;\; k = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^m, \qquad (5)$$

где $k\omega = (k_1\omega_1, ..., k_m\omega_m)$, $\mathbb{Z}$ множество целых чисел, $q = 0, 1$, периоды $\omega_1, ..., \omega_m$ рационально несоизмеримые положительные постоянные.

2^0. Кратности n_j корней $\lambda = \lambda_j(\alpha + k\omega)$ характеристического уравнения

$$h(\lambda, \alpha) \equiv \det\left[P(\alpha) - \lambda E\right] = 0 \qquad (6)$$

не зависят от $\alpha \in \mathbb{R}^m$ и $k \in \mathbb{Z}^m$, где $E -$единичная $n \times n -$матрица, $1 \leq j \leq \chi$,

3^0. Ранги r_j, $j = \overline{1, \chi}$ матриц

$$H_j(\alpha) \equiv P(\alpha) - \lambda_j(\alpha)E, \;\; 1 \leq j \leq \chi \qquad (7)$$

не зависят от $\alpha \in \mathbb{R}^m$.

При условиях $1^0 - 3^0$ существует $n \times n -$матрица $Q(\alpha)$, обладающая свойствами

$$\det Q(\alpha) \neq 0, \; Q(\alpha + k\omega) = Q(\alpha) \in C_\alpha^{(q)}(\mathbb{R}^m), \;\; k \in \mathbb{Z}^m, \qquad (8)$$

$$Q^{-1}(\alpha)P(\alpha)Q(\alpha) = J(\alpha) \qquad (9)$$

где $J(\alpha) - n \times n -$матрица вида

$$J(\alpha) = diag\left[J_1(\mu_1), ..., J_\nu(\mu_\nu)\right],$$

с $m_p \times m_p -$клетками

$$J_p(\mu_p) = \mu_p E_p + I_p, \quad p = \overline{1, \nu}$$

соответствующими собственным значениям $\mu_p \in \Lambda = \left\{\lambda_1, ..., \lambda_\chi\right\}$, $E_p - m_p \times m_p$ — единичная матрица, $I_p -$первый косой ряд такой же размерности, $\sum\limits_{p=1}^{\nu} m_p = n$.

Такое приведение доказывается методом математической индукции.

Если для собственных значений $\mu(\alpha)$ выполнено условие

$$\operatorname{Re}\mu(\alpha) < 0, \qquad (14)$$

то для решения (13) имеем оценку

$$\left|z(\tau - s,\alpha)\right|_r = \sup_{1\le j\le r}\left|z_j(\tau - s,\alpha)\right| \le \varepsilon_r e^{-(\tau - s)[\left|\mathrm{Re}\,\mu(\alpha)\right| - \delta]}\left\|u\right\|, \tau \ge s, j = \overline{1,r} \quad (15)$$

с некоторыми постоянными $\varepsilon_r > 0$ и $\delta > 0$.

Теперь допустим, что все собственные значения $\mu(\alpha) = \lambda_j(\alpha),\ j = \overline{1,\nu}$ удовлетворяют условию (14). Тогда на основе оценки (15) имеем оценку для решений $y(\tau,\alpha)$ системы (11) вида

$$\left|y(\tau - s,\alpha)\right| \le \varepsilon\, e^{-\gamma(\tau - s)}\left\|u\right\|,\ \tau \ge s, \quad (16)$$

где $\varepsilon > 0,\ \gamma > 0$ — некоторые положительные постоянные.

Тогда в силу (10) и (16) имеем оценку для решения $x(\tau,\alpha)$ системы (4)

$$\left|x(\tau - s,\alpha)\right| \le \left\|Q\right\|\varepsilon e^{-\gamma(\tau - s)}\left\|u\right\| = \Gamma e^{-\gamma(\tau - s)}\left\|u\right\|,\ \tau \ge s, \quad (17)$$

где $\Gamma = \left\|Q\right\|\cdot\varepsilon,\ \left\|Q\right\| = \max_{\alpha\in R^m}\left|Q(\alpha)\right|, \left|Q(\alpha)\right| = \left|\left[q_{ij}(\alpha)\right]\right| \sup_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|q_{ij}(\alpha)\right|$.

Если $X(\tau,\alpha)$— матрицант системы (4), то ее любое решение $x(\tau,\alpha)$ с начальным данным $x(0,\alpha) = u(\alpha)$ представляется в виде

$$x(\tau,\alpha) = X(\tau,\alpha)u(\alpha), \quad (18)$$

где $X(0,\alpha) = E$ –единичная матрица.

Тогда в силу оценки (17) из (18) имеем

$$\left|X(\tau - s,\alpha)\right| \le \Gamma e^{-\gamma(\tau - s)},\ \ \tau \ge s \quad (19)$$

с положительными постоянными $\Gamma \ge 1$ и $\gamma > 0$.

Таким образом, необходимым и достаточным условием оценки (19) является отрицательность реальных частей всех собственных значений $\lambda_j(\alpha),\ j = \overline{1,\chi}$ матрицы $P(\alpha)$, обладающей свойствами $1^0 - 3^0$

$$\mathrm{Re}\,\mu(\alpha) = \mathrm{Re}\,\lambda_j(\alpha) < 0,\ j = \overline{1,\chi} \quad (20)$$

Необходимость условия (20) для выполнения оценки (19) легко доказывается методом от противного.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $1^0 - 3^0$ *и неравенство (20). Тогда система однородных дифференциальных уравнений (4) не имеет псевдопериодических по* $(\tau, e\tau + \alpha, \alpha)$ *решений с периодом* (θ,ω,ω), *кроме нулевого.*

Решение линейной неоднородной системы (1) представляется в виде

$$x(\tau, e\tau + \alpha, \alpha) = X(\tau,\alpha)u(\alpha) + \int\limits_{(0,\alpha)}^{(\tau, e\tau+\alpha)} X(\tau,\alpha)X^{-1}(s,\alpha)f(s,\chi,\alpha)d_e(s,\chi), \quad (21)$$

где $X(\tau,\alpha)$ — матрицант однородной системы, соответствующей системе (1).

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $1^0 - 3^0$, *(2) и (20). Тогда задача (1)-(1$_*$) имеет единственное решение*

$$x_*(\tau, e\tau + \alpha, \alpha) = X(\tau, \alpha) \int\limits_{(-\infty,\alpha)}^{(\tau,e\tau+\alpha)} X^{-1}(s,\alpha) f(s,\chi,\alpha) d_e(s,\chi)\,. \tag{22}$$

Единственность решения (22) следует из теоремы 1. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в периодичности решения, причем несобственный интеграла сходится в силу оценки (19).

Список литературы

1. Urabe M. // Green functions of pseudoperiodic differential operators. Lect. Notes. Math. 1971. — P. 106–122.
2. Комленко Ю. В. // Проблемы современной теории периодических движений. — 1978. — №2. — С. 23–28.
3. Сартабанов Ж. // Украинский математический журнал. 1989. №1. С. 125–130.
4. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М-Л., 1952.
5. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1953.
6. Алеуова З. Ж., Сартабанов Ж. А. // Вестник КазНПУ им. Абая. — 2007. — №2 (18). — С. 41–45.
7. Алеуова З. Ж. // V Международная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». 9-10 октября, 2009. С. 14–17.

МЕТОД СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВОЗДЕЙСТВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

С. Б. Алимбаева

Казахско-русский международный университет, Актобе, Казахстан

soni8383@mail.ru

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка параболического типа:

$$H^2[y]+p(t,\ x)H[y]+q(t,x)y=f(t,x), \qquad (t,\ x)\in G, \ (1)$$

удовлетворяющие краевым условием

$$\begin{aligned} y(0,\ x)&=\pi_1(x),\\ y(t,\ x)&=\pi_2(x), \end{aligned} \qquad (2)$$

и условиями с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} y(\tau-0,\ x)&=\alpha(x),\\ y(\tau+0,\ x)&=\beta(x), \end{aligned} \qquad (3)$$

где $H[\ \ ]=\dfrac{\partial}{\partial t}+Q(t,\ x)\dfrac{\partial}{\partial x}$, $H^2[\ \ ]=H[H[\ \ ]]$ и функция $f(t,x)$ имеет разрыв в точке τ, то есть

$$f(t,x)=\begin{cases} f_1(t,x), & (t,x)\in G_1,\\ f_2(t,x), & (t,x)\in G_2, \end{cases}$$

причем функций $f_1(t,\ x)\in G_{t,x}{}^2(G_1)$, $f_2(t,\ x)\in G_{t,x}{}^2(G_2)$, а функций $p(t,x),q(t,x)\in G^2_{t,\ x}(G)$. Область

$$G=\{(t,\ x):\ 0\le t\le l,\ \lambda_1(t)\le x\le\lambda_2(t)\},$$

где $\lambda_2(t)$ и $\lambda_2(t)$ есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt}=Q(t,\ x)$$

соответственно с начальными условиями $x(0)=0$ и $x(0)=l$.

Область

$$G_1=\{(t,x):0\le t\le\tau,\lambda_1(t)\le x\le\lambda_2(t)\}$$

и

$$G_2=\{(t,x):\tau\le t\le l,\lambda_1(t)\le x\le\lambda_2(t)\}.$$

Предположим выполнение следующих условий:

I. Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1(0,\ x) & z_2(0,\ x) \\ z_1(l,\ x) & z_2(l,\ x) \end{vmatrix} \neq 0$$

где $z_1(t,\ x)$, $z_2(t,\ x)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующее уравнению (1).

II. $\Phi(\tau) \neq 0,\ \psi(\tau) \neq 0,$ где функций $\Phi(t,x), \psi(t,x)$ специальные функций краевой задачи (1)–(2):

Нужно определить решение краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3), при выполнении условий I–II. Для того чтобы определить решение задачи с импульсным воздействием, нужно рассмотреть однородное уравнение в частных производных, соответствующего к уравнению (1):

$$H^2[z] + p(t,\ x)H[z] + q(t,\ x)z = 0,$$

Пусть $z_1(t,x)$, $z_2(t,x)$ фундаментальная система решений соответствующего к уравнению (1) однородного уравнения.

Определение 1. Функций $\Phi(t,\ x)$, $\psi(t,\ x)$ в области G называются *специальные функциями* задачи (1)–(2), если они являются решениями уравнения (4) удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} &\Phi(0,x) = 1, \qquad &&\psi((0,x) = 0, \\ &\Phi(t,x) = 0, \qquad &&\psi((t,x) = 1. \end{aligned}$$

Лемма. Специальные функций $\Phi(t,x), \psi(t,x)$задачи (1)–(2) в области G существуют, единственны и выражаются формулами

$$\Phi(t,x) = \frac{\Delta_1(t,x)}{\Delta x}, \quad \psi(t,x) = \frac{\Delta_2(t,x)}{\Delta x},$$

где $\Delta_i(t,x)$ — определители, получаемые из определителя Δс помощью замены *i*-ой строки его на фундаментальную систему решений $z_1(t,x)$, $z_2(t,x)$, то есть

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} z_1(0,x) & z_2(0,x) \\ z_1(l,x) & z_2(l,x) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1(t,x) = \begin{vmatrix} z_1(t,x) & z_2(t,x) \\ z_1(l,x) & z_2(l,x) \end{vmatrix}, \Delta_2(t,\ x) = \begin{vmatrix} z_1(0,x) & z_2(0,x) \\ z_1(t,x) & z_2(t,x) \end{vmatrix}.$$

Доказательство леммы производится аналогичным образом, как в [1].

Решение задачи (1) –(3) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} y_1 &= S_1(t,x)\Phi(t,x) + S_2(t,x)\psi(t,x), \quad (t,x) \in G_1, \\ y_2 &= S_3(t,x)\Phi(t,x) + S_4(t,x)\psi(t,x), \quad (t,x) \in G_2, \end{aligned}$$

где $S_i\left(t,x\right)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — неизвестные функций, которые нужно определить. Подставляя (4) в уравнение (1) и применяя метод вариации произвольных постоянных, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно

$$H\left[S_1\left(t,x\right)\right], H\left[S_2\left(t,x\right)\right], H\left[S_3\left(t,x\right)\right], H\left[S_4\left(t,x\right)\right]:$$

$$\begin{cases} H\left[S_1\left(t,x\right)\right]\cdot H\left(t,\ x\right)+H\left[S_2\left(t,\ x\right)\right]\cdot\psi\left(t,x\right)=0, \\ H\left[S_1\left(t,x\right)\right]\cdot H\left[\Phi\left(t,x\right)\right]+H\left[S_2\left(t,x\right)\right]\cdot H\left[\psi\left(t,x\right)\right]=f_1\left(t,\ x\right), \end{cases} (t,\ x)\in G_1,$$

$$\begin{cases} H\left[S_3\left(t,x\right)\right]\cdot\Phi\left(t,\ x\right)+H\left[S_4\left(t,\ x\right)\right]\cdot\psi\left(t,\ x\right)=0, \\ H\left[S_3\left(t,x\right)\right]\cdot H\left[\Phi\left(t,x\right)\right]+H\left[S_4\left(t,x\right)\right]\cdot H\left[\psi\left(t,x\right)\right]=f_2\left(t,x\right), \end{cases} (t,\ x)\in G_1,$$

Из систем (5)–(6) находим неизвестные $S_1\left(t,x\right)$, $S_2\left(t,x\right)$, $S_3\left(t,x\right)$, $S_4\left(t,x\right)$:

$$S_1\left(t,\ x\right)=-\int_0^t\frac{\psi\left(t_1,\ x_0\right)}{W\left(t_1,\ x_0\right)}f_1\left(t_1,x_0\right)dt_1+s_1\left(\psi\left(t,\ x\right)\right),$$

$$S_2\left(t,x\right)=\int_0^t\frac{\Phi\left(t_1,x_0\right)}{W\left(t_1,x_0\right)}f_1\left(t_1,x_0\right)dt_1+s_2\left(\psi\left(t,x\right)\right), \tag{7}$$

$$S_3\left(t,\ x\right)=\int_t^l\frac{\psi\left(t_1,\ x_0\right)}{W\left(t_1,\ x_0\right)}f_2\left(t_1,x_0\right)dt_1+s_3\left(\psi\left(t,\ x\right)\right),$$

$$S_4\left(t,x\right)=-\int_t^l\frac{\Phi\left(t_1,x_0\right)}{W\left(t_1,x_0\right)}f_2\left(t_1,x_0\right)dt_1+s_4\left(\psi\left(t,x\right)\right),$$

где $W\left(t,x\right)$ — вронскиан от функций $\Phi\left(t,x\right),\psi\left(t,x\right)$ по [2]:

$$\begin{vmatrix} \Phi\left(t,x\right) & \psi\left(t,x\right) \\ H\left[\Phi\left(t,x\right)\right] & H\left[\psi\left(t,x\right)\right] \end{vmatrix},$$

а $S_i\left(t,x\right)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ пока неизвестные функций, причем $x_0=\psi\left(t_1,\ x\right)$

Подставляя последние выражения в (4), а затем (4) в (2) имеем, что $S_1\left(\psi\left(t,x\right)\right)=\pi_1\left(\psi\left(t,x\right)\right)$, $S_4\left(\psi\left(t,x\right)\right)=\pi_2\left(\psi\left(t,x\right)\right)$ и подставляя (4) в (3) находим неизвестных $S_2\left(\psi\left(t,x\right)\right), S_3\left(\psi\left(t,x\right)\right)$:

$$s_2\left(\psi\left(t,\ x\right)\right)=\frac{1}{\psi\left(\tau,\ x\right)}\times$$

$$\times\left(\alpha\left(\psi\left(t,\ x\right)\right)-\pi_2\left(\psi\left(t,\ x\right)\right)\cdot\Phi\left(\tau,\ x\right)+\int\limits_0^\tau\frac{\begin{vmatrix}\Phi\left(\tau,\ x\right) & \psi\left(t,\ x\right)\\ \Phi\left(t_1,\ x_0\right) & \psi\left(t_1,\ x_0\right)\end{vmatrix}}{W\left(t_1,\ x_0\right)}f_1\left(t_1,\ x_0\right)dt_1\right),$$

$$s_3\left(\psi\left(t,\ x\right)\right)=\frac{1}{\Phi\left(\tau,\ x\right)}\times$$

$$\times\left(\beta\left(\psi\left(t,\ x\right)\right)-\pi_2\left(\psi\left(t,\ x\right)\right)\cdot\psi\left(\tau,\ x\right)+\int\limits_t^l\frac{\begin{vmatrix}\Phi\left(\tau,\ x\right) & \psi\left(t,\ x\right)\\ \Phi\left(t_1,\ x_0\right) & \psi\left(t_1,\ x_0\right)\end{vmatrix}}{W\left(t_1,\ x_0\right)}f_2\left(t_1,\ x_0\right)dt_1\right).$$

Подставляя теперь найденные значения в (7) в (4) получим решение краевой задачи (1)–(2) с импульсным воздействием (3) в виде:

$$y_1\left(t,x\right)=\pi_1\left(\psi\left(t,x\right)\right)\cdot\Phi\left(t,x\right)-\int\limits_0^t\frac{\Phi\left(t,\ x\right)\cdot\Psi\left(t_1,x_0\right)}{W\left(t_1,x_0\right)}f_1\left(t_1,x_0\right)dt_1+$$
$$+\int\limits_0^t\frac{\Psi\left(t,x\right)\cdot\Phi\left(t_1,x_0\right)}{W\left(t_1,x_0\right)}f_1\left(t_1,x_0\right)dt_1+\frac{\alpha\left(\psi\left(t,x\right)\right)\cdot\Psi\left(t,x\right)}{\psi\left(\tau,x\right)}-$$
$$-\frac{\pi_1\left(\psi\left(t,x\right)\right)\cdot\Phi\left(\tau,x\right)\cdot\Psi\left(t,x\right)}{\Psi\left(t,x\right)}+\frac{\Psi\left(t,x\right)}{\Psi\left(\tau,x\right)}\int\limits_0^\tau\frac{\begin{vmatrix}\Phi\left(\tau,x\right) & \Psi\left(\tau,x\right)\\ \Phi\left(t_1,x_0\right) & \Psi\left(t_1,x_0\right)\end{vmatrix}}{W\left(t_1,x_0\right)}f_1\left(t_1,x_0\right)dt_1$$

$$y_2\left(t,x\right)=\pi_2\left(\psi\left(t,x\right)\right)\cdot\Psi\left(t,x\right)+\int\limits_t^l\frac{\Phi\left(t,x\right)\cdot\Psi\left(t_1,x_0\right)}{W\left(t_1,x_0\right)}f_2\left(t_1,x_0\right)dt_1-$$
$$-\int\limits_t^l\frac{\Psi\left(t,x\right)\cdot\Phi\left(t_1,x_0\right)}{W\left(t_1,x_0\right)}f_2\left(t_1,x_0\right)dt_1+\frac{\beta\left(\psi\left(t,x\right)\right)\cdot\Phi\left(t,x\right)}{\Phi\left(\tau,x\right)}-$$
$$-\frac{\pi_2\left(\psi\left(t,x\right)\right)\cdot\Psi\left(\tau,x\right)\cdot\Phi\left(t,x\right)}{\Phi\left(\tau,x\right)}-\frac{\Phi\left(t,x\right)}{\Phi\left(\tau,x\right)}\int\limits_0^\tau\frac{\begin{vmatrix}\Phi\left(\tau,x\right) & \Psi\left(\tau,x\right)\\ \Phi\left(t_1,x_0\right) & \Psi\left(t_1,x_0\right)\end{vmatrix}}{W\left(t_1,x_0\right)}f_2\left(t_1,x_0\right)dt_1$$

В последних равенствах упрощая выражение, получим

$$\begin{aligned}
y_1(t,\ x) &= \frac{\pi_1(\psi(t,x))}{\Psi(\tau,x)} \begin{vmatrix} \Phi(t,x) & \Psi(t,x) \\ \Phi(t,x) & \Psi(\tau,x) \end{vmatrix} + \\
&+\alpha(\psi(t,x))\frac{\Psi(t,x)}{\Psi(\tau,x)} - \int_0^t \frac{\begin{vmatrix} \Phi(t,x) & \Psi(t,x) \\ \Phi(t_1,x_0) & \Psi(t_1,x_0) \end{vmatrix}}{W(t_1,x_0)} f_1(t_1,x_0)\,dt_1 + \\
&+\frac{\Psi(t,x)}{\Psi(\tau,x)} \int_0^\tau \frac{\begin{vmatrix} \Phi(\tau,x) & \Psi(\tau,x) \\ \Phi(t_1,x_0) & \Psi(t_1,x_0) \end{vmatrix}}{W(t_1,x_0)} f_1(t_1,x_0)\,dt_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(t,\ x) &= \frac{\pi_2(\psi(t,\ x))}{\Phi(\tau,\ x)} \begin{vmatrix} \Psi(t,x) & \Phi(t,x) \\ \Psi(\tau,x) & \Phi(\tau,x) \end{vmatrix} + \beta(\psi(t,x))\frac{\Phi(t,x)}{\Phi(\tau,x)} - \\
&-\int_0^t \frac{\begin{vmatrix} \Psi(t,x) & \Phi(t,x) \\ \Psi(t_1,x_0) & \Phi(t_1,x_0) \end{vmatrix}}{W(t_1,x_0)} f_2(t_1,x_0)\,dt_1 - \\
&+\frac{\Phi(t,x)}{\Phi(\tau,x)} \int_t^l \frac{\begin{vmatrix} \Phi(\tau,x) & \Psi(\tau,x) \\ \Phi(t_1,x_0) & \Psi(t_1,x_0) \end{vmatrix}}{W(t_1,x_0)} f_2(t_1,x_0)\,dt_1.
\end{aligned}$$

Список литературы

1. Касымов К.Я. краевые задачи для линейного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка. Алматы, 1998.

2. Тажимуратов И.Т. Кубенова Ш.И. Общая теория систем уравнений в частных производных первого порядка с одинаковым главными частями. Актобе, РИО ЗКУ, 2001.

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПЛАСТИН СО СПЛОШНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

С. Ю. Богданов

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

bog2004.@bigmir.net

Пьезоэлектрические элементы пластинчатой являются наиболее распространёнными электромеханическими преобразователями при гармонических установившихся и импульсных электрических и механических возбуждениях Статьях [2–5] различными методами изучались нестационарные толщинные колебания пластинчатых преобразователей. Конфигурация преобразователей в плоскости при этом естественно не учитывалась. В случае тонких преобразователей это упущение можно устранить, если ограничиться теорией их механического деформирования в приближении плоского напряжённого состояния и линейным распределением электрических потенциалов по толщине. В последнее время широкое применение в задачах о колебаниях пьезокерамических тел различной конфигурации получили разностные методы. Это связано с их универсальностью и возможностью применения для решения сложных задач электроупругости. В представленной работе построена разностная схема решения задачи о радиальных колебаниях круглых пьезокерамических пластин со сплошными электродами. Показано, что построенная разностная схема имеет второй порядок точности по пространственной и временной координатам, предложен метод исследования устойчивости данной схемы.

1. Постановка задачи. Тонкую пьезокерамическую пластину толщины h отнесём к цилиндрической системе координат, координатная плоскость $z = 0$ которой совпадает с серединной плоскостью пластины. Уравнение колебаний в цилиндрической системе координат имеет вид [1]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \tag{1}$$

При материальных соотношениях

$$\sigma_r = \frac{1}{s_{11}^E \left(1 - \nu_E^2\right)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} - \left(1 - \nu_E\right) d_{31} E_z \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{s_{11}^E \left(1 - \nu_E^2\right)} \left(\nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) - \left(1 - \nu_E\right) d_{31} E_z, \tag{2}$$

в которых учтены формулы для деформаций $\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}$ и аналог коэффициента Пуассона $\nu_E = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}$. Обозначения в формулах (1)–(2) приняты согласно [1].

В начальный момент времени задаются перемещения точек пластины и их скорости

$$u_r\left(r,t=0\right) = u_0\left(r,\right)\frac{\partial u_r}{\partial t}\left(r,t=0\right) = u_1\left(r\right)$$

2. Построение разностной схемы. В области изменения пространственного переменного $R_0 < r < R_1$ вводим сетки с целыми и полуцелыми индексами

$$\Omega = \{r_i = R_0 + i\Delta r, i = 1,N; r_{i\pm\frac{1}{2}} = R_0 \pm \frac{1}{2}i\Delta r, \Delta r = \frac{R_{1-}R_0}{N},$$

N — число узлов сетки. Напряжения аппроксимируются на полуцелых точках, перемещения — на целых точках. Таким образом, для решения задачи (1)(2) имеем разностную схему:

$$\frac{\sigma_{r,i+\frac{1}{2}} - \sigma_{r,i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} + \frac{1}{2r_i}\left[\left(\sigma_{r,i+\frac{1}{2}} + \sigma_{r,i-\frac{1}{2}}\right) - \left(\sigma_{\theta,i+\frac{1}{2}} + \sigma_{\theta,i-\frac{1}{2}}\right)\right] = \rho u_{r,\overline{tt}} \quad (3)$$

Материальные соотношения в разностной форме:

$$\sigma_{r,i\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{s_{11}^E\left(1-\nu_E^2\right)}\left(\frac{u_{r,i\pm\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - u_{r,i\pm\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}{\Delta r} + \frac{\nu_E}{2}\left(\frac{u_{r,i\pm\frac{1}{2}}}{r_{i\pm\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} + \frac{u_{r,i\pm\frac{1}{2}-}}{r_{i\pm\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}\right) - \left(1+\nu_E\right)d_{13}E_z\right) \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta,i\pm}\frac{1}{2} = \frac{1}{s_{11}^E\left(1-\nu_E^2\right)}\left(\nu_E\frac{u_{r,i\pm\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-u_{r,i\pm\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}}{\Delta r} + \frac{u_{r,i\pm\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{r_{i\pm\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} + \frac{u_{r,i\pm\frac{1}{2}}}{r_{i\pm\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}} - \left(1+\nu_E\right)D_{13}E_z\right) \quad (5)$$

3. Исследование погрешности аппроксимации построенной разностной схемы. Все входящие в соотношения (1)–(2) функции являются непрерывно – дифференцируемыми до любого порядка. Поэтому при исследовании погрешности аппроксимации построенной разностной схемы используется метод разложения в ряд Тейлора функций $u_r\left(r\right)$ в точках r_i. Подставляя данные выражения в разностную схему и проделав соответствующие выкладки, устанавливаем, что схема имеет порядок точности $o\left(\left(\Delta r\right)^2 + \tau^2\right)$, где Δr и τ

— шаги разностной схемы соответственно по пространственной и временной координатам.

Аппроксимация граничных условий. При решении данного класса задач возможны четыре вида граничных условий [1]: условия свободного края, условия жёсткого защемления краёв кольца, комбинация этих условий. В случае задания на краях кольца перемещений, граничные условия известны. Если заданы напряжения, то входящие в них производные аппроксимируются со вторым порядком точности по формулам [8]:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{4u_{r,1} - 3u_{r,0} - u_{r,2}}{2\Delta r} + O\Big(\big(\Delta r\big)^3\Big)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{4u_{r,N-2} - 3u_{r,N} - u_{r,N-2}}{2\Delta r} + O\Big(\big(\Delta r\big)^3\Big)$$

4. Исследование устойчивости построенной разностной схемы. Представим уравнение колебаний (1) в безразмерном виде. Переход к безразмерным величинам осуществляется при помощи замены переменных

$$\overline{r}R = r, \overline{t} = \frac{ta}{R}, \overline{u}_r R = u_r, \overline{\sigma}_{\theta,r} = \sigma_{\theta,r} s_{11}^E\left(1 - \nu_E^2\right)$$

В результате получим уравнение движения в безразмерной форме [2]:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{6}$$

Граничные условия при этом выбираются из двух альтернативных пар [6]:

$$\overline{u}_r\left(R_{0,}\overline{t}\right) = 0 \vee \overline{\sigma}_r\left(\overline{R}_0, \overline{t}\right) = 0 \text{ или } \overline{u}_r\left(\overline{R}_1, \overline{t}\right) = 0 \vee \overline{\sigma}_r\left(\overline{R}_1, \overline{\hat{t}}\right) = 0$$

Начальные условия запишутся в виде

$$\overline{u}_r\left(\overline{r}, \overline{t} = 0\right) = R^{-1}u\left(\overline{r}\right), \frac{\partial_{\overline{t}}\left(\overline{r}, \overline{t} = 0\right)}{\partial\overline{t}} = a^{-1}u_1\left(\overline{r}\right)$$

Явная разностная схема для решения данной задачи имеет вид:

$$u_i^{j+1} = \tau^2\left[\left(\frac{1}{\left(\Delta r\right)^2} + \frac{1}{2r_i\Delta r}\right)u_{i+1}^j + \left(\frac{2}{\left(\Delta r\right)^2} - \frac{1}{2r_i\Delta r}\right)u_{i-1}^j\right] + 2u_i^j - u_i^{j-1} \tag{7}$$

Исследуем устойчивость построенной схемы по начальным данным методом энергетических неравенств. Данную схему можно представить в каноническом виде [7].

$$By_{\underset{t}{0}} + \tau^2 P y_{\overline{t}t} + Ay = 0 \tag{8}$$

Схема устойчива в энергетической полунорме при выполнении операторных неравенств:

$$B \geq 0, P = P^{*,}, A \geq 0, P - \frac{1}{4}A \geq 0 \tag{9}$$

Выполнение первого из условий (9) очевидно: $B = 0$.

Второе из условий выполняется в силу определения оператора P. Оператор A положительно определён в силу того, что выражение $\left(Ay, y\right)$ есть потенциальная энергия пластины, которая является неотрицательной функцией. Критерий устойчивости разностной схемы выводится из последнего неравенства в (9). Соотношение $\frac{\tau}{\Delta r}$ получается при оценке энергетической полунормы оператора A сверху и определения оператора Р. При выводе условия устойчивости используется неравенство Коши — Буняковского, ε-неравенство, и неравенство

$$\left\| u_{r,\bar{r}} \right\| \leq \frac{4}{\left(\Delta r\right)^2} \left\| u \right\|.$$

Получена оценка устойчивости разностной схемы, из которой по известной теореме [7] следует устойчивость по правой части. В конкретных задачах для обеспечения устойчивости построенной схемы соотношение между τ и Δr, в виде $\tau = 0{,}1\Delta r$ [6]. Данный подход к построению и исследованию основных свойств построенной схемы может быть применён для тел вращения более сложной формы (цилиндр, сфера).

5. Заключение. В работе построена разностная схема для решения задач электромеханических колебаний тонких пьезокерамических кольцевых пластин. Проведено исследование аппроксимации построенной разностной схемы и предложена методика исследования устойчивости построенной схемы. Показано, что схема имеет второй порядок точности по временной и пространственной координатам. Даны практические рекомендации по обеспечению устойчивости построенной схемы.

Список литературы

1. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання пьезоелетричних пластин. — К.: Наукова думка, 2008. — 269 с.

2. Шульга Н. А. Сравнительный анализ вынужденных упругоэлектрических колебаний слоёв с искривлёнными границами// Прикладная механика. — 2011. — **47**, №2. — С. 86–95.

3. Shulga N. A., Grigoreva L. O. Method of Characteristics in Analysis of the Propagation of Electroelastics Thicnkess Oscilations in a Piezoceramic Layer under Electric Excitation // Int. Appl. Mech. — 2008. — **44**, № 10 — P. 1093–1097.

4. Shulga N. A., Grigor'eva L. O. Metod of Characterisyics in Electroelastics Analysis of a layer subject to Dynamic Mechanical Loading // Int. Appl. Mech. — 2009. — **45**, №1. — P. 66–73.

5. Shulga N. A., Grigor'eva L. O. Electroelastic Nonstationary Vibration of a Piezoceramic Layer // Int. Appl. Mech. — 2009. — **45**, №3. — P. 282–290.

6. Шульга М. О., Григорьева Л. О., Бабкова Н. О., Ластивка И. О. Численный анализ нестационарных колебаний круглых пьезоэлектрических пласти // Теоретическая и прикладная механика. — 2011. Вып 2 (48). — С. 98–104.

7. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971. — 552с.

8. Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробогатько А. А. Методы вычислений. — К.: Выща школа, 1977. — 408 с.

МАРКІВСЬКІ МОДЕЛІ ЯК ЗАСІБ ДЛЯ МОНІТОРИНГУ ЕКОСИСТЕМ

Ю. П. Буценко, В. А. Лабжинський
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
armchairdoc@yandex.ua, sergeant@aprodos.kpi.ua

Традиційно для моніторингу процесів, що відбуваються в атмосфері та гідросфері, використовують дані, отримані від контрольних приладів. З цим пов'язана практика опису таких процесів за допомогою часових рядів, використання регресійних процедур лінійного та нелінійного характеру для розв'язання задач прогнозування. Такому підходу великою мірою відповідає моделювання згаданих процесів за допомогою динамічних систем. В теперішній час набувають все більшого поширення математичні моделі, які ґрунтуються на марківських процесах [1]. Наявність законодавчо визначених екологічних нормативів та дискретність зняття інформації дозволяють розбивати фазовий простір контрольованих параметрів на скінченну кількість областей та розглядати «блукання» системи по них як випадковий процес з дискретним часом. При цьому отриманий скінченний ланцюг Маркова в багатьох випадках може розглядатися як однорідний (принаймні, в межах певного часового інтервалу).

Перевагами такого підходу є:

- простота змісту;
- природне врахування екологічних стандартів;
- зведення множини оцінюваних параметрів до множини елементів перехідної матриці ланцюга.

В той же час теорія ланцюгів Маркова дозволяє визначати для довільного стану середній час його досягнення та розподіл такого часу, знаходити середній час перебування у певному стані та розподіл цього часу. У тому випадку, коли для екосистеми визначені «ціни» (економічні ефекти, витрати матеріальних ресурсів тощо) перебування у кожному з станів протягом одиниці часу, така модель надає можливість розраховувати економічну ефективність функціонування природно-технічної системи та оптимізувати її за наявності можливості керування нею (зміни матриці перехідних імовірностей) [2].

Головними задачами, які доводиться розв'язувати при побудові моделі такої екосистеми, є:

- побудова фазового простору системи, що є об'єднанням регіонів, з урахуванням наявних кореспонденцій між ними [3];
- оцінювання перехідних імовірностей ланцюга на основі наявних історичних даних;
- подвійна класифікація станів ланцюга як з точки зору їх екологічної безпечності-небезпечності, так і з позицій імовірнісної структури ланцюга.

Відповідно, для керованих ланцюгів [4] розглядають задачі максимізації середнього часу досягнення класу екологічно небезпечних станів, мінімізації ймовірності досягнення стану такого класу тощо.

Специфічними виявляються наслідки подвійної класифікації станів системи з точки зору їх екологічної безпечності-небезпечності та з точки зору ймовірнісної структури ланцюга. Вже на цьому етапі моделювання системи може виникнути необхідність її модифікації внаслідок, наприклад, неприйнятно малого середнього часу досягнення небезпечного стану або неприйнятно високої ймовірності його досягнення за певний наперед визначений проміжок часу. Таким чином, цільова функція оптимізаційної задачі має включати вартість «модифікації» системи (підвищення надійності обладнання та ефективності систем керування промисловими установками, зниження рівнів викидів шкідливих речовин тощо). Вказана «модифікація» змінює не тільки економічний ефект («вартість») перебування системи протягом одиниці часу в тому чи іншому стані, але й матрицю перехідних імовірностей ланцюга. Розгляд відповідних варіантів модифікації системи (на основі наявної скінченної множини стратегій) дозволяє сформувати остаточний варіант математичної моделі, що й використовується для натурних випробувань. Слід також зауважити, що при експлуатації системи ведеться паралельний статистичний контроль як за її ймовірнісними параметрами, так і за відповідністю реально отриманих економічних показників прогнозованим.

Відповідно, справедливі отримані у роботі [4] твердження про існування (за умови, що задовольняються відповідні вимоги) оптимальних стратегій. Такі задачі розв’язують як для «стаціонарних» режимів функціонування, так і для випадків еволюції системи до потрапляння у визначену множину станів.

Список літератури

1. Адмаев О. В. Использование марковских процессов для оценки экологической безопасности воздушного пространства города / О. В. Адмаев, Т. В. Гавриленко // Оптика атмосферы и океана. — 2010. — Т. 23, № 12. — С. 1087–1090.

2. Бардин И. В. Прогнозирование ситуаций и оптимизации принятия решений по улучшению экологической обстановки в районах с нефтяным загрязнением на основе конечных цепей Маркова / И. В. Бардин, Ю. Д. Моторыгин, М. А. Галишев // Проблемы управления рисками в техносфере. — 2009. — № 1–2. — С. 17–23.

3. Хабаров В. И. Марковская модель транспортных корреспонденций / В. И. Хабаров, Д. О. Молодцов, С. Г. Хомяков // Доклады ТУСУРа. — 2012. — № 1 (25), ч. 1. — С. 113–117.

4. Карманов А. В. Исследование управляемых конечных марковских цепей с неполной информацией (минимаксный подход) / В. А. Карманов. — М.: Физматлит, 2002. — 176 с.

МАТЕМАТИЧНИЙ ПІДХІД ДО ПЛАНУВАННЯ РОЗРОБКИ ПРОГРАМ

К. Г. Воропаєва
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
ktrnvoropaieva@gmail.com

Швидка розробка та забезпечення якості стали ключовими факторами для IT-проектів. Ці потреби привели компанії до впровадження різних нових стратегій для зменшення часу розробки, контролю якості та ін. Agile методологію було визнано одним з таких ефективних підходів. На базі математичного підходу було запропоновано новий метод оцінки й планування для розробки програм на Agile-основі [1].

Розвиток ітераційного програмного забезпечення знайшов більшу популярність і визнання в останні кілька років, ніж традиційна модель водоспаду. У більшості випадків при плануванні роботи над проектом використовують минулий досвід та інтуїтивні відчуття учасників команди. Команда управління проектом часто планує певну кількість спринтів (проміжки часу, протягом якого проходять усі стадії проекту, а потім процес повторюється с урахуванням помилок). Зазвичай кількість спринтів може бути недостатньою. Будь-які зміни в зроблених припущеннях при плануванні створюють труднощі та підвищують ризик провалу проекту. Ці проблеми можуть бути легко подолані, якщо застосовувати кількісний підхід для планування [2]. Такий підхід не тільки допоможе у плануванні та контролі проектів типу ітеративної розробки, але допоможе при виборі методології розробки для конкретного проекту.

Кількість запланованих спринтів диктуватиме кількість вимог/функціональних можливостей, які можуть бути включені до кожного спринту. У традиційній моделі всі функції включені в одному спринті і затверджені на окремій стадії тестування. Такий підхід може привести до ситуації, коли зусилля, витрачені на виправлення дефекту, що був створений на більш ранній стадії, можуть бути набагато більші, ніж усі попередні зусилля разом. Це означає, що переробки, пов'язані з виправленням дефекту, є основним фактором у визначенні кількості спринтів [3].

У випадку чисельного методу оцінки оптимальної кількості спринтів розробка шляху роботи над проектом ведеться балансуванням між обома підходами (Agile та Водоспад). Мета цього методу полягає в забезпеченні оптимальних вимог, що розглядаються в кожному із спринтів.

Для забезпечення розрахунку кількості спринтів були зроблені наступні припущення:

1. Кількість функціональних вимог знаходиться в пропорції до кількості тестів.
2. Кількість спроб для виконання тесту є постійною.
3. Загальна кількість тестів ділиться рівномірно по спринту.

4. Кількість часу на доопрацювання є постійною для єдиного циклу розробки моделі.

5. Кількість спроб на доопрацювання збільшуються на 2 порядки для послідовного циклу розробки (Водоспад).

6. Ймовірність виходу з ладу тестового прикладу.

7. Кількість спроб автоматизованих тестів буде такою ж, як і в наведеній моделі.

Позначення для розрахунків:

X — загальна кількість тестів;

n1 — кількість тестових спринтів в Сценарії 1;

n2 — кількість спринт оцінками в Сценарії 2;

E — зусилля для одного виконання тестового прикладу;

R(n) — спроби переробки у ході n-го спринту;

P(n) — імовірність збою тестового прикладу в n-му спринті;

N(n) — відсоток тестів, що розглядаються в n-му спринті.

Сценарій 1. Водоспад.

Спроби тестування та доопрацювання:

$$TE1 = N(1)XE + N(2)XE + N(3)XE + N(4)XE + \cdots + N(n2)XE.$$

Сценарій 2. Ітераційний цикл розробки моделі.

Кількість спроб тестування

$$= P(1)N(1)XP(1) + P(2)N(2)XP(2) + \cdots + \ P(n2)N(n2)XP(n2)$$

Кількість спроб доопрацювання $= \frac{(n2+1)}{2}X\left\{E + \frac{PR(n2)}{3}(2n2+1)\right\}.$

Всього спроб тестування і доопрацювання — TE2 можна визначити, як показано нижче:

$$TE2 = \frac{(n2+1)}{2}X\left\{E + \frac{PR(n2)}{3}(2n2+1)\right\} < n1\{E + PR(n1)\}.$$

Наведена вище формула (нерівність) буде діяти в якості корисного орієнтира для планування кількості спринтів в ітераційної моделі циклу розвитку.

З наведеної вище нерівності очевидно, що максимальна кількість спринтів, які можуть бути заплановані, залежить від:

1) кількості спроб виконання тестового прикладу;

2) ймовірності збою тестового прикладу;

3) спроб доопрацювання і виправлення несправного тесту.

Вказана вище нерівність має бути вирішена багаторазово, щоб отримати рішення.

Результати нададуть допомогу в плануванні такими двома способами:

1) надаючи загальну спринтів, необхідних для конкретного проекту;

2) якщо результат формули для даного набору значень знаходиться між 0 і 2, можна розглянути питання про використання Каскадної моделі (Водоспаду), а не Agile. Відповідно, при умові більше 2 — Agile.

Таким чином, можна перерахувати кількість спринтів на кожному етапі проекту, використовуючи останні дані й за допомогою цього переглянути весь план роботи.

Метод заснований на кількісному підході для планування і контролю ітеративної розробки. Формула для оцінки кількості спринтів, необхідних для планування розробки програмного продукту, побудована, балансуючи між традиційною моделлю і ітеративною моделлю.

Список літератури

1. Крейг Ларман, «Agile та послідовна розробка», Pearson Education, друге видання, 2007.

2. Ітконен, Ю., К. Раутіанен та С. Лассеніус, «Towards Understanding Quality Assurance in Agile Software Development», 2005.

3. Крхонен, К., «Evaluating the impact of an agile transformation: a longitudinal case study in a distributed context», 2012.

ОПТИМИЗАЦИЯ ОДНОКОНТУРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПО МОДУЛЬНОМУ КРИТЕРИЮ КАЧЕСТВА

И. М. Голинко, И. Е. Галицкая
Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина
gal@pti.kpi.ua

На современном этапе требования к функционированию систем автоматического управления (САУ) возросли. В большинстве случаев принятые в эксплуатацию системы управления оказываются настроенными далеко не оптимальным образом, что влечет за собой соответствующие (обычно скрытые, поскольку они специально не регистрируются) экономические потери. Автоматизация процесса настройки позволяет существенно уменьшить эти потери, а также сократить сроки ввода САУ в действие. Для оптимизации систем управления предложен интегральный критерий качества с минимизацией управляющего воздействия. Критерий качества отличается от существующих корректным учетом управляющего воздействия на технологический процесс, что позволяет минимизировать расход материальных и/или энергетических ресурсов при управлении промышленными агрегатами.

По мнению авторов, для синтеза оптимальных САУ целесообразно использовать модульные критерии качества, что подтверждается результатами моделирования, рассмотренными ниже.

Рассмотрена одноконтурная САУ, структурная схема которой представлена на рис. 1. САУ состоит из объекта управления (ОУ), сумматора и регулятора.

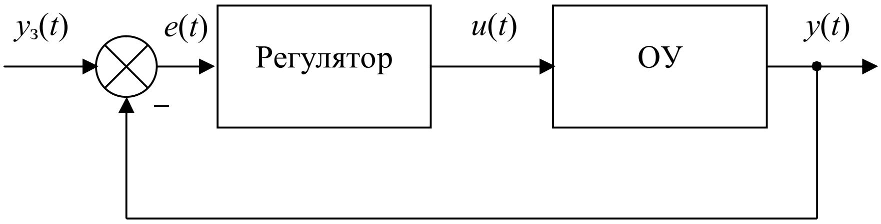


Рис.1. Структура САУ, $y_з(t)$ — сигнал задания, $e(t)$ — ошибка регулирования,
$u(t)$ — сигнал управления, $y(t)$ — выходной сигнал ОУ

При динамической оптимизации в качестве критерия обычно используется функционал

$$I = \int_0^{t_f} \left(qe^2 + r\left[y_з - Ku \right]^2 \right) dt, \qquad (1)$$

где, q та r — весовые коэффициенты, K — коэффициент передачи ОУ, $K \cong \left. \frac{y}{u} \right|_{t \geq t_f}$. Слагаемое $r\left[y_з - Ku \right]^2$ в (1) минимизирует отклонение сигнала управления u от технологически заданного с весом r.

Квадратичные критерии качества нашли широкое распространение в задачах оптимального управления вследствие возможности аналитического поиска решения. С развитием информационных технологий и численных методов преимущество квадратичных критериев отходит на второй план по сравнению с качеством решения задачи.

Как правило, модульные критерии применяются при численной оптимизации. Для оптимизации САУ будем рассматривать обе интегральные формы, сравнение которых приведет к выбору первой $Nk = 1$:

$$I = \begin{cases} \int\limits_0^{t_f} \left(q\left|e\right| + r\left|y_з - Ku\right| \right) dt, & Nk = 1; \\ \int\limits_0^{t_f} \left(qe^2 + r\left[y_з - Ku\right]^2 \right) dt, & Nk = 2. \end{cases} \qquad (2)$$

Численное моделирование и сравнение переходных процессов для оптимальных САУ с использованием функционалов (2) рассмотрено в [2].

Рассматривается динамическая модель ОУ, передаточная функция которого представляется в виде:

$$W_{\text{ОУ}}\left(p\right) = \frac{K}{Tp+1} e^{-p\tau}, \qquad (3)$$

где T — постоянная времени и τ — запаздывание в ОУ.

Поиск оптимальных настроек регулятора для ОУ (3) по критерию (2) производился численно. Алгоритмы поиска оптимума и программную реализацию методов представлены в [3]. Выбор численного метода оптимизации зависит от количества экстремумов. Чтобы найти глобальный оптимум и исключить из рассмотрения локальные, поиск производился методом сканирования. В программе задавалась область поиска, где производился перебор настроек регулятора с заданным шагом. Если настройки регулятора не обеспечивали устойчивость САУ — результаты моделирования не учитывались. Детально алгоритм поиска по методу сканирования рассмотрен в [2]. По результатам исследований, можно утверждать, что функционал (2) является унимодальным для САУ с ПИ или ПИД регулятором. Учитывая унимодальность решаемой задачи, основной алгоритм численной оптимизации САУ реализован, используя метод Хука — Дживса. Это позволило сократить время поиска оптимальных параметров регулятора.

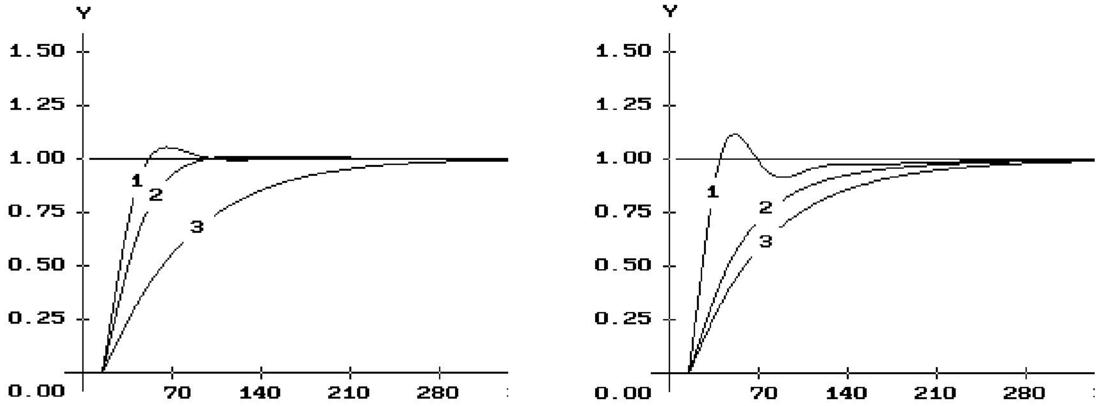
Для предложенного критерия оптимизации САУ получены функциональные зависимости параметров ПИ и ПИД регуляторов от динамических свойств ОУ (в виде апериодического звена с запаздыванием). По расчетным точкам численного поиска параметра построены аппроксимирующие зависимости, найденные методом наименьших квадратов по критерию:

$$E^* = \sum_{s=0}^{m} \left[y_s^* - f_a\left(\tau_s^*\right) \right]^2 \to \min, \tag{4}$$

здесь y_s^* — расчетная точка параметра регулятора для τ_s^*, найденная методом Хука — Дживса, $f_a\left(\tau^*\right)$ — аппроксимирующая функция.

Для обеспечения условия (4) в качестве $f_a\left(\tau^*\right)$ применялась одна из представленных функций $f_1\left(\tau^*\right) = a_0 + a_1\tau^*$, $f_2\left(\tau^*\right) = a_0 + a_1/\tau^*$, $f_3\left(\tau^*\right) = a_0/\left(a_1 + \tau^*\right)$.

В качестве примера на рис. 2 представлены переходные процессы конкретной САУ, оптимизированные по критерию (2).



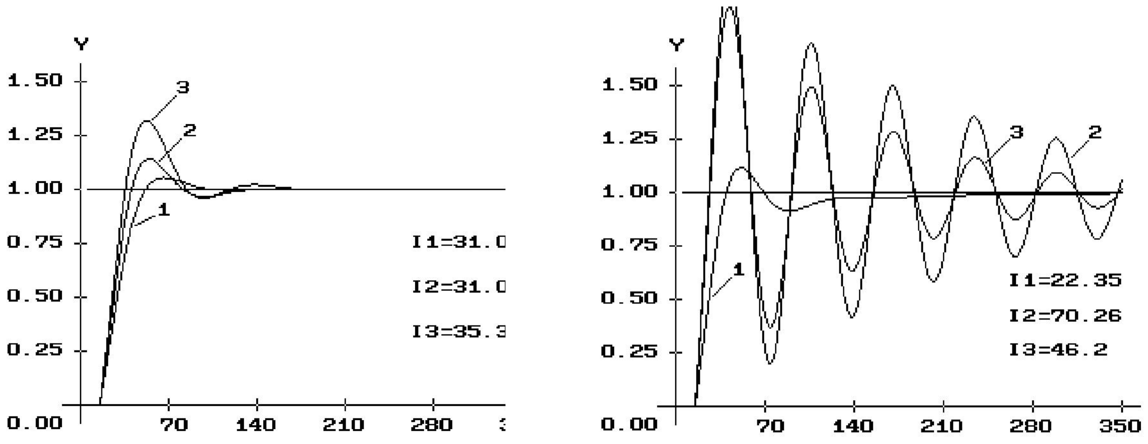
а) Nk=1 *б*) Nk=2

Рис. 2. Переходные процессы в САУ с ПИ регулятором, оптимизированные по критерию (2): 1 — (q=1, r=0); 2 — (q=1, r=1); 3 — (q=0, r=1)

Сравнение результатов моделирования (рис. 2) показывает, что расчет оптимальной САУ по модульному критерию качества $\left(Nk = 1\right)$ имеет ряд преимуществ. Во-первых, (как не раз отмечалось в литературе) переходные процессы в САУ, рассчитанные по среднеквадратическому критерию, имеют повышенную склонность к колебательности (рис. 2 *б*, график 1). Во-вторых, длительность переходных процессов в САУ, рассчитанных по модульному критерию, меньше (рис. 2 *а*).

Хочется отметить, что оптимизация САУ по критерию с минимизацией сигнала управления уменьшает колебательность переходных процессов в системе и снижает расход материальных и/или энергетических потоков на управление ТП (рис. 2 *а, б,* график 2). В случае синтеза САУ только с минимизацией управляющего воздействия $\left(q = 0\right)$ — длительность переходных процессов затягивается (рис. 2 *а, б,* график 3), однако запас устойчивости системы увеличивается, что может быть полезным, если ОУ в процессе работы меняет свои динамические свойства.

В справочнике [1] представлены зависимости для расчета САУ с модификациями ПИД регуляторов по многим критериям (Rovira (R), Edgar (E), Murrill (M), Zhuang (Z) и др.). На рис. 3 показаны переходные процессы в САУ с параметрами регулятора из [1] и рассчитанные по (2).



а) *б*)

Рис. 3. Переходные процессы в САУ с ПИ регулятором: 1*а* — (2), $Nk=1$, $q=1$, $r=0$; 2*а* — (R); 3*а* — (E); 1*б* — (2), $Nk=2$, $q=1$, $r=0$; 2*б* — (M); 3*б* — (Z)

Проведено сравнение результатов моделирования переходных процессов в системе управления с использованием предложенных и существующих функциональных зависимостей.

Из переходных процессов в САУ (рис. 3) видно, что полученные в статье расчетные формулы обеспечивают наилучшее значение критерия качества. Также к преимуществам полученных зависимостей можно отнести их простоту и отсутствие степенных функций.

Расчетные формулы отличаются от существующих простой структурой, высокой точностью поиска и обеспечивают эффективное управление. Полученные расчетные формулы рекомендуется применять специалистам по автоматизации для проектирования систем управления и оптимизации существующих.

В дальнейшем планируется получить функциональные зависимости оптимальных настроек цифровых ПИ и ПИД регуляторов в САУ, где динамические свойства ОУ представляются апериодическим звеном первого и второго порядков с запаздыванием.

Список литературы

1. O'Dwyer A. Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules. — Dublin Institute of Technology, 2006. — 545 p.
2. Голінко І. М. Синтез оптимальних систем керування із мінімізацією керуючого впливу // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. — 2012. — №2 (54), — С. 79–88.
3. Голінко І. М., Кубрак А. І. Моделювання та оптимізація систем керування. — Кам.-Под.: Рута, 2012. — 262 с.

ПРО ОДНУ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВУ ЗАДАЧУ З НЕОБМЕЖЕНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

С. О. Горбонос
Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара,
Дніпропетровськ, Україна
gorbonos.so@gmail.com

Досліджується крайова задача для параболічної системи з необмеженими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} y_t - \operatorname{div}(\nabla y + A(x)\nabla y) = f \text{ на } \Omega \times [0,T], \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} = u \text{ на } \Gamma \times [0,T], \\ y(t_0, x) = y_0 \in L^2(\Omega) \text{ на } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

де Ω — обмежена множина простору $\mathbb{R}^N$, а Γ — її межа, $f \in L^2\big(0,T; H^{-1}(\Omega)\big)$ і $u \in L^2\big(0,T; L^2(\Gamma)\big)$ — задані функції, а A — кососиметрична матриця така, що її коефіцієнти належать до простору $L^2(\Omega)$. Надалі через $L^p(0,T;V)$ будемо позначати простір, який наділений нормою

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt\right)^{1/p},$$

де V — простір Соболєва, а u — вимірна функція така, що $u\colon [0,T] \to V$ і $1 \le p < \infty$. В свою чергу, через $C(0,T;V)$ будемо позначати банахів простір, який складається з усіх неперервних функцій $u\colon [0,T] \to V$ таких, що

$$\|u\|_{C(0,T;V)} = \max_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_V.$$

Особливість даного класу задач полягає в тому, що матриця потоку є кососиметричною, а її коефіцієнти належать до простору $L^2(\Omega)$. У такому разі задача (1) не є коректною, тому метою роботи було встановити умови, за яких поставлена задача є розв'язною.

Спочатку введемо до розгляду таку форму:

$$[y, \varphi] = \int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y)_{\mathbb{R}^N} \, dxdt \tag{2}$$

для будь-якого $\mathrm{y} \in \mathrm{L}^2\big(0,\mathrm{T}; \mathrm{H}_0^1(\Omega)\big)$ і $\varphi \in \mathrm{C}^\infty\big(0,\mathrm{T}; \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)\big)$. Оскільки форма (2) необмежена, то введемо до розгляду множину D, яка складається з елементів $\mathrm{y} \in \mathrm{L}^2\big(0,\mathrm{T}; \mathrm{H}_0^1(\Omega)\big)$ таких, що має місце нерівність

$$\left|\int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y)_{\mathbb{R}^N} \, dxdt\right| \le c(y) \left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $c(\mathrm{y})$ — стала, яка залежить від y.

Тепер наведемо означення слабкого розв'язку задачі (1).

Означення 1. Слабким розв’язком задачі (1) для $\mathrm{A}(\mathrm{x}) \in \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbb{S}^{\mathrm{N}})$, них $\mathrm{u} \in \mathrm{L}^2\big(0,\mathrm{T};\mathrm{L}^2(\Gamma)\big)$ і $\mathrm{f} \in \mathrm{L}^2\big(0,\mathrm{T};\mathrm{H}^{-1}(\Omega)\big)$ будемо називати функцію $\mathrm{y} = \mathrm{y}(\mathrm{x},\mathrm{t}) \in \mathrm{L}^2\big(0,\mathrm{T};\mathrm{H}_0^1(\Omega)\big)$ таку, що $\mathrm{y}_\mathrm{t} \in \mathrm{L}^2\big(0,\mathrm{T};\mathrm{H}^{-1}(\Omega)\big)$ має місце рівність

$$\int_0^{\mathrm{T}}\int_{\Omega} \mathrm{y}_\mathrm{t}\varphi\,\mathrm{dxdt} + \int_0^{\mathrm{T}}\int_{\Omega} (\nabla\varphi, \nabla\mathrm{y} + \mathrm{A}\nabla\mathrm{y})_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}}\,\mathrm{dxdt}$$

$$= \int_0^{\mathrm{T}}\int_{\Omega} \mathrm{f}\varphi\,\mathrm{dxdt} + \int_0^{\mathrm{T}}\int_{\Gamma} \mathrm{u}\varphi\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{\mathrm{N}-1}\mathrm{dt}$$

для любого $\varphi \in \mathrm{C}^\infty\big(0,\mathrm{T};\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)\big)$ і виконується умова

$$\mathrm{y}(\mathrm{x},\mathrm{t}_0) = \mathrm{y}_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega) \text{ на } \Omega.$$

Враховуючи означення множини D, було встановлено наступний результат.

Твердження 1. Нехай $u \in L^2\big(0,T;L^2(\Gamma)\big)$ і $f \in L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big)$ — задані функції, а $A(x) \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$. Якщо $y \in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$ — слабкий розв'язок задачі (1) в сенсі означення 1, то $y \in D$.

Далі наведемо підхід, який дозволяє наблизити розв’язки вихідної задачі розв’язками апроксимаційних початково-крайових задач.

Отже, нехай $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Omega;\mathbb{S}^N)$ — послідовність кососиметричних матриць така, що

$$A_k \to A \text{ сильно в } L^2(\Omega;\mathbb{S}^N).$$

Далі для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ з кожною матрицею A_k пов’яжемо наступну початково-крайову задачу:

$$\begin{cases} y_t - \operatorname{div}(\nabla y + A_k(x)\nabla y) = f \text{ на } \Omega \times [0,T], \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} = u \text{ на } \Gamma \times [0,T], \\ y(t_0,x) = y_0 \in L^2(\Omega) \text{ на } \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

В результаті, дослідження послідовності задач (3) і застосування методу Гальоркіна, отримано такий результат:

Теорема 1. Нехай $u \in L^2\big(0,T;L^2(\Gamma)\big)$ і $f \in L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big)$. Тоді для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ задача (3) має єдиний розв’язок $y^k \in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$, для якого мають місце оцінки:

$$\|y^k\|^2_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + \frac{1}{2}\|y^k(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\le \left(C\|f\|_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)} + C_1\|u\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)}\right)$$

$$\cdot\left\{C\|f\|_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)} + C_1\|u\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right\} + \frac{1}{2}\|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\|(y^k)'_t\|^2_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)} \le 2\|y^k\|^2_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + 2C_p^2\|f\|_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)}$$

$$+4C_pC\|f\|_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)}\|u\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)} + C_2\|u\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)}.$$

Беручи до уваги означення послідовності матриць $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, означення 1 і теорему 1, встановлено наступний результат:

Твердження 2. Нехай $u \in L^2\big(0,T;L^2(\Gamma)\big)$ і $f \in L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big)$ — задані функції, а $A(x) \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$. Нехай для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ $y^k \in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$ — відповідні розв'язки задач (3). Тоді

$$y^k \rightharpoonup y^* \text{ в } L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big),$$
$$(y^k)'_t \rightharpoonup (y^*)'_t \text{ в } L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big),$$
$$[y^*,y^*] \geq 0.$$

де y^*— слабкий розв'язок задачі (1).

Таким чином, встановлено, що розв'язок вихідної задачі можна наблизити розв'язками відповідних апроксимаційних задач, застосовуючи метод Гальоркіна і наближення матриці потоку A матрицями $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Omega;\mathbb{S}^N)$.

Список літератури

1. Salsa S. Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory. — Milan: Springer-Verlag, 2008.

2. Zhikov V. V. Remarks on the uniqueness of a solution of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations with lower-order terms // Functional Analysis and Its Applications — 2004, — No. 3 . — P. 173–183.

3. Kogut P. I. On attainability of optimal solutions for linear elliptic equations with unbounded coefficients / Kogut P. I., Kupenko O. P. // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Моделювання — 2012. — Вип. 4. — С. 63–82.

4. Cioranescu D. An Introduction to Homogenization / Cioranescu D., Donato P. — New York: Oxford university press, 1999.

ПРО ДЕЯКІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ДІЙСНИХ ФУНКЦІЙ

С. В. Горленко

Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна

Вступ. Нехай $f(x)$ — неперервна на інтервалі $(a;b)$ функція, $x_0 \in (a;b)$. Дійсне число λ (випадки $\lambda = \pm\infty$ не виключаються) називають *похідним числом* функції $f(x)$ у точці x_0, якщо знайдеться така послідовність $\{x_n\} \to x_0$, що існує

$$\lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lambda.$$

У цьому разі казатимемо, що похідне число λ одержане за послідовністю $\{x_n\}$. Множину всіх граничних значень різницевого відношення $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, коли $x \to x_0$ (тобто множину всіх похідних чисел функції $f(x)$ у точці x_0) називатимемо *множиною похідних чисел* (*похідною множиною*) функції $f(x)$ у точці x_0 і позначати $\mathfrak{M}(f;x_0)$.

Зауважимо, якщо функція $f(x)$ має скінченну або нескінченну похідну $f'(x_0)$, то

$$\mathfrak{M}(f;x_0) = f'(x_0).$$

Множину $\mathfrak{M}(f;x_0)$ можна означити ще так. Позначмо через $M_n^+(f;x_0)$ множину різницевих відношень

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

де $0 < \Delta x < \dfrac{1}{n}$.

Розгляньмо перетин усіх можливих множин $M_n^+(f;x_0)$, який позначимо

$$\mathfrak{M}^+(f;x_0) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n^+(f;x_0).$$

Можна перевірити, що множина $\mathfrak{M}^+(f;x_0)$ складається з усіх правосторонніх похідних чисел функції $f(x)$ у точці x_0 і тільки з них. Множину $\mathfrak{M}^+(f;x_0)$ називатимемо *правою похідною множиною* функції $f(x)$ у точці x_0.

Так само запроваджується поняття лівої похідної множини $\mathfrak{M}^-(f;x_0)$. Очевидно, що

$$\mathfrak{M}(f;x_0) = \mathfrak{M}^-(f;x_0) \cup \mathfrak{M}^+(f;x_0).$$

За побудовою кожна з множин $\mathfrak{M}^{-}(f;x_0)$ та $\mathfrak{M}^{+}(f;x_0)$ є зв'язною та замкненою і тому є скінченним або нескінченним відрізком (зокрема точкою).

У праці автора [1] доведено, що багатозначне відображення

$$\Phi_f : x \to \mathfrak{M}^{-}(f;x)$$

мав в інтервалі $(a;b)$ множину другої категорії точок неперервності у такому сенсі: якщо x_0 є точкою цієї множини, то для довільної послідовності $\{x_n\} \to x_0$

$$\operatorname*{Ls}_{x_n \to x_0} \mathfrak{M}(f;x_0) \subset \mathfrak{M}(f;x_0),$$

де $\operatorname*{Ls}_{x_n \to x_0} \mathfrak{M}(f;x_0)$ означає верхню топологічну границю послідовності множин $\mathfrak{M}(f;x_n)$ [2].

Означення. Кажуть, що число λ розділяє числову множину $\mathfrak{M}$ і позначають $\lambda \,\mathrm{E}\, \mathfrak{M}$, якщо або $\lambda \in \mathfrak{M}$ або існують точки з $\mathfrak{M}$ які більші такі і менші за λ.

Сформулюємо узагальнення теореми Лаґранжа.

Узагальнена теорема Лаґранжа. Нехай $f(x)$ неперерервна на $[a;b]$. Тоді існує така точка $c \in (a;b)$, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \,\mathrm{E}\, \mathfrak{M}(f;c).$$

Деякі диференціальні властивості дійсних функцій

Теорема. Нехай $f(x)$ — неперервна на $(a;b), x_0 \in (a;b).$ Якщо

$$\operatorname*{Ls}_{x \to x_0} \mathfrak{M}(f;x) = A$$

(випадок $A = \pm\infty$ не виключається), то існує $f'(x_0) = A.$

Доведення. Нехай спершу $\Delta x > 0.$

Число $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \,\mathrm{E}\, \mathfrak{M}(f;c)$ за узагальненою теоремою Лаґранжа, де $x_0 < c < x_0 + \Delta x.$ Нехай тепер $\Delta x_n \to 0$ довільна додатна послідовність. Числа

$$\frac{f(x_0+\Delta x_n)-f(x_0)}{\Delta x_n} \,\mathrm{E}\, \mathfrak{M}(f;c_n), x_0 < c_n < x_0 + \Delta x_n.$$

Оскільки, за умовою, $\mathfrak{M}(f;c_n)$, коли $c_n \to x_0$, стягується в точку A, то те саме виконується і для послідовності різницевих відношень функції $f(x)$ у точці x_0. Звідси випливає, що похідне число, отримане по цій послідовності, збігається з $A.$ Оскільки послідовність $\Delta x_n \to 0$ була вибрана довільно, то це справедливо для будь-якого похідного числа. Отже, $\mathfrak{M}^+(f;x_0) = A$. Так само, можна довести, що $\mathfrak{M}^-(f;x_0) = A$.

Отже, $\mathfrak{M}(f;x_0) = A$. Тобто існує $f'(x_0) = A$.

Наслідок 1. Нехай $f(x)$ — неперервна в $(a;b), x_0 \in (a;b)$, множина $\mathfrak{M}(f;x)$ зв'язна для кожного $x \in (a;b)$. Тоді різницеві відношення функції $f(x)$ у точці є її похідними числами у близьких до x_0 точках і виконано включення

$$\mathfrak{M}(f;x_0) \subset \operatorname*{Ls}_{x \to x_0} \mathfrak{M}(f;x).$$

Доведення. Нехай

$$\lambda = \lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \in \mathfrak{M}(f;x_0).$$

Позначмо через $U_\delta(\lambda)$ δ-окіл точки λ. Нехай n є настільки великим, що число

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \in U_\delta(\lambda).$$

За узагальненою теоремою Лаґранжа число $\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ розділяє $\mathfrak{M}(f;c_n)$ і завдяки зв'язності $\mathfrak{M}(f;c_n)$ йому належить. Отже, в довільному околі точки λ знайдуться точки з $\mathfrak{M}(f;x)$ при деякому x, достатньо близькому до x_0. Звідси випливає, що $\lambda \in \operatorname*{Ls}_{x \to x_0} \mathfrak{M}(f;x)$. Унаслідок довільності λ дістаємо

$$\mathfrak{M}(f;x_0) \in \operatorname*{Ls}_{x \to x_0} \mathfrak{M}(f;x).$$

Наслідок 2. Нехай $f(x)$ — неперервна в $(a;b)$ і $\mathfrak{M}(f;x)$ — зв'язна для кожного $x \in (a;b)$. Тоді в точках x_0 множини другої категорії в інтервалі $(a;b)$ правдива рівність

$$\mathfrak{M}(f;x_0) = \operatorname*{Ls}_{x \to x_0} \mathfrak{M}(f;x).$$

Твердження випливає з того, що в точках x_0 множини другої категорії в $(a;b)$ виконується включення $\operatorname*{Ls}_{x \to x_0} \mathfrak{M}(f;x) \subset \mathfrak{M}(f;x_0)$ і наслідку 1.

Список літератури

1. Горленко С. В. Обобщенная теорема о точках непрерывности производной и его приложении в теории аналитических функций. — Десятая математическая школа, Киев, 1974. — С. 260–269.

2. Куратовский К. Топология. — Т. 1. — М., 1966.

3. Горленко С. В. О некоторых дифференциальных свойствах вещественных функций. — УМЖ, 1977. — **29**, № 2. — С. 246–249.

ПРО ОДНУ МАТЕМАТИЧНУ МОДЕЛЬ В СУМІЖНИХ НАУКАХ

В. В. Громова, Л. В. Барановська

Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна

Математична фізика — загальна назва математичних методів дослідження і розв’язання диференціальних рівнянь, які виникають, зокрема, у фізиці. Теорія математичних моделей фізичних явищ займає особливе положення і у математиці, і у фізиці, перебуваючи на стику цих наук. Математична фізика тісно зв’язана з фізикою в тій частині, яка стосується побудови математичної моделі, і водночас математична фізика — розділ математики, оскільки методи дослідження моделей є математичними.

Методи математичної фізики як теорії математичних моделей фізики почали в кінці XVII ст. інтенсивно розроблятися в працях Ісаака Ньютона зі створення основ класичної механіки, всесвітнього тяжіння, теорії світла. Подальший розвиток (XVIII — I-а пол. XIX ст.) методів математичної фізики та їх успішне застосування до вивчення математичних моделей величезного обсягу різних фізичних явищ зв’язані з іменами Жозефа Луї Лагранжа, Леонадра Ейлера, П’єра Симона Лапласа, Жозефа Фур’є, Карла Гауса, Бернгарда Рімана, М. В. Остроградського та інших учених. Великий внесок до розвитку методів математичної фізики внесли О. М. Ляпунов і В. А. Стєклов. З II пол. XIX ст. методи математичної фізики успішно використовувалися для вивчення математичних моделей фізичних явищ, зв’язаних з різними фізичними полями і хвильовими функціями в електродинаміці, акустиці, теорії пружності, гідро- й аеродинаміці та інших напрямках дослідження фізичних явищ у суцільних середовищах [1, 2].

Авторами досліджено модель формування волокнистих композитів типу $\mathrm{LaB_6\text{-}TiB_2,ZrB_2,HfB_2,....}$ методом направленої кристалізації евтектиків [3]. Такі композити одержано в Інституті проблем матеріалознавства НАН України та побудовано модель у вигляді задачі Стефана. Складові композита: *A* — матриця (наприклад, $\mathrm{LaB_6}$), *B* — волокна (наприклад, ZrB_2), Задача полягає в знаходженні температур $T_1\left(x,t\right)$, $T_2\left(x,t\right)$ (до кристалізації і після) з рівнянь

$$\lambda\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}-\rho c_l v\frac{\partial T_1}{\partial x}-\rho c_l\frac{\partial T_1}{\partial t}=0,\qquad 0\le x\le S\left(t\right),$$
$$\lambda_s\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}-\rho_s c_s v\frac{\partial T_2}{\partial x}-\rho_s c_s\frac{\partial T_2}{\partial t}=0,\qquad S\left(t\right)\le x\le l.$$

Методом потенціалів [4, 5] побудовано розв’язок даної задачі при початкових та граничних умовах:

$$T_1\left(x,0\right)=T_1\left(x\right)=T_0,\ \ 0\le x<l,\quad T_2\left(l,0\right)=T_l,$$
$$T_1\left(S_0\right)=T_l\left(S_0\right)=T_c,\qquad S\left(t=0\right)=S_0=l-\varepsilon.$$

$$T_1\left(0,t\right)=T_0>T_c,\qquad T_2\left(l,t\right)=T_l<T_c,\qquad t\geq 0,$$
$$T_1\left(S\left(t\right),t\right)=T_2\left(S\left(t\right),t\right)=T_c,\qquad t\geq 0,$$

T_c – температура кристалізації.

$$\lambda\frac{\partial T_1}{\partial x}\bigg|_{x=S-0}-\lambda_S\frac{\partial T_2}{\partial x}\bigg|_{x=S+0}=\sigma\dot{S}\left(t\right),\qquad \sigma=\frac{4\gamma c_0}{d}+\rho q,\qquad \dot{S}\left(t\right)<0,$$

d – діаметр волокна, c_0 – концентрація складової B.

Список літератури

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. — 512 с.

2. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. — М.: Мир, 1982-1984. — 488—384 с.

3. Парфеньева Л. С., Смирнов И. А., Падерно В. Н., Падерно Ю. Б., Филиппов В. Б., Ежовский А., Муха Я., Мисёрик Х. Механический фазовый переход в композите 79% LaB_6+21%ZrB_2 // Физика твердого тела. — 1995. — Т. 37, № 6. — С. 1724–1728.

4. Белоносов С.В. Применение теории потенциалов к одномерным задачам Стефана. В кн.: Прикладной численный анализ и математическое моделирование. — Владивосток: ДВО АН СССР, 1989. — С. 3–12.

5. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968. — 427 с.

НАБУТТЯ НАВИЧОК МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ЗАПОРУКИ СТІЙКОСТІ ПРОФЕСІЙНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ ФАХІВЦІВ З ПРОГРАМНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ

О. М. Дубініна
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна
vovochka88@ukr.net

Моделювання – це не тільки важливий метод наукового пізнання, але й необхідний інструмент професійної діяльності майбутніх фахівців індустрії програмної продукції (рис. 1), що навчаються за напрямом підготовки «програмна інженерія» у вищих навчальних закладах України. Оскільки майже вся професійна діяльність інженера з програмного забезпечення проходить в когнітивному середовищі і віртуальному просторі, то завжди потрібний інструмент переходу з одного в другий.

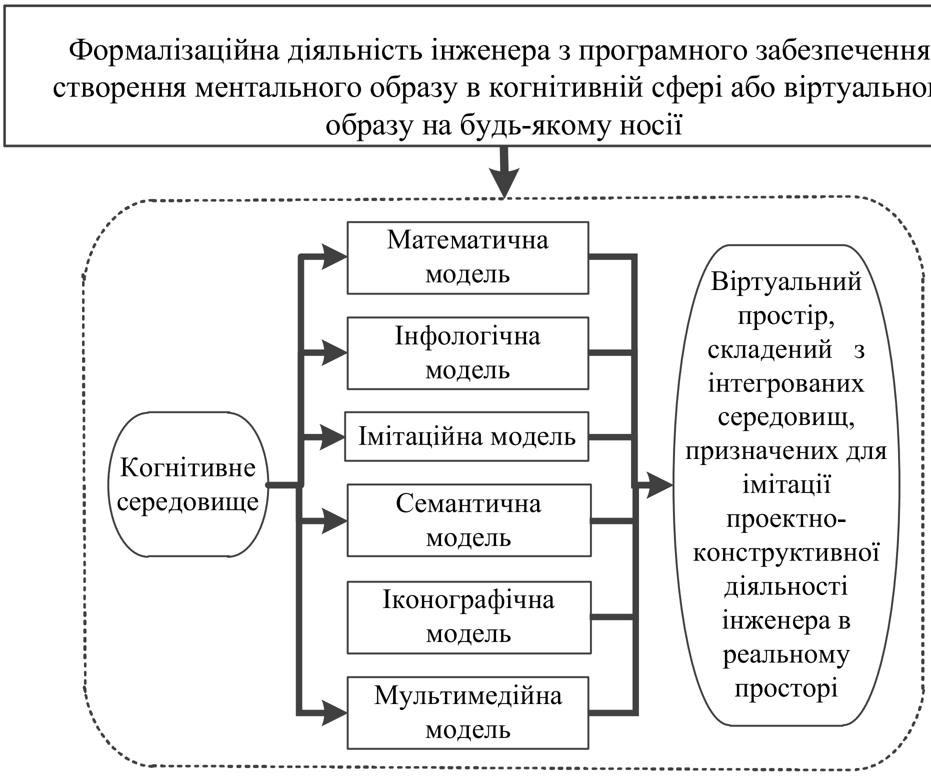


Рис. 1 Використання моделей в процесі створення програмного продукту

Навички ж моделювання, на нашу думку, доцільно відпрацьовувати саме в циклі математичних дисциплін, тому що будь-яке моделювання так чи інакше пов’язане з математикою через математичне мислення, мову або графічні та алгоритмічні конструкти.

Пошук вирішення поставленої проблеми для фахівця в області програмної інженерії починається з аналізу та синтезу. Це методи математичної логіки, необхідні для формалізації завдання.

Розглянемо приклад розробки програмного забезпечення для адаптивного круїз-контролю в автомобілі (рис. 2), щоб продемонструвати нерозривний зв'язок цього процесу з математичною компетентністю виконавця.

Адаптивний круїз-контроль (*ACC — adaptive cruise control*) — система, яка може автоматично підтримувати не тільки швидкість , але і безпечну дистанцію до автомобіля, що йде попереду, а також враховувати розмітку дорожнього покриття. За допомогою вбудованих в передню частину машини радарів, система вимірює відстань до автомобіля, який знаходиться попереду і у разі скорочення дистанції, зменшує швидкість і якщо необхідно злегка пригальмовує машину. Як тільки відстань збільшується, автомобіль знову набирає задану швидкість. Якщо відстань до перешкоди скорочується дуже швидко, система звуковим сигналом повідомляє водієві про необхідність примусового гальмування.

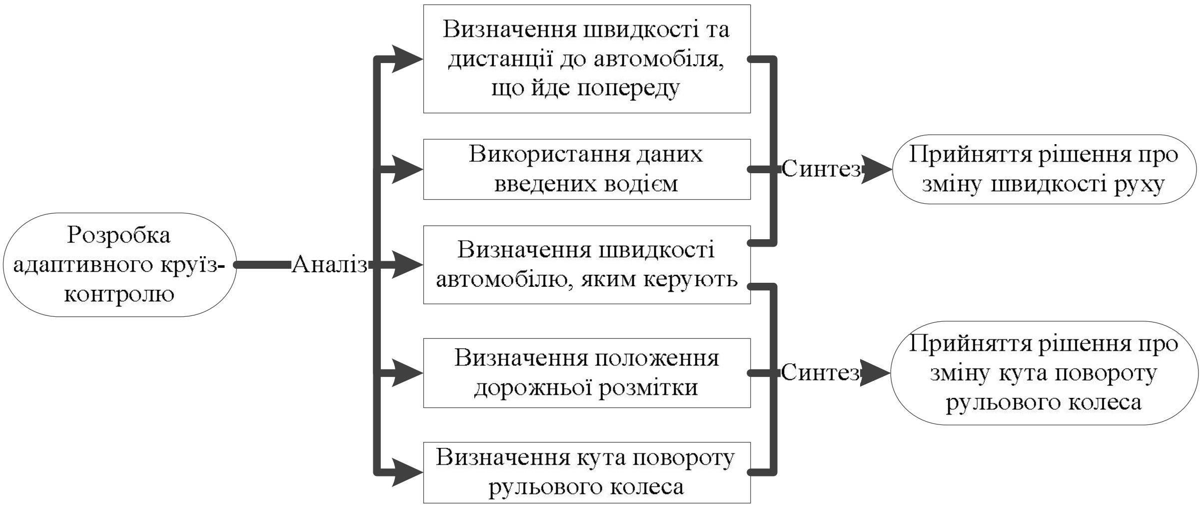


Рис. 2 Використання методів аналізу та синтезу для вирішення проблеми розробки адаптивного круїз-контролю

Отримавши на вхід проблему, формулюються два основні завдання: прийняття рішення про зміну швидкості руху автомобіля та про зміну повороту рульового колеса. Вирішення цих двох задач неявні та досить складні, щоб знайти їх одразу. Для того щоб отримати результат, основне завдання методом аналізу розбивається на відносно прості, серед яких визначення швидкості та дистанції до автомобіля, що йде попереду, кута повороту рульового колеса і т. п. Ці завдання вирішуються за допомогою простих математичних формул. Потім результати методом синтезу об'єднуються в окремі групи, а використовуючи ці дані вже можна вирішити поставлені раніше задачі: прийняття рішення про зміну швидкості руху автомобіля та про зміну повороту рульового колеса.

Задля вирішення професійної проблеми інженер з програмного забезпечення залучається в основному до трьох видів діяльності, а саме: формалізаційної, проективно-конструктивної та виконання мети і отримання результату.

Отже спочатку постає необхідність формалізації проблеми. Для того щоб розпочати процес формалізації потрібно створити ментальний образ у когнітивній сфері. Цей шлях вже було виконано на етапі аналізу та синтезу. Потім цей образ за допомогою формальної мови потрібно перенести у віртуальний простір. Для цього використовуються формальні моделі. В сучасному стандарті програмної інженерії SWEBOOK виділяються 6 основних моделей: математична, інфологічна, імітаційна, семантична, іконографічна, мультимедійна.

Математична модель дозволяє сформулювати завдання в зрозумілій, чіткій формі та перетворює задачу з будь-якої області знань на математичну [1, с. 42].

Наведемо математичну модель адаптивного круїз-контролю. Для визначення зміни швидкості вводимо дані, які задав водій: 1) v_{max} — максимальна швидкість автомобілю; 2) d_{min} — мінімальна дистанція до автомобілю, що йде попереду. Тоді

$$v = \frac{\left(v_1 - v_2\right)^2}{2 \times \left(d - d_{\min}\right)} \times \begin{cases} -1, \; v_2 - v_1 < 0; \\ \;\;1, \; v_2 - v_1 \geq 0; \end{cases} v_{new} = v_1 + v; \begin{cases} v_{new} \leq v_{\max}; \\ d \geq d_{\min}; \end{cases}$$

де

v_1 — швидкість автомобіля, яким керують; d — відстань до автомобілю, що йде попереду, яка вираховується методом радіолокації; v_2 — швидкість автомобіля, що йде попереду.

В контексті безпеки руху додамо деякі доповнення до реалізації задачі адаптивного круїз-контролю. Введемо кут повороту рульового колеса — β. За допомогою датчиків розпізнавання дорожньої розмітки визначається кут α між дотичною до кривої дорожньої розмітки та напрямом руху автомобіля, коли він входить у поворот. Для цього визначається точка перетину дотичної з кривою (М), вона повинна знаходитися на один метр далі початку кривої. Знаходимо тангенс кута α як похідну від кривої дорожньої розмітки в точці М.

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(M); \alpha = \operatorname{arctg}\left[f'(M)\right] \Rightarrow \gamma = \alpha - \beta,$$

де γ — кут, на який потрібно повернути кермове колесо.

Задаються також обмеження для швидкості необхідні для безпечного проходження повороту:

$$\begin{cases} 11^\circ \leq \gamma \leq 22^\circ; \\ v \leq 130; \end{cases} \begin{cases} 22^\circ \leq \gamma \leq 45^\circ; \\ v \leq 110; \end{cases} \begin{cases} 45^\circ \leq \gamma \leq 67^\circ; \\ v \leq 90; \end{cases} \begin{cases} 67^\circ \leq \gamma \leq 22^\circ; \\ v \leq 70; \end{cases} \begin{cases} 90^\circ < \gamma; \\ v \leq 60. \end{cases}$$

Склавши математичну модель із досить простих формул, осягнення всіх інших видів моделювання для студентів спрощується, з'являється бажання і необхідність у пошуку відмінностей, корисності та переваг різних моделей для певних завдань. А це в свою чергу сприяє творчому підходу в отриманні професійних знань. Також слід зауважити, що при всій простоті моделі були використані знання із різних розділів математики, використані прийоми логічного та алгоритмічного мислення. Оволодівши мистецтвом логічного міркування на заняттях з математики у майбутніх фахівців з'являється можливість отримувати з його допомогою надійні висновки при вирішенні практично всіх професійних завдань. Це вже свідчить про необхідність високого рівню математичної культури майбутніх інженерів з програмного забезпечення.

При створенні інших видів моделей, а саме інфологічної, імітаційної, семантичної, іконографічної, мультимедійної також використано багато компетенцій, які формуються циклом математичних дисциплін. Серед них абдуктивна компетенція, до якої відносимо серіацію, класифікацію, порівняння; індуктивна компетенція, що розвиває навички уподібнення, аналогії, узагальнення, пошуку причинності, конкретизації; мовна компетенція; дедуктивна компетенція, що відповідає за розвиток логічного мислення; абстрагувальна компетенція, яка свідчить про моделювання та структуризацію знань.

Пройшовши перший формалізаційний етап розробки програмного забезпечення можна розпочати наступні. Так на другому етапі конструюється алгоритм рішення проблеми, а на третьому етапі проходить виробництво програмного продукту у віртуальному просторі.

Підсумовуючи вище сказане, зазначимо, що в процесі математичного моделювання, навички якого формуються під час засвоєння професійно спрямованого циклу математичних дисциплін, студенти мають змогу отримати знання про принципи та методи, які дозволяють конструктивно зрозуміти всі інші види моделювання, що обов’язково зустрічаються на протязі отримання вищої професійної освіти за напрямом підготовки «програмна інженерія». В підтвердження цих слів нами було проведене педагогічне експериментальне дослідження, в якому методами кореляційного аналізу доведено, що отримання компетентного фахівця за вище названим напрямом безпосередньо залежить від його математичної підготовки [2, 3, 4].

Список літератури

1. *Глушков В. М.* Энциклопедия кибернетики. Том второй / *В. М. Глушков.* — К.: Главная редакция УСЭ, 1974. – 624 с.

2. *Дубініна О. М.* Дослідження взаємозв’язку успішності з дисциплін фундаментального циклу та циклу професійної підготовки бакалаврів з програмної інженерії на основі рангової кореляції / *О. М. Дубініна* // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт. — Вип. 39 .— Донецьк: Фірма ТЕАН, 2013. — С. 88–95.

3. *Дубініна О. М.* Деякі аспекти формування професійної компетентності з програмної інженерії у технічному вищому навчальному закладі / *О. М. Дубініна* // Проблеми сучасної педагогічної освіти. Серія: педагогіка і психологія. — Збірник статей: — Ялта: РВВ КГУ, 2013. — Вип. 40. — Ч. 1. — С.101–110.

4. *Дубініна О. М.* Об одном исследовании межпредметных связей / *О. М. Дубініна* // Материалы VIII Международной научно-практической конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых [«Новые подходы изучения психологических и педагогических наук»], (Москва, 22 – 23 марта 2013г.). — М.: Московский научный центр психологии и педагогики. — 2013. — 122 с. — С. 105–108.

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛИТ С АРМИРУЮЩИМ СЛОЕМ ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

В. К. Иноземцев, Р. В. Мищенко

Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю. А., Саратов, Россия
mdt@sstu.ru

В последнее время появились новые материалы — композиционные на основе углеродных, арамидных и стеклянных волокон (фиброармированными пластики, далее ФАП). Такие как: материалы системы Tyfo Fibrwrap, холсты MBrace Fib, ленты Sika CarboDur и т.д. Перед проектировщиками стоит проблема их использования для усиления конструкций. Этот материал в виде лент наклеивается на растянутой зоне изгибаемого элемента, образуя композитный слой внешнего армирования. Таким образом, получается расчетная схема изгибаемого элемента в виде двухслойной плиты средней толщины.

Уточненная расчетная модель такой двухслойной плиты, учитывает деформации поперечного сдвига для композитного слоя внешнего армирования. При этом для основного слоя двухслойной плиты принимается классическая гипотеза прямых нормалей.

Кинематическая гипотеза заключается в разложении перемещений в ряд в эквидистантных поверхностях:

$$U_i^k = U_i^0 + z\gamma_{0i}^k + z^2\gamma_{1i}^k + z^3\gamma_{2i}^k; \qquad \left(i = 1,2;\right)$$

Здесь U_i^k, U_i^0 — перемещения в эквидистантных и координатной поверхностях соответственно, γ_{ij}^k — искомые функции сдвига ($i = 1,2$), k – номер слоя.

Дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия получим на базе вариационного метода сведения трехмерной задачи теории плит к двумерной на основании вариационного принципа Э. Рейснера [1,2]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta_{u_j\sigma_{ij}}\left(R - T\right) - \delta A dt = 0$$

Здесь R – функционал Рейснера вида

$$R = \iint_S \left\{ \sum_{k=1}^{2} \int_{h_k} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left[\sigma_{ij}^k \xi_{ij}^k - \frac{1}{2} \Pi^k \left(\sigma_{ij}^k \right) \right] dx_3 \right\} dx_1 dx_2;.$$

где S – поверхность плиты.

$$\Pi^k(\sigma_{ij}^k) = a_{11}^k(\sigma_{11}^k)^2 + a_{22}^k(\sigma_{22}^k)^2 + 2a_{12}^k\sigma_{11}^k\sigma_{22}^k +$$
$$(G_{12}^k)^{-1}(\sigma_{12}^k)^2 + (G_{13}^k)^{-1}(\sigma_{13}^k)^2 + (G_{23}^k)^{-1}(\sigma_{23}^k)^2;$$

$$a^k_{ii} = (E^k_i)^{-1}; \quad a^k_{ij} = -\nu(E^k_i)^{-1}; \; i = 1,2; j = 1,2; i = j;$$

Кинетическая энергия T представима в виде:

$$T = \frac{1}{2}\iint\limits_S \left\{\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{h_k}\sum_{j=1}^{3}\rho_k(U^k_j)^2 dx_3\right\} dx_2 dx_1;$$

где ρ_k — плотность материала слоев.

Вариация работы внешних сил

$$\delta A = \frac{1}{2}\iint\limits_S \left\{\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{h_k}\sum_{j=1}^{3}\sigma^k_{ij}\delta U^0_j dx_3\right\} dx_2 dx_1 + \iint\limits_S P\delta U^0_3 dx_2 dx_1;$$

где первое слагаемое — работа контурных нагрузок, второе — работа поперечной нагрузки, приложенной на поверхности плиты.

Вариационное уравнение позволяет получить естественные условия на контуре двухслойных плит. Общее число естественных граничных условий, следующих из контурных интегралов, равно 16. При переходе к граничным условиям для однослойных пластин их число сократится до 12.

Эта система в случае статики описывает напряженно-деформированное состояние двухслойных плит.

Полагая равными нулю коэффициенты при независимых вариациях перемещений в вариационном уравнении и, вводя функцию усилий F, можно записать следующую систему пяти дифференциальных уравнений с учетом лишь инерции изгиба:

$$\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{h_k}\sigma^k_{ij}dx_3 = \delta_{ij}\nabla^2 F - F_{,ij}; \qquad \nabla^2 = \left(*\right)_{,11} + \left(*\right)_{,22};$$

$$M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} + P = 0$$

$$M^k_{11,1} + M^k_{12,2} - Q^k_1 = 0; \qquad M^k_{22,2} + M^k_{21,1} - Q^k_2 = 0;$$

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{h_k}\sigma^k_{ij} z dz; \qquad M^k_{ij} = \int\limits_{h_k}\sigma^k_{ij}\left(z - t_i\right)dz; \qquad Q^k_i = \int\limits_{h_k}\sigma^k_{i3}\left(1 - l_i\right)dz$$

$$t_i = \left(\frac{z^3 - \frac{3\delta_i}{2}z^2}{\left(h_2 - \delta_i\right)3h_2}\right); \qquad l_i = \left(\frac{\left(z^2 - \delta_i z\right)}{\left(h_2 - \delta_i\right)h_2}\right); \qquad \left(i, j, k = 1, 2\right)$$

Здесь: h_k — толщина k-го слоя, постоянные δ_i определяют положение нейтральной поверхности. Физические соотношения имеют вид:

$$\sigma_{ii}^k = \sum_{j=1}^{2} B_{ij}^k \xi_{ij}^k; \qquad \sigma_{ij}^k = 2G_{ij}^k \xi_{ij}^k; \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2;\ j = 3; \\ i = 1; \quad\ \ j = 2; \end{pmatrix}$$

$B_{ij}^k = E_i^k \,/\left(1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k\right)$ — коэффициенты упругости, E_i^k — модуль упругости в направлении x_1 и x_2; $\nu_{ij}^k\left(i, j = 1,2;\ i \neq j\right)$ — коэффициенты Пуассона. Полагаем, что материал основного слоя $\left(k = 1\right)$ изотропный, а материал второго слоя $\left(k = 2\right)$ будем считать трансверсально изотропным с низкой жесткостью на сдвиг.

Построенная кинематическая модель позволяет выполнить сравнительный анализ вариантов уравнений изгиба двухслойной плиты в зависимости от принимаемых кинематических гипотез для ее слоев.

Список литературы

1. Иноземцева О. В., Игнатьев А. С. Кинематическая модель двухслойных плит с армирующим слоем из композитного материала // Строительная механика строительных конструкций и сооружений. — 2012. — №4. — С. 44–48.

2. Reissner E. On a variational theorem in elasticity // J. Math and Phys., № 2, 1950.

ИЗГИБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ С ВНЕШНИМ АРМИРОВАНИЕМ КОМПОЗИТНЫМ СЛОЕМ

В. К. Иноземцев, Р. В. Мищенко

Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А., Саратов, Россия
mdt@sstu.ru

Рассматривается задача изгиба плиты, усиленной композитным слоем, представляющим собой пакет из слоев материала типа углепластика УОЛ 300 перемежающихся связующими слоями. Нормативная прочность УОЛ 300 при растяжении составляет 3155 МПа. Модуль упругости равен 240 ГПа. Таким образом, получается расчетная схема изгибаемого элемента в виде двухслойной плиты средней толщины.

Кинематическая модель для двухслойной плиты с изотропным слоем, описываемым на основе классической гипотезы Кирхгофа — Лява и композитным слоем, уточненной линейной модели с учетом деформаций поперечного сдвига приведена в работе:

Разрешающая система уравнений для продольно-поперечного изгиба удлиненной плиты будет:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[E_{12}^*\frac{d^2W}{dx^2}\right]-G_2h_2\left(\frac{d\gamma}{dx}+\frac{d^2W}{dx^2}\right)+P\frac{d^2W}{dx^2}=q$$

$$\frac{E_2^*h_2^3}{3}\frac{d^2\gamma}{dx^2}+\frac{dE_2^*}{dx}\frac{h_2^3}{3}\frac{d\gamma}{dx}-G_2h_2\left(\gamma+\frac{dW}{dx}\right)=0$$

Здесь: W,γ - функция прогиба плиты и функция сдвига в поперечном направлении. Жесткостные характеристики системы дифференциальных уравнений на основе деформационной теории пластичности.

В соответствии с [1] при выполнении расчета на основе нелинейной деформационной модели для определения напряженно-деформированного состояния используют полигональные аппроксимации диаграмм деформирования стали и бетона с деформационными характеристиками, отвечающими непродолжительному действию нагрузки в соответствии с [2] в зависимости от относительной влажности воздуха окружающей среды. Аппроксимируем полигональные диаграммы деформирования законом экспоненциального вида. Расчетные параметры диаграммы деформирования экспоненциального вида примем соответствующими полигональному закону деформирования бетона:

$$\sigma=\sigma_p\left(1-\exp\left(-\frac{e}{e_p}\right)\right)+Ge$$

где $\sigma_p=14.5; e_p=0,00045; G=0.$

Диаграмма деформирования для композитного слоя, составленного из волокон ФАП и связующего – закон линейного деформирования с расчетным модулем упругости, который рассчитывается в зависимости от соотношения этих составляющих композита $E_f = 120 \div 30$ ГПа. Примем

$$E_f = 30 \text{ ГПа}.$$

Рассмотрена задача изгиба двухслойной удлиненной плиты шарнирно закрепленной вдоль длинных сторон. Задача изгиба является достаточно сложной в связи с нелинейностью и различием диаграмм деформирования для растянутой и сжатой областей первого слоя изгибаемой плиты. Рассмотрим эпюры деформаций и напряжений по толщине в центральной по длине плиты точке.

Анализируя полученные результаты можно отметить незначительное влияние учета деформаций поперечного сдвига во втором слое на эпюру деформаций по толщине пластины. Это объясняется большой сдвиговой жесткостью материала второго слоя соответствующей изотропному материалу. Эпюра продольных напряжений по толщине пластины нелинейная в пределах первого слоя и изменяется по линейному закону во втором упругом слое. Положение нейтральной линии в силу несимметричности слоев смещается от эквидистантной поверхности во второй слой на расстояние 0.078h.

Сопоставим результаты расчета двухслойной пластины для трех значений модуля сдвига в поперечном направлении второго слоя $G_2 = 0.385E_2; 0.02E_2; 0.01E_2$.

Анализ показывает, что сдвиговая жесткость материала второго слоя существенно влияет на деформативность двухслойной пластины. Эпюра деформаций показывает существенное увеличение деформаций сжатия в первом слое вызванное снижением жесткости сдвига в поперечном направлении второго слоя.

Можно отметить снижение напряжений растяжения во втором слое и соответствующее увеличение напряжений сжатия в первом слое при снижении модуля сдвига материала второго слоя. Другими словами происходит перераспределение напряжений связанное с разгрузкой второго слоя и догружением первого слоя в связи со снижением сдвиговой жесткости второго слоя.

Список литературы

1. Иноземцева О. В., Игнатьев А. С. Кинематическая модель двухслойных плит с армирующим слоем из композитного материала // Строительная механика строительных конструкций и сооружений. — 2012. — №4. — С 44–48.

2. СП 52-101-2003 «Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры».

К РАСЧЕТУ ОБЩЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ И НАЧАЛЬНОГО ЗАКРИТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВЫСОТНОГО СООРУЖЕНИЯ НА УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ СЛОЕ ОСНОВАНИЯ

О. В. Иноземцева, В. В. Семко

Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А., Саратов, Россия
mdt@sstu.ru

Рассматривается исследование общей устойчивости и начального закритического поведения инженерного сооружения с высоко расположенным центром тяжести на плитном фундаменте, взаимодействующем с упруго-пластическим слоем основания.

Модель системы «сооружение-основание» строится на базе модели слоистого основания В. З. Власова [1]. Критерий устойчивости сооружения сформулирован на базе концепции бифуркационной устойчивости процессов деформирования. Проблема устойчивости сооружения на упруго-пластическом основании формулируется в рамках плоской задачи.

Уравнения модели основания в инкрементальной форме для системы «плита — слой основания» представляются в виде трех дифференциальных уравнений относительно приращения функции вертикальных перемещений поверхности слоя для трех областей интегрирования: при $x < 0$ и $x > L$ — области свободной поверхности слоя основания; при $0 < x < L$ — область контакта фундаментной плиты и слоя основания. Неоднородность в уравнении (параметр нагрузки от высотного сооружения) содержится в граничных условиях задачи. Так естественным условием для свободных краев плиты является равенство нулю изгибающего момента.

Условие неразрывности функции вертикального перемещения поверхности слоя основания на свободных краях плиты позволяет записать еще два условия, в которые входят обобщенные поперечные силы [1] и приращения опорных реакций сооружения на шаге нагружения.

Учет упруго-пластических деформаций основания на базе полученной инкрементальной системы уравнений требует для каждого этапа нагружения подсчитать матрицу жесткостных коэффициентов.

Для подсчета жесткостных коэффициентов необходимо конкретизировать нелинейные деформационные свойства грунтовой среды слоя основания, то есть установить связь между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций на шаге нагружения. Такая связь задается в виде нелинейной диаграммы деформирования $\sigma_i(e_i)$, что соответствует условию применения деформационной теории пластичности. Тогда элементы матрицы констант деформируемой среды основания на шаге нагружения E_{ij}, определяются по формулам инкрементальной теории наведенной неоднородности [2]:

$$E_{22} = \frac{4}{3}E_c + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_i^2}(E_k - E_c);\ E_{33} = \frac{1}{3}E_c + \frac{\tau^2}{\sigma_i^2}(E_k - E_c);$$

$$E_{23} = E_{32} = \frac{\sigma_z \tau}{\sigma_i^2}(E_k - E_c); \qquad (1)$$

Здесь E_c, E_k — секущий и касательный модули диаграммы деформирования. Разбивая область интегрирования сеткой, методом конечных разностей совокупность основных линеаризованных дифференциальных соотношений математической модели в инкрементальной форме сводим к системе алгебраических уравнений, решение которой осуществляем на основе пошаговой процедуры. Такой подход к исследованию устойчивости называется «прослеживанием» равновесных состояний системы с малыми начальными возмущениями [3]. В качестве малого начального возмущения здесь выступает начальный эксцентриситет высотного сооружения. При приближении нагрузки, действующей на систему, к критическому значению «крен» сооружения быстро возрастает и в части объема упругопластического слоя основания возникают зоны разгрузки, развитие которых определяет картину послебифуркационного закритического деформирования системы «основание — фундаментная плита — высотное сооружение». Получаемые при этом критические нагрузки соответствует критической нагрузке по критерию бифуркационной устойчивости (концепция Шенли) и критической предельной нагрузке (концепция Энгессера — Кармана).

Список литературы

1. Власов В.З. Избранные труды: В 3 т. — М: Наука, 1964. — Т. 3. — 407 с.

2. Петров В.В., Иноземцев В.К., Синева Н.Ф. Теория наведенной неоднородности и ее приложения к проблеме конструкций на неоднородном основании. — Саратов: СГТУ, 2002. — 260 с.

3. Петров В. В., Иноземцев В. К., Синева Н. Ф. Теория наведенной неоднородности и ее приложения к проблеме устойчивости пластин и оболочек. — Саратов: СГТУ, 1996. — 312 с.

К РАСЧЕТУ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОСНОВАНИЯ СИСТЕМЫ «ВЫСОТНОЕ СООРУЖЕНИЕ — ФУНДАМЕННАЯ ПЛИТА — СЛОЙ ОСНОВАНИЯ»

О. В. Иноземцева, В. В. Семко

Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю. А., Саратов, Россия
mdt@sstu.ru

Рассматривается задача бифуркационной устойчивости упругого процесса деформирования системы, объединяющей сооружение с высокорасположенным центром тяжести, фундаментную плиту и основание [1].

В данном случае строится математическая модель системы, объединяющая абсолютно жесткое сооружение на деформируемой фундаментной плите, взаимодействующей со слоем основания.

Иллюстрацией такого подхода будет модель, объединяющая уравнения Ляме для плоской задачи (1) и уравнения изгиба плиты (2), представленная в инкрементальной форме в приращениях:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Sigma}{\partial x} + \beta \nabla^2 \Delta U = 0 \\ \dfrac{\partial \Sigma}{\partial z} + \beta \nabla^2 \Delta W = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\Delta R_z(x) = -EJ\,\frac{\partial^4 \Delta W(x)}{\partial x^4} \tag{2}$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \Sigma = \frac{\partial \Delta U}{\partial x} + \frac{\partial \Delta W}{\partial z}.\ \beta = \frac{1-\bar{\mu}}{1+\bar{\mu}}; \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{1-\mu}.$$

где: $\Delta R_z\left(x\right)$ — приращение реактивного вертикального отпора на части поверхности основания, взаимодействующей с нагруженной фундаментной плитой, связанное с условием равновесия балки с величиной ее изгибной жесткости (EJ). Неоднородность в уравнении (параметр нагрузки от высотного сооружения) содержится в граничных условиях задачи изгиба фундаментной плиты. Так естественным условием для свободных краев плиты является равенство нулю приращения момента $\Delta M = 0$ и равенство приращения перерезывающей силы ΔQ приращению левой и правой опорных реакций сооружения на текущем шаге нагружения. Таким образом:

$$.\Delta M = EJ\,\frac{\partial^2 \Delta W_k}{\partial x^2} = 0; \qquad \Delta Q_k = -EJ\,\frac{\partial^3 \Delta W_k}{\partial x^3} = \Delta P_k^{0,L}.$$

где $\Delta P_k^{0,L}$- приращение левой (ΔP_k^0) и правой (ΔP_k^L) опорных реакций сооружения на k-м шаге нагружения:

$$\Delta P_k^{0,L} = \frac{\Delta P_k}{2}\left(1 - \frac{2H}{L^2}\sum_{n=0}^{k-1}\left(\Delta W_n^L - \Delta W_n^0\right)\right) \mp$$
$$\mp \frac{2H}{L^2}\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{\Delta P_n}{2}\right)\left(\Delta W_k^L - \Delta W_k^0\right);$$

Граничные значения для приращений функций перемещений принимаем нулевыми по всему контуру области за исключением границы поверхности основания.

Величина приращения вертикального давления, передаваемого на поверхность основания со стороны плиты, будет равна приращению вертикального отпора $\Delta R_z\left(x\right)$.

Для сведения проблемы устойчивости сооружения к задаче о собственных значениях на текущем k-м шаге нагружения следует по терминологии, принятой в литературе [1], «заморозить» параметр шага нагружения, то есть считать приращение ΔP_k равным нулю и выполнить дискретизацию дифференциальных операторов.

Линеаризация математической модели и применение метода дискретизации (метода конечных разностей) позволило авторам перейти к решению обобщенной алгебраической задаче на собственные значения:

$$A\left(z\right) = \lambda B\left(z\right).$$

где: z — неизвестные метода сеток (собственная функция), λ — собственное значение, A и B матрицы коэффициентов алгебраической задачи на собственные значения.

1. Иноземцев В. К. Общая устойчивость сооружений на неоднородном нелинейно-деформируемом основании: монография/ В. К. Иноземцев, Н. Ф. Синева, О. В. Иноземцева. Саратов: СГТУ, 2008. — 242 с.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ КОЛИВАННЯ СТРУНИ

М. М. Копець

Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна

optimal201214@yandex.ua

Розглядається задача мінімізації функціонала

$$I(u,z)=\frac{1}{2}\int\limits_0^l z^2\left(t_1,x\right)dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^l \frac{\partial z^2\left(t_1,x\right)}{\partial t}dx+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^l\left[z^2\left(t,x\right)+u^{\,2}\left(t,x\right)\right]dxdt \tag{1}$$

на розв'язках наступної крайової задачі

$$\frac{\partial^2 z\left(t,x\right)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 z\left(t,x\right)}{\partial x^2}+u\left(t,x\right), \tag{2}$$

$$z\left(t_0,x\right)=f\left(x\right),\ \frac{\partial z\left(t_0,x\right)}{\partial t}=g\left(x\right),\ z\left(t,0\right)=0,\ z\left(t,l\right)=0, \tag{3}$$

де дійсні числа $t_0\geq 0$, $t_1>t_0$, $l>0$ задані; функції $f\left(x\right)\in L_2\left(0,l\right)$ і $g\left(x\right)\in L_2\left(0,l\right)$ також відомі. Параметр $u\left(t,x\right)$ називається *допустимим керуванням*, якщо $u\left(t,x\right)\in L_2\left(\Omega\right)$, де множина Ω задана наступним чином

$$\Omega=\left\{\left(t,x\right):t\in\left[t_0,t_1\right],x\in\left[0,l\right]\right\}.$$

Допустиме керування $u\left(t,x\right)$, на якому реалізується мінімум функціонала (1), називається *оптимальним керуванням*. З допомогою методу множників Лагранжа [1, с. 31] отримуємо наступне твердження.

Теорема 1. Оптимальне керування $u\left(t,x\right)$ в задачі оптимізації (1)–(3) єдине і визначається із системи співвідношень

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial^2 z\left(t,x\right)}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 z\left(t,x\right)}{\partial x^2}+u\left(t,x\right),\\ z\left(t_0,x\right)=f\left(x\right),\dfrac{\partial z\left(t_0,x\right)}{\partial t}=g\left(x\right),z\left(t,0\right)=0,z\left(t,l\right)=0,\\ \dfrac{\partial^2 p\left(t,x\right)}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 p\left(t,x\right)}{\partial x^2}+z\left(t,x\right),\\ p\left(t_1,x\right)=\dfrac{\partial z\left(t_1,x\right)}{\partial t},\dfrac{\partial p\left(t_1,x\right)}{\partial t}=-z\left(t_1,x\right),\\ p\left(t,0\right)=0,p\left(t,l\right)=0,u\left(t,x\right)=-p\left(t,x\right),\end{array}\right. \tag{4}$$

де функція $p\left(t,x\right)$ — множник Лагранжа.

Припускаючи, що мають місце залежності

$$\begin{cases} p\left(t,x\right)=\int\limits_0^l R_1\left(t,x,y\right)z\left(t,y\right)dy+\int\limits_0^l R_2\left(t,x,y\right)\dfrac{\partial z\left(t,y\right)}{\partial t}dy, \\ \dfrac{\partial p\left(t,x\right)}{\partial t}=\int\limits_0^l R_2\left(t,x,y\right)z\left(t,y\right)dy+\int\limits_0^l R_3\left(t,x,y\right)\dfrac{\partial z\left(t,y\right)}{\partial t}dy \end{cases}$$

на підставі системи рівнянь (4) приходимо до такого висновку.

Теорема 2. Функції $R_i\left(t,x,y\right),\ i=1,2,3,4,$ задовольняють системі інтегро-диференціальних рівнянь

$$R_1\left(t,l,y\right)=0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R_1\left(t,x,y\right)}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 R_2\left(t,x,y\right)}{\partial y^2}-R_3\left(t,x,y\right)-\int\limits_0^l R_2\left(t,x,s\right)R_1\left(t,s,y\right)ds=0, \\ \dfrac{\partial R_2\left(t,x,y\right)}{\partial t}+R_1\left(t,x,y\right)-R_4\left(t,x,y\right)-\int\limits_0^l R_2\left(t,x,s\right)R_2\left(t,s,y\right)ds=0, \\ \dfrac{\partial R_3\left(t,x,y\right)}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 R_1\left(t,x,y\right)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 R_4\left(t,x,y\right)}{\partial y^2}-\int\limits_0^l R_4\left(t,x,s\right)R_1\left(t,s,y\right)ds-\delta\left(x-y\right)=0, \\ \dfrac{\partial R_4\left(t,x,y\right)}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 R_2\left(t,x,y\right)}{\partial x^2}+R_3\left(t,x,y\right)-\int\limits_0^l R_4\left(t,x,s\right)R_2\left(t,s,y\right)ds=0 \end{cases}$$

де $\delta\left(x\right)$ — дельта-функція Дірака. Для цих функцій виконуються наступні додаткові умови

$$R_1\left(t_1,x,y\right)=0,\ R_2\left(t_1,x,y\right)=\delta\left(x-y\right),$$

$$R_3\left(t_1,x,y\right)=-\delta\left(x-y\right),\ R_4\left(t_1,x,y\right)=0,$$

$$R_1\left(t,0,y\right)=0,\ R_2\left(t,0,y\right)=0,$$

$$R_1\left(t,l,y\right)=0,\ R_2\left(t,l,y\right)=0.$$

1. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1977. — 480 с.

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ’ЯЗОК НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПІДКРІПЛЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

П. З. Луговий, В. Ф. Мейш, Ю. А. Мейш
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
vfmeish@gmail.com.ua

Урахування дискретності підкріплюючих ребер в оболонкових конструкціях приводить до значної неоднорідності НДС (напружено — деформований стан) конструкцій як при статичних, так і при динамічних навантаженнях. В ряді випадків, внаслідок суттєвого згину обшивки, параметри НДС, обчислені в рамках лінійної теорії, не завжди адекватно описують стан оболонки.

У роботі [1] розглянута задача про визначення максимальних кільцевих напружень, які виникають в круговій замкненій циліндричній оболонці, підкріпленій регулярною системою дискретно розміщених повздовжніх ребер під дією внутрішнього статичного тиску та проведено аналіз впливу геометрично нелінійних факторів на НДС конструкції.

Метою даного розділу є чисельне дослідження динамічної поведінки циліндричних оболонок з дискретним підкріпленням при внутрішньому імпульсному навантаженні та аналіз впливу врахування геометрично нелінійних параметрів на НДС оболонки. Розглядається система рівнянь руху теорії дискретно підкріплених оболонок в рамках найпростішого варіанту геометрично нелінійної теорії оболонок та стержнів типу Тимошенка [2, 3].

Розглядалася задача динамічної поведінки поздовжньо підкріпленої циліндричної оболонки при нестаціонарному навантаженні. Рівняння коливань вихідної неоднорідної конструкції має вигляд:

— у гладкій області

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + P_1 = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + \frac{\overline{T}_{23}}{R} + P_2 = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \overline{T}_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{T}_{23}}{\partial y} - \frac{T_{22}}{R} + P_3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2};$$

$$\overline{T}_{13} = T_{13} + T_{11}\theta_1 + S\theta_2, \qquad \overline{T}_{23} = T_{23} + T_{22}\theta_2 + S\theta_1,$$

— на i-й лінії розриву вздовж осі Ox

$$\frac{\partial T_{11i}}{\partial x} + [S] = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \right), (2)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial x} + [T_{22}] = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \right),$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{13i}}{\partial x} + [\bar{T}_{23}] = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11i}}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{11i}}{\partial x} - T_{13i} + [H] = \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \right],$$

$$\frac{\partial M_{12i}}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial \bar{T}_{11i}}{\partial x} + [M_{22}] = \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{kri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \right],$$

$$\bar{T}_{13i} = T_{13i} + T_{11i}\theta_{1i}, \qquad \bar{T}_{12i} = T_{12i} + T_{11i}\theta_{2i}.$$

Позначення в рівняннях (1), (2) прийнято згідно [2, 3].

Припускається, що регулярно дискретно підкріплена циліндрична оболонка скінченої довжини жорстко защемлена по торцях під дією внутрішнього нормального нестаціонарного навантаження.

Чисельний алгоритм розв'язку задач теорії підкріплених оболонок базується на скінченно-різницевій схемі. Для побудови різницевих співвідношень застосовується інтегро-інтерполяційний спосіб отримання різницевих рівнянь по просторовим координатах X та Y і явна скінченно-різницева апроксимація по часовій координаті [2–4]. Будується окремо чисельний розв'язок в гладкій області (1) і на лініях просторових розривів (2) [2, 3].

При розрахунках покладалися наступні геометричні та фізико-механічні параметри конструкції:

$$R / h = 400;\ R / L = 2,4;\ E_i = E_{11};\ E_{22} = E_{11};$$

$$\nu_1 = 0,3;\ F_i = 7h \times 3h;\ I = 40.$$

Внутрішній нормальний тиск задавався наступним чином:

$$P_3 = A[\eta(t) - \eta(t - T)],$$

де A — амплітуда навантаження; T — тривалість навантаження, причому

$$E_1 / A = 1,75 \cdot 10_5;\ T = 5L / c_{11};\ c_{11}^2 = E_{11} / [1 - \nu_1\nu_2].$$

Було розглянуто два варіанти результатів НДС нестаціонарної поведінки повздовжньо підкріпленої циліндричної оболонки (геометрично нелінійний та лінійний). Як показали обчислення, максимальні величини параметрів НДС спостерігаються по твірній по середині гладкої частини між ребрами. В таблицях 1–3 частково наведені результати цих обчислень. Перший рядок таблиць відповідає значенням часу $t = n \cdot T$, $n = \overline{1, 10}$, де T — тривалість нестаціонарного навантаження.

У другому рядку наведені максимальні значення відповідних величин по твірній по середині гладкої частини між ребрами (таблиця 1 відповідає величинам u_3 / h, таблиця 2 — величині ε_{22}, таблиця 3 — величині σ_{22} / E_{11}) по нелінійній теорії. У третьому рядку таблиць наведені величини згідно лінійної теорії.

Таблиця 1

t	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
нелін.	1,2	-1,65	-1,63	1,05	-2,2	0,65	-0,7	-3,15	-3,3	-0,9
лін.	1,81	-1,05	-1,77	2,8	-1,8	2,4	-0,4	-3,15	2,2	0,9

Таблиця 2

t	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
нелін.	2,55	-0,7	-1,4	2,5	-1,1	0,82	1,25	-2,1	2,35	1,0
лін.	2,75	-1,05	-2,65	3,0	-2,65	0,8	3,75	-5,0	-1,6	1,41

Таблиця 3

t	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
нелін.	2,8	0,7	-1,35	2,75	-1,05	0,9	1,4	-2,0	-1,3	1,05
лін.	3,0	-1,1	-2,8	3,25	-2,8	0,9	4,1	-5,3	2,5	1,6

Як видно із наведених результатів, врахування геометрично нелінійних складових при вищенаведених геометричних та фізико-механічних параметрах значно впливає на НДС конструкції. Зокрема, максимальне значення величини ε_{22} згідно лінійної теорії майже в два рази більше відповідного значення згідно геометрично нелінійної теорії на досліджуваному інтервалі часу — табл. 2. Аналогічна картина спостерігається для величин σ_{22} / E_{11} — табл. 3.

Були проведені аналогічні розрахунки для вищевказаної конструкції при $R / h = 200$. Результати обчислень згідно лінійної та нелінійної теорій вказують на меншу залежність впливу нелінійних складових. Зокрема, в табл. 4 наведені максимальні значення величин σ_{22} / E_{11}. Як видно, різниця по максимальним величинах напружень σ_{22} досягає порядку 20%. При моделюванні динамічної поведінки вищевказаної конструкції при $R / h = 100$ максимальні величини вказаних параметрів практично не відрізняються.

Таблиця 4

t	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
нелін.	0,95	-0,8	1,0	-0,5	0,4	-0,17	0,17	-0,18	0,2	-0,22
лін.	0,95	-1,05	1,0	0,68	0,46	-0,27	0,31	-0,22	1,2	-0,22

Робота виконана за фінансової підтримки «РФФД — ДФФД - 2013» (проект № 53.1/023).

Список літератури

1. Баженов В. А., Заруцкий В. А. О кольцевых напряжениях в цилиндрических оболочках, усиленных продольными ребрами // Прикладная механика. — 1968. — Т. 4, №11. — С. 125–129.

2. Головко К. Г., Луговой П. З., Мейш В. Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / под ред. акад. НАН Украины А .Н. Гузя. — Киев: Издат.-полиграф. центр «Киевский университет», 2012. — 541 с.

3. Луговой П. З., Мейш В. Ф., Штанцель Э. А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. — Киев: Издат.-полиграф. центр «Киевский университет», 2005. — 536 с.

4. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 764 с.

МЕТОД РІВНЯНЬ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ В ЗАДАЧІ ДВОЛАНКОВОГО МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА

Т. О. Лупіна
Київська державна академія водного транспорту імені гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного, Київ, Україна
lypina@i.ua

Розв’язання наукових та інженерних проблем в сучасному світі неможливо уявити без математичного моделювання. Побудова математичних моделей реальних фізичних систем та їх дослідження з використанням комп’ютерних технологій має фундаментальне значення в системі підвищення якості навчання студентів та їхнього вміння самостійно організовувати ці дослідження.

Метод рівнянь Лагранжа другого роду продемонструємо на системі дволанкового математичного маятника.

Цей метод використовується для складання диференціальних рівнянь руху голономних систем матеріальних точок та абсолютно твердих тіл.

Якщо $q_1, q_2, ...q_n$ — узагальнені координати (криволінійні, лагранжеві), $T(\dot{q}_1,...,\dot{q}_n, q_1, ...q_n, t)$ — кінетична енергія, $\Pi(q_1, ...q_n, t)$ — потенціальна енергія, Q_i $(i = 1,...,n)$ — непотенціальні узагальнені сили, то рівняння Лагранжа другого роду будуть такими:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1,2,...,n) \tag{1}$$

де

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i' \tag{2}$$

Для консервативних систем рівняння (1) набувають вигляду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1,2,...,n) \tag{3}$$

Тут $L = T - \Pi$ – функція Лагранжа (кінетичний потенціал).

Система двох матеріальних точок A_1, A_2 з масами відповідно m_1, m_2, з’єднаних за допомогою невагомих нерозтяжних стрижнів $OA_1 = l_1$, $OA_2 = l_2$, рухається плоскопаралельно в площині xOy. Точка O є нерухомою. Така система точок відповідає дволанковому математичному маятнику.

За узагальнені координати маятника приймаємо кути ϕ_1, ϕ_2. Ці кути незалежні між собою. $\delta\phi_1, \delta\phi_2$ – варіації, що визначають незалежні віртуальні переміщення: $q_1 = \phi_1$, $q_2 = \phi_2$. Рівняння (1) набувають вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} - \dfrac{\partial T}{\partial \phi_1} = Q_1 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} - \dfrac{\partial T}{\partial \phi_2} = Q_2 \end{cases} \tag{4}$$

Нехай точки $A_1\,(x_1,\, y_1),\; A_2(x_2,\, y_2)$ визначаються в системі Oxy, тоді

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \cos\phi_1, \quad x_2 = l_1 \cos\phi_1 + l_2 \cos\phi_2 \\ y_1 = l_1 \sin\phi_1, \quad y_2 = l_1 \sin\phi_1 + l_2 \sin\phi_2 \end{cases} \tag{5}$$

Дволанковий маятник має дві степені вільності і є консервативною системою, оскільки знаходиться під дією потенціальних сил — сил тяжіння $\vec{P}_1,\, \vec{P}_2$.

Кінетична енергія має вигляд:

$$T = \frac{m_1}{2} V_{A_1}^2 + \frac{m_2}{2} V_{A_2}^2$$

або

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2\, \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2\, \dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \tag{6}$$

Узагальнені сили Q_1 і Q_2, віднесені до узагальнених координат q_1 і q_2, мають вигляд:

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) g\, l_1 \sin\phi_1,\; Q_2 = -m_2 g\, l_2 \sin\phi_2 \quad (g \approx 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}) \tag{7}$$

Узагальнені сили можна знаходити різними способами [3, 4]. Диференціальні рівняння руху подвійного математичного маятника під дією сил тяжіння:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\, l_1\, \ddot{\phi}_1 + m_2 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)\, \ddot{\phi}_2 + \\ + m_2 l_2 \sin(\phi_1 - \phi_2)\, \dot{\phi}_2^2 + (m_1 + m_2) g \sin\phi_1 = 0 \\ l_1\, \ddot{\phi}_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) + l_2\, \ddot{\phi}_2 - l_1\, \dot{\phi}_1^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + g \sin\phi_2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Розв'язки системи (8) мають практичний інтерес, якщо

$$\dot{\phi}_1 = 0, \quad \ddot{\phi}_1 = 0, \quad \dot{\phi}_2 = 0, \quad \ddot{\phi}_2 = 0 \tag{9}$$

Рівняння (9) визначають стани рівноваги, умовами яких є

$$\begin{cases} \sin\phi_1 = 0 \\ \sin\phi_2 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Геометричний зміст системи (10) – положення рівноваги буде спостерігатись, якщо кожна з точок $A_1,\, A_2$ займе нижнє або верхнє вертикальне положення.

Дана задача викликає зацікавленість студентів, приваблює своєю простотою, можливістю розробки комп'ютерної програми і придатністю для вивчення поступальних та обертальних рухів тіл.

Список літератури

1. Вербицький В. Г. Лекції з теоретичної механіки. Динаміка. — К.: КУЕТТ, 2002. — 67 с.

2. Вербицький В. Г. Комп'ютерне моделювання коливань механічних систем. — К.: КУЕТТ, 2004. — 44 с.

3. Лобас Леонід, Лобас Людмила. Теоретична механіка. — К.: ДЕТУТ, 2009. — 407 с.

4. Лобас Л. Г., Нікітіна Н .В. Розрахунково-графічні та контрольні роботи з теоретичної механіки. — К.: КУЕТТ, 2004. — 43 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАЯТНИКОВОГО ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА

А. В. Мазнев, Т. В. Бычкова
Донецкий национальный университет, Донецк, Украина
maznev_av@rambler.ru, B.Tatyana13@mail.ru

Рассмотрим механическую систему — гиростат (систему тел $S_0, S_1, ..., S_n$, в которой S_0 — тело-носитель произвольное по распределению масс, тела S_i $(i = \overline{1, n})$ — закреплены на S_0 осями l_i с центрами масс на l_i и имеют симметричную форму). При этом конструкция гиростата такова, что момент количества движения гиростата выражается формулой:

$$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)\boldsymbol{\alpha},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела-носителя; A — тензор инерции гиростата; $\boldsymbol{\alpha}$ — неизменный в теле S_0 единичный вектор; $\lambda(t)$ — дифференцируемая функция времени t.

Рассмотрим случай, когда вектор угловой скорости имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\,\boldsymbol{a}, \tag{1}$$

$\dot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{0}$ и вектор $\boldsymbol{a}$ сонаправлен с угловой скорость, то $\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \boldsymbol{0}$, то есть вектор $\boldsymbol{a}$ неподвижен в пространстве. Движение гиростата с угловой скоростью (1) при $\dot{\varphi} \neq const$ называется маятниковым движением.

Выбирая подвижную систему координат так, чтобы $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$, получим

$$\lambda(t) = (\alpha_1 a_0' \sin\varphi + a_0\alpha_3)^{-1}\Big[2^{-1}B_2\cos 2\varphi + 2^{-1}B_2'\sin 2\varphi + \\ +a_0\gamma_1\cos\varphi + a_0\gamma_1'\sin\varphi + \left(k + 2^{-1}B_0\right) - \left(\beta_1\cos\varphi + \beta_1'\sin\varphi + \beta_0\right)\dot{\varphi}\Big]. \tag{2}$$

В формуле (2) предполагаем $\left(\alpha_1 a_0'\right)^2 + \left(a_0\alpha_3\right)^2 \neq 0$.

Случай $\alpha_3 = 0$**.** Рассмотрим случай когда $\alpha_3 = 0$. Тогда $\alpha_1 = 1$ и, следовательно

$$\dot{\varphi}^2 = A_{33}^{-1}\left(-C_2\cos 2\varphi - C_2'\sin 2\varphi + 2\kappa_1'\sin\varphi + 2\kappa_1\cos\varphi + c_*\right), \tag{3}$$

где c_* — произвольная постоянная.

Из формул (2), (3) получим зависимости $\lambda(t)$, $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi}^2 = 2s_2\left(A_{23}A_{33}\right)^{-1}\left(a_0'A_{23}\cos\varphi - a_0A_{33}\right), \tag{4}$$

$$\lambda(t) = -(a_0' \sin\varphi)^{-1} \left(a_0' A_{23} \cos\varphi + a_0' A_{13} \sin\varphi + a_0 A_{33} \right) \dot{\varphi}. \tag{5}$$

В силу (4) $\varphi(t)$ является эллиптической функции времени.

Когда $a_0 = 0$, то есть $\theta_0 = \pi/2$, тогда $A_{23} = 0$, $s_3 = 0$. Это значит, что выполняется условие $\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{a}$. Кроме этого $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{a}$.

Таким образом, в случае $\alpha_3 = 0$, то есть при выполнении условия $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ возможны три класса движений, которые включают варианты:

- $a_0 = 0$ (ось маятникового движения горизонтальна);
- $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$ (центр масс неподвижен);
- вариант, для которого в общем случае $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{a} \neq 0$, $a_0 \neq 0$.

Последний вариант интересен тем, что при $s_1 \neq 0$ маятниковое движение происходит относительно оси, которая составляет с вектором вертикали угол θ_0: $\mathrm{ctg}^2\theta_0 = A_{23}^2 / A_{33}^2$, зависящий от компонент тензора инерции.

При рассмотрении случая $\alpha_3 = 0$ возможен и случай, когда правая часть

$$\begin{gathered} p_3 \cos 3\varphi + p_3' \sin 3\varphi + p_2 \cos 2\varphi + p_2' \sin 2\varphi + p_1 \cos\varphi + p_1' \sin\varphi + \\ + p_0 = A_{33} \left[2^{-1} B_0^* \cos 2\varphi + a_0 \gamma_1 \cos\varphi - 2^{-1} \left(2k + B_2 + B_0 + B_0^* \right) \right] \dot{\varphi}, \end{gathered} \tag{6}$$

не обращается в нуль для всех значений $\dot{\varphi}$. Для его исследования необходимо в правую часть уравнения (6) подставить выражение (3)

$$\begin{gathered} A_{33} \left(p_3 \cos 3\varphi + p_3' \sin 3\varphi + p_2 \cos 2\varphi + p_2' \sin 2\varphi + p_1 \cos\varphi + \right. \\ \left. + p_1' \sin\varphi + p_0 \right)^2 - \left(C_2 \cos 2\varphi + C_2' \sin 2\varphi - 2\varkappa_1' \sin\varphi - \right. \\ \left. - 2\varkappa_1 \cos\varphi - c_* \right) \cdot \left[2^{-1} B_0^* \cos 2\varphi + a_0 \gamma_1 \cos\varphi + \left(k + 2^{-1} B_0 \right) \right]^2 = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Требование того, чтобы уравнение (7) было тождеством по φ приводит к условиям существования маятниковых движений гиростата.

Случай $\alpha_3 \neq 0$. Поскольку выражение (2) получено из первого интеграла моментов, то, предполагая $\alpha_1 \neq 0$, рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered} a_0' \left(\alpha_3 A_{13} - \alpha_1 A_{33} \right) \ddot{\varphi} - a_0' \alpha_3 A_{23} \dot{\varphi}^2 + \alpha_3 \left(B_2' \sin\varphi + a_0'^2 B_{22} \cos\varphi + \right. \\ \left. + a_0 a_0' B_{23} \right) \dot{\varphi} - a_0' \left(\alpha_1 C_2' + a_0' \alpha_3 \varepsilon_1 / 2 \right) \cos 2\varphi + a_0' \left(\alpha_1 C_2 - \right. \\ \left. - a_0' \alpha_3 \varepsilon_1' / 2 \right) \sin 2\varphi + \left[a_0' \alpha_1 \varkappa_1' + \alpha_3 \left(a_0 C_2 + G_0 \right) \right] \cos\varphi - \\ - \left(a_0' \alpha_1 \varkappa_1 - a_0 \alpha_3 C_2' \right) \sin\varphi + \alpha_3 \left[\left(3a_0^2 - 1 \right) \varepsilon_1 - 2 a_0 a_0' s_2 \right] / 2 = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

Отметим, что в классическом варианте при $a_0 \neq 0$, $\lambda(t)$, $\dot{\varphi}$ принимают вид

$$\lambda(t) = (\alpha_1 a_0' \sin\varphi + a_0\alpha_3)^{-1}\left[k - \left(a_0' A_{13}\sin\varphi + a_0 A_{33}\right)\dot{\varphi}\right],$$
$$\dot{\varphi} = -s_1(\alpha_1\alpha_3 k)^{-1}\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi + a_0\alpha_3\right)^2 \qquad (9)$$

То есть в случае (9) $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{s} = 0,\quad \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a} \neq 0$.

Рассмотрим случай, когда уравнение (8) становится тождеством. Для этой цели положим, что выполняются условия

$$\begin{gathered}\alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13} = 0,\ A_{23} = 0,\ B_{11} = B_{22},\quad B_{12} = 0,\ B_{23} = 0,\\ C_{11} = C_{22},\quad C_{12} = 0,\quad s_1 = a_0 C_{13},\quad s_2 = a_0 C_{23},\\ k = \left[a_0^2\alpha_3 B_{13} - \alpha_1\left(a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}\right)\big/2\right]\big/\alpha_1\,.\end{gathered} \qquad (10)$$

При наличии ограничений (10) уравнение (8) приводится к виду

$$\dot{\varphi} = \left[a_0' C_{23}\cos\varphi + a_0' C_{13}\sin\varphi - \left(s_3 + a_0\left(C_{11} - C_{33}\right)\right)\right]\big/B_{22}\,. \qquad (11)$$

Найдем $\lambda(t)$, используя условия (10), имеем

$$\lambda(t) = \alpha_1^{-1}(a_0 B_{13} - A_{13}\,\dot{\varphi}). \qquad (12)$$

Интерес формулы (12) заключается в ее линейной относительно $\dot{\varphi}$ зависимости.

Классический вариант в данном случае в силу (10),(11) приводит к случаю $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$. То есть в этом случае $\varphi(t)$ — произвольная функция времени, а $\lambda(t) = -\alpha_1^{-1}A_{13}\,\dot{\varphi}$. Угол θ_0 является произвольным. То есть, для варианта, когда гиростат имеет неподвижный центр масс, маятниковое движение может происходить с произвольной угловой скоростью и при произвольном значении угла между осью вращения (вектором $\boldsymbol{a}$) и вектором ν, если вектор $\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ специальным образом выбран в гиростате ($\alpha_1^{-1}\alpha_3 = A_{13}^{-1}A_{33}$).

Список литературы

1. Дружинин Э. И. О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата / Э. И. Дружинин // Прикладная математика и механика. — 1999. — №5. — С.825-826.

2. Леви-Чивита Т. Курс теоретической механики в 2-х т. Амальди Т.2. Ч.2. / Т. Леви-Чивита, У. Амальди.— М.: Издательство иностр.лит., 1951. — 555 с.

3. Мазнев А. В. О линейном инвариантном соотношении уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом в магнитном поле / А. В. Мазнев // Механика твёрдого тела. — 2012. — №42. — С.86–94.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЭВТРОФИКАЦИИ ЛИМНИЧЕСКИХ ЭКОСИСТЕМ ЮЖНОГО ПРИАРАЛЬЯ НА ИМИТАЦИОННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

С. М. Мамбетуллаева
Каракалпакский научно-исследовательский институт
естественных наук ККО АН РУз, Нукус, Узбекистан
svetmamb@mail.ru

Учитывая дефицит пресной воды в Южном Приаралье и повсеместное загрязнение воды в реке Амударья на всем ее протяжении, Правительством Республики Узбекистан был разработан комплекс мероприятий по защите водных ресурсов, увеличению водности некоторых озерных систем и превращению некоторых озер в озерно-прудовые хозяйства. Изменение водного режима за счет естественных межгодовых климатических изменений, а также за счет предполагаемых крупномасштабных водохозяйственных мероприятий может привести к нарушениям сложившихся в водоемах равновесий между поступлением и выносом биогенных элементов и органических веществ и отсюда к таким нежелательным последствиям, как эвтрофирование водоемов и ухудшение качества водных ресурсов в целом.

В последние годы из-за резкого увеличения сброса азота и фосфора в водоемы и водотоки, а также в результате зарегулирования стока многих равнинных рек, в них возникли своеобразные нарушения гидрохимического и гидробиологического режима водоемов. Увеличилось, например, образование органического вещества при интенсивном развитии фитопланктона и повысилась трофность водоемов (Россолимо, 1977; Константинова, 1986). Накопления биогенных элементов, поступающих в водные экосистемы с сельскохозяйственным стоком, способствует аккумуляции биогенных элементов, что приводит к формированию определенного режима, присущего эвтрофным озерам (Абдиров и др., 1996). Используемая имитационная математическая модель фосфорной системы для озер с различным уровнем трофности включает в себя многолетний натурный материал, позволяющий проследить динамику и круговорот соединений форм фосфора, как эвтрофирующего элемента, прогнозировать направленность внутриводоемных процессов, а также возможность управлять ими.

Эвтрофирование многих водоемов обусловлено увеличением фосфорной нагрузки. В связи с этим, нами была предпринята попытка проследить закономерности распределения форм фосфора в воде, его баланса, определение характеристик фосфорной нагрузки и потоков его форм в экосистемах с помощью имитационной модели фосфорной системы в озерах Дауткуль и Шегекуль — важных объектов народнохозяйственного значения.

Модель основана на принципах и методологии системного анализа: в ней учитываются многообразие форм нахождения веществ разного происхождения в водной среде, различные взаимодействия компонентов химической и биологической природы и влияние на них физических, химических и биологических внутриводоемных процессов (Леонов, 1989). Модель, с одной стороны, воспроизводит развитие процессов биотрансформации и круговорота форм фосфора, а с другой отражает изменчивость содержания кислорода (интегрального показателя состояния водной среды). Модель также учитывает пространственный перенос компонентов фосфора водным потоком и с ее помощью можно корректно оценить основные составляющие приходного и расходного баланса фосфора для изучаемой водной экосистемы.

Рассматривая фосфорные нагрузки для оз. Даўткуль по заданным входным параметрам, выявлено, что доминирующую роль во внешней фосфорной нагрузке водоема в целом играет растворенный неорганический **(DIP)** (его поступление составляет 0,32 мг/л год) или 84,6% поступления фосфора общего. Фосфорная нагрузка водоема формируется в основном за счет обменных процессов через поверхность раздела вода — дно. В форме DIP из грунта в водную среду поступает в разные месяцы от 23,7 до 92,7% общего количества DIP. Наибольшее количество фосфор в детрите **(PD)** и органический **(DOP)** фосфор поступает в водоем со стоком летом 47,4 и 4,0 %% общегодовой нагрузки соответственно. В целом в экосистему поступает преимущественно в форме DIP 92,7% — растворенного неорганического фосфора. Значительное количество DIP выделяется из донных отложений (ДО) — 32,6% общегодового поступления DIP в водоем. Что касается **PD**, то его количество также поступает из донных отложений и составляет 47,4% общего поступления фосфора в водоем. Вклад остальных фракций в общегодовой нагрузке не очень значителен (доли PD, DOP и связанного в биомассах фосфора соответственно равны 7,0; 0,2; 0,1%). Выделение фосфора в форме DIP из донных отложений наиболее значительно летом (80,6% ежегодного поступления из грунта). Сравнение количеств фосфора поступающего и выносимого из водохранилища с водным потоком показывает, что ежегодно из водоема выносится в среднем на 60% меньше фосфора, чем поступает.

Таким образом, чем больше фосфора поступает в исследуемый водоем, тем активнее в нем происходят процессы его внутриводоемной трансформации. Частично это обусловлено влиянием жизнедеятельности сообщества гидробионтов, реагирующего определенным образом на колебания внешних условий. Изменение же соотношения форм фосфора в воде, поступающей в водоем и вытекающей из него объясняется, по-видимому, изменением условий трансформации фосфора в водоеме. Роль внутренних потоков в круговороте фосфора в оз. Даўткуль также значительна. За год более 50% фосфора в водоеме трансформируются в процессе внутреннего круговорота.

По совокупности показателей и результатов исследований ряда ученых (Константинова, 1986) оз. Шегекуль относится к мезотрофному типу водоема с элементами эвтрофности. Основным поступлением соединений фосфора является речной сток реки Амударьи. Расчеты на модели выполнялись по начальным концентрациям веществ в воде оз. Шегекуль за период 1993 по 1998 гг. Учитываемые в модели взаимодействия указанных форм фосфора (P) составляют основу биохимических процессов, формируют определенный режим функционирования экосистемы и общую направленность трансформации фосфора в водоеме (Мамбетуллаева, 2004).

Анализируя полученные значения Р, можно отметить, что основная роль во внешней фосфорной нагрузке озера принадлежит внешнему притоку, который поступает в форме DIP (его поступление с речным стоком составляет 0,197 мг Р/(л год), или 70,7% поступления фосфора общего. На долю DP и DOP приходится 21,2 и 2,1% Установлено, что среди форм фосфора доминирует DIP (76,4%). Наибольший вынос фосфора водным потоком приходится на DIP (50,6%) и на сумму фитопланктона и бактерий F+B (23,4%), а также фосфора в детрите PD (17,3%) и фосфора органического DOP (8,7%). Вероятно, это обусловлено тем, что вышеназванная часть форм фосфора, связана с фитопланктоном и бактериями, а часть выносится со стоком. Особо следует отметить, что основное накопление форм фосфора происходит в донных отложениях в виде DIP (94,2%), где его запасы довольно велики, что не может не отразиться на характере внутриводоемных процессов. При определенных условиях (особенно анаэробных, в отсутствии кислорода) часть фосфора высвобождается, тем самым, стимулируя развитие автотрофных организмов, изменяя уровень продукционных процессов, что приводит к эвтрофированию водоема, то есть фосфор является материальной основой вторичного загрязнения водоемов, а донные отложения — микроочаги эвтрофикации.

Таким образом, использование имитационной модели фосфорной системы позволило достаточно подробно описать динамику основных форм фосфора в двух разнотипных водоемах — оз. Дауткуль и Шегекуль, где фосфор выступает в качестве основного механизма круговорота происходящего внутри исследуемых водоемов. Результаты исследования позволяют объяснить наблюдаемые особенности функционирования водных экосистем и специфичность динамики фосфора, где он выступает в качестве одной из частей пускового механизма в процессе эвтрофирования водоемов. Модель может использоваться для прогнозирования и решения задач охраны и рационального использования природных водных ресурсов Южного Приаралья.

Список литературы

1. Абдиров Ч. А., Константинова Л. Г., и др. Качество поверхностных вод низовьев Амударьи в условиях антропогенного преобразования пресноводного стока. — Ташкент: ФАН. — 1996. — 325 с.

2. Константинова Л. Г. Антропогенная евтрофикация поверхностных вод низовьев Амударьи.// Биологические ресурсы Приаралья. — Ташкент: ФАН, 1986. — С.61–90.

3. Леонов А. В. Математическая модель совместной трансформации соединений азота, фосфора и кислорода в водной среде: ее применение для анализа динамики компонентов в евтрофированом озере // Водные ресурсы. — 1989. — № 2. — С. 106–123.

4. Мамбетуллаева С. М. Прогнозирование процессов эвтрофирования лимнических экосистем Южного Приаралья с помощью имитационного математического моделирования. // Ж. Инфекция, иммунитет и фармакология. — Ташкент. — 2004. — № 1. — С. 151–152.

5. Россолимо Л. Л. Изменение лимнических систем под воздействием антропогенного фактора. — Л.: Наука. — 1977. — 144 с.

ВРАЧ-КИБЕРНЕТИК И МАТЕМАТИКА

Ю. Н. Маслов
Киев, Украина
myun@i.ua

> *Знания открываются на том уровне Со-Знания, на котором вы способны понять Истину и воспользоваться Ею*
> *Из Хаоса — к вершим Порядка Целого [1]*

Изучение сверхсложности по Гвишиани [2] человека (биология, медицина и медицинские науки, медицинская кибернетика) и человековключающих систем (здравоохранение, образование, религия и др.) возможно существующими математическими методами теоретической и экспериментальной физики и современной математики. Ведь дифференциальное и интегральное исчисления создавалось классиками (И. Ньютон, Г. Лейбниц и др.) для выявления сути человека, его духовности, понимания Бога и Божественности Мироздания. Отметим сочинение Г. В. Лейбница, написанное около 1710 г. «Опыты теодицеи о благости Божией, свободе человека и происхождении зла» — и «Математические начала натуральной философии» И. Ньютона: «Сей управляет всем не как душа мира, а как властитель вселенной, и по господству своему должен именоваться Господь Бог Вседержитель» (1726).

В начале 70-х годов была задействована Всесоюзная программа «Медицинская кибернетика» для разработки концепции создания соответствующих медицинских факультетов и кафедр, подготовки научных кадров и преподавателей, программ обучения и учебных пособий и т. д. Причиной создания являлась существовавшая и существующая сегодня методология теоретической и практической медицины изучения человека, его здоровья и нездоровья, не соответствующая даже методам и технологиям изучения физикой неживого. Поводом же послужило намерение США поставки на 8 млрд. долларов вычислительной техники, научной аппаратуры, программного обеспечения и пр. Была создана учебная группа из преподавателей 8-ми медицинских институтов страны (я был единственным из Киева от КМИ). Занятия проводились американскими специалистами и нашими выдающимися учеными (академиками, Лауреатами Ленинской премии — А. И. Бергом [3], П. К. Анохиным [4] и др.) в самых передовых научных институтах страны: ЦОЛИУВ, МОЛМИ, ИКИ и др.

Образовалось два направления подготовки специалистов: врач-кибернетик (внедрение в медицинские науки, медицину и здравоохранение технической кибернетики) и врач-исследователь с глубоким изучением всего живого и человека, более мощным, чем изучалось и изучается неживое физикой и физико-математическими науками. Такие направления связаны также с квантовой физикой живого и квантовой медициной [5, 6], здоровьесберегающими технологиями и тонкополевой медициной [7] и др.

Были созданы новые факультеты Фундаментальной медицины, Биоинженерии и биоинформатики в МГУ, Межуниверситетский медико-инженерный факультет НТУУ «КПИ», кафедра медицинской информатики НМАПО, факультет Биомедицинской техники МВТУ, Медико-биологический факультет РМАПО, ранее ЦОЛИУВ, который стал базой Всесоюзной программы «Медицинская кибернетика». Эта программа была закрыта в связи с поправкой Джексона-Венника, но работы продолжались во 2-ом Московском медицинском институте, ныне Медицинский университет им. И. П. Пирогова, где были созданы факультет и кафедра медицинской кибернетики и началась подготовка специалистов «врач-кибернетик» в соответствии с Государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования РФ (Специальность 041000 — Медицинская кибернетика. Квалификация Врач-кибернетик — 1994 год и специальность 060609 Медицинская кибернетика — 2010 год) [8, 9]. Позже аналогичные факультеты и кафедры были созданы в РГМУ Москвы и в других медуниверситетах РФ (Томск, Пенза).

По этим стандартам «Врач-кибернетик подготовлен для осуществления практической и научной деятельности, направленной на разработку, внедрение и эксплуатацию автоматизированных технологических и административных систем управления в целях повышения качества медицинского обслуживания населения и эффективного использования ресурсов здравоохранения. Специалисты предназначены для работы в учреждениях, здравоохранения, учреждениях РАМН и других ведомств, заинтересованных в специалистах данного профиля... Специалист должен знать: ... структуру, принцип действия, характеристики электронных вычислительных машин, программирование на ЭВМ, языки программирования для решения научных и информационных задач; операционные системы и их возможности; основы построения банков данных и использования их для решения информационных задач медицины и биологии; математические методы статистики; методы исследования операций, линейное и динамическое программирование, теорию массового обслуживания; математические основы распознавания образов в решении задач диагностики; математические модели и методы планирования эксперимента» [8]

«Требования к обязательному минимуму содержания основной и обязательной программ подготовки врача-кибернетика по специальности 041000 — Медицинская кибернетика... Основы высшей математики:

— математический анализ и аналитическая геометрия,

— линейная алгебра,

— теория вероятностей и математическая статистика,

— теория дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных,

— элементы прикладной математики,

— математическое моделирование и обработка результатов измерения» [9].

Понятно, что эти разделы «основ высшей математики» не могли и не могут позволить осмыслить и решать проблему сути живого и человека, кибернетики и медицинской кибернетики.

Кибернетика как наука об управлении государством по Амперу [10], как управление и связь в животном и машине и как человеческое использование человеческих существ по Винеру [11, 12], как наука об оптимальном управлении по Бергу [3], как реализация математической теории оптимального управления по Беллману [13], Понтрягину [14] и другим [15], являясь основой приложений в технике (техническая кибернетика), не имеет места и не наблюдается в живой и неживой природе, а тем более в человеке и обществе.

Суть живого и человека связана в основном с математическими проблемами оптимизации, с не имеющей и не могущей иметь решения задачей оптимального управления, наблюдаемого в живом. Изобретения (обратная связь, информационные технологии и пр.), пытающиеся обойти это, привели к созданию технической кибернетики. Этому способствовали и достижения математической теории оптимального управления и динамического программирования (Понтрягин, Беллман и др. [13, 14]), которые не решали проблему управления в живом и человеке. Предложения методологии изучения сверхсложности живого, например, теории функциональных систем взаимоСОдействия по Анохину [4], оставались математически не реализованными.

Медицинская кибернетика рассматривается нами как Наука об управлении в человеке и человеком, его здоровьем и нездоровьем (о закономерностях оптимального управления в Человеке, об оптимальном управлении здоровьем и нездоровьем человека по принципам и методам математически оптимального управления и соуправления) и как практическая реализация результатов Науки с помощью соответствующей кибернетической и пр. техники, оптимально управляющих и соуправляющих технологий, наряду с существующими информационными и другими инно-, нано-, хай-тек технологиями, — подготовки научных кадров и специалистов по медицинской кибернетике [16].

Поставлена и аксиоматически решается задача математически оптимального по принципу оптимальности Беллмана [14] с критерием оптимальности по Анохину-Парето [4, 17] полииерархически оптимального соуправления, наблюдаемого в Материальном Мире. Рассматриваются также математические преобразования оптимального Соуправления, наблюдаемого в Мире растений, СО-управления — в Мире животных, СоУправления — в человеке (СоТворце и в Духовном Мире [1]) и СОУправления — в Высшем Разуме [1].

СОуправление рассматривается как мера взаимоСОдействия функциональных систем организма человека по Анохину [4]. Например, афферентация рассматривается не как управление, а эфферентация — не как обратная связь, а как математически формализованные СОуправления (СоУправляющая афферентация и СОуправляемая эфферентация).

Математически оптимальные соуправления, наблюдаемые неживом и живом, в человеке и человечестве, во Вселенной и Мироздании, связаны с решением математических проблем Гильберта: 8-ой — «Математическое изложение аксиом физики» и 23-й — «Развитие методов вариационного исчисления» [18], а также с проблемами сознания человека и Со-Знания СоТворца, СоУправления и СоТворчества, с сутью законов Материального Мира и Канонов Духовного Мира [1].

Список литературы

1. Л. И. Маслов. Откровения людям Нового Века. — В 9-ти книгах. — М.: 2004–2013. — http://www.knigaveka.ru (14.10.08: 27).

2. Д. М. Гвишиани. Диалектика, системность, глобальное моделирование // Кибернетика, ноосфера и проблемы мира. — М.: Наука, 1986. — 144 с.

3. А. И. Берг. Кибернетика — наука об оптимальном управлении. — М.-Л.: Энергия, 1964. — 66 с.

4. П. К. Анохин. Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем / Принципы системной организации функций. — М.: Наука, 1973. — С. 5–61.

5. С. П. Ситько. Медицинские аспекты квантовой физики живого // Физика живого. — 1996. — Т. 4, № 1. — С. 5–10.

6. С. П. Ситько, Л. Н. Мкртчян. Введение в квантовую медицину. — К.: Паттерн, 1994. — 144 с.

7. Л. И. Маслов. Тонкополевая медицина — медицина будущего // Откровения людям Нового Века. — 2012. — № 2 (5), № 3(6).

8. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования Российской Федерации. Специальность 041000 — Медицинская кибернетика. Квалификация Врач-кибернетик. — Приказ Госкомвуза от 05.03.1994 № 180.

9. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по специальности 060609 Медицинская кибернетика. — Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 8.11.2010 № 1119.

10. Г. Н. Поваров. Ампер и кибернетика. — М.: Сов. радио, 1997. — 96 с.

11. Н. Винер. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине (1948). — М.: Советское радио, 1958, 1968. — 326 с.

12. Н. Винер. Человеческое использование человеческих существ. Кибернетика и общество (1950) / Человек управляющий. — СПб: Питер, 2001. — 288 с. — С. 4–196.

13. Л. С. Понтрягин. Оптимальные процессы регулирования // УМН — 1959 — 14(85). — С. 3-20.

14. Р. Беллман. Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960. — 400 с.

15. Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973. — 256 с.

16. Ю. Н. Маслов. Медицинская кибернетика и оптимальные соуправления. // Глушковські читання: Матеріали конференції до 90-річчя з дня народження академіка В. М. Глушкова (10–11 вересня 2013 р., м. Київ). — К.: НТТУ «КПІ», 2013. — 222 с. — С. 154-156.

17. В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Физматлит, 2007. — 256 с.

18. Д. Гильберт. Математические проблемы (1900). / Под ред. Александрова П. С. — М.: Наука, 1969. — 239 с.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ ПРОДУКЦІЇ ПІД ЧАС ВЕДЕННЯ ГОСПОДАРСЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

М. Г. Медведєв, В. М. Романенко, С. В. Гузенко
Національний університет харчових технологій, Київ, Україна
aril_sv@bigmir.net

Під час ведення господарської діяльності, необхідно приділяти увагу обсягу запасу продукції, необхідної для роботи підприємств. Всі матеріали та товари, які використовуються підприємством в процесі діяльності становлять основу його активів. Саме тому обсяги закупівлі товарів та матеріалів повинні бути оптимальними, адже може бути як надлишок товарів так і їхня недостача.

Великий обсяг запасів товарів означає, що реальні гроші підприємця заморожені в цій продукції, яка не продається, а просто лежить на складі. Утримання певного обсягу товарно-матеріальних запасів на підприємстві завжди пов’язано зі значними витратами, оскільки необхідно витрачати кошти на оренду складських приміщень, пошук покупців і постачальників, оплату праці співробітників, які займаються зберіганням запасів, тощо.

Результатом формування недостатнього обсягу запасів можуть бути порушення графіка виробничого процесу, зменшення обсягів збуту, втрата репутації підприємства на ринку. А це все призводить до втрати прибутку.

Виникає необхідність визначення оптимального для підприємства обсягу товарно-матеріальних запасів, при яких витрати на утримання запасів та втрати від їх недостатнього обсягу будуть мінімальними.

Основні завдання при управлінні товарно-матеріальними запасами полягають в аналізі обсягу та структури запасів, а також джерел їх формування і подальшому формуванні такого обсягу та структури запасів, які б забезпечили неперервність і стабільність виробничого процесу при мінімальних витратах на утримання запасів [1].

Побудуємо математичну модель. Позначимо через x ринковий попит на продукцію торгового підприємства для деякого фіксованого періоду часу (день, тиждень, місяць та ін.), який наперед невідомий. Одиниці виміру продукції, що продається, можуть бути, як фізичні (кілограми, літри тощо), так і грошові. Припустимо, що нереалізована за такий період продукція втрачає свої споживчі якості за час зберігання і не може бути продана в наступний період. Позначимо далі через C_1 суму собівартості та додаткових витрат на зберігання одиниці продукції, яка не була реалізована за згаданий період часу у зв'язку з тим, що попит на неї був менший за прогнозований, а через C_2 — втрати прибутку на одиницю продукції, які зумовлені її відсутністю, коли попит на неї перевищує її кількість s, яка є на складі [2].

З урахуванням вищезгаданих позначень втрати підприємства визначаються функцією

$$V\left(x,s\right)=\begin{cases}C_1\left(s-x\right),\text{коли}\quad s\geq x.\\C_2\left(x-s\right),\text{коли}\quad s<x.\end{cases}\tag{1}$$

Будемо розглядати попит на продукцію x як випадкову величину з функцією розподілу $F\left(x\right)$, яка може бути визначена на основі статистичних спостережень або іншої інформації. Тоді втрати підприємства $V\left(x,s\right)$, які визначаються співвідношенням (1), є функцією від випадкової величини x (попиту) та величини запасу продукції s, і задачу про визначення оптимального запасу продукції торговельної фірми можна розглядати як статистичну гру з «природою». Гравець A — підприємство, гравець B — деякий умовний замовник (ринок) з відомою функцією розподілу $F\left(x\right)$.

Мета торгового підприємства — знайти таке значення запасу продукції s, яке б мінімізувало математичне сподівання (середнє значення) [3]

$$M\left[V\left(x,s\right)\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}V\left(x,s\right)dF\left(x\right)\tag{2}$$

її витрат. Підставляючи в (2) функцію втрат (1), отримуємо

$$M\left[V\left(x,s\right)\right]=C_1\int\limits_{-\infty}^{s}\left(s-x\right)dF\left(x\right)+C_2\int\limits_{s}^{\infty}\left(x-s\right)dF\left(x\right)=$$

$$=C_1\left[s\int\limits_{-\infty}^{s}dF\left(x\right)-\int\limits_{-\infty}^{s}xdF\left(x\right)\right]+$$

$$+C_2\left[\int\limits_{s}^{\infty}xdF\left(x\right)-s\int\limits_{s}^{\infty}dF\left(x\right)\right]=C_1\left[sF\left(s\right)-\int\limits_{-\infty}^{s}xdF\left(x\right)\right]+$$

$$+C_2\left[\int\limits_{s}^{\infty}xdF\left(x\right)+\int\limits_{-\infty}^{s}xdF\left(x\right)-\int\limits_{-\infty}^{s}xdF\left(x\right)-s\left(1-F\left(s\right)\right)\right]=$$

$$=C_1\left[sF\left(s\right)-\int\limits_{-\infty}^{s}xdF\left(x\right)\right]+C_2\left[M\left[x\right]-\int\limits_{-\infty}^{s}xdF\left(x\right)-s\left(1-F\left(s\right)\right)\right]=$$

$$=\left(C_1+C_2\right)sF\left(s\right)-C_2s-\left(C_1+C_2\right)\int\limits_{-\infty}^{s}xdF\left(x\right)+C_2M\left[x\right],$$

де $M\left[x\right]$ — математичне сподівання випадкової величини x. Для знаходження мінімального значення математичного сподівання $M\left[V\left(x,s\right)\right]$, яке є функцією від запасу s, прирівняємо до нуля першу похідну від цієї функції по змінній s:

$$\frac{dM\left[V\left(x,s\right)\right]}{ds}=\left(C_1+C_2\right)\left[F\left(s\right)+sf\left(s\right)\right]-C_2-\left(C_1+C_2\right)sf\left(s\right)= \quad (3)$$
$$=\left(C_1+C_2\right)F\left(s\right)-C_2=0,$$

де $f\left(s\right)$ $\left(f\left(x\right)=\frac{dF}{dx}\right)$ — щільність ймовірності розподілу попиту в точці s.

Зі співвідношення (3), що є рівнянням відносно s, випливає, що оптимальне значення запасу продукції торговельного підприємства s_0, яке мінімізує її втрати, задовольняє умову

$$F\left(s_0\right)=\frac{C_2}{C_1+C_2}. \quad (4)$$

Рівність (4) означає, що оптимальне значення запасу s_0 повинно бути таким, щоб ймовірність того, що попит буде менший за s_0, має дорівнювати $\frac{C_2}{C_1+C_2}$.

Отже, ми отримуємо алгоритм для визначення s_0. На основі статистичних спостережень будується графік функції розподілу (кумулята). Графічно або з аналітичного виразу функції розподілу $F\left(x\right)$ знаходиться таке значення s_0, для якого виконується рівність (4). Якщо розподіл близький до відомих, наприклад до нормального, значення s_0 можна визначити за таблицями нормального розподілу [4].

Запропонована математична модель дозволяє оптимізувати запаси продукції, що забезпечують безперебійну роботу підприємства при збоях у постачанні та важко прогнозованому збуті.

Список літератури

1. Ковалёв К. Ю. Логистика в розничной торговле: как посторить эффективную сеть / Ковалёв К. Ю., Уваров С. А., Щеглов П. Е. — СПб.: Питер, 2007. — 272 с.

2. Бланк И. А. Торговый менеджмент. — 2-е изд., перед. и доп. — К.: Эльга, Ника-Центр, 2004. — 784 с.

3. Мазаракі А. А. та ін.. Економіка торговельного підприємства. Підручник для вузів (Під ред. проф. Н.М. Ушакової) — К.: «Хрещатик», 1999. — 800 с.

4. Марцин В. С. Економіка торгівлі: Підручник — К.: Знання, 2006. — 402 с.

ВЫКАРЫСТАННЕ ПЕРАЎТВАРЭННЯ ХАТЭЛІНГА ДЛЯ БІЯМЕТРЫЧНАЙ ІДЭНТЫФІКАЦЫІ

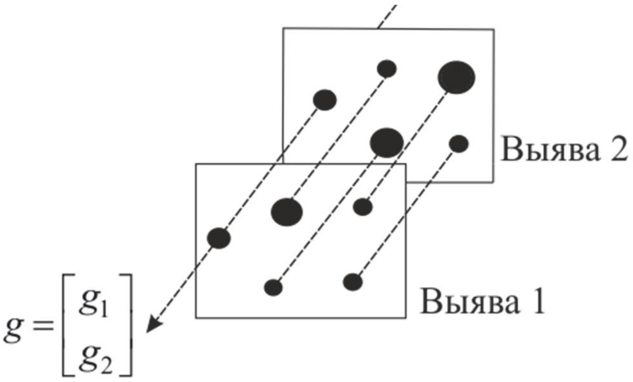
А. І. Міцюхін, Л. І. Майсеня
Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт інфарматыкі і радыёэлектронікі,
Інстытут інфармацыйных тэхналогій, Мінск, Беларусь
mityuhin@bsuir.by, maisenia@tut.by

Адзін са спосабаў пацверджання аўтэнтыфікацыі асобы чалавека заснаваны на біяметрычных параметрах. Пры гэтым вымераныя фізіялагічныя параметры, напрыклад, выявы твару, параўноўваюцца з усімі запісамі з біяметрычнай базы дадзеных. Ідэнтыфікацыйная сістэма вызначае, ці ёсць у базе дадзеных выява, якая ідэнтыфікуецца з невядомай асобай. Сістэма павінна валодаць высокай эфектыўнасцю пры параўнанні твараў людзей. Для кампактнага кампутарнага захоўвання, пошуку, распазнання выяў можна скарыстаць спектральныя дэскрыптары артаганальнага дыскрэтнага косінуснага пераўтварэння (ДКП). Гэта пераўтварэнне шырока ўжываецца на практыцы дзеля эфектыўнага кадавання выявы і гуку. Недахопам ДКП з’яўляецца няпоўная дэкарэляцыя лікавых значэнняў яркасцяў выявы. Калі выява твару ўяўляецца матрыцай адлікаў памерам $Z = M \times C$, рэальна карыстаная прастора прыкмет ДКП знаходзіцца ў дыяпазоне значэнняў $0{,}6Z \div 0{,}1Z$ (тыповы каэфіцыент сціску). У працы разглядаецца развязак задання ідэнтыфікацыі шляхам выкарыстання дэскрыптараў пераўтварэння Хатэлінга. Яго асаблівасцю з'яўляецца тое, што ядро пераўтварэння будуецца на аснове статыстычных характарыстык выяў твараў базы дадзеных, вылічэння ўласных вектараў каварыяцыйнай матрыцы дадзеных. У выніку забяспечваецца дэкарэляцыя карэляваных дадзеных у набор некарэляваных. З'яўляецца магчымасць дасягнення больш высокага ўзроўню скарачэння дадзеных, што ўяўляюць лічбавыя выявы твару чалавека.

Няхай у біяметрычнай базе дадзеных ёсць K рэпрэзентацыйных выяў (K выяў) памерам Z. Гэтыя выявы твару прасторава сумешчаны, але маюць розныя значэнні яркасцяў пікселяў. Дапусцім, у базе дадзеных зарэгістраваны дзве розныя выявы твару аднаго чалавека. Схематычна рэпрэзентацыйныя выявы паказаны на малюнку 1. Значэнне яркасці кожнага пікселя складовай выявы можна ўявіць у выглядзе вектару, каардынаты якога вызначаюцца выявамі 1 і 2, г.зн.

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix},$$

дзе адзін вектар апісвае адзін піксель складовай выявы. Для K выяў твару вектар $\boldsymbol{g} = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T$ робіцца n -мерным.



Малюнак 1

Тады складовай выяве адпавядае Z n-мерных вектараў. Вектар $\boldsymbol{g}$ уяўляе выбарку з выпадковага працэсу. Пазначым $\boldsymbol{m}_g$ сярэдні вектар $\boldsymbol{m}_g = \frac{1}{Z}\sum_{i=1}^{Z} \boldsymbol{g}_i$. Выбарковая ацэнка каварыяцыйнай матрыцы $\operatorname{cov}(g)$ для мноства вектараў $\{\boldsymbol{g}\}$ вызначаецца як

$$\operatorname{cov}(g) = \boldsymbol{K_g} = \frac{1}{Z}\sum_{i=1}^{Z}(\boldsymbol{g}_i - \boldsymbol{m}_g)((\boldsymbol{g}_i - \boldsymbol{m}_g)^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1}^2 & \sigma_{n2}^2 & \cdots & \sigma_{n2}^2 \end{bmatrix},$$

дзе элемент σ_{ii}^2 — гэта дысперсія i -й каардынаты вектараў $\boldsymbol{g}$, а σ_{ij}^2 — каварыяцыя каардынат g_i і g_j вектараў $\boldsymbol{g}$.

Тэарэма 1 [1]. Калі $\boldsymbol{K_g}$ — рэчаісная сіметрычная матрыца памерам $n \times n$, заўсёды існуюць прасторы, што складаюцца з n уласных значэнняў λ і n уласных вектараў $\boldsymbol{X}$. Для кожнага ўласнага значэння λ_j існуе хоць адзін уласны вектар $\boldsymbol{X}_j$.

Як вядома, уласныя значэнні $\lambda_1, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_n$ — гэта карані характарыстычнага палінома выгляду:

$$p(\lambda) = \det\left(\boldsymbol{K}_g - \lambda \boldsymbol{I}\right) = (-1)^n(\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n).$$

Тэарэма 2 [1]. Для рэчаіснай сіметрычнай матрыцы заўсёды існуе ортаўнармаваны базіс, што складаецца з n уласных вектараў.

Пры ўмове тэарэмы 2 існуе такая артаганальная матрыца $\boldsymbol{\phi}$ уласных вектараў, што

$$\boldsymbol{\phi}^{-1}\boldsymbol{K}_g\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{D}_g = \operatorname{diag}(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n),$$

дзе $\boldsymbol{D_g}$ — дыяганальная матрыца, якая складаецца з уласных значэнняў матрыцы $\boldsymbol{K}_g$.

У агульным падыходзе лінейнае пераўтварэнне пераводзіць вектар $\boldsymbol{g}$ у некаторы вектар $\widehat{\boldsymbol{g}}$. Вынік пераўтварэння вызначаецца ядром $\boldsymbol{W}$:

$$\widehat{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{g}.$$

Паводле пераўтварэння падабенства [1], каварыяцыйная матрыца вектару $\widehat{\boldsymbol{g}}$ у вобласці пераўтварэнняў вызначаецца як

$$\operatorname{cov}(\widehat{\boldsymbol{g}}) = \boldsymbol{K}_{\hat{g}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{K}_g\boldsymbol{W}^T.$$

Матрыца $\boldsymbol{K}_{\hat{g}}$ мае дыяганальны выгляд, калі матрыцу $\boldsymbol{W}$ скласці з транспанаваных уласных вектараў каварыяцыйнай матрыцы $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{g}}$,

$$\boldsymbol{K}_{\hat{g}} = \boldsymbol{D}_{\hat{g}} = \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{K}_g \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\lambda}_{\hat{g}} = \mathrm{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n). \qquad (1)$$

Выраз (1) азначае, што элементы пературораных дадзеных $\hat{g}_i$ некарэляваныя. Спарадкуем уласныя значэнні па змяншэнні, так што

$$\lambda_j \leq \lambda_{j+1}, \text{ для } j = 1,2, \ldots, n-1. \qquad (2)$$

Няхай матрыца $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{\phi}^T$ складзена з транспанаваных уласных вектараў матрыцы $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{g}}$ такім чынам, каб яны адпавядалі парадкаванню (2). Тады матрыцу $\boldsymbol{W}$ можна скарыстаць у якасці ядра пературэння Хатэлінга

$$\hat{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{m}_g).$$

Зваротнае пераўтварэннем Хателінга вызначаецца формулай

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{W}^T \hat{\boldsymbol{g}} + \boldsymbol{m}_g.$$

Дапусцім, што замест выкарыстання ўсіх уласных вектараў матрыцы $\boldsymbol{K}_g$ будуецца ядро пераўтварэння $\boldsymbol{W}_l$, якое складаецца толькі з l уласных вектараў, якім адказваюць l найвялікіх уласных значэнняў. У гэтым выпадку вектар $\hat{\boldsymbol{g}}$ будзе мець $\hat{\boldsymbol{g}}_l$ ненулявых каардынат,

$$\hat{\boldsymbol{g}}_l = \boldsymbol{W}_l(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{m}_g). \qquad (3)$$

Аднаўленне выточнага вектару праз зваротнае пераўтварэнне Хателінга вызначаецца роўнасцю

$$\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{W}_l{}^T \hat{\boldsymbol{g}}_l + \boldsymbol{m}_g.$$

Калі ў пераўтварэнні выкарыстоўваюцца ўсе ўласныя вектары каварыяцыйнай матрыцы, то памылка аднаўлення $\varepsilon = 0$. Гэта адбываецца з прычыны таго, што ўласныя значэнні $\lambda_j \leq \lambda_{j+1}$ спарадкаваны па змяншэнні. Памылку можна мінімізаваць, выбіраючы l уласных вектараў, якім адпавядаюць найвялікшія ўласныя значэнні. Эфектыўнасць апісання вектару $\boldsymbol{g}$ вызначаецца выбарам, якое захоўвае мноства дэскрыптараў Хатэлінга. Калі дэскрыптар $\hat{\boldsymbol{g}}_j$, адпаведны j-му пікселю, адкідаецца, то сярэднеквадратычная памылка павялічваецца на ўласнае значэнне λ_j. Дэскрыптары выяў $\hat{\boldsymbol{g}}_l$ выкарыстоўваюцца на этапе распазнання. Усячэнне вектару $\hat{\boldsymbol{g}}$ да памеру l прыводзіць да змяншэння ліку ўваходаў класіфікатара, спрашчэння сістэмы распазнання [2]. Уваходны (які ідэнтыфікуецца) вектар выявы $\hat{\boldsymbol{g}}_l^u$ вылічаецца паводле формулы (3). Для распазнання выявы $\hat{\boldsymbol{g}}_l^u$ можа ўжывацца класіфікатар, што працуе с выкарыстаннем дыскрымінантных функцый, ці карэляцыйнага супастаўлення.

Спіс літаратуры

1. Стренг, Г. Линейная алгебра и ее применения; пер. с англ. М.: Мир, 1980.
2. Jähne, B. Digital Image Processing. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ДВУХСЛОЙНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ВАРИАЦИОННОГО ТИПА

А. А. Мусина
Национальный авиационный университет, Киев, Украина
anyamusina@mail.ru

В данной работе рассматривается двухслойный симметризуемый итерационный метод вариационного типа (сокращенно: двухслойный метод) решения линейных операторных уравнений и минимизации квадратичных функционалов. Этот метод включает такие известные методы как методы наискорейшего спуска, минимальных невязок, минимальных погрешностей, минимальных поправок. Его асимптотическое свойство позволяет естественным образом определить асимптотическую скорость сходимости как функцию от начального приближения. Это функция и является предметом исследования данной статьи.

Пусть E — конечномерное действительное евклидовое пространство со скалярным произведением и нормой. Обозначим через линейные невырожденные операторы, действующие в пространстве E. Относительно них предполагаем, что: оператор самосопряжен и положительно определен в E; оператор самосопряжен и положительно определен в энергетическом пространстве; спектр оператора состоит только из простых собственных значений (это предположение не принципиально, но упрощает формулировку результатов).

Двухслойный метод решения операторного уравнения

$$Au = f, \tag{1.1}$$

или, что то же самое, минимизации квадратичного функционала $\left\| u - u^* \right\|_D^2$, задается схемой

$$B\frac{u^{(k+1)} - u^{(k)}}{\tau_{k+1}} + Au^{(k)} = f, \quad k = 0,1,\ldots, \tag{1.2}$$

где $u^{(0)}$ — произвольное начальное приближение, итерационный параметр τ_{k+1} выбирается из условия минимума погрешности $z^{(k+1)} = u^{(k+1)} - u^*$ в энергетическом пространстве E_p и равен

$$\tau_{k+1} = \frac{\left(B^{-1}Az^{(k)}, z^{(k)}\right)_D}{\left\| B^{-1}Az^{(k)} \right\|_D^2}, \tag{1.3}$$

где u^* — точное решение уравнения (1.1), а $z^{(k)} = u^{(k)} - u^*$.

Асимптотическое свойство двухслойного метода состоит в следующем:

если $z^{(1)} = u^{(1)} - u^{*} \neq 0$, то и $z^{(k)} = u^{(k)} - u^{*} \neq 0, k = 0,1,...$, и последовательность $\tilde{\rho}_k\left(u^{(0)}\right) = \left\|z^{(k+1)}\right\|_D / \left\|z^{(k)}\right\|_D$ монотонно убывает.

Поскольку последовательность $\tilde{\rho}_k\left(u^{(0)}\right), k = 0,1,...$ ограничена сверху величиной $\frac{1-\xi}{1+\xi}$, где $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, а γ_1, γ_2 — границы спектра оператора $B^{-1}A$, то существует предел

$$\tilde{\rho}_\infty(u_0) = \lim_{k\to\infty} \tilde{\rho}_k(u^{(0)}),$$

зависящий, вообще говоря, от начального приближения $u^{(0)}$.

Под асимптотической скоростью сходимости двухслойного метода будем понимать следующую функцию начального приближения $u^{(0)}$:

$$\tilde{\nu}(u^{(0)}) = \begin{cases} \infty, & \textit{если } z^{(1)} = 0, \\ -\ln \tilde{\rho}_\infty(u^{(0)}), & \textit{если } z^{(1)} \neq 0 \end{cases}. \qquad (1.4)$$

Представим функцию $\tilde{\nu}$ в виде суперпозиции более простых функций. Из свойств операторов A, B, D следует, что оператор $C = D^{0,5}B^{-1}AD^{0,5}$ самосопряжен и положительно определен, а поэтому существует оператор $C^{0,5}$. Замена $w^{(k)} = C^{0,5}D^{0,5}z^{(k)}$ позволяет перейти от неявной схемы (1.2) двухслойного метода к явной схеме

$$w^{(k+1)} = w^{(k)} - \tau_{k+1}Cw^{(k)}, k = 0,1,..., \qquad (1.5)$$

причем из формулы (1.3) следует, что

$$\tau_{k+1} = \frac{\left\|w^{(k)}\right\|^2}{(Cw^{(k)}, w^{(k)})} \qquad (1.6)$$

(отметим, что $w^{(k)}$ — последовательность невязок метода наискорейшего спуска, примененного к уравнению $Cu = 0$ с начальным приближением $u^{(0)} = C^{-1}w^{(0)}$).

Рассмотрим последовательность

$$\dot{\rho}_k\left(w^{(0)}\right) = \left\|w^{(k+1)}\right\|_{C^{-1}} / \left\|w^{(k)}\right\|_{C^{-1}}.$$

Так как

$$\left\|w^{(k)}\right\|_{C^{-1}} = \left\|z^{(k)}\right\|_D,$$

то

$$\dot{\rho}_k\left(w^{(0)}\right) = \tilde{\rho}_k\left(u^{(0)}\right)$$

и существует предел

$$\dot{\rho}_\infty(w^{(0)}) = \lim_{k\to\infty} \dot{\rho}_k(w^{(0)}),$$

равный $\tilde{\rho}_\infty(u^{(0)})$. Следовательно,

$$\tilde{v}(u^{(0)}) = \dot{v}(w^{(0)}), \tag{1.7}$$

где

$$\dot{v}(w^{(0)}) = \begin{cases} \infty, & \text{если } w^{(1)} = 0, \\ -\ln \dot{\rho}_\infty(w^{(0)}), & \text{если } w^{(1)} \neq 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Преобразуем функцию $\dot{v}$. Пусть $\left\{e_i,\ i = 1, 2, \dots, n+1\right\}$ – ортонормированная система собственных векторов оператора C. Выбирая их в качестве базиса, отождествим пространство E с арифметическим пространством R^{n+1}. Обозначим через

$$\overline{S} = \left\{ x = (x_1, ..., x_n) \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \le 1,\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, ..., n \right. \right\}$$

стандартный симплекс пространства R^n и рассмотрим отображение $\chi : R^{n+1} \setminus \left\{0\right\} \to \overline{S}$, заданное формулой

$$x_i = w_i^2 \Big/ \sum_{j=1}^{n+1} w_j^2,\ i = 1, ..., n.$$

Сужение χ_+ этого отображения на множестве единичных векторов с неотрицательными компонентами

$$\pi^+ = \left\{ w = (w_1, ..., w_{n+1}) \left| \sum_{j=1}^{n+1} w_j^{\,2} = 1,\ w_j \ge 0,\ j = 1, ..., n+1 \right. \right\}$$

есть биекция, поэтому на $\overline{S}$ определена функция $v(x) = \dot{v}(\chi_+^{-1}(x))$. Так как $\dot{v}(w) = v(\chi(w))$ для $w \in R^{n+1} \setminus \{0\}$, то из равенства (1.7) следует, что

$$\tilde{v}(u^{(0)}) = v(\chi(C^{0,5} D^{0,5}(u^{(0)} - u^*))). \tag{1.9}$$

Таким образом, исследование функции $\tilde{v}$ сводится к изучению функции v, которая и является основным предметом исследования данной работы. Эта функция v может быть определена, также как и функции $\tilde{v}$ и $\dot{v}$, с помощью некоторого итерационного процесса.

Обозначим

$$\gamma = \lambda_1 \lambda_{n+1} / (\lambda(\lambda_1 + \lambda_{n+1} - \lambda)),\ \rho_{\max} = (\lambda_{n+1} - \lambda_1) / (\lambda_{n+1} + \lambda_1),$$

$$v_{\min} = -\ln \rho_{\max},\ \rho_{\min} = \sqrt{(1-\gamma) / (1+\gamma)},$$

$$v_{\max} = -\ln \rho_{\min}, \ \Delta = [v_{\min}, \ v_{\max}[, \ \bar{\Delta} = [v_{\min}, \ v_{\max}].$$

Теорема 1. Если $n \geq 2$, то $\operatorname{vrai}\min\limits_{\bar{S}} v(x) = v_{\min}$, $\operatorname{vrai}\max\limits_{\bar{S}} v(x) = v_{\max}$, а $\bar{\Delta}$ – существенная область значений функции v на $\bar{S}$.

Теорема 2. Если $n \geq 2$, то $U \subseteq M \subseteq N \subseteq \bar{M}$, $P \subseteq V$, а функция v почти всюду (по мере Лебега) непрерывна на симплексе $\bar{S}$.

В данной статье дано определение и исследована зависимость от начального приближения асимптотической скорости сходимости двухслойного симметризуемого итерационного метода вариационного типа. Найдено явное выражение существенной (по мере Лебега) области ее значений. Охарактеризована ее область непрерывности.

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПОТОКІВ НЕСТИСЛИВОЇ В’ЯЗКОЇ РІДИНИ І ГАЗУ В ГОРИЗОНТАЛЬНІЙ НАПІВНЕСКІНЧЕННІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ТРУБІ

М. В. Ногін

Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна

nvnogin@gmail.com

Розв’язано ряд спеціальних граничних задач для системи рівнянь Нав’є-Стокса нестаціонарногоо ламінарного руху нестисливої в’язкої рідини в горизонтальній напівнескінченній циліндричній трубі у випадку періодичного закону перепаду тиску, а саме розв’язана крайова задача:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial W}{\partial t} - N\cos\omega t = \dfrac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial W}{\partial r}, & (1) \\ W\Big|_{r=R} = 0, & (2) \\ W\Big|_{t=0} = W_0(r). & (3) \end{cases}$$

Розв’язки отримані у вигляді швидкозбіжних функціональних рядів, що містять функції Бесселя від уявного аргументу.

Одержані прості апроксимації у вигляді відрізків рядів виду

$$W(r,t) = \frac{N}{\omega}\left[\left(1 + 0,00025\,\frac{\omega r^2}{vR^2}\right)\sin\omega t - 0,0038\left(1 - \frac{w^2 r^4}{v^2 R^4}\right)\cos\omega t\right], \quad (4)$$

що дозволило обчислити епюри швидкостей в різні моменти часу, а також епюри дотичних напруг.

Одержані результати застосовують у своїх дослідженнях науковці кафедри гідромеханіки і аеродинаміки НТУУ «КПІ» під керівництвом Залуженого діяча науки та техніки України, професора, д.т.н. Яхно О.М.

Одержані результати також широко використовуються в аеродинаміці для вивчення АДТ малих дозвукових швидкостей науковцями ФАКС НТУУ «КПІ», під керівництвом лауреата Державної премії, к.т.н. Зінченка В.П.

Тепер розглядається потік газу вимушені коливання для

$$f(t) = \frac{\Delta P}{\rho\alpha}\psi(t),$$

причому, функція $\psi(t)$ — характеризує динаміку осьового вентилятора.

Розв’язані спеціальні крайові задачі виду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \left(\bar{V}\cdot\bar{\Delta}\right)\bar{V} = -\dfrac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,P + \gamma\Delta^2 V, \\ \mathrm{div}\,\bar{V} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

з осесиметричним оператором Лапласа.

Список літератури

1. Лойцянський Л. Г., Механика жидкости. — М.: Наука, 1970.
2. Громека И. С., К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках. — Собрание Сочинений АНССР, 1952. — С. 149–171.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1,2. — М.: Наука, 1973.
4. Ногін М. В. Періодичний рух в'язкої нестисливої рідини по необмеженій циліндричній трубі. — Вісник ХПІ, №4, 2013.
5. Костюк Д. В., Ногин Н. В., Яхно О. М. Влияние навигации на величину пульсаций подачи шестеричного насоса. – Тезисы республиканской конференции «Гидроаэромеханика» НТУУ «КПІ», 2013.
6. Ли Вэнь, Зинченко В. П., Зинченко С. В., Ногин Н. В., Муха И. П. Управление потоками газа в аэродинамической трубе. — ХПИ, 2013.

МАТЕМАТИКА В ЕКОЛОГІЇ

Н. М. Панасюк
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
nataly-panasyuk@yandex.ru

У зв'язку з стрімким розвитком сучасної науки і високих технологій в наш час загострився конфлікт між господарською діяльністю людини і природою від чого, в першу чергу, страждає людина, але існує також загроза самій людській цивілізації. Тому гостро актуальним є вирішення екологічних проблем.

Ще в 1866 р. німецький вчений біолог Геккель дав визначення екології як суми знань, що стосується економіки природи. А економіка, зрозуміло, невід'ємно пов'язана з математикою, тобто математика допомагає людству розв'язувати задачі екології.

Зникнення рослин, тварин, мікроорганізмів збіднює генофонд Землі. На ці процеси впливають антропогенні фактори, зміна середовища та руйнування місць пробування (вирубка лісів, забруднення середовища, висушування болот і т.п.), збіднення кормової бази тварин.

Сучасна екологія — системна наука, що вивчає взаємні відносини живих організмів, в тому числі і людини, з навколишнім середовищем. Тому важливою задачею є моніторинг цього середовища, включаючи і космічне. Зараз в усьому світі розвиваються дослідження Землі з космосу (космічний моніторинг), будують центри космічного моніторингу (ЦКМ) для оперативного контролю оточуючого середовища. Найбільш інформативним методом дослідження Землі з космосу є використання і тематичний аналіз зображень отриманих комплексами дистанційного зондування (Д.З.) встановленими на космічних апаратах для отримання геофізичної інформації, необхідної як для оцінки стану оточуючого середовища, так і для природо-ресурсних досліджень.

При обробці екомоніторингових даних використовують методи обчислювальної та математичної біології, в тому числі і математичне моделювання, а також широкий спектр інформаційних технологій.

Широке використання спеціальних космічних апаратів в задачах ДЗ пов'язують проблеми екології з дослідженнями і розрахунками в галузі механіки суцільного середовища, розв'язком задач нестаціонарної взаємодії хвиль з тілами в акустичному середовищі Такі задачі вимагають сумісного розв'язку сукупності диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описують рух середовища та перепони, на поверхні якої формують граничні умови; розв'язку інтегральних рівнянь, застосування спеціальних функцій. Урахування складних процесів, що швидко змінюються та непростий характер взаємодії вимагає достатньо серйозного математичного апарату.

Предмет математичної екології об'єднує моделі та методи для вирішення проблем екології. Використання математичної статистики для обробки даних-одне з найбільш розповсюджених, але не єдине, застосування в еколого-географічних дослідженнях.

Використовуючи методи математичного моделювання можна встановити взаємозв'язки в екосистемах, залежність продуктивності та чисельності популяцій від дії різних екологічних факторів [3].

Теорія динаміки популяцій [2], в якій фундаментальні біологічні засади зміни чисельності видів рослин, тварин, мікроорганізмів та їх взаємодія, є основою математичної екології, що вивчає ці процеси застосуванням в дослідженнях диференціальних, інтегро-диференціальних, різницевих рівнянь тощо.

Оскільки при створенні математичної моделі певного процесу далеко не завжди вдається повністю його описати, застосовують імітаційне моделювання [1] в якому модель спочатку будується концептуально і до якої потім, для формалізації і опису, залучаються методи інформатики, системного аналізу і математичного моделювання Ці моделі включають уявлення про компоненти систем та їх взаємодію у вигляді формул, рівнянь, матриць, таблиць, логічних процедур, графіків; тобто відбувається проникнення математики в різні галузі. Тому, на сучасному етапі розвитку, математика є важливим засобом інтеграції наук.

Застосування математичних методів не змінює методологічних основ науки, а базується на особливостях форм, які вивчаються даною наукою, характері взаємодії явищ або об'єктів такого дослідження В процесі математизації наук математичні методи охоплюють все більше галузей, що застосовують їх в своїх дослідженнях. Формуються нові наукові напрями, такі як математична економіка, математична біологія, математична географія, математична екологія, що за методами досліджень належать до математики

Екологізація математики допомагає отримати нові знання про навколишній світ та його екологічні проблеми, сприяє зацікавленості студентів у навчальному процесі та вирішенню задачі їх екологічного виховання. Наведене вище привертає увагу до ролі математики у вирішенні екологічних проблем та розвитку екологічної науки.

Список літератури

1. Замкова О. О. Математические методы в экономике. — М., 1997.

2. Volterra V. Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together / Rapp. P-V. Reun. Cons. Int. Explor. Mer., 1922.

3. Sjoberg S. A mathematical and conceptual frame-work models of the pelagic ecosystems of the Baltis Sea /Contrib. Asko Lab.Univ. Stockholm. Sweden, 1980.

.

ЗВ'ЯЗОК РОЗПОДІЛУ МАКСИМУМУ ВІНЕРІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ З ЛІНІЙНИМ ЗСУВОМ ІЗ РОЗПОДІЛОМ ПОЛЯ ЧЕНЦОВА ПО ЛАМАНИМ

Н. В. Прохоренко

Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна

natahak@ukr.net

У роботі досліджуються задачі знаходження ймовірності перетину вінерівського процесу з кусково-лінійним зсувом нульового рівня і знаходження розподілу максимуму поля Ченцова по ламаним, зв'язок між цими проблемами. Функціонали від вінерівського процесу і поля Ченцова застосовуються в метеорології, радіофізиці, геології, статистиці, економіці і т. п. Тому дослідження цих об'єктів є дуже актуальним.

Постановка задачі

Розглянемо наступні задачі.

Задача 1. Нехай $n \geq 1$ і $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty$. Розглянемо послідовності чисел $\left\{a_j, j = \overline{1, n+1}\right\}, \left\{b_j, j = \overline{1, n+1}\right\}$ такі, що:

1) $a_j \geq 0, j = \overline{1, n+1}$;

2) $b_{n+1} > 0$;

3) $a_j t_j + b_j > 0, j = \overline{1, n}$, і $a_j t_j + b_j = a_{j+1} t_j + b_{j+1}, j = \overline{1, n}$.

Необхідно знайти ймовірність виду

$$P\left\{\sup_{t \in [T_1, T_2]} (w(t) - h(t)) < 0\right\}, \tag{1}$$

де $h(t) = b_1 I_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i) I_{(t_{i-1}, t_i]}(t) + (a_{n+1} t + b_{n+1}) I_{(t_n, +\infty)}(t)$.

Задача 2. Досліджується двопараметричне поле Ченцова $X(s, t)$ на ламаних L з n точками злому, які починаються в точці $(0,1)$ і закінчуються в точці $(1,0)$. Координати точок злому задовольняють наступні умови:

1) $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = 1$; (2)

2) $1 = y_0 > y_1 \geq \ldots \geq y_n > y_{n+1} = 0$. (3)

Необхідно для $\lambda > 0$ знайти розподіл:

$$P\left\{\sup_{(s,t) \in L} X(s, t) < \lambda\right\}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Нехай $\left\{X(s, t) : s, t \geq 0\right\}$ — це поле Ченцова на одиничному квадраті, $w(t)$— вінерівський процес і ламана L має n точок злому $Q_1, \ldots, Q_n$ з координатами $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ відповідно. Координати цих точок задовольняють умови (2)–(3). Зафіксуємо $\lambda > 0$. Нехай:*

1) $t_i = \frac{x_i}{y_i}, i = \overline{0,n};$

2) $a_i = \frac{\lambda(y_{i-1} - y_i)}{x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i}, i = \overline{1,n}; a_{n+1} = \lambda;$

3) $b_i = \frac{\lambda(x_i - x_{i-1})}{x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i}, i = \overline{2,n+1}; b_1 = \lambda.$

Тоді задачі 2 однозначно відповідає задача 1:

Теорема 2. *Зафіксуємо* $\lambda > 0$. *Нехай* $n \geq 1$, $t_0 = 0$ *і* $t_{j-1} < t_j < \infty, 1 \leq j \leq n$. *Послідовності чисел* $\left\{a_j, j = \overline{1,n+1}\right\}, \left\{b_j, j = \overline{1,n+1}\right\}$ *такі, що:*

1) $a_j \geq 0, j = \overline{1,n}; a_{n+1} = \lambda;$

2) $b_j > 0, j = \overline{2,n+1}; b_1 = \lambda;$*;*

3) $a_i t_i t_{i-1} + b_i t_{i-1} < a_{i-1} t_i t_{i-1} + b_{i-1} t_i, i = \overline{1,n+1}$*;*

4) $a_{i-1} t_{i-1} + b_{i-1} < a_i t_i + b_i, i = \overline{1,n+1}$

Позначимо $h_j(t) = a_j t + b_j, 1 \leq j \leq n+1$. *Нехай*

$$y_i = \frac{\lambda}{h_i(t_i)}, x_i = \frac{\lambda t_i}{h_i(t_i)}, i = \overline{1,n}.$$

Тоді задачі 1 однозначно відповідає задача 2.

Висновки

Ми знайшли умови, за яких задачі 2 однозначно відповідає задача 1. Було розв’язано обернену задачу. Тобто, перехід від знаходження ймовірності перетину вінерівського процесу з кусково-лінійним зсувом нульового рівня до знаходження розподілу поля Ченцова по ламаним.

Доведено, що за певних умов кусково-лінійній функції зсуву однозначно відповідає ламана з n точками злому. Отже, не існує класу кривих, по яким знаходиться розподіл максимуму поля Ченцова і які б відповідали задачі 1.

Встановлено, що задача 1 є «ширшою», ніж задача 2.

Список літератури

1. Klesov O. I., Kruglova N. V. The distribution of a functional of theWiener process and its application to the Brownian sheet // Statistics. — 2011. — **45**, №. 1. — P. 19–26.

2. Клесов І. І. Про ймовірність досягнення криволінійного рівня вінерівським полем// Теор. ймовірност. та матем. статист. — Вип. **51**. — 1995. — С. 63–66.

3. Клесов О. І., Круглова Н. В. Розподіл функціоналів типу максимуму для двопараметричного поля Ченцова // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2007.— № 4. — С. 136–141.

4. Kruglova N. V. Distribution of the maximum of the Chentsov random field // Theory of Stochastic Processes. — 2008.— № 1.— P. 76–81.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Г. В. Пышный, Л. В. Барановская
Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина
Legenkiiveterok@mail.ru

Машиностроение — наиболее крупная комплексная отрасль, определяющая уровень научно-технического прогресса во всем народном хозяйстве, поскольку обеспечивает все отрасли машинами, оборудованием, приборами, а население — предметами потребления. Включает также металлообработку, ремонт машин и оборудования. Моделирование технологических процессов в производстве и логистика играет большую роль в столь материалоемкой и трудоемкой сфере промышленности.

Одна из большого количества задач, с которыми сталкиваются инженеры на предприятиях — задача о нахождении кратчайшем пути. К такой задаче сводятся многие задачи выбора наиболее экономического (с точки зрения расстояния или времени, или стоимости) маршрута на имеющейся карте дорог, многие задачи выбора наиболее экономичного способа перевода динамической системы из одного состояния в другое и т.д.

В математике разработан ряд методов решения подобных задач. Одна из них — задача о нахождении кратчайшего пути между двумя вершинами связанного графа. Такая задача в общем виде может быть сформулирована следующем образом.

Дан граф $G = \left\{X, U\right\}$. Каждому ребру этого графа приписано некоторое число $l(u) \geq 0$, называемое *длиной* ребра. В частных случаях $l(u)$ может быть расстоянием между вершинами, соединяемыми ребром u, временем или стоимостью проезда по этому ребру и т.п. При этом любая цепь μ будет характеризоваться длиной:

$$l\left(\mu\right) = \sum_{u \in \mu} l\left(u\right)$$

Требуется для двух произвольных вершин a и b графа G найти путь μ_{ab}, причем такой, чтобы его полная длина была наименьшей.

Рассмотрим правило для решения задачи частного вида: нахождение кратчайшего пути в графе с ребрами единичной длины.

Иногда приходится иметь дело с графами, ребра которых имеют одинаковую длину, принимаемую за единицу. Вершины такого графа обычно представляют собой состояние некоторой системы, в которой с точки зрения все переходы, делаемые за один шаг, эквивалентны.

Перейдем к задаче нахождения в графе кратчайшего пути, соединяющего начальную вершину с конечной.

Общее правило для нахождения кратчайшего пути в графе состоит в том, чтобы каждой вершине x_i приписать индекс $\lambda_i + 1$, равный длине кратчайшего пути из данной вершины в конечную. Приписывание индексов в случае графа с ребрами единичной длины производится в следующем порядке:

1. Конечной вершине x_0 приписывается индекс 0.

2. Всем вершинам, из которых идет ребро в конечную вершину, приписывается индекс 1.

3. Всем вершинам, еще не имеющим индексов, из которых идет ребро в вершину с индексом λ_i, приписывается индекс $\lambda_i + 1$.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет помечена начальная вершина. По окончании разметки индекс у начальной вершины будет равен длине кратчайшего пути. Сам кратчайший путь найдем, если будем двигаться из начальной вершины в направлении убывания индексов.

Описанный способ является частным случаем нахождения оптимального решения по методу динамического программирования.

Следующая задача: нахождение кратчайшего пути в графе с ребрами произвольной длины.

Задача приписывания вершинам графа числовых индексов усложняется, если ребра графа имеют произвольную длину. Усложнение вызвано тем, что в сложном графе путь, проходящий через наименьшее число вершин, зачастую имеет большую длину, чем некоторые обходные пути.

Процесс приписывания индексов для такого графа заключается в следующем:

1. Каждая вершина x_i помечается индексом $\lambda_i + 1$. Первоначально конечной вершине x_0 приписывается индекс $\lambda_0 = 0$. Для остальных вершин предварительно полагаем $\lambda_i = \infty$.

2. Ищем такую дугу $(x_{i,} x_j)$, для которой $\lambda_j — \lambda_i > l(x_{i,} x_j)$ и заменяем λ_j индексом $\lambda_j' = \lambda_i + l(x_{i,} x_j) < \lambda_{j.}$

Продолжаем этот процесс замены до тех пор, пока остается хотя бы одна дуга, для которой можно уменьшить λ_j.

Отметим два свойства, которыми будут обладать приписанные вершинам индексы.

1. Пусть (x_k, x_s) — произвольное ребро. Для него обязательно выполняется условие $\lambda_k — \lambda_s > l(x_{k,} x_s)$, так как если бы оно не выполнялось, индекс λ_s нужно было бы уменьшать.

2. Пусть x_p — произвольная вершина. При рассмотренном процессе приписывания индексов индекс λ_p монотонно убывает. Пусть x_q — последняя

вершина, послужившая для его уменьшения. Тогда $\lambda_p = \lambda_q + l(x_p, x_q)$. Следовательно, для произвольной вершины x_p с индексом λ_p найдется вершина x_q, соединенная ребром с x_p, такая что λ_p — $\lambda_q = l(x_p, x_q)$.

Эти свойства позволяют сформулировать следующее правило для нахождения кратчайшего пути.

Пусть $x_n = a$ — начальная вершина с индексом λ_n. Ищем вершину $x_{p(1)}$ такую, что $\lambda_{p(n)}$ — $\lambda_{p(1)} = l(x_{p(n)}, x_{p(1)})$ и т. д. до тех пор, пока не дойдем до конечной вершины $x_{p(k+1)} = x_0 = b$. Путь $\mu(x_n, x_{k(1)}, x_{k(s)}, x_0)$, длина которого равна λ_n, является кратчайшим.

На рис.1 представлен пример нахождения кратчайшего пути из вершины a в вершину b.

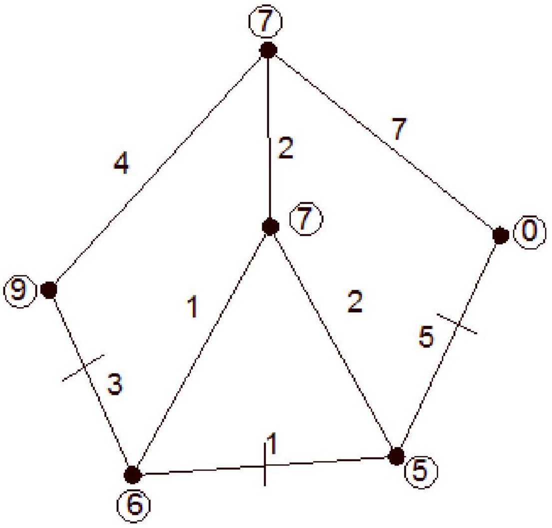


Рис. 1. Нахождение кратчайшего пути

Список литературы

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. — М.: Наука, 1980. — 208 с.

2. Волков И. К. Исследование операций: учеб. для вузов / Волков И. К., Загоруйко Е. А. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. — 436 с.

3. Климович Ф. Ф., Присевок А. Ф. Математическое моделирование технологических задач в машиностроении. Учебно-методическое пособие по лабораторным работам для студентов машиностроительных специальностей высших учебных заведений / Климович Ф. Ф., Присевок А. Ф. — Мн.: БГПА, 2000. — 88 с.

ОПТИМИЗАЦИЯ И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ В ИССЛЕДОВАНИЯХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

С. Г. Радченко

Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина

lapach@ukr.net

При разработке новых и совершенствовании существующих технологических процессов и систем необходимо решать задачи двух классов: многокритериальная компромиссная оптимизация и многофакторное математическое моделирование. Получили известность поисковые методы оптимизации — крутое восхождение по поверхности отклика [1] и последовательное симплекс планирование [2].

Метод крутого восхождения по поверхности отклика характеризуется следующими недостатками.

1. При увеличении числа факторов k необходимые затраты на исследование растут пропорционально $k+1$.

2. Использование метода затруднено или невозможно, если накладываются ограничения на некоторые значения факторов и критериев качества.

3. Метод не эффективен, если поверхность отклика плохо обусловлена.

4. Метод не эффективен при поиске глобального экстремума.

5. По полученным результатам невозможно получение математической модели с хорошими критериями качества.

Последовательный симплексный метод характеризуется следующими недостатками.

1. При увеличении числа факторов k необходимые затраты растут пропорционально $k+1$.

2. Если время для проведения одного эксперимента сравнительно велико, то общее время, затрачиваемое на исследование, может быть неприемлемым.

3. По полученным результатам невозможно построение математической модели с хорошими критериями качества.

Метод случайного поиска с использованием ЛП$_\tau$ равномерно распределенных последовательностей [3] имеет следующие преимущества.

1. При увеличении числа факторов k необходимые затраты растут пропорционально $\sqrt{k}$.

2. Эффективность метода не снижается, если нельзя провести некоторые опыты вследствие ограничений по факторам и критериям качества.

3. Плохая обусловленность поверхности отклика не снижает эффективность поиска экстремума.

4. По одной серии экспериментов можно найти глобальные и локальные экстремумы как минимальные, так и максимальные.

5. По полученным результатам можно построить математическую модель с хорошими критериями качества, если выбрать ЛП$_\tau$ план эксперимента с

ортогональными или слабо коррелированными между собой $(| r(x_i, x_j |<0,3)$ факторами.

Анализ приведенных преимуществ указывает на необходимость использования метода случайного поиска с ЛП$_\tau$ равномерно распределенными последовательностями при проведении сложных, ответственных исследований по оптимизации процессов и систем.

Получение многофакторных математических моделей реальных технологических процессов и систем в большинстве случаев проводится с использованием экспериментального подхода и исходных данных в виде результатов многофакторного эксперимента. Такие задачи относятся к классу обратных задач: по полученным результатам необходимо найти систему влияющих на критерии качества главных эффектов факторов и их взаимодействий. Структура определяемой модели обычно исследователю не известна.

В технологических процессах обработки металлов резанием распространено использование степенных моделей Кобба — Дугласа [4, с. 229–253, 296]:

$$\hat{y} = b_0\, X_1^{b_1} \cdot X_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot X_k^{b_k},$$

Искомые коэффициенты $b_i (0 \leq i \leq k; k$ — число факторов $X_i)$ определяются путем логарифмирования исходной модели $\hat{y}$ и применения метода наименьших квадратов. Использование степенных моделей не имеет теоретического обоснования. Отметим, что минимизация $\sum\limits_{u=1}^{N} (\log \overline{y}_u - \log \hat{y}_u)^2$ не эквивалентна минимизации $\sum\limits_{u=1}^{N} (\overline{y}_u - \hat{y}_u)^2$ $(\overline{y}_u$ — средние значения результатов наблюдений по строкам матрицы результатов; $\hat{y}_u$ — значения определяемой модели по строкам) [5, с. 438–439]. Если величина $\log X_i$ нормально распределена, то «логарифмически нормальное распределение не определяется своими моментами» [6, с. 264].

Для получения моделей с наилучшими возможными свойствами необходимо использовать специально разработанную методологию регрессионного анализа, которая учитывает основные свойства и особенности технологических процессов и систем [7].

1. В качестве планов экспериментов необходимо использовать многофакторные регулярные планы экспериментов и планы на основе ЛП$_\tau$ равномерно распределенных последовательностей. Планы устойчивы (робастны) к выбору структуры модели и соответствуют или близки критериям *D*-, *A*-, *E*-, *G*-, *Q*-оптимальности.

2. Структура статистической модели выбирается из множества структурных элементов схемы полного факторного эксперимента

$$\prod_{i=1}^{k}(1+ x_i^{(1)} + x_i^{(2)}+...+x_i^{(s_i-1)}) \to N_{\text{П}},$$

где 1 — значение фиктивного фактора $x_0 \equiv 1$; $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, ..., $x_i^{(s_i-1)}$ — ортогональные контрасты факторов X_i; s_i — число различных уровней фактора X_i; k — общее число факторов, $1 \leq i \leq k$; (1), (2), …, $(s_i - 1)$ — порядок контрастов фактора X_i; $N_{\text{П}}$ — число структурных элементов полного факторного эксперимента, равное числу опытов эксперимента.

Для формирования структуры модели используется алгоритм RASTA3.

3. Устойчивость структурных элементов достигается путем представления главных эффектов и взаимодействий в виде системы ортогональных контрастов, что эквивалентно системе ортогональных полиномов Чебышева. Ортогональные контрасты необходимо нормировать.

Практическое решение более ста задач по оптимизации и моделированию технологических и техническим систем показало, что разработанная технология эффективна и результативна.

С разработанными методами оптимизации и моделирования и полученными результатами можно ознакомиться [8, 9].

Список литературы

1. Адлер Ю. П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю. П. Адлер, Е. В. Маркова, Ю. В. Грановский / 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1976. — 280 с.

2. Дамбраускас А. П. Симплексный метод / Дамбраускас А. П. — М.: Энергия, 1979. — 176 с.

3. Соболь И. М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И. М Соболь, Р. Б Статников. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Дрофа, 2006. — 175 с.

4. Суслов А. Г. Научные основы технологии машиностроения / А. Г. Суслов, А. М. Дальский . — М.: Машиностроение, 2002. — 684 с.

5. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами / Д. Химмельблау / Пер. с англ; под ред. В.Г. Горского. — М.: Мир, 1973. — 959 с.

6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. — В 2-х томах. Т. 2. Пер с англ. — М.: Мир, 1984. — 738 с.

7. Радченко С. Г. Методология регрессионного анализа. Монография / Радченко С. Г. — К.: «Корнійчук», 2011. — 376 с.

8. Лаборатория экспериментально-статистических методов исследований (ЛЭСМИ) [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.n-t.org/sp/lesmi/

9. Сайт кафедры «Технология машиностроения» Механико-машиностроительного института Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт» [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://tm-mmi.kpi.ua/index.php/ru/1/publications/

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ІГОР ДО РОЗВ’ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

І. В. Рассоха, О. В. Рассоха
Полтавський національний технічний
університет ім. Юрія Кондратюка, Полтава, Україна
innaolha@mail.ru

При вивченні певного матеріалу перед викладачем постає декілька питань, від яких безпосередньо залежить ефективність навчання. Їх можна умовно розділити на три групи: для чого вчити, чому вчити, як вчити. Допомогти дати відповіді на ці питання може концепція міжпредметних зв’язків у навчанні. Звичайно ж реалізувати такі зв’язки в повній мірі в умовах вищої школи практично дуже важко, адже складність матеріалу з різних дисциплін настільки висока, що викладачу математики вільно орієнтуватися в них неможливо. Очевидно, що для більш ефективної реалізації міжпредметних зв’язків потрібна тісна співпраця викладачів різних предметів.

Проблема міжпредметних зв’язків вивчалась в роботах Г. М. Булдика, В. Н. Келбакіані, І. О. Новика, Л. Клейна, А. Камерона, Р. Гарісата та ін. Як зазначає Л. Куклевич, міжпредметні зв’язки «становлять необхідний компонент системності навчання… Налагодження міжпредметних зв’язків сприяє узгодженості і наступності у викладанні, якісному засвоєнню навчального матеріалу, дає змогу підвищити зацікавленість студентів до навчання».

Слід зауважити, що для реалізації міжпредметних зв’язків можна не тільки пов’язувати матеріал з різних предметів, але й розширювати математичну компетентність студентів, вивчаючи такі сучасні й перспективні напрямки математики, як, наприклад, теорія ігор.

У різних галузях людського життя часто виникає необхідність прийняття певних рішень в умовах невизначеності. При цьому потрібно враховувати різні фактори ризику. Одним із інструментів аналізу в таких ситуаціях може бути математична теорія ігор. Вона являє собою точну мову дослідження різноманітних ситуацій, передбачає можливість піддати інтуїтивні уявлення перевірці на логічну узгодженість, допомагає прослідкувати шлях від спостережень до ґрунтовних передбачень і виявити, які з них дійсно лежать в основі даних висновків.

Можа розглянути, наприклад, ігри з неповною інформацією (баєсові ігри). Поняття про такі ігри було введено Дж. Харшаны в роботі [1]. Концепція таких ігор є дуже плідною при моделюванні ситуацій, які передбачають випадковість. Але прийняття рішень в таких умовах передбачає наявність деякої інформації.

Прикладом такої гри може бути наступна задача.

Задача. Керівник пошукової групи (гравець) повинен прийняти рішення: бурити нафтову свердловину чи ні. Таким чином, альтернативами (стратегіями) керівника групи є: бурити, не бурити. При цьому повинна бути врахована вартість, глибина, час, які можна задати таблицею 1, та класифікація свердловин по дебітам, яка наведена в таблиці 2.

Таблиця 1. Вартість, глибина, час буріння

Категорії буріння	Глибина буріння, м	Вартість свердловини, млн. долл.	Час буріння, доба
мілке	до 1500	2,5	20
середнє	до 4500	3,9	31
глибоке	до 6000	4,6	37
надглибоке	глибше 6000	5,4	48

Таблиця 2. Класифікація свердловин по дебітам

Свердловина	Структура порід-колекторів			
	Гранулярні до 60%	Тріщинуваті, до 39%	Змішаної будови до1%	Всього 100%
Низькодебітні	(теригенні) піщано-алеврітові породи піски, пісковики	переважно карбонатні породи глини, доломіти, гіпсивапняки	до вивітрених метаморфічних і вивержених порід вапняки, крейда	піски, пісковики, глини, доломіти, гіпси, вапняки, крейда
Середньодебітні				
Високодебітні				
Надвисокодебітні				

Алгоритм розв'язання таких задач наведено, наприклад, у роботі [2].

Отже, математична теорія баєсових ігор може бути успішно використана в управлінських задачах прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику.

Теоретико-ігрові методи ефективно поєднуються з симплекс-методом і успішно використовуються, наприклад, для розв'язання задач розміщення ресурсів. Одержані результати можуть бути використані при плануванні господарської діяльності агропромислових та інших підприємств. Також корисним буде залучення до розв'язання таких задач можливостей сучасних комп'ютерних технологій.

Таким чином, при вивченні математики необхідним є розглядання прикладних задач, що тісно пов'язані з професійною спрямованістю студентів. Це є потужним мотиватором для вивчення вищої математики. Цілком можливим є ознайомлення з розділами, які безпосередньо не розглядаються в даному курсі, але можуть бути ефективно сприйняті слухачами, є сучасними та корисними у майбутній професійній діяльності.

Список літератури

1. Harsanyi J. C. Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players (parts I, II and III). — Management Science, 1967–1968, **14**, — P. 159–182, 320–334, 486–502.

2. Розен В. В. Математические модели принятия решений в экономике. Учебное пособие. — М.: Книжный дом «Университет», Высшая школа, 2002. — 288 с.

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ АСПЕКТІВ У ФІНАНСОВІЙ МАТЕМАТИЦІ

О. В. Сабіщенко

Національний університет біоресурсів і природокористування України,
Київ, Україна
sabinet@ukr.net

Фінансова математика — прикладна математична дисципліна, яка використовує математичні методи та моделі для проведення фінансових розрахунків, прогнозування фінансових ринків, аналізу фінансових ризиків.

Предметом фінансової математики є методологія та інструментарій фінансових розрахунків та кількісного аналізу ефективності фінансових операцій.

Фінансова математика за допомогою математичних засобів дає змогу своєчасно оцінювати та якомога точніше передбачати зміни основних мікро— та макроекономічних факторів.

Метою проведеного дослідження є вивчення застосування математичних аспектів у фінансовій математиці: методів простих та складних відсотків, а також основ дисконтування.

Основним завданням проведеного дослідження є оволодіння основами математичного апарату сучасних методів кількісного фінансового аналізу; засвоєння фінансово-економічних розрахунків на комп'ютері з використанням базових моделей фінансових операцій і виконання прикладного кількісного фінансового аналізу.

Фінансова математика застосовує математичний апарат фінансових обчислень для розв’язання прикладних економічних задач.

Межі фінансової математики є досить широкими — від елементарних нарахувань відсотків до оцінки ступеня впливу макроекономічних факторів та ефективність спекулятивних торгових стратегій на фондовому ринку тощо.

Основні напрями фінансової математики, які сьогодні виділяють — це:

- стохастична фінансова математика — ймовірнісні методи прогнозування фінансових ринків, розрахунок арбітражної вартості фінансових інструментів;
- класична фінансова математика — відсоткові розрахунки, аналіз потоку платежів, які використовуються у банківській справі, кредитування та інвестування;
- актуарна математика — математична основа страхування;
- економетрика — проведення розрахунків, пов’язаних з прогнозуванням поведінки фінансових ринків.

Математичні основи фінансової математики спираються на курс елементарної математики.

У фінансовій математиці використовуються такі поняття як — геометрична прогресія, відсоткові і, в окремих випадках логарифмічні обчислення і рішення систем рівнянь.

Фінансова математика охоплює такі параметри:

- Вартісні характеристики: ціни, розміри платежів і боргові зобов'язання.
- Тимчасові характеристики: терміни платежів, дати і тривалості періодів, різні відстрочення і т.д.
- Відсоткові ставки, задані як в явній, так і в неявній формі.

Виходячи з вищезазначеного, математичні аспекти мають широку прикладну сферу застосування у фінансовій математиці. Зокрема, концепція вартості грошей у часі та теорія фінансових рент є також основою кількісного інвестиційного аналізу. У фінансовій теорії розроблено методологічні підходи та систему критеріїв оцінки ефективності інвестицій. Також, слід зазначити, що однією з основних прикладних сфер застосування методів та інструментарію фінансової математики є ринок цінних паперів.

Вищенаведене підкреслює важливість та високу ефективність застосування математичних моделей, інструментарію фінансової математики при розв'язанні задач фінансового менеджменту. Дійсно, взаємопов'язані та виражені за допомогою математичних засобів фінансові відносини між господарюючими суб'єктами (бізнесовими одиницями) є математичною моделлю певного управлінського процесу, яка дозволяє аналізувати, отримувати альтернативні варіанти, порівнювати їх і в кінцевому випадку приймати ті або інші рішення.

Тобто, фінансова математика за допомогою математичних засобів дає змогу своєчасно оцінювати та якомога точніше передбачати зміни основних мікро- та макроекономічних факторів.

Враховуючи вищевикладене, завданням фінансової математики є оволодіння основами математичного апарату сучасних методів кількісного фінансового аналізу, необхідного для здійснення широкого спектру різноманітних фінансово-економічних розрахунків; використання методів моделювання і прогнозування фінансових процесів для прийняття обґрунтованих управлінських рішень; засвоєння фінансово-економічних розрахунків на комп'ютері з використанням базових моделей фінансових операцій і виконання прикладного кількісного фінансового аналізу.

В сучасному світі, у високо розвинутих країнах вже давно діють нові математичні професії — фінансових аналітиків і актуаріїв, які є дуже престижними і значущими. Становлення подібних професій починається і в Росії та Україні. Фахове володіння методами й моделями фінансової математики (включаючи її сучасні розділи зі стохастичними моделями, теорії ризику тощо) є головним ядром вказаних нових математичних професій.

Тому, протягом останніх років в Україні фінансова математика стає навчальною дисципліною математичних спеціальностей вузів, разом з такими дисциплінами як математична економіка та актуарна (страхова) математика.

Введення фінансової математики в учбові програми математичних спеціальностей вузів значно збагачує рівень знань і фахової підготовки, сприяє становленню й розвитку багатьох сучасних розділів математичної науки. Крім того, подібної трансформації математичної освіти вимагають і процеси соціально-економічної трансформації суспільства, що виражаються у переході до ринкової економіки та «відкритого суспільства».

Список літератури

1. Борисенко О. Д., Мішура Ю. С., Радченко В. М., Шевченко Г.М. Збірник задач з фінансової математики — К.: Техніка, 2007.

2. Васильченко І. П., Васильченко З. М. Фінансова математика: навчальний посібник — К.: Кондор, 2007.

3. Григорків В. С., Ярошенко О. І., Нікіфоров П. О. Фінансова математика: підручник — Чернівці: Чернівецький національний університет, 2011.

4. Долінський Л. Б. Фінансова математика: навчальний посібник — К.: КНЕУ, 2009.

5. Єлейко Я. І., Кандибка О. М., Лапішко М. Л., Смовженко Т. С. Основи фінансового аналізу — Львів: Львівський банківський інститут Національного банку України, 2000.

6. Козловський С. В.Фінансова математика — К.: Знання України, 2006.

7. Пономаренко О. І. Вступ до фінансової математики. Ніжин, 2003.

РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В ФІЗИЦІ

П. В. Селюк, Л. В. Барановська
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
pashaselyk@yandex.ua

Споконвіку математика черпала потужні імпульси з тісних взаємин, що існують між проблемами і методами аналізу та наочними уявленнями фізики.

Не можна чесно пояснити всю красу законів природи так, щоб люди сприйняли їх одними почуттями, без глибокого розуміння математики.

Математичний апарат проник далеко за межі власне математики: в фізику, нові галузі техніки, біологію і навіть в економіку та інші соціальні науки.

У своїй повсякденній роботі фізик використовує математику для отримання результатів, що випливають із законів природи, і для перевірки застосовності умовних тверджень цих законів до конкретних обставин, що найбільш часто зустрічаються або цікавлять його. Щоб це було можливим, закони природи повинні формулюватися на математичній мові. Однак отримання результатів на основі вже існуючих теорій — аж ніяк не найважливіша роль математики у фізиці. Виконуючи цю функцію, математика, або, точніше, прикладна математика, є не стільки господарем становища, скільки засобом досягнення певної мети. [1]

Математика дає фізиці засоби і прийоми загального і точного вираження залежності між фізичними величинами, які відкриваються в результаті експерименту або теоретичних досліджень.

Всі природничі науки мають потребу в математиці. Значно розширилась область математичних досліджень і програма математичної освіти. Фізика не може існувати без математики і математичних понять, але не зводиться до них. Більш того, головне у фізиці — не формули, а їх інтерпретація, розуміння, саме воно живить інтуїцію. Фізика розвивається за допомогою не математичної логіки, а фізичної інтуїції.

Результативність інтуїтивних методів фізики, неприпустимих з точки зору математики, пов’язана з тим, що екзотичні ситуації, які математик зобов’язаний передбачити, створюючи суворий доказ, не зустрічаються в реальному світі. Нескінченності і розриви в фізичних функціях є результат свідомо ідеалізованої або невдалого формулювання. Ті ж величини в більш досконалій теорії виявляються кінцевими і безперервними при речових значеннях змінних.

Фізика ставить завдання, вирішення яких призводить до появи нових математичних ідей і методів, а вони, в свою чергу, стають базою для розвитку математичної теорії.

Математична теорія з її ідеями та апаратом застосовується для вивчення та аналізу фізичних явищ, що призводить до створення нової фізичної теорії.

Математичний апарат, на який спирається фізична теорія, розвивається по мірі його використання у фізиці; відбувається паралельний прогрес і фізики, і математики.

Математичний апарат необхідний фізиці як мова для опису фізичних процесів і явищ, один з методів фізичного дослідження.

Сто років тому і раніше математика і фізика були тісно пов'язані між собою. З тих пір між ними відбувся розрив, і нині пролом між математикою і фізикою досяг вельми відчутних розмірів. Сучасні математики випускають з уваги, що цінність їх науки визначається насамперед тим внеском, який вона вносить в пізнання законів природи і в оволодіння природою. Більшість сучасних математиків хочуть повністю ізолювати свою науку і займатися лише дослідженнями, лежачими в стороні від насущних проблем природознавства.

У XX ст. розрив між математикою і фізикою прискорився. У наш час нерідко доводиться чути і читати заяви математиків про те, що їх наука не залежить від природних наук. Математики тепер, не вагаючись, відкрито визнають, що їхні інтереси зосереджені на чистій математиці, а фізика їм байдужа. Хоча точна статистика невідома, але можна вважати, що основна частина працюючих сьогодні математиків не досвідчені в фізиці.

Лише останні десятиліття принесли з собою ослаблення зв'язку між математикою та фізикою, математичне дослідження стало часто відриватися від своїх наочних витоків і (особливо в аналізі) зайнялося занадто виключно уточненням своїх методів і уточненням своїх понять. Це призвело до того, що у багатьох представників аналізу зникла свідомість взаємного зв'язку їх науки з фізикою та іншими дисциплінами, а фізики, з іншого боку, часто втрачали розуміння проблем і методів математики і навіть її мови та всієї сфери її інтересів.

Одна з найбільш важливих характерних рис сучасної фізики полягає в тому, що висновки, зроблені з вихідних ідей, мають не тільки якісний, але і кількісний характер; щоб зробити кількісні висновки, ми повинні використовувати математичну мову . І якщо ми хочемо зробити висновки, які можна порівнювати з результатами експерименту, нам необхідна математика як знаряддя дослідження. «Фізичний закон повинен бути математично красивим».

Мова математичних формул дозволяє в ряді фізичних ситуацій без експериментів робити важливі висновки.

Ідеї теорії симетрії, тісно пов'язаної з математикою, зокрема з геометрією, дозволяють в молекулярній фізиці розглянути на основі загальних наукових положень будову молекул кристалів; в оптиці вивчити побудову зображень в плоских дзеркалах; у фізиці елементарних частинок ознайомити зі слабкими взаємодіями кварків і лептонів, досліджувати зв'язок законів збереження та ін.

У міру того як фізика день від дня буде примножувати свої здобутки та виводити нові аксіоми, вона буде в багатьох питаннях потребувати все більшої допомоги математики, і це призведе до створення ще більшого числа областей змішаної математики.

Математика дозволяє довести, що у фізиці, виходячи з різних точок зору, можна прийти до одних і тих же висновків. Це й зрозуміло: якщо у вас є аксіоми, то замість них ви можете скористатися деякими теоремами; фізичні ж закони побудовані так делікатно, що їх різні, хоча і еквівалентні формулювання якісно відрізняються.

«Задача» фізики — визначити необхідний алгоритм (у тому числі і межі екстраполяції). «Завдання» математики — вироблення відгуку згідно з цим алгоритмом.

Без математики немає і фізики.

Список літератури

1. Вигнер Е. Этюды о симметрии IV. Размышления.

2. Журнал «Физика в школе» — 2003. — №1, 5, 9.

3. Клайн М. Книга Математика. Утрата определенности. — М.: Мир, 1984. XIII «Математика в изоляции».

4. Дирак П. Лекція 2. Зв’язок математики з фізикою.

РОЛЬ МАТЕМАТИКИ У ХІМІЇ

П. В. Селюк, Л. В. Барановська
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
PashaSelyk@yandex.ua

У будь-якій науці стільки істини, скільки в ній математики
Іммануїл Кант (1724–1804)

Після того як геніальний М. В Ломоносов увів у хімічну практику вагу, знання математики стало необхідною частиною для любого хіміка. Роль математики, як найсильнішого знаряддя хімії, посилилося з розвитком фізичної хімії, хімічної термодинаміки та кінетики, теорії розрахунків хімічної апаратури тощо. У 1741 р. Ломоносов М. В. у своєму творі «Елементи математичної хімії», писав: «... якщо математики із зіставлення небагатьох ліній виводять дуже багато істин, то і для хіміків я не бачу ніякої іншої причини, внаслідок якої вони не могли б вивести більше закономірностей з такої великої кількості наявних дослідів, окрім незнання математики».

Хімія як наука і як спосіб пізнання природи володіє незвичайними характеристиками. У неї немає власних законів. Усі закони хімії , включаючи періодичний закон, служать лише приватними проявами загальних законів, якими займається фізика. А для доведення цих законів хімія звертається лише до математики, чиї властивості в світі інших наук просто неоціненні. Хіміки зазвичай визначають математику спрощено, як науку про числа. Числами виражаються багато властивостей речовин і характеристик хімічних реакцій. Для опису речовин і реакцій використовують фізичні теорії, в яких роль математики настільки велика, що іноді важко зрозуміти, де фізика, а де математика. Звідси випливає, що і хімія не може існувати без математики [1].

Широке впровадження в дослідну та промислову хімію методів математичного моделювання не тільки не звільняє хіміка від необхідності поглибленого вивчення математичних методів стосовно завдань, які йому доводиться вирішувати, а й, навпаки, робить це вивчення одним з обов’язкових етапів і елементів підготовки сучасного інженера-хіміка і хіміка-дослідника [4].

Інженер-хімік на виробництві постійно стикається з необхідністю наближених значень різного типу складності і різного призначення. Так, наближений розв’язок нелінійних рівнянь дозволяє швидко та з наближеною точністю обчислити вихід хімічних продуктів, розраховувати баланси сировини в складних хімічних процесах і т. д. Наближене диференціювання та інтегрування простих диференційних рівнянь та рівнянь у частинних похідних особливо важливі для отримання та практичного використання даних в кінетиці хімічних процесів [2].

Творче володіння елементами теорії ймовірності та статистичними методами обробки результатів спостережень обов’язково як для хіміка-дослідника, так і для хіміка-технолога. Перший не зможе обійтися без цих методів при статистичній обробці даних експерименту, розрахунку похибок і т.

д; інженер-технолог на підставі статистичних методів і оцінки параметрів розподілу повинен визначати якість, що надходить на процес, сировини або напівпродуктів, а також готової продукції [4].

Математика для хіміків — це, в першу чергу, корисний інструмент розв’язання багатьох хімічних задач. Дуже важко знайти будь-який розділ математики, який зовсім не використовується в хімії. Функціональний аналіз і теорія груп широко застосовуються у квантовій хімії, теорія ймовірностей становить основу статистичної термодинаміки, теорія графів використовується в органічній хімії для передбачення властивостей складних органічних молекул, диференціальні рівняння — основний інструмент хімічної кінетики, методи топології і диференціальної геометрії застосовуються в хімічній термодинаміці. Вираз «математична хімія» міцно увійшло в лексикон хіміків. Багато статей в серйозних хімічних журналах не містять жодної хімічної формули, проте рясніють математичними рівняннями [2].

Математична хімія – це дисципліна, яка являється інтегративною областю, в рамках якої відомі математичні методи (переважно методи розв’язання систем лінійних і нелінійних рівнянь в частинних похідних) застосовуються для розв’язання завдань хімії [5].

Здатність математики створювати знаково-символічні системи, адекватні певному рівню хімічної науки, ущільнювати інформацію, виробляти найбільш раціональні способи її обробки і перетворення, моделювати природні явища і процеси стимулює розвиткові хімії [6].

Взаємодію хімії та математики можна розглядати як процес переважно односторонній. Хімія практично не сприяла розвитку нових галузей математики, а запозичила розроблені раніше розділи математичної науки. Інтеграція хімії з математикою здійснюється за допомогою попередньої взаємодії хімії та фізики. Математичний апарат, що обслуговує визначені розділи фізики, знаходив застосування в задачах хімії [4].

Удосконалення математичного апарату в широкому спектрі пов’язане з розширенням областей дослідження, якими стають екстремальні температури, каталітичні процеси, багатокомпонентні і багатофазні системи, хімічні реакції в твердій фазі тощо. Розвивається теорія нестаціонарних і нерівноважних реакцій, яка підкріплюється всім арсеналом засобів обчислювальної математики. У хімії застосовуються теорія рівнянь в частинних похідних і теорія груп, математична статистика і теорія ймовірностей, методи обчислювальної математики, що визначаються комп’ютеризацією вирішення прикладних математичних задач [4] .

У результаті інтеграції аналітичної хімії та прикладної математики з’явилася хемометрика — інтегративна дисципліна, змістом якої є контроль і оптимізація хіміко-аналітичних процедур на основі використання ЕОМ. Хемометрику вважають приватною областю застосування математичних методів у хімії. Відзначається, що для опису однотипних операцій фахівці в області хемометрики і хімії, які застосовують математичні методи, користуються різною термінологією [6]. Представляє інтерес проблема співвідношення математичної хімії та хемометрики з розділами прикладної математики, які застосовуються в хімії.

Історія науки говорить про те, що на кордонах різних областей знань можуть відбуватися дуже цікаві події. І хоча хіміки та математики мислять зовсім по-різному, ті випадки, коли їм вдається взаємодіяти, призводять до появи красивих і нетривіальних результатів, і сприяють збагаченню обох наук.

Список літератури

1. Химия и жизнь-XXI век, 1997. — № 2. — С. 5.
2. Л. М. Батунер, М. Е. Повин. Математические методы в химической технике. — Л.: Химия, 1971. — 824 с.
3. Брановицкая С. В. Вычислительная математика в химии и химической терминологии [Текст] : учебник / С. В. Брановицкая, Р. Б. Медведев, Ю. Я. Фиалков. — К.: Вища шк., 1986.
4. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов / Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. — К.: Наукова думка,1976. — 269 с.
5. Википедия. Математическая химия.
6. Еремин В. В.. Математика в химии. — М.: МЦНМО, 2011. — 64 с.

К РАСЧЕТУ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ ВАРИАЦИОННЫХ ИТЕРАЦИЙ В СОЧЕТАНИИ С МЕТОДОМ ДВОЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

П. К. Семенов, З. С. Аблемова
Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А., Саратов, Россия
mdt@sstu.ru

Рассматриваются особенности численности реализации задач нелинейной механики прямоугольных пластин на основе использования метода вариационных итераций (МВИ) в сочетании с методом двойной аппроксимации (МДА) в условиях многопараметрического термосилового нагружения.

МВИ [1] и МДА [2] являются модификациями классического вариант метода Власова-Канторовича (МВК), свободными от ряда существенных ограничений: неравноправности координатных направлений и неодинаковой точности решения вдоль различных координат. Кроме того, МДА существенно расширяет класс решаемых задач в связи с возможностью выполнения статических граничных условий по всему контуру пластинки при взятии различных аппроксимирующих функций. Поэтому алгоритм решения, предусматривающий комбинацию МВИ и МДА, представляется перспективным с точки зрения построения экономичных и эффективных высокоточных методик расчета нелинейно-упругих пластин и автоматизации расчетов на ПЭВМ.

Сущность процедуры вариационных итераций заключается в следующем: искомые функции, определенные на предыдущей итерации, принимаются за аппроксимирующие функции на последующей итерации. Итерационный процесс повторяется до тех пор, пока искомые функции и их производные, определенные на соседних итерациях одинаковой четности, или параметры НДС пластинки на двух соседних итерациях не совпадут с достаточной степенью точности.

Существенным упрощающим обстоятельством является наличие в МДА двух однотипных вариационных уравнений, составленных вдоль обоих координатных направлений.

Для решения вариационных уравнений МДА применительно к расчету нелинейно-упругих пластин предлагается использование шаговой процедуры продолжения по линейному параметру от решения задачи МВК до решения МДА. Анализ результатов численных расчетов показывает, что сходимость метода вариационных итераций в сочетании с МДА зависит от числа шагов по параметру продолжения. Для устойчивой сходимости вариационных итераций к стационарному значению во всех рассмотренных численных примерах расчета требовалось выполнение не менее 20 шагов по параметру предложения на отрезке [0,1].

Результаты, полученные при решении нелинейных задач расчета тонкостенных пространственных конструкций по методу вариационных итераций в сочетании с методом двойной аппроксимации, показывают следующее: при переходе к последующему этапу возмущения ведущего параметра задачи (нагрузки, температуры), в смысле реализации метода последовательных возмущений параметров, в качестве аппроксимирующих целесообразно брать функции, полученные на последней итерации предыдущего этапа.

Таким образом, аппроксимирующие функции априорно задаются лишь для первого этапа возмущения ведущего параметра. Аналогичный вывод имеет место в случае принятия для решения нелинейно-упругой задачи сочетания МВИ и метода Власова — Канторовича. Кроме того, очевидно, и это подтверждают расчеты, что при использовании данного подхода гарантируется соответствие аппроксимирующих функций физическому содержанию задачи (граничным условиям, ведущему параметру, определяющему внешнее воздействие), что положительно влияет на сходимость процесса вариационных итераций.

В качестве примера рассмотрены квадратные в плане нелинейно-упругие пластины при задании различных условий закрепления на контуре. Численные данные расчетов свидетельствуют, что использование алгоритма метода вариационных итераций дополнительно к решению по методу двойной аппроксимации дает уточнение решения по прогибам до 3% и по изгибающим моментам до 7% по сравнению с вариантом решения задачи с использованием лишь алгоритма метода двойной (перекрестной) аппроксимации.

Выявлено, что сходимость вариационных итераций в сочетании с МДА не зависит от соотношения сторон пластинки в плане.

Численная реализация задач многопараметрического, например, термосилового, нагружения выявляет еще одну особенность использования сочетания МВИ с МДА (МВК). Исходное уравнение решаемых задач содержит при решении три ведущих параметра: внешнюю поперечную механическую нагрузку, температуру срединной плоскости пластинки и температурный градиент. С использованием данных параметров можно осуществлять различные программы нагружения и нагревания пластинки. Численные расчеты показали, что при смене ведущего параметра целесообразно задавать новые аппроксимирующие функции из условий удовлетворения новому физическому содержанию задачи.

С целью исследования влияния процедуры вариационных итераций на удовлетворение статическим граничным условиям на свободном крае пластинки была решена задача расчета квадратной в плане пластинки с тремя жестко заделанными и одной свободной сторонами.

Список литературы

1. Амельченко В.В. Решение нелинейных задач теории пологих оболочек путем вариационных итераций / В.В. Амельченко, И.В. Неверов, В.В. Петров // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1969. — №3. — С. 62–68.

2. Власов Б.Ф. Двусторонние оценки по энергии в задачах теории тонких упругих плит / Б.Ф. Власов // Труды УДН им. П. Лумумбы. — 1970. — **48**. — Вып. 6. — С. 9–81.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ПЛАСТИН, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ

П. К. Семенов, З. С. Аблемова
Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А., Саратов, Россия
mdt@sstu.ru

Рассматриваются вопросы построения разрешающих уравнений для прямоугольных нелинейно-упругих пластин, взаимодействующих с температурным полем. Учет зависимости свойств нелинейно-упругого материала от температуры и времени осуществляется в компонентных соотношениях, которые принимаются в форме деформационной теории пластичности:

$$\sigma_x = \frac{4\sigma_i}{4\varepsilon_i}\left(\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y - \frac{3}{2}\alpha T\right); \sigma_y = \frac{4\sigma_i}{4\varepsilon_i}\left(\varepsilon_y + \frac{1}{2}\varepsilon_x - \frac{3}{2}\alpha T\right); \tau_{\text{xy}} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy} \quad (1)$$

Здесь σ_i, ε_i — интенсивности напряжений и деформаций соответственно; α — коэффициент температурного расширения материала; T — температура Функциональная зависимость $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i, T, \tau)$ принимается в виде:

$$\sigma_i = E(T,\tau)\varepsilon_i - m(T,\tau)\varepsilon_i^3, \quad (2)$$

где τ — время.

Функции $E(T,\tau)$ и $m(T,\tau)$ могут быть построены по результатам численной обработки нелинейных диаграмм деформирования и кривых ползучести при различных температурах и напряжениях, приведенных в справочной литературе для широкого класса конструкционных материалов [1]. Предлагаемая методика численной обработки экспериментальных данных основана на последовательном применении метода наименьших квадратов сначала для мгновенных диаграмм деформирования ($(\tau = 0)$ при различных температурах и, далее, для кривых ползучести при различных напряжениях и температурах. Показывается [4], что в определенных справочными данными интервалах рабочих температур (до 500°С) и времен (до 100 ч) адекватно могут быть использованы полиномиальные зависимости

$$E(T,\tau) = E_0(\tau) + E_1(\tau)T + E_2(\tau)T^2; m(T,\tau) = m_0(\tau) + m_1(\tau)T + m_2(\tau)T^2. \quad (3)$$

Графики зависимости E и m от температуры в различные моменты времени показывают, что с течением времени функции $E(T)$ и $m(T)$ становятся практически линейными.

По результатам численной обработки экспериментальных данных зависимости $E_0(\tau), E_1(\tau), m_0(\tau), m_1(\tau)$ принимаются в виде квадратичных полиномов. Таким образом, зависимость (2) принимает законченный аналитический вид, позволяющий получить последующие разрешающие соотношения в замкнутой форме. Отмечается [5], что пригодность (2) помимо диапазонов T и τ определяется также положением его аналитического экстремума по ε_i что реально соответствует значениям $\varepsilon_i \leq 0.5\%$. В соотношениях (1) необходимо также учитывать зависимость α от T. Учитывая многочисленные справочные данные, принимается линейная зависимость

$$\alpha(T) = \alpha_0 + \alpha_1(T) \tag{4}$$

Построенные соотношения могут быть эффективно использованы для получении разрешающих уравнений математических моделей (расчетных схем) тонкостенных конструкций, находящихся в условиях термосилового нагружения в течение рассмотренного временного диапазона. Например, для тонких пластинок температура в любой точке объема может быть определена соотношением

$$T(x, y, z) = T_0(x, y) + z\theta(x, y).$$

Здесь T_0 — температура срединной плоскости; θ — температурный градиент. Для получения полной системы уравнений нелинейного термоупругого равновесия уравнениям (1) добавляются геометрические и статические уравнения. Полученная система вместе с граничными условиями порождает нелинейный оператор, линеаризация которого осуществляется построением дифференциала Фреше, в соответствии с известными положениями метода последовательных возмущений параметров [3]. Результирующее разрешающее дифференциальное уравнение в частных производных связывает приращения функций прогиба срединной плоской пластинки Δw интенсивности поперечной нагрузки Δq, температуры срединной поверхности ΔT_0, температурного градиента $\Delta\theta$ и времени $\Delta\tau$. С использованием обозначений операторной символики оно записывается в виде

$$\nabla_A^4 \left[\Delta\omega(x, y, z) \right] = \Delta q + \nabla_T^2 \Delta T_0 + \nabla^2 \Delta\theta + \nabla_\tau^2 \Delta\tau. \tag{5}$$

Наличие в правой части (5) приращений четырех ведущих параметров позволяет путем численного эксперимента исследовать различные программы нагружения, нагревания и разрушения рассматриваемой тонкостенной конструкции.

Приводятся результаты расчета НДС прямоугольных пластинок.

Список литературы

1. Атлас диаграмм растяжения при высоких температурах, кривых ползучести и длительной прочности сталей и сплавов. — М.: Оборонгиз, 1957. — 173 с.

2. Власов Б. Ф. Двусторонние оценки по энергии в задачах теории тонких упругих плит // Тр. УДН им П. Лумумбы. — 1970. — **48.** — Вып. 6. — С. 9–81.

3. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. — 116 с.

4. Семенов П К. К вопросу использования метода последовательных возмущений параметров к расчету нелинейно-упругих пластин в условиях высокотемпературной ползучести // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузки и рабочих сред: Межвуз. науч. сб. — Саратов: СГТУ, 2001. — С. 74.

ЗАСТОСУВАННЯ КОВАРІАНТНОГО ТА КОНТРАВАРІАНТНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ВЕКТОРІВ ТА ТЕНЗОРІВ ПРИ ПОБУДОВІ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ РУХУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ХВИЛЬ

Я. В. Симчук
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
yar_simchuk@ukr.net

При дослідженні поширення циліндричних хвиль виникає потреба запису нелінійних систем рівнянь, що описують найбільш загальний випадок стану середовища, в якому поширюється хвиля. Такі системи можуть бути отримані із загального нелінійного рівняння руху:

$$\nabla_k \left[\sigma^{ki} \left(\delta_i^n + \nabla_i u^n \right) \right] = \rho \ddot{u}^i .$$

В циліндричній системі координат тільки три символи Крістоффеля першого роду Γ_{ki}^m відмінні від нуля: $\Gamma_{22}^1 = -r,\ \ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \left(1/r \right)$. Компоненти нелінійного тензора деформацій Коші — Ґріна

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u_k \nabla_j u^k \right),$$

обчислюються за допомогою коваріантних похідних ко- і контраваріантних компонент вектора переміщень:

$$\nabla_i u^k = \frac{\partial u^k}{\partial \theta^i} + u^j \Gamma_{ji}^k, \qquad \nabla_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial \theta^i} - u_k \Gamma_{ji}^k .$$

В циліндричній системі вони мають вигляд:

$$\nabla_1 u^1 = u_{r,r};\ \nabla_1 u^2 = \frac{u_{\theta,r}}{r};\ \nabla_1 u^3 = u_{z,r};\ \nabla_2 u^1 = u_{r,\theta} - u_\theta;$$

$$\nabla_2 u^2 = \frac{u_{\theta,\theta}}{r} + \frac{u_r}{r};\ \nabla_2 u^3 = u_{z,\theta};\ \nabla_3 u^1 = u_{r,z};\ \nabla_3 u^2 = \frac{u_{\theta,z}}{r};$$

$$\nabla_3 u^3 = u_{z,z};\ \nabla_1 u_1 = u_{r,r};\ \nabla_1 u_2 = r u_{\theta,r};\ \nabla_1 u_3 = u_{z,r};$$

$$\nabla_2 u_1 = u_{r,\theta} - u_\theta;\ \nabla_2 u_2 = r u_{\theta,\theta} + r u_r;\ \nabla_2 u_3 = u_{z,\theta};$$

$$\nabla_3 u_1 = u_{r,z};\ \nabla_3 u_2 = r u_{\theta,z};\ \nabla_3 u_3 = u_{z,z}.$$

Компоненти тензора деформацій набувають вигляду:

$$\varepsilon_{11} = u_{r,r} + \frac{1}{2}\left(\left(u_{r,r} \right)^2 + \left(u_{\theta,r} \right)^2 + \left(u_{z,r} \right)^2 \right);$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(r u_{\theta,r} + u_{r,\theta} - u_\theta + u_{r,r} u_{r,\theta} - u_{r,r} u_\theta + u_{\theta,r} u_{\theta,\theta} + u_{\theta,r} u_r + u_{z,r} u_{z,\theta} \right);$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(u_{z,r} + u_{r,z} + u_{r,r} \cdot u_{r,z} + u_{\theta,r} \cdot u_{\theta,z} + u_{z,r} \cdot u_{z,z} \right);$$

$$\varepsilon_{22} = r u_{\theta,\theta} + r u_r + \frac{1}{2}\left(\left(u_{r,\theta} - u_\theta \right)^2 + \left(u_{\theta,\theta} + u_r \right)^2 + \left(u_{z,\theta} \right)^2 \right);$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(u_{z,\theta} + r u_{\theta,z} + \left(u_{r,\theta} - u_{\theta} \right) \cdot u_{r,z} + \left(u_{\theta,\theta} + u_{r} \right) \cdot u_{\theta,z} + u_{z,\theta} \cdot u_{z,z} \right);$$

$$\varepsilon_{33} = u_{z,z} + \frac{1}{2}\left(\left(u_{r,z} \right)^2 + \left(u_{\theta,z} \right)^2 + \left(u_{z,z} \right)^2 \right).$$

Компоненти тензора напружень знаходять за формулою:

$$\nabla_n \sigma^{nm} = \frac{\partial \sigma^{nm}}{\partial \theta^n} + \sigma^{km}\Gamma^{n}_{kn} + \sigma^{nk}\Gamma^{m}_{kn}.$$

Після спрощень вони набувають вигляду:

$$\nabla_1 \sigma^{11} = \sigma_{rr,r};\ \nabla_1 \sigma^{12} = \frac{\sigma_{r\theta,r}}{r};\ \nabla_1 \sigma^{13} = \sigma\sigma_{rz,r};$$

$$\nabla_2 \sigma^{21} = \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{1}{r}\sigma_{rr} - \frac{1}{r}\sigma_{\theta\theta};\ \nabla_2 \sigma^{22} = \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r^2} + \frac{2}{r^2}\sigma_{r\theta};$$

$$\nabla_2 \sigma^{23} = \frac{\sigma_{\theta z,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{rz}}{r};\ \nabla_3 \sigma^{31} = \sigma_{rz,z};\ \nabla_3 \sigma^{32} = \frac{\sigma_{\theta z,z}}{r};\ \nabla_3 \sigma^{33} = \sigma_{zz,z}.$$

Система рівнянь, що описує поширення циліндричної хвилі в пружному середовищі набуває вигляду, спрощення якого для певної конфігурації середовища призведе до отримання відомих рівнянь.

Для радіальної циліндричної хвилі (вектор переміщень залежить тільки від радіуса) перше рівняння має вигляд:

$$\sigma_{zz,z}\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right) - \rho u_{r,tt} =$$

$$= -\sigma_{rr,r}u_{r,r} - \sigma_{rr,r}\frac{u_{\theta,r}}{r} - \sigma_{rr,r}u_{z,r} - \sigma_{rr}u_{r,rr} - \sigma_{rr}\frac{r u_{\theta,rr} - u_{\theta,r}}{r^2} - \sigma_{rr}u_{z,rr} -$$

$$-\frac{1}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right)\left(u_{r,r} + \frac{u_{\theta,r}}{r} + u_{z,r} \right)$$

Друге та третє рівняння перетворюються на тотожності. Побудову розв’язку отриманого рівняння зручно проводити, записавши його через переміщення.

Список літератури

1. Рущицький Я. Я., Цурпал С. І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. — К.: Інститут механіки НАН України. — 1997. — 377 с.

2. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. — К.: «А.С.К.», 2004. — 672 с.

3. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Гостехиздат, 1953. — 635 с.

4. Демидов Б. И. Теория упругости. — М.: Высшая школа, 1979. — 436 с.

5. Бурак Я. И., Доманский П. П. О применении метода разложения по тензорному базису в нелинейной теории упругости цилиндрических тел // Прикладные проблемы механики тонкостенных конструкций. 75-летию Э.И. Григолюка посвящается // Институт механики МГУ. Под ред. академика РАН С. С. Григоряна. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. — С. 35–54.

К ВОПРОСУ НАРУШЕНИЯ СИММЕТРИИ ВО ВРЕМЕНИ В МАТЕРИАЛИЗОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. А. Сущенко
Львов, Украина
server36@ukr.net

В теории относительности наряду с моделью единого пространства — времени существует понятие универсального времени. Это время связано с реликтовым излучением и «чем-то напоминает ньютоново абсолютное время» [1, с. 313–313].

В работе [2] использовано расширенное понятие универсального времени. Универсальное время здесь «работает» не в единственном числе (свойство абсолютного времени), а вместе с локальным (местным) временем.

Данная работа является развитием и дополнением работы [2]. Поднятый в ней вопрос нарушения симметрии во времени рассматривается в рамках материализованного пространства, то есть пространства с анизотропией упругой волны, распространяющейся в окружающей среде. Такое пространство в результате геометрического усреднения переходит в изотропное пространство, в котором в частном случае при наличии симметрии окружающей средой пренебрегают. Поскольку в материализованном пространстве постулат Эйнштейна $c = \mathrm{const}$ (где c — скорость света в физическом вакууме) не действует, изложение данной работы идёт без связи со специальным принципом относительности [3, с. 205], то есть четырёхмерный квадрат пространственно-временных координат уже не является физическим инвариантом (как скажем, пространство и время), а заменяется условиями физической инвариантности теории физической инвариантности. В последних используется $v_m \neq \mathrm{const}$ (максимальная скорость распространения физического взаимодействия приблизительно равная табличному значению скорости света в окружающей среде).

Используемые в самом общем случае условия физической инвариантности для случая симметрии [4] конкретизируются нашим случаем нарушения симметрии во времени с приближением:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \xi \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \xi \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} \tag{1}$$

где ξ — коэффициент нарушения симметрии (при ξ=1), то есть пренебрежением действия в направлении осей Y, Z движения в волнообразной среде в направлении оси X. Развивая работу [2], обратимся к общему случаю $t' = \xi\, t$; тогда при обобщении пространственно-координатного перехода

$$x' = k(x - v_1 t) \qquad\qquad x = x'\left(x' + \frac{v_1}{\xi} t'\right)$$

$$y' = y\,;\; z' = z \qquad\qquad y = y'\,;\; z = z' \tag{2}$$
$$t' = \xi\, k \left\{ t - \left(1 - \frac{1}{kk'}\right) \frac{x}{v_1} \right\}; \qquad t = k' \left\{ \frac{t}{\xi} + \left(1 - \frac{1}{kk'}\right) \frac{x'}{v_1} \right\}$$

с условием физической инвариантности

$$v_m^2 t^2 - x^2 = \frac{v_m^2}{\xi^2} t'^2 - x'^2\,;\; y' = y\,;\; z' = z \tag{3}$$

имеем следующие преобразования с учётом (1):

$$x' = \frac{x - v_1 t}{\sqrt{1 - \dfrac{v_1^2}{v_m^2}}}\;;\; y' = y\,;\; z' = z \qquad x = \frac{x' + \dfrac{v_1}{\xi} t'}{\sqrt{1 - \dfrac{v_1^2}{v_m^2}}}\;;\; y = y'\,;\; z = z'$$
$$\tag{4}$$
$$t' = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \dfrac{v_1^2}{v_m^2}}} \left[t - \frac{v_1}{v_m^2} x \right] \qquad t = \frac{\dfrac{t'}{\xi} + \dfrac{v_1}{v_m^2} x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v_1^2}{v_m^2}}}$$

Преобразования (4) при $\xi = 1$ переходит в преобразования Лоренца, а при $\xi = \sqrt{1 - \dfrac{v_1^2}{v_m^2}}$ в преобразования с нарушением симметрии во времени.

Далее из [2] вид несимметрического гальминтониана H:

$$H = v_m \sqrt{p^2 + \frac{m^2 v_m^2}{\left(1 - \dfrac{v_1^2}{v_m^2}\right)}}$$

Несимметричного релятивистского уравнения Шредингера (для частиц со спином 0,1) для ψ-функции:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = -\hbar^2 v_m^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + \frac{m^2 v_m^4}{\left(1 - \dfrac{v_1^2}{v_m^2}\right)} \psi(x,t)$$

Заметим, что обозначение v_m, употребляемое нами, равнозначно обозначению ω в работе [4]. При этом текущая скорость v_1 компонуется с абсолютной скоростью v_m, но поскольку для физики процессов важно отношение величин, то сравнение $\frac{v_1}{v_m}$ с релятивистским отношением $\frac{v}{c}$, где v — относительная скорость, вполне допустимо. Компоненты тензора электромагнитного поля F_{ik} находятся из произведения двух векторов:

$F_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{kl}F_{ml}$, где α_{im}, α_{kl} — матрицы четырёхмерного импульса P_i, тогда

$$F_{23} = F'_{23}$$

$$F_{12} = \frac{F'_{12} - i\,\frac{v_1}{v_m}\,\frac{F'_{42}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{v_m^2}}}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{v_m^2}}} \qquad F_{13} = \frac{F'_{13} - i\,\frac{v_1}{v_m}\,\frac{F'_{43}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{v_m^2}}}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{v_m^2}}}$$

$$F_{42} = \frac{\frac{F'_{42}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{v_m^2}}} + i\,\frac{v_1}{v_m}\,F'_{12}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{v_m^2}}} \qquad F_{43} = \frac{\frac{F'_{43}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{v_m^2}}} + i\,\frac{v_1}{v_m}\,F'_{13}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{v_m^2}}}$$

и т.д. для штрихованных компонент.

Из условия $\left(1-\frac{1}{kk'}\right)= 0$ [см. (2)] при $\xi = \sqrt{1-\frac{v_1^2}{v_m^2}}$ получаем преобразования

$$x' = \left(x - v_1 t\right)\sqrt{1-\frac{v_1^2}{v_m^2}} \qquad x = \frac{x + v_1 t'}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{v_m^2}}}$$

$$y' = y;\ z' = z \tag{5}$$

$$t' = \sqrt{1-\frac{v_1^2}{v_m^2}}\,t \qquad t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{v_m^2}}}$$

При $v_m = c$ преобразования (5) переходят в преобразования теории абсолютных скоростей (ТАС) [5].

При $\xi = 1$ из (2) с условием анизотропии упругой волны $x = x' = v_m t\big|_{t=t'}$

$$x' = \frac{x - v_1 t}{1 - \dfrac{v_1}{v_m}} \qquad y' = y\,;\; z' = z \qquad t' = \frac{t - \dfrac{v_1}{v_m} x}{1 - \dfrac{v_1}{v_m}}$$

$$x = \frac{x' + v_1 t'}{1 + \dfrac{v_1}{v_m}} \qquad y = y'\,;\; z = z' \qquad t = \frac{t' + \dfrac{v_1}{v_m} x'}{1 + \dfrac{v_1}{v_m}} \tag{6}$$

При $v_1 = v,\ v_m = c$ преобразования (6) совпадают с преобразованиями, выведенными методом системного анализа в монографии [6, с. 6]. Причём там допускают $c = c_i$, где c_i— скорость распространения информации. Таким образом, рассмотрение модификаций пространственно-временных преобразований общей формы на основе обобщения пространственно-координатного перехода $x' = x - vt$ объединяет предлагаемые модели теории пространства, времени и материи и не даёт ограничиваться только моделью единого пространства-времени, принятой в частной теории относительности (СТО). Более того, именно модификации преобразований общей формы, а не преобразования Лоренца, важны при описании физических явлений и в технических приложениях.

Список литературы

1. Бёрке У. Пространство — время, геометрия, космология / У. Бёрке. — М.: Мир, 1985.

2. Сущенко В. А. Рассмотрение нарушения симметрии во времени в изотропном пространстве / Матеріали XI Міжнар. наук. конференції ім. акад. М. Кравчука. — К., 2006. — С. 610.

3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. т.III., ч.I. / В. М. Смирнов. — М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1953 — Новосибирское книжное изд-во, 1988.

4. Умов Н. А. Единообразный вывод преобразований, совместных с принципом относительности // Phys. Zeits., 1910. Н. А. Умов. Изб. соч. — М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1950. — С. 492–499.

5. Ухватов А. В. Некоторые энергетические следствия теории абсолютных скоростей. Материалы научно-технического семинара «Прикладные и теоретические вопросы нетрадиционной энергетики». — Л.: ЛДНТП, 1990. — С. 89–91.

6. Денисов А.А. Мифы теории относительности / А. А. Денисов. — Вильнюс, ЛитНИИНТИ, 1989.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ЭКОЛОГО-МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Б. С. Тлеумуратова
Каракалпакское отделение АН РУз, Нукус, Узбекистан
tbibigul@mail.ru

Те практические задачи, которые сегодня решаются, требуют глубокого системного изучения отдельных объектов и явлений природы. Большое число задач связано с исследованием сложных систем, таких, которые включают множество элементов, каждый из которых представляет собой достаточно сложную систему, и эти системы тесно взаимосвязаны с внешней средой.

Нами рассматривается системное моделирование сложных эколого-метеорологических процессов (СЭМП), происходящих вследствие усыхания Аральского моря [1]. Физическая суть задачи состоит в исследовании многолетней динамики системного воздействия экологических трансформаций (усыхание Арала, деградация растительного покрова и вынос солей с постаквальной суши) на региональные почвенно-климатические условия (рис.1).

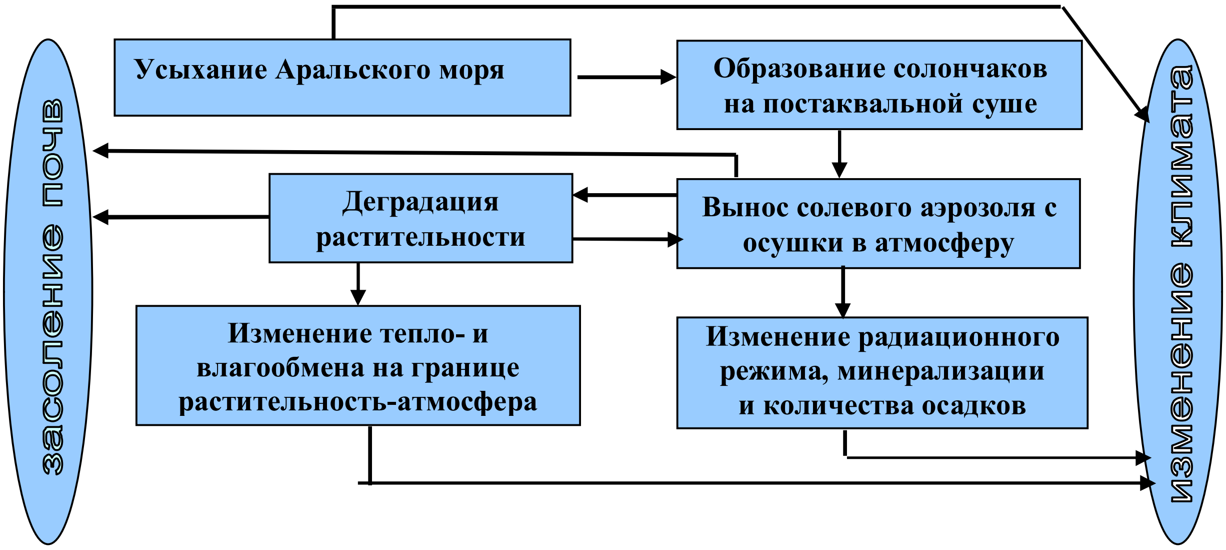


Рис.1. Схема взаимосвязей моделируемых процессов и трансформаций геоэкосистемы Арала и Приаралья

Сложные экометеорологические процессы, являясь достаточно широким классом геофизических процессов, имеют ряд особенностей, обусловливающих специфику моделирования СЭМП.

1. Экометеорологические явления представляют собой динамическую систему синергетических интерактивных процессов, имеющую в своем составе недоступные прямым измерениям процессы. Следовательно, безальтернативным инструментом исследования СЭМП является системное моделирование.

2. Сложный экометеорологический процесс – это взаимодействие двух сильно различающихся по динамичности сред: атмосферы и подстилающей поверхности. Длительность формирования устойчивых отклонений параметров этих сред от нормы обусловливают многолетний период моделирования

динамики СЭМП. Вместе с тем реактивность атмосферы и скорость метеорологических процессов требуют включения несравнимо меньших по времени локальных периодов моделирования. Таким образом, модель СЭМП существенно иерархична по времени и программа реализации модели представляет собой цикл с многоуровневыми вложениями.

3. Неотъемлемым свойством сложного экометеорологического процесса является полимасштабность, которая выражается в том, что составляющие СЭМП процессы имеют разные пространственные и временные масштабы, нередко различающиеся на несколько порядков. Отсюда следует необходимость параметризаций подсеточного масштаба и разработки средств согласования и адаптации данных при организации программных модулей информационного обмена внутри системы моделей.

4. Отличительной особенностью СЭМП является большой объем входных параметров, их тесная взаимосвязь, иногда и недостаточная репрезентативность. Это требует создания ряда дополнительных модулей для обработки входных данных тестированием на попарную согласованность параметров, их четкое хронологическое и пространственное соотнесение, организации ввода данных в ту или иную программу системы единым ансамблем, интерполяции/эктраполяции, осреднения и т.п.

5. Характерным отличием СЭМП является слабая структуризация, т.е. наличие априорно не сформулированных количественно (порой и качественно) связей между отдельными процессами. Поэтому при моделировании СЭМП необходимо предусмотреть построение вспомогательных модулей для корреляционного анализа выходных файлов программ, описывающих процессы, связи между которыми устанавливаются и/или оцениваются количественно.

С учетом этих особенностей СЭМП нами разработана математическая модель, состоящая из 13 подмоделей. Динамика СЭМП (отклонения той или иной климатической характеристики Ξ от среднего многолетнего значения) в целом представляется как сложная функция бинарных взаимодействий:

$$\Delta\Xi = \varphi(f_n(f_{n-1} \cdots (f_2(f_1(t))))), \tag{1}$$

где функции $f_n, f_{n-1}, \ \ldots, f_2, f_1$ являются аппроксимацией динамики причинно-следственного ряда факторов.

В результате моделирования выявлены и представлены аналитически основные закономерности многолетней (1966–2005гг.) динамики исследуемого СЭМП. В частности, выявлено существенное влияние выноса солей с постаквальной суши Аральского моря на процессы осадкообразования в Южном Приаралье [2].

Список литературы

1. Тлеумуратова Б. С. Влияние солепылепереноса на осадкообразование в Приаралье //Аридные экосистемы. — 2009. **15**. – №3 (39). — С. 28–35.

2. Тлеумуратова Б. С., Бахиев А. Б. Влияние деградации растительности в Приаралье на локальные климатические характеристики // Проблемы освоения пустынь. — 2008. — №2. — С. 35–39.

АНАЛИЗ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ТЕПЛОВОЙ СЕТИ ПРИ ЗАДАННЫХ ТЕПЛОВЫХ РЕЖИМАХ ЕЕ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

М. Ю. Федоров
Национальный авиационный университет, Киев, Украина
mikhail.fedorov59@gmail.com

Математические модели и методы анализа стационарных режимов функционирования тепловых (ТС) сетей широко представлены в научной литературе [1–12]. Интерес к стационарным задачам обусловлен двумя основными причинами. Первая состоит в том, что она может служить в качестве подзадачи процесса проектирования ТС, а вторая — это то, что с достаточной для практики точностью такие большие объекты как городские тепловые, водопроводные и газовые сети являются квазиустановившимися.

Существует два научных направления в области анализа таких моделей ТС: представление модели анализа в виде системы нелинейных уравнений [1–6] и в виде оптимизационной задачи [1, 3, 6–11]. Каждое из этих направлений реализует свойственные ему механизмы для моделирования органов управления ТС. В случае первого направления программируется некоторая эвристическая логика [1, 2, 4, 5] с целью удовлетворения ограничений-неравенств, являющиеся неотъемлемой частью любой модели управления. Во втором случае ограничения-неравенства удовлетворяются естественным образом, присущим каждому алгоритму который реализует оптимизационный метод. Регулированию режимами работы ТС уделялось достаточно много внимания. Хотя история данного вопроса достаточно долгая, представлена она достаточно скудным, если иметь ввиду только количество, числом публикаций. Задачи же в них поставленные хорошо проработаны. Все вместе, эти работы определили круг задач под общим названием «оптимальное управления потоками в инженерных сетях» [1, 3, 6–11]. Основным здесь критерием, для построения универсальных методов регулирования расходов и давлений, использовался принцип минимума мощности. В этих работах ставится и решается задача нелинейного программирования. Отдельные вопросы управления освещены в [1, 2, 4], где демонстрируется алгоритмический подход в решении задачи управления по давлениям. При таком подходе базовая модель — анализ потокораспределения — погружается в систему итерационных циклов («двойных циклов»), которые управляют подбором расхода и/или давления (т.е. сопротивлений регулятора расхода и давления) с целью достижения заданного регулирования. Такой подход применен в [5] для разработки алгоритма термостатирования авиационных систем кондиционирования воздуха. Нельзя отнести данный подход к универсальному, т.к. он разработан для ограниченной структуры управления. Иногда задача управления расходом моделируется как потокораспределение с заданными расходами в ветвях с регуляторами расхода. При наличии обратных клапанов рассматривается процедура [4], проверки на каждом шаге знака перепада на обратном клапане, если она отрицательна, сопротивление принимается равным заранее определенной бесконечно большой величине сопротивления. Формально, такой подход может приводить к зацикливанию, т.к. обратный клапан представляет собой недифференцируемую функцию, хотя на практике такого рода алгоритмы работают достаточно надежно. В связи с этим, в [12] предлагается дифференцируемая форма модели обратного клапана.

Из обзора литературы следует, что отсутствует постановка и решение задачи регулирования температуры как самостоятельной задачи, так и в сочетании с управлениями по другим параметрам — давлениям и/или расходам. Причиной тому является тот факт, что задачу управления температурой нельзя сформулировать чисто формально без учета ее специфики. В противном случае, можно получить модель с бесконечным числом решений. Чтобы сформулировать модель управления температурой необходимо ее привязать к топологической модели ТС — ее графу, $G = \left(V, E\right)$, где $V \in \mathbb{N}$, $E \subseteq V \times V \in \mathbb{N}$, соответственно, множество номеров узлов и ветвей в количестве $n_t = \left|V\right|$ и $e = \left|E\right|$, причем $V = V_i \cup V_b$, где $V_i = \left\{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n_i\right\}$, $V_b = \left\{i \in \mathbb{N} : n_i \le i \le n, \mathrm{d_G}\left(i\right) = 1\right\}$, $n_i = \left|V_i\right|$, $n_b = \left|V_b\right|$, $n = n_i + n_b$, где $\mathrm{d_G}$ обозначает степень узла. В узлах V_b приписываются значения переменным модели (напр., температуры, давления). Граф ТС определяется матрицей инциденций $\mathbf{A}_{n_i \times e}$. Модель описывается тремя основными уравнениями сохранения: массы, момента и энергии. Для целей исследования рассмотрим упрощенную модель управления температурой, которая может иметь и самостоятельный практический интерес

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{A}\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{m}} \\ \dot{\mathbf{M}} \end{pmatrix} = \left(\tilde{\mathbf{A}}_{n \times e_m} \mid \mathbf{0}\right)\dot{\mathbf{m}} + \left(\mathbf{0} \mid \bar{\mathbf{A}}_{n \times n_{TRD}}\right)\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{A_m}\dot{\mathbf{m}} + \mathbf{A_M}\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{A}\mathbf{D_m}\mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{D_r}\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{m}} \\ \dot{\mathbf{M}} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

$$\mathbf{h}_4 = \mathbf{B}_{n_T \times e}\mathbf{T}, \quad (4)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A_m} + \mathbf{A_M}$; $\dot{\mathbf{m}}_{e_m \times 1}$, $\mathbf{T}_{e \times 1}$, $\mathbf{P}_{n \times 1}$, $\mathbf{K}_{e \times 1}, \dot{\mathbf{M}}_{e_{TRD} \times 1}$ векторы искомых расходов, температур, давлений, сопротивлений и заданных расходов, соответственно; $e_m = e - e_{TRD}$; $\mathbf{D_m} = \mathrm{diag}\left(\dot{\mathbf{m}}, \dot{\mathbf{M}}\right)$, $\mathbf{D_r} = \mathrm{diag}\left(\mathbf{K}\left|\dot{\mathbf{m}}\right|, \mathbf{R}\left|\dot{\mathbf{M}}\right|\right)$, где $\mathbf{R}_{e_{TRD} \times 1}$ обозначает сопротивления регуляторов температуры. Матрица $\mathbf{B}_{n_T \times e}$ в (4) характеризует изотермичность процесса в ветвях ТС, элементы которой определяются следующим образом

$$B_{l,*} = \begin{cases} B_{l,i} = 1,\, B_{l,\mathrm{j}} = -1, & \exists\left(i,j\right) \in \Pi_l \\ B_{l,k} = 0, & \forall k \notin \left(i,j\right),\, l = \overline{1,n_T} \end{cases}, \tag{5}$$

где $\Pi \supseteq \Pi_k = \Theta_k\left(1\right)\times\left(\Theta_k - \Theta_k\left(1\right)\right)$ такое, что $\Pi = \bigcup\limits_k \Pi_k = \varnothing$, $k \in V_T$, $V_T = \left\{k \in V : \Theta_k > 1\right\}$, а $\Theta_k = \mathrm{od}_{\mathrm{G}}\left(k\right)$ — степень вершины графа ТС, ветвей исходящих из k, тогда $n_T = \sum\limits_{k=1}^{\left|V_T\right|}\left|\Pi_k\right|$. Уравнения (1)-(6) также предполагают, что жидкость несжимаемая, течение одномерное, сопротивления пассивных элементов ТС постоянные, а процесс смешения в ее узлах идеальный. Будем исследовать задачу, реализующую следующую функцию цели

$$\min \quad f = \left(\mathbf{T}_{\mathbf{TRD}} - \mathbf{T}_{\mathrm{S}}\right)\left(\mathbf{T}_{\mathbf{TRD}} - \mathbf{T}_{\mathrm{S}}\right)^T \tag{6}$$

где $\mathbf{T}_{\mathbf{TRD}}$, $\mathbf{T}_{\mathrm{s}}$ векторы температур в точках их измерения и настроек регуляторов температур. Бесконечное число решений, вытекает из того факта, что минимум функции (6) может быть получен при разных распределениях расходах в ТС. В самом деле, когда мы моем руки под краном, они выполняют роль чувствительного элемента $\mathbf{T}_{\mathrm{s}}$, которую мы достигаем путем поворота кранов с горячей либо холодной водой, проверяя при этом каждый раз разницу между достигнутой температурой $\mathbf{T}_{\mathbf{TRD}}\left(\dot{\mathbf{m}}\right)$ и заданной, $\mathbf{T}_{\mathrm{s}}$. Потребность в горячем либо холодном теплоносителях, реализуемое ТС, определяется потребителями и определяется заданными расходами, которые предположительно должны иметь температуры $\mathbf{T}_{\mathrm{s}}$. Размерность пространства поиска в (6) можно сократить в два раза, если заметить, что, ***в общем случае***, необходимая температура в смесителе определяется однозначно не отдельно взятым расходом, а отношением расходов горячего и холодного источников, $\boldsymbol{\beta}$. Т.е. (1)–(5) дополняется уравнениями вида

$$\mathbf{h}_4 = \mathbf{A}_1\dot{\mathbf{m}} - \mathbf{A}_2\mathbf{D}_{\beta}\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{0}\ , \tag{7}$$

где $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ подматрицы номеров ветвей, которые составляют пары, втекающих в узел смешения ветвей, $\mathbf{D}_{\beta} = \mathrm{diag}\left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{e_m}\right)$. В результате (1)-(5), (7) содержит единственный свободный вектор переменных, $\boldsymbol{\beta}$, неявной функцией которого является $\mathbf{T}_{\mathbf{TRD}} = \mathbf{T}_{\mathbf{TRD}}\left(\boldsymbol{\beta}\right)$. Таким образом, специфика задачи стационарного управления температурой состоит в том, что тепловая нагрузка потребителей должна быть пол-

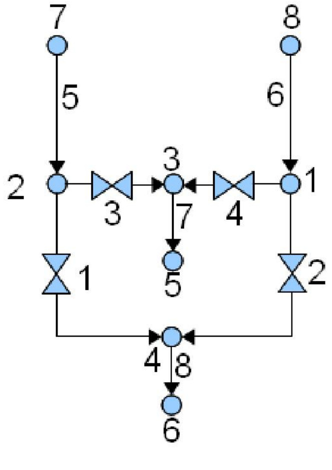


Рис.1. Пример ТС

ностью определена. На Рис. 1–2 показаны простая ТС и фунцция цели управления температурой в такой ТС, которая, как видно, имеет единственный минимум.

Неявность функции $\mathbf{T}_{\mathbf{TRD}}\left(\boldsymbol{\beta}\right)$ создает неудобство в использовании стандартных пакетов программ, реализующие оптимизационные методы, которое, однако, легко преодолеваются. Кроме того, можно показать, что необходимыми условиями функции Лагранжа построенной на основании (1)–(6) приводит к определенной нелинейной системе алгебраических уравнений, имеющая те же решения, что и эквивалентная ей оптимизационная задача (1)–(6). Эта задача может быть эффективно решена, так как при каждом $\boldsymbol{\beta}^{(k)}$ решается нелинейная система уравнений (1)–(5),(7), решение которой вместе с оценкой (7) представляет собой некоторую неявно заданную функцию с простым ограничением $\boldsymbol{\beta} > 0$.

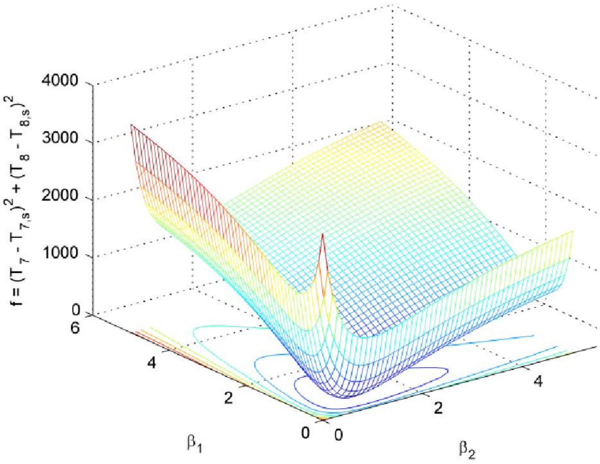


Рис.2. Функция цели

Список литературы

1. Меренков А. П., Хасилев В. Я. Теория гидравлических цепей. — М.: Наука, 1985.

2. Сеннова Е. В., Сидлер В. Г. Математическое моделирование и оптимизация развивающихся теплоснабжающих систем. — Новосибирск: Наука, 1987.

3. Евдокимов А. Г., Тевяшев А. Д., Дубровский В. В. Моделирование и оптимизация потокораспределения в инженерных сетях. — М.: Стройиздат, 1990.

4. Chandrashekar M. Extended set of components in pipe networks// Journal of the hydraulic division. —1980. **106**. — № HY1. — P. 133–149.

5. Винничук С. Д. Методы и алгоритмы решения задач анализа, проектирования и управления распределением потоков в гидравлических распределительных системах. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, ИПМЭ НАНУ, 2005.

6. Fedorov M. Parallel Implementation of a Steady State Thermal and Hydraulic Analysis of Pipe Networks in OpenMP. PPAM 2009, Part II, LNCS 6068, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2010. — P. 360–369.

7. Шевяков Л. Д. Вывод формул естественного распределения воздуха в горных выработках из начала наименьшей работы // Горный журнал. — 1929. — № 1. — С.3–6.

8. Цой С., Рязанцев Г. К. Принципы минимума и оптимальная политика управления вентиляционными и гидравлическими сетями. — Алма-Ата: Наука, 1968.

9. Волков А. А. Синтез оптимального управления конечным состоянием потокораспределения в сети. — В кн.: Поиск экстремума. Тр. III Всесоюзн. Симпозиума по экстремальным задачам. Изд-во Томск. Ун-та, 1969. — С. 363–369

12. Deuerlein J.W., Simpson A.R., Dempe S. Modeling the behavior of flow regulating devices in water distribution systems using constrained nonlinear programing. //J. Hydraulic Eng. — 2009. — **135** (11). — P. 970–982

13. Gopal V., Biegler L. T. Smoothing methods for complementarity problems in process engineering // American Institute of Chemical Engineers. AIChE Journal. — 1999. **45.** — № 7. — P. 1535–1547.

РОЗПІЗНАВАННЯ СТАДІЇ ПРОТІКАННЯ ЗАХВОРЮВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ ЗІ ЗВОРОТНІМ ПОШИРЕННЯМ ПОХИБКИ

А. В. Харченко, О. В. Шкуліпа
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aliona.kharchenko@gmail.com, elena.andruschak@gmail.com

Розглядається побудова алгоритму навчання з вчителем за допомогою нейронної мережі зі зворотнім поширенням похибки для встановлення фази перебігу захворювання. Для розв’язання задач класифікації та прогнозування використовуються різні математичні методи: математична статистика, кластерний та регресійний аналіз, факторний аналіз та багато інших. Проте коли справа стосується реальних даних, деякі методи не можуть гарантувати успіху та показати гарний результат. При роботі з медичними даними та реальними хворими нейронні мережі дають ряд переваг. По-перше, вони дозволяють легко «довчати» початкову модель при появі нових данних, або ж перевчати початкові дані, застосовуючи їх до конкретного набору даних, наприклад, регіону. По-друге, при роботі з медичними даними важливо мати інструмент для роботи з малими вибірками.

Задача визначення фази перебігу захворювання на підставі особливостей прояву ендотоксемії зводиться до наступної математичної моделі:

X — Множина об’єктів, Y — множина номерів (об’єктів класу).

Відомо: $X^m = \{(x_1, y_1), \ldots, \left(x_m, y_m\right)\}$ — навчальна вибірка.

Необхідно побудувати відображення $f : X \to Y, f\left(x_i\right) = y_i$

Модель нейронної мережі

На рис. 1 показано архітектуру побудованої мережі. На першому та останньому шарі використано функцію активації сигмоїдального типу, на третьому та четвертому — логарифмічного. Алгоритмом навчання мережі було обрано навчання зі зворотнім поширенням похибки (за принципом навчання зі вчителем).

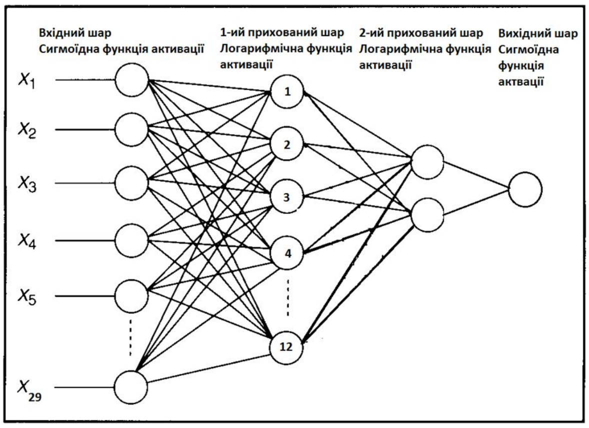


Рис. 1. Архітектура нейронної мережі

Практичні результати

В загальному було використано 1246 зразків даних досліджень, при чому 997 з них увійшли до навчальної вибірки, а решта — 249 — до тестової. На навчальній вибірці більше ніж у 96% випадках стадія хвороби визначається вірно, а на тестовій — майже 70% стадій, які збігаються з даними медичних досліджень.

Побудуємо таблицю 1 та порахуємо специфічність та чутливість методу.

Всього огляд пройшли 145 пацієнтів із загостренням та 104 пацієнта з ремісією. Створена нейронна мережа вірно виявила 96 хворих із загостренням та 79 з ремісією. Таким чином, маємо наступні результати: специфічність складає 75,91%, а чутливість — 66,21%.

Проаналізуємо загальний результат розпізнавання. Для тестової вибірки, що складається з 249 пацієнтів було правильно визначено фазу хвороби для 175 пацієнтів, неправильно — для 74. Тобто, коректно розпізнано стадію захворювання у 70,02% пацієнтів. Чутливий тест часто виявляє загострення, але він є особливо інформативним, коли визначає ремісію.

Специфічний тест рідко вказує на загострення при ремісії. Тому особливо корисний при загостреннях, оскільки підтверджується діагноз. Проаналізуємо загальний результат розпізнавання. Для тестової вибірки, що складається з 249 пацієнтів було правильно визначено фазу хвороби для 175 пацієнтів, неправильно — для 74. Тобто, коректно розпізнано стадію захворювання у 70,02% пацієнтів.

		Фаза хвороби		
		Загострення	Ремісія	
Тест	Позитивний (1)	96	25	121
	Негативний (0)	49	79	128
		145	104	

Висновки:

Для виконання поставленої задачі було створено штучну нейронну мережу, що складається з чотирьох шарів. Мережа була побудована таким чином, що користувач може зупинити навчання в будь-який момент часу, спостерігаючи за похибкою та кількістю ітерацій. Для збільшення точності розпізнавання даних застосований динамічний пошук кількості нейронів в прихованих шарах. Як результат, алгоритм працює з досить непоганою точністю, що є важливим кроком в розпізнаванні системи органів, на яку направлена хвороба.

Список літератури

1. Haykin S. Neural Networks. A Comprehensive Foundation. Second Edition. — Pearson Education, Inc., 1999 — 823 p.

2. Kruglov V. V., Borisov V. V. Artificial neural networks. Theory and practice. — Telecom, 2002 — 382 p.

3. Jeff Heaton. Getting Started with Encog3 in C# - Heaton Research, Inc, 2011 — 73 p.

4. Lections in artificial neural networks.
http://www.victoria.lviv.ua/html/neural_nets/zmist.htm

АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ОТ ПОТОКА АРРАТЬЯ

П. П. Чернега
Институт Математики НАН, Киев, Украина
pasha_ch@i.ua

В докладе рассматриваются примеры аддитивных функционалов от континуальной системы частиц потока Арратья $x(\bullet,\bullet)$, построенные с помощью аддитивных функционалов от точечных процессов потока Арратья.

Пусть $f(\bullet)$ является ограниченной, неотрицательной, измеримой функцией с ограниченным носителем, заданной на пространстве $\mathbb{R}^n$, $\{\mathrm{u}_k^m := \dfrac{k}{2^m}, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}_{m\geq 1}$ — последовательность вложенных разбиений вещественной прямой.

Обозначим

$$\tau(u_k^m) = \inf\{\mathrm{t} : \mathrm{x}(u_k^m, t) = \mathrm{x}(u_{k-1}^m, \mathrm{t})\} \wedge 1,$$
$$\tau(u_{k_1}^m, u_{k_2}^m) = \inf\{\mathrm{t} : \mathrm{x}(u_{k_1}^m, t) = \mathrm{x}(u_{k_2}^m, \mathrm{t})\} \wedge 1.$$

Для заданного набора чисел $k_1 > \ldots > k_n$ определим случайный момент τ:

$$\tau := \tau(u_{k_1}^m) \wedge \tau(u_{k_1}^m, u_{k_2}^m) \wedge \tau(u_{k_2}^m) \wedge \ldots \wedge \tau(u_{k_n}^m) \qquad (1)$$

Лемма 1. С вероятностью единица существует предел

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k_1\in\mathbb{Z}} \cdots \sum_{k_n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{s\wedge\tau}^{t\wedge\tau} f((x(u_{k_1}^m, r), \ldots, x(u_{k_n}^m, r)))dr \qquad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим процессы потока, стартующие из точек конечного интервала вещественной прямой. Поскольку суммарное время свободного пробега для этих процессов является конечным с вероятностью единица, можно утверждать, что существует случайный номер $m_0(\omega)$, такой, что

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k_1\in\mathbb{Z}} \cdots \sum_{k_n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{s\wedge\tau}^{t\wedge\tau} f((x(u_{k_1}^m, r), \ldots, x(u_{k_n}^m, r)))dr =$$
$$= \sum_{k_1\in\mathbb{Z}} \cdots \sum_{k_n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{s\wedge\tau}^{t\wedge\tau} f((x(u_{k_1}^{m_0}, r), \ldots, x(u_{k_n}^{m_0}, r)))dr. \qquad (3)$$

Для доказательства основного результата нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. Рассмотрим функцию $g(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^{2n})$ и набор целых чисел $\{k_1, \ldots, k_n\}$ со свойством $k_i - 1 > k_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$. Имеют место следующие равенства

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k_1}\dots\sum_{k_n}\int_s^t dr\int_{\Delta_{2n}} dy_1\dots dy_{2n}\,g(y_1,\dots,y_{2n})[p_r(u^m_{k_1}-y_1)-p_r(u^m_{k_1-1}-y_1)]\cdot$$

$$\cdot[p_r(u^m_{k_n}-y_{2n-1})-p_r(u^m_{k_n-1}-y_{2n-1})]=$$

$$=\int_{\Delta_n} dz_1\dots dz_n\int_s^t dr\int_{\Delta_{2n}} dy_1\dots dy_{2n}\,g(y_1,\dots,y_{2n})p'_r(z_1-y_1)\cdot\dots\cdot p'_r(z_n-y_{2n-1}). \qquad (4)$$

Доказательство.

Обозначим через $p_r(\cdot)$ плотность нормального распределения. Имеет место следующее соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^l}\left|p'_r(z_1)\cdot\dots\cdot p'_r(z_l)\right|dz_1\dots dz_l<\infty.$$

Рассмотрим шар $B(0,r)$ радиуса r в пространстве R^n. Воспользуемся определение интеграла по ограниченному множеству $\Delta_n\bigcap B(0,r)$. Заменяя переменные интегрирования в правой части предыдущего равенства

$$z'\_i := z\_i \text{ - } y\_\left\{2i \text{ - } 1\right\},$$

используя предыдущую лемму и устремляя $r\to\infty$, получаем необходимое утверждение.

В следующей теореме формулируется основной результат.

Теорема 1. Пусть $f\in\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, $f\geq 0$, $suppf$ является ограниченным множеством, $k_i-1>k_{i+1}$, $i=\overline{1,n-1}$. Имеет место следующее неравенство

$$E\lim_{m\to\infty}\sum_{k_1}\dots\sum_{k_n}\int_{s\wedge\tau}^{t\wedge\tau} f(x(u^m_{k_1},r),\dots,x(u^m_{k_n},r))dr\leq$$

$$\leq\lim_{m\to\infty}\sum_{k_1}\dots\sum_{k_n}\int_s^t dr\int_{\Delta_{2n}} dy_1\dots dy_{2n}\,f(y_1,y_3,\dots,y_{2n-1})\ \left|G^{KM}_{r,2n}\right|, \qquad (5)$$

где

$$G^{KM}_{r,2n}=\begin{vmatrix} p_r(u^m_{k_1}-y_1) & \dots. & p_r(u^m_{k_1}-y_{2n}) \\ p_r(u^m_{k_1-1}-y_1) & \dots. & p_r(u^m_{k_1-1}-y_{2n}) \\ \dots. & \dots. & \dots. \\ p_r(u^m_{k_n-1}-y_1) & \dots. & p_r(u^m_{k_n-1}-y_{2n}) \end{vmatrix},$$

Использованы результаты работ [1–5].

Список литературы

1. Дороговцев А. А. Мерозначные процессы и стохастические потоки. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 289 с.

2. Munasinghe R., Rajesh R., Tribe R., Zaboronskiy O. Multi-Scaling of the n-Point Density Function for Coalescing Brownian Motions, Commun. Math. Phys. — 2006. — **268.** — 717–725.

3. Arratia R. Coalescing Brownian motions on the line, Ph.D. thesis, University of Wisconsis, Madison, 1979.

ФОРМИРОВАНИЕ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ОТ ПОВТОРНЫХ ДОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Д. О. Черников
Днепропетровск, Украина
rda.post@gmail.com

1. Постановка задачи. Рассматриваем в цилиндрической системе координат $\left(r,\theta,z\right)$ область D, заполненную вязкой невязкой несжимаемой жидкостью ρ. Предполагаем, что жидкость ограниченна сверху свободной поверхностью $z=0$ и донной поверхностью $z=-H_0$, в начальный момент времени $t=0$ жидкость покоится и находится под действием гравитационных сил, направленных в отрицательном направлении OZ. Предполагаем также, что начальное возмущение генерируется подъемом горизонтального дна при $t=0$, а при $t=t_{dn}$ $\left(n=1,2\right)$ происходят последующие возмущения. Представляют интерес исследовать, как эволюционируют свободная поверхность при действии такого типа возмущения.

2. Построение и анализ решения. Движение жидкости предполагаем безвихревым, что позволяет ввести потенциал скоростей φ, определяемый по формуле $\vec{V}=\vec{N}\varphi$, где $\vec{V}$ — вектор скорости, $\vec{N}$ — оператор градиента. Это вместе с условием несжимаемости приводит к уравнению Лапласа для потенциала φ.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,\ \ -H_0\le z\le 0, r>0, t>0; \qquad (1)$$

Удовлетворяюшего условиям на свободной поверхности $z=0$ и на донной поверхности $z=-H_0$:

$$\left.\left(\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right|_{z=0}=0;\ \eta=-\frac{1}{g}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=0};$$
$$\left.\frac{\partial\varphi\left(r,z,t\right)}{\partial z}\right|_{z=-H_0}=\frac{\partial\eta^b\left(r,t\right)}{\partial t}; \qquad (2)$$

и начальными условиями

$$\left.\varphi\left(r,z,t\right)\right|_{t=o}=\left.\frac{\partial\varphi\left(r,z,t\right)}{\partial z}\right|_{t=0}=\left.\eta^b\left(r,t\right)\right|_{t=0} \qquad (3)$$

где η — отклонение свободной поверхности, η^b — отклонение донной поверхности; $\eta^b\left(r,t\right)=\eta_0\psi^d\left(r\right)f^d\left(t\right)$; g — ускорение свободного падения.

Предполагаем, что возмущение генерируется осесимметричным подъемом горизонтального дна [1] $\varphi^d\left(r\right)=\xi\left(\xi^2+r^2\right)^{-3/2},\xi>0$, и последовательным включением трех возмущений $f_n\left(t\right),n=1,2$:

$$f_n^d=te^{-\alpha t}H\left(t-t_n\right),t>t_n,$$

где $H\left(t\right)$ — функция Хевисайда.

В дальнейшем вводятся безразмерные величины и для решения применяются интегральное преобразование Ханкеля по радиальной координате и Лапласа по времени.

Преобразование Лапласа:

$$\varphi^L\left(r,z,s\right)=\int\limits_0^\infty\varphi\left(r,z,t\right)e^{-st}dt, \tag{4}$$

где s — параметр преобразования Лапласа.

Преобразование Ханкеля:

$$\varphi^{LH}\left(k,z,s\right)=\int\limits_0^\infty\varphi^L\left(r,z,s\right)rJ_0\left(k,r\right)d, \tag{5}$$

где k — параметр преобразования Ханкеля.

После применения (4) и (5) к (1) и (2) с учетом начальных условий (3) получаем постановку задачи в пространстве изображений

$$\frac{\partial^2\varphi^{LH}}{\partial z^2}-\left(\frac{k}{\beta}\right)^2\varphi^{LH}=0, \tag{6}$$

$$\left.\left(s^2\varphi^{LH}+\beta^2\frac{\partial\varphi^{LH}}{\partial z}\right)\right|_{z=0}=0;$$
$$\left.\beta^2\frac{\partial\varphi^{LH}}{\partial z}\right|_{z=-1}=s\eta_0\psi^{dH}\left(k\right)f^{dL}\left(s\right). \tag{7}$$

Из решения задачи (6), (7) получаем выражение для потенциала скоростей

$$\varphi^{LH}\left(k,z,s\right)=-\frac{1}{2}\frac{s}{\beta k}\eta_0\psi^{dH}\left(k\right)f^{dL}\left(s\right)\frac{\left(s^2+\beta k\right)e^{-\frac{k}{\beta}z}-\left(s^2-\beta k\right)e^{\frac{k}{\beta}z}}{s^2\operatorname{ch}\frac{k}{\beta}+\beta k\operatorname{sh}\frac{k}{\beta}}. \tag{8}$$

Переход в пространство оригиналов η осуществляется численным обращением преобразования Лапласа на основе рядов Фурье по синусам [2, 3] при следующих параметрах: $\alpha=2.5,\xi=0.5$. Для перехода от преобразования Лапласа к оригиналам необходимо варьировать параметром s с соответствующим подбором корректирующего параметра σ, входящего в алгоритм обращения.

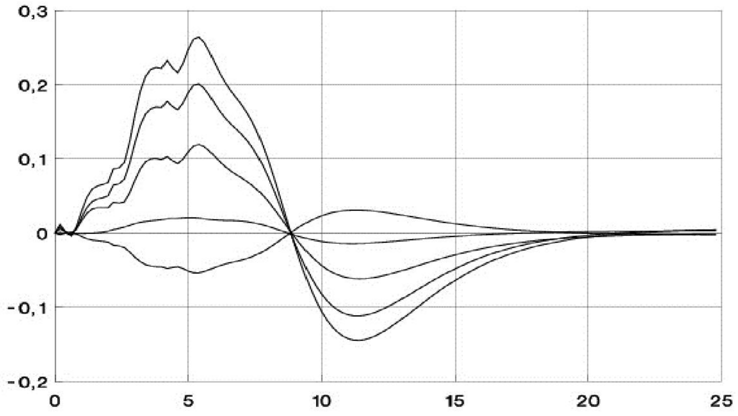


Рис. 1 Отклонение свободной поверхности η от времени t при включении второго донного возмущения через $t = 2$ и третьего донного возмущения через $t = 4$

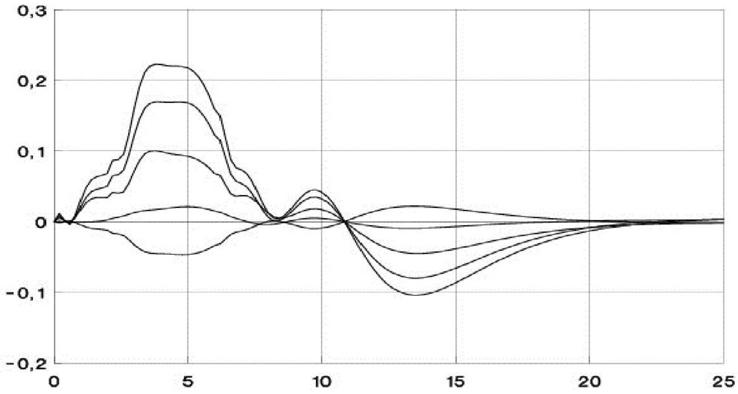


Рис. 2 Отклонение свободной поверхности η от времени t при включении второго донного возмущения через $t = 2$ и третьего донного возмущения через $t = 6$

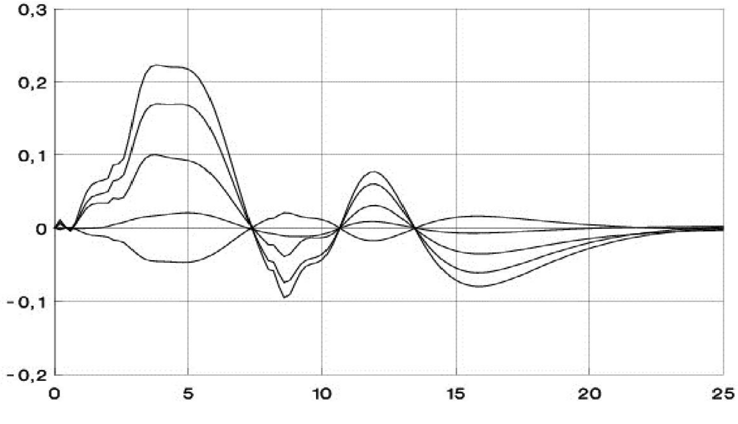


Рис. 3 Отклонение свободной поверхности η от времени t при включении второго донного возмущения через $t = 2$ и третьего донного возмущения через $t = 8$

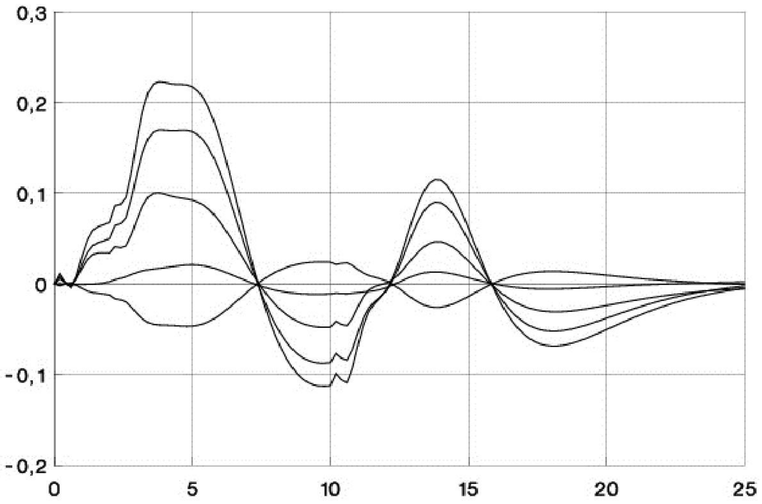


Рис. 4 Отклонение свободной поверхности η от времени t при включении второго донного возмущения через $t = 2$ и третьего донного возмущения через $t = 10$.

Из анализа численных решений для трех последовательных возмущений при различных временах включения источников возможны различные сценарии генерации волн цунами (усиление или ослабление).

Список литературы

1. Selezov I. T., Krivonos Yu. T. Mathematical methods in problems of propagation and diffraction of waves. — Kiev: Naukova Dumka, 2012. — 232 p.

2. Doetsch G. Anleitung zum Praktishen Gebrauch der Laplace- transformation und der Z-transformation. Munchen-Wien: R. Oldenburg, 1967.

3. Paponlis A. A new method of inversion of the Laplace transform // Quart. Appl. Math. — 1957. — **14.** — P.405–414.

4. Селезов И. Т., Кузнецов В. Н; Черников Д. О. Генерация поверхностных гравитационных волн донным повторяющимся во времени импульсом // Мат. методы та физико-мех. поля. — 2009. — **52**, №3. — С. 140–145.

5. Селезов И. Т., Черников Д. О. Генерация поверхностных волн разнесенными донными источниками // Вісник Дніпропетр. ун-ту Серія: «Механіка». — 2012. — Вип.16, т. 1. — С. 83–86.

6. Черников Д. О. Генерация волн подвижками донной поверхности // Вісник Дніпропетр. Ун-ту. Серія: Механіка. — 2011. — Вип. 15, т. 1. — С. 89–93.

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО ПОДХОДА В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ

С. В. Чумакова
Саратовский государственный аграрный университет им. Н. И. Вавилова,
Саратов, Россия
ch-sv@yandex.ru

Современный подход к обучению в высшей школе требует увеличения мотивации преподавания того или иного предмета. В данной работе рассматривается преподавание вопроса геометрически нелинейной задачи устойчивости в теории тонкостенных конструкций, связанного с определением допустимых управляющих параметров, при которых конструкции сохраняют устойчивое состояние, в предположении, что это вопрос устойчивости изотропных оболочек под действием продольных нагрузок для обучающихся в высших технических учебных заведениях.

Задача устойчивости сохраняет актуальность, так как тонкостенные конструкции являются составляющими в самолетостроении, кораблестроении и т. д. Как правило, устойчивость таких конструкций связана с устойчивостью их элементов типа оболочек. Решение подобных вопросов освещено в достаточно большом количестве работ. Предлагаемый курс обучения является интересным для студентов технических специальностей по ряду причин: во-первых, актуальность вопроса, во-вторых, достаточная простота подхода к решению задачи, в-третьих, возможность показать обучающимся связь технической задачи с математическим аппаратом, моделированием. Подобный курс может включать результаты, полученные теоретическим путем, а так же в процессе численного эксперимента. Затем учащимся предлагается обработать результаты опыта, сделав соответствующие выводы.

В основе теоретической части курса лежит операторный подход к задаче устойчивости оболочек, разработанный В.А. Крысько и В.Н. Кузнецовым для тонких, пологих, прямоугольных в плане, изотропных оболочек. При этом рассматривается геометрически нелинейная, статическая модель Маргерра — Власова — Муштари в смешанном виде:

$$\begin{cases} \frac{D}{h}\Delta^2 W - L(W,F) - \Delta_k F = q \\ d\Delta^2 F = -\frac{1}{2}L(W,W) - \Delta_k W \end{cases},$$

где

W – функция прогиба,

F – функция усилий,

h – толщина оболочки, которая предполагается постоянной;

$D = \dfrac{Eh^3}{12-(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость оболочки;

E - модуль упругости;

ν — коэффициент Пуассона;

$\Delta_k = K_X \frac{\partial^2}{\partial X^2} + K_Y \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$,

где K_X, K_Y – кривизны оболочки;

нелинейные слагаемые:

$$L(W,F) = \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y}$$

$$L(\mathbf{W},\mathbf{W}) = \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - 2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y}\right)^2$$

отражают гауссову кривизну деформируемой поверхности.

Граничные условия для функции прогиба W и функции усилий F рассматриваются следующего вида:

$$W\Big|_{\Gamma} = \varphi_0, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta}\Big|_{\Gamma} = \varphi_0, \; F\Big|_{\Gamma} = F_0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \eta}\Big|_{\Gamma} = F_1$$

Далее,

$$H_0^2(\Omega) = \{W \in L_2(\Omega); \, \mathrm{W}\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial W}{\partial \eta}\Big|_{\Gamma} = 0,$$

И линейный оператор А, действующий в пространстве $H_0^2(\Omega)$:

$$AW = \frac{D}{h}\Delta^2 W + (\sigma_X \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \sigma_Y \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + 2\,\tau_{XY}\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y}) \quad \text{, где}$$

σ_X, σ_Y, τ_{XY} — проекции напряжений, действующих в серединной поверхности оболочки, на оси OX и OY и касательное направление. Оператор А задан неявным образом: функции σ_X, σ_Y, τ_{XY} неизвестны.

Ранее автором была найдена возможность распространить операторный подход на более широкий класс уравнений в частных производных, что так же может быть использовано при подготовке соответствующего курса.

Параллельно с моделью Маргерра — Власова — Муштари рассматривается нелинейная модель типа Тимошенко, записанная в смешанной форме:

$$\begin{cases} \frac{K^2(1-\mu)}{2}\left[-\Delta W - \left(\frac{\partial \Psi_X}{\partial X} + \frac{\partial \Psi_Y}{\partial Y}\right)\right] - L9W,F) - \Delta_K F = q \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F + \frac{1}{2}L(W,W) + \Delta_K W = 0 \\ -\frac{\partial^2 \Psi_X}{\partial X^2} - \frac{(1-\mu)}{2}\frac{\partial^2 \Psi_X}{\partial Y^2} - \frac{(1+\mu)}{2}\frac{\partial^2 \Psi_Y}{\partial X \partial Y}2 + 6K^2\frac{(1-\mu)}{h^2}(\frac{\partial W}{\partial X} + \Psi_X) = 0 \\ -\frac{(1+\mu)}{2}\frac{\partial^2 \Psi_Y}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial^2 \Psi_X}{\partial Y^2} - \frac{(1-\mu)}{2}\frac{\partial^2 \Psi_Y}{\partial X^2} + 6K^2\frac{(1-\mu)}{h^2}(\frac{\partial W}{\partial Y} + \Psi_Y) = 0 \end{cases}$$

Где функции Ψ_X, Ψ_Y, F, W удовлетворяют граничным условиям:

$$W\Big|_{\Gamma}=W_0,\ \mathrm{F}\Big|_{\Gamma}=F_0,\ \frac{\partial F}{\partial \sigma}\Bigg|_{\Gamma}=F_1,\ \Psi \mathrm{X}\Big|_{\Gamma}=\Psi_1,\ \Psi \mathrm{Y}\Big|_{\Gamma}=\Psi_2$$

Рассматривается также линейный оператор А, действующий в пространстве $\overline{H_0^2}(\Omega)=\{W\in L_2(\Omega);\mathrm{W}\ _{\Gamma}=0\}$,

$$\mathrm{AW}=-\Delta\mathrm{W}-\frac{6\mathrm{K}^2(1-\mu)}{h^2}W+\frac{1}{K^2(1-\mu)}\left(\sigma_X\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}+\sigma_Y\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}+2\tau_{XY}\frac{\partial^2 W}{\partial X\partial Y}\right)$$

где σ_X, σ_{Y},τ_{XY} проекции на оси напряжений.

Суть операторного подхода заключена в отождествлении устойчивости состояния оболочки с единственностью решения ее модельной задачи. Задача единственности решения нелинейной модельной задачи сводится к задаче определения допустимых значений параметрических функций, при которых неявно заданный линейный оператор, определенным образом связанный с моделью, является положительно определенным на некотором классе функций из пространства $L_2(\Omega)$, выделяемых нулевыми граничными условиями. Для приведенных моделей Маргерра — Власова — Муштари и Тимошенко в основе операторного подхода лежит тот факт, что задача единственности решения модели сводится к определению тех значений функций σ_X, σ_{Y},τ_{XY}, при которых линейный оператор А является положительно определенным в пространстве $H_0^2(\Omega)$.

В работе автора «Операторный подход в геометрически нелинейной задаче устойчивости изотропных оболочек под действием продольных нагрузок", а так же некоторых других того же автора, на базе геометрически нелинейных моделей Маргерра — Власова — Муштари и типа Тимошенко получено описание области устойчивости параметрических функций оболочки, как в стационарном, так и в динамическом случаях, что представляет практический интерес для обучающихся. Далее в процессе преподавания, возможно, будет показать нахождение ограничения на функцию усилий и функцию прогиба, при которых оболочка сохраняет устойчивое состояние. Этот факт уточняет (в смысле явных констант) известный результат И. И. Воровича о локальной устойчивости оболочки. Так же в работе автора изучено влияние кривизны оболочки на область устойчивости нагрузок. Этот результат имеет большое значение при создании прочных тонкостенных конструкций, и может быть представлен обучающимся в процессе данного курса.

Целями предлагаемого курса являются попытки для тонких, пологих, прямоугольных в плане, изотропных оболочек на базе геометрически нелинейных моделей Маргерра — Власова — Муштари и Тимошенко: во-первых: описать область устойчивости параметров оболочки (величины нагрузок, кривизн и других) в статическом случае, а для аспирантов возможно рассмотрение того же вопроса для динамического процесса; во-вторых: выяснить влияние отдельных параметров оболочки на область устойчивости других параметров. Поставленные вопросы, можно решить посредством применения операторного подхода, для изложения которого обучающиеся должны быть осведомлены в определенном круге вопросов, касающихся теории банаховых пространств и операторных уравнений в банаховых пространствах.

Таким образом, представленная тема вполне может участвовать при разработке спецкурсов для студентов, обучающихся в магистратуре или аспирантов технических специальностей. Подобные разработки уже были успешно внедрены на кафедре «Высшая математика» при СГТУ в качестве предложенных для обучающихся курсов лекций, а так же при наполнении библиотеки прикладных программ для расчета устойчивости гибких пластин и оболочек.

ЗАДАЧА ДИСКРЕТИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПО НАДЕЖНОСТИ

С. М. Шляхов, Э. Ф. Кривулина

Саратовский государственный технический университет, Саратов, Россия

orifelwi@mail.ru

Вероятностные методы расчета элементов сооружений получают в последнее время все больше распространение в инженерном проектировании.

Наибольшую актуальность приобретает вероятностный подход к задачам оптимального проектирования конструкции заданной надежности. В силу несовершенств технологического процесса и случайного характера нагружения получаем элемент конструкции с переменными по объему свойствами материала под силовым воздействием при случайных законах их распределения.

Для решения задачи оптимального проектирования используем схему дискретного разбиения континуума на конечные элементы. Число таких элементов регламентируется требуемой точностью решения задачи и в случае малого разброса свойств материала по объему их может быть всего лишь несколько. Далее назначается схема соединения элементов с позиции теории надежности. Наиболее неблагоприятная схема – последовательное соединение элементов. В этом случае надежность H равна произведению надежностей отдельных элементов

$$H = \prod_{i=1}^{n} H_i \tag{1}$$

Затем выбирается критерий оптимизации конструкции. Наиболее часто используется минимизация массы (G_{opt}):

$$G_{opt} = \min\left\{ G(H_1, H_2, ..., H_n \right\} \tag{2}$$

при

$$H = H(H_1, H_2, ..., H_n) \geq H_{zad} \tag{3}$$

При решении задачи оптимизации используем метод неопределенных множителей Лагранжа.

Составляем вспомогательную функцию

$$L(H_1, H_2, ..., H_n, \lambda) = G(H_1, H_2, ..., H_n) + \lambda(H_1, H_2, ..., H_n) \tag{4}$$

где λ – неопределенный множитель.

Продифференцировав (4) по переменным H_i $(i = 1, 2, ..., n)$, получаем систему уравнений вида

$$\frac{\partial L}{\partial H_i} = \frac{\partial G}{\partial H_i} + \lambda \frac{\partial H}{\partial H_i} = 0 \tag{5}$$

Система (5) и условие (3) дают решение задачи оптимизации.

В качестве примера рассмотрим стержень длины l с переменными (случайными) характеристиками свойств материала по его длине и нагруженного случайной нагрузкой Р (рис. 1).

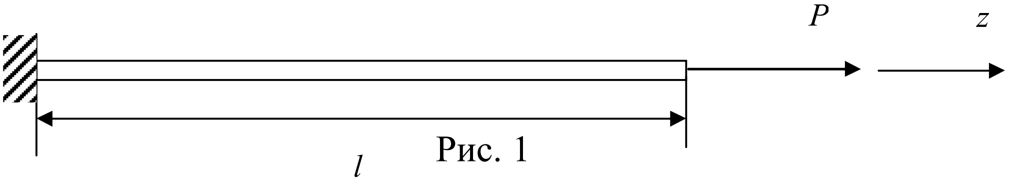


Рис. 1

Величина нагрузки Р распределена по экспоненциальному закону

$$f(P) = \lambda_0 \exp(-\lambda_0 P), \qquad (6)$$

где $\lambda_0 = 10^{-4}$ 1/Н.

Математическое ожидание нагрузки равно

$$m_p = \frac{1}{\lambda_0} = 10^4 \text{ Н}. \qquad (7)$$

Несущая способность материала случайна и переменна по длине бруса (по координате z). Предельное напряжение R материала подчиняется гамма-распределению

$$f(R) = \frac{R^{\alpha}(z)}{\alpha!\beta^{\alpha+1}(z)} \exp\left(-\frac{R(z)}{\beta(z)}\right). \qquad (8)$$

Параметры распределения по длине следующие: $\alpha = 1$, $\beta = \beta(z)$ МПа, $(0 \le z \le l)$. Соответственно математическое ожидание m_R равно $m_R = \beta(z)(\alpha + 1)$ МПа, $(0 \le z \le l)$. Имеем также $l = 1,5$ м, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м^3, $H_{zad} = 0,99$.

Разбиваем стержень по его длине, например, на три элемента длиной $l_1 = \frac{l}{3}$.

В пределах каждого из участков считаем сечение бруса постоянным, а свойства материала – усредненными (рис. 2).

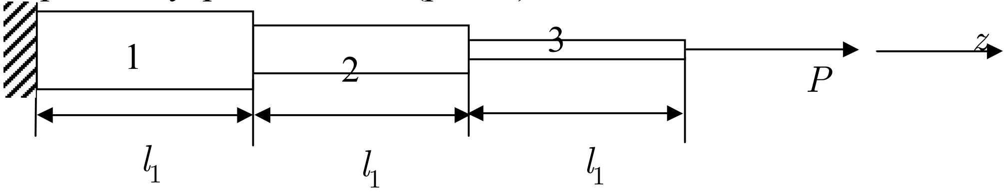


Рис. 2

На первом участке имеем $\beta = \beta_1 = 100$ МПа.

На втором участке имеем $\beta = \beta_2 = 150$ МПа.

На третьем участке имеем $\beta = \beta_3 = 200$ МПа.

Соответственно получаем $m_{R_1} = 200$ МПа, $m_{R_2} = 300$ МПа, $m_{R_3} = 400$ МПа.

Требуется найти оптимальное распределение надежности по участкам и минимальную массу конструкции, обеспечивающую заданную надежность H_{zad}.

Для последовательного соединения элементов связь заданной надежности с искомыми имеет вид

$$H_{zad} = H_1 \cdot H_2 \cdot H_3. \tag{9}$$

Следуя $\left[1\right]$, выразим массы участков G_1, G_2, G_3 через параметры распределения и надежности

$$G_i = \frac{\rho l_1}{\lambda_0 \beta_i \sqrt{1 - H_i}} - \frac{\rho l_1}{\lambda_0 \beta_i}, i = 1, 2, 3;\ G = \sum_{i=1}^{3} G_i \tag{10}$$

Разрешающая система уравнений будет иметь вид

$$\frac{\partial G}{\partial H_1} + \lambda H_2 H_3 = 0,\ \frac{\partial G}{\partial H_2} + \lambda H_1 H_3 = 0,\ \frac{\partial G}{\partial H_3} + \lambda H_1 H_2 = 0, \tag{11}$$

$$H_{zad} = H_1 H_2 H_3$$

Исключая из (11) неизвестное λ, приведем систему (11) к виду

$$\frac{\partial G}{\partial H_2} - \frac{\partial G}{\partial H_1} \cdot \frac{H_1}{H_2} = 0,\ \frac{\partial G}{\partial H_3} - \frac{\partial G}{\partial H_1} \cdot \frac{H_1}{H_3} = 0,\ H_{zad} = H_1 H_2 H_3, \tag{12}$$

в которой значения производных определяются формулами

$$\frac{\partial G}{\partial H_1} = \frac{\rho l_1}{2\lambda_0 \beta_1 \sqrt{(1 - H_1)^3}},\ \frac{\partial G}{\partial H_2} = \frac{\rho l_1}{2\lambda_0 \beta_2 \sqrt{(1 - H_2)^3}}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial G}{\partial H_3} = \frac{\rho l_1}{2\lambda_0 \beta_3 \sqrt{(1 - H_3)^3}}$$

а соотношения надежностей равны

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{H_{zad}}{H_2^2 H_3},\ \frac{H_1}{H_3} = \frac{H_{zad}}{H_3^2 H_2},\ H_1 = \frac{H_{zad}}{H_2 H_3}, \tag{14}$$

Подставляя исходные данные в (13), приведем систему (12) к виду:

$$\frac{0,13}{\sqrt{(1 - H_1)^3}} - \frac{0,99}{H_2^2 H_3} \cdot \frac{0,195}{\sqrt{\left(1 - \frac{0,99}{H_2 H_3}\right)^3}} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{0,0975}{\sqrt{(1 - H_3)^3}} - \frac{0,99}{H_3^2 H_2} \cdot \frac{0,195}{\sqrt{\left(1 - \frac{0,99}{H_2 H_3}\right)^3}} = 0.$$

Решением системы (15) будут

$$H_2 = 0,99680001, \tag{16}$$

$$H_3 = 0,997357482,$$

$$H_1 = \frac{0,99}{H_2 H_3} = 0,995809605.$$

Площади поперечных сечений равны

$$F_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{1-\sqrt{1-H_1}}{\lambda_0 \beta_1 \sqrt{1-H_1}} = \frac{1-\sqrt{1-0,995809605}}{10^{-4}\cdot 100\cdot 10^6\sqrt{1-0,995809605}} = 14,4448\cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \tag{17}$$

$$F_2 = \frac{1}{k_2} = \frac{1-\sqrt{1-H_2}}{\lambda_0 \beta_2 \sqrt{1-H_2}} = \frac{1-\sqrt{1-0,99680001}}{10^{-4}\cdot 150\cdot 10^6\sqrt{1-0,99680001}} = 11,118\cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

$$F_3 = \frac{1}{k_3} = \frac{1-\sqrt{1-H_3}}{\lambda_0 \beta_3 \sqrt{1-H_3}} = \frac{1-\sqrt{1-0,997357482}}{10^{-4}\cdot 200\cdot 10^6\sqrt{1-0,997357482}} = 9,226\cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Определяем массу конструкции G_{opt}

$$G_{opt} = G_1 + G_2 + G_3 = \rho\, l_1(F_1 + F_2 + F_3) = \tag{18}$$

$$= 7,8\cdot 10^3\cdot 0,5\cdot 10^{-4}(14,448 + 11,118 + 9,226) = 13,569 \text{ кг.}$$

Рассмотрим теперь случай равнораспределенной надежности

$$H_1 = H_2 = H_3 = \sqrt[3]{H_{zad}} = \sqrt[3]{0,99} = 0,9966555.$$

Определяем площади сечений участков

$$F_1 = \frac{1-\sqrt{1-0,9966555}}{10^{-4}\cdot 100\cdot 10^6\sqrt{1-0,9966555}} = 16,29\cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

$$F_2 = \frac{1-\sqrt{1-0,9966555}}{10^{-4}\cdot 150\cdot 10^6\sqrt{1-0,9966555}} = 10,86\cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

$$F_3 = \frac{1-\sqrt{1-0,9966555}}{10^{-4}\cdot 200\cdot 10^6\sqrt{1-0,9966555}} = 8,146\cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Определяем массу стержня

$$G_{opt} = G_1 + G_2 + G_3 = \rho l_1(F_1 + F_2 + F_3) =$$

$$= 7,8\cdot 10^3\cdot 0,5\cdot 10^{-4}(16,29 + 10,86 + 8,146) = 13,765 \text{ кг}$$

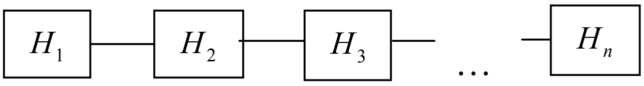
Вывод: оптимальное распределение надежностей приводит к экономии материала изделия.

1. Арасланов А. М. Расчет элементов конструкций заданной надежности при случайных воздействиях. — М. Машиностроение, 1987. — 127 с.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ КОНСТРУКЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ

С. М. Шляхов, Э. Ф. Кривулина
Саратовский государственный технический университет, Саратов, Россия
orifelwi@mail.ru

В преподавании цикла прочностных дисциплин в технических вузах все большее распространение получают вероятностные подходы в оценке надежности как отдельных элементов конструкции, так и их совокупности в целом. Здесь важным вопросом является назначение схемы соединения этих элементов. Наиболее опасной является последовательная схема соединения.



В этом случае отказ одного элемента приводит к выходу из строя всей конструкции, и надежность Н всего комплекса оценивается как произведение надежностей его элементов

$$H = \prod_{i=1}^{n} H_i$$

Вторым вопросом является выбор критерия оптимизации конструкции. Наиболее актуальной является оптимизация по массе конструкции, т.е. ставится задача о распределении надежностей между элементами так, чтобы сохранить заданную надежность H_{zad} при минимальной массе конструкции в целом G_{opt}.

$$G_{opt} = \min\left\{ G(H_1, H_2, ..., H_n \right\} \text{ при} \tag{1}$$

$$H = H(H_1, H_2, ..., H_n) \geq H_{zad} \tag{2}$$

При решении прямой задачи оптимизации (1), (2) получил распространение метод неопределенных множителей Лагранжа.

Составляем вспомогательную функцию вида

$$L(H_1, H_2, ..., H_n, \lambda) = G(H_1, H_2, ..., H_n) + \lambda(H_1, H_2, ..., H_n) \tag{3}$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Продифференцировав (3) по переменным H_i, получим для оптимальных значений надежностей элементов следующую систему уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial H_i} = \frac{\partial G}{\partial H_i} + \lambda \frac{\partial H}{\partial H_i} = 0,\ (i = 1, 2, ..., n) \tag{4}$$

Система уравнений (4) в совокупности с условием (2) дает решение поставленной задачи.

В качестве примера рассмотрим систему из двух элементов при последовательном их соединении — балку ступенчато-переменного сечения при чистом изгибе.

Профиль поперечного сечения балки — прямоугольник со сторонами b и h. Ширина b для обеих чистой балки одинаковая, а высота — различная. Материал ступеней различен по прочностным свойствам.

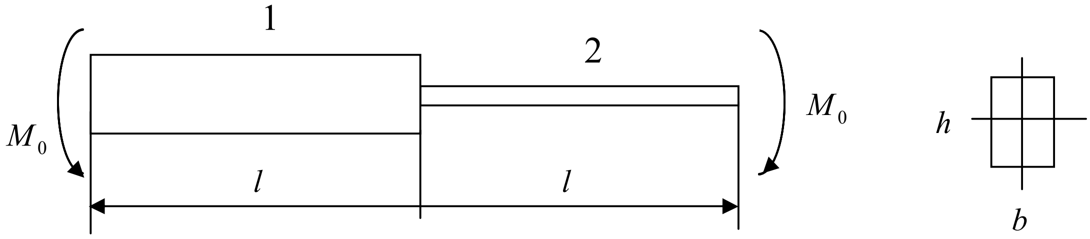


Рис. 1

Величина M_0 нагрузки случайна и распределена по экспоненциальному закону

$$f(M_0) = \lambda_0 \exp(-\lambda_0 M_0), \tag{5}$$

где $\lambda_0 = \dfrac{1}{10 \cdot 10^3}$ 1/(Н·м).

Математическое ожидание момента равно

$$m_{M_0} = \frac{1}{\lambda_0} = 10^4 \text{Н·м}.$$

Несущая способность материала случайна и подчиняется гамма-распределению

$$f(R) = \frac{R^{\alpha}(z)}{\alpha!\beta^{\alpha+1}(z)} \exp\left(-\frac{R(z)}{\beta(z)}\right). \tag{6}$$

На участке 1 имеем $\alpha = \alpha_1 = 1$, $\beta = \beta_1 = 100$ МПа.

На участке 2 имеем $\alpha = \alpha_2 = 1$, $\beta = \beta_2 = 200$ МПа.

Соответственно математические ожидания несущей способности по участкам равны $m_R = \beta(\alpha + 1)$.

$$m_{K_1} = 200 \text{ МПа}, \ m_{K_2} = 400 \text{ МПа}.$$

Имеем также $l = 1$ м, $b = 10 \cdot 10^{-2}$ м, $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, $H_{zad} = 0{,}99$.

Требуется найти оптимальное распределение надежностей по участкам 1-2 и минимальную массу конструкции, обеспечивающую надежность H_{zad}.

Поскольку система имеет последовательное соединение элементов, то связь надежностей каждого из участков с заданной имеет вид:

$$H_{zad} = H_1 \cdot H_2. \tag{7}$$

Следуя [1], выразим массы участков G_1, G_2 через параметры распределения и надежности

$$G = \frac{\rho\, l\sqrt{6b}}{\sqrt{k}}, \text{ где } k = \frac{\lambda_0\beta\sqrt{1-H}}{1-\sqrt{1-H}}.$$

С другой стороны $k = \dfrac{1}{W_x}$, где W_x — момент сопротивления изгибу.

Соответственно получим:

$$G_1 = \frac{\rho\, l\sqrt{6b}}{\sqrt{\dfrac{\lambda_0\beta_1\sqrt{1-H_1}}{1-\sqrt{1-H_1}}}}, \qquad G_2 = \frac{\rho\, l\sqrt{6b}}{\sqrt{\dfrac{\lambda_0\beta_2\sqrt{1-H_2}}{1-\sqrt{1-H_2}}}}, \qquad G = G_1 + G_2 \tag{8}$$

Разрешающая система уравнений примет вид

$$\frac{\partial G}{\partial H_1} + \lambda H_2 = 0, \; \frac{\partial G}{\partial H_2} + \lambda H_1 = 0, \; H_{zad} = H_1 H_2 \tag{9}$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$\frac{\partial G}{\partial H_1} = \frac{\rho\, l\sqrt{6b}}{4}\left\{\frac{1}{(1-H_1)\sqrt{\lambda_0\beta_1\sqrt{1-H_1}(1-\sqrt{1-H_1})}}\right\}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial G}{\partial H_2} = \frac{\rho\, l\sqrt{6b}}{4}\left\{\frac{1}{(1-H_2)\sqrt{\lambda_0\beta_2\sqrt{1-H_2}(1-\sqrt{1-H_2})}}\right\}.$$

Исключим из уравнений (9) неизвестный множитель λ, выделив его из первого уравнения (9),

$$\lambda = -\frac{\partial G}{\partial H_1}\cdot\frac{1}{H_2},$$

тогда получим систему (9) в виде

$$\frac{\partial G}{\partial H_2} - \frac{\partial G}{\partial H_1}\cdot\frac{H_1}{H_2} = 0, \; H_1 \cdot H_2 = H_{zad}, \tag{11}$$

или, подставляя производные, получаем:

$$\begin{gathered} \frac{\rho l\sqrt{6b}}{4\left\{(1-H_2)\sqrt{\lambda_0\beta_2\sqrt{1-H_2}(1-\sqrt{1-H_2})}\right\}} - \\ -\frac{H_1}{H_2}\cdot\frac{\rho l\sqrt{6b}}{4\left\{(1-H_1)\sqrt{\lambda_0\beta_1\sqrt{1-H_1}(1-\sqrt{1-H_1})}\right\}} = 0 \end{gathered}, \tag{12}$$

$$H_1 \cdot H_2 = H_{zad}.$$

Представим $H_2 = \dfrac{H_{zad}}{H_1}$ и подсчитаем ее в (12), получим уравнение относительно H_1 вида

$$\frac{1}{\left\{(1-\frac{H_{zad}}{H_1})\sqrt{\beta_2\sqrt{1-\frac{H_{zad}}{H_1}}(1-\sqrt{1-\frac{H_{zad}}{H_1}})}\right\}}- \quad (13)$$

$$-\frac{{H_1}^2}{H_{zad}}\cdot\frac{1}{\left\{(1-H_1)\sqrt{\beta_1\sqrt{1-H_1}(1-\sqrt{1-H_1})}\right\}}=0 \quad .$$

Решение уравнения (13) следующее:

$$H_1 = 0,99429\,,$$

$$H_2 = \frac{0,99}{0,99429} = 0,995686\,.$$

Определяем параметр k для найденных значений надежности

$$k_1 = \frac{\lambda_0\beta_1\sqrt{1-H_1}}{1-\sqrt{1-H_1}} = \frac{10^{-4}\cdot 10^2\cdot 10^6\sqrt{1-0,99429}}{1-\sqrt{1-0,99429}} = 817,4124 \ \text{1/м}^3,$$

$$k_2 = \frac{\lambda_0\beta_2\sqrt{1-H_2}}{1-\sqrt{1-H_2}} = \frac{10^{-4}\cdot 2\cdot 10^2\cdot 10^6\sqrt{1-0,995686}}{1-\sqrt{1-0,995686}} = 1405,9663 \ \text{1/м}^3.$$

Определяем моменты сопротивления изгибу

$$W_{X_{(1)}} = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{817,4124} = 1223,372\cdot 10^{-6} \ \text{м}^3,$$

$$W_{X_{(2)}} = \frac{1}{k_2} = \frac{1}{1405,966} = 711,254\cdot 10^{-6} \ \text{м}^3.$$

Момент сопротивления изгибу связан с размерами сечения соотношением $W = \dfrac{bh^2}{6}$. Отсюда получим

$$h_1 = \sqrt{\frac{6W_{X_1}}{b}} = \sqrt{\frac{6\cdot 1223,372\cdot 10^{-6}}{10\cdot 10^{-2}}} = 27,0928\cdot 10^{-2} \ \text{м},$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{6W_{X_2}}{b}} = \sqrt{\frac{6\cdot 711,254\cdot 10^{-6}}{10\cdot 10^{-2}}} = 20,658\cdot 10^{-2} \ \text{м}.$$

Определяем массу балки при найденных размерах сечений

$$G_{(1)} = G_1 + G_2 = \rho\, l(bh_1 + bh_2) = \rho\, lb(h_1 + h_2) =$$
$$= 7,8\cdot 10^3\cdot 1\cdot 10^{-2}(27,0928 + 20,658)\cdot 10^{-2} = 372,456 \ \text{кг}.$$

Рассмотрим теперь случай равной вероятности для обеих частей балки

$$H_1 = H_2 = \sqrt{H_{zad}} = \sqrt{0,99} = 0,99499\,.$$

Получаем следующие значения параметров k

$$k_1 = \frac{\lambda_0\beta_1\sqrt{1-H_1}}{1-\sqrt{1-H_1}} = \frac{10^{-4}\cdot 10^2\cdot 10^6\sqrt{1-0,99499}}{1-\sqrt{1-0,99499}} = 761,934\ 1/\text{м}^3,$$

$$k_2 = \frac{\lambda_0\beta_2\sqrt{1-H_2}}{1-\sqrt{1-H_2}} = \frac{10^{-4}\cdot 2\cdot 10^2\cdot 10^6\sqrt{1-0,99499}}{1-\sqrt{1-0,99499}} = 1523,868\ 1/\text{м}^3.$$

Соответственно моменты сопротивления изгибу будут равны

$$W_{X_{(1)}} = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{761,934} = 1312,45\cdot 10^{-6}\ \text{м}^3,$$

$$W_{X_{(2)}} = \frac{1}{k_2} = \frac{1}{1523,868} = 656,22\cdot 10^{-6}\ \text{м}^3.$$

Определяем высоту профиля балки h на двух участках нагружения

$$h_1 = \sqrt{\frac{6W_{X_1}}{b}} = \sqrt{\frac{6\cdot 1312,45\cdot 10^{-6}}{10\cdot 10^{-2}}} = 28,062\cdot 10^{-2}\ \text{м},$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{6W_{X_2}}{b}} = \sqrt{\frac{6\cdot 656,22\cdot 10^{-6}}{10\cdot 10^{-2}}} = 19,843\cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

Определяем массу балки

$$G_{(2)} = G_1 + G_2 = \rho lb(h_1 + h_2) =$$

$$= 7,8\cdot 10^3\cdot 1\cdot 10\cdot 10^{-2}(28,062+19,843)\cdot 10^{-2} = 373,66\ \text{кг}$$

Таким образом,

$$G_1 = 372,456\ \text{кг},\ G_2 = 373,66\ \text{кг},$$

$$\Delta = G_2 - G_1 = 373,66 - 372,456 = 1,204\ \text{кг}.$$

Итак, видим, что при оптимальном распределении надежностей масса балки снизилась на 1,204 кг.

1. Арасланов А. М. Расчет элементов конструкций заданной надежности при случайных воздействиях. М. Машиностроение, 1987, 127 с.

ДЕЯКІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ СУМІЖНИХ τ-УЗАГАЛЬНЕНИХ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ГАУССА

А. М. Южаков

Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна

Фахівцям, яким доводиться мати справу з розв’язанням диференціальних та інтегральних рівнянь у різноманітних галузях теоретичних і прикладних наук (квантовій механіці, астрофізиці, теорії кодування, біомедицині, математичній фізиці та ін.), добре відомі спеціальні функції — функції, що не виражаються через елементарні.

Різноманітність задач, які приводять до виникнення спеціальних функцій, стала причиною, по-перше, різкого посилення за останні кілька десятиліть інтересу до теорії спеціальних функцій, і, по-друге, швидкого зростання кількості спеціальних функцій та їх узагальнень [1–3 та ін.].

Із великої низки спеціальних функцій різної природи та складності особливо важливу роль відіграють гіпергеометрична функція Гауса та її частинні випадки (функції Бесселя, Лежандра, ортогональні многочлени та ін.).

У XX–XXI ст. значно розширилось вивчення, дослідження та узагальнення гіпергеометричних функцій, а також функцій, що через них виражаються. Зокрема, стрімко зріс інтерес до узагальнення гіпергеометричних функцій за Райтом [1] та дослідження їх властивостей з метою подальшого застосування при розв’язанні теоретичних і практичних задач.

Розглянемо τ-узагальнену (за Райтом) гіпергеометричну функцію Гаусса ${}_2F_1^{\tau}(a,\, b;\, c;\, z)$ [4] у вигляді ряду:

$$ {}_2F_1^{\tau}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)} \frac{z^n}{n!}, \tag{1} $$

де $a,\, b,\, c$ можуть бути комплексними; $\tau \in R$, $\tau > 0$; $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$; $\Gamma(...)$ — класична гамма-функція [5]. При $\tau = 1$ функція ${}_2F_1^{\tau}(a,\, b;\, c;\, z)$ співпадає з класичною гіпергеометричною функцією Гаусса ${}_2F_1(a,\, b;\, c;\, z)$ [5].

При умовах існування τ-узагальненої (за Райтом) гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1^{\tau}(a,\, b;\, c;\, z)$ та її суміжних функцій справедливі наступні формули:

$$
\begin{gathered}
(c-a\tau)\,{}_2F_1^{\tau}(a-1)-a\tau\,{}_2F_1^{\tau}(a+1)+\\
+a\tau z\,\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}\,{}_2F_1^{\tau}(a+1,b+\tau-1;c+\tau-1;z)+\\
+(2a\tau-c)\,{}_2F_1^{\tau}=(a\tau-b+1-\tau)z\,\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1,c+\tau-1)+\\
+z(\tau-1)\,\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau,c+\tau),
\end{gathered}
\tag{2}
$$

$$
\begin{gathered}
(c-b)\,{}_2F_1^{\tau}(b-1)-b\,{}_2F_1^{\tau}(b+1)+(2b-c)\,{}_2F_1^{\tau}=z(b+\tau-1-a\tau)\times\\
\times\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1,c+\tau-1)-\\
-z\,\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-1+\tau)}\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau,c-1+\tau),
\end{gathered}
\tag{3}
$$

$$
\begin{gathered}
(c-a\tau-b)\,{}_2F_1^{\tau}-(c-a\tau)\,{}_2F_1^{\tau}(a-1)+b\,{}_2F_1^{\tau}(b+1)=\\
=z\,\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau,c+\tau-1)+\\
+z(1-\tau)\,\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau,c+\tau),
\end{gathered}
\tag{4}
$$

$$
\begin{gathered}
c\,{}_2F_1^{\tau}-c\,{}_2F_1^{\tau}(a-1)=\\
=z\,\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}\big((c+\tau-1)\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1,c+\tau-1)+\\
+(b-c)\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1,c+\tau)\big),
\end{gathered}
\tag{5}
$$

$$
\begin{gathered}
ac\tau\left({}_2F_1^{\tau}-{}_2F_1^{\tau}(a+1)\right)+\\
+z(b-c+\tau-1)\,\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1,\,c+\tau-1)+\\
+zac\tau\,\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau-1)}\,{}_2F_1^{\tau}(a+1,\,b+\tau-1;\,c+\tau-1;\,z)+\\
+z(c-a\tau)(c-b)\,\frac{\Gamma(b+\tau-1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1,\,c+\tau)-\\
-zc(\tau-1)\,\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}\,{}_2F_1^{\tau}(b+\tau,\,c+\tau)=0 \qquad ,
\end{gathered}
\tag{6}
$$

де позначено

$$
{}_2F_1^{\tau}(a,\,b+\tau-1;\,c+\tau;\,z)={}_2F_1^{\tau}(b+\tau-1,\,c+\tau),
$$

$$ {}_2F_1^{\tau}(a,\, b;\, c;\, z) = {}_2F_1^{\tau}, $$

$$ {}_2F_1^{\tau}(a \pm 1,\, b;\, c;\, z) = {}_2F_1^{\tau}(a \pm 1), $$

$$ {}_2F_1^{\tau}(a,\, b + \tau - 1;\, c + \tau - 1;\, z) = {}_2F_1^{\tau}(b + \tau - 1,\, c + \tau - 1), $$

$$ {}_2F_1^{\tau}(a,\, b \pm 1;\, c;\, z) = {}_2F_1^{\tau}(b \pm 1), $$

$$ {}_2F_1^{\tau}(a,\, b + \tau;\, c + \tau - 1;\, z) = {}_2F_1^{\tau}(b + \tau,\, c + \tau - 1), $$

$$ {}_2F_1^{\tau}(a,\, b + \tau;\, c + \tau;\, z) = {}_2F_1^{\tau}(b + \tau,\, c + \tau). $$

Композиційні формули (2)–(6) доведені за умов існування τ-узагальненої (за Райтом) гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1^{\tau}(a,\, b;\, c;\, z)$ та її суміжних функцій. При доведенні [6] використано зображення функції ${}_2F_1^{\tau}(a,\, b;\, c;\, z)$ у вигляді ряду (1) та властивості класичної гамма-функції. Одержані результати є узагальненням відомих співвідношень для класичної гіпергеометричної функції Гаусса [5], що відкриває нові можливості для їх теоретичного і практичного застосування.

Список літератури

1. Kilbas A. A., Saigo M. H-Transforms. Charman and Hall. — CRC., 2004. — 390 p.
2. Virchenko N., Fedotova I. Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications. –Singapore: World Scientific. — 2001. — 195 p.
3. Andrews L.C., Askey R., Roy R. Special functions. — Cambridge University Press, New York. — 1999.
4. Virchenko N., Kalla S.L. and A.Al-Zamel. Some results on a generalized hypergeometric function // Integr. and Special Functions. — 2001. — 12, № 1. — P. 89–100.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука. — 1965. — 293 с.
6. Южакова Г.О. Композиційні формули для τ-узагальненої гіпергеометричної функції Гауса // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2011. — №4. — С. 105–110.

II

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ КАК ЭФФЕКТИВНОЕ МЕТОДИЧЕСКОЕ СРЕДСТВО ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНИЙ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В. С. Вакульчик, В. А. Жак, *Полоцкий государственный университет, Новополоцк;*
А. В. Капусто, *Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь*
kapusto@tut.by

В настоящее время считается общепризнанным, что применение информационных технологий (ИТ), в том числе программного обеспечения (ПО), при проектировании педагогических объектов оптимизирует труд преподавателя, является эффективным средством усиления параметров наглядности и доступности педагогических проектов. Необходимость и целесообразность использования при изучении математики специализированных программных продуктов неоднократно подчеркивалась в исследованиях ряда авторов (Асмыкович И. К., Бровка Н. В., Ганеева С. М., Глейзер Г. Д., Гужвенко Е. И., Казаченок В. В., Капустина Т. В., Новик И. А., Роберт И. В., Якобсон Л. Л. и др.). Однако в этих исследованиях отсутствует определение методических подходов систематического привлечения ПО при изучении дисциплины «Математика» на технических специальностях. В этой связи отметим также, что единичное привлечение ПО к решению математических задач студентами целиком определяется преподавателем, так как системная целостность объектов «математическая задача» — «ПО» не построена. Таким образом, выделенная в названии проблема является актуальной для теории и методики обучения математике [1].

Исходя из тезиса о разумном и обоснованном использовании дидактических возможностей ИТ в многообразии методических приемов и средств педагога, авторами предлагается экспериментально апробированный пример эффективного применения ПО для построения линий в полярной системе координат, а также — для построения областей интегрирования в разделе «Кратные интегралы» студентами технических специальностей.

Содержание учебной программы по теме «Построение линий в полярной системе координат» является типичным для большинства технических специальностей: по заданному уравнению линии в полярных координатах построить соответствующее изображение в полярной системе координат. Традиционный подход предполагает составление таблиц, где будут приведены, прежде всего, значения угла φ с заданным шагом и соответствующие значения ρ, вычисленные согласно условию задания. Для большей наглядности, шаг по φ следует брать не более 30°, а лучше —15°, что позволит в ряде случаев более наглядно и достоверно построить линию. Вместе с тем вычисление значений ρ, когда зависимость предполагает не просто вычисление значения тригонометрической функции от аргумента φ, а и выполнение определенных действий по линейному преобразованию аргумента или каким-либо более сложным преобразованиям, сразу ведет к многократному увеличению вычислительных операций при создании таблицы. Рассмотрим, для примера, функции

$$\rho = 2(1 - \cos\varphi),\ \rho = 3 - 2\sin 2\varphi .$$

Для первой из них вычисление одного значения функции предполагает выполнение следующих трех действий: 1) вычисление $a = \cos\varphi$; 2) вычисление $b = 1 - a$; 3) вычисление $\rho = 2b$. Для второй функции потребуется уже пять таких операций. Несложно просчитать количество многочисленных рутинных вычислений при заполнении таблицы. Разумеется, это влечет за собой неоправданные потери аудиторного времени и отвлечение акцента внимания студентов от непосредственного построения кривой и изучения ее формы.

Стандартные методики преподавания и известные распространенные учебные пособия основаны на ведении расчетов вручную либо с привлечением калькулятора. В итоге огромный объем времени на занятии будет направлен на составление таблицы значений функции. Следующий, не менее трудоемкий процесс, это построение в полярной плоскости лучей согласно заданному шагу по φ, и только потом — построение полученных точек кривой и, завершение работы, окончательное построение линии.

Многолетний педагогический опыт авторов преподавания математики на технических специальностях показывает, что традиционно можно было считать удачей, если за одно занятие студентам удалось построить три-четыре линии. Если же процесс проведения расчетов оптимизировать — выполнять в автоматическом режиме с привлечением ПО, то можно увеличить как общее количество решенных задач, так и их качественное наполнение (анализ возможных модификаций уравнения, влияние параметров функции на вид кривой и т.д.).

Заметим, что имеющееся в настоящее время многоплановое программное обеспечение позволяет организовать процесс построения кривой в полярной системе координат так, что все расчеты вместо студента будет выполнять компьютерная программа. Обратим внимание, что наиболее доступным для пользователей и знакомым студентам из курса «Информатики», является приложение Microsoft Excel. Возможности выбранного приложения, помимо использования большого спектра математических функций в проведении расчетов, позволяют создавать массивы данных и решать поставленные задачи их обработки и преобразования, моделирования и анализа связи между величинами, а также наглядного представления информации. С целью усиления мотивационного компонента познавательной самостоятельности студентов, вначале занятия преподавателю следует самому продемонстрировать графическое построение конкретной кривой в полярной системе координат с привлечением встроенной функции Microsoft Excel «Мастер диаграмм», подчеркнув, что выбранная программа фактически снимает с пользователя необходимость в рутинных расчетах и значительно экономит время. Для активизации процессуального компонента познавательной самостоятельности студентов имеет смысл далее предложить им выяснить самостоятельно специфику порядка ввода данных при построении лепестковой диаграммы, так как при стандартном изменении аргумента от 0° до 360° расположение полученной кривой не будет соответствовать полярной системе координат. На рисунках 1 и 2 приведены графики кривых $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$, $\rho = 3 - 2\sin 2\varphi$, построенные с использованием «Мастера диаграмм». Расчетные значения для построения линий приведены в таблице 1.

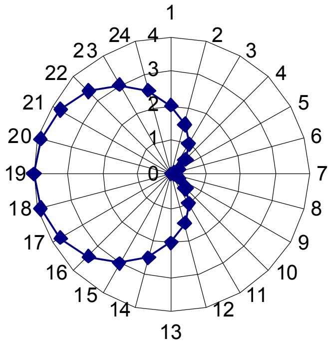


Рис. 1.

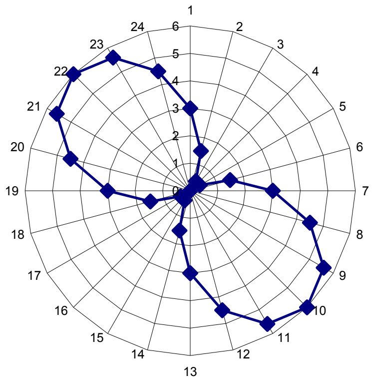


Рис. 2.

Таблица 1

угол, град.	радианы	$\rho = 2(1 - \cos\varphi)$	$\rho = 3 - 2\sin 2\varphi$
90	1,570796	2	3
75	1,308997	1,48236191	1,5
60	1,047198	1	0,401924
45	0,785398	0,585786438	0
30	0,523599	0,267949192	0,401924
15	0,261799	0,068148347	1,5
0	0	0	3
345	6,021386	0,068148347	4,5
330	5,759587	0,267949192	5,598076
315	5,497787	0,585786438	6
300	5,235988	1	5,598076
285	4,974188	1,48236191	4,5
270	4,712389	2	3
255	4,45059	2,51763809	1,5
240	4,18879	3	0,401924
225	3,926991	3,414213562	0
210	3,665191	3,732050808	0,401924
195	3,403392	3,931851653	1,5
180	3,141593	4	3

165	2,879793	3,931851653	4,5
150	2,617994	3,732050808	5,598076
135	2,356194	3,414213562	6
120	2,094395	3	5,598076
105	1,832596	2,51763809	4,5

Очевидно, обоснованное и целенаправленно организованное по предлагаемой методической схеме занятие позволяет студентам построить значительное число кривых и провести их анализ. Представляется необходимым в заключительной части занятия каждому студенту выдать отдельное задание по выделенной теме для внеаудиторной самостоятельной работы. Полученные навыки и умения привлечения ПО для построения кривых в полярной системе координат студенты должны будут продемонстрировать при построении фигур, ограниченных с участием линий, заданных в указанной системе координат, в процессе изучения раздела «Кратные интегралы». Имеется ряд достаточно интересных задач, которые позволят отработать со студентами все этапы интегрирования: анализ области интегрирования, расстановка пределов интегрирования, непосредственное вычисление, однако при сложном виде области интегрирования все силы и время уйдут на построение области. Если же воспользоваться «Мастером диаграмм», предварительно напомнив студентам о необходимости иметь «заготовку» таблицы для выполнения расчетов, то время на построение практически не теряется.

Таким образом, привлечение ПО является эффективным средством, позволяющим качественно обновить и совершенствовать методику работы по построению линий в полярной системе координат. Подчеркнем, что экспериментальные исследования подтверждают влияние предлагаемой к обсуждению методики обучения (с учетом внутрипредметных связей и применением ПО) построению кривых, заданных в полярной системе координат, и фигур, ограниченных с участием этих линий, на достижение глубоких и прочных знаний, навыков и умений, развитие продуктивного мышления студентов. Отметим также, что проектирование учебно-познавательного процесса на основе новых достижений педагогической науки и новых объективных возможностей практики обучения является предпосылкой оптимизации системы обучения, методического самосовершенствования педагога.

Список литературы

1. Вакульчик, В. С. Использование программного обеспечения — важная составная компонента обновления содержания и технологий при обучении математике студентов нематематических специальностей / В. С. Вакульчик, А. В. Капусто // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия Е. — 2010. — № 11. — С. 93–98.

ІНДИВІДУАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО НАВЧАННЯ ІНОЗЕМНИХ СТУДЕНТІВ МАТЕМАТИКИ НА ПІДГОТОВЧОМУ ВІДДІЛЕННІ ОНМА

Г. А. Варварецька, Т. І. Клімова, Т. М. Сапронова
Одеська національна морська академія, Одеса, Україна
math_onma@ukr.net

На етапі довузівського навчання студентів — іноземців перед викладачем підготовчого відділення ставиться завдання — підготовка до навчання в новій і складній для студентів обстановці на першому курсі у вищій школі. Студенти повинні мати досить фундаментальну освіту, щоб бути здатними побудувати на цьому підґрунті нові знання відповідно до нових для них умов навчання у виші. Але іноземці, що приїжджають на навчання до України, мають істотно різний рівень підготовки з природничо-наукових і математичних дисциплін, і цей рівень далеко не завжди відповідає рівню знань українського абітурієнта, навіть у сучасних умовах (аналіз показує, що число студентів із слабкою і недостатньою підготовкою в останній період стабільно стримується на рівні 50%). І завдання підготовчих факультетів (відділень), покликаних підготувати іноземних слухачів до повноцінного навчання у виші нарівно з вітчизняними студентами, ускладнюється мовними, адаптаційними й іншими проблемами, серед яких хочеться відзначити передусім академічні, тобто це труднощі, пов’язані з:

— відмінностями парадигми навчання в різних країнах,

— вихідним рівнем знань та умінь студента,

— істотними розбіжностями цих рівнів в одній групі, де відбувається навчання, а також з тим, що результат навчання повинен відповідати результату навчання українських абітурієнтів, які проходили підготовку з фізико-математичних дисциплін протягом декількох років, а не декількох місяців, як слухачі підготовчих факультетів.

Зміст довузівського курсу математики має бути зорієнтований на математичний апарат, який використовуватиметься надалі під час професійної підготовки студентів. З цієї точки зору велику значущість мають такі теми передвузівського курсу математики, як: тотожні перетворення виразів, рівняння алгебри, елементарні функції, тригонометричні функції, елементи диференційного числення, інтеграли.

Весь курс математики на етапі довузівської підготовки умовно можна розподілити на дві частини — вступний курс і основний курс. Основним завданням вступного курсу є накопичення слухачами словникового запасу, необхідного для розуміння математичних текстів. Тоді як основний курс є вирівнювальним, його мета — підготувати іноземних громадян до вивчення вищої математики й інших дисциплін, що вимагають математичних знань.

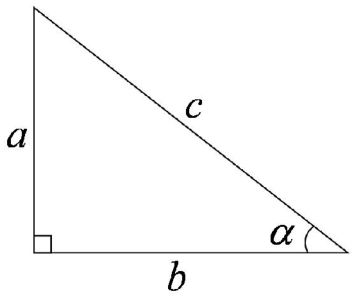
Певну складність, на наш погляд, в іноземних учнів викликають правила запам’ятовування математичних формул і визначень математичних понять. Тут на допомогу приходять наочні засоби, що дозволяють представити правила в схематичному вигляді. На практиці це може реалізовуватися у вигляді таблиць, розміщених на форзаці їх робочих зошитів (конспектів).

Наприклад, можна використовувати наступні таблиці:

Таблиця 1

Формула	Назва формули
$\left(a+b\right)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	квадрат суми
$\left(a-b\right)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	квадрат різниці
$a^2 - b^2 = \left(a-b\right)\left(a+b\right)$	різниця квадратів
$a^3 + b^3 = \left(a+b\right)\left(a^2 - ab + b^2\right)$	сума кубів
$a^3 - b^3 = \left(a-b\right)\left(a^2 + ab + b^2\right)$	різниця кубів

Таблиця 2

Означення тригонометричних функцій		
$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$		a — протилежний катет b — прилеглий катет c — гіпотенуза
$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$		
$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$		
$\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$		

Також на якість і швидкість сприйняття нової словникової інформації впливає використання плакатів — ілюстрацій, що пояснюють склад різних математичних виразів, порядок виконання певних математичних дій тощо.

Щоб стимулювати активну роботу студента, необхідна тісна взаємодія діяльності викладача й діяльності студента. Хоча діяльність викладача має ті ж основні структурні компоненти — конструктивну, організаторську, комунікативну, гностику, водночас ми вважаємо, що необхідно змінювати підходи до студента: основним повинна стати адаптація навчального процесу до індивідуальних можливостей і здібностей студента. Такий підхід покликаний сприяти розвитку пізнавальної самостійності студента, тобто у студента повинна сформуватися потреба сумлінніше вивчати матеріал курсу.

Викладачі кафедри вищої математики постійно працюють над реалізацією диференційованого та індивідуалізованого підходу у навчанні математики, розуміючи, що для підвищення якості підготовки майбутніх фахівців процес навчання на довузівському етапі має бути гнучкішим і динамічнішим. Необхідно розвивати у студентів усвідомлене і позитивне ставлення до самостійного опанування знань, стимулювати слухачів до постійного набуття нових знань і закріплення вже отриманих.

На кафедрі створений ряд посібників, які відображають нові підходи до організації навчальної діяльності. Таким чином створений посібник «Пособие по математике для иностранных учащихся подготовительного отделения ОНМА». Кожна тема цього посібника вміщує текст — блок основного необхідного матеріалу, який має бути засвоєний студентами. Зміст, який є обов'язковим для цілісного сприйняття курсу математики, графічно виділений. Після кожного тексту запропоновані завдання й питання для закріплення математичного матеріалу, що пред'являється власне, а також вправи для накопичення лексичного матеріалу. Вивчення математичної лексики побудоване так, щоб прищепити студентам навички самостійного вивчення предмету. Хороше знання математичної лексики позитивно позначається на вмінні студентів засвоювати матеріал самостійно. У рамках кожної теми студент засвоює не лише певні математичні знання, але й види діяльності, пов'язані із здобуттям і використанням цих знань.

Для визначення рівня засвоєння знань, умінь з математики, а також рівня володіння необхідними математичними термінами — словами і словосполуками, створені «Дидактичні матеріали для контрольних робіт з математики для студентів — іноземців підготовчого відділення».

Важливою складовою роботи є проведення систематичного повторення вивченого, що забезпечується системою вправ для домашньої роботи. Ще в процесі проходження теми кожен студент групи отримує індивідуальне завдання з теми у вигляді роздавального матеріалу, що містить достатню кількість завдань і вправ з даної теми. При цьому слабо підготовлені з предмету студенти повинні показати уміння розв'язувати завдання репродуктивного характеру, які передбачають вживання знань і умінь «за зразком». У свою чергу, більш підготовлені студенти виконують завдання, що перевіряють їхні базові обчислювальні і логічні вміння і навички, а також завдання підвищеного рівня складності. Такі студенти заохочуються правом брати участь у математичній олімпіаді.

Таким чином, аудиторна індивідуальна робота зі студентом є необхідним елементом навчального плану підготовки іноземних абітурієнтів, що вчаться на довузівському етапі, оскільки дозволяє в умовах обмеженого часу підвищити, а нерідко й забезпечити, якість навчання за рахунок підвищення мотивації й ефективності індивідуально дібраних траєкторій навчання.

Список літератури

1. Орлова Н. Д., Тихонцова Н. И. Использование элементов личностно-ориентированного обучения, при изучении курса «Высшей математики». Дидактика математики «Проблеми и дослідження» Міжнародний збірник наукових робіт. — Вип. 25. — Донецьк, ДНУ, 2006. — С. 214–218.

2. Лазарева Е. А. Вуколова Т. М. Развитие математической речи иностранных студентов при изучении повторительного курса математики на подготовительном факультете. / В Сб.: Международное образование: итоги и перспективы. Материалы международной научно-практической конференции, посвященной 50-летнему юбилею Центра международного образования МГУ им. М.В. Ломоносова. 22–24 ноября 2004 года. Том 2. М., ЦМО МГУ, С. 96–106.

ГУМОР ЯК ЗАСІБ ДЛЯ КРАЩОГО РОЗУМІННЯ МАТЕМАТИКИ

Н. Вірченко
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
nvirchenko@hotmail.com

> *Об'єкт математики настільки серйозний, що слід не пропускати нагоди зробити його трохи цікавішим.*
> Б. Паскаль

Гумор як допоміжний засіб для глибшого та кращого розуміння тієї чи іншої науки застосовувався давно, фактично — із часів виникнення відповідної науки.

Важливу роль відіграє гумор і при вивченні математики. Поруч з елементами історизму, етики та естетики, різних способів методики викладання певне місце займають і гумористичні моменти під час вивчення математики, розвитку швидкого мислення тощо.

Книжка «Математичні усмішки» (К.: «Задруга», 2014 р.) містить матеріал про цікаве та смішне у житті математиків, у математиці, математичні сміховинки, жарти і т.п. Книга значною мірою розбуджує у читачів інтерес до математики, зароджує потребу у вивченні життя та праць видатних математиків, розширює кругозір, сприяє кращому розумінню математичних понять .

Математик, який має ще якесь хобі,— особливо багатогранний і як особистість, і як математик.

Талант і велика працездатність — характерні риси видатних математиків. Знайомишся із їх життям і творчістю і не перестаєш дивуватись, захоплюватись неповторною вишуканістю їх математичного мислення, незнанням втоми, дивною наполегливістю, силою волі їх характеру. Згадуються слова Наполеона про те, що вчені-математики роблять свої великі відкриття, не проливши жодної краплі крові.

При читанні лекцій з математики потрібно постійно викликати в студентів позитивні емоції, вкрай необхідні для виникнення та розвитку, в них інтересу до цієї науки, пам'ятати, що «математика має свою поезію», «свою музику».

А краплини гумору під час лекції, «intermezzo» між теоремами теж допомагають при викладанні математики.

РОЗРОБКА НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНОГО ПОСІБНИКА З АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ БАКАЛАВРІВ У ГАЛУЗІ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Н. А. Галібіна
Донбаська національна академія будівництва і архітектури,
Макіївка, Україна
gn1977@mail.ru

Одним з напрямів удосконалення навчання математики студентів технічних університетів є упровадження діяльнісного підходу. Основи проектування і організації навчання математики студентів ВТНЗ на засадах діяльнісного підходу викладено у роботі О. Г. Євсеєвої [1]. Метою нашої роботи є розробка методичної системи такого навчання для бакалаврів у галузі будівництва і архітектури.

Найважливішим компонентом методичної системи навчання є засоби навчання. Традиційні засоби навчання доцільно доповнити спеціальними засобами, розробленими на засадах діяльнісного підходу. Важливе місце серед них посідає предметна модель студента ВТНЗ із математики та навчальні посібники, в яких використовуються системи професійно зорієнтованих задач, спрямовані на послідовне опанування діями, що складають основу професійної компетентності майбутніх фахівців. З метою створення таких засобів нами розроблено методичний посібник з розділу «Аналітична геометрія», що входить до змісту таких дисциплін як «Прикладна математика» та «Вища математика» у програмах підготовки бакалаврів будівельних та архітектурних напрямів підготовки.

Зміст навчального предмету при навчанні на засадах діяльнісного підходу складає система предметних дій, що задана характером майбутньої професійної діяльності і знання, що забезпечують виконання цих дій. Добитися ефективного засвоєння студентом змісту курсу можливо за допомогою чіткого, ясного, логічного порядку подання теоретичного матеріалу. Для цього в пропонованому посібнику теоретичний матеріал представлений у вигляді так званого опорного або семантичного конспекту. Суть полягає в тому, що всі основні положення матеріалу, що вивчається, представляються у вигляді висловлень, які формулюються однією фразою, або реченням. Вони містять означення, твердження, теореми курсу, що вивчається. Ці висловлювання пронумеровані і складають своєрідний логічний скелет курсу. Номер кожного висловлення починається літерами СК (семантичний конспект) і цифрами, які вказують на номер розділу і номер висловлення в розділі. При цьому матеріал подається в строгій логічній послідовності: в кожному висловленні використовуються поняття, які вже вводилися раніше. Вони готують, визначають, пояснюють це висловлення. Номери висловлень, на які воно посилається, наводяться в дужках після нього. Словесне формулювання і формулювання в символьному вигляді одного і того ж твердження дається окремими висловленнями. Таким чином, увесь матеріал виявляється розкладеним на, свого роду, логічні одиниці, що дозволяють уважному читачеві встановити його чітку логічну структуру.

З точки зору діяльнісного підходу, засвоювати знання можна, тільки застосовуючи їх, оперуючи ними, а механізмом здійснення навчальної діяльності при навчанні математики є розв'язання задач. У посібнику запропонована система задач, що спрямована на послідовне освоєння математичних дій. Таку технологію навчання можна сформулювати як «Вчимося, працюючи», тому що при розв'язанні системи задач, що надана у посібнику, студенти використовують знання у різних умовах, поступово засвоюючи їх одночасно з освоєнням предметних дій.

Принцип подання матеріалу полягає в тому, що знання надаються маленькими порціями, після кожної з яких студентові пропонуються задачі, які розв'язуються за допомогою цих знань. Крім того, розв'язання задач пропонується виконувати за допомогою процедури орієнтування, яка складається з загального орієнтування (визначення що треба робити і що для цього треба знати) і загального орієнтування (визначення які дії необхідно виконати і за допомогою чого), що сприяє освоєнню математичних дій.

Посібник містить сім частин. У першій частині наводяться приклади задач, які виникають у професійній діяльності фахівців архітектурно-будівельної галузі, цікаві факти з історії, фото реальних архітектурних об'єктів з метою створення у студентів мотивації до вивчення аналітичної геометрії. Наведемо приклади задач, що формулюються у першій частині посібника.

Задача 1. Сегментна арка має форму форму дуги кола. Скласти рівняння цього кола, знайти положення її центру та радіус, а також центральный кут α, стягнутий дугою арки, та довжину цієї дуги, якщо прогін арки дорівнює 20 м, а її підйом — 0,25 м.

Задача 2. Арка базиліки у соборі Святої Родини, яки побудовано за проектом Антоніо Гауді у Барселоні (рис. 1), має форму параболи. Потрібно скласти рівняння цієї арки, якщо висота підйому арки дорівнює d, а довжина прогону (відстань між центрами спирання арки) дорівнює $2L$.

Задача 3. Скласти рівняння верхньої поверхні радіотелескопу, якщо відстань від фокусу до вершини 5м, а діаметр дорівнює 1,02 м.

Задача 4. Покриття даху кінотеатру має форму гіперболічного параболоїда. У деякій системі координат воно задається рівнянням $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z$. Скласти канонічні рівняння прямолінійних твірних, на яких лежать кроквяні балки даху, якщо ці твірні проходять через точку $A\left(4;\ 3;\ 0\right)$.

Рис. 1.

У другій частині посібника наводяться деякі факти з елементарної математики, лінійної алгебри, подані у вигляді семантичного конспекту. Вони складають так званий нульовий рівень для конспекту з аналітичної геометрії.

Третя частина містить відомості з фізики, необхідні для розв'язання професійно-орієнтованих задач з використанням аналітичної геометрії. Семантичний конспект з фізики згруповано за розділами: 1) кінематика; 2) механіка.

Четверта частина складається з семантичних конспектів з аналітичної геометрії на площині та у просторі. Наприкінці розділу наведено систему тестових завдань, призначених для діагностики засвоєння знань, необхідних для розв'язання задач.

У п'ятій частині наводиться система типових завдань, спрямована на формування у студентів базових математичних компетентностей з аналітичної геометрії. Частина завдань розв'язується зі складанням схем орієнтування, в яких наводяться посилання на опорні знання у вигляді висловлювань семантичного конспекту. Частина завдань наводиться для самостійного розв'язання.

Шоста частина містить систему завдань, які дозволяють студентам освоїти дії з математичного моделювання у фаховій галузі. Ці дії є необхідними для складання математичних моделей об'єктів і процесів, які розглядаються у професійно-орієнтованих задачах.

У сьомій частині посібника наводиться система професійно-орієнтованих задач, при розв'язанні яких також використовуються схеми орієнтування. Наведено розв'язання майже 100 задач з галузі будівництва і архітектури, майже така ж кількість задач наведена для самостійного опрацювання студентами.

Наприкінці посібника подано українсько-російський словник термінів і відповіді.

Посібник, що розроблено, буде у нагоді для організації навчальної діяльності з математичних дисциплін як під час аудиторних занять, так і у самостійній роботі студентів.

Список літератури

1. Галибина Н. А., Евсеева Е. Г. Профессионально-направленные задачи по аналитической геометрии как средство формирования профессиональной компетентности инженера-строителя / Н. А. Галибина, Е. Г. Евсеева // Тезисы докладов 8-й международной конференции по геометрии, топологии и преподаванию геометрии. — Черкассы : ЧНТУ, 2013. — 67–68 с.

2. Євсеєва О. Г. Теоретико-методичні основи діяльнісного підходу до навчання математики студентів вищих технічних закладів освіти : монографія / О. Г. Євсеєва. — Донецьк: ДонНТУ, 2012. — 455 с.

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

В. І. Гречко
Національний технічний університет України «КПІ», Київ. Україна
and.grechko@gmail.com

Мета цього курсу — це підвищення якості викладання курсу вищої математики для студентів економічних спеціальностей. З розвитком ринку інтерес до різних курсів, а також до методів, які на них ґрунтуються постійно зростає. Треба допомогти студентам отримати представлення про зв'язок математичних методів з граничними областями економіки, дати представлення про моделі вибору в умовах ризику, а також про практичні методи оцінки ризику в застосуванні до фінансових задач, активно залучаючи до цього методи математичної статистики.

Методика викладання курсу вищої математики, як і будь якого курсу для викладачів, має бути орієнтована на пробудження у студентів творчого інтересу до предмету. При викладанні курсу виникає необхідність використання самостійної роботи студентів, також передбачається, що домашні завдання студентам можуть бути досить складними і творчими з наступним обговорюванням на заняттях. Програмою курсу має бути передбачено заняття в комп'ютерному класі.

Курс орієнтований на викладачів математичних, економічних та фінансових дисциплін. Важливе є питання про математичну підготовку студентів. Можна виділити 4 рівня математичної підготовки студентів:

Нижче середньої, середню (наприклад економічні факультети) , підвищену (наприклад, технічні факультети), високу (математичну).

Математика сформувала величезну бібліотеку ефективних алгоритмів для розв'язання різних задач економіки, але спеціалісти вважають, що це надбання мало використовується в гуманітарних науках. Так студентів із низькою математичною підготовкою треба орієнтувати на результати, надбані математикою, а не на техніку їх отримання. Наприклад, вважається недоцільним доведення теорем існування.

У минулі роки основою математики для економістів було вміння швидкого обчислення, наприклад складних відсотків, знаходження різних значень за таблицями і т.п. Такі знання та вміння дозволяли швидко та без втрат приймати рішення в товарних операціях. Але з розвитком комп'ютерної техніки актуальність, зокрема обчислення складних відсотків в умі впала до нуля.

Прогнозуючи розвиток математики в економіці економісти вважають, що буде зниження складності конкретних фінансово — математичних задач.

Математика в економіці особливо гостро потребує навчальних посібників, але довгий час для їх публікації і висока швидкість старіння результатів веде до того, що вони не будуть потрібні студентам після закінчення університету.

Дуже корисними є використання електронних посібників. Для цього викладач спочатку формує майбутній посібник , створює масиви питань згідно його лекціям. На кожній лекції студенти отримують питання , а під час практичних занять студенти повинні дати відповіді на них. За час проведення самостійної роботи студенти доповнюють цей матеріал інформацією із книг, Інтернету та інших джерел. До визначеної дати кожний студент повинен розіслати по електронній пошті ці матеріали всім своїм одногрупникам. До другої дати студент повинен прочитати реферати інших студентів та вислати свої оцінки викладачу. До кінця курсу лекцій у кожного студента збирається бібліотека перевірених викладачем та іншими студентами документів.

Для студентів з високим рівнем математичної підготовки при застосуванні та дослідженні задач в економіці з використанням кореляційного аналізу слід розглядати статистичну та кореляційну залежності. Важливим апаратом при цьому є поняття лінійної регресії, коефіцієнта кореляції, інтервальної оцінки параметрів зв’язку, індексу кореляції, рангової кореляції.

Викладання курсу повинно бути науковим та ясним.

Список літератури

1. Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика для економістів:5-те вид. Навч.посіб. — К: Центр учбової літератури. 2010. — 448 с.

2. Валєєв К. Г., Джалладова І. Л., Вища математика: Навч.посібник:У 2-х ч.— Київ, 2004.

ПРО ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ ВИШІ

О. О. Дем’яненко
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
o.dem@ukr.net

Першокурсники технічних факультетів, приблизно, п’яти останніх років суттєво відрізняються від студентів перших курсів попередніх поколінь. Це пояснюється різними причинами: і тим, що зарахування до вищих учбових закладів здійснюється за результатами ЗНО, відповідно змінилась підготовка до вступу; і тим, що комп’ютерні технології глибоко проникли в усі сфери навчання і побуту, змінивши їх, іноді, докорінно; і тим, що сучасне життя перенасичене різноманітною інформацією, що викликає розгубленість і несприйняття її. В змінах, що відбулися є як позитивні, так і негативні моменти.

Зупинимось докладніше на тих особливостях сучасного покоління студентів молодших курсів технічного навчального закладу, що становлять проблему для викладачів і спробуємо запропонувати способи розв’язання цих проблем.

Сучасні студенти не навчені запам’ятовувати, вчити напам’ять формули, правила, чіткі означення та формулювання теорем. Наявність технічних засобів з доступним Інтернетом створює примарне відчуття того, що «я це знаю». Насправді немає ні знань, ні навиків їх застосування. Якщо ж, навіть, знання засвоєні, то сприймаються вони локально, без взаємозв’язків, без узагальнень, тобто не складаючи цілісної картини навколишнього світу. Ця, на перший погляд загальна філософська проблема, викликає реальні труднощі при вивченні курсу вищої математики. Так, наприклад, розклад многочлена на множники вивчають в школі і застосовують при розв’язанні алгебраїчних рівнянь вищих порядків. Коли пропонується в першому семестрі знайти границю функції в точці, а функція є раціональним дробом, необхідно розкласти на множники многочлени в чисельнику і знаменнику. Задача виконується тільки після підказки і пояснень викладача. Тобто, вивчений метод «прив’язується» до відповідного розділу і, навіть, до відповідного типу задач. Зв’язків між різними розділами математики вони не бачать і не сприймають математику, як єдине ціле. Не бачать вони також зв’язків між математикою і фізикою, між математикою і хімією, тощо. Це означає, що курс «Вища математика» студенти молодших курсів сприймають як окремий незалежний предмет, який «здав і забув», а не як базовий курс,що застосовується в подальшому у фахових спецкурсах.

Що ж робити для покращення ситуації? По-перше, не треба скорочувати класичні лекційні курси (така тенденція намітилась останнім часом), а треба змінити акценти при їх читанні. Потрібні чіткі означення та формулювання, відокремленні від доведень. Математичні записи треба робити із застосуванням відповідних символів і вимагати, щоб студенти їх вміли читати і самі вірно використовували. Всі математичні перетворення треба робити докладно і доводити до кінця. Все це вчить логічно мислити та налагоджувати зв’язки між різними поняттями, структурує сприйняття нового матеріалу.

По-друге, необхідно наводити якомога більше різноманітних прикладів. Це можуть бути приклади застосування математики в фізичних задачах, в економічних задачах, в обчислювальних задачах будь-якої конкретної предметної області, що обумовлені сучасними потребами. Так, наприклад, розклад функції в ряд Тейлора для наближеного обчислення функції в точці при наявності сучасної комп’ютерної техніки, здається сучасним студентам безглуздою задачею. Але інформація про те, що їх комп’ютер обчислює це значення саме за вказаною формулою викликає подив і безумовну зацікавленість процесом обчислення.

Корисним також є порівняння різних методів розв’язку однієї задачі. Так вже на початку першого знаходження площі трикутника, якщо задані координати вершин в декартовій системі координат. Першокурсники традиційно намагаються застосувати формулу Герона. Використання ж векторного добутку підкреслює беззаперечні переваги нового вивченого матеріалу. В кінці третього семестру, коли вивчається перетворення Лапласа, корисно порівняти розв’язання диференціальних рівнянь традиційними методами теорії диференціальних рівнянь і операційним методом. Ці порівняльні прийоми, по-перше, дозволяють знаходити переваги та недоліки різних методів і, по-друге, примушують сприймати математику, як єдине ціле.

По-третє, необхідно акцентувати увагу студентів на прізвищах математиків, що звучать при читанні курсу: якщо дозволяє час, можливо, давати коротку біографічну довідку, або якісь окремі цікаві відомості з життя видатних математиків. Розуміння того, що це були визначні особистості підвищує інтерес до предмету їх досліджень, тобто до матеріалу, який вивчається.

При доведенні теорем треба звертати увагу на цікаві прийоми, парадоксальні висновки, підкреслюючи, що математика пропонує методи, способи мислення. Яскравим прикладом такого цікавого парадоксу може бути інтегральна теорема Коші в теорії функцій комплексної змінної, яка дозволяє інтегрувати не інтегруючи. Це дивує і зацікавлює, а отже підвищує ефективність засвоєння матеріалу.

ВИСНОВКИ З ДОСЛІДЖЕННЯ «ПРОЕКТУВАННЯ І ОРГАНІЗАЦІЯ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТІВ ВИЩИХ ТЕХНІЧНИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ НА ЗАСАДАХ ДІЯЛЬНІСНОГО ПІДХОДУ»

О. Г. Євсеєва
Донецький національний технічний університет, Донецьк, Україна
eeg/donntu@rambler.ru

Питання розвитку математичного складника вищої інженерної освіти проаналізовано в роботах таких вітчизняних учених, як: К. В. Власенко, Г. Я. Дутка, В. І. Клочко, М. М. Ковтонюк, В. В. Корнещук, Т. В. Крилова, О. Я. Кучерук, В. Г. Моторіна, Л. І. Нічуговська, В. А. Петрук, М. В. Працьовитий, С. О. Семеріков, О. І. Скафа, П. О. Стеблянко та ін. Увага вчених зосереджувалася на фундаменталізації, диференціації, інтенсифікації, комп'ютеризації та професійній спрямованості навчання математики у ВНЗ, на розробленні методичних систем і технологій формування прийомів професійно орієнтованої діяльності майбутніх інженерів.

Аналіз науково-педагогічних аспектів навчання математики студентів вищих технічних навчальних закладів дав підстави для висновку, що нині актуалізовані проблеми формування професійної компетентності фахівців інженерних спеціальностей. Це можливо за рахунок упровадження діяльнісного підходу в навчання вищої математики. Теоретико-методичні основи навчання математики студентів ВТНЗ на засадах діяльнісного підходу викладено нами у монографії [1].

Нами потрактовано навчання математики студентів інженерних напрямів підготовки на засадах діяльнісного підходу — цілісна система відтворення досвіду попередніх поколінь у навчальній галузі математичних дисциплін, зорієнтована на опанування студентами навчальних дій у галузі математики і засвоєння математичних знань, необхідних фахівцю в майбутній професійній діяльності, через проектування й організацію цілеспрямованої навчальної діяльності.

Проектуючи й організовуючи навчання математики студентів ВТНЗ, необхідно дотримуватися традиційних дидактичних принципів навчання у ВНЗ: науковості, систематичності й послідовності, свідомості навчання, активності та самостійності, наочності, ґрунтовності, зв'язку навчання з практичною діяльністю, єдності освітніх, розвивальних і виховних функцій навчання та інших. Ефективність навчання на засадах діяльнісного підходу стає можливою в разі, якщо навчання побудоване відповідно до принципів первинності діяльності; діяльнісного цілепокладання; діяльнісного визначення змісту навчання, діяльнісного засвоєння змісту навчання, професійної спрямованості навчання.

До психолого-педагогічних передумов навчання математики студентів ВТНЗ на засадах діяльнісного підходу належать такі фактори:

– психологічні особливості студентського віку, провідною серед яких є прагнення до професійного самовизначення;

– закономірності формування інженерного професійного мислення, головна з яких — створення орієнтувальної основи діяльності під час розв’язання професійно орієнтованих задач;

– діяльнісний механізм засвоєння змісту навчання математики, що полягає в одночасному опануванні навчальних дій у галузі математики й засвоєнні знань, які слугують засобами навчання;

– успішна адаптація студентів до навчання математики у ВТНЗ, чого досягають завдяки використанню в навчанні спеціальних методів, форм і засобів навчання;

– механізми формування мотивації навчальної діяльності, професійної мотивації, мотивації творчої самореалізації, мотивації досягнення успіху, які полягають у залученні студента до діяльності на всіх етапах навчання, використанні рейтингової системи оцінювання результатів навчальної діяльності.

Унаслідок наукової рефлексії теоретико-методичних основ навчання математики на засадах діяльнісного підходу доведено, що зміст навчання повинен бути представлений системою навчальних дій у предметній галузі математики, заданою характером майбутньої професійної діяльності, і знаннями, які вможливлюють виконання й опанування цих дій. Механізм засвоєння змісту навчання математики на засадах діяльнісного підходу полягає в тому, що студент засвоює знання одночасно з опануванням математичних навчальних дій у процесі навчальної діяльності, яку проектує, організовує й керує якою викладач. При цьому опануванням математичних навчальних дій необхідно керувати як поетапним процесом, що передбачає послідовне оволодіння діями на низькому, середньому і високому рівнях.

Для формалізації змісту навчання введено предметну модель студента, що складається з п’яти компонентів: тематичного, семантичного, функціонального, процедурного й операційного. Операційний компонент предметної моделі студента з вищої математики містить опис навчальних дій у галузі математики, які мають бути опановані студентами, а тематичний компонент є переліком предметних знань, необхідних для опанування цих дій. Опис знань представляє решта компонентів моделі.

Аналіз заходів, спрямованих на підвищення якості підготовки фахівців інженерної галузі, дає підстави для формулювання методичних вимог до розроблення методичної системи навчання математики студентів ВТНЗ на засадах діяльнісного підходу, що відповідатиме дидактичним цілям; змісту навчання, адекватним методам навчання математики; технологіям структурування математичних знань засобами предметного моделювання студента.

Діяльність викладача з проектування методичної системи повинна включати такі дії: окреслення діагностичних цілей і завдань навчання;

обґрунтування змісту навчання в контексті майбутньої професійної діяльності фахівця, якого готують у ВНЗ; з'ясування структури змісту навчального матеріалу, його інформаційної місткості, системи смислових зв'язків між елементами; визначення необхідних рівнів засвоєння матеріалу й початкових рівнів підготовленості студентів; пошук спеціальних дидактичних процедур засвоєння навчального матеріалу, вибір організаційних форм, методів, засобів індивідуальної й колективної навчальної діяльності; вибір процедур контролю та вимірювання якості засвоєння програми навчання, а також способів корекції навчальної діяльності.

Ефективне навчання математики у ВТНЗ неможливе без використання спеціальних методів навчання, до яких включено методи структурування знань і методи забезпечення навчальної діяльності. Методи структурування знань дають змогу сформувати основу для створення нових видів навчальної діяльності та технологій навчання математики на засадах діяльнісного підходу. Поєднання різноманітних методів навчання математики сприяє опануванню студентами навчальних дій, формуванню в них способів дій, притаманних їхній майбутній професійній діяльності.

Організація цілеспрямованої навчальної діяльності та керування нею неможливі без використання різноманітних форм організації навчального процесу. При цьому необхідним є формулювання цілей заняття в термінах дій; використання спеціальних методів організації навчальної діяльності; організація самостійної діяльності кожного студента на занятті; наявність системи завдань, спрямованих на активізацію необхідних процедурних знань; наявність системи завдань, що зорієнтована на послідовне опанування математичних навчальних дій і задовольняє умову повноти спектру засвоюваних дій.

Одним із головних засобів проектування й організації навчання є навчально-методичний комплекс із математики [2–10]. Навчальний матеріал, уміщений у навчально-методичному комплексі для майбутніх інженерів, допомагає викладачеві змінювати структуру лекцій, модернізувати практичні заняття, моделювати евристичні бесіди, організовувати проблемні ситуації, ділові ігри тощо.

Методична система навчання математики студентів ВТНЗ на засадах діяльнісного підходу є ефективною як в інженерних навчальних закладах, так і в професійній підготовці майбутніх викладачів технічних університетів. Розроблена діяльнісно-орієнтована технологія навчання математики майбутніх інженерів має загальний характер і може бути застосована для проектування й організації навчання з інших навчальних дисциплін вищої технічної освіти, загальноосвітньої та професійної освіти (школа, технікум, професійний ліцей). Технологія розроблення й використання предметної моделі студента має допомогти розробникам друкованих та електронних навчальних посібників інших дисциплін.

Створена методична система навчання математики на засадах діяльнісного підходу у вищій технічній школі сприяє формуванню способів дій майбутньої професійної діяльності інженерів, підвищенню рівня опанування математичних навчальних дій і, як наслідок, формуванню математичних компетентностей майбутніх інженерів, розвиткові інженерного професійного мислення й математичної культури студентів технічних напрямів підготовки.

Список літератури

1. Євсеєва О. Г. Теоретико-методичні основи діяльнісного підходу до навчання математики студентів вищих технічних закладів освіти : монографія / О. Г. Євсеєва. — Донецьк : ДонНТУ, 2012. — 455 с.

2. Індивідуальні домашні завдання з вищої математики: метод. посіб. для самостійної роботи студ. : у 2 ч. / О. Г. Євсеєва, Г. М. Улітін, М. С. Тю, Ю. Ф. Косолапов. — Ч. 1. — Донецьк : ДонНТУ, 2008. — 112 с.

3. Індивідуальні домашні завдання з вищої математики. Методичний посібник для самостійної роботи студ. : у 2 ч. / О. Г. Євсеєва, О. С. Гребьонкіна, Т. І. Николайчук, О. І. Савін. — Ч. 2. — Донецьк : ДонНТУ, 2011. — 80 с.

4. Євсеєва О. Г. Тестові завдання з вищої математики : метод. посіб. для самостійної роботи студ. : у 2 ч. / О. Г. Євсеєва, Н. А. Прокопенко. — Донецьк : ДонНТУ, 2010. — Ч. 1 : Лінійна алгебра, векторна алгебра, аналітична геометрія. — 2010. — 70 с. — Ч. 2 : Теорія границь, диференційне числення функції однієї незалежної змінної. — 2010. — 52 с.

5. Євсеєва О. Г. Алгебра матриць. За діяльнісною технологією «Вчимося працюючи» : навч. посібник / О. Г. Євсеєва. — Донецьк : ДонНТУ, 2011. — 155 с.

6. Євсеєва О. Г. Автоматизоване робоче місце викладача математики у ВТНЗ : комп’ютерно орієнтована система / О. Г. Євсеєва. — 1,28 Гб. — Донецьк, ДонНТУ, 2012. — 1 електрон. опт. диск (DVD–ROM) ; 12 см. — Систем. вимоги. Windows XP, Internet Explorer 7, Sun Java, Adobe Flash Player.

7. Євсеєва О. Г. Нульова контрольна робота з вищої математики для студентів технічних спеціальностей : метод. посібник / О. Г. Євсеєва. — Донецьк : ДонНТУ, 2011. — 28 с.

8. Євсеєва О. Г. Навчальна програма з вищої математики для студентів технічних напрямів підготовки (розроблена на засадах діяльнісного підходу) : метод. посібник / О. Г. Євсеєва. — Донецьк : ДонНТУ, 2011. — 59 с.

9. Євсеєва О. Г. Система підготовки до модульних контролів з вищої математики у ВТНЗ: діяльнісний тренажер для студента : навч. посібник : у 2 ч. / О. Г. Євсеєва. — Ч. 1 (друге видання). — Донецьк : Ноулідж, 2012. — 195 с.

10. Євсеєва О. Г. Система підготовки до модульних контролів з вищої математики у ВТНЗ: діяльнісний тренажер для студента : навч. посібник : у 2 ч. / О. Г. Євсеєва, О. І. Савін. — Ч. 2 (друге видання). — Донецьк : Ноулідж, 2012. — 204 с.

ПРО ВИВЧЕННЯ РЕКУРЕНТНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ

М. М. Зеліско,[1] І. П. Кшановський, [2] Н. М. Пирч[3]

[1, 3]Українська академія друкарства, Львів, Україна,

zelisko.mykhaylo@gmail.com, pnazar@ukr.net

[2]Національний університет «Львівська Політехніка», Львів, Україна

kshanovsky@ukr.net

Рекурентним співвідношенням порядку k називається формула

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_{n-k}, n),$$

що пов’язує значення члена послідовності з номером n, із членами цієї послідовності, що мають номери $n-1, n-2, \ldots, n-k$ та дискретною змінною n.

Рекурентні співвідношення на сьогодні стають невід’ємною складовою при вивченні предметів «Вища математика» (див. [2]) та «Дискретна математика» (див. [1]). На практиці рекурентні співвідношення зручно читати після вивчення дисципліни «диференціальні рівняння» або після вивчення відповідного розділу в курсі вищої математики. Тут добре працює метод аналогії «диференціальні рівняння — рекурентні співвідношення», а саме:

лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами — лінійні однорідні рекурентні співвідношення зі сталими коефіцієнтами;

лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами (метод варіації сталих для знаходження часткового розв’язку, метод підбору, принцип суперпозиції) — лінійні неоднорідні рекурентні співвідношення зі сталими коефіцієнтами (метод варіації сталих для знаходження часткового розв’язку, метод підбору, принцип суперпозиції);

лінійні рівняння першого порядку зі змінними коефіцієнтами — лінійні рекурентні співвідношення першого порядку зі змінними коефіцієнтами;

метод інтегруючого множника — метод сумуючого множника;

системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (метод виключення невідомих та метод власних векторів для однорідних систем) – системи лінійних рекурентних співвідношень зі сталими коефіцієнтами (метод виключення невідомих та метод власних векторів для систем однорідних співвідношень);

застосування інтегральних перетворень до розв’язування диференціальних рівнянь — застосування дискретних перетворень та твірних функцій до розв’язування рекурентних співвідношень;

моделі неперервних процесів, що розв’язуються за допомогою диференціальних рівнянь — моделі дискретних процесів, що розв’язуються за допомогою рекурентних співвідношень.

Такий метод аналогій дозволяє швидше і ефективніше засвоїти основні методи розв’язування рекурентних співвідношень. Зважаючи на велику кількість аналогій при вивченні розділів диференціальні рівняння та рекурентні співвідношення, тему рекурентні співвідношення, при наявності відповідного методичного забезпечення, можна частково або повністю давати студентам для самостійного вивчення. Простежити паралелі між диференціальними рівняннями та рекурентними співвідношеннями та проілюструвати їх студентам можна при вивченні випадкових процесів: знаходження ймовірностей станів для марковського процесу з неперервним часом приводить до системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, знаходження ймовірностей станів для марковського процесу з дискретним часом приводить до системи рекурентних співвідношень зі сталими коефіцієнтами.

Вказати на те, що рекурентні співвідношення є невід'ємною частиною вищої математики та органічно поєднати цей розділ з іншими можна за допомогою задач зі суміжних розділів математики, що розв'язуються за допомогою рекурентних співвідношень. Зокрема, це знаходження визначників вищих порядків, що мають спеціальний вигляд, знаходження визначених інтегралів що залежать від натурального параметра n, які при інтегруванні частинами дозволяють понизити свій порядок, наближені обчислення, що використовують рекурентні формули.

Вдало підібрана система комплексних індивідуальних завдань допоможе студентам в часі їх виконання набути необхідних практичних умінь та навичок, а викладачу під час їх перевірки проконтролювати рівень засвоєного матеріалу та виправити типові помилки (кратні та комплексні корені характеристичного многочлену, знаходження сумуючого множника та ін.)

Поза математикою цікавим та важливим застосуванням рекурентних співвідношень, на якому варто закцентувати студентів є знаходження складності та асимптотичної складності алгоритмів. Саме в цьому контексті варто подати теореми про асимптотичну оцінку розв'язків рекурентного співвідношення. Говорячи про програмування та алгоритми, важливо зауважити на легкість та зручність написання програм, що дозволяють розв'язувати рекурентні співвідношення довільного порядку.

Рекурентні співвідношення, що вивчаються у курсі «Дискретної математики» є надзвичайно гнучким інструментом для розв'язування широкого класу комбінаторних задач та одним з головних практичних застосувань дискретних перетворень та твірних функцій.

Зважаючи на те, що багато економічних процесів носять дискретний характер (значення їхніх показників змінюються раз на день, тиждень, місяць чи квартал), а отже їхнє моделювання часто приводить до рекурентних співвідношень, вважаємо доцільним включення у курс «Вищої математики» для студентів економічних спеціальностей розділу «рекурентні співвідношення» у розмірі 4−6 лекційних та такої ж кількості практичних занять з можливим винесенням частини матеріалу на самостійне вивчення.

Список літератури

1. Андерсен Дж. Дискретная математика и комбинаторика / Дж. Андерсен. − Санкт-Петербург: Издательский дом «Вильямс», 2004. — 960 с.

2. Валеев К. Г. Вища математика : Частина 2: підруч. / К. Г. Валеев, І. А. Джалладова. — Ч.2 − К. : КНЕУ, 2002. — 451 с.

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Т. В. Іваненко
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
ivanenko@inet.ua

При вивченні студентами будь-якої дисципліни запорукою успіху є наявність вагомої мотивації. Особливо це стосується вивчення математичних дисциплін студентами нематематичних спеціальностей, оскільки їхня шкільна математична підготовка не завжди відповідає вимогам вищої школи. Слабка база знань з математики часто пояснюється тим, що школи, починаючи з середніх класів, впроваджують певні пріоритетні напрямки освіти, формуючи гуманітарні класи, що надають перевагу вивченню деяких наборів дисциплін за рахунок годин, що мали б бути використані для вивчення інших дисциплін, які вважаються другорядними для цього напрямку. Таким чином, не всі випускники середніх шкіл мають однаковий рівень математичної підготовки, що створює їм труднощі при вивченні математичних дисциплін у вищих навчальних закладах. Крім того, особливістю вивчення математики є необхідність послідовної, систематичної роботи студента, оскільки успішне опанування кожною наступною темою неможливо без вивчення попередніх тем, так як переважна їх більшість пов`язана між собою і кожна наступна тема ґрунтується на попередніх. Для успішного подолання усіх цих ускладнень багатьом студентам необхідно докласти великих зусиль, а для цього необхідна мотивація, а саме чітке розуміння того, як отримані знання можуть бути їм корисними в їхній майбутній професійній діяльності.

Для того, щоб зацікавити студента вивчати математичні дисципліни, викладачі самі повинні розумітися не лише на своїх фахових курсах, а й на їх прикладних аспектах в рамках спеціалізації студентів. Це означає, що під час проведення лекційних та практичних занять слід подавати матеріал не лише теоретично, з абстрактними математичними моделями, а й обов`язково ілюструвати можливість застосування тих чи інших математичних методів для розв`язання конкретних прикладних задач тієї галузі, у якій будуть працювати студенти після закінчення вищого навчального закладу. Способи застосування певних математичних методів можуть бути різними: це і безпосереднє вирішення прикладних задач, і база для вивчення інших методів, або навіть інших математичних дисциплін, але студент завжди має чітко розуміти кінцеву мету своєї праці.

Наприклад, тему «*Границя числової послідовності та функції*» можна проілюструвати прикладом *павутиноподібної моделі встановлення рівноважної ціни* з макроекономічного аналізу [1], [2]. Розглянемо процес ціноутворення на ринку досконалої конкуренції. Криві попиту $q = q(p)$ та пропозиції $s = s(p)$ (p — ціна певного товару) зображено на рис. 1. Перетином цих кривих є точка $\left(p^{*}; q\ ^{*}\right)$, яка визначає рівноважну ціну та відповідний їй попит, що дорівнює пропозиції. Нехай виробник виставляє початкову ціну свого товару на рівні p_1, який є вищим за рівноважний $\left(p_1 > \ p\ ^{*}\right)$, оскільки виробник завжди прагне одержати максимальний прибуток.

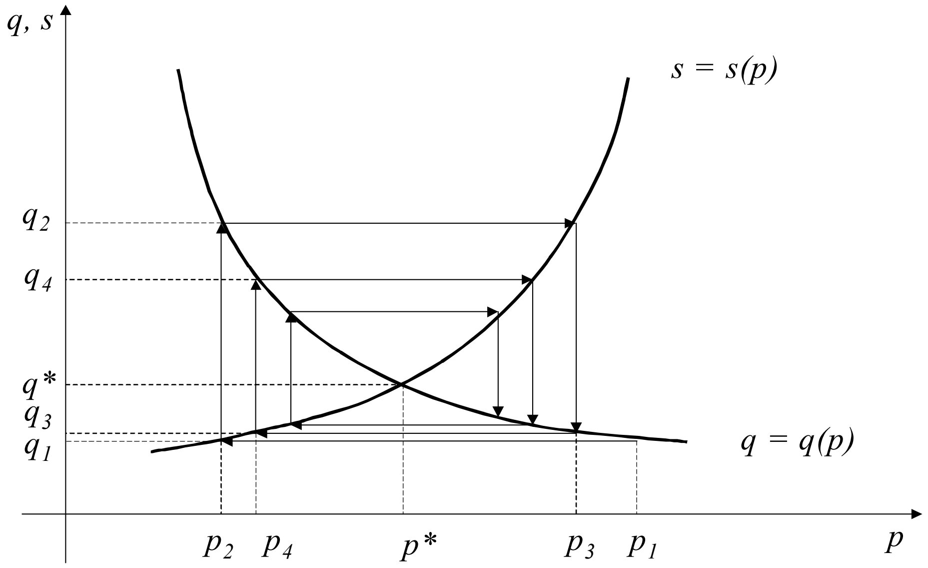


Рис. 1. Утворення рівноважної ціни на ринку досконалої конкуренції

Покупець оцінює попит q_1 при ціні p_1 і пропонує свою ціну p_2, яка є нижчою за рівноважну $\left(p_2 < p^*\right)$, оскільки покупець завжди прагне мінімізувати свої витрати. Продавець оцінює попит q_2, який відповідає ціні p_2 і пропонує нову ціну p_3, яка вже менша за $p_1 \left(p^* < p_3 < p_1\right)$. Продовжуючи процес торгу, продавець і покупець наближаються до рівноважних ціни та обсягу товару. Якщо розглядати послідовності чисел $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ та $q_1, q_2, ..., q_n, ...$, то $p^* = \lim\limits_{n\to\infty} p_n$, $q^* = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$.

Розглянемо окремий випадок павутиноподібної моделі при лінійних функціях попиту та пропозиції:

$$s\left(p\right) = a + bp_n, q\left(p\right) = c - dp_{n+1} \tag{1}$$

де n — момент часу, у який було встановлено ціну; $b, -d$ — кутові коефіцієнти прямих; a, c — обсяги пропозиції та попиту при нульовій ціні, вважаємо $c > a \left(a > 0, b > 0, c > 0, d > 0\right)$.

Умовою ринкової рівноваги є $s\left(p\right) = q\left(p\right)$, або, враховуючи рівняння (1),

$$a + bp_n = c - dp_{n+1} \Rightarrow p_{n+1} = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d} p_n .$$

Нехай у початковий момент часу $\left(n = 1\right)$ виробником виставлено ціну p_1, тоді ціна покупця буде $p_2 = \dfrac{c-a}{d} - \dfrac{b}{d} p_1$. Наступна ціна продавця p_3 дорівнює:

$$p_3 = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d} p_2 = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d}\left(\frac{c-a}{d} - \frac{b}{d} p_1\right) = \frac{c-a}{d}\left(1 - \frac{b}{d}\right) + \left(\frac{b}{d}\right)^2 p_1 = .$$

$$p_4=\frac{c-a}{d}-\frac{b}{d}p_3=\frac{c-a}{d}-\frac{b}{d}\left(\frac{c-a}{d}\left(1-\frac{b}{d}\right)+\left(\frac{b}{d}\right)^2p_1\right)=$$

$$=\frac{c-a}{d}\left(1-\frac{b}{d}+\left(\frac{b}{d}\right)^2\right)-\left(\frac{b}{d}\right)^3p_1$$

Для довільного n:

$$p_n=\frac{c-a}{d}\left(1-\frac{b}{d}+\left(\frac{b}{d}\right)^2-\left(\frac{b}{d}\right)^3+...+(-1)^n\left(\frac{b}{d}\right)^{n-2}\right)+(-1)^{n-1}\left(\frac{b}{d}\right)^{n-1}p_1 \quad (2)$$

$n=2,3,...$

Вираз у дужках є сумою n членів геометричної прогресії, $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, де $a_1=\frac{c-a}{d}$, $q=-\frac{b}{d}$. Підставимо це в формулу (2):

$$p_n=\frac{c-a}{d}\cdot\frac{1-\left(-\frac{b}{d}\right)^{n-2}}{1-\left(-\frac{b}{d}\right)}+(-1)^{n-1}\left(\frac{b}{d}\right)^{n-1}p_1.$$

Якщо павутиноподібна модель зі спіраллю, що скручується до точки рівноваги, то має бути $\left|q\right|<1$, тоді $\left(-\frac{b}{d}\right)^n\to 0$ при $n\to\infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}$. Таким чином, формула для знаходження рівноважної ціни $p\,*$ має вигляд:

$$p^*=\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c-a}{d}\cdot\frac{1-\left(-\frac{b}{d}\right)^{n-2}}{1+\frac{b}{d}}+(-1)^{n-1}\left(\frac{b}{d}\right)^{n-1}p_1\right)=$$

$$=\frac{c-a}{d}\cdot\frac{1}{1+\frac{b}{d}}=\frac{c-a}{d+b}$$

Рівноважна пропозиція складає:

$$q^*=c-dp\,*\;=c-d\frac{c-a}{d+b}=\frac{bc+da}{d+b}$$

На практиці досягнення точки $\left(p^*;\ q\,*\right)$ відбувається не завжди, тобто торг між покупцем і продавцем не завжди призводить до скручування спіралі. Можливі ситуації, коли продавець є монополістом, а купівельна спроможність покупців дуже низька, тоді точки $\left(p^*;\ q\,*\right)$ досягнуто не буде. Графічно це означатиме розкручування спіралі або коливання цін продавця і покупця з однаковою амплітудою. Отже, для того, щоб продавець і покупець досягли рівноважної ціни має виконуватись нерівність:

$$\left|-\frac{b}{d}\right| = \frac{b}{d} < 1 \Rightarrow b < d \Rightarrow$$

кутовий коефіцієнт прямої пропозиції має бути менше, ніж кутовий коефіцієнт прямої попиту.

$$b = \operatorname{tg}\alpha, d = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(180^\circ - \gamma) = -\operatorname{tg}\gamma \Rightarrow \left|-\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}\right| < 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\gamma.$$

Оскільки функція тангенса є зростаючою, то $\alpha < \gamma$ (рис. 2) При $\alpha \geq \gamma$ продавець і покупець не дістануть згоди (рис. 3)

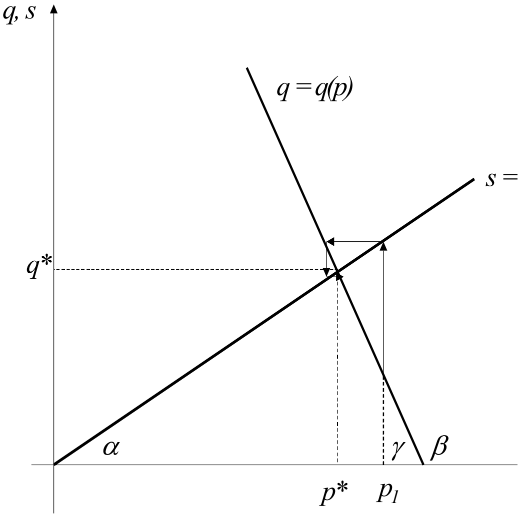


Рис. 2. Досягнення згоди між покупцем і продавцем

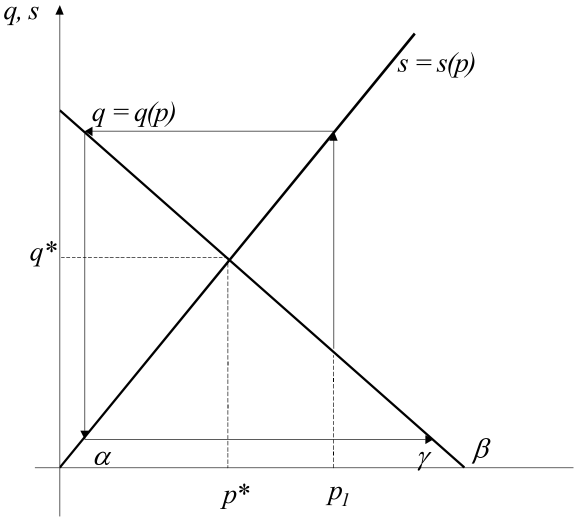


Рис. 3. Згода між покупцем і продавцем неможлива

Виходячи з вищесказаного можна зробити **висновки** про те, що викладати математичні дисципліни студентам нематематичних спеціальностей слід у тісному зв`язку з практичним використанням математичних методів і моделей для розв`язання прикладних задач відповідної галузі. Найвищих результатів у навчанні студент зможе досягти лише за умови розуміння, як саме отримані знання він зможе використовувати у подальшій професійній діяльності.

Список літератури

1. Математика в экономике: Учебник. Части 1, 2 / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов, И. Г. Шандра. — М., Финансы и статистика, 2007. — 224 с., 376 с.

2. Слухай С. В. Довідник базових термінів та понять з мікроекономіки / С. В. Слухай. – К.: Лібра, 1998. —256 с.

ФОРМУВАННЯ ДУХОВНОЇ КУЛЬТУРИ СТУДЕНТСЬКОЇ МОЛОДІ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

В. Я. Ілляшенко

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

geomalg@gmail.com

> *Тільки духовність спроможна зробити Україну*
> *суб'єктом світової історії.*
> *С. Кримський*

Одним із важливих завдань вищої і середньої школи є формування духовної культури вихованців, елементами якої є політична, соціальна, національна, моральна, естетична, комунікативна культура.

Наше суспільство, культуру вразила духовна криза. Коли говорять про кризу освіти, то частіше звертають увагу на економічні фактори, які викликали її. Проте проблема є складнішою. Сучасна криза освіти є насамперед лише одним із виявів кризи духовної культури, яку в цілому можна охарактеризувати як кризу гуманізму. Людина перестала бути головною цінністю, а духовна культура — засобом збагачення і розвитку Людини. Проходять процеси глобалізації освіти, широке впровадження в неї нових технологій дистанційного навчання, Інтернет-технологій. Поряд з безсумнівними достоїнствами ці процеси несуть в собі і негативні моменти. Технологізація, комп'ютеризація освіти віддаляють студента від викладача і від інших студентів. Студенти виступають як споживачі знань, споживачі культури. В силу цього необхідна трансформація самої освіти як спеціального інституту, посилення уваги до студента, формування його духовної культури.

Є багато визначень культури, які, починаючи від Ціцерона, змінюють свій зміст, і донині лишається важливою філософською проблемою розкриття суті цього поняття. Згідно Альберта Швейцера культура складається з панування розуму над силами природи і з панування розуму над людськими переконаннями і помислами. Можна сказати, що друга складова — це і є духовна культура. Тому формувати духовну культуру учнів, студентів — значить привчати їх підкоряти свої переконання і помисли голосу розуму.

Поняття духовності і духовної культури особистості невіддільне від здатності людини мислити, бо як говорив Б. Паскаль, вся наша гідність міститься в думці. В умінні правильно мислити він бачив вищий принцип моралі. Погляди універсального генія XVII ст. Б. Паскаля мають особливий інтерес, тому що він глибоко цікавився питаннями моральності, цінуючи роль моральної інтуїції в житті суб'єкта. У XX ст. краще всіх вчення Паскаля зрозумів і творчо ці ідеї розвинув А. Пуанкаре в своїй праці «Останні думки».

Математика, як ніякий інший навчальний предмет, вчить умінню мислити, і, перш за все, умінню доводити. В процесі вивчення математичних доведень під впливом логіки у студента виробляється певний стиль мислення.

Вивчення і побудова логічно строгих математичних доведень виховує волю, наполегливість, розвиває мислення, інтуїцію, духовну культуру. Як підмітив видатний геометр нашого часу О.Д. Александров, у вимозі доведення міститься надзвичайно важливий моральний момент. Сформований логічними доведеннями стиль мислення переноситься на повсякденну практику. Вихована в такому дусі людина прагне «основувати свої переконання у будь-якому питанні на спостереженнях і висновках настільки об'єктивних, які не піддаються стороннім впливам, упередженим думкам і поривам темпераменту, настільки це тільки доступне людині» [1].

Хоч математичне мислення і не зводиться лише до дедуктивних міркувань і формальних доведень, тим не менше, строга логіка займає в мислительних процесах цілком певне і помітне місце. Тому потрібно не скорочувати вивчення математики, а хоча би встановити рівновагу у розподілі навчальних годин на вивчення природничо-математичних та гуманітарних дисциплін як в середній, так і вищій школі.

З другого боку, викладання математики не може зводитися до однієї формальної логіки, воно не може не стосуватися проблем розвитку понять і теорій математики, боротьби протилежностей в їх тенденціях, випадків переходу кількісних змін в якісні і т.д.

Кожна наука має справу зі своїми поняттями і не цікавиться тим, якими вони були в уявленні студента раніше, в іншій науці. Проте методологічно правильна постановка викладання математичних курсів вимагає відзначати ці аспекти, формуючи тим самим їх філософські ідеї. Щоб зрозуміти зміст якої-небудь формули чи рівняння, потрібно не тільки їх знати, але і бачити, які висновки з них випливають, які найхарактерніші їх часткові і граничні випадки. Суть предмета і повинна бути передана в тих методологічних коментарях до теорем і формул, які повинні знаходитись «між» теоремами, цементуючи їх в одне ціле. Хотілось би, щоб такі відомості частіше зустрічалися в навчальній літературі, висвітлювався зв'язок між різними проблемами не тільки всередині даної науки, але і безпосередній зв'язок між окремими проблемами різних математичних дисциплін, різних наук.

Ядром духовної культури особистості є її світогляд. Можна умовно виділити такі чотири групи світоглядних ідей математики: методологія, філософія, історія, прикладне значення математики.

Випускник ВНЗ повинен володіти методологічною культурою, важливою ознакою якої є вміння користуватись професійно орієнтованими науковими знаннями для аналізу та вдосконалення своєї роботи.

Реалізація методологічної орієнтації процесу підготовки майбутнього спеціаліста вимагає цільової методологічної спрямованості кожного навчального курсу з математики. Тому необхідно в кожному курсі виділити провідні методологічні ідеї, які забезпечать розгляд дисципліни у взаємодії та єдності.

Методика викладання математики тісно пов'язана з методами міркувань, доведень, побудов, прийомами введення нових понять та ідей, способів викладу, методологічних підходів. Як говорив М.І. Лобачевський, «в математиці найважливішим є спосіб викладання». Викладач математики повинен знати вихідні принципи методики навчання вищої математики. Наприклад, у вузівському курсі математики найважливіші поняття (функція, похідна, детермінант, група та ін.) повинні визначатись класично, а начала відповідних теорій слід, на нашу думку, викладати традиційно. Після того, як традиційний підхід здійснено і самі начала математики студентами засвоєнні, можна і, навіть бажано, урізноманітнити арсенал методичних прийомів викладання і природних методів доведення теорем. Нетрадиційні підходи і нестандартні методики можна реалізувати в проблемних групах, наукових гуртках, при виконанні курсових та кваліфікаційних робіт.

Потрібно вчити студентів самостійно проводити доведення «за означенням», які спираються тільки на правильне розуміння означень понять, використання відомих, раніше доведених фактів або аксіом та елементарні логіко-математичні міркування, доведення, в яких використовуються стандартні методи та алгоритми.

Тестування — важливий інструмент перевірки знань і умінь студентів. Проте звичайні тести не контролюють розуміння матеріалу. Тому потрібно розробляти тести на розуміння. Наприклад: 1) Що таке π? 2) Вивести формулу площі прямокутного трикутника з катетами a, b за допомогою інтегрування.

При вивченні математичних понять і теорій важливе їх мотивування: конкретно-історичне (генезис поняття), внутрішньо-логічне, прикладне, філософське. Краще засвоїти математичне поняття дозволяє модельний приклад. Модельні приклади розвивають математичну інтуїцію, допомагають в наукових дослідженнях.

Багато філософських питань математики (проблеми нескінченності, істиності, походження абстракцій, нескінченно малі, проблеми обгрунтування диференційного числення, неевклідові геометрії та ін.) повинні розкриватись студентам на заняттях з математики.

Одним з ефективних засобів формування світогляду є використання історизму.

Знання основних фактів історії виникнення і розвитку, сучасного стану проблем математики, основних стимулів її розвитку, біографічні відомості про великих математиків мають позитивний вплив на ставлення студентів до предмету, привчають їх до історико-математичного аналізу.

Для поповнення історико-математичних знань студентів ми здійснюємо такі, наприклад, види робіт: формування епонімного словника термінів, пов’язаних з іменами їх творців, складання біографічних довідок, історичних оглядів в курсових, кваліфікаційних роботах, в індивідуальних науково-дослідних завданнях, математичні вечори, тижні математики, математичні вікторини, КВК, випуск математичного бюлетеня. Проведення студентських конференцій до важливих дат в історії математики має важливе виховне і навчальне значення. Так, щороку ми проводимо читання або конференції до дня народження академіка М. П. Кравчука. В попередні роки були проведені наукові конференції, присвячені 185-річчю геометрії М. І. Лобачевського, 150-річчю від дня народження Д. Гільберта тощо. Потрібно звертати увагу не лише на використання елементів історизму, а й на принцип історизму, який відповідає філософському вченню про закони розвитку систем.

Важливу роль у морально-етичному вихованні відіграють естетичні елементи математики, які формують та розвивають творчі здібності студентів. Пробуджують та стверджують глибокі громадянські почуття професійної відповідальності, прищеплюють естетичну культуру молоді. «Без розвинутого естетичного почуття, — підкреслює Н. О. Вірченко,— нема ні генія, ні таланту, ні розуму» [2].

Сучасна наукова картина світу базується на двох загальних принципах: математизації знання та естетичного відбору.

З усіх наук математика найбільш естетична, а значить, доцільна. Принцип естетичного відбору полягає в науковому виживанні і домінуванні найкрасивіших і найдосконаліших понять, ідей, методів і теорій, які відображають досконалість світу і які утверджують доцільність краси. Ознаками краси в науці можуть слугувати істинність, логічність, впорядкованість, гармонійність, конструктивність, абстрактність, загальність, універсальність, простота, новизна, історичність, доцільність та ін. Математика є джерелом і носієм всіх цих проявів краси і культури.

Естетичний зміст математики можна розкрити, знаючи глибинні особливості математики. І в цьому студенту повинен допомогти викладач. Математичне знання має бути естетично оформлене, викладатись логічно послідовно, системно, захоплююче, з використанням естетики зовнішньої, доступної органам відчуттів, і естетики внутрішньої, захованої від інших. Змістовного естетизму у вузівських курсах математики багато, але не менше важлива естетика процесуальна, пов'язана з подачею матеріалу, його записом, зображенням, його оцінкою.

Список літератури

1. Александров О. Д. О геометрии // ЖМШ, 1980. — №3. — С. 56–62.

2. Вірченко Н. О. Вибрані питання методики вищої математики / Вірченко Н. О. — К., 2003. — С. 108.

3. Пуанкаре Анри. Последние мысли / В кн. «О науке». — М.: Наука, 1990. — 736 с.

4. Ілляшенко В. Я. Краса математики і формування естетичної культури // Матер. Всеукр. наук.-практ. конф. «Формування духовної культури особистості в процесі навч. матем. в школі та вузі». — Луцьк: Вежа, 2003. — С. 14–15.

5. Ілляшенко В. Я., Кремінь В. М. Методологічна та методична підготовка вчителя математики в університеті // Матер. X Міжн. міждисц. наук-практ. школи-конф. «Сучасні проблеми гуманізації та гармонізації управління». — Х.: УАЖНО, ХНУ ім.В.Н. Каразіна, 2010. — С. 165–167.

ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМИ КОМП’ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ MAPLE ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

А. С. Корчакова, О. Г. Лебедєв, О. М. Нікітенко
Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна
nikon@kture.kharkov.ua

Математика — одна з галузей науки, яка складає фундамент науково–технічного прогресу. Математичні методи дослідження глибоко розповсюдилися на всі області наукової та практичної діяльності. Всі галузі науки, які вивчають певні форми руху природи, використовують формальний апарат, що надає їм математика. Про таку її роль Леонардо да Вінчі сказав: «Жодне людське дослідження не може називатися справжньою наукою, якщо воно не використовує математичного доведення.» Все більш глибока математизація науки й техніки потребує від фахівця не тільки навичок аналітичної та практичної роботи, але й розуміння суті математичної теорії, без чого вже майже неможливе ні розв’язання серйозних прикладних проблем, опанування спеціальних технічних дисциплін.

Роль математики у різноманітних галузях діяльності людини у різні часи була різною. Вона складалася історично, й на неї суттєво впливали два фактори:

1) рівень розвитку математичного апарату та ступінь зрілості знань про об’єкт, що вивчають;

2) можливість описати його найсуттєвіші риси й властивості на мові математичних понять та рівнянь або як тепер говорять побудувати математичну модель об’єкту, що вивчають.

Під час вивчення явищ чи процесів, які відбуваються в природі використовуються математичні моделі, а для опису просторово-часових процесів використовується відповідний математичний апарат.

У більшості випадків математичні моделі природи можуть бути описані за допомогою як звичайних диференційних рівнянь, так і диференційних рівнянь з частинними похідними, які містять незалежні змінні, функцію, що досліджують, її похідні й певний функціональний зв’язок між ними.

Диференціальні рівняння — розділ математики, який найповніше розкриває її гносеологічне значення. Адже коло задач, математичні моделі яких потребують дослідження властивостей розв’язків диференціальних рівнянь, надзвичайно широке. До них належать задачі теорії коливань, електродинаміки, теплопровідності, геометрії, економіки, біології тощо.

Перед початком розв’язування диференціального рівняння необхідно дослідити існування розв’язку та його єдність. Добути розв’язок диференціального рівняння — означає, що необхідно знайти всі його розв’язки. Для отримання розв’язку диференціального рівняння використовують такі методи:

1) аналітичні методи: при цьому розв’язання диференціального рівняння відбувається за відомих методів або прямого інтегрування;

2) методи, які є наближеними до аналітичних: метод збурень, метод амплітуд, що повільно змінюються, лінеаризація вихідних рівнянь, метод Рітца — Галеркина;

3) розв'язання за допомогою рядів;

4) розв'язання за допомогою перетворень: суть всіх перетворень полягає в тому, що оригінал за допомогою певної процедури перетворюють у зображення. Існує два типи перетворень: інтегральні перетворення (з інтегральних перетворень найчастіше використовують перетворення Лапласа) та диференціальні перетворення (T-функції);

5) розв'язання за допомогою чисельних методів. Для розв'язання задачі Коші чисельними методами існує два широких класи методів: однокрокові методи, які використовують тільки інформацію про саму криву в даній точці й не відбуваються ітерації та багатокрокові методи, в яких наступну точку кривої можна знайти, використовуючи інформацію про кілька попередніх точок. Більшість методів цього класу є методами прогнозу–корекції.

Крім того, зараз набувають популярності розв'язання диференційних рівнянь за допомогою систем комп'ютерної математики. На жаль багато таких систем використовують лише чисельні методи розв'язання.

Метою цієї статті є нелінійного диференційного рівняння за допомогою системи комп'ютерної математики Maple.

Як приклад використаємо рівняння руху зарядженої частинки у електричному полі з центральною симетрією та нормально спрямованому до нього магнітному полі. Такі рівняння часто використовуються у різних модифікаціях в теорії коливань, теорії електронних приладів, електродинаміці.

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -a^2 s + \frac{b}{s} + \frac{a^2}{s^3}. \qquad 1)$$

Для аналізу рівняння (1) запишемо у вигляді системи рівнянь першого порядку [1].

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = \xi \\ \dfrac{d\xi}{dt} = -a^2 s + \dfrac{b}{s} + \dfrac{a^2}{s^3} \end{cases}. \qquad 2)$$

Точкою рівноваги системи (2) буде

$$\xi_0 = 0,\ s_0 = \frac{\sqrt{b + \sqrt{b^2 + 4a^2}}}{\sqrt{2}a}$$

Щоб з'ясувати поведінку системи (2) в околі точки рівноваги необхідно визначити її тип, для чого побудуємо характеристичну матрицю.

Тоді характеристичне рівняння набуде вигляду $\det\left[A\right] = 0$, звідки

$$\lambda^2 + a^2 + \frac{b}{s_0^2} + \frac{3a^2}{s_0^4} = 0$$

Корені цього рівняння будуть суто уявними, отже, точка рівноваги є «центром». Фазовий портрет системи (2), який отримано за допомогою пакету DEtools, наведено на рис. 1.

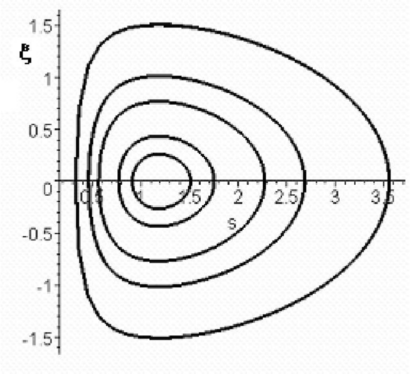


Рис. 1. Фазовий портрет системи (2)

З рис. 2 видно, що фазові траєкторії динамічної системи (2) є замкненими кривими.

Відомо [2], якщо рух, який описують рівняннями (1), є періодичним, то відповідна йому фазова траєкторія буде замкненою. Отже, динамічна система (1) має періодичний рух [1].

Розглянемо дослідження періодичних рухів за методом лінеаризації [3, 4].

Враховуючи, що s можна зобразити як $s = 1 + x$. У цьому випадку, застосувавши до рівняння (1) процес лінеаризації, воно набуде вигляду:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} = b - \left(1 + b\right)x \\ &\frac{d\phi}{dt} = x \end{aligned} \tag{3}$$

Розв’язок системи рівнянь (3) можна отримати в аналітичному вигляді або використовуючи функцію Maple desolve({syst, ic},x(t)). Таким чином маємо

$$\begin{aligned} x\left(t\right) &= \frac{b}{1+b}\left(1 - \cos\sqrt{1+b}t\right) \\ \phi\left(t\right) &= \frac{b}{1+b}\left(t - \frac{\sin\sqrt{1+b}t}{\sqrt{1-b}}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Вираз (4) є параметричним записом рівняння епіциклоїди з висотою $\frac{b}{1+b}$ й частотою обертання твірного кола $\omega = \sqrt{1+b}$.

Для порівняння розв’яжемо рівняння (1) за допомогою рядів, використавши функцію Maple desolve({syst, ic},x(t), type = series). В результаті отримаємо такий ряд (тут ми обмежимось п’ятьма членами ряду):

$$\begin{aligned} x\left(t\right) &= \frac{b}{2}t^2 - \frac{b(4a^2+b)}{24}t^4 + \left(\frac{11}{180}a^2b^2 + \frac{1}{45}a^4b + \frac{7}{720}b^3\right)t^6 + \\ &+ \left(-\frac{53}{1680}a^2b^3 - \frac{19}{840}a^4b^2 - \frac{1}{630}a^6b - \frac{127}{40320}b^4\right)t^8 + \\ &+ \left(\frac{7877}{453600}a^2b^4 + \frac{319}{15120}a^4b^3 + \frac{247}{56700}a^6b^2 + \frac{1}{14175}a^8b + \frac{4369}{3648800}b^5\right)t^{10} \end{aligned}$$

І методом Рунне–Кутта четвертого порядку, скориставшись функцією
Maple desolve({syst, ic},x(t), type = numeric).

Графічне порівняння результатів показало невелику розбіжність між результатами лінеаризованого та чисельного методів і зростаючу зі збільшенням аргументу розбіжність для розв’язку у вигляді ряду

Показано, що використання лінеаризованого підходу до дослідження певних диференційних рівнянь дозволяє оцінити параметри коливань з похибкою, що не перевищує 2%. Це дозволить поліпшити теорію аналітичного дослідження коливальних систем.

Список літератури

1. Нікітенко О. М. Стійкість та періодичний рух нелінійної динамічної системи «магнетронний діод» / О.М. Нікітенко, М.В. Воловенко // Радіотехніка. Всеукр. міжвід. наук.–техн. зб. — 2007. — Вип. 150. — С. 60–63.

2. Усыченко В. Г. Электронная синергетика. Физические основы самоорганизации и эволюции материи: Курс лекций [Текст] / В. Г. Усыченко — СПб. : «Издательство Лань», 2010. — 240 с.

3. Воловенко М. В. Упрощение подхода к моделированию приборов со скрещенными полями / М. В. Воловенко, О. М. Никитенко // 21-ая Международная Крымская конференция «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (КрыМиКо’2011) 12–16 сентября 2011 г. Севастополь. — С. 342–343.

4. Korchakova A. S. Using of Linearized Approach to Crossed-field Devices' Modeling / A. S. Korchakova, O. M. Nikitenko // 23-ая Международная Крымская конференция «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (КрыМиКо’2013) 8–14 сентября 2013 г. Севастополь — С. 238–239.

КОНФЛІКТ КЛАСИЧНОГО ТА МОДЕРНОГО У ВИКЛАДАННІ МАТЕМАТИКИ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

С. М. Лапач
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
lapach@ukr.net

Проблема: Невідповідність стандартного університетського курсу математики сучасному стану навчального контингенту та вимогам спеціальностей.

Стан: Класичний курс вищої математики для інженерних спеціальностей в ВУЗах базується фактично на численні нескінченно малих і де-факто принципово мало змінився за останні сто років. Інтенсивний розвиток науки і техніки за цей же час привів до потужного розвитку як нових розділів математики, так і до великих змін в деяких класичних розділах. Крім того, суспільство принципово відрізняється від того, за запитами якого сформувався існуючий університет в цілому і курс математики зокрема, що привело до критичних змін в контингенті студентів і зміни позиції університету в суспільстві [3, 8, 9].

У зв'язку з цим, крім конфлікту університет-суспільство, виник внутрішній конфлікт: випускаючі кафедри вимагають розширення деяких старих розділів і внесення нових, а кафедри математики при зменшенні аудиторного часу і зниженні рівня підготовки випускників шкіл не мають змоги забезпечити на старому рівні навіть класичний курс.

Чисельні методи, а також теорія ймовірностей і математична статистика відносяться до тих розділів, які даються не в достатній мірі в класичному курсі математики, а дискретна математика взагалі там відсутня. Разом з тим вказані розділи активно використовуються в спеціальних курсах. Крім того, вважалось, що при інтенсивному вивченні студент сам встановить зв'язки між знаннями в фундаментальних дисциплінах і їх використанням в спеціальних дисциплінах. Пересічний сучасний студент на таке нездатен. Для нього ніякого зв'язку між рядами, теоремами Веєрштраса і апроксимацією не існує. Вища математика для цього студента є чимось абстрактним, що не має відношення ні до практики, ні до навчання на старших курсах.

Зміст курсів не відповідає сучасним вимогам до базових математичних знань для сучасних спеціальностей.

Методика викладання не відповідає сучасним студентам, для яких характерний низький рівень довузівської підготовки, слабкість системного і абстрактного мислення. До цього додається відсутність суспільної зацікавленості у високій кваліфікації зокрема і знаннях взагалі, втрата авторитету знань і навчання. Результатом є відсутність у студента стимулів до вивчення «непотрібних» та ще й «важких» предметів.

Випускаючі кафедри змушені самі займатися викладанням того, чого їм не вистачає. Вони або включають в спеціальні курси фрагменти необхідних базових знань, або ж вводять цілі спеціальні курси. Зрозуміло, що далеко не всі технічні кафедри мають можливість робити це на достатньому кваліфікаційному рівні. При цьому відбувається процес з одного боку «перетягування» годин з кафедр математики, що стимулюється загальною політикою відносно годин і фінансування, а з другого боку — зниження якості математичних знань і втрата відчуття їх як універсального інструменту.

Мета: Розробка пропозицій, які можливо реалізувати в межах окремого ВУЗу.

Пропозиції.

Ситуація, яка склалась, вимагає хоча б модернізації існуючого підходу до викладання вищої математики в ВУЗах. Зниження рівня загальної математичної освіти тягне ланцюжок зниження якості наукових досліджень та інженерних розробок, які поступово спускаються до інтуїтивного і ремісничого рівня.

Будемо розглядати тільки ті можливості, які по силам здійснити в рамках окремого ВУЗу.

Спонукальні фактори змін можна розділити на дві групи: (1) зміна вимог до математики з боку спеціальностей і (2) особливості контингенту, який навчається.

Урахування вимог з боку спеціальностей може бути досягнуто наступними діями.

1. Визначення мінімумом по обсягу і складу математики, який необхідний для викладання інженерних спеціальностей в сучасності, оскільки нинішні курси фактично відповідає столітній давності. Намагання подати деякий ідеальний курс математики не відповідає інженерним потребам [6]. Цей мінімум повинен забезпечити базову математичну підготовку спеціаліста і забезпечення інших фундаментальних дисциплін, які читають на молодших курсах.
2. Для кожного факультету, а можливо і спеціальності, необхідно визначити зміст математичних курсів, необхідних для забезпечення спеціальних курсів.
3. Час читання математичних курсів для спеціальностей має бути узгоджений з навчальним планом кафедр. Таким чином з одного боку математика буде викладатись на протязі всього навчання у ВУЗі, з другого боку вона буде актуалізована в часі потреби в ній.
4. Формування сумісних курсів, або спеціальних курсів з додатковим довідковим матеріалом з математики. Можуть бути підготовлені електронні конспекти по спеціальним курсам з гіперпосиланням на спеціально підготовлені відповідні розділи математики. Створити їх можливо тільки сумісними зусиллями.

Особливості контингенту, які різко знижують ефективність класичних форм і змісту навчання.

1. Відсутність системного сприйняття науки: для них наука не є єдиною, а сприймається як набір окремих «ящичків», не зв'язаних між собою і потрібних тільки для здачі екзамену чи заліку.

2. Наука сприймається як сукупність мертвих вічних істин, а не процес пізнання і розвитку засобів пізнання.

3. Відсутність зв'язку науки з реальність. Одночасно в головах студентів існують два міфи: математика — це абстракція, яка не має ніякого відношення до реального світу і математична модель ідентична реальності.

Ці проблеми повинні одночасно розв'язуватись з трьох напрямків: з боку кафедр математики, випускаючих кафедр і кафедри філософії.

У курсі математики необхідно на прикладах показувати її зв'язок з реальною науково-технічною практикою [1, 2, 4, 7] та з предметами, які вони вивчають чи будуть вивчати. Друга частина неможлива без участі випускаючих кафедр. Кафедра філософії має показувати значення математичного знання для наукового пізнання [5]. Випускаючі кафедри в спеціальних курсах мають встановлювати явні зв'язків і посилання до відповідних розділів математики

У зв'язку з слабкістю абстрактного мислення в середнього сучасного студента необхідні збільшити кількість прикладів і наочність подання матеріалу. Використання слайд-шоу і відео як пасивних відображувальних навчальних засобів небажане, так як приводить не до підвищення, а до зниження якості навчання: розглядається як розвага і не запам'ятовується.

Через математику необхідно розвивати вміння логічно мислити, працювати з абстракціями і виконувати формалізацію.

Адміністрація повинна забезпечити урахування відповідної роботи для викладачів та кафедр.

Список літератури

1. Арнольд В.И. Что такое математика? —М.: МЦНМО, 2008. —104 с.

2. Арнольд В.И. Математическое понимание природы: Очерки удивительных физических явлений и их понимание математиками (с рисунками автора). —2-е изд., исправл. — М.: МЦНМО.—144с.

3. Бодріяр Жан Симулякри і симуляція —К.: Основи, 2008. —230 с.

4. Винер Норберт Я — математик —Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 336 с.

5. Кедровский О.И. Методы построения теоретических систем знания: диалог математика и философа. К.: Вища школа. —1982. —166с.

6. Крылов А. Н. Мои воспоминания — М.: Политехника. —508 с.

7. Пуанкаре Анри О науке. — М.: Наука. ГРФМЛ, 1983. —560 с.

8. Тоффлер Э. Метаморфозы власти. — М.: АСТ, 2002. —669 с.

9. Университет как центр культуропорождающего образования — Минск: БГУ, 2004. — 279 с.

ПОЕТАПНІСТЬ ПРИ ВИВЧЕННІ КУРСУ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Лейко С. В.
Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка, Полтава, Україна
leyko2309@mail.ru

Якісні зміни, що відбуваються у соціально-економічному житті суспільства, розвиток та інтегрований характер новітніх технологій виробництва, зумовлюють підвищення вимог до професійної підготовки майбутніх інженерів-будівельників. За таких умов, для інженерів-будівельників, зростає значення та якість отриманих математичних знань та підвищення рівня їх математичної компетентності при вивченні курсу «Вища математика».

Проблемам математичної підготовки та особливостям її викладання присвячені праці О. В. Алієвой, Г. П. Бевза, А. І. Богомолова, Ф. Д. Гахова, Б. В. Гнеденко, М. Я. Ігнатенко, Т. В. Крилової, М. В. Носкова, З. І. Слепкань, М. І. Шкіля та інших.

Ми погоджуємося з думкою С. Ш. Палфьоровой, що за рахунок вивчення математики у майбутніх інженерів формується дедуктивно-логічне мислення, так як в процесі побудови математичних висновків за рахунок використання механізму логічних побудов, їх обґрунтування студенти набувають вміння формулювати, обґрунтовувати і доводити різного роду судження. Крім того, математика привчає студента до алгоритмізації своєї діяльності, послідовності і точності виконання сконструйованого алгоритму, що в кінцевому результаті ефективно відображається в майбутній виробничій діяльності при плануванні своєї праці та її відповідальному використанні [2].

Сучасний стан математичної підготовки інженерів-будівельників, на жаль, бажає бути кращим. Приєднання України до Болонського процесу та перехід на кредитно-модульну систему навчання зумовили скорочення кількості аудиторних годин природничо-наукових, фундаментальних дисциплін та винесення близько 50% матеріалу на самостійне опрацювання студентів. Однак не всі студенти вміють та бажають самостійно працювати над опануванням нового матеріалу. Взагалі, більшість з них, сприймає математику як якусь абстрактну науку, не розуміючи для чого потрібно її вивчати і де конкретно у їх майбутній професійній діяльності застосовуються математичні знання.

Аналіз ситуації та власний досвід викладання вищої математики, дають можливість стверджувати, що математична підготовка майбутнього інженера-будівельника носить двоякий характер. З одного боку оволодіння математичними знаннями є фундаментальною основою для вивчення інших спеціальних й загально-технічних предметів, а з іншого вища математика не є профілюючою дисципліною для студентів будівельного профілю, що призводить до формалізації сприйняття математичного матеріалу.

На думку Л. Д. Кудрявцева, загальна мета всіх математичних курсів повинна полягати в набутті випускниками вузу певної математичної підготовки, в умінні використовувати опановані математичні методи, в розвитку математичної інтуїції, у вихованні математичної культури. Вчити потрібно тому, що буде необхідне в майбутній професії і чому важко навчитися самостійно [1, ст. 141].

Для вирішення цієї проблеми та для зацікавленості й активізації діяльності майбутніх інженерів-будівельників, при побудові змісту математичної освіти, потрібно використовувати принцип професійної спрямованості курсу вищої математики, враховувати між предметні зв'язки та проводити міждисциплінарні паралелі.

На думку В. Ю. Стрельнікова слід розробити таку систему, яка б інтегрувала особистісно-творчі й суспільні освітні цілі. Проблема полягає у виробленні педагогічних основ, умов і технологій, за яких можливе поєднання індивідуальної творчої самореалізації студентів з одночасним засвоєнням ними освітніх стандартів з обраної спеціальності [3].

Процес засвоєння математичних знань у майбутніх інженерів-будівельників, на нашу думку, буде більш ефективним, якщо відбуватиметься в три етапи:

- початковий (введення нових понять: усвідомлення суті понять; проведення зв'язків з вже відомими поняттями, означеннями; усвідомлення значення нових понять);
- базовий (дії з новими поняттями: вироблення практичних навичок; розвиток вміння швидко аналізувати ситуацію);
- творчий (дослідницька діяльність: власне бачення процесу розв'язання; прийняття нестандартних рішень).

Кожний з цих етапів тісно пов'язаний з іншим, що дозволяє більш послідовно й обґрунтовано проводити логічні зв'язки між поняттями й методами, що в свою чергу, впливатиме на ефективність засвоєння нової інформації, сприятиме розвитку пізнавальної діяльності .

Продемонструємо дану поетапність на прикладі вивчення теми «Визначений інтеграл та його застосування». На першому етапі вводимо поняття визначеного інтегралу, встановлюємо взаємозв'язки з вже відомими поняттями невизначеного інтегралу та похідної. Демонструємо практичне застосування на прикладах розв'язання задач з математики, фізики та механіки. Обґрунтовуємо важливість застосування даного поняття пропонуючи приклади практичного застосування в майбутній професійній діяльності.

Другий етап відводимо для тренувальних вправ. Розвиваємо вміння: обчислювати визначений інтеграл; визначати площу фігури обмеженої графіками ліній; обраховувати довжину дуги кривої, площу криволінійного сектора в полярних координатах, об'єму тіл обмежених площами паралельних перерізів, об'єму тіл обертання,поверхні тіл обертання, обчислення роботи та координат центру ваги. Вводимо завдання професійної спрямованості.

Третій етап передбачає розвиток у студентів вміння працювати самостійно, без допомоги викладача. Перед студентами формулюються завдання та ставляться задачі, які вимагають ґрунтовних знань з математики та інших галузей знань. Як правило, ці завдання носять професійно спрямований характер з врахуванням між предметних зв'язків. Виконання таких завдань, як правило, буде під силу тим студентам, у яких високий рівень сформованості математичної компетентності та, як наслідок, високий рівень само організованості, цілеспрямованості,самостійності та наполегливості у досягненні бажаного результату.

Ефективність формування вміння самостійно працювати залежить від вибору завдань, які ставляться перед студентом. Перш за все студент повинен бути зацікавленим, вмотивованим у досягненні результату. Завдання повинно мати практичну і, навіть, особисту цінність для студента. Однак його складність повинна відповідати індивідуальним здібностям особистості, тобто мати посильний характер.

Завдання можуть бути груповими чи індивідуальними, полягати у написанні реферату, підготовці виступу чи докладу на лекції, в опануванні самостійно певної частини нового матеріалу та викладенні його на лекції, участь в олімпіадах на різних рівнях, конкурсах конференціях, залучення до творчої, дослідницької діяльності.

Підводячи підсумок, можемо зазначити, що вивчення курсу «Вища математика» відіграє важливу роль у становленні майбутніх інженерів-будівельників як професіоналів та конкуренто спроможних, на ринку праці, фахівців. Високий рівень сформованості математичної компетентності дає змогу спеціалісту в будівній галузі самостійно бачити проблему та формулювати задачу, вільно володіти математичними методами обрахунку та проведення дослідження того чи іншого явища, розвиває системність мислення, просторову уяву.

Список літератури

1. Кудрявцев Л. Д. Мысли о современной математики и ее изучении / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Наука, 1977. — 65 с.

2. Палферова С. Ш. Проектирование технологии компетентностно-ориентированого обучения дисциплинам естественнонаучного цикла студентов технических вузов: дис. … канд. пед. наук : 13.00.08 / С.Ш. Палферова. — Тольятти, 2003. — 252 с.

3. Стрельніков В.Ю Сучасні технології навчання у вищій школі : модульний посібник для слухачів авторських курсів підвищення кваліфікації викладачів МІПК ПУЕТ / В. Ю. Стрельніков, І. Г. Брітченко. — Полтава : ПУЕТ, 2013. — 309 с.

НОВЫЙ МЕТОД ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПРЕДЕЛОВ В ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ

Л. П. Мироненко

Донецкий национальный технический университет, Донецк, Украина

Mironenko.leo@yandex.ua

В теории пределов выделяют два предела, которые играют исключительную роль в дифференциальном исчислении

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \tag{1}$$

Ввиду их значимости, многие авторы называют их первым и вторым фундаментальными пределами, часто встречается называние первого и второго замечательных пределов.

Доказательство каждого из пределов осуществляется различным путем. Первый предел в (1) основан на предельном переходе в геометрических построениях, с использованием тригонометрического круга, а второй в (1), как правило, на основе бинома Ньютона. Эти методы эффективны, наглядны, но не носят универсального характера [1].

Перечислим известные универсальные подходы к выводу пределов (1) [1-3]. Первый из подходов основан на двойных неравенствах для обоих пределов, а предельный переход в этих неравенствах приводит к формулам (1) [1].

Второй подход основан на стандартных разложениях элементарных функций $\sin x$ и e^{x}. Но сначала доказываются разложения без формулы Тейлора, т.е. в рамках элементарной математики [2].

Наконец, существует оригинальный подход, основанный на формуле Эйлера. Главный результат заключается в том, что устанавливается геометрическая и аналитическая связь между пределами [3].

Целью работы является развитие универсального способа доказательства обоих пределов на единой основе. Мы называем такой подход универсальным.

Рассмотрим следующее двойное неравенство

$$\sin x \le x \le \operatorname{tg} x. \tag{2}$$

Неравенства очевидны для достаточно больших значений $x \ge 0$ (Рис.1).

Это очевидно из поведения функций при больших x. Этот очевидный факт мы используем в доказательстве неравенств для любых значений x, в том числе и малых. Доказательство будем вести от противного.

Сначала рассмотрим первое из неравенств, предположив, что существует корень $x_0 \ne 0$ уравнения $\sin x = x$. Выполним простейшие преобразования и убедимся в том, что уравнение $\sin x = x$ имеет единственное решение $x_0 = 0$.

$$\sin x = x \Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = x \Rightarrow \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

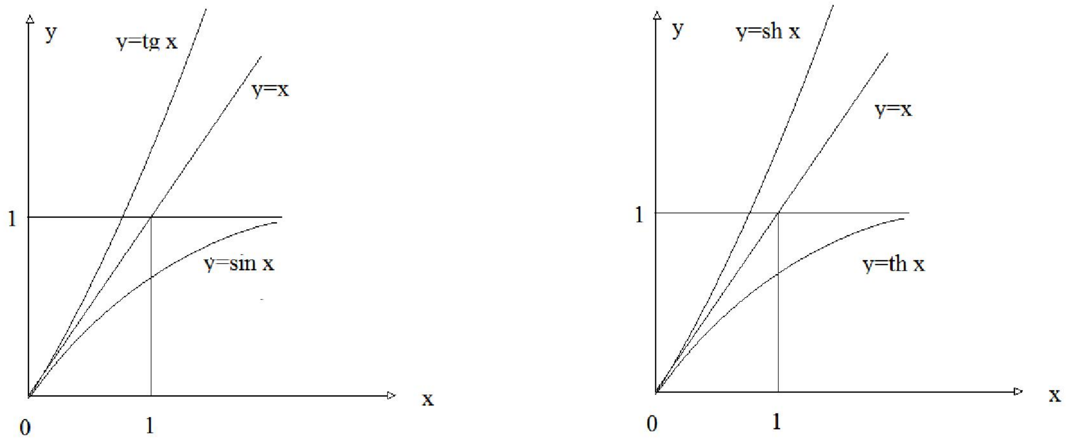


Рис. 1. Графики тригонометрических и гиперболических функций, демонстрирующие неравенства $\sin x \le x \le \operatorname{tg} x$ и $\operatorname{th} x \le x \le \operatorname{sh} x$.

Мы предположили, что уравнение $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ имеет, отличный от нуля корень x_0, поэтому в последнем уравнении можно учесть равенство $\sin\frac{x_0}{2} = \frac{x_0}{2}$, получим $\cos\frac{x_0}{2} = 1$. Откуда следует, что $x_0 = 0$.

Второе неравенство $x \le \operatorname{tg} x$ доказывается аналогично в предположении, что существует корень $x_0 \ne 0$ уравнения $x = \operatorname{tg} x$,

$$x = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \Rightarrow 1 = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Последнее уравнение удовлетворяется только при $x = 0$.

Мы доказали неравенство (2), из которого следует первый фундаментальный предел.

Методика доказательства легко переносится на гиперболические функции, и как результат, мы получим одну из форм второго фундаментального предела. Запишем аналогичное неравенство неравенству (1)

$$\operatorname{th} x \le x \le \operatorname{sh} x. \tag{3}$$

Поступаем точно так же, как в случае неравенства (1), используя формулы-аналоги для гиперболических функций $\operatorname{sh} x = 2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}$, $\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}^2\frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2\frac{x}{2}$. Например,

$$\operatorname{sh} x = x \Rightarrow 2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2} = x \Rightarrow \operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow \operatorname{ch}\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 0.$$

Разделим неравенство (3) на $\operatorname{sh} x > 0$, представив $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x \,/\, \operatorname{ch} x$, получим

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} \le \frac{x}{\operatorname{sh} x} \le 1 \Rightarrow 1 \le \frac{\operatorname{sh} x.}{x} \le \operatorname{ch} x\,.$$

Перейдем в неравенствах к пределу при $x \to 0$, учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ch} x = 1$, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1. \tag{4}$$

Это один из вариантов второго фундаментального предела.

Формулы (1) и (4) получены в предположении $x \to +0$, а записаны при произвольном $x \to 0$. Ясно, что они остаются без изменения при $x \to -0$. Поскольку все функции в неравенствах (2) и (3) нечетные, то для отрицательных x имеем неравенства

$$\operatorname{th}(-x) \le -x \le \operatorname{sh}(-x) \Rightarrow -\operatorname{th} x \le -x \le -\operatorname{sh} x \Rightarrow \operatorname{sh} x \le x \le \operatorname{th} x\,.$$

Следствия из первого фундаментального предела хорошо известны и описаны во всех учебных пособиях. Мы представим их в виде таблицы дополнив новыми следствиями из второго фундаментального предела (Табл.1, 2).

Таблица. 1. Следствия из первого и второго фундаментальных пределов

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$		$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$	
Замена или преобразование	Следствие	Замена или преобразование	Следствие
$x = \arcsin y$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$	$x = \operatorname{arsh} y$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsh} x}{x} = 1$
$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$	$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ch} x = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = 1$
$x = \operatorname{arctg} y$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$	$x = \operatorname{arth} y$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arth} x}{x} = 1$

Таблица. 2. Наиболее полная таблица следствий из второго фундаментального предела.

Вариант второго фундаментального предела	Замена или преобразование	Следствие из второго фундаментального предела
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} =$ $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
	$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	$x=\ln(1+x)$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$
	$\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=1,$ $x=1\,/\,y$	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+1\,/\,x)^x=e$
	$x=y\ln a$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\ln a)}{x}=\ln a$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\ln a)}{x}=\ln a$	$\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x\ln a)^{1/x}=\ln a$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x\ln a)^{1/x}=a$
$\lim\limits_{x\to 0}(1+x\ln a)^{1/x}=a$	$x=1\,/\,y$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x\ln a}\right)^x=a$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arth}x}{x}=1$	$ar\operatorname{th}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{1-x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{x+1}{1-x}=2$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{x+1}{1-x}=2$	$\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)^{1/x}=2$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)^{1/x}=e^2$
$\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)^{1/x}=2$	$x=1\,/\,y$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=e^2$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\log_a e}\log_a\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)^{1/x}=2$	$\lim\limits_{x\to 0}\log_a\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)^{1/x}=$ $=2\log_a e$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\log_a e}\log_a\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)^{1/x}=2,$ $x=1\,/\,y$	$\lim\limits_{x\to\infty}\log_a\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=$ $=2\log_a e$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arsh}x}{x}=1$	$\operatorname{arsh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{1/x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{1/x}=e$
$\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{1/x}=e$	$x=1\,/\,y$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)^x=e$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\log_a e}\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\log_a e$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{th}x}{x}=1$	$\operatorname{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$

Список литературы

1. Mironenko L. P., A. Yu. Vlasenko A compact system of inequalities for the standard limits in the theory of limits // Artificial intelligence. — 2013. — № 2. — P. 61–70.

2. Мироненко Л. П., И. В. Петренко. Стандартные пределы и метод неопределенных коэффициентов // Искусственный интеллект. — 2012. — № 3. С. 284–291.

3. Мироненко Л. П. Эквивалентность стандартных пределов в теории. // Искусственный интеллект. — 2012. — № 2. — С. 123–128.

ПРО ВАЖЛИВІСТЬ ФОРМУВАННЯ СИСТЕМИ ЕВРИСТИКО-ДИДАКТИЧНИХ КОНСТРУКЦІЙ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ТЕОРЕМ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ НА ОСНОВІ РЕПРЕЗЕНТАТИВНО-ІЛЮСТРАТИВНОГО СПОСОБУ ЇХ ДОВЕДЕННЯ: ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНИЙ АСПЕКТ

Н. В. Олалі
Найджа Дельта Університет, Амассома, Штат Байельса, Нігерія
P.mebine@yahoo.com

Формування системи евристико-дидактичних конструкцій під час вивчення математичних дисциплін у непрофільних ВНЗ різних рівнів акредитації є актуальним досить давно. Добре відомо, що викладачі математичного аналізу економічних, соціально-гуманітарних, медичних, педагогічних вишів мають балансувати між строгістю формулювання математичних тверджень та формальним їх вивченням. Намагання скрупульозно вводити математичні об'єкти на фоні незначної кількості аудиторних занять (як правило 1–2 рази на тиждень) призводить до не виконання навчальної програми та незасвоєння студентами більшості базових понять математичного аналізу або вищої математики. Формулювання теорем без доведень, не обґрунтованість лем та інших математичних тверджень призводить до формалізації математичної освіти, що обмежує можливості майбутніх економістів, фізиків, інформатиків та ін.

Тому спробуємо використовуючи системний підхід показати переваги репрезентативно-ілюстративного способу доведення деяких класичних теорем інтегрального числення функції однієї змінної, що сприятимуть формуванню у студентів загальної стратегії найраціональнішого пошуку деякого класу проблем, що і є основною метою евристико-дидактичних конструкцій (детальніше в [1] або [2]).

Деякі теоретико-методологічні аспекти що стосувалися реформування вітчизняної математичної освіти та управління евристичною діяльністю в навчанні математичного аналізу на різних рівнях розглянуто у роботах таких дослідників як О. Абрамов, Ж. Адамар, Д. Аносов, Л. Атанасян, Г. Бевз, В. Бевз, Г. Білянін, М. Бурда, С. Гарлін, Г. Глейзер, М. Жалдак, М. Ігнатенко, Т. Колесник, Є. Нелін, Г. Михалін, З. Слєпкань, О. Скафа, І. Тесленко, В. Швець, М. І. Шкіль та багато інших.

По при значну кількість науково-методичних публікацій в зазначеній області досліджень проблемам встановлення особливостей репрезентативно-ілюстративного способу доведення більшості теорем математичного аналізу з можливістю формування системи евристико-дидактичних конструкцій та урахуванням професійної спрямованості студентів приділяється не значна увага.

Аналіз навчальних та робочих програм такої важливої дисципліни як математичний аналіз, що вивчається студентами, напрям підготовки яких 6.040203 «Фізика» показує, що тижневе аудиторне навантаження для першокурсників не перевищує 6 год. Враховуючи досить низький рівень математичної підготовки (ЗНО з математики не обов'язкове), то викладання навчального матеріалу на основі таких класичних підручників з математичного аналізу як Г. Фіхтенгольц [3], Л. Кудрявцев [4] є неможливим у зв'язку із високим науковим рівнем написання цих підручників.

Підручники з математичного аналізу під редакцією педагогів-дослідників М. Давидова [5], М. Шкіля та ін. роблять дещо доступнішим навчальний матеріал, але більшість математичних тверджень ними доводяться так само (можливо за виключенням позначень) як і у підручнику 1964 р. за редакцією Г. Фіхтенгольца.

Наприклад, якщо говорити про теоретичний матеріал, що стосується виведення формули довжини дуги l деякої спрямлюваної, явно заданої кривої $y = f(x)$, то у всіх проаналізованих нами підручниках чи посібниках з математичного аналізу та вищої математики (а це близько трьох десятків) або зовсім не доводиться формула обчислення довжини дуги явно заданої функції, або ж пропонується наступна схема доведення:

1) доводиться відповідна теорема для кривої, яка задана параметрично, тобто досить громіздко (кілька сторінок доведення, див., наприклад [3], [5]) виводиться формула

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\phi'(t)\right)^2}, t \in [\alpha;\beta],\ \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ x = \varphi(t), y = \phi(t); \quad (1)$$

2) потім припускається, що

$$x = \varphi(t) = t, y = \phi(t) = f(t),\ t \in [a;b]$$

і отримується відома ще з ШКМ формула

$$l = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}, x \in [a;b], a,b \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

На нашу думку доцільніше було б безпосередньо довести формулу (2) не використовуючи громіздке доведення, яке необхідне для встановлення співвідношення (1).

Це ж можна сказати і доведення теореми про похідну добутку двох функцій. Коли під час доведення відомої формули:

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

не розглядається окремо випадок, $\Delta x \neq 0$, який значно спрощує доведення і не формалізує його. Таких прикладів можна навести досить багато

Нагадаємо, що репрезентативно-ілюстративний метод успішно використовується у сучасній статистиці, економічній теорії та інших дисциплінах. Як зазначає С. Гирлін [2] суть цього методу полягає в тому, що «міркування проводяться із використанням представників певного класу об'єктів, що розглядаються». Дійсно у перекладі з англійської мови «represent» означає представляти, а французький аналог «representant» — представник. Якщо розуміти під цим методом такий набір (мінімальний) засобів, що дозволяє відтворювати основні характеристики досліджуваного об'єкту, яких достатньо для формування евристико-дидактичних конструкцій. У свою чергу репрезентативність будемо досягати за рахунок формування оптимального, доступного та раціонального шляху доведення тих чи інших математичних тверджень.

Таким чином використання репрезентативно-ілюстративного методу доведення математичних тверджень з одного боку надає можливість викладачам більш гнучко використовувати всі можливі сучасні засоби навчання, що сприяють розвитку логічного та абстрактного мислення студентів, а з іншого — вимагає детального теоретико-методологічного дослідження, оскільки не для всіх теорем математичного аналізу такий спосіб доведення є оптимальним.

Список літератури

1. Скафа О. І. Комп'ютерно-орієнтовані уроки в евристичному навчанні математики: навчально-методичний посібник / О. І. Скафа, О. В. Тутова; [Донецький національний університет]. — Донецьк: вид-во «Вебер» (Донецька філія), 2009. — 320 с.

2. Гирлин С.К. Иллюстративно-репрезентативное доказательство теоремы ферма о необходимом условии существования экстремума функции / С. К. Гирлин, И. В. Кузнецов, 2009. — Режим доступу: http://archive.nbuv.gov.ua/portal/soc_gum/pspo/2009_22_2/girlin.pdf

3. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Наука, 1964. — Т. 1. — 440 с.

4. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа: В 2-е.: Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функции одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. — Висагинас: «Alfa», 1998. — 400 с.

5. Давидов М. О. Курс математичного аналізу / М. О. Давидов. — К.: Вища школа, 1990. Ч. 1. — 384 с.

6. Гирлин С. К. Иллюстративно-репрезентативное доказательство теоремы Ферма о необходимом условии существования экстремума функции / С. К. Гирлин, И. В. Кузнецов, 2009. — Режим доступу: http://archive.nbuv.gov.ua/portal/soc_gum/pspo/2009_22_2/girlin.pdf

7. Слепкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спец. пед. навч. закл / З. І. Слепкань. — К. : Зодіак-Еко, 2000. - 512 с.

8. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология / Е. И. Скафа. — Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. — 439 с.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ТЕМУ: «ЗНАХОДЖЕННЯ ЛОКАЛЬНОГО ТА УМОВНОГО ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ» (ІЗ ДОСВІДУ РОБОТИ)

З. П. Ординська, М. В. Полторацький
НТУУ «КПІ», Київ, Україна

Задача 1.

Дослідити на локальний екстремум функцію

$$z(x,y)=x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ (x>0,y>0).$$

◀ В даній задачі функція досліджується в області $D=\left\{(x,y)\mid x>0,y>0\right\}$.

I. Знайдемо стаціонарні точки.

$$\begin{cases} z_x=2x+y-\dfrac{1}{x^2}=0,\\ z_y=x+2y-\dfrac{1}{y^2}=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} I-II\\ I+II \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=0,\\ 3x+3y-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x-y+\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}=0 \Leftrightarrow (x-y)+\frac{(x-y)(x+y)}{x^2y^2}=0 \Rightarrow$$

$$(x-y)\left(1+\frac{x+y}{x^2y^2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y\\ x^2y^2=-(x+y)\Rightarrow x+y<0\Rightarrow (x,y)\notin D \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow 2x+x-\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow 3x=\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^3=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow$$

$M=\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}};\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ – стаціонарна точка функції z.

II. Перевіримо достатні умови локального екстремуму.

$$z_{xx}=2+\frac{2}{x^3}=2\left(1+\frac{1}{x^3}\right),\ z_{xx}\big|_M=2(1+3)=8;$$

$$z_{xy}=1;$$

$$z_{yy}=2\left(1+\frac{1}{y^3}\right),\ z_{yy}\big|_M=8.$$

$$d^2z(M)=z_{xx}dx^2+2z_{xy}dxdy+z_{yy}dy^2=8dx^2+2dxdy+8dy^2.$$

Для визначення знаку другого диференціалу скористаємося критерієм Сильвестра.

$A=\begin{pmatrix}8 & 1\\ 1 & 8\end{pmatrix}$, $\delta_1=8>0$, $\delta_2=64-1=63>0\Rightarrow$ За критерієм Сильвестра, $d^2z(M)>0\Rightarrow M=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ — точка локального мінімуму.

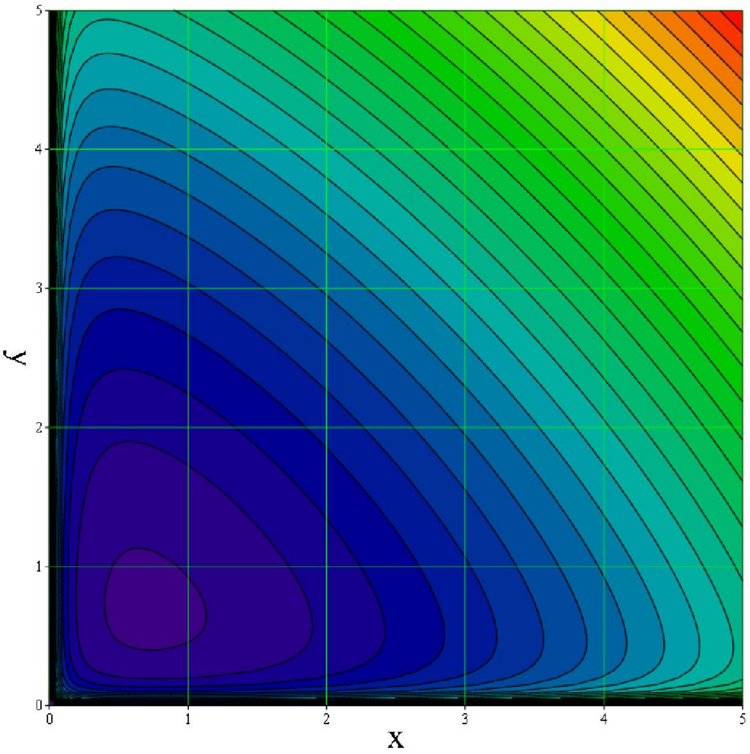
$$z\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)=\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}+3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{3^{\frac{2}{3}}}+2\cdot 3^{\frac{1}{3}}=3\cdot 3^{\frac{1}{3}}\approx 4.327\,.$$

<u>Відповідь.</u>

$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ – точка мінімуму, $z\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)=3\sqrt[3]{3}$.▶

Нижче подано лінії рівня досліджуваної функції.

При дослідженні використовувався математичний пакет MathCAD.



Задача 2.

Знайти точки локального екстремуму функції $z(x,y)=xy^2$, за умови $x+2y-1=0$.

<u>І спосіб.</u>

◀ $x+2y-1=0\Leftrightarrow x=1-2y$. Тоді задача на відшукання умовного екстремуму зводиться до задачі відшукання екстремуму функції одної змінної $\tilde{z}(y)=z(1-2y,y)=(1-2y)y^2\Leftrightarrow \tilde{z}(y)=y^2-2y^3$.

Стаціонарні точки функції $\tilde{z}$:

$$\tilde z'(y)=0 \Leftrightarrow 2y-6y^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\boxed{y=0} \leftrightarrow x=1\\ 2-6y=0 \Leftrightarrow \boxed{y=\dfrac{1}{3}} \leftrightarrow x=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$(1;0)$, $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$– стаціонарні точки. Перевіримо достатню умову локального екстремуму. $\tilde z''(y)=2-12y$;

$\tilde z''(0)=2>0 \Rightarrow y=0$ – точка мінімуму функції $\tilde z \Rightarrow$

$\boxed{(1;0)\text{– точка умовного мінімуму функції } z}$.

$\tilde z''\left(\dfrac{1}{3}\right)=2-4=-2<0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{3}$ – точка максимуму функції $\tilde z \Rightarrow$

$\boxed{\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)\text{ – точка умовного максимуму функції } z}$.▶

II спосіб (*метод множників Лагранжа*).

◀1) Складемо допоміжну функцію Лагранжа

$L(x,y,\lambda)=xy^2+\lambda(x+2y-1)$.

2) Знайдемо стаціонарні точки функції L.

$$\begin{cases} L_x=y^2+\lambda=0\\ L_y=2xy+2\lambda=0\\ L_\lambda=x+2y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=-y^2\\ 2xy-2y^2=0 \Rightarrow\\ x=1-2y\end{cases}$$

$$2y(1-2y)-2y^2=0 \Leftrightarrow 2y-4y^2-2y^2=0 \Leftrightarrow y-3y^2=0 \Leftrightarrow$$

$$y-3y^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \leftrightarrow x=1,\ \lambda=0;\\ y=\dfrac{1}{3} \leftrightarrow x=\dfrac{1}{3},\ \lambda=-\dfrac{1}{9}.\end{array}\right. \Rightarrow$$

$M_1=(1;0;0)$, $M_2=\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{9}\right)$ — шукані стаціонарні точки.

3) Перевіримо достатні умови умовного екстремуму. Для цього потрібно *знайти диференціали обох частин усіх рівнянь зв'язку*. В нашій задачі:

$d(x+2y-1)=d0 \Leftrightarrow dx+2dy=0 \Leftrightarrow$

$dx=-2dy$. (*)

Далі, підставимо умову (*) в вираз для d^2z.

$z_{xx}=0,\ \ z_{xy}=z_{yx}=2y,\ \ z_{yy}=2x$;

$$d^2z(x,y)=2\cdot 2y\cdot dxdy+2x\cdot dx^2 \overset{(*)}{=} 4y(-2dy)dy+2xdy^2=(-8y+2x)dy^2 \Rightarrow$$

$d^2z(1;0)=2dy^2>0 \Rightarrow \boxed{(1;0)\text{ — точка умовного мінімуму}}$.

$d^2z\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}\right)dy^2=-2dy^2<0\Rightarrow\boxed{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)}$ — точка умовного максимуму.

Зауваження.

У випадку функції двох змінних, знак квадратичної форми $d^2z(x,y)$ пов'язаний зі знаком визначника матриці коефіцієнтів $d^2L(x,y)$ таким співвідношенням:

Якщо $\delta_3\neq 0$, то $\operatorname{sgn} d^2z=\operatorname{sgn}(-\delta_3)$. Для нашої задачі:

$L_{xx}=0,\;\; L_{xy}=2y,\;\; L_{x\lambda}=1;$

$L_{yx}=2y,\;\; L_{yy}=2x,\;\; L_{y\lambda}=2;$

$L_{\lambda x}=0,\;\; L_{\lambda y}=2,\;\; L_{\lambda\lambda}=0.$

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&2\\1&2&0\end{pmatrix};\;\delta_3=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&2&2\\1&2&0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}0&2\\1&2\end{vmatrix}=-2$$

$-\delta_3>0\Rightarrow\boxed{(1;0)}$ — точка умовного мінімуму.

$$A_2=\begin{pmatrix}0&2/3&1\\2/3&2/3&2\\1&2&0\end{pmatrix};$$

$$\delta_3=-\frac{2}{3}\cdot\begin{vmatrix}2/3&2\\1&0\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2/3&2/3\\1&2\end{vmatrix}=\frac{2}{3}\cdot 2+\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)=2$$

$-\delta_3<0\Rightarrow\boxed{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)}$ — точка умовного максимуму.

Відповідь.

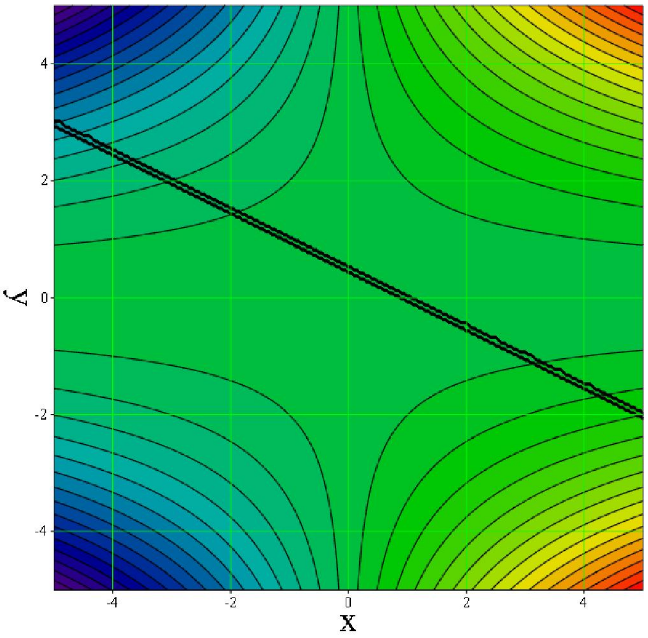
$(1;0)$ – точка умовного мінімуму, $z(0;1)=0$;

$\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ – точка умовного максимуму, $z\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$.▶

Нижче подано лінії рівня досліджуваної функції.

Чорним кольором виділено точки, які задовольняють умові зв'язку.

При дослідженні використовувався математичний пакет MathCAD.



Список літератури

1. Вища математика. Т. 1 / Л.О. Дундученко, В.В. Ясінський. — К.: НТУУ «КПІ», 2006. — 884 с.

2. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1 / Д.Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2006. — 288 с.

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ КВАДРАТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

В. К. Репета, Л. А. Репета

Національний авіаційний університет, Національний технічний університет «КПІ», Київ, Україна

RepetaLA@bigmir.net

У курсі аналітичної геометрії розглядаються задачі про знаходження відстані між певними геометричними об'єктами у просторі R^3, зокрема, задача знаходження відстані від заданої точки до заданої прямої; відстані між паралельними чи мимобіжними прямими. Розглянемо ці задачі більш детально.

1. *Відстань від точки до прямої.* Для знаходження відстані від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до прямої *a* зазвичай пропонують такий алгоритм: через точку M_0 проводять площину, перпендикулярну до прямої *a*, знаходять точку K її перетину з *a*. Тоді довжина відрізка M_0K і є шуканою відстанню. Покажемо ще один спосіб, який зводиться до дослідження квадратичної функції. Нехай

$$x = x_1 + lt,\ y = y_1 + mt,\ z = z_1 + nt$$

— параметричні рівняння прямої a. Запишемо формулу, що задає квадрат відстані від точки M_0 до довільної точки $P\left(x_1 + lt,\ y_1 + mt,\ z_1 + nt\right)$ прямої a.

$$d^2 = \left(lt + x_1 - x_0\right)^2 + \left(mt + y_1 - y_0\right)^2 + \left(nt + z_1 - z_0\right)^2. \qquad (1)$$

Права частина формули (1) має квадратичну залежність відносно t. Очевидно, що шукана відстань $d = \sqrt{d^2{}_{\min}}$ і задача зводиться до знаходження найменшого значення функції

$$f(t) = At^2 + 2Bt + C,$$

де

$$A = l^2 + m^2 + n^2 > 0,$$
$$B = l(x_1 - x_0) + m(y_1 - y_0) + n(z_1 - z_0),$$
$$C = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2.$$

Оскільки

$$f(t) = A\left(t + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A},$$

то $f(t)_{\min} = f\left(-\frac{B}{A}\right) = \frac{AC - B^2}{A}$. Отже, відстань від точки M_0 до прямої *a* задається формулою

$$d = \sqrt{\frac{AC - B^2}{A}}, \tag{2}$$

або в розгорнутому вигляді

$$d = \frac{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)((x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2) - (\,l(x_1 - x_0) + m(y_1 - y_0) + n(z_1 - z_0))^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Проаналізуємо формулу (2). У знаменнику записано вираз, що задає довжину напрямного вектора $\vec{s} = (l; m; n)$ прямої a. Можна показати, що чисельник представляє собою вираз для обчислення модуля векторного добутку напрямного вектора $\vec{s}$ та вектора $\overrightarrow{M_0P}$, тобто задає площу паралелограма, побудованого на цих векторах. Отже, шукану відстань можна трактувати і як довжину висоти паралелограма, побудованого на векторах $\vec{s}$ та $\overrightarrow{M_0P}$: $d = \left|\overrightarrow{M_0P} \times \vec{s}\right| / \left|\vec{s}\,\right|$. Зазвичай цю формулу використовують для обчислення відстані між паралельними прямими. Отже, відстань між паралельними прямими можна знаходити також і за формулою (2).

2. *Відстань між мимобіжними прямими*. Нехай потрібно знайти відстань між мимобіжними прямими a і a_1, заданими у параметричні формі рівняннями

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x = x_1 + l_1t_1, \\ y = y_1 + m_1t_1, \\ z = z_1 + n_1t_1. \end{cases}$$

Запишемо квадрат відстані між довільними точками $P\left(x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt\right)$ і $P_1\left(x_1 + l_1t_1, y_1 + m_1t_1, z_1 + n_1t_1\right)$ цих прямих

$$d^2 = \left(x_0 - x_1 + lt - l_1t_1\right)^2 + \left(y_0 - y_1 + mt - m_1t_1\right)^2 + \left(z_0 - z_1 + nt - n_1t_1\right)^2.$$

Після належних перетворень отримаємо

$$d^2 = At^2 + A_1t_1^2 - 2Btt_1 + 2Ct - 2C_1t_1 + D,$$

де

$$A = l^2 + m^2 + n^2,\ A_1 = l_1^2 + m_1^2 + n_1^2,\ B = ll_1 + mm_1 + nn_1,$$

$$C = (x_0 - x_1)l + (y_0 - y_1)m + (z_0 - z_1)n,$$

$$C_1 = (x_0 - x_1)l_1 + (y_0 - y_1)m_1 + (z_0 - z_1)n_1, \tag{3}$$

$$D = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2.$$

Отже, приходимо до задачі мінімізації квадратичної відносно змінних t і t_1 функції

$$f(t, t_1) = At^2 + A_1t_1^2 - 2Btt_1 + 2Ct - 2C_1t_1 + D.$$

Можна звичайно скористатися відомим і ефективним алгоритмом дослідження на екстремум функції двох змінних. Проте, враховуючи, що екстремум функції багатьох змінних у курсі вищої математики зазвичай вивчають після розгляду питань аналітичної геометрії, то студентам можна показати, як знайти мінімум функції $f(t, t_1)$ елементарними засобами. Для цього достатньо двічі виділити повні квадрати. Матимемо

$$f(t, t_1) = A\left(t - \frac{Bt_1 - C}{A}\right)^2 + \frac{AA_1 - B^2}{A}\left(t_1 + \frac{BC - AC_1}{AA_1 - B^2}\right)^2 + \\ + \frac{(AD - C^2)(AA_1 - B^2) - (BC - AC_1)^2}{A(AA_1 - B^2)}.$$

Враховуючи, що $A > 0$ і $AA_1 - B^2 \geq 0$, робимо висновок, що відстань між мимобіжними прямими задається формулою

$$d = \sqrt{\frac{(AD - C^2)(AA_1 - B^2) - (BC - AC_1)^2}{A(AA_1 - B^2)}}. \tag{4}$$

У випадку, коли мимобіжні прямі перпендикулярні $(B = 0)$, формула (4) набуває значно простішого вигляду

$$d = \sqrt{D - \frac{AC_1^2 + A_1C^2}{AA_1}}.$$

ГРАФІК ФУНКЦІЇ ЯК УМОВА ЗАДАЧІ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ»

Є. С. Сілін
Державний вищий навчальний заклад «Донбаський державний педагогічний університет», Слов’янськ, Україна
silin-evgen@meta.ua

Процеси, що відбуваються на сучасному етапі у всіх сферах життя суспільства, висувають нові вимоги до професійних якостей фахівців. На перше місце висуваються самостійність, творчість, заповзятливість, активність. Традиційна система освіти не в змозі вирішити проблему формування зазначених особистісних якостей чи робить це недостатньо якісно. Тому природним чином постає проблема пошуку нових форм, методів і засобів навчання з метою більш ефективної організації навчально-пізнавальної діяльності осіб, що навчаються, у тому числі й студентів вищих навчальних закладів.

Практика показує, що рівень знань природничих наук багато в чому визначається математичною підготовкою студентів. Саме математика є логічною основою, мовою природознавства, яке є ядром для фахівців.

Під час вивчення математики, зокрема математичного аналізу, визначальну роль відіграє наочність. Адже саме наочне навчання сприяє реалізації принципів науковості та доступності, забезпечує успішність формування понять, підтримує в студентах інтерес до предмета, розвиває математичну культуру, математичну мову, логічне мислення.

Проблемою наочності та візуалізації процесу навчання в теорії й методиці навчання математики займалися М. І. Башмаков, В. М. Березин, В. Г. Болтянський, М. Б. Волович, В. А. Далінгер, В. І. Євдокимов, Н. М. Єжова, Д. Д. Єфремова, Н. В. Іванчук, О. О. Князєва, Н. С. Малецька, Н. О. Резник, П. Г. Сат’янов, Є. І. Смірнов, Л. М. Фрідман та інші.

В своїх працях вчені наголошують на необхідності посилення ролі наочності в процесі вивчення математики.

Суть процесу навчання за допомогою наочності складається у формуванні вузлових, опорних якостей об’єкта сприйняття. Велика увага приділяється засобам наочності: малюнку, графіку, схемі, таблиці, освітнє значення яких досить велике та відповідає сучасним вимогам до процесу навчання [1].

Забезпечення доступності курсу математичного аналізу, подолання формалізму в знаннях студентів можуть бути досягнуті насамперед шляхом керування навчально-пізнавальної діяльності студентів наочними, графічними моделями. Водночас для більшості підручників і навчальних посібників характерна тенденція переваги пояснювальної ролі наочності над її оперативною, функціональною стороною [2–4].

Відновлення правильного співвідношення між теорією та практикою — одна з актуальних проблем навчання математичному аналізу. Важлива роль у навчанні цього предмета належить задачам. Проте, уміння розв’язувати задачі залежить не лише від кількості розв’язуваних задач, але й від методики навчання розв’язанню задач, від того, які задачі розв’язуються та яким чином. Саме активне оперування графічними моделями та наочними образами об'єктів і явищ математичного аналізу в процесі розв'язання задач необхідно для ефективної реалізації можливостей геометричної мови у здоланні формалізму, підвищенні рівня знань, розвитку належної інтуїції студентів, усвідомленні понять і фактів математичного аналізу. Це підтверджується відомими положеннями педагогіки та психології щодо діяльного підходу до процесу формування мислення та здібностей студентів.

На даний момент задачі, що припускають роботу з наочними образами, застосовуються в навчанні диференційному численню лише епізодично й односторонньо, зводяться загалом до побудови графіків аналітично заданих функцій. Задач якісного характеру, та таких, що вимагають оперування геометричною інтерпретацією похідної, другої похідної й інших понять диференційного числення, в діючих вузівських підручниках практично немає.

Усі ці чинники зумовлюють актуальність проблеми дослідження, що полягає в подоланні протиріччя між можливістю ефективного викладання теми «Диференційне числення» засобами наочності та невідповідності цієї мети засобам, які використовуються в традиційному процесі навчання.

Мета дослідження полягає у підвищенні ефективності навчання студентів за темою: «Диференційне числення» в курсі математичного аналізу (вищої математики), що включає усвідомлене та міцне засвоєння навчального матеріалу, розвиток візуального мислення студентів за допомогою наочності.

Одним із шляхів досягнення поставленої мети є розв'язання студентами графічних задач, умови яких є певним чином «зворотними» до класичних задач дослідження функцій і побудови їх графіків на основі проведених аналітичних викладок. В таких «зворотних» задачах за умовою завдання є відомим графік досліджуваної функції, необхідно правильно інтерпретувати його та зобразити схематично графік похідної заданої функції, графік похідної другого порядку тієї ж функції. Аналогічними є задачі, в яких за відомим графіком похідної певної функції необхідно відновити графік цієї функції.

Робота над такими задачами дозволить студентам наочно побачити зв'язок між функцією та її похідною, відійти від формального розуміння означення похідної функції як границі відношення приросту функції до приросту аргументу (за умови, що останній прямує до нуля). Не менш важливим є розуміння того, як певні особливості тієї чи іншої функції, виявлені аналітичним шляхом, впливають на поведінку графіку функції в околі таких особливих точок, яким чином це впливає на існування (чи неіснування) похідної функції в особливій точці.

Приклад [5, с. 183]. *На рис. 1 зображено графік функції* $f(x)$. *Зобразити схематично графік її похідної.*

Розв'язання. На відрізку $[0, a]$ функція зростає. Тому її похідна на цьому відрізку додатна. При цьому, оскільки графік функції обернений опуклістю вниз, то похідна при $0 \leq x \leq a$ спадає від значення $f\,'(0)$ до нуля.

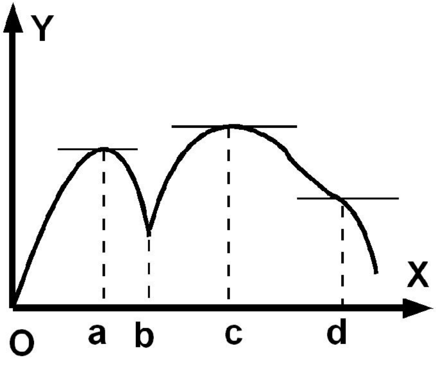


Рис. 1. Графік функції $y = f(x)$.

Оскільки дотична до графіка функції при $x = 0$ утворює кут $\alpha \approx \frac{\pi}{4}$ з віссю абсцис, то

$$f'(0) \approx \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

На проміжку (a, b) функція спадає, а тому її похідна від'ємна. При цьому в точці $x = b$ похідна не існує, а

$$\lim_{x \to b-0} f'(x) = -\infty.$$

Тому для $x = b$ графік функції $y = f'(x)$ має вертикальну асимптоту. Якщо $x \to b + 0$, то

$$\lim_{x \to b+0} f'(x) = +\infty.$$

На проміжку (b, c) похідна спадає від $+\infty$ до нуля. Похідна додатна на цьому проміжку, оскільки функція $f(x)$ зростає при $b < x < c$. На проміжку (c, d) похідна від'ємна, оскільки на цьому проміжку функція $f(x)$ спадає. Точкою мінімуму є точка $x = d$, яка відповідає точці перегину графіка функції $f(x)$. Схематичний графік похідної функції $f(x)$ зображено на рис. 2.

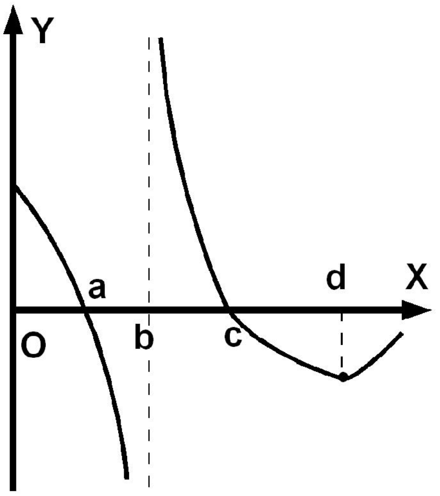


Рис. 2. Графік функції $y = f'(x)$

Таким чином, використання засобів наочності, задач наочного змісту дозволяє ефективно управляти навчально-пізнавальною діяльністю, що сприяє запобіганню формалізму в знаннях, формуванню повноцінних образів досліджуваних понять математичного аналізу, підвищенню значущості математики для майбутньої професії. Задачі графічного змісту можуть бути успішно використані в практичній діяльності викладачів математики у ВНЗ.

Список літератури

1. Щукина Н. В. Применение визуальных образов при решении задач математического анализа /Н.В. Щукина // Человек и общество: на рубеже тысячелетий: Международный сборник научных трудов / Под общ. ред. проф. О. И. Кирикова. — Вып. 25. — Воронеж: Изд-во Воронежского госпедуниверситета, 2004. — С. 368–373.

2. Давыдов Н. А. Сборник задач по математическому анализу / Н.А. Давыдов, П. П. Коровкин, В. Н. Никольский. — М.: Просвещение, 1973. — 368 с.

3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — М.: Наука, 1977. — 527 с.

4. Математический анализ в примерах и задачах. Ч. 1 / [Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Н. Г., Головач Г. П.] — К.: Высш. шк., 1977. — 672 с.

5. Задачник по курсу математического анализа. Ч. 1 / [Н. Я. Виленкин, К. А. Бохан, И. А. Марон и др.]; под ред. Н. Я. Виленкина. — М.: Просвещение, 1971. — 350 с.

МЕТОДИКА КОНТРОЛЯ И ОЦЕНКИ ОСТАТОЧНЫХ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПО ПРЕДМЕТУ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Т. И. Слюсарова
Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина
slyus@ukrpost.ua

Одной из основных проблем управления качеством образовательного процесса в вузе является объективный контроль знаний. Поэтому вузу необходимо уделять особое внимание для организации и объективного проведения контроля знаний обучаемых. При этом целесообразно использовать следующие три уровня контроля знаний: входной контроль, контроль текущей успеваемости; выходной контроль по дисциплинам; контроль и оценка остаточных знаний [1]. Результаты проверки остаточных знаний дают возможность оценить уровень организации образовательного процесса в университете и качество подготовки специалистов.

В работе представлена методика контроля и оценки остаточных знаний студентов высшего учебного заведения. Методика внедрена на Электротехническом факультете Запорожского Национального Технического Университета, специальность «Электрические машины и аппараты».

Контроль и оценка остаточных знаний студентов осуществляется путем тестирования студентов спустя некоторое время после завершения изучения дисциплины, а именно в начале второго курса обучения в университете (отметим, что курс «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» изучается в первом учебном семестре, объем дисциплины 144 часа).

Авторами были разработаны 30 билетов по 7 тестовых заданий (приложение 1). Задания соответствуют рабочей программе курса «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» [2], а также проработанным студентами индивидуальным и контрольным заданиям в течение всего учебного семестра [3]. Задания, имеющие целью проверку остаточных знаний студентов, прошли внешнюю и внутреннюю экспертизу, утверждены на заседании кафедры высшей математики и включены в учебно-методический комплекс соответствующей дисциплины.

Каждому заданию ставятся четыре ответа, три из которых являются неверными. Всем заданиям присваивается согласно сложности входящих в них вопросов определенное количество баллов, которые получает тестируемый студент при правильном ответе на входящие в них вопросы.

Время выполнения работы 1 час 20 минут. Решение представляется на чистом листе формата А4 с указанием номера билета, краткого аналитического решения каждого задания с указанием буквы правильного, по мнению студента, ответа. Работа вкладывается в титульный лист, подписанный студентом.

После сдачи контрольных работ титульный лист и работа разъединяются и шифруются лаборантом. Преподаватель получает для проверки только листы с решением, на каждом из которых указан шифр, таким образом, обеспечивается объективная оценка каждой работы.

Оценивание работы осуществляется в соответствии с листом правильных ответов и специально разработанными рекомендациями, которые приложены к пакету заданий. Результат представляется по 100 балльной системе, по буквенной системе согласно болонскому договору и по пяти балльной шкале.

Итоги проверки тестовых заданий заносятся в специальную ведомость и отправляются в деканат, где и осуществляется дальнейший анализ полученных данных, а именно сравнение результатов с полученными раннее оценками входного контроля, контроля текущей успеваемости и выходного контроля по дисциплине.

Приложение 1. Пример билета для контроля остаточных знаний. Дисциплина «Линейная алгебра».

Завдання 1. *Обчислити вектор* $0,5 \cdot \overline{a} + \overline{b}$, *якщо* $\overline{a} = \left(-2;4;2\right)$, $\overline{b} = \left(-1;3;-2\right)$

А	*Б*	*В*	*Г*
$\left(-3;7;0\right)$	$\left(-2;5;-1\right)$	$\left(1;-1;-4\right)$	$\left(0;1;-3\right)$

Завдання 2. *Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві точки* $M_1\left(1;0\right)$ *і* $M_2\left(2;2\right)$.

А	*Б*	*В*	*Г*
$2x - 3y + 5 = 0$	$x - 2y + 4 = 0$	$2x - y - 2 = 0$	$3x - y + 4 = 0$

Завдання 3. *Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат паралельно вектору* $\overline{s} = (1;-2;3)$.

А	*Б*	*В*	*Г*
$\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{3}$	$\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{1}$	$\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{3}$	$\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{3}$

Завдання 4. *Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно вектору* $\overline{n} = (1;-2;3)$.

А	*Б*	*В*	*Г*
$x - 2y + z + 3 = 0$	$x + 2y + 3z = 0$	$x + 2y + z + 1 = 0$	$x - 2y + 3z = 0$

Завдання 5. *Знайти матрицю* $2 \cdot A + B$, *якщо* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

А	*Б*	*В*	*Г*
$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Завдання 6. *Знайти обернену матрицю* A^{-1}, *якщо* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

А	*Б*	*В*	*Г*
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Завдання 7. *Обчислити визначник третього порядку* $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

А	*Б*	*В*	*Г*
1	*-1*	*3*	*7*

Список литературы

1. Мелехин В. Б., Павлюченко Е. И. Автоматизированная система контроля знаний студентов в вузе//Транспортное дело России. — 2009. — №1. — http://www.morvesti.ru/archiveTDR/element.php?ELEMENT_ID=4096&IBLOCK_ID=66&SECTION_ID=1389

2. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1974. – 296 с.

3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике под ред. Рябушко А. П., Часть 1. — Минск: Выш. школа, 1990.— 271 с.

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ НА БАЗІ ОКР МОЛОДШОГО СПЕЦІАЛІСТА

С. Б. Харенко

Національний університет державної податкової служби України,
Ірпінь, Україна
svetlana_borisovna@ua.fm

Одним із напрямів отримання вищої освіти для молоді є навчання у спеціалізованих навчальних закладах І–ІІ рівнів акредитації на базі ОКР молодшого спеціаліста, а потім — у вищих навчальних закладах ІІІ–IV рівнів акредитації за ОКР бакалавра, спеціаліста та магістра. Студенти економічних спеціальностей навчальних закладів І–ІІ рівнів акредитації на першому курсі вивчають шкільну математику 10–11 класів, а на другому — частину курсу вищої математики. Продовженням їх математичної освіти у вищих навчальних закладах ІІІ–IV рівнів акредитації є курс «Математика для економістів. Вища математика».

Відомо, що останнім часом різко зростають вимоги до економістів, здатних прогнозувати, творчо розв’язувати нестандартні задачі та приймати оптимальні рішення. У зв’язку з цим підвищуються вимоги щодо якості фундаментальної підготовки випускників вищих навчальних закладів економічного профілю, невід’ємною складовою якої є математична підготовка. Саме ґрунтовна математична підготовка необхідна для успішного вивчення і засвоєння інших дисциплін математичного циклу, спеціальних дисциплін макро- і мікроекономічного спрямування, побудови економіко-математичних моделей реальних економічних процесів з подальшим їх вивченням за допомогою персональних комп’ютерів та сприяє розвитку логічного мислення студентів, адаптації їх до нових ситуацій, що може бути значною перевагою для них на ринку праці.

Відомо також , що погіршення демографічної ситуації в країні призводить до того, що конкурс на вступних екзаменах до навчальних закладів І–ІІ рівнів акредитації поступово зменшується, а якщо врахувати загальне зниження шкільної математичної підготовки, то висновок про якість «вхідної» математичної підготовки абітурієнтів стає очевидним. Далі — не краще, бо ті ж самі учорашні учні на першому курсі коледжу проходять (точніше, «пробігають») дворічну програму школи за 10–11 класи, на другому – вивчають частину курсу вищої математики, а на третьому курсі — «відпочивають» від математики і забувають її мінімум на відсотків 60 саме на початок вивчення курсу «Математика для економістів. Вища математика» у 5 семестрі вищих навчальних закладах ІІІ–IV рівнів акредитації.

Якщо пригадати, що будь який наступний курс вищої математики не просто не є ізольованим від попередніх, а саме базується на них, то зрозуміло, що заключні розділи вищої математики «Функція багатьох змінних» та «Ряди», які є логічним завершенням курсу вищої математики для економічних спеціальностей, є найскладнішими і вимагають неабияких математичних знань та практичних навичок для їх опанування зі сторони студентів.

Порівняння «вхідної» математичної підготовки вже колишніх випускників коледжу із вимогами до неї хоча б на рівні сприйняття нового матеріалу курсу вищої математики для економістів призводить, кажучи мовою математики, до розриву першого роду, коли стрибок функції якості отриманої у коледжі математичної підготовки студентів та необхідної для ВНЗ є досить суттєвим.

Що ж до програми курсу «Математика для економістів. Вища математика» для підготовки фахівців за ОКР бакалавр денної форми навчання галузі знань «Економіка і підприємництво» на базі ОКР молодшого спеціаліста, то вона розрахована на 144 год., з яких лекцій — 18 год., практичних занять — 18 год., а індивідуальної та самостійної роботи — 108 год., тобто кількість аудиторних занять складає лише 36 год., а на самостійне опрацювання нового матеріалу з вищої математики для студентів з низьким рівнем математичної підготовки відводиться рівно 75% навчального часу (для порівняння 57% — на першому курсі університету). Саме цей факт багатозначно говорить про те, що студенти не в змозі самі якісно підготуватися до занять та самостійно опанувати новий матеріал, що призводить до подальшого погіршення якості знань не тільки з вищої математики, але й з інших предметів споріднених кафедр та спеціальних дисциплін макро- і мікроекономічного спрямування.

Виходом із вкрай несприятливої ситуації щодо математичної складової підготовки сучасного фахівця з економіки є збільшення аудиторних годин при вивченні даного курсу, оскільки лише під час лекцій та практичних занять можна надолужити прогалини математичної підготовки, отримані на різних етапах навчання.

Зрозуміло, що треба активно піднімати питання щодо збільшення кількості аудиторних годин на вивчення дисциплін математичного циклу, обґрунтовувати їх до рівня аксіоми з надією на конструктивне вирішення даного питання, але вже сьогодні треба активно шукати можливі шляхи розв'язання цієї проблеми на рівні власних можливостей кафедри та досвіду викладачів, оптимізувати спільні зусилля студентів і викладачів для успішного опанування курсу вищої математики для економістів.

У цьому напрямі викладачами кафедри вищої математики НУДПСУ України розроблено навчально-методичний комплекс із дисципліни: перелік основних теоретичних питань з курсу, курс лекцій, практичні заняття, завдання для індивідуальної, розрахункової та самостійної роботи студентів, методичні вказівки щодо їх виконання, які включають необхідний теоретичний матеріал, зразки розв'язання завдань по темі заняття, завдання для самоконтролю, індивідуальні завдання та варіанти контрольних робіт по розділах курсу, розроблена система тестового контролю знань студентів та пакет задач з економічним змістом, які підсилюють мотиваційний принцип навчання та сприяють професіоналізації математичних знань студентів.

Повне методичне забезпечення дисципліни дозволяє студентам економити час на підготовку до занять, маючи курс лекцій та практичні заняття, наперед бачити вимоги до їх знань та практичних умінь у вигляді теоретичних питань з курсу та варіантів контрольних робіт, оцінити рівень своєї підготовки за системою тестового контролю знань, навчитися розв'язувати завдання за наявністю методичних вказівок щодо їх виконання та завдань для самоконтролю, оптимально розрахувати свій час, маючи завдання для індивідуальної, розрахункової та самостійної роботи, розуміти вимоги викладача як обґрунтовані на прикладі задач з економічним змістом, які покликані показати студентам усю важливість та необхідність якісної математичної підготовки для їх майбутньої професії та сприяють робочий атмосфері під час проведення занять.

Можна додати до цього власний досвід викладачів та особистісно-орієнтоване викладання дисциплін математичного циклу, які неодмінно сприяють покращенню математичних знань студентів.

Список літератури

1. Руденко І.Б., Харенко С.Б., Чернобай О.Б. Курс лекцій з вищої математики: навч. посібник. — Ірпінь: Національний університет ДПС України, 2008. — 266 с.

2. Практичні заняття з вищої математики: навч. посібник / Т. М. Задорожня, С. М. Кучменко, Г. В. Мамонова, І. Б. Руденко, Є. А. Сторожук, Н. В. Точиліна, С. Б. Харенко, О. Б. Чернобай. – Ірпінь: НУДПС України, 2010 — 428 с.

ПРО ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ НУДПСУ

О. Б. Чернобай
Національний університет державної податкової служби України,
Ірпінь, Україна
chernobai.olga@gmail.com

Важливу роль в науковому та економічному розвитку суспільства завжди відігравала математика. Відомо, що природознавство стає точним лише тоді, коли для описання явищ та закономірностей оточуючого нас дійсного світу вдається скласти та застосувати математичні моделі та формули.

Математичний апарат проник далеко за межі власне математики: в економіку, фізику, біологію, нові галузі техніки та інші соціальні науки. Економісти використовують математику для отримання результатів, що випливають із законів природи та для перевірки можливості використання умовних тверджень цих законів до конкретних обставин, що найчастіше цікавлять науковців-економістів. Для того, щоб можна було це зробити, економічні закони повинні формулюватися за допомогою математичних формул та математичної мови. В зв’язку з цим значно розширилась область математичних досліджень та програма математичної освіти.

Економіка ставить різні завдання, розв’язання яких приводить до появи нових математичних моделей, які в свою чергу створюють базу для розвитку математичної теорії. Математичний апарат, необхідний економіці як мова для опису економічних явищ та процесів, є одним з методів економічних досліджень.

Для математичної підготовки менеджерів у Національному університеті державної податкової служби України розроблено робочу навчальну програму курсу «Вища та прикладна математика.» Весь курс складається з трьох модулів:

— вища математика;
— теорія ймовірностей та математична статистика;
— математичне програмування.

Модуль «Вища математика» є основою для вивчення двох інших модулів і включає вивчення наступних тем:

— лінійна алгебра;
— аналітична геометрія;
— диференціальне числення функції однієї та кількох змінних;
— інтегральне числення.

При вивченні модуля «Вища математика» для розвинення логічного мислення та науково дослідної роботи студентів викладачі дають не тільки основні математичні поняття вказаних тем, а й весь час демонструють зв’язок їх як з наступними модулями, так і з майбутньою професією, що розвиває творчий підхід до навчання.

Використання прикладних задач дає можливість викликати інтерес до предмету у студентів економічного напряму, показати прикладну направленість вищої математики та продемонструвати зв'язок вищої математики з економічними дисциплінами.

Наприклад, при вивченні теми «Диференціальне числення функції однієї змінної» варто розглянути відомі функції однієї змінної, що використовуються економістами:

1) функція попиту, яка показує залежність попиту на товар від ціни на нього;

2) функція пропозиції, що відображає залежність обсягу запропонованої продукції від ринкової ціни, тобто ціни від кількості запропонованої продукції;

3) функція цін пропозиції, яка є оберненою до функції пропозиції і демонструє залежність ціни від пропозиції;

4) функція сумарного виторгу — це залежність між сумарним виторгом і кількістю проданого товару;

5) функція витрат — це залежність між витратами виробництва деякої продукції і обсягом виробництва цієї продукції;

6) функція середніх витрат характеризує динаміку залежності середніх витрат від обсягу виробництва;

7) функція доходу ілюструє залежність доходу підприємства від вартості виробленої продукції.

Детальне вивчення цих понять дає можливість після вивчення похідної та розгляду її економічного змісту проводити ефективний аналіз для визначення оптимальних обсягів випуску продукції.

Розглянутий матеріал є підготовкою студентів до кращого сприйняття теми «Диференціальне числення функції кількох змінних», де вже варто розглянути функції кількох змінних, що застосовуються в економіці:

1) функція корисності, що показує корисність різних придбаних товарів;

2) функція Коба — Дугласа, яка ілюструє залежність вартості виробленої продукції від вартості основного капіталу та вартості затрат праці;

3) функція доходу підприємства, що виробляє кілька видів продукції;

4) функція витрат підприємства, що виготовляє кілька типів товару.

Враховуючи особливості викладання курсу «Вища та прикладна математика» для студентів спеціальності «Менеджмент та адміністрування», а саме невелику кількість аудиторних годин, великий об'єм навчального матеріалу, низький рівень шкільних знань з математики, на кафедрі вищої математики підготовлено до друку навчальний посібник «Математика для економістів. Курс лекцій». У цьому посібнику до всіх основних розділів курсу підібрано та розв'язано різного типу економічні задачі, розглянуто економічний зміст деяких математичних понять, наведено задачі для самостійного виконання.

Розв'язання розглядуваних економічних задач систематизує та поглиблює теоретичні знання студентів, розвиває вміння студентів будувати математичні моделі. Навички математичного моделювання систематично формуються під час розв'язування прикладних задач, при дослідженні процесів і явищ реальної дійсності.

Тому при математичній підготовці фахівців у галузі економіки бажано розглядати спеціальні математичні поняття, які відображають майбутні інтереси сучасного спеціаліста економічного напряму.

Високий динамізм сучасного наукового прогресу та високі вимоги до професійної підготовки економістів вимагають забезпечення належного рівня математичної підготовки студентів економічного напряму.

Список літератури

1. Мороз О. Г., Падалка О. С., Юрченко В. І. Педагогіка і психологія вищої школи: Навчальний посібник /за заг. ред. О. Г. Мороза. — К.: НПУ, 2003.—267 с.

2. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. — 2-ге вид., допов. і переробл. — К. Вища шк.,2006. —582 с.

3. Бєлєнька Г. В. Інтерактивні прийоми викладання навчальної дисципліни у вищій школі. – К. : НПУ імені М.П. Драгоманова, — 2001. — 118 с.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ТФКП

В. А. Шилинец, И. Н. Гуло
Белорусский государственный педагогический университет, Минск, Беларусь
shilinets@bspu.unibel.by

Важнейшей целью современного этапа реформирования системы высшего образования в Республике Беларусь является повышение качества подготовки студентов. Для её достижения необходимо решить следующие задачи:

- интенсифицировать и активизировать образовательный процесс;
- увеличить роль самостоятельной работы студентов;
- организовать четкий и систематический контроль над всеми видами учебной деятельности.

Учебная дисциплина «Теория функций» студентами специальности «1–02 05 03–02 Математика. Информатика» изучается на четвёртом курсе в седьмом и восьмом семестрах. Дисциплина состоит из двух частей: теория функций действительной переменной (ТФДП) и теория функций комплексной переменной (ТФКП). На изучение указанной дисциплины учебным планом предусматривается 76 аудиторных часов: лекции — 38, практические занятия — 38.

Значение ТФКП в математическом образовании учителя математики и информатики трудно переоценить. Для усвоения этой дисциплины необходимы прочные знания в области классического математического анализа, а также достаточное количество учебных часов на изложение учебного материала.

Основные задачи включения ТФКП в учебные планы физико-математических специальностей педагогических высших учебных заведений следующие:

- углубить у будущих преподавателей математики и информатики знание элементарных функций, изучаемых в учреждении общего среднего образования;
- разъяснить обучающимся роль комплексных чисел в математике и ее приложениях.

Функции комплексного переменного находят себе многочисленные приложения, с одной стороны, в различных прикладных математических дисциплинах, как: теоретическая физика, гидродинамика, теория упругости, небесная механика, с другой стороны, в различных отделах чистой математики, как: алгебра, аналитическая теория чисел, дифференциальные уравнения и др. Чтобы отметить мощность методов ТФКП ограничимся приведением лишь немногих примеров. Так, утверждение о том, что всякое алгебраическое уравнение имеет по крайней мере один комплексный корень, является основным в алгебре и весьма эффектно доказывается с помощью теоремы Лиувилля. Из интегрального исчисления хорошо известно о значении комплексных чисел при интегрировании рациональных функций и решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Теория Коши дает возможность с помощью вычетов показать студентам весьма оригинальные методы интегрирования как комплексных, так и действительных функций. Следует заметить, что многие проблемы классического анализа получили ясное очертание и нашли полное решение лишь благодаря обращению к комплексному анализу. Например, известное тождество Эйлера $e^{ix} = \cos x + \sin x$ позволило раскрыть парадокс И. Бернулли и Лейбница. Комплексный анализ играет большую роль в построении математических моделей в аэродинамике, гидродинамике, электротехнике.

Существенное сокращение количества часов, отводимых на изучение ТФКП, делает фактически невозможным полноценное преподавание этой дисциплины. Преподаватель не сможет решить эту проблему, если будет руководствоваться традиционно сложившимися подходами к обучению студентов. К тому же ситуация становится ещё более проблематичной в условиях заочной формы получения образования.

ТФКП завершается образовательный процесс по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и ТФДП. Для успешного изучения ТФКП студентам необходимы прочные знания по математическому анализу. Но поскольку многие студенты не всегда хорошо знают основные положения математического анализа, то при недостаточном количестве лекционных часов изучение ТФКП сопряжено с определенными трудностями.

В силу сокращения времени, отводимого на изучение ТФДП и ТФКП, рекомендуем выделить необходимый минимум-стандарт, который должны усвоить студенты, а также тщательно спланировать изучаемый материал. При этом планировании ряд тем следует выделить на самостоятельное изучение.

Как показывает опыт, на самостоятельное изучение необходимо вынести те теоремы, техника доказательства которых совпадает с аналогичными теоремами из учебной дисциплины «Математический анализ». К таким теоремам, например, относятся теоремы о числовых последовательностях, рядах, в том числе функциональных. На самостоятельное изучение целесообразно выделить и такие темы, как предел и непрерывность комплексной функции комплексной переменной. Основное внимание на лекциях должно быть уделено понятиям моногенности и аналитичности функций, теории Коши, рядам Тейлора и Лорана, особым точкам и вычетам. Это и составляет тот минимум, который должен усвоить студенты педагогического университета при изучении ТФКП.

Рассмотрим некоторые аспекты модели изложения ТФКП в БГПУ. Изложение начинается темой «Комплексные числа». В силу того, что этот материал подробно изучался ранее, изложение ведется в обзорном порядке. Далее вводится метрика на множестве комплексных чисел формулой $\rho\left(z_1, z_2\right) = \left|z_2 - z_1\right|$ и подчеркивается формальная идентичность определения расстояния, пределов и непрерывности функций на множествах действительных и комплексных чисел и указывается на возможность переноса по этой причине известных теорем из теории действительных последовательностей и функций на комплексные последовательности и функции. Это позволяет использовать обычно хорошо усвоенную студентами теорию пределов для действительных последовательностей.

Далее следует изложение темы «Моногенность и аналитичность». Оно ведется, в основном, традиционно. Важное место в математической подготовке студентов занимает тема «Элементарные функции». Принципиальным является метод определения функции $w = \exp z$. Мы придерживаемся определения этой функции формулой $\exp z = e^x \left(\cos y + i \sin y\right)$. Считаем, что это определение дает возможность экономить время при изложении свойств данной функции. Изложение в этом случае выглядит весьма лаконичным и понятным для студентов.

Изложение теории степенных комплексных рядов, интегрирования, теории Коши, теории вычетов также ведется традиционно.

Для организации эффективной самостоятельной работы студентов по любому курсу, в частности по ТФКП, необходимо иметь достаточное число учебных и учебно-методических пособий. На кафедре математического анализа учреждения образования «Белоруский государственный педагогический университет имени Максима Танка» такие пособия изданы, образовав определенный целостный методический комплекс по курсу ТФКП.

В указанный комплекс входит учебное пособие «Элементы теории аналитических функций» [1, 2], изданное на русском и белорусском языках. Пособия рекомендованы Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов физико-математических факультетов педагогических высших учебных заведений.

В методический комплекс входят также и ряд других изданных учебных и учебно-методических пособий [3–7]. Приведем их краткую характеристику.

Учебные пособия [1, 2] — это курс лекций, составленный в соответствии с действующей программой по ТФКП на русском и белорусском языках соответственно. Эти пособия содержат также несколько приложений. В приложениях имеется материал для составления контрольных и курсовых работ, вопросы к экзамену, образцы решения типовых примеров. Пособия, как показал опыт, могут эффективно использоваться при организации самостоятельной управляемой работы студентов по теоретическому материалу курса.

Для организации самостоятельной управляемой работы студентов на практических занятиях по разделу ТФКП учебной дисциплины «Теория функций» могут быть использованы учебно-методические пособия [3–6].

Пособие [5], разработанное с целью индивидуализации обучения по ТФКП, состоит из семи разделов (заданий). Каждый раздел содержит 25 вариантов примеров на рассматриваемую в данном задании тему. Перед каждым из семи разделов (заданий) помещены решения типовых примеров, входящих в данное задание («нулевой вариант»).

Практикум по решению задач по ТФКП [6] составлен в соответствии с учебным пособием [1]. В начале каждого параграфа помещены необходимый минимум теоретических сведений и решения типовых задач, после ознакомления с которыми студент может приступить к самостоятельному решению задач.

Значительно большее внимание по сравнению с другими сборниками по ТФКП здесь уделено упражнениям, которые могут быть использованы при организации факультативных математических курсов в школе, и упражнениям, позволяющим учителю более глубоко осмыслить отдельные вопросы школьного курса математики.

Для контроля работы над курсом ТФКП разработаны тестовые материалы по всем основным разделам [7]. Каждый тест по той или иной теме содержит 12 заданий: 8 заданий закрытого типа (тип «А»), а также 4 задания открытого типа (тип «Б»). К каждому заданию части А даны пять вариантов ответов, из которых верным является только один. Каждое задание части Б необходимо решить и получить ответ. По каждой теме приведены два варианта тестов, которые удовлетворяют таким требованиям как валидность, определенность, простота, однозначность, равнотрудность. Тесты, приведенные в пособии [7], обеспечивают возможность объективной оценки знаний и умений студентов по курсу ТФКП по единым критериям.

Внедрение компьютеров в учебный процесс расширило возможности использования этих тестов при изучении ТФКП. Использование компьютерных технологий позволяет охватить большее количество студентов и постоянно пополнять уже имеющиеся тестовые задания новыми.

Таким образом, созданный авторами методический комплекс по ТФКП позволяет успешно организовывать самостоятельную работу студентов над курсом, что в условиях сокращения часов, отводимых на лекции и практические занятия, уменьшает ущерб, наносимый математическому образованию всевозможными «прожектами» по сокращению аудиторных учебных часов.

Список литературы

1. Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А. Элементы теории аналитических функций. — Мн.: ДизайнПРО, 1997. — 192 с.

2. Стэльмашук М. Т., Шылінец У. А. Элементы аналітычных функцый. — Мн.: БДПУ, 1998.— 179 с.

3. Ражко А. К., Стэльмашук М. Т., Шылінец У. А. Зборнік задач па тэорыі аналітычных функцый. — Мн.: БДПУ, 1994. — 59 с.

4. Стэльмашук М. Т., Ражко А. К., Шылінец У. А. Тэорыя аналітычных функцый: Вучэбна–метад. дап. Мн.: БДПУ, 2002. — 31 с.

5. Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А. Индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов по курсу ТФКП. — Мн.: БГПУ, 2006. — 48 с.

6. Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А. Теория функций комплексной переменной: практикум.— Мн.: БГПУ, 2006. — 120 с.

7. Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А. Тесты по курсу «Теория функций комплексной переменной»: пособие. — Мн.: БГПУ, 2007. — 35 с.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ФОРМИ В КУРСІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

І. Юрчук

Національний авіаційний університет, Київ, Україна

iyurch@ukr.net

У курсі математичного аналізу тема «Криволінійні та поверхневі інтеграли» є важливою та, водночас, чи не найскладнішою для студентів, які, зосереджуючись на технічній стороні тематики, втрачають, а подекуди і зовсім не розуміють, їх суті та природи.

Для успішного засвоєння понять криволінійних та поверхневих інтегралів і теорем, що з ними пов'язані, студентами спеціальностей «Прикладна математика», «Прикладна фізика» та ін., викладачу варто скористатися таким сучасним універсальним апаратом, як диференціальні форми. Хоча такий підхід не полегшує безпосередні математичні обчислення, проте сприяє розвитку абстрактного мислення студентів, розумінню та засвоєнню зв'язків між поняттями, що виникають у процесі вивчення. Відомо, що існує декілька основних підходів до означення диференціальної форми, які різні з точки зору базового поняття і не відрізняються ідеологічно. Для студентів фізичних спеціальностей, наприклад, прикладним фізикам, викладачу доречно використати поняття тензора [3], а математикам – кососиметричної форми [1] або відображення [2].

Наведемо одну із можливих схем послідовного введення понять при вивченні теми «Криволінійні та поверхневі інтеграли», а саме:

1) дійснозначна диференціальна p-форма та її координатний запис;

2) зовнішній диференціал форми, його властивості та координатний запис;

3) інтеграл від форми по орієнтованій поверхні та формули його зведення до кратних інтегралів;

4) площа поверхні як інтеграл від форми та форма об'єму;

5) поверхневі інтеграли як інтеграли від диференціальної форми;

6) основні інтегральні формули (Гріна, Гауса-Остроградського та Стокса) як співвідношення між 1 або 2-форм та їх диференціалами.

Для прикладу, представимо лекційний матеріал для студентів спеціальності «Прикладна математика», що стосується пункту 1, описаної вище схеми.

Означення 1: Форма $L : X^k \to Y$ порядку k, визначена на впорядкованих наборах $x_1, x_2, ..., x_k$ векторів лінійного простору X і така, що приймає значення в просторі Y називається кососиметричною, якщо $L(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_k) = -L(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_k)$.

Приклад 1. Векторний добуток векторів простору $\mathbb{R}^3$ є білінійною кососиметричною формою із значеннями в просторі $\mathbb{R}^3$.

Надалі, будемо вважати, що $Y = \mathbb{R}$, тобто всі означенні нижче форми будуть дійсно значними.

Позначимо через A^p кососиметричну форму степеня p.

Означення 2: Зовнішнім добутком $\wedge$ кососиметричних форм A^p і B^q називається кососиметрична форма $A^p \wedge B^q$ степеня $p+q$ така, що задовольняє наступні умови:

1) $(A^p \wedge B^q) \wedge C^r = A^p \wedge (B^q \wedge C^r)$,

2) $(A^p + B^p) \wedge C^r = A^p \wedge C^r + B^p \wedge C^r$,

3) $A^p \wedge B^q = (-1)^{pq} B^q \wedge A^p$.

Якщо $L_1, L_2, ..., L_k$ — деякі 1-форми, то $L_1 \wedge ... \wedge L_k$ є k-формою, що визначена на наборі векторів $\xi_1, ..., \xi_k$ і приймає значення

$$L_1 \wedge ... \wedge L_k(\xi_1, ..., \xi_k) = \begin{vmatrix} L_1(\xi_1) & ... & L_k(\xi_1) \\ ... & ... & ... \\ L_1(\xi_k) & ... & L_k(\xi_k) \end{vmatrix} = \det(L_j(\xi_i)). \qquad 1)$$

Приклад 2. Якщо $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — деяка гладка функція, то в довільній точці $x \in D$ визначений її диференціал

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n,$$

який є лінійною функцією на дотичному до області D в точці x просторі. Відомо, що при переході від точки до точки диференціал, взагалі кажучи, змінюється. Згідно формули (1), отримаємо наступний вираз для $dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$ на наборі векторів $\xi_1, ..., \xi_k$

$$dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}(\xi_1, ..., \xi_k) = \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & ... & \xi_1^{i_k} \\ ... & ... & ... \\ \xi_k^{i_1} & ... & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix}. \qquad 2)$$

Надалі дотичний простір будемо позначати через TD_x.

Означення 2: Будемо говорити, що в області $D \subset \mathbb{R}^n$ задана дійсно значна диференціальна p -форма ω, якщо в кожній точці $x \in D$ визначена кососиметрична форма $\omega\,(x) : (TD_x)^p \to \mathbb{R}$. Число p називають степенем p-форми ω.

Таким чином , поле диференціалу df гладкої функції $f : D \subset R^n \to R$ є диференціальною 1-формою в області D.

Приклад 3. Якщо $\mathbf{F}$ — неперервне силове поле в D, а ξ — вектор малого зсуву від точки $x \in D$, то елементарна робота поля, що відповідає такому зсуву визначається їх скалярним добутком $\mathbf{F} \cdot \xi$, який є 1-формою.

Нехай $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ — деякий фіксований в $\mathbb{R}^n$, тоді довільний вектор $\xi \in R^n$ можна представити у вигляді $\xi = \xi^i \mathbf{e}_i$, а форма L буде мати наступне координатне представлення

$$L(\xi_1,...,\xi_k) = L(\xi_1^{i_1}\mathbf{e}_{i_1},...,\xi_k^{i_k}\mathbf{e}_{i_k}) = L(\mathbf{e}_{i_1},...,\mathbf{e}_{i_k})\xi_1^{i_1},...,\xi_k^{i_k},$$

де числа $L(\mathbf{e}_{i_1},...,\mathbf{e}_{i_k})$ повністю характеризують L у випадку, коли відомо базис.

Розглянемо частинний випадок, коли L — кососиметрична 2-форми в R^3. Для векторів $\xi_1 = \xi_1^{i_1}\mathbf{e}_{i_1}$, $\xi_2 = \xi_2^{i_2}\mathbf{e}_{i_2}$, де $i_1, i_2 = 1,2,3$, отримуємо

$$L(\xi_1,\xi_2) = L(\xi_1^{i_1}\mathbf{e}_{i_1},\xi_2^{i_2}\mathbf{e}_{i_2}) = L(\mathbf{e}_{i_1},\mathbf{e}_{i_2})\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2} = L(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)\xi_1^1\xi_2^1 + L(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\xi_1^1\xi_2^2 +$$
$$+L(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3)\xi_1^1\xi_2^3 + L(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)\xi_1^2\xi_2^1 + L(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)\xi_1^2\xi_2^2 + L(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)\xi_1^2\xi_2^3 + L(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1)\xi_1^3\xi_2^1 +$$
$$+L(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2)\xi_1^3\xi_2^2 + L(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3)\xi_1^3\xi_2^3 = L(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)(\xi_1^1\xi_2^2 - \xi_1^2\xi_2^1) + L(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3)(\xi_1^1\xi_2^3 - \xi_1^3\xi_2^1) +$$
$$+L(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)(\xi_1^2\xi_2^3 - \xi_1^3\xi_2^2) = \sum_{1\le i_1<i_2\le 3} L(\mathbf{e}_{i_1},\mathbf{e}_{i_2})\begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \xi_1^{i_2} \\ \xi_2^{i_1} & \xi_2^{i_2} \end{vmatrix}.$$

Аналогічно і в загальному випадку для кососиметричної форми L отримаємо наступне представлення:

$$L(\xi_1,...,\xi_k) = \sum_{1\le i_1<...<i_k\le n} L(\mathbf{e}_{i_1},...,\mathbf{e}_{i_k})\begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & ... & \xi_1^{i_k} \\ ... & ... & ... \\ \xi_k^{i_1} & ... & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Застосовуючи формули (2) та (3), для деякої диференціальної k-форми ω отримуємо $\omega(x) = \sum\limits_{1\le i_1<...<i_k\le n} \omega(\mathbf{e}_{i_1},...,\mathbf{e}_{i_k})dx_{i_1}\wedge...\wedge dx_{i_k}(\xi_1,...,\xi_k)$ або $\omega(x) = \sum\limits_{1\le i_1<...<i_k\le n} a_{i_1...i_k}(x)dx_{i_1}\wedge...\wedge dx_{i_k}(\xi_1,...,\xi_k)$. Таким чином, довільна k-форма є комбінацією k-форм, що складаються із диференціалів координат. Звідки, і, власне, назва «диференціальні форми».

Загальні вирази 1- та 2-форм в просторі R^3 мають вигляд:

$$\omega_A^1 = A_1(x)dx_1 + A_2(x)dx_2 + A_3(x)dx_3,$$
$$\omega_B^2 = B_1(x)dx_2\wedge dx_3 + B_2(x)dx_3\wedge dx_1 + B_3(x)dx_1\wedge dx_2,$$

де $A_i(x),\ B_i(x)$ – деякі функції, а $x\in R^3$.

Коротко наведемо формулювання основних понять векторного числення та основних інтегральних теорем у термінах диференціальних форм.

І так, криволінійні інтеграли — інтеграли від 1-форми по одновимірній поверхні (кривій), а поверхневі інтеграли — інтеграли від 2-форм по двовимірних поверхнях. Тоді як рід інтегралу залежить від того важлива чи ні орієнтація поверхні.

Прозорими і зрозумілими стають поняття градієнту, ротора та дивергенції, які є 0-, 1- та 2-формами. Сформулюємо деякі співвідношення між ними та їх зовнішніми диференціалами. Оскільки, 0-форма функції f збігається з нею ($\omega_f^0 = f$), то мають місце наступні співвідношення:

$$d\omega_f^0 = \omega_{\text{grad } f}^0, \ d\omega_A^1 = \omega_{\text{rot } A}^2, \ d\omega_B^2 = \omega_{\text{div } B}^3, \tag{4}$$

де $\omega_A^1 = A_x dx + A_y dy + A_z dz$, $\omega_B^2 = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$. Формули (4) є основними у векторному численні та ілюструють універсальність диференціальних форм.

Для прикладу, наведемо записи формул із основних інтегральних теорем аналізу в термінах диференціальних форм [1,2,3]:

1) формула Ґріна $\int\limits_I d\omega = \int\limits_{\partial I} \omega$, де ω — 1-форма, I – квадрат, ∂I – його межа;

2) формула Ґауса — Остроградського $\int\limits_D d\omega = \int\limits_{\partial D} \omega$, де ω – 2-форма, D – компактна область в $\mathbb{R}^3$, обмежена кусково-гладкими поверхнями, ∂D – її межа;

3) формула Стокса $\int\limits_S d\omega = \int\limits_{\partial S} \omega$, де ω – 1-форма, S — орієнтована кусково-гладка 2-вимірна поверхня з краєм ∂S.

Переваги вивчення криволінійних та поверхневих інтегралів в термінах диференціальних форм:

1) записи основних формул є стислими та простими;

2) взаємозв’язки між криволінійними та поверхневими інтегралами є прозорими та очевидними;

3) сприяє кращому розумінню фізичних процесів, що пов’язані з векторним численням.

Серед **недоліків** такого підходу виділимо наступні:

1) вимагає достатньо глибокого розуміння понять поверхні та її орієнтації;

2) тривале формування навиків у розумінні та записі понять диференціальної p-форми та зовнішнього диференціалу.

Як висновок, диференціальні форми є сучасним та універсальним апаратом для формування знань, навичок та вмінь студентів з теми «Криволінійні та поверхневі інтеграли», спрощують записи основних формул та понять, що сприяє кращому їх розумінню та запам’ятовуванню.

Список літератури

1. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 2. – М.: МЦНМО, 2002. — 794 с.

2. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

3. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. — М.: Мир, 1968. — 162 с.

III

ІСТОРІЯ ТОЧНИХ НАУК

ДО ІСТОРІЇ МАТЕМАТИЧНИХ ШКІЛ ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ (СТЕФАН БАНАХ)

О. М. Барабаш
Львівський національний університет, Львів, Україна
tautnavi@gmail.com

Одним із найвидатніших професорів-математиків Львівського університету був Стефан Банах, фундатор Львівської математичної школи. У математичній енциклопедії можна знайти багато визначних результатів його наукової діяльності: банахова алгебра, бананів простір, банахів модуль, теорема Банаха про обернений оператор, теорема Банаха про нерухому точку та ін. Однак чи найбільш визначним внеском Банаха в математичну науку стали основи функціонального аналізу — нової на той час математичної галузі. Базою цієї галузі були «банахові простори». Крім функціонального аналізу, Банах зробив значний внесок у теорію функцій дійсної змінної, теорію множин, теорію нескінченновимірних просторів, теорію ортогональних рядів. Багато його результатів стали класичними і входять до підручників та монографій з функціонального аналізу.

Стефан Банах не лише геніальний науковець, але й майстерний викладач і організатор, який зумів згуртувати навколо себе плеяду молодих талановитих математиків. Так виникла львівська математична школа, яка від 1929 р. почала видавати журнал, присвячений питанням функціонального аналізу — «Studia Matematyka», за редакцією С. Банаха. Вражає ерудованість, працьовитість видатного математика. Так, багатогранність його наукової та викладацької роботи можна констатувати із надзвичайно широкого переліку наукових досліджень та тематики лекційних курсів. Банах читав лекції з теорії функцій дійсної змінної, теорії функціональних операцій, «вищого аналізу», теорії інтегралу Лебега, диференціального й інтегрального числення, диференціальної геометрії, теорії функцій багатьох змінних, математичного аналізу, теорії множин, аналітичної геометрії, теоретичної механіки, аналітичної динаміки, теорії функціоналів, балістичних проблем. Він організовував та проводив різні математичні семінари.

Стефан Банах був майстерним викладачем, який умів не лише доступно, зрозуміло викладати навчальний матеріал, але й зацікавити, захопити студентів математичною наукою. За це його високо цінували студенти й вважали за честь бути членами математично-фізичного гуртка, куратором якого був С. Банах. «Він мав дар ясного і прозорого переказування математичних знань. Під час лекції говорив злегка притишеним голосом; в аудиторії було тихо: кожен вслухався в те, що він говорив. Користувався дуже простою мовою» [2].

Характерними особливостями лекційних викладів Банаха були «ясність думки, зв’язність висловлювань, прозорість, спокійний тон мовлення ... хоча неодноразово складалося враження, що до лекцій спеціально не готувався, але ніде не знаходився в клопітливій ситуації, бо з ходу відновлював перервану думку і його виклад продовжувався» [3]. У своїй викладацькій діяльності Банах не дбав про досконалість вербальної форми, літературний блиск, а викладав досконало, ніде не губився в подробицях, використовував мінімум позначень і знаків, здебільшого спрощених і простих. Водночас матеріал його лекцій був поданий у прозорому і зрозумілому вигляді, з багатьма поясненнями, з усвідомленням того, що в математиці розуміння є важливішим від вивчення напам'ять [2]. Після означень, теорем чи властивостей професор подавав в простій і наочній формі багато прикладів, які давали змогу краще зрозуміти викладений матеріал. До наукової діяльності професор залучав здебільшого студентів старших курсів (3-го та 4-го). Банах намагався зацікавити студентів математичними проблемами: давав на вибір теми, які повинні були опрацювати студенти [2]. Деякі праці студентів були надруковані в наукових часописах.

С. Банах був не лише видатним вченим, йому вдалося поєднати у собі риси математика і великого організатора. Як було зазначено, С. Банах був куратором математично-фізичного гуртка студентів Львівського університету.

Гурток займався науковою, видавничо-методичною, організаторсько-товариською діяльністю. Крім того, гурток опікувався математичною бібліотекою. Під час своєї кураторської діяльності С. Банах брав активну участь в усіх видах діяльності математично-фізичного гуртка. Він був постійним учасником товариського життя студентів. Разом із студентами брав участь в екскурсіях по Львову та його околицях, по гірських масивах Карпат, відвідував так звані «чаювання», а деколи навіть карнавальні розваги, організовані студентами [3]. Також Банах допомагав видавничо-методичній роботі гуртка. За його підтримки був отриманий дозвіл ректора університету на закупівлю книжок до математичної бібліотеки гуртка, що було дуже важливим, адже підручники були рідкісні і дорогі [3].

С. Банах створив оригінальний стиль наукової діяльності, що полягав у спільному розв'язанні проблем у позанавчальному середовищі. Зазвичай такі неофіційні засідання відбувалися в найближчій до університету кав'ярні, яка називалася «Шкотською». У засіданнях могли брати участь всі охочі, які були зацікавлені проблемами математики. Така наукова співпраця викладачів, студентів була чимось новим у тогочасному математичному науковому житті.

Доробок Банаха охоплює близько 60 наукових праць і низку підручників з математики. Для вищих навчальних закладів С. Банах написав такі підручники: «Диференціальне і інтегральне числення» (1930), «Механіка» (1938), «Вступ до теорії функцій дійсної змінної» (1951) та «Курс функціонального аналізу» (1948). Поява цих праць була дуже актуальною, оскільки на той час дуже мало було підручників з вищої математики. Студенти змушені були користуватися лише рукописами лекцій і перекладами з німецької і французької навчальної літератури [9]. Підручники Банаха з диференціального та інтегрального числення, механіки, теорії функцій дійсної змінної заповнили брак навчальної літератури з цих математичних дисциплін.

Одна з найбільш визначних наукових праць С. Банаха — «Теорія лінійних операцій» або «Курс функціонального аналізу» у процесі написання не була задумана як підручник й була видана 1931р. як математична монографія. Оскільки ця галузь математики на той час була новою, то монографія у 1948 р. була видана українською мовою і стала першим у світі підручником з цього предмета. Ця книга дуже швидко завоювала численних прихильників нової математичної галузі. У багатьох країнах світу виникли школи функціонального аналізу (СРСР, США та ін.).

Професор С. Банаха був непересічною й оригінальною особистістю. Він не відповідав тодішнім суспільним уявленням щодо того, яким повинен бути професор університету: носив вільний зручний одяг, постійно курив, не дотримувався поштивих традицій у способі життя, поведінці та мові, відвідував кав'ярні, студентські бали, намагався уникати або зовсім не відвідував нудних офіційних заходів (особливо коли був деканом фізико-математичного факультету), а загалом жив у згоді із самим собою та любив робити те, що хотів, незважаючи на думку інших. Професор був надзвичайно розумною та енергійною людиною з деякою домішкою іронічності та песимістичності. У хвилини свого відпочинку він грав у футбол, в шахи, інколи грав у карти, виїжджав у гори на прогулянку. Однак найбільше Банах любив математику, вважаючи її найпотужнішим і прекрасним витвором людського духу. Математика займала майже всі його думки; інші справи були для нього другорядними. Вмів працювати в будь-яких умовах, не був призвичаєний до вигод і не потребував комфорту. Як писав Г. Штейнгаус, «Банах не був математиком витонченим, а математиком сильним» [5].

У стосунках з іншими Банах був добрий колега і приятель, безпосередній опікун молоді (будучи керівником гуртка, Банах цікавився прозаїчними справами студентів). Під час навчальних занять та в поза навчальний час професор любив розмовляти зі студентами, ставити різноманітні запитання. Студент-математик більше цікавив його як потенційний партнер, тому вимоги до студентів ставив дуже високі, водночас умів доступно пояснювати складний матеріал, завдяки чому на його лекціях не було студента, який би не розумів викладеного матеріалу.

С. Банах залишив по собі не лише вагомий науковий доробок, але й прекрасних послідовників — науковців-математиків, які розвинули і продовжили його ідеї.

Список літератури

1. Банах С. Курс функціонального аналізу (Лінійні операції): посіб. для студ. ун-тів та пед. ін-тів. — К: Рад. шк., 1948. — 216 с.

2. Kałuża Roman. Stefan Banach. — Warszawa: Wyd. GZ, 1992. — 167 s.

3. Szałajko Kazimierz. Wspomnienia o Stefanie Banachu na tle Lwowa i Lwowskiej Szkoły Matematycznej // Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej im. S. Staszica. Opuscula Matematica zosz. 13. N 1522. — Kraków, 1993. — S. 45–54.

ІСТОРІЯ І ДОСВІД ПІДГОТОВКИ ФАХІВЦІВ У ГАЛУЗІ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН У МИКОЛАЇВСЬКОМУ НАЦІОНАЛЬНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ ІМЕНІ В. О. СУХОМЛИНСЬКОГО

О. І. Баран, Л. Я. Васильєва, А. М. Руда
Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського,
Миколаїв, Україна
Oleg_baran@mail.ru

У жовтні 2013 року у Миколаївському національному університеті імені В. О. Сухомлинського відбулося святкування сторічного ювілею від дня його заснування. Минуле століття відзначалося буремними подіями і численними перебудовами в галузі освіти. Складні випробування випали і на долю Миколаївського учительського інституту. Одні факультети закривались, інші розпочинали роботу. Але завжди стабільно працювало природничо-математичне відділення, на основі якого у тридцяті роки було створено фізико-математичний факультет. Контингент викладачів з предметів природничо-математичного циклу постійно збільшувався кількісно і зростав якісно. Сьогодні на базі фізико-математичного факультету створено механіко-математичний факультет, що краще відповідає сучасній структурі навчального закладу [1].

З перших днів існування МУІ велика увага приділялась вивченню дисциплін фізико-математичного циклу. Серед перших викладачів (8 осіб) четверо мали університетську фізико-математичну освіту.

Назви ВНЗ в різні роки

Період	Назва
1913-1920	Миколаївський учительський інститут
1920-1931	Миколаївський інститут народної освіти
1931-1933	Миколаївський інститут соціального виховання
1933	Миколаївський педагогічний інститут
1934-1948	Миколаївський державний педагогічний інститут
1948-2000	Миколаївський державний педагогічний інститут імені В.Г.Бєлінського
2000-2002	Миколаївський державний педагогічний університет
2002-2003	Миколаївський державний університет
2003-2010	Миколаївський державний університет імені В.О.Сухомлинського
З 21.08.2010	Миколаївський національний університет імені В.О.Сухомлинського

Восени 1917 року Інститут було вперше реформовано на підставі положення (штатів учительських інститутів від 14 червня 1917 р.), виданого Тимчасовим Урядом. Цією реформою курс інституту було розподілено на три відділи: фізико-математичний, природничо-географічний та словесно-історичний. Отже, фізико-математичний напрям підготовки майбутніх вчителів був одним з найперших в МУІ. Більше того, дисциплінам природничо-математичного циклу приділялася значна увага і на інших відділеннях.

У 1930-1931 навч. р. в інституті вперше організовуються кафедри, які поступово перетворилися на осередки наукової, методичної і навчальної роботи. А у 1933 р. Миколаївський інститут соціального виховання реформується у Миколаївський педагогічний інститут, а з 1934 р. — у Миколаївський державний педагогічний інститут, підпорядкований Народному Комісаріату освіти УСРР.

З цього часу почали діяти три факультети: мовно-літературний (декан В.А.Фесенко), фізико-математичний (декан О. Н. Велецький) і природничий (декан Ф.К.Гейст). Деякий час діяли також хіміко-біологічний, природничий і природничо-географічний факультети, але згодом вони були перепрофільовані, або закриті.

З 1933 року на фізико-математичному факультеті діяли дві спеціалізовані кафедри — математики і фізики. І тільки через багато років вони поділилися на дві (і навіть на три) кафедри кожна.

У 1936 р. в інституті почав діяти ботанічний сад як база для природничого факультету. У 1939 р. була створена гідробіологічна станція, працівники якої підтримували тісні зв'язки з науково-дослідними установами Києва, Катеринослава, Севастополя, Донецька. Тут розв'язували важливі прикладні народногосподарські завдання з дослідження водоймищ Півдня України.

Загалом десятирічний період 1931–1941 рр. характеризувався значним зростанням навчально-матеріальної бази ВНЗ. В цей період кількість студентів збільшилась до 1200–1400 осіб.

Всього за довоєнні роки інститут випустив понад 2000 викладачів середніх шкіл. І навіть у перші повоєнні роки близько 60% вчителів шкіл Миколаєва і області були випускниками Миколаївського педагогічного інституту.

Десятки вихованців інституту згодом виросли в науковців різних спеціальностей, працювали у ВНЗ країни і в наукових установах.

Випускники розподілялись у всі регіони України, найкращі залишалися на викладацькій та науковій роботі в інституті. В інституті добре була поставлена науково-дослідна робота викладачів, естетичне, фізичне, воєнно-патріотичне та трудове виховання.

Війна нанесла ВНЗ непоправимі втрати. Був зруйнований корпус фізмату, але відразу після визволення Миколаєва інститут відновив свою роботу. 1 вересня 1944 року до занять приступили перереєстровані та знову прийняті на навчання студенти. Поверталися з фронту і евакуації викладачі і студенти, збиралась наочність та прилади навчання, поновила роботу бібліотека, навчальний процес входив у звичне русло.

На початок нового навчального року у 1944 р. функціонувало 10 кафедр, на яких працювали лише 2 професори, 5 доцентів, 24 старших викладачів і 15 викладачів. У 1945-1946 н.р. професорсько-педагогічний склад становив вже 61 особу, з яких лише 10% мали науковий ступінь і вчене звання. Але поступово життя входило у своє мирне русло і кількість викладачів, які захищали дисертації та працювали над науковими темами, зростала.

У перші післявоєнні роки викладачами фізико-математичного циклу працювали О. С. Путілін, М. Д. Вишеславський, Л. І. Семенов, В. С. Писарєв, І. Я. Чертков, С. І. Пархомовський, О. Т. Мовчан, П. Д. Калафаті, І. А. Марнянський.

У період з 1945 по 1950 роки кандидатські дисертації захистили О. С. Путілін, І. Я. Чертков, докторську — Г. К.Ціммерман. Тільки один фізичний кабінет за два післявоєнні роки поповнився устаткуванням на 100 тис. карбованців, а фонди бібліотеки інституту виросли до 68 тис. томів.

Володіючи високими теоретичними знаннями, справжні майстри підготовки педагогічних кадрів вели значну науково-методичну роботу. Серед них можна відзначити ветеранів інституту, зав. кафедрою фізики ст. викладача О. Н. Велецкого, доктора фізико-математичних наук Г. К. Ціммермана і ін. Значний науковий інтерес мали роботи кандидата фізико-математичних наук І. Я. Черткова «Функції Гріна і властивості фундаментальних функцій систем другого порядку з полілокальними краєвими умовами», доцента П. Д. Калафаті «Задача Штурма для лінійних диференціальних рівнянь» і ін..

У 1959–1960 н.р. розширюється фізико-математичний факультет, утворюються відділення математики і фізики, математики і креслення, фізики і загальнотехнічних дисциплін.

У 1963 р. здається в експлуатацію споруда нового навчального корпусу і з цього часу в цьому корпусі незмінно знаходиться фізико-математичний факультет (сьогодні — механіко-математичний).

В 2009 р. на базі фізико-математичного факультету було створено механіко-математичний факультет. На факультеті відбулися також структурні зміни і тепер підготовку фахівців здійснюють чотири випускові кафедри:

● Кафедра математики і механіки. Завідувач — професор, доктор технічних наук, Валерій Дмитрович Будак.

● Кафедра прикладної математики та інформаційних комп’ютерних технологій. Завідувач — професор, доктор фізико-математичних наук, Валерій Олександрович Поздєєв.

● Кафедра фізики. Завідувач — професор, доктор фізико-математичних наук, Іван Олексійович Муленко.

● Кафедра комп’ютерних систем та мереж. Завідувач — доцент, кандидат технічних наук, Віктор Іванович Передерій.

На факультеті навчаються близько 700 студентів. Ведеться підготовка бакалаврів, спеціалістів і магістрів за відповідними кваліфікаційними напрямами і викладачів математики, інформатики, фізики і астрономії [1].

Список літератури

1. Баран О. І. Техмат-фізмат-мехмат. Механіко-математичний факультет Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського: Історія і сьогодення / О. І. Баран , А. В. Іванников. — Миколаїв: «Іліон», 2013. — 450 с.

ГЕОРГИЙ ВОРОНОЙ — УЧЁНЫЙ МИРОВОЙ СЛАВЫ

Л. Г. Бойцун, Т. И. Рыбникова
Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара,
Днепропетровск, Украина
t.rybnikova@gmail.com

Георгий Феодосьевич Вороной обогатил математическую науку значительными открытиями, которые носят его имя. Он прожил такую короткую жизнь, всего лишь 40 лет. Но он написал 12 трудов, и каждый из них является стержнем, на котором нынче базируется большое количество научных исследований. Преждевременная смерть Г.Ф. Вороного (скончался 7 ноября 1908г.) была воспринята как тяжелая утрата отечественной науки. Газета «Правительственный вестник» в кратком некрологе сообщала, что «скончался… Георгий Феодосьевич Вороной, человек колоссальных математических дарований и весьма крупная величина среди не только отечественных, но и иностранных учёных математиков…» Но тогда о Г. Ф. Вороном могли судить только по работам, опубликованным им при жизни. Теперь, располагая его рукописным фондом и зная развитие его идей и методов (рукописи Г. Ф. Вороного, несколько тетрадей его математического дневника и другие документы были сохранены его семьёй и переданы нынешнему Институту рукописей Национальной библиотеки Украины имени В. И. Вернадского), ученые могут полнее и еще выше оценить значение и силу творчества Г. Ф. Вороного. Благодаря силе своего интеллекта он как будто наш современник, потому что сфера его исследований — от компьютерной графики до геометрического моделирования и создания искусственного интеллекта — отвечает вопросом сегодняшнего дня. Его труды дали толчок к развитию новых областей науки, а его достижениями пользуются и сегодня. Так, например, диаграммы Вороного были введены в теоретическую компьютерную науку в 1975 году. С тех пор диаграммы Вороного стали применятся всюду в конструкциях, связанных с геометрическими алгоритмами. Компьютерная графика, геометрическое моделирование, конструирование роботов. С тех пор диаграммы Вороного стали применяться всюду в конструкциях, связанных с геометрическими алгоритмами (некоторые специалисты считают, что с этого и началась компьютерная геометрия как наука). Компьютерная графика, геометрическое моделирование, конструирование роботов, построение географических информационных систем — далеко не полный перечень областей, где сыграли значительную роль диаграммы Вороного.

Можно продолжать эти перечисления и дальше: кристаллография, физика, электроника, физическая химия, химическая инженерия, офтальмология, микробиология, археология и т.д.

Почти все работы Г. Ф. Вороного имеют своё продолжение и используются современными исследователями. Они дали толчок для развития новых направлений в аналитической геометрии теории чисел, геометрии чисел, которые нынче активно развиваются во многих странах.

Хочется остановиться еще на одном открытии Г. Ф. Вороного.

В математической литературе имеется большое количество исследований по теории суммирования рядов. Применение теории суммирования к рядам Фурье разработано также достаточно широко.

Во многих работах рассматривается суммирование расходящихся рядов Фурье методом Вороного, который он ввёл в 1901 году, [1]. Количество журнальной литературы, посвященной этому методу, непрерывно увеличивается.

20–30 декабря 1901 года в Петербурге проходил XI съезд русских естествоиспытателей и врачей. На этом съезде Г. Ф. Вороной выступил с тремя докладами. Третий доклад «Расширение понятия о пределе сумм членов бесконечного ряда» сохранился в краткой протокольной записи дневника съезда.

В нём дан замечательный метод обобщенного суммирования рядов, английский перевод которого сделал Тамаркин. Однако в иностранной литературе этот метод суммирования неправильно называется методом N. E. Norlund и обозначается $\left(N, p_n\right)$, хотя Нерлунд рассмотрел его только через 18 лет в 1919 г., [2].

Редактор книги Г. Харди «Расходящиеся ряды», 1951 (пер. с англ. Д. А. Райкова) в предисловии отметил этот факт. В настоящем переводе этому методу присвоено исторически правильное название метода Вороного. В этом переводе метод Вороного обозначается (Wpr). Символ W происходит от немецкого написания фамилии Г. Вороного — Woronoi.

В работе [1] Г. Ф. Вороной рассмотрел также функциональный метод суммирования интегралов, который определяется следующим образом.

Пусть $f\left(t\right)$ интегрируема на каждом конечном промежутке $\left[0; A\right], A > 0$, и

$$S\left(t\right) = \int_0^y p\left(t\right) dt \neq 0.$$

Говорят, что интеграл $\int_0^\infty f(u)du$ суммируется методом Вороного или суммируется $\left(W, p\left(y\right)\right)$ к I, если

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{P\left(y\right)} \int_0^y P\left(y-u\right) f\left(u\right) du = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{P\left(y\right)} \int_0^y p\left(y-u\right) S\left(u\right) du = I$$

В случае $p\left(t\right) = \alpha t^{\alpha-1} \left(\alpha > 0\right)$ метод превращается в хорошо известный метод Чезаро, $\left(\left(c, \alpha\right)\right.$-метод).

В случае $p\left(t\right)=\dfrac{1}{1+t}$ (так что $P\left(y\right)$ ~ $\ln y$ при $y\to\infty$) получаем метод средних гармоничных.

Авторы данной статьи приложили много усилий для восстановления исторической справедливости — присвоению рассматриваемому методу суммирования рядов и интегралов имени выдающегося украинского математика Георгия Федосеевича Вороного. Настоящая статья также имеет к этому вопросу непосредственное отношение.

Бойцун Л. Г., Рыбникова Т. И. проводят математические исследования, связанные с функциональным методом суммирования Вороного, в следующих направлениях.

1) Общие вопросы теории суммирования интегралов функциональным методом Вороного.

2) Суммирование тригонометрических интегралов Фурье методом Вороного.

3) Абсолютная суммируемость методом Вороного интегралов Фурье и интегралов Фурье с множителем.

4) Абсолютная суммируемость тригонометрических интегралов Фурье произведениями методов Вороного и Чезаро, $\left(C,1\right)\left(W,p\left(y\right)\right)$ и $(W,p\left(y\right)\cdot(C,1)$.

5) О степени приближения функций средними Вороного её интеграла Фурье.

Отметим, что впервые вопрос о суммировании интегралов Фурье функциональным методом Вороного рассмотрела Бойцун Л. Г. в 1965 году, [3], [4]. Абсолютное суммирование тригонометрических интегралов методом Чезаро первого порядка и методом Вороного впервые исследовали в 1973 г. Бойцун Л.Г. и Рыбникова Т. И., [5], [6]. Абсолютное суммирование тригонометрических интегралов Фурье произведением метода Вороного и метода Чезаро первого порядка впервые рассмотрела Рыбникова Т.И. в 1980 г., [7].

В наше время работы Вороного используют специалисты разных областей знаний практически во всех странах Европы, США, Канаде, Японии, Англии, Гонконге, Новой Зеландии и т.д.

Исследования Г.Ф. Вороного продолжают современные математики как Украины, так и всего мира.

Начиная с 1993 года в Киеве было проведено 4 международных конференции (1993, 1998, 2003, 2013) посвященных развитию научного наследия выдающегося украинского математика.

Начиная с 2004 года в разных странах проводятся симпозиумы, посвященные диаграммам Вороного: в Японии (Токио, 2004 г.), Корее (Сеул, 2005 г.), Канаде (Калгари, 2006 г.), Великобритании (Гламорган, 2007 г.) — организатор — исследовательский центр по диаграммам Вороного в Сеуле. В 2008 году (в год памяти Георгия Вороного (1868–1908)) по инициативе организаторов ISVD симпозиумов объединенная конференция прошла в Киеве.

Большую роль в организации и проведения международных конференций, а значит в развитии научных направлений, которые разработал выдающийся математик Г. Вороной играет кандидат физико-математических наук Галина Николаевна Сыта (Национальный педагогический университет им. Н. П. Драгоманова, Институт математики НАН Украины).

Украина свято чтит память гениального предка. Щедра украинская земля славными именами, которые прославляют ее во всех уголках планеты. Одним из таких людей является гениальный украинский математик Георгий Федосьевич Вороной, захороненный по его воле в селе Журавка (Варвинский район Черниговской области), где он родился и с которым был тесно связан на протяжении всей своей жизни.

Данную заметку о Г. Ф. Вороном хочется закончить стихотворением «Памяти Георгия Вороного», сочиненным Л. Г. Бойцун в сентябре 2008 года.

Памяти Георгия Вороного

В Журавке есть одна могила,
Пред ней колени преклоню,
Ушёл стремительно, так быстро,
Оставив след в большом миру.

Чтоб мы смогли его не потерять,
Он в диаграммы мира превратился,
И на земле что б путь нам освещать,
И чтобы им народ гордился.

Из Японии и из Кореи,
Из двадцати различных стран,
Ученые слетелись в Киев,
Что б Вороному честь отдать.

Симпозиум — большое братство,
Науки, силы и ума,
И знаний мощного богатства —
На том стоит наша земля.

Связало здесь ученых мира,
Без всех верёвок и узлов,
Его прекраснейшее имя,
Единство теорем и слов.

Пророков нет в своей Отчизне —
Они живут в других мирах,
А он, Учёный и Учитель,
Живет сейчас в больших делах.

Список литературы

1. Вороной Г. Ф. Расширение понятия о пределе суммы ряда. Собр. соч; т.3. — Киев, 1953. — С. 60–61.

2. Norlund N. E. Sur une application des fonctions permutable // Lunds. Univ. Arsskrift. — 1919. — **18** (2). — №3. — S. 1–10.

3. Бойцун Л. Г. Об абсолютной суммируемости интегралов Фурье методом Г.Ф. Вороного. Труды I Республиканской научной конференции молодых исследователей. К.: АН УССР. Ин-т математики, 1965. — С. 60–67.

4. Бойцун Л. Г. О суммировании интегралов Фурье методом Вороного. Там само. — С. 68–75.

5. Бойцун Л. Г., Рыбникова Т. И. Абсолютная (C,1)(W,p(y))-суммируемость интеграла Фурье // Исследовании по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям, Днепропетровск, ДГУ, 1973. — С. 91–97.

6. Бойцун Л. Г., Рыбникова Т. И. Абсолютная (C,1)(W,p(y))-суммироемость сопряженного интеграла Фурье // Там само. — С. 97–98.

7. Рыбникова Т. И. Абсолютная суммируемость интеграла Фурье методами (W,p(y) и (W,p(y)·(C,1) . — Днепропетровск XXсессия Деп.в ВИНИТИ 03.04.86, №2330-В86.

ДО ПИТАННЯ ПРО ОЗНАЧЕННЯ ПОНЯТТЯ «ТОЧКА ЗВОРОТУ»

В. О. Болілий, І. О. Зеленська
Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В. Винниченко,
Кіровоград, Україна
Kopchuk@gmail.com

Проблема про яку піде розмова в цій роботі для теорії звичайний диференціальних рівнянь стала вже класичною. Математичне трактування сучасних реальних процесів все частіше зводиться до асимптотичних моделей, які потребують апроксіоматичного описання. Асимптотичні явища, до яких прийнято відносити швидкі переходи, розриви, неоднорідності, відбуваються в різних галузях фізики. Формальний аналіз такого роду процесів і вивчення поведінки функцій в точках, в яких відбувається зміна характеру функції, зосереджують увагу дослідника на нулях функцій, так званих «точках звороту».

Поняття «точка звороту» виникло на межі між математикою та фізикою у XIX столітті. Основним джерелом прийнято вважати рівняння Ліувілля:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} + \varphi u = 0. \tag{1}$$

Парадоксальним є той факт, що в сучасній спеціальній науковій літературі на даний момент не існує загальноприйнятого означення цього поняття. Вперше термін «точка звороту» з'являється у 1926 році в роботі німецького фізика Н. А. Крамерса. Де він досліджує задачу квантової механіки — рівняння Шредінгера, яке є диференціальним рівнянням в частинних похідних, але зводиться до рівняння (1). Як зазначено в [4], вивчаючи поведінку функції в нулях Крамерс застосовує поняття «Umkehrpunkt», що в перекладі означає «зворотний шлях». Одночасно з ним, незалежно один від одного, над цією проблемою в той самий час працювали ще два фізика Дж. Вентзель і Л. Бриллiон. Результатом цих трьох наукових праць є широко відомий в теорії асимптотичних методів — ВКБ-метод. Саме завдяки цьому методу виник вираз «transition point», що в перекладі означає «точка переходу», який став провісником сучасного терміна «точка повороту». Математичне тлумачення такої назви полягає в наступному: згідно цього методу, необхідно знайти так звані ліві і праві «зовнішні» розв'язки, без відшукання «внутрішніх» розв'язків, і «зшити» їх в особливих точках — точках звороту.

Розвиток теорії задач з точками звороту показав, що характер «точки звороту» не є однаковим для всіх диференціальних рівнянь, які містять такого роду особливості. Спроби розрізнити і класифікувати це поняття по певній ознаці вперше були зроблені ще у 50-х роках минулого століття. Так, у своїй роботі [2] Рудольф Лангер досліджує рівняння n-го порядку

$$\frac{d^nu}{dz^n} + \lambda p_1(\mathrm{z},\lambda)\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} + \ldots + \lambda^n p_n(\mathrm{z},\lambda)u = 0. \tag{2}$$

Аналізуючи корені допоміжного характеристичного алгебраїчного рівняння

$$\chi^n + p_1(\mathrm{z},\infty)\chi^{n-1} + \ldots + p_n(\mathrm{z},\infty) = 0, \qquad (3)$$

він зауважує, що між точок звороту найпростішими є ті, корені яких злипаються. Мова йде про рівняння другого порядку. Проте і вони поділяються на різні категорії: в залежності від кількості інших коренів, що містять на спектрі і від ступеня дискримінанту допоміжного рівняння, в якому зникає злипання коренів. Стосовно диференціальних рівнянь вищих порядків, як зауважує автор, будемо мати справу з різними наборами конфігурацій коренів характеристичного рівняння. Зрозуміло, що число таких наборів буде зростати з порядком рівняння. Тому якщо число допоміжних коренів, що містяться у випадках з точками звороту дорівнює m, то будемо говорити, що модель в точці є m-кратною. Необхідно зауважити, що Лангер означає «точки звороту» в перших своїх роботах як нулі функції $\theta^2(\mathrm{s})$, яка входить до складу рівняння

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \{\lambda^2\theta^2(\mathrm{s}) + \mathrm{X}(\mathrm{s},\lambda)\}\,\mathrm{y} = 0. \qquad (4)$$

Інший підхід у своїй роботі [3] використовує М. В. Федорюк. Він пропонує наступне означення: точка x_0 називається точкою звороту системи $\varepsilon y' = A(\mathrm{x},\varepsilon)\,\mathrm{y}$ або рівняння $ly \equiv \varepsilon^n y^n + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^{n-j} q_j(\mathrm{x},\varepsilon)\,\mathrm{y}^{(n-j)} = 0$, якщо рівняння $l(\mathrm{x}_0;\mathrm{p};0) = 0$ має кратний корінь. Автор розглядає прості типи точок звороту — це такі, в околі яких, фундаментальна система розв'язків рівняння або системи містить функції Ейрі. До такого типу точок звороту відносяться, наприклад, кратна або дробова.

Дослідження рівняння Ліувілля в монографії [1] показали, що в залежності від розв'язків модельного рівняння

$$TW(\mathrm{t}) \equiv \frac{\partial^2 W(\mathrm{t})}{\partial t^2} + tW(\mathrm{t}) = 0, \qquad (5)$$

слід розрізняти стабільну (рівняння (5) має обидва обмежені розв'язки, коли $t \geq 0$) і нестабільну (один з розв'язків (5) необмежено зростає) точку звороту.

Список літератури

1. Бобочко В. М., Перестюк М. О. Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту. — К.: Наукова думка, 2002. — 310 с.

2. Langer R. On the construction of related differential equations //AMS. — 1955. — P. 394–410.

3. Федорюк М. Ф. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.:Наука, 1983. — 352 с.

4. Wasow W. Linear turning point theory. — Springer-Verlag, New York Ins., 1985. — 243 p.

ФЕСТСЬКИЙ ДИСК — АСТРОНОМІЧНИЙ ДОВІДНИК II ТИСЯЧОЛІТТЯ ДО Н. Е.

Г. Ю. Гриценко
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
yaropolkbazhaluk@gmail.com

Фестський диск — керамічний кружок із загадковими ієрогліфами, який широко відомий історикам стародавнього світу і вважається однією з найбільших таємниць минулого. Дослідники дешифрують його вже впродовж ста років, але безуспішно.


Сторона А


Сторона Б

Диск виявлений у 1908 р. археологом Л. Перньє при розкопках палацу у м. Фесті на острові Кріт. Він датується XVII ст. до н.е. Діаметр диска — 16 см. На стороні диска «А» — 123 ієрогліфи та 4 крапки. На стороні «В» — 119 ієрогліфів та 5 крапок. Усього 242 ієрогліфи 46 видів, включаючи крапку. Ієрогліфи нанесені по спіралях і розділені на блоки вертикальними лініями. Усього на двох сторонах диска 61 блок. Деякі блоки повторюються. Нумерація блоків починається з центра сторони «А».

На помилкову думку філологів, знаки диска лінгвістичні і навіть «письмена перших європейців».

Труднощі дешифрування диска пояснює лінгвіст І. Фрідріх: «Неодноразові спроби дешифровки поки що не дали результатів і не можуть їх дати у зв'язку з тим, що текст унікальний і короткий, а також за відсутністю будь-яких точок опори. Таким чином, Фестський диск являє собою поки що поодинокий приклад писемності, яка зникла».

Автор займається проблемою Фестського диска вже понад 30 років і встановив, що диск — «Астрономічний довідник», своєрідний лічильний пристрій, математична структура якого пристосована для фіксації довгих чисел астрономії, а знаки — астрономічні символи, якими позначалися числа параметрів астрономії.

Для дешифрування Фестського диска необхідно було знати:

1. Зміст близькосхідної планетної астрономії Шумеру та Єгипту;
2. Сучасні параметри планетної астрономії;
3. Принципи близькосхідної «вищої математики», пристосованої для астрономічних обчислень.

Творці диска базувалися на математиці та астрономії, дешифрованої автором шумерської «Універсальної астрономо-математичної таблиці» початку III тис. до н.е., в якій закладені такі математичні принципи:

1. Принцип «фрактальних» — подібних чисел, за яким безнульова частина числа вважалась подібною та тотожною числу з нулями;
2. Принцип обернених величин відносно чисел 1 та 6 з дописуванням до них необхідних нулів за фрактальним принципом;
3. Числа астрономії правомірно отримувати шляхом складання або перемноження випадкових чисел незалежно від їхнього астрономічного змісту;
4. Числа «пі» = 3,125 та «2 пі» = 6,25 шумери отримували шляхом послідовного роздвоєння числа 100.

Лічильний пристрій диска являє собою своєрідний «Астрономічний годинник» з двома взаємопов’язаними циферблатами.

У циферблата № 1 лицева сторона — сторона «А» диска, а тильна — сторона «В» диска. 123 + 119 = 242 знаки — індекси-показники циферблата.

У циферблата № 2 лицева сторона — сторона «В» диска, а тильна сторона — сторона «А» диска. 119 + 123 = 242 знаки — також знаки-показники.

Маємо «подвійну бухгалтерію». При підрахунку від центрів дисків «А» та «В» кожен знак диска починає фігурувати під двома числами, що досягається різною кількістю знаків на сторонах диска. Цим досягається збільшення удвічі інформативності знака.

Лічильний пристрій працює за принципом «гри на залишках», за яким довге число астрономії ділиться на базове число 242, а залишок від цілочисельного ділення відкладається на сторонах диска. При цьому необхідно вибирати підходящий знак.

Принцип «гри на залишках» згодом застосовувався у «Вруцелєтах» — календарних обчисленнях на пальцях.

Для користування диском необхідно було знати як призначення знака — астрономічного символу, скажімо, знак «Сонце», так і його число — 365.

Певно, диск використовувався також для навчальних цілей. Учень повинен був обчислити назване число математикою лічильного пристрою.

Початок астрономічного дешифрування диска покладений Н. Шуманом, який показав, що при подвоєнні кількості ієрогліфів на стороні «А» отримуємо кількість діб Сонячного року: 123 + 119 + 123 = 365 д. Цей підрахунок дозволив автору прийти до висновку, що в диску закладений принцип «гри на залишках».

Фестський диск як «Астрономічний довідник» був широко відомий у стародавньому світі. Відомості про найважливіші астрономічні параметри, вміщені в диску, ми знаходимо у праці Цензоріна (III ст.) в описі віків існування етруського народу: «Перші чотири віки мали кожен по 100 років, п'ятий — 123, шостий — 119, сьомий — стільки ж». Маємо приклад міфічної хронології, побудованої на сакральних числах астрономії. Це також стосується як «гіперболізованих, емоційних та символічних» чисел «Біблії», так і тривалості індійських епох-юг.

«Віки етрусків» утворюють ряд чисел: (100 + 100 + 100 + 100) + (123 + 119) + 119 = 400 + 242 + 119 = 523 + 238 = 400 + 361 = 761, де:

– 123 та 119 — число ієрогліфів на сторонах диска;

– 400 — фрактал довжини відносного кола Землі. За Аристотелем відносне коло Землі = 400 000. Сучасні дослідники помилково вважають, що це 400 000 стадій. Але Аристотель не говорить, що це саме стадії;

– 523 — фрактал довжини єгипетського «царського ліктя» = 0,523 метра;

– 242 д. — період видимості Венери вечірньої або вранішньої зорі;

– 242 — кількість драконічних місяців у Сароському циклі місячних затемнень.

Число 361 присутнє в диску: 119 + 123 + 119 = 361. Фрактал числа 400 — число 4. Тоді 361 + 4 = 365 д., а 400 + 365 = 765 д. — мінімальний синодичний період Марса, за єгипетською міфологією — «Гор-дитя».

Обчислення генерують числа: 523 + 242 = 765 д.

523 + 365 = 29,6 х 30 = 888 д. — 30-місячний цикл місячних затемнень.

400 : 765 ≈ 0,522 876 ≈ 0,523.

523 х 765 = 400 095 ≈ 400 000 — за Аристотелем.

400 : 523 = 764,818… (фрактал) ≈ 765.

Творці диска підлаштовували його лічильний пристрій таким чином, щоб звести до одного знаку числа 400; 523 та 765, а саме — до знаку «Коло» у Блоці № 10 (далі — Б. 10) на стороні «А». Так:

400 = 242 + 119 + 39.

523 + (242 х 2) + 39.

765 = (242 х 3) + 39. Усі ці числа зводяться у знак «Коло» з порядковим номером 39. Число 522 876 = (242 х 2160) + 119 + 37 також опиняється у Б.10 під знаком «Ріг».

Б.10 складається із знаків: «Ріг — Птах — Коло — Голова», причому «Птах» летить у сторону «Рогу».

Числа 242 та 365 містяться у Б.31 під знаком «Голова». У Б.10 вони фіксуються за алфавітним принципом, тобто за аналогією.

Число 29,6 (296) міститься у Б.45 під знаком «Голова» і за аналогією фіксується у Б.10.

Н. Шуман був недалекий від істини, коли вважав, що знак «Коло», який має у кружку 7 крапок, позначає 7 днів тижня, але не врахував, що 7 днів тижня були присвячені сімом «планетам» (включаючи світила). Отже, у знакові «Коло» кружок символізує Землю, навколо якої обертаються 7 планет. У парі знаків «Коло — Голова», які часто зустрічаються в диску, знак «Голова» —

восьма планета. Пара цих знаків — ідеограма планетної моделі тогочасного Всесвіту. Аналіз показує, що періоди планет фіксувалися як знаком «Коло», так і знаком «Голова».

Щодо періодів планет, то близькосхідні астрономи фіксували не тільки їхні середні періоди, які наводяться у сучасних довідниках, але й увесь діапазон періоду від мінімального до максимального значень. Саме з цієї причини дослідники і не бачать у єгипетських астрономо-математичних текстах періодів планет.

Знак «Голова» позначає числа планет:

1. Сонце — 365 д. — Б.31, Б.2;
2. Синодичний Місяць — 29,6 д. — Б.45;

Драконічний Місяць — 27,223 д. — Б.61;

3. Меркурій — 131 д. — Б.3, 1320 д. — Б.59;
4. Венера — 593 д. — Б.27, 594 д. — Б.59;
5. Марс — 780 д. — Б.45;
6. Юпітер — 397 д. — Б.9;
7. Сатурн — 37800 д. — Б.12;
8. Уран — 370 00 д. — Б.24, 370 д. — Б.33, 370,370 д. — Б.28.

Творці «Біблії» були обізнані із близькосхідною астрономією та Фестським диском. Серед чисел «Біблії» нами виявлено числа:

123; 119; 242; 400; 365; 765 00; 593, а також ряд інших чисел астрономії. «Біблія» несподівано стає авторитетним джерелом забутих розвинутих близькосхідних астрономічних знань.

Знаку «Коло» відповідає у Б.61 число 360. Це кількість градусів Зодіаку.

Уран фіксується двома подібними парами знаків: у Б.22 парою «Коло — Голова» з числами 88 та 89 та у Б.24 парою «Коло — Голова» з числами 96 та 97.

(88 + 89) + (96 +97) = 177 + 193 = 370 д.

370 00 = (242 x 152) + 119 + 97. Залишок — 97 фіксується знаком «Голова» у Б.24. Планету Уран може спостерігати людина з дуже гострим зором. Певно, Уран мав на увазі Платон, який писав, що назвати одну із зірок «не можна, тому що ім’я її невідоме з тієї причини, що перший, хто її помітив, був варваром».

Диском фіксуються пори Сонячного року. Число 365 д. присутнє не тільки у Б.31, але й у Б.2. 365 = 242 + 119 + 4. Залишок — 4 фіксується знаком «Людина-пішохід». У Б.2 пара знаків «Пішохід — Кипарис». Знак «Кипарис» — 366 д. Пара «Пішохід — Кипарис» присутня у Б.54 — числа 88 та 89, а також у Б.55 — числа 94 та 95. (88 +89) + (94 + 95) = 177 + 189 = 366 д.

Отже, Сонячний рік ділиться на сезони:

Весна — 95 д., Літо — 94 д., Осінь — 88 д., Зима — 89 д.

Символами сезонів року є також знак «Богиня». У Б.8 знаку «Богиня» відповідає число 271, а у Б.24 — число 95. 271 + 95 = 366 д.

У Б.46 знаку «Богиня» відповідає число 182, яке дорівнює сумі чисел 94 + 88. У Б.47 знаку «Пішохід», розташованому поруч із знаком «Богиня», відповідає число 183. 182 + 183 = 365 д.

Отже, «Богині» фігурують у дні літнього і зимового сонцестоянь та у день весняного рівнодення. У грецькій міфології відповідно було також три богині пір року — Гори: Евномія, Діке та Ірена.

У диску у Б.26 під знаком «Чаша» присутнє число «пі» = 3,125, яке походить із шумерської математики.

Із диска походить число «пі» = 355 : 113 = 3,1415929, яке наводив китайський астроном Цзу-Чун-чжі (V ст.) — Б.29, знак «Чаша».

Також із диска походить число «пі» = 377 : 120 = 3,14166…, яке наводив Птолемей (II ст.) — Б.35, знак «Чаша».

У диску міститься обчислення тривалості синодичного Місяця, яке наводив Гіппарх (II ст. до н.е.), уточнивши обчислення на диску на одну добу — Б.51. Наводимо обчислення в диску:

(365,25 х 304) : 3760 = 29,530851 д., а за Гіппархом — 29,530585 д.

Прийнята Гіппархом швидкість прецесії 2 градуси за 169 р. (1 градус за 84,5 р.) також із Фестського диска. Б.61, Б.13.

У диску обчислюються:

— Драконічний рік: (2); 200 000 : 577 = 346,62 д. Б.55, Б.46.

— Сароський цикл місячних затемнень:

346,62 х 19 = 6585,78 д. Б.55, Б.56.

356 х 18,5 = 6586 д. Б.45.

366 х 18 = 244 х 27 = 6588 д. Б.32.

27,223 х 242 = 6587,966 д. Б.61.

— Цикл місячних вузлів:

365,242 х 18,6 = 6793,5012 д. Б.48.

257 х 27 = 6939 д. Б.38.

— Шестимісячний період між сусідніми місячними затемненнями у 30-місячному циклі місячних затемнень: 177 д. та 178 д. Б.15.

— Відносне коло Місяця = 108. Б.59.

— Відносне коло Сонця = 108 х 4 = 432. Б.18.

Числа відносних кіл Землі, Місяця та Сонця фігурують у блоках диска, у яких обчислюються місячні та сонячні затемнення. Б.12, Б.18, Б.33.

Фестський диск свідчить, що близькосхідна астрономія у II тис. до н.е. була математичною, науковою та надзвичайно розвинутою. Спростовується уявлення істориків астрономії школи Отто Нейгебауера про відсутність наукової математичної астрономії у Шумері, Єгипті та Вавилоні у III–II тис. до н.е.

Грецькі астрономи не були фундаторами наукової астрономії, вчилися у близькосхідних жерців та успішно розвивали їхні здобутки в царині астрономії.

ВЕЛИКА ТЕОРЕМА ФЕРМА

$x^n + y^n = z^n$

(до 60-річчя від дня народження Ендрю Джона Уайлса)

Н. М.Задерей, Г. Д. Нефьодова
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
kaf229@fel.ntu-kpi.kiev.ua

П’єр де Ферма
(1601–1665)

П’єр Ферма — один з найвидатніших любителів в історії науки, його називали королем любителів математики. Математика була лише хобі французького юриста П’єра Ферма. П’єр Ферма поряд з Рене Декартом вважається засновником аналітичної геометрії. Крім цього, він поділяє разом з Блезом Паскалем лаври творця теорії ймовірностей. Особливе місце в історії математичного аналізу займають його праці по відшуканню найбільших та найменших значень функцій.

Ферма відродив теорію чисел. Всі ці досягнення дозволили йому піднятися над його сучасниками — «чистими математиками». Судові обов’язки Ферма поглинали багато часу, і лише години дозвілля залишались у нього для занять математикою. В цьому йому допомагала знаменита книга «Арифметика» давньогрецького вченого Діофанта. Інтерес викликала відома теорема Піфагора: $x^2 + y^2 = z^2$ і відповідні трійки цілих чисел, що задовольняють даному рівнянню (так звані Піфагорові трійки, наприклад, 3, 4, 5 або 5, 12, 13). Ферма вирішив розглянути рівняння більш високих степенів: $x^3 + y^3 = z^3$, $x^4 + y^4 = z^4$ і т. д. Він не міг знайти жодної трійки натуральних чисел, що задовольняють цим рівнянням. Це й наштовхнуло Ферма на думку, якій судилося стати головною інтригою в математиці упродовж більш ніж 350 років.

На полях відомої «Арифметики» Діофанта Ферма залишив зауваження: «Неможливо розкласти куб на два куби, біквадрат на два біквадрати, взагалі ніякий степінь, більший від квадрата, на два степені з тим самим показником. Я відкрив цьому воістину чудесне доведення, але поля книжки для нього надто вузькі». Нажаль, книга з записом Ферма згубилася. Так виникла Велика теорема Ферма, як її згодом почали називати, що здобула нечувану славу в наступних століттях.

Велика теорема Ферма формулюється таким чином: рівняння $x^n + y^n = z^n$ не можна розв’язати в цілих числах при натуральних $n > 2$.

Її формулювання дуже просте, зрозуміле кожному учневі, проте більш як триста років теорема не була доведена. Перший прорив в подоланні Великої теореми Ферма вдалося здійснити математичному генію XVIII століття Леонарду Ейлеру (1707–1783). Він довів в 1770 році теорему для $n = 3$, показав що рівняння $x^3 + y^3 = z^3$ не має розв'язків у натуральних числах. Сам Ферма залишив доведення для $n = 4$. Згодом відомі математики Г. Діріхле та А. Лежандр довели теорему Ферма при $n = 5$, Г. Ламе довів теорему при $n = 7$.

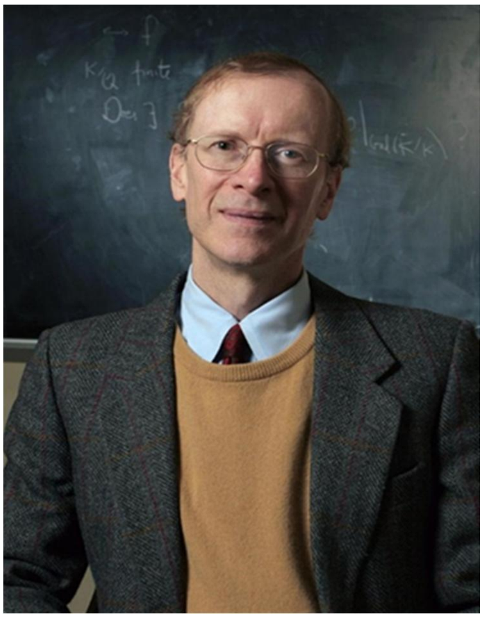
Велика теорема Ферма стоїть на першому місці по кількості невірних доведень. На шляху доведення цієї теореми зазнали невдач такі видатні математики як Коші та Ламе. Німецький математик Е. Кумер вказав на суттєві помилки в доведеннях Коші і Ламе. Пізніше саме Кумеру вдалось довести Велику теорему Ферма для всіх $n \leq 100$.

Інтерес до теореми збільшився, коли Пауль Вольфскель, німецький промисловець з Дармштадта в 1908 році заповів видати зі свого спадку винагороду в 100 000 марок (за сучасним курсом — два мільйони доларів) будь-кому, хто здолає Велику проблему Ферма. Засновник премії визначив термін дії свого заповіту, а саме 100 років — до 13 вересня 2007 року. І спроби взяти цю математичну фортецю продовжувались.

З часу заснування премії Вольфскеля тільки за перший рік надійшло 621 помилкове доведення цієї теореми. На сьогоднішній день в Геттінгені зберігається трьохметровий архів переписки та запропонованих розв'язків проблеми Ферма.

Остаточну крапку в захоплюючій історії Великої теореми Ферма поставив наприкінці XX століття американський математик англійського походження Ендрю Джон Уайлс (Andrew John Wiles), лицар — командор Ордена Британської Імперії з 2000 року. Ендрю Уайлс — професор математики Прінстонського університету, завідувач його кафедри математики, член наукової ради Інституту математики Клея. Ендрю Уайлс народився 11 квітня 1953 року в знаменитому Кембриджі, де свого часу жив і творив свої геніальні закони Ісаак Ньютон. В десятирічному віці Ендрю захопився математикою, в бібліотеці він випадково натрапив на книгу Еріка Темпла «Велика проблема» про історію знаменитої теореми Ферма. Перед Ендрю була задача, зрозуміла десятирічному хлопчику, вже тоді йому стало ясно, що він ніколи не зможе відступитися від цієї проблеми, повинен її розв'язати. Шкільні методи дослідження не давали результатів. Після вступу в коледж Ендрю закинув спроби довести Велику теорему Ферма і зайнявся вивченням еліптичних кривих під керівництвом Джона Коутса. Майже через 30 років Ендрю Уайлсу вдалося здійснити дитячу мрію.

Японські математики Таніяма та Шимура висунули гіпотезу про тісний зв'язок між еліптичними кривими і модулярними формами. Якщо еліптичні криві були відомі ще з античних часів, то модулярні форми почали досліджувати лише з XIX століття. Побачити між ними зв'язок було дуже складно. В 1984 році німецький математик Герхард Фрей висловив міркування про те, що із гіпотези Таніями — Шимури відразу ж випливає справедливість Великої теореми Ферма, що не піддавалась розв'язанню упродовж кількох століть. Міркування Герхарда Фрея містили деякі прогалини.


Сер Ендрю Джон Уайлс

В 1986 році їх ліквідував Кен Рібет, професор Каліфорнійського університету в Берклі (США). Зв'язок між теоремами Таніями — Шимури і Ферма був встановлений Кеном Рібетом, якого підштовхнув до цього Баррі Мазур під час розмови про стан математики за філіжанкою кави у кав'ярні Берклі. Рібет довів, що крива Фрея не може бути модулярною. Це означало, що доказ напівстабільності випадку теореми Таніями — Шимура підтверджує правдивість Великої теореми Ферма. Після того, як Уайлс дізнався про отриманий Кеном Рібетом в 1986 році результат, він сконцентрувався на перевірці гіпотези Таніями–Шимури для еліптичних кривих над полем раціональних чисел.

З цього часу Велика теорема Ферма стала нерозривно пов'язана з гіпотезою Таніями–Шимури. Здавалось, що залишилось зовсім небагато — довести цю гіпотезу японських математиків. Однак довести її ніяк не вдавалось. Ютака Таніяма (1927–1958) добровільно пішов з життя. Горо Шимура відійшов від активних занять математикою. Песимістично був налаштований і Кен Рібет — він вважав, що доведення гіпотези перевищує людські сили, принаймні у XX столітті.

Одним з небагатьох сміливців у світі, який наважився здійснити рішучий наступ на цю гіпотезу, був Ендрю Уайлс, в деякий момент він відчув, що всі зусилля треба спрямувати на цю проблему. Уайлс працював майже сім років в умовах повної ізоляції, абсолютної секретності. Про те, що він займається гіпотезою Таніями — Шимури (отже, й Великою теоремою Ферма), знала лише одна людина, його дружина Нада.

Звитяжна робота дала результат, і в червні 1993 р. вдалося отримати довгоочікуване доведення гіпотези. 23 червня 1993 року в Кембриджі, в Інституті математичних наук Ісаака Ньютона Ендрю Джон Уайлс публічно кинув виклик знаменитій проблемі. Це була дуже інтригуюча лекція з математики всього минулого століття. Двісті математиків з усього світу сиділи, немов заворожені. На той час Ендрю Уайлс уже був професором Прінстонського університету у США, куди він емігрував у 1982 році.

Після гучної лекції настав час ретельної перевірки. Усе доведення Уайлса, яке займало 200 сторінок, було передано на рецензування шістьом експертам.

Один з рецензентів після прискіпливого вивчення доведення, знайшов принципову прогалину. Це шокувало Уайлса, він мав визнати поразку після того, як лише кілька тижнів тому газети всього світу назвали його найкращим математиком нашої планети.

І тут Ендрю Уайлс вирішив залучити до співробітництва молодого перспективного математика Річарда Тейлора. Спочатку це не привело до успіху, Уайлс був на межі того, щоб публічно капітулювати. Але Річард Тейлор запропонував ще попрацювати над проблемою. Мабуть, ніхто й ніколи не розгадає загадку, коли настають моменти наукового прозріння. Саме таке прозріння однієї миті розкрило очі Уайлсу, здалося, що все дуже просто і вишукано. Доведення стало ще досконалішим. Нарешті напруга і зусилля, пов'язані з Великою теоремою Ферма, що тривали понад три століття, успішно закінчились. Ендрю Уайлс, який, здавалось, був на межі поразки, ще раз заявив про себе, як про видатного математика.

19 вересня 1994 року робота була успішно завершена. Дві статті, обсягом 130 сторінок, були найретельніше проаналізовані. 25 жовтня 1994 року Ендрю Уайлс оприлюднив дві праці, одна з яких була у співавторстві з Річардом Тейлором. У роботах було приведено доведення гіпотези Таніями — Шимури для випадку напівстабільних еліптичних кривих. З цієї гіпотези, згідно дослідженню Кена Рібета, випливає Велика теорема Ферма. Праця, присвячена дружині Наді та дочкам Клер, Кейт і Олівії, називається «Модулярні еліптичні криві і Остання теорема Ферма». В травні 1995 року роботи були надруковані в журналі «Annals of Mathematics».

Доведення Великої теореми Ферма є тріумфом людського інтелекту, воно є синтезом ідей сучасної математики та класичних методів і служить джерелом натхнення на майбутнє. Уайлс отримав премію Вольфа, історичну премію Вольфскеля, яка на момент вручення, що відбулося 27 червня 1997 року, становила лише 50 000 доларів, так як інфляція та девальвація внесли свої корективи. Ендрю Уайлс став лауреатом тринадцяти міжнародних премій з математики. Математична спільнота вважає, що він здійснив прорив, який може привести математичну науку в золоте століття.

Знайомство студентів — першокурсників з цікавою та повчальною історією дослідження Великої теореми Ферма викликає інтерес до вивчення математичного аналізу, теорії чисел, історії цих наук, захоплення математичною наукою та творчістю науковців.

Список літератури

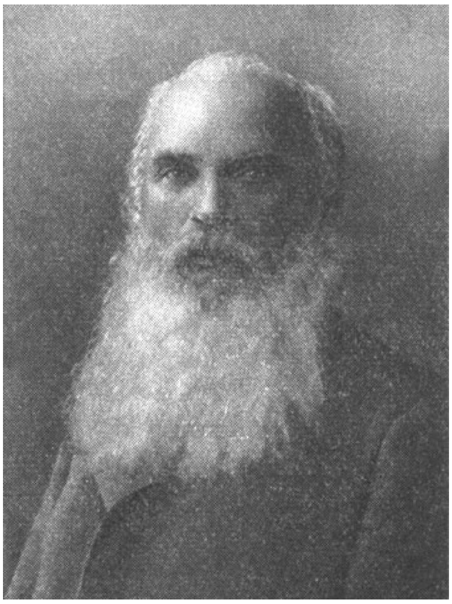
1. Рибенбойм П. Последняя теорема Ферма для любителей / П. Рибенбойм — М.: Мир, 2003. — 429 с.

2. Шмигевський М. В. Видатні математики / М. В. Шмигевський — Харків: Основа — 2004. — 176 с.

3. Сингх С. Великая теорема Ферма / С. Сингх — М.: Издательство МЦНМО, 2000. — 288 с.

В. П. ЄРМАКОВ — ПЕРШИЙ ЗАВІДУВАЧ КАФЕДРИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ КИЇВСЬКОГО ПОЛІТЕХНІЧНОГО ІНСТИТУТУ

Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
kaf229@fel.ntu-kpi.kiev.ua



> *Безперечно, серед відданих на суд історії математичних постатей Київського університету Єрмаков — найбільша.*
>
> М. Кравчук

Василь Петрович Єрмаков народився 11 березня 1845 року в селі Терюхи, що поблизу міста Гомеля (нині республіка Білорусь). Син учителя церковно-приходської школи, В. П. Єрмаков середню освіту здобув у Чернігівській гімназії. У 1869 році він закінчив Київський університет святого Володимира, де його вчителями були М. Є. Ващенко-Захарченко, І. І. Рахманінов, П. Є. Ромер, М. А. Дяченко. Університетські курси цих діячів освіти були написані з використанням найсучаснішої на той час навчальної та наукової літератури, свідчили про досить високий рівень викладання математичних дисциплін на факультеті.

Спочатку студенту В. П. Єрмакову матеріально було важко вчитися, бо він був на власному забезпеченні. Але після іспитів у 1866 році, отримавши найкращі оцінки серед однокурсників, він набув звання «действительного студента», йому була призначена стипендія з приватного фонду. В зв’язку з клопотанням професорів Ващенко-Захарченка та Ромера талановитого студента залишили на факультеті на два роки для підготовки до професорського звання. Перед дворічним відрядженням на стажування до Парижу та Берліну деякий час В. П. Єрмаков провів у Петербурзі, де, спілкуючись з П. Л. Чебишевим, О. М. Коркіним, Є. І. Золотарьовим впевнився у своїх намірах займатися механікою та диференційними рівняннями.

У Берліні В. П. Єрмаков слухав лекції Веєрштраса, Гельмгольца, Кумера, Кронекера, опублікував чотири статті. Саме диференційним рівнянням присвячені обидві дисертації Єрмакова. Магістерську роботу «Загальна теорія інтегрування лінійних диференційних рівнянь вищих порядків з частинними похідними і сталими коефіцієнтами» він захистив у Петербурзі (1873), опонентами були П. Л. Чебишев та А. Н. Коркін; докторську дисертацію — у Києві (1877), офіційними опонентами виступили І. І. Рахманінов та П. Є. Ромер.

Більше тридцяти років (1874–1909) професор В. П. Єрмаков викладав у Київському університеті курси з теорії векторів на площині, теорії чисел, теорії ймовірностей, проективної геометрії, варіаційного числення. Наукова діяльність В. П. Єрмакова привернула до себе увагу видатних російських вчених, і в 1884 році він був обраний членом-кореспондентом Петербурзької Академії наук, а у 1888 році отримав звання ординарного професора.

У 1898 році створюється Київський політехнічний інститут (майже половина вартості — дар меценатів Києву: більш як мільйон карбованців склали добровільні пожертви, серед яких значна частка — це кошти Н. Терещенка з синами, Л. Бродського, Київської міської Думи, власників банків, заводів та інших). При організації КПІ особлива увага зверталась на високий теоретичний рівень підготовки майбутніх інженерів, зокрема, з курсу вищої математики. Згідно з положенням про КПІ (1898), для забезпечення викладання усіх предметів в інституті було створено 35 кафедр, з них дві — математики [1]. Педагогічний колектив КПІ вперше в країні започаткував конкурсний порядок призначення професорів кафедр виключно з осіб, які мають учений ступінь. Комісія одноголосно визнала, що талановитий вчений і педагог В. П. Єрмаков найкраще відповідає таким вимогам. В 1899 році професор математики В. П. Єрмаков був запрошений на посаду завідувача кафедри вищої математики КПІ зі збереженням служби в університеті [2].

Професор Єрмаков викладав математику на інженерному та механічному відділеннях інституту. Він читав курси лекцій з аналітичної геометрії, диференційного та інтегрального числення. Крім того, на його курсах вивчались предмети, не характерні для технічних шкіл того часу: елементи диференціальної геометрії, теорії диференційних рівнянь з частинними похідними, елементи теорії ймовірностей. Важливою заслугою вченого було введення в КПІ систематичних практичних занять з різних розділів вищої математики. Вони проводились під керівництвом І. І. Бєлянкіна, Г. В. Пфейфера, П. В. Воронця, М. О. Столярова, які згодом стали відомими вченими. Професор В. П. Єрмаков був відомим методистом, в творчому доробку вченого близько 150 наукових та методичних робіт. Він плідно працював у різних галузях математики: теорія рядів, варіаційне числення, спеціальні функції, диференційні рівняння, алгебра і теорія чисел.

Найбільш відомим вчений став завдяки своїй роботі з теорії збіжності рядів, вперше про свою ознаку збіжності рядів він доповів у 1871 році на засіданні III з’їзду природодослідників і лікарів, де отримав схвальну оцінку П. Л. Чебишева.

За словами видатного математика Михайла Кравчука, «для наукових праць Єрмакова характерні — глибина критичного погляду, велика самостійність та своєрідність думки, але разом із тим — брак уваги до чужих результатів, недооцінка чужих шляхів досліду, гіпертрофована тенденція спрощувати їх, відсутність доброї наукової школи» [3].

Слід відмітити, що професор В. П. Єрмаков брав активну участь у створенні «Фізико-математичного товариства при імператорському університеті святого Володимира». На засіданнях товариства він зробив понад 100 доповідей. Серед його відомих учнів були академік АН УРСР

Г. В. Пфейфер, професор Б. Я. Букреєв, А. П. Пшеборський, І. І. Панфілов, І. І. Бєлянкін, В. П. Вельмін та інші.

Велике значення В.П. Єрмаков надавав методиці викладання, вважаючи, що для вивчення математики не потрібні особливі здібності, а лише добре логічне мислення. Він наголошував на тому, що не маючи змоги викладати широко і всеосяжно курси математики, потрібно зосередити увагу на основних принципах, з яких розвинулась наука. Зацікавившись основними положеннями, студенти самостійно зможуть продовжувати серйозно займатись наукою вже по закінченні вищої школи. Найважче, на його думку, прямуючи до спрощення викладання, не загубити при цьому прозорості, ясності та чіткості, по можливості повністю охопити дану тему. Студенти зауважували, що лекції професора Єрмакова були дивовижно прості та зрозумілі настільки, що не потребували «домашніх доробок». В.П. Єрмаков не обмежувався викладанням лекцій за розкладом, він широко практикував проведення додаткових спеціальних вечірніх семінарів. Один з них, за записами у журналі, працював з 18-ої до 20-ої години щосуботи [4].

Значну увагу В. П. Єрмаков приділяв навчально-методичній літературі, опублікувавши цілу низку посібників, курсів, об'ємних та невеликих статей. Усі ці роботи відрізнялися ясністю та простотою, користувались великим попитом у студентів. Серед таких підручників та посібників можна виділити «Елементарний курс теорії ймовірностей» (1878), «Нелінійні диференційні рівняння з частинними похідними» (1884), «Сферична тригонометрія» (1883), «Метод найменших квадратів» (1887), «Теорія векторів на площині» (1887).

Частина підручників, що була пов'язана з викладанням математики у Київському політехнічному інституті, була призначена для вищої технічної школи. Це «Диференціальне числення у трьох частинах» (1898–1899), «Інтегральне числення» (1899–1900), «Аналітична геометрія» (1900). Виклад матеріалу у цих посібниках є більш формальним, без достатніх обґрунтувань та доведень, для закріплення матеріалу наведена велика кількість прикладів і задач.

За словами В.П. Єрмакова, у вищій технічний школі математика грає службову роль, тут можна заради ясності та розуміння відійти від строгого доведення. Головна мета цих підручників — сформулювати прості правила механікам і інженерам для розв'язання практичних задач.

Професор Єрмаков цікавився і опікувався викладанням елементарної математики та опануванням учнями цього предмету. З його ініціативи та під його редагуванням з 1884 року двічі на місяць, крім літнього періоду, виходив «Журнал элементарной математики» у Києві, примірник коштував 30 копійок. Аналізуючи методику викладання елементарної математики у середній школі, В. П. Єрмаков критикував тих вчителів, що багато часу приділяють теоретичному матеріалу, а на розв'язання прикладів і задач залишають обмаль часу [5].

За два роки у журналі було надруковано біля 150 статей та багато рецензій, В. П. Єрмаков був автором 35 статей та 30 рецензій. Велика кількість статей із цього журналу не втратила актуальність. Навколо журналу зібрались молоді талановиті математики: Г. Ф. Вороний, Д. О. Граве, Д. С. Міріманов, І. І. Іванов та інші. Пізніше редагував журналом його помічник Є. К. Шпачинський.

В. П. Єрмаков вимагав від вчителів безмежного терпіння та поваги до учнів, максимальної уваги, «у випадку невдалих чи невірних відповідей не потрібно дратуватися чи сердитися, а бути лише дуже уважними та обережними», вдосконалювати, спрощувати методи викладання, робити їх більш ясними та зрозумілими. В математиці, за словами В. П. Єрмакова, важливіше не запам’ятати чи зазубрити формули, а зрозуміти шляхи та процеси мислення.

На І (1912) і на ІІ (1914) Всеросійських з’їздах викладачів математики була висловлена вчителями висока повага до ідей та методів викладання вченого.

В.П. Єрмаков зробив вагомий внесок у розвиток математичної освіти, науки та педагогіки в Україні та в Росії. «Неможливо знайти кращого та більш гідного кандидата, ніж професор Єрмаков, який, без сумніву, займає за своїми науковими здобутками одне з перших місць серед вітчизняних математиків», — таку характеристику дав вченому директор КПІ професор В. Л. Кирпичов у червні 1898 року, пропонуючи його на посаду завідуючого кафедрою вищої математики [2].

Список літератури

1. Положение о Киевском политехническом институте императора Александра II. — К.: Работник. — 1898. — 17 с.

2. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года / А. П. Юшкевич — М.: Наука. — 1968. — 591 с.

3. Акад. М. Кравчук. Математика та математики в Київському Університеті за сто років (1834 — 1934) / М. Кравчук — Київ. — Науково-популярні праці. — 2000. — С. 88–123.

4. Добровольский В.А. Василий Петрович Ермаков./ В. А. Добровольский — М.: Наука. — 1981. — 100 с.

5. Ядренко М. Й. В. П. Єрмаков — засновник «Журнала элементарой математики» / У світі математики. — 1995 , Вип 1.

Г. Ф. ВОРОНИЙ — ГЕНІЙ МАТЕМАТИКИ,ЩО ВИПЕРЕДИВ ЧАС

(до 145-річчя від дня народження)

Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова

Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна

kaf229@fel.ntu-kpi.kiev.ua

Георгій Федосійович Вороний — одна з найяскравіших особистостей в історії математики кінця XIX — початку XX століття, вчений, який започаткував кілька нових наукових напрямів: аналітичну теорію чисел, алгебраїчну теорію чисел, геометрію чисел.

Георгій Вороний народився 28 квітня 1868 року в селі Журавка колишньої Полтавської губернії (нині Чернігівська область) в родині професора філології Ніжинського ліцею імені князя Безбородька. Його дід у молодості чумакував, був селянином, а батько був першим у родині, хто отримав вищу освіту. Батько вченого, Феодосій Якович Вороний (1837–1910), відомий своєю просвітницькою діяльністю, мав ступінь магістра російської словесності, був близько знайомий з Григорієм Галаганом, зустрічався з Тарасом Шевченком, передав школам подарунок поета — п'ятдесят примірників його «Кобзаря».

У 1884 році видатний математик і педагог професор Київського університету В. П. Єрмаков, перший завідувач кафедри вищої математики Київського політехнічного інституту, почав видавати журнал «Вестник елементарной математики». Георгій Вороний, тоді ще гімназист Прилуцької гімназії, надіслав статтю в редакцію вісника, яку було надруковано на сторінках цього видання у 1885 році. Того ж року Георгій Вороний поступив до Петербурзького університету на фізико — математичний факультет.

Вчився він з великим ентузіазмом, з виключною увагою слухав лекції. Основною областю досліджень, яку обрав для себе Г. Ф. Вороний, була теорія чисел. Саме в Петербурзі в другій половині XIX століття в області теорії чисел плідно працювали професори П. Л. Чебишев, А. А. Марков, Є. І. Золотарьов. В результаті спільних зусиль виник напрямок «Петербурзької школи теорії чисел».

Науковим наставником Г. Вороного став професор А. Марков. У 1894 році Г. Ф. Вороний захистив магістерську дисертацію «Про цілі алгебраїчні числа, залежні від кореня рівняння третього степеня».

Уже через три роки, у 1897 році, Г. Ф. Вороний захистив докторську дисертацію «Про одне узагальнення алгоритму неперервних дробів». Обидві роботи примикають до досліджень Золотарьова, Маркова, Сохоцького з теорії алгебраїчних чисел. За ці роботи Академія наук присудила їх автору премію імені

Буняковського. Після захисту магістерської дисертації влітку 1894 року Г. Ф. Вороний отримав професуру у Варшавському університеті (на той час разом з ним в університеті було лише два професори), з осені 1898 року викладав і в Варшавському політехнічному інституті, де був деканом механічного факультету. Під час революційних подій 1905–1907 років університет та політехнічний інститут у Варшаві було закрито. Разом з групою професорів Георгій Феодосійович Вороний деякий час викладав у Новочеркаську.

Професор Вороний віддавав педагогічній діяльності багато сил і часу. Польські студенти запам'ятали його як просту, аристократичну та безкорисливу людину. Г.Ф.Вороний стояв біля витоків польської математики, його учнем був відомий польський математик Вацлав Серпінський. Польща вважає його польським математиком українського походження. Георгій Федосійович досконало володів польською, англійською, німецькою мовами, захоплювався музикою, часто відвідував симфонічні концерти, оперу.

Душею і серцем Георгій Вороний завжди линув до своєї малої батьківщини, до мальовничого українського села Журавки, де проводив зі своєю сім'єю літні вакації, під час яких було написано багато наукових праць. З задоволенням вчений працював у великому, розкішному саду, який насадив ще його батько. Під час так званого «розкуркулення» сад знищили, дерева зрубали, залишився лише єдиний дуб, посаджений Г. Ф. Вороним на честь народження його доньки Марії у 1900 році. Дуб цей зараз росте у чужому дворі.

За своє коротке, але дуже яскраве життя вчений написав дванадцять робіт: шість об'ємних творів і шість статей, усі вони отримали визнання геніальних ще за його життя. Успішно ці дослідження використовуються саме тепер. Це унікальне явище у математиці, де будь-яке відкриття вже через два — три роки втрачає актуальність.

Борис Делоне, один із найбільш талановитих учнів Георгія Вороного, писав у 1933 році: «Праці Георгія Вороного відрізняються своєю глибиною і довершеністю викладу. У Вороного всього шість великих і шість малих праць. Кожна з великих праць — або капітальна в даному обсязі, або відкриває велику ділянку досліджень; навіть кожна мала праця Вороного незвичайно оригінальна і часом по-новому спрямовує дослідження. Глибина і важливість його досліджень залишили глибокий слід у сучасній теорії чисел. Поряд із Мінковським Вороний є творцем геометрії чисел. Роботу Георгія Вороного 1903 року про число точок під гіперболою треба вважати віхою, з якої починається сучасна аналітична теорія чисел».

Геній Вороного на століття пережив його самого, зараз його відкриття застосовуються у всьому світі. Вивчення властивостей багатогранників у багатовимірному просторі глибоко захопило Г. Ф. Вороного. На протязі багатьох років він досліджував ці властивості і їм присвятив свою останню роботу «Дослідження про примітивні паралелоедри», що була надрукована у журналі Крелле (т. 134, 1908 рік, т.136, 1909 рік). Г. Ф. Вороний розробив нові математичні структури, які пізніше отримали назву «діаграми Вороного».

У 70-тих роках XX століття виявилося, що роботи Г. Вороного, які є абстрактними по суті, дають математичний апарат для застосування у багатьох практичних галузях: комп'ютерній графіці, створенні штучного інтелекту, молекулярній біології, астрофізиці, кристалографії, офтальмології тощо. Загально визнаними є терміни: «клітина Вороного» (Voronoi cell), «мозаїка Вороного» (Voronoi mosaics), «розбиття Вороного» (Voronoi tiling). У науковій термінології застосовується такий термін, як «діаграми Вороного». Цікаво, що великої популярності у математичному світі ці поняття набули близько тридцяти років тому. Феномен Г.Ф. Вороного полягає у тому, що майже усі його роботи та відкриття використовують сучасні дослідники у всьому світі (США, Гонконг, Австрія, Великобританія, Канада, Японія, Нідерланди).

У теоретичну комп'ютерну науку діаграми Вороного було введено у статті M.Shamos та D.Hoey. З того часу діаграми Вороного стали широко застосовувати у конструкціях, пов'язаних із геометричними алгоритмами, тому фахівці вважають, що саме з цього моменту була започаткована комп'ютерна геометрія, оскільки найдовершенішим по формі та пріоритетним у часі є метод Георгія Вороного.

У Великобританії поняття «діаграм Вороного» (Voronoidiagram) введено у програму шкільної освіти. Все частіше стали звертатись до діаграм Вороного у своїх творчих проектах художники, скульптори, архітектори, дизайнери. В Сеулі (Південна Корея) створено дослідницький центр з діаграм Вороного, де щорічно проходять міжнародні симпозіуми, які привертають до себе увагу світової наукової спільноти.

Корейський дизайнер Кім Хюн-Суок створив проект яхти, яку назвав «Voronoi yacht», де він використав концепцію Вороного, яка полягає у методі розбиття простору на частини, що дозволяють створювати максимально міцні структури із застосуванням мінімальної кількості матеріалу. Розкішний інтер'єр яхти укладається в звабливу чудернацьку мозаїку. Моделі таких «мозаїк Вороного» можна знайти у навколишній реальності, зокрема, у власному організмі. Наприклад, клітинні мембрани точно повторюють цей принцип.

Які б ще цікаві дослідження мало людство, якби не рання смерть великого вченого! Передчасна смерть Г. Ф. Вороного була великою втратою для математичної науки. Академія наук Росії у некролозі писала: «помер Г. Ф. Вороний, людина колосальних математичних обдарувань і вельми значна величина не лише серед вітчизняних, а й іноземних вчених–математиків». Відомий вчений, математик Д. Граве, торкаючись досліджень Вороного, сказав, що «передчасна смерть обірвала наукову діяльність, яка носила у собі відбиток геніальності».

Помер Георгій Федосійович Вороний у сорокарічному віці від жовчокам'яної хвороби у Варшаві, заповів, щоб його поховали у родинному склепі на українській землі, у рідному селі Журавці. Нажаль, поховання не зберегли, склеп був розібраний у повоєнні часи на будівельні матеріали, а будинок Вороних, де спочатку була початкова школа, призначений бути музеєм, прийшов у занепад і був зруйнований. Лише шкільний музей у селі дбайливо підтримує пам'ять про свого великого земляка, зберігає речі, що належали родині, поновлює експозицію.

У Георгія Вороного та його дружини Ольги Крицької було п'ятеро дітей: два сина та три доньки. Вся родина Г. Ф. Вороного вписала в історію України не один яскравий рядок. Син Олександр (1892–1946) — лікар-онколог, був репресований, син Юрій (1895–1961) — видатний хірург, першим у світі здійснив пересадку нирки людині, учасник бою під Крутами 16 січня 1918 року.

Ми пишаємося тим внеском у світову науку, який зробив український математик Г. Ф. Вороний. Його праці увійшли у математичну скарбницю як символ честі і гідності людського розуму.

Список літератури

1. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года / Юшкевич А. П. — М. — Наука, 1968. — 591с.

2. Вплив наукового доробку Г. Вороного на сучасну науку / Ред. Г.Сита, А.Ю.Урачковський. — НАНУ. — Інститут математики. — Київ. — 2003. — 238 с.

«ШКОЦКА КНИГА» — РОДОМ ЗІ ЛЬВОВА

Н. Р. Коновалова
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
konovalovanr@gmail.com

Львів. 30-ті роки XX століття. В добре знаному будинку на перехресті вулиць Фредра і Лозинського розташувалась велика «Шотландська» кав'ярня (Kawiarnia «Szkocka»). Вхід в кав'ярню був з вулиці Академічній. Один із корпусів Львівського університету ім. Яна Казиміра стояв неподалік від кав'ярні. Тому й вулиця, на якій розмістилась «Шкоцка» кав'ярня, нині просп. Т. Шевченка, до середини 1950-х років була Академічною — студентів у ті часи називали академіками.

Кав'ярня «Шкоцка» була дуже популярна у Львові. Фасад будинку оформлений у віденському стилі. Стіни були прикрашені панно за мотивами лицарських романів Вальтера Скотта. Звідси й назва кав'ярні. Сюди приходили грати в шахи, читати газети. Вечорами на фортепіано виконував свої твори польський композитор Артур Мюлєр. Майже щодня в кав'ярні зустрічалася група чоловіків середнього віку, вони замовляли каву або пиво та довго щось обговорювали, голосно сперечались, "іноді чувся сміх одного з співрозмовників, а потім наступало тривале мовчання, під час якого пили каву, втупившись один на одного відсутнім поглядом", нарешті тиснули один одному руки та продовжували розмовляти далі. Результати дискусій записували хімічним олівцем на мармурових стільницях столів. Зрозуміти ці записи — набір цифр, символів — іншим відвідувачам було неможливо.

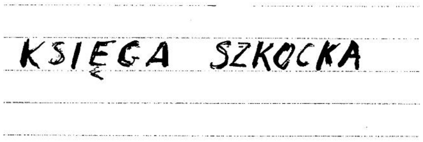
«Це професура з університету! — цитує господаря «Шкоцкої» пана Бреттшнайдера письменник Ю. Винничук. — Приходить їх декілька, але особливо виділяється один, такий худий, високий. Іноді сидить, п'є «маленьку чорну» (невелику порцію кави) і дивиться вдалину. А то раптом щось його струсне — і кидається писати. Хоча й олівцем, але дуже густо пише, може й весь стіл. Та ще й дивиться, де є вільне місце, щоб і його забруднити. Прибиральниць попереджаємо, щоб не мили столик під скатертиною. Біля одинадцятої приходять студенти та переписують цифри зі стола».

Худий високий професор — це Стефан Банах, член-кореспондент Польської Академії наук. Зазвичай кав'ярню разом з Банахом відвідував його учитель, математик світової слави Гуґо Штейнгауз.

До тих зустрічей приєднувалися також Юліуш Шаудер, Станіслав Улам, Станіслав Мазур, Станіслав Сакс, Владислав Орліч. Постійним учасником був феноменальний «живий калькулятор» — Герман Ауербах. У «Шотландській кав’ярні» часто бував український математик Мирон Зарицький, якого називали «поетом формул». Щоб обговорити з колегами найважливіші проблеми, спеціально до Львова приїжджав засновник варшавської математичної школи Вацлав Серпінський, видатні математики Джон фон Нейман, А. Лебеґ, П. Александров, М. Боголюбов, С. Соболєв. Львівських математиків визнавали вчені всього світу, а Стефан Банах безумовно був їх лідером.

Г. Штейнгауз розповідав, що стіл, за яким сиділи Банах з Мазуром, а пізніше й Улам, був в центрі кав’ярні. Обговорювали все — від театральних постановок до міжнародного становища, «подовгу розмовляли про науку взагалі, університетські новини».

Саме у кав’ярні було отримано доведення теореми Банаха. Штейнгауз згадував, що Стефан Банах просидів тоді з Мазуром 17 годин. Доведення було записане на поверхні стола, а пізніше ретельно стерте швейцаром. Поки що ніхто не може відновити доведення. Така ж сама доля спіткала багато інших важливих результатів, отриманих Банахом і його учнями. Вченому просто не вистачало часу записувати й редагувати всі свої теореми, його більше цікавив процес пошуку доведення, він мислив і видавав рішення з шаленою швидкістю, виголошуючи їх, як правило, словесно.



KSIĘGA SZKOCKA

Ситуацію «врятувала» Луція Браус (дружина Банаха): вона спеціально придбала великий зошит з твердими палітурками і домовилася з кельнером, який найчастіше обслуговував математиків, щоб він підсовував їм зошит, як тільки вони починають щось писати.

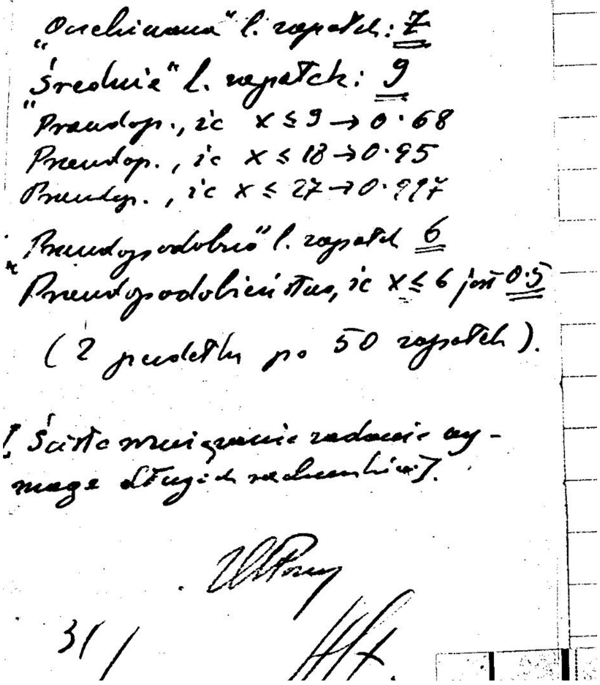
Нині цей зошит — «Шкоцка книга» («Шотландська книга») — є однією з цінностей математичного світу. Книга стала неофіційною громадською науковою публікацією. 17 липня 1935 року Стефан Банах записав першу проблему у «Шкоцку книгу». Всього він поставив у книзі 14 проблем (і ще одинадцять разом із іншими вченими).

Кожна задача в Шотландській книзі має свій номер. На непарних сторінках формулювалися самі завдання, а напроти, на парній сторінці, залишали місце для майбутніх відповідей. Обговорення і розв’язання задач відбувалися прямо у кафе. Коли кав’ярня зачинялася, книгу передавали господареві, який дуже дбайливо до неї ставився. Напевно, розумів її історичну цінність.

Сьогоднішні математики, звертаючись до того часу, кажуть, що важко переоцінити роль «Шкоцкої книги» у розвитку функціонального аналізу та інших напрямів математики. Це був величезний крок до прогресу, розвитку математичної думки. Деякі задачі були розв’язані відразу, деякі згодом, а деякі залишилися нерозв’язані… Вчені-математики не лише ставили завдання перед своїми колегами, але й робили записи про обіцяний приз за розв’язок. Як винагороду за розв’язання дуже складного завдання з гумором пропонували, наприклад, п’ять маленьких кухлів пива, вино, бренді, вечерю в ресторані фешенебельного готелю «Жорж», фондю в Женеві, обід в ресторані «Дороті» у Кембриджі, пляшку віскі «міри більше, ніж нуль», а за найскладніше, запропоноване Станіславом Мазуром, автор пообіцяв живого гусака... Цю проблему (під номером 153 від 6 листопада 1936 р.) вирішив лише 1972 року шведський математик Пер Енфло, він же і отримав у Варшаві обіцяну винагороду від самого С. Мазура. Призового гусака йому приготувала дружина польського математика Жиляско.

Зовсім недавно декілька задач із «Шкоцкої книги» розв’язав молодий львівський учений Андрій Загороднюк. Але п’ять обіцяних «маленьких кухлів пива» він не отримав.

Загалом у книзі записано 193 математичні задачі, серед яких є як фундаментальні проблеми функціонального аналізу, так і просто цікаві головоломки.



„Oczekiwana" l. zapałek: 7

„Średnia" l. zapałek: 9

„Prawdop., że x ≤ 9 → 0·68

Prawdop., że x ≤ 18 → 0·95

Prawdop., że x ≤ 27 → 0·997

„Prawdopodobna" l. zapałek 6

„Prawdopodobieństwo, że x ≤ 6 jest 0·5

(2 pudełka po 50 zapałek).

[Ścisłe rozwiązanie zadania wymaga dłuższych rachunków].

31/

Останній запис в Шотландській книзі було внесено Штейнгаузом 31 травня 1941 року. Цей пункт містить набір досить загадкових чисельних результатів, пов'язаних із задачею про розподіл кількості сірників у коробці. Ця задача відома, як задача Банаха про дві коробки сірників. С. Банах був завзятим курцем. Щоб не шукати сірника, він у лівій і правій кишенях тримав по коробці. Кожен раз, коли йому треба було запалити люльку, він навмання вибирав одну з коробок і діставав з неї сірник. Виникло завдання: яка вірогідність того, що коли в одній коробці закінчаться сірники, в другій їх залишиться k штук, в загальнішому випадку — не менше k штук. Розв’язання завдання не таке просте, як здається на перший погляд. Не випадково записи Штейнгауза досить важко було розібрати. Цікаво, що це одне з перших завдань, яке призвело до виникнення нової математичної дисципліни — теорії масового обслуговування. Подібні завдання зустрічаються в теорії ігор, у фізиці, у теорії алгоритмів, математичній лінгвістиці, електроенергетиці.

Влітку 1939 р. Станіслав Мазур і Станіслав Улам вирішили, що на випадок війни книгу необхідно закопати, сховавши в невеличкій скриньці. Зараз невідомо, чи сталося все саме так. Тривалий час книга вважалася втраченою, але син Банаха її знайшов і 1957 р. копію переслав С. Уламу. Улам розшифрував записи, зробив переклад англійською мовою і представив на Математичному конгресі в 1958 р., де вона стала сенсацією.

У 1980-х рр. «Шкоцка книга» була передана до Інституту математики Польської академії наук і зберігається в центрі Банаха. У 1981 р. з'явилася її друга, відредагована версія, в якій поряд зі сформульованими проблемами наведено також огляд літератури, присвяченої їх розв'язанням, а також розповіді про математичний Львів. І дотепер проблеми з «Шкоцкої книги» слугують мотивацією для наукових досліджень. Наприклад, одна з публікацій 2011 року авторства Т. Банаха та І. Гурана тісно пов'язана з проблемою 93 з книги**.**

Доля багатьох авторів «Шкоцкої книги» склалась трагічно. Юліуш Шаудер у 1943 році став жертвою нацистів, Антоній Ломніцкі і Влодзімєж Стожек разом з іншими професорами замордовані гітлерівцями на Вулецьких пагорбах 1941 р. Під час арешту німцями в серпні 1942 р. для відправлення в табір смерті Белжец прийняв отруту Герман Ауербах. Стефана Банаха фашисти використовували як джерело крові для вошей. Так готували протитифозну вакцину. Після звільнення Львова Банах став деканом математичного факультету, але в серпні 1945 р. помер.

Люди загинули, а «Шкоцка книга» як пам'ять про них залишилась.

Дослідники життя Стефана Банаха проводять таку аналогію: те, що зробило кафе «Монмартр» у Парижі для мистецтва, можна порівняти із внеском «Шкоцкої кав'ярні» у Львові для подальшого поступу математики.

Список літератури

1. Улам С. Приключения математика. — Ижевск: НИЦ «Регулярния и хаотическая динамика», 2001. — 272 с.

2. За матеріалами http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/

3. За матеріалами http://www.ega-math.narod.ru/Wiener/Banach.htm

4. «Пересидеть или перепить Стефана Банаха было почти невозможно». — «Газета по-українськи» №1393 за 29.03.2012. Рубрика history-newspaper.

ВКЛАД КЛОДА ШЕННОНА В РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ЗВ’ЯЗКУ

Н. В. Крошко
Національний технічний університет України «КПІ», Київ,Україна
kroshko06@bigmir.net

Клод Елвуд Шеннон (англ. Claude Elwood Shannon) (30 квітня, 1916 — 24 лютого, 2001) — американський інженер-електрик і математик, «батько теорії інформації».

Шеннон народився в американському штаті Мічіган, де й закінчив школу в 1932 році. В цьому ж році він вступив до Мічиганського Університету і в 1936 році отримав дипломи бакалавра з електротехніки та математики.

Дисертацію «Символічний аналіз реле і каналів, що перемикаються» Шеннон опублікована в 1938 році і за неї в 1940 році отримав Приз Альфреда Нобеля. У цій роботі Шеннон довів, що Булеву алгебру і двійкову арифметику можна використовувати, щоб спростити розташування електромеханічних реле, які тоді використовувалися у телефонах. Шеннон також довів, що можна використовувати розміщення реле для вирішення проблеми Булевої алгебри. Використання цієї властивості електричних вимикачів є базовою логічною концепцією, яка лежить в основі всіх електронних цифрових комп’ютерів.

У 1949 році була розсекречена і опублікована стаття Шеннона «Теорія зв’язку в таємних системах», яка вперше представила криптографію як науку. Шеннон ввів основні поняття, без яких теорія кодування і передачі інформації неможлива в наші дні. Головною заслугою Шеннона вважається дослідження поняття абсолютної секретності систем. Він довів існування шифрів, які неможливо розкодувати, і сформулював умови, необхідні для цього.

У цій роботі ми будемо мати справу з загальною математичною структурою і властивостями секретних систем. В теорії зв’язку вважається, що мова може розглядатися як деякий імовірнісний процес, який створює дискретну послідовність символів в відповідності з деякою системою ймовірностей. Для кожної мови можна ввести поняття надлишковості, яка вимірюється в певному сенсі тим, наскільки може бути зменшена довжина деякого тексту без втрати будь-якої частини інформації. Надлишковість грає центральну роль в вивченні секретних систем.

Секретна система визначається як деяка множина відображень одного простору в інший. Кожне конкретне відображення з цієї множини відповідає способу шифрування за допомогою конкретного ключа. Вважаючи, що відображення взаємно однозначні, можна стверджувати, що, якщо відомий ключ, то в результаті дешифровки можлива тільки єдина відповідь. Припускається далі, що кожному ключу відповідає деяка апріорна ймовірність — ймовірність вибрати цей ключ. Аналогічно кожному можливому повідомленню відповідає апріорна ймовірність, що визначається ймовірнісним процесом, який це повідомлення задає.

При розгляді секретних систем, які можна представити як сукупність відображень однієї множини елементів в іншу виникають дві операції комбінування.

Перша операція називається операцією «множення» і відповідає зашифровуванню повідомлення за допомогою системи R з наступним зашифровуванням отриманої криптограми за допомогою системи S, причому ключі R та S вибираються незалежно. Результатом є секретна система, відображення якої складаються з усіх добутків R на S, а ймовірності остаточних відображень є добутками ймовірностей двох початкових відображень.

Друга операція комбінування є «зваженим додаванням»:

$$T = pR + qS,\ p + q = 1.$$

Секретні системи з цими двома операціями комбінування утворюють гарно відому математикам лінійну асоціативну алгебру з одиницею.

У другій частині статті розглядається проблема «теоретичної секретності», тобто наскільки легко деяку систему можна розшифрувати, якщо для аналізу перехопленої криптограми противник має необмежену кількість часу і співробітників. Для того, щоб система відповідала вимогам «абсолютної секретності», необхідно, щоб апостеріорні ймовірності повідомлень, отриманих після перехоплення, були б в точності рівні апріорним ймовірностям тих же повідомлень до перехоплення. Показано, що «абсолютна секретність» можлива, але вимагає у випадку скінченного числа повідомлень того ж самого числа можливих ключів. Якщо в криптограмі зі скінченним ключем N літер, то у противника існує певна множина повідомлень з певними ймовірностями, за допомогою яких могла б бути створена криптограма. Зі збільшенням N ця множина звужується доти, доки врешті решт не отримаємо єдиного розв’язку криптограми, тобто повідомлення з ймовірністю, близькою до одиниці, а всі інші з ймовірностями, практично рівними нулю.

У роботі введене поняття $H(N)$ненадійності, якою вимірюється, наскільки близька середня криптограма з N літер до єдиного розв’язку. Визначення функції $H(N)$ дає можливість наближено обчислити кількість матеріалу, який необхідно перехопити, щоб отримати розв’язок секретної системи. Для звичайних мов ця «відстань єдиності» приблизно рівна $H(K)\big/_{D}$, де $H(K)$ — число, що вимірює «об’єм» простору ключів, а D - надлишковість мови. Якщо всі ключі апріорі рівноймовірні, то $H(K)$ дорівнює логарифму кількості можливих ключів. Для простої підстановки з випадковим ключем $H(K)$ дорівнює $\log_{10} 26!$ або приблизно 20, а D (в десяткових одиницях на літеру) для англійської мови рівне приблизно 0,7. Отже, єдиність розв’язку досягається приблизно при 30 літерах.

У третій частині статті розглядаються проблеми «практичної секретності». Запропоновані методи побудови систем, для розв’язку яких потрібні значні затрати часу і сил.

Список літератури

1. book.ru/theory/chapter1/shannon.html
2. otkrovenie1.narod.ru/kn/vnach/v09.htm
3. victoria.lviv.ua/html/imena/shanon.htm
4. Клод Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИЛ, 1963. — С. 333–369

БУЛДЫГИН ВАЛЕРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ — УЧИТЕЛЬ С БОЛЬШОЙ БУКВЫ

Т. В. Маловичко
Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина
tatianamtv@rambler.ru

Булдыгин Валерий Владимирович (5 ноября 1946 г. — 17 апреля 2012 г.) — украинский математик, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и теории вероятностей Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт». Обладая математическим талантом и прекрасной работоспособностью, он не только оставил свой след в науке, но и показал себя прекрасным руководителем и Учителем с большой буквы.

В 1965 г. Валерий Владимирович с отличием окончил Киевский техникум радиоэлектроники. И хотя техникум имел отдалённое отношение к математическому образованию, Валерий Владимирович с теплотой вспоминал его и говорил, что полученное техническое мышление ему во многом пригодилось. Далее он обучался на механико-математическом факультете Киевского государственного университета имени Шевченко сначала на вечернем отделении, а потом на стационаре. Окончил университет он в 1970 г. с отличием. Далее с 1970 по 1972 гг. была аспирантура при кафедре теории вероятностей и математической статистики университета, которая завершилась защитой в 1973 году диссертации кандидата физико-математических наук «О случайных рядах в банаховых пространствах». Через девять лет Валерий Владимирович защитил и докторскую диссертацию «Сходимость случайных элементов в бесконечномерных топологических пространствах и представления случайных процессов и полей». Пройдя должности ассистента кафедры теоретической кибернетики Киевского государственного университета им. Шевченко (1972–1974), старшего и ведущего сотрудника Института математики НАН Украины (1974–1986), в 1986 году Валерий Владимирович неожиданно для себя самого возглавил кафедру высшей математики №1 Киевского политехнического института (ныне кафедра математического анализа и теории вероятностей НТУУ «Киевский политехнический институт»). На этой должности он и оставался до своей безвременной смерти.

Валерий Владимирович Булдыгин был не только выдающимся учёным и руководителем, но и талантливым преподавателем. Его лекции отличались не только стройностью изложения материала и строгостью доказательств, но и живостью изложения. Он никогда не ограничивался голым изложением математических фактов, но всегда приводил примеры, пытался показать студентам как место отдельных теорем в цельной теории, так и связь между теорией и практикой. Так в курсе теории случайных процессов он приводил в качестве примера изготовление нити, а в курсе теории меры вместо сухого изложения аксиом колец и алгебр объяснял, как строятся фигуры из клеток. Когда это было к месту, он много рассказывал о великих математиках, приводил действительно интересные и забавные факты из их биографий.

Его имя было знаком качества. Когда в разговоре выяснялось, что математический анализ рассказчику читал Булдыгин, слушатели уважительно и сочувственно кивали. Уважительно, ибо имя было гарантией достойных знаний. А сочувственно, потому что Валерий Владимирович был весьма строг. Его не только глубоко уважали, но и боялись. Он не боялся ни поставить нерадивому студенту двойку на экзамене, ни отчитать в лицо. Был суров, но справедлив. Пятёрками, полученными у него, гордились.

Принимая коллоквиум у студентов-математиков, Валерий Владимирович не жалел времени на подробную беседу. Собеседование с лучшими студентами могло длиться по часу. За это время он успевал не только расспросить о тонкостях доказательств, но и поспрашивать различные примеры, обсудить всяческие нюансы. Студент уходил выжатый, как лимон, но исполненный гордости и внутреннего удовлетворения. Чем хуже была подготовка студента, тем меньше времени занимала беседа.

Большое внимание Валерий Владимирович уделял проведению математических олимпиад среди студентов. Он и подбирал задачи для них, и занимался общей организацией, следил за работой математического кружка. В 1974–1986 гг. он принимал активное участие в создании и работе «Киевского университета юных математиков» при АН УССР. На протяжении 15 лет, начиная с 1989 г., возглавлял жюри олимпиады по математике среди технических вузов Украины. Также он возглавлял и жюри математических олимпиад для студентов НТУУ «КПИ».

Валерий Владимирович Булдыгин не только готовил кадры, но и заботился об омоложении кафедры, которой заведовал. Всячески стремился, чтобы лучшие выпускники физико-математического факультета оставались преподавать в своём вузе. Подающим надежды студентам он предлагал заниматься научной работой, в том числе и писать под его руководством дипломы и диссертации. Всячески помогал в написании научных работ, проверял результаты. Практически постоянно на кафедре можно было застать его учеников, которые ждали его, стремились показать свои результаты, спросить совета. Под руководством Валерия Владимировича защищено 13 кандидатских и 3 докторских диссертации. В частности, он был научным консультантом у своего преемника на должности заведующего кафедрой математического анализа и теории вероятностей НТУУ «КПИ» Клесова Олега Ивановича.

Помимо помощи в научной деятельности Валерий Владимирович стремился оказать помощь своим ученикам и подчинённым и в прочих сферах. К примеру, помогал выпускникам с распределением, предлагая место инженера на кафедре до зачисления в аспирантуру. Если студент хотел и мог заниматься наукой, то перед ним расстилалась прямая дорога, которая проходила через аспирантуру и приводила к работе на кафедре. Причём Валерий Владимирович не забывал ни прийти на защиту диссертации, ни вручить букет цветов при получении диплома кандидата наук.

Он был прекрасным психологом и знал, когда нужно поругать подчинённого, а когда поддержать и помочь. Да, его побаивались, но и любили. На его похороны пришли не только коллеги, но и студенты и выпускники. И когда на кафедре после его смерти говорили, что кафедра без Валерия Владимировича осиротела, это были не пустые слова.

ФІЗИКА У ЛЬВІВСЬКОМУ УНІВЕРСИТЕТІ (XVII–XX ст.)

М. М. Панченко
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
mariapanchenko50@gmail.com

Львівський національний університет ім. І. Франка — один з найстарших університетів у Європі. Своє 350-річчя університет відзначив у 2011р. Заснована орденом єзуїтів колегія отримала від короля Яна II Казимира 20 січня 1661 р. диплом, який надавав «гідність академії і титул університету». Університет складався з двох факультетів — філософського та теологічного, навчання велося за програмою єзуїтських шкіл латинською мовою. Титул університету надавав право викладати всі університетські дисципліни, присуджувати вчені ступені бакалавра, ліценціата, магістра та доктора.. На філософському факультеті викладали філософію Аристотеля, що поєднувала в собі логіку, фізику та метафізику. В курсі фізики вивчали елементи математики, астрономії, біології, метеорології, в розділі метафізика — психологію та етику. Університет мав найбільшу в місті друкарню та свою бібліотеку [1].

У 1744 р. у Львівському університеті створюється кафедра математики, яку очолює математик Фаустин Гродзіцький, автор підручника з математики та архітектури. На кафедрі викладає відомий математик Т. Секержинський, за участю якого створюється фізико-математичний кабінет. В 1761 р. відкрито астрономічну обсерваторію, яка працює дотепер.

Після приєднання в 1772 р. Галичини до Австро-угорської імперії розпускається єзуїтський орден і закривається університет. Декілька разів університет відкривали, потім закривали. Уряд імператора Йосифа I розумів значення освіти, зокрема вищої. Роботу університету було поновлено. Рішенням уряду від 17 червня 1784 р. визначено бюджет університету та штат викладачів. Університет складався з чотирьох факультетів: філософського, юридичного, медичного та теологічного. Керував університетом сенат, до якого входили ректор, декани та найстарші за віком та стажем викладачі. Сенат вирішував питання загального керівництва, всі інші справи вирішували декани. Університет мав певну автономію.

У кінці XVIII ст. та на початку XIX ст.. широко запроваджується вивчення природничих наук, зокрема фізики та математики. В університеті працюють професори І. Ю. Мартинович, Ф. Гюсман, Антон Гільдебрант, Антон Глоїснер, Август Кунчик, Олександр Завадський. Професор Ігнацій Юзеф Мартинович (1755–1795) написав двотомний підручник з експериментальної фізики. Хорват за походженням 20.02.1795 був страчений у м. Буда за якобинство. Відомий в ті часи вчений професор Франц Гюсман (1741–1806) видав у Відні двотомний опис Землі з точки зору фізики. Уродженець Закарпаття Іван Заманчик виготовив велику кількість обладнання для фізичного кабінету. Професор Август Кунцек (1795–1865) викладав фізику та математику, астрономію та класичну філологію, написав сім наукових праць та підручників, серед яких «Вчення про світло», «Популярна астрономія», «Популярний виклад з мереорології». [3]

Ось як описує Я. Головацький склад студентів та викладачів в університеті: «Львівське всеучилище (Universitas Franciscae) воздвижене імператором Францом 1 1818 года з трома факултетами (приділи. Межи 25 ректорами сего училища (rector magnificus) було 8 русинів. При богословським факултеті єсть 7 професорів, 1 ад'юнкт, межи них 3 русини. Докторів богословія 21, межи ними 12 русинів. При юридическім факултеті єсть 8 професорів 1 ад'юнкт. Межи ними було колись 3–4 русини. Докторів права єсть 95. межи них 14 русинів. Докторів медицини в Львові єсть 57. межи ними русинів 6». [2]

Підчас повстання 1848 р. згорів університетський будинок, була знищена наукова бібліотека, що на той час мала 51 тис. томів, згоріли цінні рукописи. В другій половині XIX ст. почалися відбудова та розширення університету. Будувалися нові корпуси, у 1897 р. було завершено будівництво корпусу фізичного інституту. В 1905 р. збудовано університетську бібліотеку.

В галузі фізики в ті часи працювали професори Віктор П'єрра, Войцех Урбанський, Алоїзій Гандль, Томаш Станецький та інші. Зусиллями В. П'єрра було впорядковано лабораторну базу, виготовлено нове обладнання для фізичних лабораторій. Професор В. Урбанський видав двотомний підручник «Наукова фізика». Професор експериментальної фізики Т. Станецький (1826–1891) опублікував підручники з математики та фізики для гімназій.

З 1872 р. до 1899 р. у Львівському університеті працював професор Оскар Фабіан (Oskar Fabian (1846–1899)). Вищу освіту він отримав у Віденському університеті. Двічі був деканом філософського факультету, в 1884/85 та 1896/97 рр. Коло його наукових інтересів було дуже широке, він працював в області математичної фізики, механіки, метеорології, вивчав хвильову природу світла, гравітацію, а також фізику радіоактивних речовин. Опублікував 36 наукових робіт, зокрема: «Про збіжність та розбіжність нескінченних рядів», «Рефракція світла і його довжина хвилі», підручник «Курс аналітичної механіки» та ряд підручників з математики для гімназій. О. Фабіан був прекрасним популяризатором науки, його перу належить, зокрема, робота «Про життя рослин» [4].

Життя та наукова діяльність видатного вченого-фізика Мар'яна Смолуховського (Marian Smoluchowski (1872–1917)) тісно пов'язані з Львівським університетом. З 1900 р. по 1913 р. він є професором теоретичної фізики, читає лекції з фізики та математики, займається науковою роботою. У 1911 р. М. Смолуховський стає ректором університету. Саме у Львові ним були виконані роботи по вивченню броунівського руху, за які він був нагороджений премією Хайтінгера.

У теоретичних роботах М. Смолуховського головним є встановлення законів флуктуації. В 1908 р. він показав, що помутніння рідин і сумішей рідин в околі критичної температури кількісно залежить від стисливості цих рідин і зумовлюється малими змінами концентрації молекул. [4, 5] Також заслугою М. Смолуховського є доведення того, що світло розсіюється не на молекулах повітря, а на флуктуаціях їх густини.

З 1913 р. по 1918 р. у Львівському університеті працював відомий вчений професор Костянтин Закшевський (Konstanty Zakrzewski (1876–1948)). Народився в Варшаві, навчався в державній гімназії, 1893 р. був заарештований за участь в таємній молодіжній організації. Отримав «вовчий білет», щоб продовжити навчання нелегально перейшов кордон і опинився у Львові, де екстерном закінчив гімназію. В цьому ж році повернувся до Польщі і продовжив навчання в Краківському університеті. В 1900 р. закінчує навчання і виїжджає на стажування спочатку в Гетинген, а потім в Лейден, де в 1902–1904 рр. під керівництвом Камерлінг-Оннеса досліджує умови існування рідкої та газоподібної фази сумішей при низьких температурах. Повертається до Ягеллонського університету, там отримує докторську степінь, а в 1913 році переїжджає до Львова і займає посаду професора на кафедрі теоретичної фізики. Читає лекції з теоретичної фізики, термодинаміки, електронної теорії. Наукові роботи стосуються електронної теорії металів, теплопровідності рідин. Повертається до Кракова у 1918р. [6]

У 1918–1927 рр. викладав теоретичну та експериментальну фізику у Львівському університеті професор Станіслав Лорія (Stanislaw Loria (1883–1958)). У 1905 р. публікує роботу «Дослідження периферійного зору», в 1909 р. — «Дослідження дисперсії в газах», у 1914 р. — «Заломлення світла в газах як проблема фізики і хімії», у 1918 р. — «Аномальна дисперсія випромінення водню». С. Лорія вивчав радіоактивність радію і торію в Інституті Е. Резерфорда. Він є автором відомих робіт з теорії відносності та гравітації. З 1928 по 1941 рік С. Лорія був директором фізичного інституту, членом математично-природничого відділення Наукового товариства у Львові. [7] Після війни виїхав до Польщі, де організував Вроцлавський університет, був його проректором в 1945/46рр., з 1951 — професор в Познанському університеті ім. Адама Міцкевича.

Список літератури

1. Є.К.Лазаренко. 300 років Львівському університету. — Львів, 1961.
2. Газ. Москвитянин. — 1841, № 11. — С. 213–232, 457–467.
3. Rovenchak A. Oskar Fabian the first Head of the Department of Theoretical Physics in the Lviv Unsversity // Acta Physica Polonica A. — 2009. — **116.** — № 2.
4. Smoluchowski M. V. Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen // Ann. d. Phys. — 1906 — **Bd. 21.** — S. 756–780.
5. М. Смолуховский (биография) // Броуновское движение / Под. ред. Б. И. Давыдова. — Л.:ОНТИ, 1936. — С. 117–132.
6. Kwartalnik Historii Nauki i Techniki. —1987. — Nr. 2. — 313–341
7. Infeld L. Prof. Stanislaw Loria // Nature. — 1958. — **182**. — Issue 4647. — P. 1411–1412.

ПАФНУТІЙ ЛЬВОВИЧ ЧЕБИШОВ

В. О. Точинський, Л. В. Барановська
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
vitaliybornukraine@gmail.com

Немало математичних відкриттів було зроблено в області абстрактної думки, коли який-небудь мислитель здійснював вплив на своїх колег або учнів. У тому, що математику описують як поступовий розвиток ідей, то безперервний, то стрибкоподібний, є велика доля істини. Ми повинні завжди пам’ятати, що математичні поняття — не довільні творіння розуму, а відображення реального, об’єктивного світу, нехай часто в дещо абстрактному вигляді [1].

Пафнутій Львович Чебишов — першокласний математик, який стояв на чолі російської математики середини і другої половини дев'ятнадцятого сторіччя, справив велике враження загальною спрямованістю своєї творчості. Народився П. Л. Чебишов у дворянській сім’ї в селі Окатово Калузької губернії. Після блискучого закінчення Московського університету та захисту там магістерської дисертації з теорії ймовірностей, він виїжджає до Петербурга, з яким пов’язана вся подальша доля вченого [2]. Пафнутій стверджував: «Незважаючи на той високий щабель розвитку, до якого доведені математичні науки працями великих геометрів трьох останніх століть, практика однозначно виявляє їх неповноту у багатьох відносинах, вона пропонує питання, які є суттєво новими для науки, і, таким чином, викликає на пошук абсолютно нових методів » [1].

Дослідження Чебишова відносяться до теорії наближення функцій многочленами, інтегрального числення, теорії чисел, теорії ймовірностей, теорії механізмів і багатьох інших областей математики та суміжних областей знання. У кожній із них Чебишов зумів створити ряд основних, загальних методів і висунув ідеї, що надали поштовх провідним напрямкам у подальшому розвитку цих областей [3].

Чебишов у наукових дослідженнях найбільше цікавився саме тими питаннями, які мали безпосереднє застосування у практичній діяльності і в той же час могли застосовуватись для вирішення теоретичних проблем. У нього з юності проявився потяг до винаходів та конструювання різного роду механізмів. Цей потяг ще більше посилився і отримав тверду теоретичну базу з 1851 р., коли Чебишов почав викладати практичну механіку в Царськосільському ліцеї [4]. Пафнутій Львович витрачав на свої потреби дуже мало і накопичив до кінця життя доволі великий статок. Єдине, на що він не жалів грошей, - були винайдені ним моделі і механізми; на це він витрачав великі кошти (сотні і тисячі рублів) [2]. Робота над випрямляючим механізмом була для Чебишова відправною точкою в його діяльності щодо створення теорії механізмів і машин. Використовуючи свої механізми, П. Л. Чебишов побудував знамениту переступаючу машину (стопоходячу машину), яка імітує своїм рухом рух тварини; він побудував так званий гребний механізм, який імітує рух весел човна, самокатне крісло, дав оригінальну модель сортувальній машині та іншим механізмам. До цих пір ми з подивом спостерігаємо за рухом цих механізмів і дивуємося багатій технічної інтуїції П. Л. Чебишова . П. Л. Чебишову належить створення понад 40 різних механізмів і близько 80 їх модифікацій. В історії розвитку науки про машини не можна вказати жодного вченого, у творчості якого була б така кількість оригінальних механізмів [5].

До теорії ймовірностей Чебишов звертався кілька разів — на початку, в середині і наприкінці свого наукового шляху («Досвід елементарного аналізу теорії ймовірностей», 1845; «Елементарний доказ одного загального положення теорії ймовірностей », 1846; «Про середні величини», 1867; «Про дві теореми щодо вірогідності», 1887). В ідейному відношенні йому належить заслуга систематичного введення в розгляд випадкових величин і створення нового прийому доказу граничних теорем теорії ймовірностей - так званого методу моментів. Наприклад, за допомогою знаменитої нерівності Чебишова можна оцінити ймовірність потрапляння випадкової величини в деякий проміжок на основі тільки перших двох моментів, без знання точного закону розподілу [6]. І в наші дні вчені продовжують доводити, що математика далеко не нудна, вона красива і захоплююча.

У теорії ймовірностей є своєрідне джерело труднощів, тиких, як і при вивченні мови, близької до рідної. Кожен початківець вже має інтуїтивні уявлення про те, що таке ймовірність, інформація, незалежність. Вивчаючи теорію ймовірностей, люди стають більш поблажливими і терпимими до оточуючих і, отже, з більшою легкістю вписуються в життя суспільства [7].

Колись великий учений Пафнутій Львович Чебишов давав відкриту лекцію: «Математичні основи раціонального розкрою одягу». Ця лекція була призначена виключно для математиків. Чебишов був неприємно здивований, коли на лекції у перших рядах зібрались заінтриговані паризькі модельєри і Чебишов почав лекцію так: «Давайте для зручності уявімо собі , що людина має сферичну форму, тобто, форму кулі ». Після цієї фрази всі модистки, кравці та дами, котрі стежать за модою обурено встали і вийшли геть. Перші ряди звільнилися, і в залі залишилися тільки аспіранти-математики, які анітрохи не здивувалися від такого вступу. Таким чином Пафнутій знайшов геніальне рішення — як позбавити себе людей, які б анітрохи не зрозуміли у його формулах.

Суть цього анекдоту зводиться до того, що люди, які володіють конкретним мисленням насилу розуміють «хитромудрі метафори» людей з мисленням абстрактним. Метафори конкретно мислячих людей їх навіть ображають.

Список літератури

1. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. Издание четвертое. Перевод с немецкого и дополнения И. Б. Погребысского. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 7-8, 256 с.

2. Шмигевський М. В. Видатні математики // Бібліотека журналу «Математика в школах України». — Харків: Видавнича група «Основа», 2004. — 89, 90 с.

3. Математический энциклопедический словарь / Главный редактор Ю. В. Прохоров. Редакционная коллегия С. И. Адян, Н. С. Бахвалов, В. И. Битюцков, А. П. Ершов, Л. Д. Кудрявцев, А. Л. Онищик, А. П. Юшкевич. — М.: Советская энциклопедия, 1988. — 761 с.

4. Болгарский Б. В. Очерки по истории математики. Издание второе, исправленное и дополненное. — Минск: Выш. школа, 1979. — 322 с.

5. Всеукраинская газета «Русский Мир. Украина», 26.05.2010 [Електронний ресурс] http://rusmir.in.ua/nay/553-lyudi-russkoj-nauki-pafnutij-lvovich-chebyshev.html

6. Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. Механико-математический факультет. «Современные проблемы математики и механики. Том VII. Математика. Механика». Вып. 1. К 190-летию П. Л. Чебышева. — 7 с.

7. Манин Ю. И. Математика как метафора. — М.: Изд-во МЦНМО, 2008. — 369 с.

ОҐЮСТЕН-ЛУЇ КОШІ

А. М. Чесановський, Л. В. Барановська
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
chesanovskijqwer@mail.ru

З точки зору повсякденного здорового глузду наука сповнена парадоксів і протиріч. Цю її особливість влучно підмітив К. Маркс: «На відміну від інших архітекторів,— зауважив він, — наука не тільки малює повітряні замки, але й зводить окремі житлові поверхи будівлі, перш ніж закласти його фундамент».

Так воно і було. Великі математики минулого — Лейбніц, Ейлер, д'Аламбер — сміливо пускалися у вільний політ думки у будь-якій області теорії і практики, не надто піклуючись про суворе обґрунтування своїх досліджень [1].

Але у XIX столітті на зміну вільному польоту думки прийшла пора підвищеної строгості, доказовості, чіткого обґрунтування застосовуваних методів, перегляду підстав і зміцнення фундаменту всієї математики [2].

Серед піонерів боротьби за строгість і чистоту математики, поряд з іменами Гауса, Веєрштраса, Чебишева і його учнів Ляпунова і Маркова, гаслом яких була «суворість і строгість», ми з вдячністю називаємо ім'я видатного французького вченого Оґюстена Луї Коші, великого трудівника, за продуктивністю порівнюваного хіба що з Ейлером або з Бальзаком, який написав 90 томів «Людської комедії» [3].

Оґюстен Коші народився 21 серпня 1789р. в Парижі в сім'ї відомого чиновника. Його батько був ревний католик і рояліст. На початку з Коші займався його батько, прекрасний лінгвіст, а в 1805р. Огюстен вступив до Політехнічної школи, потім в 1807 р. — до Школи мостів і доріг, яку закінчив у 1810 р. Лагранж зазначив видатні математичні здібності юнака і передбачив йому блискуче майбутнє [4].

Після закінчення інженерної школи Коші отримав відповідальне доручення спорудити військовий порт у Шербурі. Тут в 1811 р. він написав свій перший мемуар про многогранники, де вирішив деякі питання, не піддаючись першокласним математикам [5]. Потім написав ще мемуари з теорії багатогранників, про симетричні функції, алгебраїчні рівняння, з теорії чисел. У 1816 р. Коші представив на конкурс Паризької академії наук знамените дослідження з теорії хвиль на поверхні важкої рідини і отримав премію. У цьому ж році він був призначений урядом членом Інституту Франції. Тоді ж почалася інтенсивна викладацька діяльність Коші: з 1816 р. він професор Політехнічної школи, в 1816 — 1830 р. — Сорбонни, в 1848 — 1857 р. — Колеж де Франс.

Роботи Коші відносяться до різних областей математики. Були періоди, коли Коші щотижня представляв у Паризькій АН нову працю. Усього ж він написав і опублікував понад 800 робіт з арифметики і теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теоретичної і небесної механіки, математичної фізики тощо [6]. Його «Курс аналізу» (1821), «Резюме лекцій числення нескінченно малих» (1823), «Лекції з додатків аналізу до геометрії» (1826–1828), засновані на систематичному використанні поняття границі, стали зразком для більшості наступних курсів. У них він дав означення поняття неперервності функції, чітко побудував теорії збіжних рядів, дав означення інтеграла як границі сум, довів існування інтегралів від неперервної функції [7]. Великою заслугою Коші є те, що він розвив основи теорії аналітичних функцій комплексної змінної закладені ще у 18 столітті Л. Ейлером і Ж. д'Аламбером. Особливо велике значення мають такі результати, отримані Коші: геометричне представлення комплексної змінної як точки, яка переміщається в площині тим чи іншим шляхом інтегрування (цю думку ще раніш висловили К. Ґаус і ін.); вираження аналітичної функції у вигляді інтеграла (інтеграл Коші), та розклад функції в степеневий ряд [8].

В області теорії диференціальних рівнянь Коші належать: постановка однієї з найважливіших загальних задач теорії диференціальних рівнянь (задача Коші), основні теореми існування розв'язку для випадку дійсних і комплексних змінних (для останніх він розвинув метод мажорант) і метод інтегрування рівнянь з частинними похідними 1-го порядку (метод Коші — метод характеристичних смуг).

В алгебрі він інакше довів основну теорему теорії симетричних багаточленів, розвив теорію визначників, знайшовши всі головні їхні властивості, зокрема теорему множення (причому Коші виходив з поняття знакозмінної функції). Коші належать терміни «модуль» комплексного числа, «сполучені» комплексні числа й інші [9].

Коші належать також дослідження з тригонометрії, механіки, теорії пружності, оптики, астрономії. Коші був членом Лондонського королівського Товариства і майже всіх академій наук. Повне зібрання творів Коші видане Паризькою АН [10].

Революція 1830 р. і вигнання Карла X різко змінили долю Коші, він відмовився присягнути уряду Луї Філіпа, втратив посаду і змушений був покинути Францію. Деякий час він провів у Швейцарії, потім отримав місце в Туринському університеті на кафедрі математичної фізики. Карл X, що оселився в Празі, запросив Коші в 1832 р. в якості вчителя і вихователя сина. Коші кілька років подорожував з ним по Європі. Так було до 1838 р. У Францію та в Інститут він повернувся в 1838 р. Революція 1848 р. скасувала присягу, і Коші отримав кафедру в Колеж де Франс, де і пропрацював до самої смерті. Помер Коші 22 травня 1857 р. [11].

Список літератури

1. Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1981.

2. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии.

3. Белхост Б. Огюстен Коши. — М.: Наука, 1997. — 174 с.

4. Том I. М.—Л.: ГОНТИ, 1937. — 432 с.

5. Том II. М.—Ижевск, 2003. — 239 с.

6. Веселовский И. Н. Очерки по истории теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1974. — 287 с.

7. Маркушевич А. И. Очерки по истории теории аналитических функций, М.-Л., 1951.

8. Молодший В. П. О. Коши и революция в математическом анализе первой четверти XIX века Историко-математические исследования — М.: Наука 1978. — № 23. — С. 32–55.

9. Бородин А.И., Бугай А. С. Биографический словарь деятелей в области математики. Киев, 1979.

10. Демьянов В. П. Огюстен Луи Коши — Человек и учёный.

11. Бобынин В. В., Огюстен Луи Коши. (Очерк его жизни и деятельности), «Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем». — 1887. — Т. 3. — № 1–3.

IV

СУЧАСНІ ОСВІТНІ ТЕХНОЛОГІЇ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

ПРО ОЦІНКУ ЕФЕКТИВНОСТІ ТЕСТІВ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова,
Л. Б. Федорова, А. Ф. Дудко
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
a.dyx@mail.ru

У доповіді проінформовано про оцінку ефективності тестів з вищої математики.

Колективом кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ «КПІ» приділяється велика увага створенню, проведенню та аналізу результатів електронного тестування. Для цього було створено пакет тестових контрольних робіт з усіх розділів курсу «Вища математика», які об’єднано в єдиний курс «Тестування з вищої математики» [1]. Базовими факультетами для проведення електронного тестування було обрано ІТС, ФАКС, ФЕЛ, РТФ. Тести розроблено із застосуванням відкритої освітньої (Open Source) системи управління навчанням Moodle.

Електронні тестові контрольні роботи створено з критеріально-орієнтованих тестових завдань таким чином, щоб електронні версії робіт з певного розділу вивченого курсу могли б замінити традиційні. Такий підхід дозволив порівняти узгодженість результатів засвоєння матеріалу під час виконання традиційної і тестової контрольних робіт однією групою студентів та уніфікувати результати оцінювання. Кожна тестова контрольна робота містить теоретичні та практичні завдання у вигляді тестів закритого та відкритого типів.

Аналіз якості тестів спрямовано у таких основних напрямках: експертна оцінка викладачами кафедри, перевірка валідності тестів у цілому, аналіз окремих тестових завдань, оцінка ефективності тесту. Про аналіз валідності та аналіз якості окремих тестових завдань інформувалось раніше[2]. Зупинимось на аналізі ефективності. Він побудований на підставі сучасної теорії параметризації тестових завдань, Item Response Theory (IRT). В основу теорії покладено ідею Г. Раша [3] впровадження так званих латентних параметрів:

— підготовленість іспитника θ_i, $i=\overline{1,N}$, де N — кількість іспитників;

— складність завдання тесту β_j, $j=\overline{1,K}$, де K — кількість завдань в тесті.

Імовірність правильної відповіді i-го іспитника на j-те завдання тесту визначається наступним чином:

$$P_{ij}=\frac{1}{1+\exp(-(\theta_i-\beta_j))},\ i=\overline{1,N}, j=\overline{1,K}.$$

Залежність імовірності від неперервного параметру θ при фіксованому значенні β_j називають характеристичною кривою j-го завдання тесту (рис. 1)

$$P_j(\theta)=\frac{1}{1+\exp(-(\theta-\beta_j))},\ j=\overline{1,K}.$$

Аналогічно визначають характеристичну криву i-го іспитника (рис. 2).

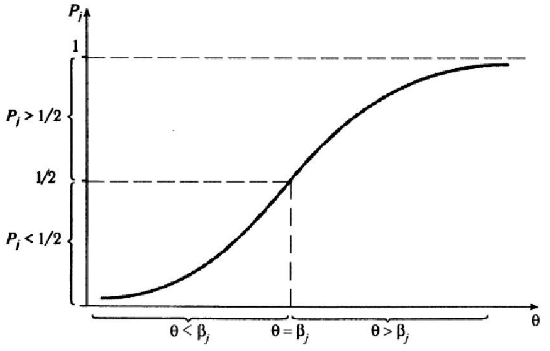


Рис. 1

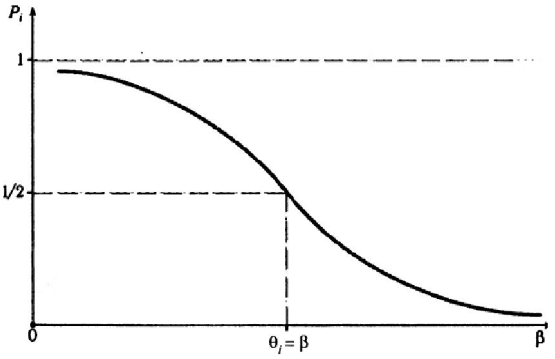


Рис. 2

Для аналізу завдань на відповідність та множинного вибору застосовуються відповідно політомічна модель Андерсена — Мастерса та модель Тіссена — Стейнберга [4], які було обрано базовими. В цих моделях основними латентними параметрами тестового завдання є його складність, диференціююча спроможність, складність підрівнів для політомічної моделі та параметри категорій відповідей для моделі з множинним вибором.

Для всіх цих моделей сформовано нелінійні системи рівнянь для визначення латентних параметрів за результатами тестування, знайдено ітераційні формули розв’язків та досліджено збіжність ітераційного процесу.

На підставі оцінювання латентних параметрів будуються ансамблі характеристичних кривих, які є потужним інформативним графічним засобом аналізу як всього тесту у цілому, так і ролі окремих тестових завдань у тесті.

Для оцінки ефективності окремих тестових завдань і тесту в цілому в рамках IRT вводиться інформаційна функція. Вона дозволяє оцінити ефективність j-го завдання тесту для оцінки кожного значення θ.

Процес підвищення ефективності тесту пов'язаний з підбором найбільш вдалих завдань, що забезпечують мінімальне відхилення початкової оцінки рівня підготовленості іспитника від істинного значення оцінки. Мірою відхилення виступає відносна величина, яку називають кількістю інформації.

В роботі [5] кількість інформації, забезпечена j-м завданням тесту точці θ, означується як величина, обернено пропорційна стандартній помилці вимірювання даного значення θ за допомогою j-го завдання.

Інформаційна функція кожному значенню θ ставить у відповідність кількість інформації, отриману при оцінюванні латентного параметра за допомогою завдання j. Вона є характеристикою j-го завдання в кожній точці осі латентної змінної θ. Чим більша кількість інформації, тим краще працює завдання на даному інтервалі значень параметра θ.

Для дихотомічних завдань інформаційну функцію j-го завдання в [2] визначають наступним чином:

$$I_j(\theta) = \frac{[P_j'(\theta)]^2}{P_j(\theta)Q_j(\theta)}, j = \overline{1,K}.$$

Для однопараметричної моделі Раша $P_j' = P_jQ_j, j = \overline{1,K}$ тому

$$I_j(\theta) = P_j(\theta)Q_j(\theta), j = \overline{1,K}.$$

де $Q_j = 1 - P_j, j = \overline{1,K}$ є ймовірністю неправильної відповіді студентів на j-те завдання тесту.

Для двопараметричної моделі Бірнбаума

$$I_j(\theta) = \alpha_j{}^2 P_j(\theta)Q_j(\theta), j = \overline{1,K},$$

де $Q_j = 1 - P_j, j = \overline{1,K}$; α_j — диференціююча спроможність j-го завдання тесту.

Для політомічних завдань інформаційну функцію j-го завдання знаходять за формулою:

$$I_j(\theta) = \sum_{l=0}^{m_j} \frac{[P_{lj}'(\theta)]^2}{P_{lj}(\theta)}, j = \overline{1,K},$$

де $P_{lj}(\theta)$ — ймовірність того, що особа з рівнем підготовленості θ у j-му завданні досягне l рівень. Вигляд імовірності залежить від обраної моделі.

Інформаційна функція тесту в цілому обчислюється за формулою

$$I(\theta) = \sum_{j=1}^{K} I_j(\theta).$$

Інформаційна функція вдало складеного тесту повинна мати дзвоноподібну форму (рис. 3). Чим більша кількість інформації на даному інтервалі значень параметра θ, тим краще працює тест на цьому інтервалі.

Графік інформаційної функції, що має пологий, не чітко виражений екстремум, говорить про зниження ефективності усього тесту. Якщо ж є декілька локальних екстремумів, то тест потребує вдосконалення. При цьому, якщо кількість завдань у тесті невелика, то потрібно додавати завдання, які мають проміжну складність, щоб ліквідувати «провали» між сусідніми екстремумами. Якщо кількість завдань у тесті досить велика, то його доречно розбити на два тести.

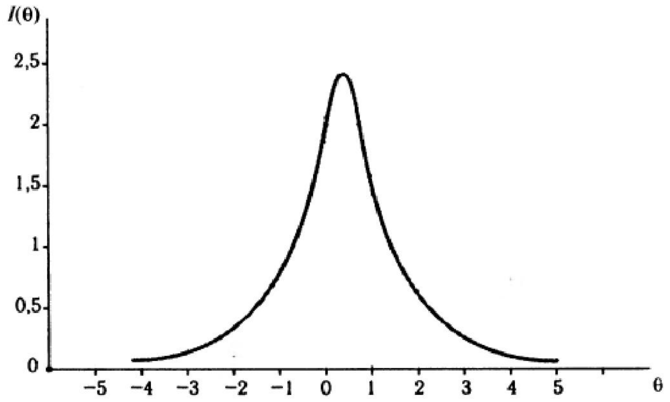


Рис. 3

Розрахунок інформаційної функції та проведення аналізу тестів на її підставі заплановано впровадити у загальний аналіз якості тестів з вищої математики. Він буде включений у спеціалізовану систему, в якій реалізовано методи класичного статистичного аналізу, сучасні IRT-методи аналізу якості тестових завдань.

Список літератури

1. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. Про розвиток та досвід експлуатації комплекту дистанційної освіти «Вища математика». Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт .— Вип. 31. — Донецьк: Вид-во ДонНТУ, 2009, — С. 49–56.

2. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б., Удовенко А. Ф. Аналіз якості тестових завдань для комплекту дистанційної освіти «Вища математика» — Теорія та методика електронного навчання: збірник наукових праць. Вип. 1.—Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2010, — С. 3–9.

3. Rasch G. Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests. — Chicago: Univ. of Chicago Press, 1980.

4. Linden W., Hambleton R. Handbook of Modern Item Response Theory.NY: Springer—Verlag, 1997. — 510 p.

5. Lord F. M., Novick A. Statistical Theories of Mental Test Scores. Mass: Addison-Wesley Publ. Co. Reading, 1968. — 415 p.

6. Челышкова М. Б. Разработка педагогических тестов на основе современных математических моделей. — М.: МИСИС, 1995. — 392 с.

АРХІТЕКТУРНІ ОСОБЛИВОСТІ ОСВІТНЬОГО ДИСТАНЦІЙНОГО АРМ ВИКЛАДАЧА МАТЕМАТИКИ КОГНІТОЛОГІЧНОГО ТИПУ

В. М. Антонов, Ю. В. Антонова-Рафі
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
vant46@mail.ru

Розглядається новий сучасний підхід до проектування інтелектуальних освітніх дистанційних АРМ викладача математики на основі когнітологічного підходу.

Автор робить спробу дослідити концептуальну схему взаємодії сучасного педагога-математика і навчаємого на основі нових освітніх технологій. Пропонується наступна узагальнена архітектура когнітологічного АРМ викладача — математика.

Центральним і найбільш цікавим у когнітологічного АРМ на думку автора є блок прогнозування, який побудований на наступних засадах:

концептуалізація; класифікація; формалізація; невизначеність; комп'ютерна когніологічність; якісність; технологічність.

Концептуалізація — це принциповий рівень проектування АРМ, який базується на аналізі основних джерел прогнозної інформації (нормативно-довідниковій; накопиченому досвіді: концептуальному, канонічному, науково-дослідницькому, спеціалізованому тощо; екстраполяції існуючих тенденцій і т. ін.); на дослідженні і використанні способів (методів) прогнозування (експертних, екстраполяційних, моделюючих) на етапах прогнозування (ретроспекції, диагнозі, проспекції).

Класифікація — це дослідницький рівень аналізу і вибору методів прогнозування за інформаційною підставою та за ступенем формалізації. За першим критерієм розглядаються фактографічні методи (методи аналогій: математичні, історичні; випереджальні методи; статистичні методи); експертні методи та комбіновані. За другим — це інтуїтивні методи (індивідуальні: аналітичні, сценарні, психо-інтелектуальні, інтерактивні; колективні: матричний, «Дельфі», «мозкова атака», «комісій») та власне формалізовані (прогнозної екстраполяції: найменших квадратів, експонентного згладжування, ковзних середніх, адитивного згладжування; моделювання: структурного, мережевого, матричного, імітаційного).

Формалізація — це рівень аналізу «нечіткої» інформації педагогом за допомогою таких математичних теорій як: багатозначна логіка, теорії ймовірностей, помилок, інтервальних середніх, суб'єктивних імовірностей, нечітких множин, нечітких мір та інтервалів для вирішення задач та проблем на основі експертної лінгвістичної вербальної «розмитої» інформації.

Невизначеність — це рівень ранжування вхідних даних за ступенями впевненості/невпевненості в їх істинності за допомогою відповідних коефіцієнтів. При цьому враховується, що нечітка інформація може бути за своєю природою поділена на таку: значення з максимальним ступенем упевненості, найбільш можливе значення, мінімальне значення за рівнем упевненості, максимальне значення за рівнем упевненості.

Комп'ютерна когнітологічність — визначається стосовно суб'єкта, що навчається (учня), і базується на принципах перетворення формалізованої інформації (даних) у комп'ютерні знання за допомогою таких модифікаторів: структуризація (внутрішня і зовнішня), інтерпретація, масштабування, наявність та активізація зв'язків між даними, завантаження («занурення») у семантичний простір Ч. Осгуда.

Якісність — це сукупність таких характеристик прогнозу, що у комплексі дозволяють зробити його ефективним, корисним, забезпечують одержання достовірного представлення (опису) суб'єкта, що навчається, на визначену перспективу і можливість ефективного використання прогнозних результатів для процесу керування на основі таких системних апріорних характеристик якості: інерційність, стійкість, зв'язність, складність тощо.

Технологічність — це рівень узгодження технологічності етапів прогнозування стосовно суб'єкта, що навчається в залежності від його індивідуальних особливостей. При цьому враховуються такі прогнози: оцінюючі, коректуючі, імовірносні, дослідницькі, а також прогнози нормативні, компонентні, ризиковані і т. ін.

Таким чином, інструментарій, що пропонується, може стати у нагоді викладачу-когнітологу для плідної роботи у сучасних умовах інтенсивного розвитку нових освітніх технологій на основі комп'ютерно-когнітологічних засад.

БАЗОВІ КРИТЕРІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ ОСОБИ

1. Визначені, формалізовані (кількісні).
1.1. Стать.
1.2. Вік.
1.3. Освіта.
1.4. Досвід роботи.
1.5. Сімейний (родинний) стан.
1.6. Знання мов: комп'ютерних, іноземних.
1.7. Авто — права.
1.8. Зовнішній вигляд, манера одягатися тощо.
1.9. Фізіономіка / Пара фізіономіка / Френологія.
- Форма і вираз обличчя (5 варіантів).
- Форма і вираз очей (85 варіантів), зіниць.
- Форма губ.
- Форма вух.
- Форма черепа.

1.10. Майновий стан («Майнологія»).
1.11. Стан родичів.
1.12. Форма і конструкція тіла: Астенік, Пікнік, Атлетик.
1.13. Манера рухатися («Рухологія», «Ходологія»).

1.14. Манера дихання («Диханнялогія»).

1.15. Манера стояння, сидіння, поз («Позологія», «Жестологія»).

1.16. Коефіцієнт інтелекту («Інтелектологія»).

1.17. Пантоміміка (комплексна манера) дихання,сидіння, жестів, міміка, пози, усмішка («Усмішкологія» — 97 відтінків усмішки), погляд. («Поглядологія» — діловий, соціальний, сексуальний, інтимний).

1.18. «Очіологія» — форма, вираз очей.

1.19. «Голосологія» — тембр, інтонації, висота голосу.

1.20. «Розмовологія», «Мовологія» — манера розмовляти.

1.21. Сексуальна орієнтація («Сексологія»): чоловіки, жінки, гермафродіти, бісексуали.

1.22. Почерк (графологія).

1.23. Колір («Кольорологія» — що подобається / не подобається).

1.24. Наркотики офіційно дозволені державою: вживання, ставлення (пиво, шампанське, вино, горілка, коньяк, бренді, віски, самогон, цигарки тощо).

1.25. Наркотики офіційно не дозволені державою: вживання, ставлення.

1.26. Поля: електричні, магнітні, електромагнітні, звукові, гравітаційні, інфрачервоні, ультразвукові, радіаційні.

1.27. Ентропійність (Енергетичність) Людини (Корисне / не корисне накопичення, використання, розсіювання енергії).

1.28. Сила / Наявність Акме — Ентропії («розпорошення» / концентрація енергетичних ресурсів людини на досягнення своєї Конструктивної Мети, або Домінантної, Векторної Мети).

1.29. Сила імунної системи (захисних сил організму).

2. Не визначені (якісні).

2.1. Стан здоров’я.

2.2. Емоції.

2.3. Реакції: психічні, фізичні.

2.4. Самооцінка.

2.5. Самодостатність.

2.6. Егоїзм / Альтруїзм.

2.7. Амбіції.

2.8. Переконання: політичні, релігійні.

2.9. Лідерські якості.

2.10. Робота у команді тощо.

3. Слабо визначені (кількісно — якісні).

3.1. Наявність мети.

3.2. Мотивації.

3.3. Якості Особи: фізичні, психічні, духовні, моральні, соціальні.

3.4. Хобі.

3.5. Культура мови, жестів, манер.

3.6. Соціоністичний тип (16 типів).

3.7. Тип темпераменту: холерик, сангвінік, меланхолік, флегматик.

3.8. Тип сприйняття інформації: аудіо -, відео -, кінестетик
3.9. Тип виховання.
3.10. Екстраверт / Інтроверт тощо.
4. «Розмиті» нечіткі, ймовірності.
4.1. Навички: професійні, соціальні.
4.2. Розумові здібності.
4.3. Порядність / непорядність.
4.4. Тип пам’яті.
4.5. Ступінь впевненості.
4.6. Комунікативність.
4.7. Самоконтроль.
4.8. Адекватність.
4.9. Креативність.
4.10. Когнітологічність.
4.11. Конформізм.
4.12. Прагматизм.
4.13. Ерудиція.
4.14. Совість (Етометрія) тощо.
5. Різні

Фізіономіка (залежність рис характеру від зовнішніх ознак людини, від типу обличчя).

1. Зовнішні ознаки людини.
1.1. ***Астеніки***: знервовані,меланхолійні, романтичні, мрійливі, високі, худорляві, з довгими кінцівками, видовженим обличчям, з тонким почуттями;
1.2. ***Пікніки:*** доброзичливі, спокійні, невисокі, міцної статури, веселі товстуни, з нормальним почуттям гумору;
1.3. ***Атлетики:*** з пропорційною будовою тіла.
2. Тип обличчя.
2.1. Видовжене: аристократичне, інтелектуальне, чутливе.
2.2. Трикутне: високообдарована, хитра.
2.3. Трапецеподібне: подібна до видовжене.
2.4. Квадратне: суворе, мужнє, без сердешне, тугодум, грубий.
2.5. Кругле: добродушне, миролюбне, м’яке, гуманне.

Почерк (Графологія) характеризує: психічні відхилення, стан здоров’я, стать, соціально-культурний статус, втому, старанність, оптимістичність байдужість, песимізм, скнарість, марнотратність, експансивність, стриманість, тип темпераменту, тип особи: Мислитель, Практик, Співрозмовник тощо.

КОНЦЕПЦІЯ СУЧАСНОЇ ОСВІТЬОЇ АКМЕ- ТЕХНОЛОГІЇ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

В. М. Антонов

Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна

vant46@mail.ru

Існує багато означень такого актуального і перспективного поняття, як «освітня технологія». Наведемо одне з них, яке на думку автора відповідає сучасному підходу взагалі до концептуального означення сучасних та перспективних інформаційних технологій або Internet-технологій, складовою частиною яких і є — «освітня технологія».

«Освітня технологія» — це інтегративна модель, що об'єднує в єдину цілісну систему мету, зміст, дидактичний комплекс (педагогічні умови, методи, прийоми, засоби, інформаційно-технічне забезпечення) та результат навчально-виховного процесу, побудованого на філософії й методології українознавства, життєтворчості особистості.

У даному означенні поняття освітньої технології розглядається як галузь педагогічної науки, побудованої на *дитиноцентристській* філософії з наголосом на взаємодії двох аспектів: навчання й виховання.

Автор пропонує наступну концепцію та принципи сучасної освітньої технології, яка базується на новому комп'ютерно-когнітологічному аналізі та синтезі загальної теорії і практики сучасних інформаційно-комунікативних Internet-технологій.

Освітня технологія на сучасному етапі розвитку людства визначається наступною концепцією: **це комплексна сукупність інтегрованих когнітологічних моделей, які призначені для підвищення ефективності процесу накопичення, передачі та засвоєння знань від педагога до учня, з метою їх науково-практичного та організаційно-методологічного використання.**

У запропонованій моделі нової освітньої технології інтегровані модулі мають такі функціональні особливості.

Рефлексивний модуль — це модуль, що оцінює здібність людини стати у позицію спостерігача, дослідника, контролера стосовно до свого тіла, дій, думок (міркувань, висновків), поведінки, психіки, світогляду (менталітету) тощо.

Модуль аналізу накопиченої тематичної інформації — це модуль, що аналізує підготовлену педагогом тематично-цільову інформацію за допомогою відповідних методів обробки інформації та математичних моделей формалізації конкретної інформації. У модулі застосовуються необхідні технічні засоби (включаючи і комп'ютерні), які перетворюють формалізовану інформацію (дані) у комп'ютерні знання за допомогою модифікаторів знань [2].

Модуль синтезу інформації — це модуль динамічної генерації відповідних тематичних баз даних, знань та мета знань, який на основі необхідних комп’ютерних засобів та відповідних когнітологічіних алгоритмів перетворює дані та комп’ютерні знання у конкретні учбові теми за визначеними програмами.

Модуль вибору біхевіористичної моделі — це модуль аналізу існуючих чи перспективних біхевіорістичних (поведінкових) моделей людини та «прив’язки» їх до відповідних груп учнів, які були визначені педагогом (чи його психологічно-аналітичною групою) на етапі попереднього аналізу.

Соціонічний модуль — це модуль аналізу та розподілу учнів на раціонально/ірраціональні психологічні типи (групи) за відповідною ментологічною методикою.

Модуль ранжованого тестування — призначений для визначення груп учнів відповідно до їх розумових здібностей та побажань.

Модуль соціонічно-ранжованого групування — використовується на підсумковому етапі класифікації учнів за методикою їх розподілу на гібридні групи (група 1, 2, 3,...,n) з урахуванням їх психологічно-розумових здібностей, побажань та стану здоров’я.

Модуль аналізу результатів взаємодії — це модуль, який підсумовує ступінь (кількість і якість) ефективності засвоєння і використання учнями відповідних знань та видає результати раціональності використання педагогом відповідних дидактичних принципів, педагогічних методів, прийомів, засобів, методик та технологій.

Модуль прогнозування та передбачення — призначений для “планування” перспективних нових аспектів діяльності педагога у межах задекларованої освітньої технології, включаючи нові алгоритми, моделі, методи та інформаційно-організаційні, програмно-технічні, лінгвістично-семіотичні, правові тощо підходи та забезпечення.

Модуль удосконалення запропонованої моделі — використовується для вироблення (генерації) нових пропозицій щодо зміни, модифікації параметрів (характеристик) працюючої технологічної моделі на основі когнітологічного підходу. Когнітологічний підхід, у даному випадку, розуміється як платформа аналізу знань на основі мета знань (знань про знання), тобто знання про модель (систему) аналізуються за допомогою відповідних інтелектуальних автоматизованих робочих місць (АРМ) викладача, аналітика, адміністратора моделі (системи) на основі відповідних правил продукцій і фреймів семантичних мереж або логіки предикатів.

Розглянемо принципи сучасної освітньої технології, які полягають у наступному:

- принцип концептуалізації — базується на аналізі основних джерел інформації викладача, на дослідженні і використанні методів та технології навчання, на етапах технологічного навчаючого процесу тощо з метою моделювання як загальної, так і індивідуальної технологічної концепції учня;

- принцип класифікації — характеризується необхідністю дослідження методів та технологій навчання з метою їх систематизації та подальшого впровадження;
- принцип структурованості — означає, що технології описуються у вигляді спеціальних структур: родово-видові, просторові, загально-індивідуальні тощо для створення відповідного поля знань з концептуальними та функціональними областями;
- принцип когнітологічності — «відповідає» за перетворення фактологічних даних у комп'ютерні знання;
- принцип ранжирування — надає технологіям, що досліджуються той чи інший статус в залежності від відповідних «вагових» (ранжирних) коефіцієнтів;
- принцип активності — це принцип, що характеризує властивість однієї технології «впливати» на інші технології, змінюючи їх характеристики на параметри;
- принцип якісності — вимагає від технології наявності у неї таких інтегрованих параметрів, що дозволяють зробити її ефективною, корисною, раціональною;
- принцип персоніфікації технології — характеризує можливість кожного викладача самостійно її використовувати для вирішення регламентованих навчальних завдань, а також послідовного його самонавчання;
- принцип автоформалізації дає змогу педагогу в когнітологічному режимі з АРМ самостійно формалізувати, алгоритмувати, програмувати та автоматизовано виконувати свої повсякденні завдання;
- принцип інтегрованості та гібридності — дозволяє педагогу створювати технології з багатофункціональною реалізацією;
- принцип генетичності — полягає у реалізації в технології динамічних у часі алгоритмів.

До сучасних освітніх технологій мають також відношення і такі загальновідомі принципи: модульності, системності, неперервного розвитку, відкритості тощо.

ДИСТАНЦІЙНА СУЧАСНА ОСВІТА У ВИЩІЙ ШКОЛІ З ВИКОРИСТАННЯМ КІБЕРАКМЕОЛОГІЧНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ

В. М. Антонов
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
vant46@mail.ru

У Національному технічному університеті України «Київському політехнічному інституті» та в Українській Академії Акмеологічних Наук досліджуються, аналізуються та реалізуються проблеми проектування дистанційних КАІС: кіберакмеологічних інформаційних систем (КАІС).

Дистанційна освіта в КАІС — освіта у галузі математичних кіберакмеологічних інформаційних системах, яке повністю або частково здійснюється за допомогою телекомунікаційних технологій і засобів. Суб’єкт дистанційної освіти в КАІС віддалений від педагога — математика, і/або учбових засобів, і/або освітніх ресурсів.

Отже, дистанційна освіта по КАІС — це навчання в області математики на основі кіберакмеологічних інформаційних системах на відстані; у відмінності від звичайного заочного навчання, дистанційна освіта — зручна освіта без відриву від роботи і сім’ї.

Дистанційна освіта по КАІС — це новий підхід до освітньої парадигми в області математичних кіберакмеологічних інформаційних систем. Основні відмінності: основна мета освіти — забезпечення умов самовизначення і самореалізації особи; освіта — творення людиною образу миру в собі самому в світ наочної, соціальної і духовної культури.

Кіберакмеологія – це наука про технологічне моделювання розвитку та удосконалення творчої індивідуальності людини (особистості); методологія проектування нових знань про людину та досягнення бажаного результату (успіху, влади, здоров’я, багатства тощо), яка включає технологічні моделі і методи створення архітектоніки (гармонійне сполучення частин у єдине ціле) для креативного саморозвитку особистості на еволюційному шляху творчої зрілості та впровадженні математичних акме-систем, що базується на основних принципах таких наук як кібернетика, акмеологія, синергетика, біхевіоризм, когнітологія тощо. Концепція кіберакмеології полягає у теоретичному і практичному (прикладному) моделюванню талантів та здібностей особистості на основі сучасних інформаційних технологій (ІТ) — за рахунок методології досягнення акме-точок Людини у різних областях та ситуаціях, та реалізація побудованої моделі на основі філо- і онто-генезу у вигляді кіберакмеологічної інформаційної системи (ІС). Принципи кіберакмеології полягають у наступному: структурування власного суб’єктивного досвіду на основі СІТ, формування автокреативності, конструювання внутрішнього світу людини, комунікації та людського спілкування, інтелектуальної синергетичності особистості, когнітологічної акмеологічності людства, креативної біхевіористичності особистості, програмування швидкого інтелектного навчання, проектування: стану узгодженості (конгруентності) з собою (з довкіллям); внутрішньої благодаті; стану Творчості, Здоров’я, Успіху, Благополуччя, Влади тощо; потрібного емоційного стану; потрібного нейрофізіологічного стану; екології взаємо відносин і т. ін., результативності креативного розміркування, синергетичності та динамічності, інтерактивності та ітеративності, багато середовищності реалізації, формування індивідуальних карт світу за рахунок людських фільтрів, альтернативності та узгодженості, позитивності та конструктивності у досягненні мети, когнітологічної трьохбічності (трьохкреативності) та збалансованості. життєдіяльності людини (інтуїція, свідомість, підсвідомість), креативної ресурсності та потенційної енергії і можливостей, моделювання успішної синергетично-креативної особистості, креативності саморозвитку, екологічності та гармонії з довкіллям, когерентності (зв’язності) моделювання.

Методи кіберакмеології мають широке застосування при проектуванні АРМ — викладача-математики або людино-комп’ютерних комплексів (Л-КК) у КАІС, чи програмно-технологічних систем. Класифікація відповідних АРМ, що створюються представлена таким чином: фактологічні, кіберакмеологічні та гібридні. Засоби Інформаційно-комунікативних технологій (ІКТ) по КАІС при дистанційному навчанні це: дистанційні курси, електронна пошта (у тому числі і списки розсилки), форуми і блоги, чат і ICQ, теле- і відео-конференції тощо.

Дистанційне навчання в області математичних кіберакмеологічних інформаційних системах за своєю методологією претендує на окрему форму навчання (разом з очною, заочной, вечірньою, екстернатом, самоосвітою).

Дистанційне навчання по КАІС має декілька моделей. Зокрема — модель інтеграції очного і дистанційного навчання в різних пропорціях. Дистанційне навчання займає все більшу роль в модернізації освіти. Підсумковий контроль при навчанні з допомогою дистанційних освітніх технологій по КАІС можна проводити як в очній, так і дистанційній формах.

Основна суть дистанційної освіти по КАІС полягає в тому, що матеріал, який вивчається, представляється у модульному вигляді, зручному для самостійного навчання. Кожен модуль являє собою логічно завершений блок, при вивченні допускається будь-яка послідовність проходження модулів. Кожен модуль має назву, визначена його мета включення в навчання, розкритий зміст модуля, визначений рівень готовності до майбутньої професійної діяльності.

Проводяться дослідження з метою створення когнітологічних мультимедійних курсів для дистанційної освіти у мережі на синергетично-експертних засадах з використанням біхевіористичного моделювання для математичних інформаційних систем (МІС). З метою системного підходу, щодо створення комп’ютерних дистанційних курсів розробляється відповідна когнітологічна модель-оболонка, що дозволить стандартизувати, систематизувати і формалізувати процес створення курсів для дистанційного навчання. Комп’ютерна модель дистанційного навчання покладена в основу проектування концептуальної схеми акме-ІС і забезпечує реалізацію таких елементів: статична парадигматика знань, динамічна інформація, синхронна парадигматика матеріальних форм, динамічна синтагматика матеріальних форм тощо. Перелічені елементи попарно зв'язані двома вимірами-дихотоміями: зміст — форма, статика — динаміка. Модель також призначена для дослідження процесів аналізу і синтезу тексту (змісту дистанційних процесів) у мозку людини з метою ефективності засвоєння матеріалу. Модель базується на парадигмах лінгвістичного моделювання: епістемологічні, онтологічні; гіпотетичного моделювання; відтворюючих моделях: лінгвістичні, інженерно-лінгвістичні, лінгво-дидактичні. Загальна архітектура дистанційного акме-ІС включає такі модулі: вводу, обробки, класифікації та систематизації даних (знань); методів опису, обробки, зберігання даних (знань); систем управління базами даних, знань, мета знань (фактологічних, когнітологічних, біхевіористичних, синергетичних, акмеологічних тощо); аналізу та синтезу; модифікації; семантичної та лінгвістичної обробки; валеології; тестування; дистанційного навчання; діагностики; допомоги; консультацій; прецедентів тощо. Функції дистанційного акме-ІС: накопичення даних і знань з акмеологічних проблем; контроль (верифікація), релевантність; класифікація та структуризація; коригування та модифікація; створення архівів та довідок; генерування банка даних та знань тощо; проектування, розробка та реалізація спеціального програмного забезпечення, моделей та методів опису, нових технологій, нових алгоритмів; інтерактивне вирішення акмеологічних проблем особистості; моделювання нових позитивних ситуацій та можливостей; формування порад, рекомендацій, технологій поведінки та спілкування для досягнення успіху у навчанні. Моделювання розглядається на рівні трьох — ланцюговій схемі свідомості: імпліцітно-аморфна підсвідомість (інтуїція), експліцітно-мовна базова свідомість, надсвідомість (творчість). У моделі застосовується поняття нечітких множин для лінгвістики, для чого використовується три підходи: метод імовірнісних оцінок, метод експертних оцінок, метод структурних ознак нечітких множин. Реалізація запропонованої моделі дозволяє реалізувати великі методологічні можливості традиційної, математичної і прикладної лінгвістики.

Спроектовано та реалізується Веб-сайт з відповідними поточними характеристиками. Автори вважають, що такий підхід до сучасного навчання допоможе навчаємим глибше і якісніше засвоювати учбовий матеріал та буде сприяти підвищенню мотивації студентів при вивченні математики та інших потрібних предметів.

НОВІТНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ПІДВИЩЕННЯ ЯКОСТІ ІНТЕГРОВАНОГО НАВЧАННЯ НА ЗАПИТ РИНКУ ПРАЦІ

І. В. Бейко
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
ivan.beyko@gmail.com

Під випливом всеохплюючої комп’ютеризації та математизації багатьох сфер людської діяльності сучасний ринок праці висуває високі вимоги до математично-комп’ютерної підготовки та перепідготовки фахівців майже всіх спеціальностей. Сучасний висококваліфікований фахівець має бути спроможним шукати і добувати інформацію й нові знання у різнорідних інтернет мережах «хмарних» та «позахмарних» баз даних та баз знань. Світ входить-влітає в епоху мережевої комп’ютеризації та мережевих знань, де рівень розвитку країни оцінюється не тільки рівнем інформатизації країни, але й рівнем інтелектуального потенціалу нації, що має забезпечувати спроможність держави в повній мірі користуватися досягненнями світової науки, спроможність створювати новітні оптимізовані науково-ємні технології й високоякісне високопродуктивне виробництво на арені міжнародної співпраці й конкуренції, спроможність в повній мірі користуватися новітньою науково-ємною продукцією науково-розвинених країн світу, в повній мірі користуватися всіма вже фантастичними можливостями інтернет-мережевих джерел знань новітньої світової науки.

Підготовка сучасного висококваліфікованого фахівця вимагає опанування математично-комп’ютерними методами та засобами здобування нових знань із численних нагромаджень різнорідних математичних (граф-операторних) моделей різних рівнів агрегації, що в тій чи іншій мірі намагаються адекватно описувати взаємодію керованих (ієрархічно-керованих) процесів та системи об’єктивної реальності від найпростіших фізичних, хімічних, біологічних, фінансово-економічних законів та закономірностей до складних екологічних, соціальних «майданних» та загально планетарних глобальних процесів і систем в реальних умовах наявності неповних даних та неповних знань. Сучасний математично-комп’ютерний інструментарій науково-обґрунтованої оптимізації й оптимізованих новітніх технологій відкриває нову еру науково оптимізованої біологічної, соціальної і культурної еволюції, де на додачу (чи на заміну) *дарвінівської еволюції* летить *революція наукової оптимізації* на основі математичних знань, штучного інтелекту, генної й комп’ютерної інженерії. На заміну класичним менше ефективним джерелам інформації — книгам і журналам — приходять електронні книги й журнали, уніфікована Wikipedia оцифрованого аудіо/відео віддзеркалення об`єктивної реальності (віртуальний світ) і зароджується уніфікований математично-комп’ютерний інструментарій створення інтегрованої Об’єднаної Уніфікованої Науки — науки *автоматизованого видобування й використання нових знань* (зокрема, із глибинних нашарувань масивів даних спостережень, накопичуваних у сховищах інтернет-мереж із їх різнорідними «штучними інтелектами», різнорідними базами даних та «базами знань») із поступовими уточненнями, узагальненнями та вкладанням у чарунки каркасу цієї інтегрованої науки глобального уніфікованого цілеспрямованого визначення та коригування як глобальних цілей так і локальних завдань у всіх п'яти напрямах її розвитку:

1) пошуки і виявлення нових явищ за допомогою аналізу масивів даних як наявних так і нових цілеспрямованих спостережень (до прикладу — цілеспрямованих спостережень у пошуках нових даних на коллайдерах і на Великому адронному коллайдері в CERNi);

2) виявлення нових законів та закономірностей;

3) створення та удосконалення наукового інструментарію для виявлення нових законів і закономірностей;

4) розвиток фундаментальних теорій і теоретичних основ удосконалення наукового інструментарію;

5) і врешті, інтеграція різних наукових напрямів в Об'єднану Уніфіковану Науку.

На цьому шляху студентам необхідно опановувати концептуальними знаннями узагальнених математичних задач та узагальнених математично-комп'ютерних методів здобування нових знань про досліджувані причинно-наслідкові залежності (data mining, методи розв'язуючих операторів тощо). Це вимагає вдосконалення навчальних програм із переходом до *опанування новими знаннями на основі проведення (чисельних) експериментів,* тобто, переходом до *індивідуального відкриття «нових знань»* за допомогою вже всім доступних обчислювальних експериментів, а не за допомогою витрачання дорогого часу на запам'ятовування готових енциклопедичних знань та за допомогою розвитку «спортивно швидкісного» виконання вже малопотрібних вправ (без сумніву, спортивні вправи на швидке множення римських чисел є корисними для розвитку математичного мислення, але сучасні школярі на їх виконання вже не витрачають час, бо по-перше, множити римські числа вже непотрібно, і по-друге, сьогодні є більш корисні вправи для розвитку «математичного мислення». Аналогічно і тренування спортивно швидкісного витягування інтегралів також краде в студента дорогий йому час на навчання більш корисного. Очевидно, цим більш корисним є вчитися наближено інтегрувати функції багатьох змінних, розв'язувати великорозмірні оптимізаційні задачі, розв'язувати лінійні та нелінійні алгебраїчні, інтегральні, диференціальні та алгебро-інтегро-диференціальні рівняння і системи великої розмірності. Всі учні в моєму класі середньої школи №200 м. Києва це залюбки колись робили ще з використанням славного Алголу, а сьогодні для цього всі учні вже мають навіть Excel, але нажаль, таких інтегрованих навчальних програм наше міністерство освіти не має, незважаючи на те, що в усіх розвинутих країнах за прикладом Японії вищу математику та теорію ймовірностей вже викладають у загальноосвітній середній школі. Викладачі НТУУ «КПІ» змушені прикладати зусиль допомагаючи першокурсникам користатися потужними можливостями сучасних комп'ютерних засобів у підвищенні якості навчання математичних дисциплін. Сучасні студенти вже користуватися електронними бібліотеками в глобальних Інтернет мережах, серед яких електронні бібліотеки Google Scholar, Google Book Search, Scirus (понад 450 млн. наукових веб-сторінок), DOAJ (понад 3 тис. наукових журналів та понад 200 тисяч статей), arXiv (понад 500 тисяч статей з фізики, математики, комп'ютерних наук та біології), CiteSeerx (електронна бібліотека публікацій з комп’ютерних наук), Hindawi (понад 100 рецензованих журналів із інженерії, математики, фізики у відкритому доступі), основними міжнароднми математичними сайтами: http://cdns.emis.de, www.e-math.ams.org, http://www-sbras.usc.ru/win/mathpub тощо). З використанням математично-комп’ютерного інструментарію для розв’язування задач прогнозування і оптимального керування складними системами і процесами студенти будують математичні моделі керованих процесів і за допомогою обчислювальних експериментів відшукують оптимальні керування в заданих множинах допустимих керувань. Побудова математично-комп’ютерного інструментарію для розв’язання задач математичного моделювання і оптимального керування зазвичай пов’язана із узагальненням математичних задач та методів їх наближеного розв’язування. Наприклад, в узагальненому сенсі диференціальним рівнянням вважається рівняння, «яке містить якісь похідні невідомої функції». У загальному вигляді таке рівняння для невідомої вектор-функції $x(t) = (x_1(t), x_2(t),\ldots, x_m(t))$ можемо звести до вигляду

$$f(x'(t), x(t),t)=0$$

із похідною $x'(t)$ від невідомої вектор-функції $x(t)$. Серед усіх розв’язків диференціального рівняння шукану функцію $x(t)$ визначають додатковими обмеженнями, наприклад, заданими рівностями і/або нерівностями

$$F(x_{k1}(t_1), x_{k2}(t_2),\ldots, x_{km}(t_n)) =(\le)\ 0$$

на заданій множині значень її координат у заданих значеннях аргументів t_1, $t_2,\ldots, t_n$.

В інтегрованому навчанні студентів призвичаюють до узагальнених задач відшукання вектор-функцій $x(t)$ із складніших систем диференціальних рівнянь

$$f(x'(t), x(t), x(t -t_1), x(t-t_2),\ldots, x(t-t_n), t, x(t_1), x(t_2),\ldots, x(t_n))=0$$

або систем

$$f(x'(t), x(t), x(t -t_1), x(t-t_2),\ldots, x(t-t_n), t, x(t_1), x(t_2),\ldots, x(t_n),$$
$$\int\limits_{D(t,x)} f^1\ (x(s), s, x(t), t)ds)=0$$

а також і до відшукання їх узагальнених (наближених) розв’язків у заданих класах параметричних функцій за допомогою узагальнених методів мінімізації вибраної нев’язки. На такій дорозі відкривається шлагбаум до відшукання вектор-функцій керування $u(t)$, які мінімізують узагальнені критерії оптимальності

$$B(x, u)=\int_{t_0}^{T} B^1(x'(t), x(t), u(t), t, \int_{t_0}^{T} B^2(x'(s), x(s), u(s),s, x'(t), x(t), u(t),t)ds)dt$$

на розв’язках узагальнених керованих систем

$$A(t,x,u,q)\equiv(f^0(x(t_0),u,q, x'(t), x(t), u(t), t, \int\limits_{D(t,u,x)} f^1\ (x(s), u(s),s, x(t), u(t), q(t), t)ds),$$

$$F^0(x(t_0),x(T),\ u,\int_{t_0}^{T} F^1(x'(t),\ x(t),\ u(t),\ t,\ \int_{t_0}^{T} F^2(x'(s),\ x(s),\ u(s),s,\ x'(t),\ x(t),$$

$u(t),t)ds)dt)))=(0,0)$. І врешті математично-комп’ютерні методи оптимізації виявляються ефективним інструментарієм у розв’язанні загальних проблем математичного моделювання, дослідження та оптимізації невідомих причинно-наслідкових залежностей $(u,q)\rightarrow w$ між причинними факторами (керуваннями u і збуреннями q) та їх наслідками $w=B(x,u,q)$, де $x=x(u,q)$ — фазова траєкторія керованої p-моделі $A(x,u,p,q)=b(u,p,q)$. p-модель називають $B\delta$-адекватною на $U\times Q$ за вибраною метрикою ρ, якщо для всіх $u\in U$, $q\in Q$ виконується нерівність

$$\rho(B(X_1(u),u), B(\mathrm{Arg}_x[A(x,u,p,q)=b(u,p,q)],u,p,q)) \leq \delta.$$

Побудова δ-адекватних та $B\delta$-адекватних p-моделей основана на відшуканні, уточненні та використанні наявних знань про причинно-наслідкові залежності $(u,q)\rightarrow x(u,q)$, зокрема, за допомогою декомпозиції керованої системи на підсистеми з подальшою побудово p-моделі у вигляді граф-операторної моделі із багатьма деталізованими (спрощеними) підсистемами

$$A_k(x^k, u^k, z^k,p^k,q^k)=\theta, z^k= Z^k(x^{j(k)}, u^{j(k)},p,q^k), k\in\{1,...,n\},$$

де k — номер k-ої підсистеми,

$x^k\in X^k$ — фазова траекторія k-ої підсистеми,

$u^k\in U^k$ — функція керування k-ою підсистемою,

$z^k= Z^k(x^{j(k)}, u^{j(k)},p^k,q^k)$ — функція взаємодії k-ої підсистеми із пов’язаними з нею підсистемами,

$x^{I(k)}=\{x^i\}_{i\in I(k)\subset\{1..\mathrm{n}\}/\{k\}}$, $u^{jk}\cong\{u^i\}_{i\in J(k)\subset\{1..\mathrm{n}\}/\{k\}}$,

$I(k)$, $J(k)$ — множини натуральних чисел, які визначають підмножини зв’язності підсистем, а саме, якщо об’єднання $I(k)\cup J(k)$ включає число s, то це означає, що s-та підсистема є безпосередньо зв’язаною із k-ою підсистемою),

p^k — параметри k-ої підсистеми,

q^k — параметри зовнішнішніх та внутрішніх збурень, що діють на k-ту підсистему.

У загальному випадку $x^k\in X^k$, $u^k\in U^k$, $q^k\in Q^k$, X^k — лінійний нормований простір, U^k і Z^k — метричні простори, а A_k — параметричні оператори, що визначають залежності між траєкторіями $x = (x^1,...,x^n) = (x^1(u,p,q),...,x^n(u,p,q)) = x(u,p,q)$, функціями керування $u=(u^1,...,u^n)\in U$ $(U=U^1\times U^2\times\ldots\times U^n)$, функціями збурень $q=(q^1,...,q^n)\in Q$ $(Q=Q^1\times Q^2\times\ldots\times Q^n)$ та значеннями параметрів моделі $p=(p^1,...,p^n)\in P$.

Різні реальні системи і процеси описуються граф-операторними моделями з різними підсистемами: алгебраїчними, диференційними, алгебраїчно-диференційними, інтегро-диференційними, а також і більш загальними системами з функціональними запізненнями та перемінними областями інтегрування, які можуть залежати і від фазового стану $x(t)$ і навіть від вибраного керування $u(t)$. Граф-операторними системами описуються робочі математично-комп’ютерні моделі для узагальнених оптимізаційних задач математичної фізики та інші складні керовані системи і процеси.

Узагальненою задачею оптимального моделювання, прогнозування і керування називають задачу відшукання такого керування u, яке максимізує значення цільової функції $B(x,u,p,q)$ для керованої системи $A(x,u,p,q)=0$ за даними спостережень $y=C(x,u,p,q)$ в умовах неповних даних $q \in Q$. Узагальнена задача охоплює широке коло практичних задач керування як окремими технологічними процесами так і складними технологічними комплексами і системами. Практичну ефективність методу розв'язуючих операторів для розв'язування узагальненої задачі в умовах ймовірносної інформації про збурення q обгрунтовує теорема 1 [2]

Теорема 1. *Якщо* S *є розв'язуючим оператором для функції* $B(x,u,p,q)$, *оператора р-моделі* $A(x,u,p,q)$ *та функції спостереження* $y=C(x,u,p,q)$, $S(u,p,q,A(x,u,p,q),C(x,u,p,q))-B(x,u,p,q)=0$, *і якщо для кожної підмножини* V *із множини* W *допустимих значень* $A(x,u,p,q)$ *ймовірність* $P(A(x,u,p,q) \in V)$ *події* $A(x,u,p,q) \in V$ *дорівнює значенню* $\varphi(V)$ *заданої функції* $\varphi : 2^W \to [0,1]$, *то для всякої підмножини* Z *допустимих значень* $B(x,u,p,q)$ *умовна ймовірність* $P(B(x,u,p,q) \in Z \mid C(x,u,p,q)=y)$ *дорівнює* $\varphi(M(u,p,q,y,Z))$, *де* $M=\mathrm{Arg}_a [S(u,p,q,a,y) \in Z]$.

Методи побудови розв'язуючих та асимптотично-розв'язуючих операторів [1-3] залежать від структури граф-операторної моделі та математичних систем, якими описуються процеси у взаємодіючих підсистемах. Різні процеси описуються алгебраїчними, диференційними, алгебраїчно-диференційними, інтегро-диференційними, а також і більш загальними системами з функціональними запізненнями та перемінними областями інтегрування залежними від фазового стану $x(t)$ і/або від вибраного керування $u(t)$.

У залежності від повноти наявної інформації про керовану систему та її середовище, розв'язуючий оператор узагальнює або функцію Гріна, або обернений/псевдообернений оператор, а теорія асимптотично-розв'язуючих операторів вищих порядків узагальнює класичну теорію чутливості першого порядку до теорії операторної чутливості вищих порядків на випадок недиференційованих функцій та функціональних параметрів, зокрема, узагальнює принцип максимума Понтрягіна. Теорія асимптотично-розв'язуючих операторів *вищих* порядків відкрила нові можливості для побудови числових алгоритмів прискореної збіжності, зокрема для розв'язування операторних рівнянь, крайових та обернених задач математичної фізики і узагальнених задач оптимального керування логіко-динамічними ієрархічно-керованими граф-операторними системами. У цьому напрямку побудовані потрібні сучасному інженеру математично-комп'ютерні методи і алгоритми підвищеної точності [3] для розв'язування: задач Коші, систем диференціально-алгебраїчних рівнянь, крайових задач математичної фізики, екстремально-керованих систем Лагранжа-Понтрягіна та екстремальних систем керування в диференціальних іграх.

Новітній математично-комп'ютерний інструментарій розвитку уніфікованих методів розв'язування узагальнених оптимізаційних задач дає новий імпульс для підвищення якості навчання, зокрема, у розвитку концепції навчання протягом усього життя з використанням дистанційного навчання. Електронні засоби дистанційного навчання відкривають доступ до безплатного опанування новими знаннями, викладеними в Інтернет мережах провідними університетами світу. Така мережа будується також і в НТУУ «КПІ» разом із університетами східної Європи.

Щоб прослуховувати курси дистанційного навчання провідних університетів світу не обов'язково бути зарахованим до вищого навчального закладу — достатньо тільки створити свій обліковий запис на www.edx.org і записатися на бажані курси будь-якого *університету-партнера.* Для цього не потрібно бути студентом університету, а достатньо мати доступ до інтернету і знати англійську мову. Англійську також можна вивчати безкоштовно і самостійно на edX.org і на багатьох інших ресурсах у всесвітній мережі. Великою мотивацією для проходження курсів є отримання сертифікатів, які можуть допомогти потрапити на навчання до престижного ВНЗ (також і закордонного) і у подальшому можуть посприяти отриманню престижної високооплачуваної роботи, зокрема у відомих зарубіжних фірмах, багато з яких мають представництво в Україні.

На таких безкоштовних курсах можна опанувати сучасними потужними математично-комп’ютерними методами розв’язування складних проблем математичного моделювання і оптимізації в різних областях фізичних та інженерних наук, фінансів, економіки, медичних, соціальних і біологічних наук із використанням чисельних методів лінійної алгебри, диференціальних рівнянь, методів оптимізації, робастної статистики та універсальних комп’ютерних засобів (Octava, Python, MATLAB, Mathematica, Maple, Matcad та ін.). Python і Octava безкоштовно загружаються і встановлюються через Інтернет (Octava є альтернативою MATLAB). Методи лінійної алгебри є основним інструментарієм для розвитку новітніх технологій у цифровій фотографії, телефонному зв’язку, криптографії, машинному навчанні, генній інженерії, квантових обчисленнях, обробці зображень, інформаційному веб-пошуку тощо. Універсальні методи легко програмуються універсальними засобами Python, зокрема, для оптимізації графічних перетворень, розпізнавання осіб, стиснення зображень, пошуків у зображеннях (виявлення та класифікації злоякісних та доброякісних пухлин, класифікації документів тощо. Для цього не потрібно глибоких знань Python, але глибокі концептуальні математичні знаннями є необхідними для опанування концепціями, теорією, моделями, методами та інтуїтивними відчуттями, що лежать у прикладних дисциплінах і мають важливе значення для адекватного науково обґрунтованого аналізу великих обсягів даних на основі математичних абстракцій.

Список літератури

1. Бейко І. В. Функції оцінювання інформації в теорії оптимальних агрегованих моделей і оптимальних систем // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 43–54.

2. Бейко І. В. Уніфікована методологія розв‘язуючих операторів як новітня інформаційна технологія для відшукання нових знань і прийняття оптимальних рішень (англійською мовою). Proc. «The Information Technology Contribution to the Building of a Safe Regional Environment», AFCEA, Europe Seminar, Kiev, 28-30.05.98, С. 44–50.

3. Бейко І. В., Зінько П. М., Наконечний О. Г. Задачі, методи та алгоритми оптимізації. — К.: Вид-во «Київський університет», 2012. — 799с.

ДИСТАНЦІЙНА ОСВІТА: ДОСВІД ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ КУРСІВ

Ю. П. Буценко, О. І. Баліна
Національний технічний університет України «КПІ»,
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна
kpm_knuba@ukr.net

Дистанційні технології у вищій освіті (надалі ДТВО) є, безперечно, прогресивним та перспективним напрямком її розвитку. В той же час наразі виникають певні проблеми при їх поєднанні (спряжені) із класичними підходами. Розгляд таких проблем вельми актуальний в світі того, що впровадження ДТВО, яке стає все ширшим, вимагає для кожної задіяної кафедри, факультету, вищого учбового закладу виконання досить трудомістких робіт пов'язаних з їх методичним забезпеченням [1]. Накопичений авторами досвід дозволяє визначити принципові моменти, які, на наш погляд, обов'язково мають бути враховані при цьому.

Відзначимо, по-перше, що як студенти, які мають навчатись дистанційно, так і їх викладачі мають досвід лише традиційних форм учбового процесу. Зрозуміло, що для студентів, «дистанційка» виглядає дуже привабливо з точки зору гнучкості розподілу їх часу. Це тим більш істотно через специфіку контингенту таких студентів: наш досвід вказує, що ці люди істотно старші за віком, ніж навіть студенти заочної форми навчання, працюють, частіш за все, за фахом, в багатьох випадках набувають другу вищу освіту. В принципі, гнучкість при розподілі часу мала б виглядати привабливо і для викладачів, якщо б цей розподіл не виявлявся результатом диктату студентів. Добре відома всім викладачам «аритмічність» при подачі заочниками їх домашніх робіт в повній мірі стосується і студентів-«дистанційників».

Природним розвитком першого пункту є другий. Як студентам, так і викладачам істотно не вистачає «колективного настрою на роботу», який є предметом заслужених гордощів досвідчених викладачів та істотним фактором кращого засвоєння матеріалу для студентів [2]. Відео-конференції не замінюють спільної роботи в аудиторіях, участь у них студентів слабка.

По-третє, слід зауважити, що структура та об'єм матеріалів, що адресуються студентам дистанційної форми навчання у великій мірі продиктовані стереотипами їх викладачів: розлогі списки рекомендованої літератури, тести та задачі, достатні для комплектації задачника, призначеного для стаціонарного навчання. На наш погляд, тут необхідно обмежитись максимально лапідарними текстом лекцій, посібником з розв'язання задач, набором тестів та практичних завдань. Не варто піддавати насправді важким випробуванням мотивацію студентів. «Дистанційнику» відмовитись від продовження освіти там, де його явно перевантажують, аж занадто просто.

Четвертою проблемною позицією є, звичайно, форма проведення заліків та іспитів при дистанційному навчанні. Мабуть, для різних предметів (гуманітарних, фундаментальних та ін.) підходи мають бути різними. Авторам, звичайно, хотілося б мати максимально можливий особистий контакт із студентами досвід ЗНО свідчить, що перевірка знань з математики тестового типу (навіть із включенням тестів відкритого типу та жорстким контролем при її проведенні) може розглядатись лише як первинна, вона є формою допуску до заліку чи екзамену, але ж не замінюючи їх.

Резюмуючи сказане вище, сформулюємо наступні рекомендації.

1. Для студентів, що обрали для себе дистанційну форму навчання, абсолютно необхідним є контроль рівня їх знань із предмета, що вивчається.
2. Методичне забезпечення ДТВО повинно надавати студенту, за його бажанням, можливість отримання мінімально необхідного рівня знань з предмета для отримання мінімальної позитивної оцінки (стислий конспект, мінімізований набір контрольних питань та вправ).
3. За наявності технічної (фінансової) можливості студент повинен мати можливість спілкуватися з викладачем як найчастіше.
4. Екзамени та заліки бажано проводити традиційним чином.
5. Слід очікувати, що при використанні ДТВО набутий студентами рівень знань, умінь, навичок (компетенцій) буде залежати від рівня його мотивації істотно сильніше, ніж при традиційній схемі.

Список літератури

1. Концепція розвитку дистанційної освіти в Україні. — Затверджено МОНУ 20.12.2000р. (Електронний ресурс). — http://modle.bsmu.edu.ua/mod/resource/view.php?inpopur=true&id=998

2. Гороховський О. І. Модель сприйняття навчального матеріалу студентами дистанційної форми навчання // Інформаційні технології та комп’ютерна інженерія. — 2008. №1. — С. 176–180.

СОВРЕМЕННАЯ ЛЕКЦИЯ — КОМПЛЕКСНЫЙ ПОДХОД

Ю. М. Волченко
Киев, Украина
inlan.reslab@gmail.com

Существующие технологии представления и визуализации информации, формы ее интерактивного усвоения, позволяют усовершенствовать такой старинный инструмент преподавания как лекция. В условиях, когда требуется быстрая и эффективная подготовка специалистов, с одной стороны, и имеется множество вполне конкурентоспособных видов обучения, с другой, современная, подготовленная к печати, лекция должна обладать, по крайней мере, следующими качествами:

1) эстетичность;
2) традиционная краткость;
3) наглядность, включающая в себя элементы анимации и интерактивности;
4) адресность (нацеленность на специализацию учащихся);
5) связь с современными системами символьных вычислений как для более глубокого усвоения материала, так и для решения задач, приближенных к реальным.

Не претендуя на полноту, завершенность и однозначность решения сформулированной задачи, автор считает возможным поделиться своим опытом создания лекций по математике, в которых в некоторой степени реализованы перечисленные выше требования. Лекции представлены в Интернете на сайте math.volchenko.com и могут быть получены в личное пользование любым посетителем сайта бесплатно и без регистрации.

Лекции созданы в системе LaTeX с использованием графического пакета pgf-tikz и пакета animate для включения в документ анимационных возможностей. Результирующий документ имеет pdf-формат, но анимация работает только в программе Acrobat Reader под управлением Windows.

Использование LaTeX'а обусловлено тем, что эта система является фактически единственной системой, обеспечивающей достаточно эстетическое (с точки зрения автора) оформление лекции, хотя русские шрифты все же оставляют желать лучшего.

Пакет pgf-tikz дает широкие возможности для представления графической информации, включая цвет; библиотеки шаблонов из области электротехники, сетей Петри; возможности создания трехмерных изображений; клонирование графических объектов; функции для вычисления элементов рисунка; возможность подключения к пакету animate для создания учебных мультипликаций; и многое другое.

Не так давно, в 2010 г., появившийся пакет animate позволяет «увидеть» многие математические конструкции, традиционно представляющие трудности для понимания, например, сходимость функций и последовательностей; процессы, происходящие в различных технических устройствах. «Оживив» некоторые геометрические построения, можно получить гораздо более полное представление о тех или иных аспектах теории, чем от «мертвого» рисунка.

Достоинство упомянутого пакета состоит также в том, что с его помощью можно создать в тексте документа на месте одного изображения целую их галерею, например, рисунков (лекция «Функция II») или набора формул (лекция «Числа»). Удается прямо в тексте документа предложить анимационный тест для проверки знаний (лекция «Неопределенный интеграл»). Существенным моментом является то, что результирующий документ имеет pdf-формат, который является самым используемым форматом распространения научной продукции, причем, снабженным в данном случае интерактивностью.

К недостаткам подобного анимирования документа относится довольно большой его объем и невозможность демонстрации мультипликационных возможностей в программах помимо Acrobat Reader и в операционных системах, помимо Windows, например, в ОС Android.

В Приложениях к лекциям демонстрируется применение системы Mathematica в решении вопросов, связанных с материалом лекции и задачами, специфическими для электро- и радиотехнических специальностей, на которые рассчитан данный курс математики. Система Mathematica в настоящее время является безусловным лидером в области символьных вычислений, снабженная огромным числом математических функций, прекрасными средствами визуализации, в том числе и трехмерной графики, собственным языком программирования и собственными средствами анимации и интеракивности.

В принципе можно было бы создать курс лекций и на базе этой системы. Однако ее эстетический уровень по мнению автора недостаточен, равно как и инкапсулированность материала — его легко разрушить. Не каждый читатель захочет иметь у себя специальную «читалку» документов этой системы, нередко неудобную в обращении; кроме того, новые версии этой системы часто делают невозможным функционирование документов, выполненных в прежних версиях.

Другой вариант — размещение материала лекций непосредственно на страницах сайта также пока следует считать нецелесообразным, так как, хотя весьма разнообразная анимация сайта может быть достаточно эффективной и эстетичной, этого нельзя сказать об исполнении веб-страницы в целом, поскольку возможности отображения математических конструкций в сочетании с обычным текстом все еще слабы.

Резюмируя сказанное, надо сказать, что для математиков на данном отрезке времени не существует единой среды подготовки документов, обеспечивающей все необходимые качества современной лекции. Очевидно, такая среда должна обладать способностью одинаково удобно и быстро выполнять вычислительные, символьные и графические операции, создавать анимацию и вставлять готовые изображения, клипы и звук. Результирующий документ должен иметь эстетичный вид, быть одновременно интерактивным и небольшим по объему, читаться в большинстве операционных систем и быть защищенным от искажений. Поэтому, написанные автором лекции — всего лишь некий компромиссный вариант, удовлетворяющий заданным критериям.

Следует отметить, что к вузовскому преподавателю математики в связи с вышеизложенным могут предъявляться гораздо большие требования, чем прежде, а на подготовку лекции потребуется намного больше времени. При достаточных финансовых возможностях вуза видится создание при математических кафедрах специальной рабочей группы из преподавателей, в течение определенного срока готовящих лекции и не занимающихся преподаванием (при той же достойной оплате труда). Очевидно, «практикующие» преподаватели и «методирующие» преподаватели время от времени должны меняться местами, одни — для обновления опыта преподавания, другие — для внедрения полученного опыта в печатные лекции.

СУЧАСНИЙ СТАН ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ В КУРСАХ ЯКІСНОЇ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

А. Л. Гречко
НТУУ «КПІ», Київ, Україна
and.grechko@gmail.com

Використання сучасних комп’ютерних засобів є невід’ємною частиною методики викладання основних курсів з математики, фізики, інженерних наук тощо. За останні 20 років комп’ютерні математичні пакети символьної алгебри зазнали неймовірного прогресу — ці системи мають потужний але дружній інтерфейс, реалізують велику кількість стандартних та спеціальних операцій, споряджені потужними графічними засобами і що найголовніше мають власну вбудовану мову програмування. Все це надає розлогі можливості для ефективної роботи математичних пакетів в наукових дослідженнях та в викладацькій деяльності.

Серед сучасних комп’ютерних пакетів, які орієнтовані на розв’язання задач математичного характеру як чисельно, так і в символьному вигляді багато років найбільш популярними та розвиненими є Maple, MATLAB, MATHEMATICA [1]–[3]. Порівняння цих комерційних пакетів представлено в наступній таблиці.

	Лецензійна ціна максимальної комплектації в дол. США	Кросс-платформа (Win, Mac OS, Linux, Solaris)	Орієнтовна кількість користувачів в світі	Наявність спеціального пакету динамічних систем	Системні вимоги (Процесор/ОЗУ/HD/Опер. Система)
Maple 16	1895	+ + + -	15-18 млн.	+	Pent3(1Ghz)/2Gb/2Gb/Win XP
Matlab R2012	1900	+ + + -	5-8 млн.	+	Pent3(1Ghz)/1Gb/4Gb/Win XP
Mathematica 9	1750	+ + + +	2-3 млн.	-	Pent4(2,4Ghz)/2Gb/5,5Gb/Win XP

Зрозуміло, що незважаючи на наведені вищі переваги комерційних пакетів та численну літературу по ним (див. список літератури в [1]-[3]) вони мають очевидні вади — високу ціну та достатньо високі вимоги до обладнання. Альтернативою комерційним пакетам є друга група програмних засобів — безплатні програми по динамічним системам (www.dynamicalsystems.org). Математичні можливості цих пакетів майже не поступається можливостям комерційних пакетів, а в деяких аспектах і перевищує можливості спеціальних пакетів динамічних систем DEtools, Poincare системи Maple, як за наявністю спеціалізованих процедур, так і за зручністю. Так наприклад, майже всі бесплатні пакети динамічних систем при побудові фазових портретів динамічних систем необтяжені вибором початкових умов, а графік траєкторії реалізований простим «клацанням» мишки. Цікаво також відмітити, що на відміну від комерційних пакетів авторами безплатних пакетів динамічних систем є діючі математики спеціалісти з теорії динамічних систем або чисельних методів. Порівняння основних можливостей найбільш популярних та потужних пакетів динамічних систем представлено нижче.

	Phaser	Dynamical solver	Math DS	Dyn Pac
автор	J. Glick, H.Kocak	J. Aguirregabiria	В. Говорухин	A.Clark
Зовнішня програмна среда	-	-	Matlab	Mathematica
Побудова фазових портретів “one-click”	+	+	+	-
3D- фазові портрети	+	+	+	+
Аналіз особливих точок	-	-	-	+
Побудова відображення Пуанкаре	+	+	+	+
Знаходженя ляпуновських експонент	-	+	+	-
Робота з дискретними динамічними системами	+	+	+	+
Робота з функціями Ляпунова	-	-	-	+
Якість документації за 5 бальною шкалою	3	5	2	5
Робота з диференціально-різнецевими рівн.	-	+	-	+
Побудова біфуркацій них діаграм	+	-	-	+

Суттєвою вадою безплатних пакетів динамічних систем є відсутність власної вбудованої мови, що не дозволяє власний розвиток програми та розв’язання складних задач.

Третя група програм — спеціалізовані програми по теорії біфуркації. Вони мають ще більш недружній інтерфейс, деякі навіть потребують зовнішніх компіляторів, але можливості цих програм абсолютно унікальні. Так саме, як і пакети другої групи авторами спеціалізованих програм з теорії біфуркацій є відомі спеціалісти з теорії біфуркацій. Порівняльна таблиця програм з теорії біфуркацій наведена нижче.

	AUTO2000	Matcont 5(Content)	Candys	Ant 4.669
автори	R. Paffenroth, E. Doedel	A. Dhooge, Y. Kuznecov	W. Jansen	V. Avrutin, R. Lammert
Інтерактивний інтерфейс під WINDOWS	PYTHON	MATLAB 8	-	GTK+
Необхідність зовнішньої програмної среди	GNU C++	MATLAB 8	GNU C++	GNU C++
Відображення Пуанкаре	-	+	+	+
Знаходження точок біфуркації корозмірності 1 особливих точок та граничних циклів	+	+	+	+
Знаходження точок біфуркації корозмірності 2 особливих точок	+	+	+	+
Обчислення нормальних форм біифуркацій особливих точок	-	+	-	-
Обчислення Ляпуновських експонент	-	-	-	+
Символічна динаміка	-	-	-	+

	AUTO2000	Matcont 5(Content)	Candys	Ant 4.669
автори	R. Paffenroth, E. Doedel	A. Dhooge, Y. Kuznecov	W. Jansen	V. Avrutin, R. Lammert
Знаходження точок біфуркації корозмірності 2 особливих точок	-	+	-	-
Продовження за параметром гомоклінічних орбіт особливих точок	-	+	-	-

Серед інших вартих уваги пакетів динамічних систем відзначимо працюючий в среді Maple пакет поліноміальних двовимірних динамічних систем P4 (J.Artes, J. Llibre, C. Herssens), яка окрім якісної роботи з фазовими портретами, класифікацією особливих точок, сепаратрис та граничних циклів, єдина працює з компактифікаціями потоків на диску Пуанкаре. Також вартий уваги скромний пакет pplane (J. Polking), який працює в середовищі Matlab, має дуже простий і зручний інтерфейс та за якістю побудови фазових портретів не має конкурентів. Слід зауважити, що з популярною операційною системою мобільних пристроїв Android або iOS не працює жодна з розглянутих програм.

Список літератури

1. S. Lynch, Dynamical systems with Applications using Maple, Birkhauser Boston, sec.ed., 2010.

2. M.L. Abell, J. Braselton, Differential equations with Mathematica, 3rd ed., Academic press, New York, 2004.

3. B. Barnes, G. Fulford, Mathematical modeling with case studies: A Differential equations approach using Matlab, Chapman and Hall, London, 2008.

ЗНАЧЕННЯ СУМИ ЗНАНЬ СТУДЕНТА ПРИ ВИВЧЕННІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

В. В. Довгай
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
valerdov@gmail.com

Аналізуючи результати вхідного контролю з елементарної математики, який запроваджено в НТУУ «КПІ», доводиться робити висновок, що математична підготовка випускників більшості загальноосвітніх середніх шкіл не покращується, як цього слід було б очікувати після ряду реформ середньої школи, а залишається на стабільно низькому рівні. Тому викладання вищої математики на факультетах, куди в основному йдуть такі випускники, вимагає певної адаптації до їх рівня математичної культури.

Цей рівень, обумовлений рядом об’єктивних факторів і на який не вплинули в основному косметичні реформи, на мій погляд міг би бути вищим, якби не шкідливий вплив сформульованої кілька років назад освітянським керівництвом та розтиражованої через засоби масової інформації досить сумнівної тези про те, що як у середній школі, так і у вищих навчальних закладах викладач буцімто не повинен давати суму знань, обмежившись навчанням учня чи студента самостійно добувати знання, тобто вчити вчитися. Як можна успішно досягти такого, не даючи при цьому суми знань — питання риторичне. А крім того, кожен екзамен або залік є не чим іншим, як перевіркою в тому числі і суми знань. Чи не краще було б процес навчання (принаймні для природничих дисциплін) трактувати, приміром, як здобування нової суми знань шляхом синтезу таких складових, як уже відома сума знань, нові поняття та означення і формальна логіка? Адже саме це демонструє викладач на кожному занятті, а як саме — це вже залежить від рівня його кваліфікації та досвіду.

Всі ми прагнемо виконати основне завдання міністерства — мати випускників, що не догматично засвоїли предмет викладання, а можуть творчо використовувати дану в ньому суму знань. Та в більшості випадків спрощено сприйнята вищезгадана теза сприяє тому, що випускник звичайної загальноосвітньої середньої школи часто не має необхідних знань для того, щоб успішно вивчати предмет вищої математики у вищому навчальному закладі і це негативно впливає на кінцевий результат. Все помітнішим на першому курсі стає явище, коли студент не знає правил дій з раціональними числами, алгебраїчних та тригонометричних формул, а це ж необхідна умова для продовження математичної освіти. Слабкою ланкою є також знання основних означень з елементарної математики, володіння відповідною термінологією. Мимоволі виникає думка, що може його вчили лише вчитися (не вимагаючи при цьому суми знань), а потім він при самостійному здобуванні знань не зміг визначити, який же об’єм цих знань йому знадобиться.

Отже, з початком викладання вищої математики виникає проблема, яким чином компенсувати відсутність необхідних знань в процесі навчання. Найоптимальніше цю проблему можна вирішити введенням в навчальний план факультету такої ненормативної дисципліни, що була б свого роду вступом до курсу вищої математики і читалась паралельно з ним на протязі першого семестру. При наявності взаєморозуміння та тісної співпраці між кафедрою, що забезпечує викладання курсу вищої математики, та відповідним факультетом такий спосіб вирішення проблеми цілком можливий, що підтверджується власним досвідом. В іншому випадку залишається сподіватись, що студент надолужить відставання від бажаного рівня, застосовуючи своє набуте у школі вміння самостійно здобувати необхідну суму знань.

Та в будь-якому випадку викладачам вищої математики для покращення наявної ситуації необхідно повністю забезпечити навчальний процес методичною літературою для самостійної роботи студента як із елементарної математики, так і з кожної теми своєї дисципліни. При написанні такої літератури слід враховувати середній рівень математичної підготовки того контингенту студентів, якому вона адресується. Бажано, щоб змістовна частина містила всі поняття, означення та основні результати, що викладаються на лекціях, приклади розв’язування типових задач, необхідних для успішного засвоювання теоретичних положень, а також завдання для самостійної роботи студентів. Доступ до цієї літератури значно спроститься, якщо видавати її в електронному вигляді та викладати на сайтах відповідних факультетів.

Немає необхідності тримати постійно в оперативній пам’яті учня чи студента всю набуту суму знань, чим часто лякають їх батьків. Це, мовляв, веде до страшенних перевантажень, нервових хвороб та ще бозна чого. При умові, що згадана сума знань була свого часу ґрунтовно вивчена і засвоєна, вона при потребі швидко відновлюється з глибин довгострокової пам’яті за допомогою довідників, посібників та підручників і отже її можна не тримати напоготові весь час. Недарма ж побутує думка, що освіта — це те, що залишається, коли все вивчене забудеш. Ще одне спадає на думку коли говорять про оптимізацію системи освіти в середній загальноосвітній школі. Чи не варто відмовитись там від викладання основ теорії границь і диференціального та інтегрального числення? Адже все одно їх вивчення передбачене всіма програмами з вищої математики у всіх вищих навчальних закладах відповідного профілю.

Щоб підвищити рівень мотивації у студентів оволодівати математичним апаратом, варто під час лекцій та на практичних заняттях наводити приклади застосування окремих результатів у сфері їх майбутньої професійної діяльності як спеціалістів високого рівня. Не залишать байдужими студентів і короткі згадки про видатних математиків та їх внесок у результати, що розглядаються на лекціях. Особливу цікавість викликають наші видатні вітчизняні вчені, обійдені увагою засобів масової інформації, багато з яких (особливо телебачення) зорієнтовані на задоволення примітивних смаків широких мас населення. Тож нехай хоч у такий спосіб, як згадка про своїх математиків світового рівня на лекціях, трохи компенсується відсутність уваги до них нашої держави та підвищиться рівень патріотизму студентів.

КОРОТКОЧАСНІ КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ ТА ІДЕЯ СПРАВЕДЛИВОСТІ

В. В. Дрозд
Національний технічний університет України, Київ, Україна
Slava572@ukr.net

Хоча в реальному житті, зокрема в реальному учбовому процесі, цей факт не є очевидним та навіть час від часу ігнорується, одначе в чисто теоретичному плані, з точки зору чистої методики викладання будь якого предмету не викликає сумніву, що контроль знань студентів ніколи не є самоціллю, але насамперед є складовою єдиного учбового процесу. Навіть іспит, яким закінчується вивчення деякого розділу тієї чи іншої науки, якщо він проводиться неформально, слугує не тільки тому, щоб дати оцінку знанням студента, але й тому, щоб поповнити ці знання, дати можливість студенту — а іноді і самому викладачеві — подивитись на предмет обговорення з іншої точки зору, розширити кут огляду, з'єднати окремі елементи в єдину картину тощо. Як у старому анекдоті про те, що залік — це діалог двох розумних людей. І це насправді так! Тільки анекдот каже про те, що коли одна людина — дурень, то інша не отримує залік. В реальності ж некомпетентність, недбайливість, або лінощі однієї з сторін діалогу призводить до того, що учбовий процес виявляється незавершеним. Таким чином, програють обидві сторони діалогу.

Останнім часом з'явилось багато робіт з методики викладання вищої математики у вищих навчальних закладах, присвячених болонському процесу, зокрема рейтинговій системі оцінювання знань студентів. Наприклад, в [3] наголошується: «Рейтингова система оцінювання знань стимулює щоденну систематичну роботу студентів, знижує роль випадковості при здачі іспитів». Або в [4] ми читаємо: «Рейтингова система контролю і оцінювання знань, як показує практика, сприяє інтенсифікації учбового процесу і дозволяє відслідковувати динаміку роботи студента, враховувати при цьому її напруженість і результативність, корегувати ймовірні причини зниження успішності». Можна навести цілу низку подібних цитат. Складається враження, що всі вони написані під копірку («А що це таке — копірка?», — спитає сучасний студент і таким чином поповнить свій словарний запас). Але це чисто суб'єктивне враження аж ніяк не принижує цінність та правильність процитованих думок. Навпаки: це суб'єктивне враження тільки підкреслює той факт, що рейтингова система оцінювання знань студентів є об'єктивною необхідністю. Кількість методичних робіт на цю тему, їх активне обговорення та їх практичне використання породили нову якість, яка полягає в тому, що не варто вже доводити очевидне. Так, студент повинен працювати регулярно, систематично, напружено («щоденно» — це, мабуть, все ж таки є перебільшенням). Так, це сприяє інтенсифікації учбового процесу, кращому засвоєнню студентами знань тощо. Але…

Як цього досягти? Професор Н. О. Вірченко в [1] багато уваги приділяє творчому підходу викладача, зокрема до підготовки та проведення практичного заняття. Неабияку роль при цьому вона відводить індивідуальному підходу до роботи студентів на занятті. Цій же темі присвячена робота [5] О. О. Дем'яненко. Одночасно з цим в [2] Н. О. Вірченко каже: «Підкреслимо велике значення контролю за роботою студента. Контроль має пронизувати практичне заняття в цілому, бути в кожній його частині… Цінними і потрібними є контрольні роботи». Саме так. Індивідуальний підхід та фронтальний контроль — ось дві сторони тієї золотої монети, яка має назву «учбовий процес». Що таке індивідуальний підхід, усі розуміють. Але як його досягти, як зробити так, щоб контроль пронизував практичне заняття в цілому, знають одиниці, викладачі від бога. Отже, ця сторона монети — це ідеал, до якого кожний викладач прямує усе своє життя. Зосередимось на другій стороні цієї монети — на контролі. Контрольні роботи бувають модульними, семестровими, підсумковими тощо. Значення подібних заходів не підлягає сумніву. Але усі вони мають одноразовий характер, тобто підвищують роль випадковості при оцінюванні знань студентів. Інша справа — короткочасні контрольні роботи.

Короткочасна контрольна робота є однією з ефективніших форм контролю знань студентів. Будь яка контрольна робота проводиться в аудиторії. Кожний студент одержує при цьому індивідуальну картку, на якій зафіксовано певні завдання. На протязі певного часу студент повинен розв'язати ці завдання і зафіксувати свій розв'язок на окремому аркуші паперу. Після завершення контрольної роботи студент здає цей аркуш викладачеві, який перевіряє його роботу і повідомляє студенту оцінку, яку він одержав за цю роботу. Модульна, семестрова та інші види контрольних робіт вирішують як правило цілу низку методичних проблем, містять як правило декілька прикладів і задач як правило різної складнощі. На відміну від цього короткочасна контрольна робота в ідеалі повинна складатись з одного прикладу або однієї задачі. Проводитись короткочасна контрольна робота повинна на початку практичного заняття на протязі десяти, максимум п'ятнадцяти хвилин.

Яка мета короткочасної контрольної роботи? Перш за все, перевірити, як студенти засвоїли матеріал попереднього практичного заняття або попередніх лекцій. Ту ж мету переслідують і інші форми контролю: домашнє завдання, типовий розрахунок тощо. Але домашнє завдання, наприклад, розраховане на нерегламентований термін часу його виконання. Домашнє завдання, як правило, містить завдання різної складності, навіть такі, які вимагають від студента неабияких зусиль для їх розв'язання. Нарешті, перевірка виконання домашнього завдання — це окрема проблема, яка виходить за межі цієї доповіді. В той же час викладач має можливість на кожному занятті на протязі дуже короткого терміну перевірити, як студенти засвоїли основні факти, формули та поняття розділу, що був розглянутий на попередньому занятті. Достатньо швидко перевірити, як студенти вміють використовувати основні методи застосування цих формул. Коротше кажучи, за відносно короткий час перевірити базові знання студентів. Саме через це, як показало життя, завдання короткочасної контрольної роботи повинні бути типовими, стандартними, однорідними, тобто містити приклади однакової складності. Але й це неголовне. Завдання повинні бути такими, щоб досвіченому викладачеві було достатньо одного погляду на роботу студента для перевірки правильності їх розв’язання. Це дає можливість перевірити роботи студентів на протязі практичного заняття і проаналізувати типові помилки.

І на останок, як співав В. Висоцький, «позвольте пару слов без протокола: чему нас учит семья и школа?». Школа нас вчить тому, що кожний школяр знає — у нього в класі є як мінімум один учень, який нічого не знає, але одержує найвищі бали. А що ж сім'я? А в сім'ї цьому школяру кажуть, що несправедливість є іманентною рисою усього нашого життя. Тому що мати цього школяра працює в державній установі, де п'ятеро щось роблять, а двадцять п'ятеро перекладають папірці з місця на місце. Тому що батько цього школяра працює в приватній фірмі, очільник відділу якої не розуміє, чому трикутник із заданими сторонами не можна зробити прямокутним (реальний факт з життя). Ви спитаєте, до чого це я? А до того, що справедливість при оцінюванні знань студентів є найголовнішою справою. Так. Це є най-го-лов-ні-шим. Це є нАйголовнішим. І студенти це відчувають дуже добре. Як зауважив колись професор Я. Я. Рущицький, формула Тейлора не має сенсу, якщо залишковий член не прямує до нуля. Точно так же усі автогогіки, елективні чи дистанційні курси тощо не мають жодного сенсу, якщо не має справедливості при оцінюванні знань студентів. Що може забезпечити цю справедливість? Тільки ті форми контролю, які є регулярними. Наприклад, короткочасні контрольні роботи. Вони як краплі, які точуть камінь. На відміну від одноразових форм, як ударів по цьому каменю кувалдою. Влучив — добре. А не влучив…

Список літератури

1. Вірченко Н. О. Нариси з методики викладання вищої математики. — К., 2006.

2. Вірченко Н. О. Вибрані питання методики вищої математики. — К., 2003.

3. Барановська Г. Г., Барановська Л. В. Методичне забезпечення кредитно-модульної технології навчання в курсі вищої математики // Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». — К., 2013.

4. Казнадій С. П., Мурашковська В. П., Руновська Л. А. Аналіз засвоєння вищої математики студентами першого курсу // Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». — К., 2013.

5. Дем’яненко О. О. Про необхідність індивідуального підходу до вивчення курсу «Вища математика» в технічному вузі // Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». — К., 2013.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИДАКТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ АКТИВИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

В. И. Ерошевская, Е. Л. Ерошевская, Л. П. Минченкова
Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
lentt@tut.by

В многогранной работе, проводимой высшей школой по повышению качества подготовки будущих специалистов, одно из центральных мест принадлежит вопросам совершенствования самостоятельной работы студентов младших курсов технического университета.

Одним из путей управления познавательной деятельностью студентов является интенсивное использование системы дидактических материалов.

Основная форма теоретического обучения — лекция. Лекции по разделу «Математическая статистика» на факультете «Горного дела и инженерной экологии» отсутствуют согласно рабочей программе по дисциплине «Математика».

Так появилась необходимость составить учебно-методическое пособие по теме: «Математическая статистика». Часть 1 и часть 2.

Пособие включает вопросы к зачету, список литературы, краткие теоретические сведения. Теоретический материал иллюстрируется решением достаточного количества типовых примеров.

К каждому практическому занятию предложены задачи для аудиторной и внеаудиторной работы с ответами, а также составлены задания для самостоятельной работы.

Для удобства проведения занятий в пособии приведены таблицы значений функций, необходимые для решения задач.

Центральное место в развитии творческого подхода у студентов по решению различных задач занимает самостоятельная работа над изучаемым материалом.

Самостоятельная учебная работа — это планируемая работа студентов, выполняемая по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Управление — это определенная система, которая отвечает за развитие, обеспечивающее достижение конкретных целей.

Мы согласны с Т. Ф. Талызиной, которая считает, что «управлять процессом обучения — это не подавлять, не навязывать процессу ход, противоречащий его природе, а, наоборот, максимально учитывать природу процесса, согласовывать каждое воздействие на процесс с его логикой. При управлении процессом учения, как и любым другим, свобода выступает как осознанная необходимость» [4].

Путем управления мыслительной деятельностью обучаемых преподаватель должен возбуждать их интерес к содержанию изучаемого материала.

Успех педагогического процесса обеспечивается, прежде всего, отношением к нему. Любовь преподавателя к своему предмету, к педагогической деятельности — это основа качества его учебно-воспитательной работы.

Л. Д. Кудрявцев отмечает, что «только тот имеет право воспитывать и только тот будет это делать успешно, кто чувствует ответственность за свою работу, интересуется ею, любит ее, испытывает чувство волнения за ее исход, убежден в правильности тех принципов, которыми он руководствуется, кто тактично относится к людям, умеет терпеливо выслушивать чужое мнение и ненавязчиво отстаивать собственную точку зрения, кто испытывает удовольствие от общения с людьми, кто способен радоваться успеху других» [3], с. 7.

На наш взгляд, большую роль в ритмичности самостоятельной работы студентов младших курсов технического университета играет регулярный контроль над выполнением аудиторных и внеаудиторных заданий.

Для оценки эффективности целенаправленного применения системы дидактических материалов нами использовалась методика, описанная В.П.Беспалько [2], с. 59.

Мы считаем, что на каждом практическом занятии по разделу: «Математическая статистика» необходимо оценивать умения и навыки по качественному выполнению домашнего задания по десятибалльной шкале. При этом важным моментом является подбор задач, в которых требуется получить оптимальное решение.

Список литературы

1. Ерошевская В. И., Ерошевская Е. Л., Минченкова Л. П. Математическая статистика. Методическое пособие в 2 частях. Часть 1, Минск, БНТУ, 2013.

2. Беспалько В. П. Слагаемые педагогической технологии. — М.: Педагогика, 1989. — 192 с.

3. Кудрявцев Л. Д. Современная математика и ее преподавания. — М.: Наука, 1982. — 140 с.

4. Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 273 с.

РАЗВИТИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ АКТИВНОСТИ СТУДЕНТА ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

А. В. Золотая

Донецкий национальный университет, Донецк, Украина

a.zolotaya@donnu.edu.ua

Специфика современной системы фундаментального образования проявляется в том, что любая образовательная система должна не только давать знания обучающимся, но и вследствие постоянного и быстрого обновления знаний формировать у них потребность в самостоятельном непрерывном овладении ими. Таким образом, современное общество ставит перед учебными заведениями, особенно вузами, цель не только получения знаний, формирования умений и навыков, но и развитие познавательной активности обучающихся студентов. Основной проблемой, помимо прочих, к сожалению, здесь является очень слабая базовая (на основе собственного опыта, математическая) подготовка подавляющего большинства студентов, что делает актуальным спрос на студента активного и самостоятельного.

Познавательную активность можно понимать как условие формирования у студентов потребности в знаниях, овладения умениями интеллектуальной деятельности, самостоятельности, обеспечения глубины и прочности знаний. Существует противоречие в самом образовательном процессе. С одной стороны, это в некоторой степени, диктат преподавателя как организатора процесса обучения. С другой стороны, перед преподавателем стоит задача развивать у студента познавательную активность, т.е. он старается максимально приблизить студента к самоуправлению собственной познавательной деятельностью для самостоятельного продвижения в знаниях, одновременно организовывая учебный процесс и управляя им.

Проблема активизации познавательной деятельности достаточно хорошо исследована и представлена в психологической и педагогической литературе. Хотелось бы выделить несколько основных направлений исследований, касающихся содержания понятия «познавательная активность»:

- познавательная активность рассматривается как естественное стремление студента к познанию;
- познавательная активность понимается как характеристика деятельности: её интенсивность и напряжённость;
- познавательная активность трактуется как качество личности, включающее в себя стремление к познанию.

Есть некоторые недостаточно разработанные аспекты этой проблемы. Например, такие, как:

1. «Личностно-ориентированный подход в организации познавательной деятельности студентов с учётом специфики студенческого возраста».
2. «Диагностика познавательной активности студента».

Особый интерес вызывает проблема педагогической диагностики, понятие которой предполагает совокупность методов, позволяющих получить наиболее достоверную информацию о ходе образовательного процесса с целью выявления, анализа, оценивания и корректировки процесса обучения.

Основные функции педагогической диагностики:

- стратегически-информационная;
- тактически-коррекционная;
- прогностическая.

Главными составляющими педагогической диагностики являются контроль, проверка и оценивание знаний и умений обучаемых. Многие преподаватели считают данные понятия тождественными, но это не совсем так.

Контроль — система проверки результатов обучения студентов, средство установления прямой и обратной связи между преподавателем и студентом.

Выделяют следующие виды контроля:

- предварительный;
- текущий;
- периодический;
- тематический;
- рубежный;
- итоговый.

Вторым компонентом педагогической диагностики является проверка знаний и умений учащегося. Выявление и измерение называют проверкой. Проверка — это составной элемент контроля.

Кроме проверки, контроль предполагает оценивание (как процесс) и оценку (как результат) проверки. Проверка и оценка знаний — составляющая часть процесса обучения и осуществляется путём систематического контроля над учебной деятельностью обучающихся с помощью практических заданий и непосредственного наблюдения за их работой.

Проверка знаний выполняет следующие функции:

- контролирующая;
- обучающая;
- воспитательная;
- развивающая;
- обобщающая;
- корректирующая;
- информационная.

Обучение в высшей школе является сложным дидактическим и одновременно психологическим процессом. Этот процесс обусловлен рядом противоречий, главное из которых — несоответствие традиционных методов, форм обучения и воспитания новым тенденциям развития системы образования.

ВИКОРИСТАННЯ МУЛЬТИМЕДІА ТЕХНОЛОГІЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛІ

С. П. Мошак
ДВНЗ «Запорізький національний університет», Запоріжжя, Україна
sofia.moshak@yandex.ua

Скажи мені — і я забуду,
Покажи мені — і я запам'ятаю,
Залучи мене — і я зрозумію.
Стародавня китайська мудрість

Створені сучасні інформаційні і комунікаційні технології ведуть до справжньої революції в освіті, зокрема в навчальному процесі школи.

Важливим засобом організації сприйняття інформаційного матеріалу є кольорове і графічне оформлення. Мультимедіа — це засіб пізнання. Сучасні комп'ютерні технології надають величезні можливості для розвитку процесу освіти. Ще Ушинський К.Д. зауважив: «Дитяча природа вимагає наочності». Зараз це вже не схеми, таблиці і малюнки, а більш близька дитячій природі гра, нехай навіть і науково-пізнавальна. Демонстрація як би керує «живим споглядfestанням» інформації, учні непомітно навчаються відзначати ту чи іншу особливість інформаційного повідомлення, яке таким чином надходить до їх свідомості.

Принцип наочності — найважливіший принцип викладання. Комп'ютерна демонстрація наочного матеріалу дозволяє подати його послідовно по мірі розповіді вчителя, не порушуючи його логіки.

Що представляє з себе комп'ютерна демонстрація? Це слайди, виконані в програмі PowerPoint. Це може бути презентація: комп'ютерна розробка уроку або розробка теми з цілями і завданнями, основною частиною і висновком, тобто з певною закінченою структурою. Але, все-таки, в основному — це слайди, які створені для допомоги вчителю при поясненні нового матеріалу. Вони не охоплюють весь матеріал уроку, а допомагають розкрити ті чи інші питання теорії. При бажанні вчитель, створюючи комп'ютерну розробку уроку, може зробити просто посилання на цей демонстраційний матеріал. Слід врахувати, що це не просто статичні картинки, в них використовуються анімаційні ефекти з метою простежити логіку того чи іншого визначення, властивості, ознаки.

Демонстраційний матеріал (слайди) створюється з метою забезпечення наочності при вивченні нового матеріалу, використання при відповідях учнів. Застосування анімації при створенні такого комп'ютерного продукту дозволяє розглядати питання математичної теорії під час руху, забезпечує інший підхід до вивчення нового матеріалу, викликає підвищену увагу та інтерес в учнів.

Виділяють наступні особливості даної технології:

- Якість зображення, що виконується крейдою на дошці, не витримує ніякого порівняння з акуратним, яскравим, чітким і кольоровим зображенням на екрані.

• З допомогою дошки та крейди важко і безглуздо пояснювати роботу з різними додатками.

• У випадках виявлення у слайдах недоліків або помилок, можна порівняно легко усунути дефекти.

• Залежно від підготовленості учнів один і той же матеріал можна пояснювати і дуже докладно, і розглядаючи основні питання теми. Темп і обсяг викладеного матеріалу, визначається по ходу уроку.

• Під час демонстрації презентації, навіть із застосуванням проектора, робоче місце учнів досить добре освітлено.

• Підвищення рівня використання наочності на уроці.

• Підвищення продуктивності уроку.

• Встановлення міжпредметних зв'язків з іншими предметами.

• З'являється можливість організації проектної діяльності учнів зі створення навчальних програм під керівництвом викладачів інформатики та вчителями-предметниками.

•Викладач створює або використовує інформаційні технології, змушений звертати величезну увагу на логіку подачі учбового матеріалу, що позитивним чином позначається на рівні знань учнів.

• Змінюється ставлення до ПК. Діти починають сприймати його як універсальний інструмент для роботи [3].

Використання на уроках мультимедійного проектора виводить процес навчання на якісно новий рівень. Не можна скидати з рахунків і психологічний фактор: сучасній дитині набагато цікавіше сприймати інформацію саме в такій формі, ніж за допомогою застарілих схем і таблиць.

Таким чином, взаємопов'язане вивчення інформатики та математики дозволяє познайомити школярів з елементами дослідницької математичної діяльності та застосувати комп'ютер в якості робочого інструменту дослідження. Такий підхід у вивченні сприяє розвитку творчої активності учнів, дає можливість здійснити інтеграцію навчальної та організаційної діяльності учня і вчителя, здійснити поєднання індивідуального підходу з різними формами колективної навчальної діяльності, враховуючи рівневу диференціацію.

Використання медіазасобів має бути доречним, доцільним, як використання будь-яких засобів наочності і технічних засобів навчання. Я вважаю, що молодим вчителям простіше розібратися в цьому, але дуже важко для вчителів з великим стажем роботи, тому навчання таких вчителів лягає на плечі, або вчителя інформатики або вчителя, вихователя, який розбирається в мультимедійних технологіях.

Список літератури

1. Новіков С. П. Застосування нових інформаційних технологій в освітньому процесі //Педагогіка. — 2003. — №9. — С. 25–28.

2. Полат, О. С. Нові педагогічні та інформаційні технології в системі освіти /О. С. Полат. — М: Видавничий центр «Академія». — 1999. — С. 224

3. Захарова, В. Р. Інформаційні технології в освіті: навчальний посібник для студ. пед. навч. закладів/ В. Р. Захарова,— М: Видавничий центр «Академія», 2003. — 192 с.

4. Коджаспирова, Р. М. Технічні засоби навчання і методика їх використання/ Коджаспирова Р. М., Петров К. В. — Учеб. посібник для учнів высш. пед. навч. закладів. — М: Видавничий центр «Академія», 2001. — 256 с.

ДІЄВИЙ ПІДХІД ГУМАННОЇ ПЕДАГОГІКИ У ВИШІ

О. В. Овчаренко
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
lena_rum@ukr.net

Необхідність морального виховання стає очевидною не лише для педагогів. На думку соціальних аналітиків, саме виховання моральності в поєднанні з розвиваючим навчанням в найближчі роки має стати пріоритетним напрямком у педагогічній діяльності.

Одним з основних принципів такої педагогічної діяльності є гуманістичний і розвиваючий характер навчання, серед пріоритетних завдань якого слід виділити завдання розвитку творчих, духовних можливостей, основ моральності, прилучення до досягнень світової та вітчизняної культури [1, 3].

Повноцінна реалізація цих принципів і завдань вимагає нового педагогічного мислення — «гуманного педагогічного мислення». Так визначив педагогічну концепцію Ш. А. Амонашвілі, педагог, професор, популяризатор ідей гуманної педагогіки, керівник Міжнародного центру гуманної педагогіки, прямий послідовник основоположників гуманної педагогіки, принципи якої сформували і стверджували Песталоцці, Я. А. Каменський, Л. М. Толстой, А. С. Макаренко, В. О. Сухомлинський. Основа гуманної педагогіки — визнання існування духовної основи в людині і вибудовування принципів виховання і освіти відповідно до цього положення. Головним завданням при цьому Ш. А. Амонашвілі бачить преображення вчителя та викладача. Вони повинні почати зміни з себе, працювати над собою. Тоді зможуть з'явитися і якісно інші підходи до освіти, і навчальні посібники, і програми.

Ідеями Гуманної педагогіки необхідно пронизувати і навчання студентів в сучасному вищому навчальному закладі.

Основними постулатами гуманного педагогічного мислення є [2]:

— віра в можливості учня;
— розкриття самобутньої природи в кожній людині;
— повагу і затвердження його особистості;
— направлення його на служіння добру і справедливості.

Не піддаючи сумніву, значимість знань у становленні особистості, тим не менш, можна стверджувати, що якість знань, цінність ідей, думок і діяльності людини, визначаються не тільки глибиною самих знань, а й їх духовної насиченістю.

Чи треба стверджувати, що для суспільства вкрай небезпечно давати бездуховному, аморальному, безсердечному людині сучасні знання. Занадто великий буде шкода для всіх. Сучасні технології — небезпечний інструмент у руках аморальних.

Здавалося б, бачачи проблеми, ставлячи перед собою конкретні завдання, педагогічний колектив вишу повинен злагоджено орієнтуватися на прищеплення студентам високої духовності, яка втілює в собі сукупність ідей і почуттів добра і любові, совісті і співчуття, прагнення до знань і творчості. Однак, поширення технократичного снобізму на всіх рівнях, навіювана повсюдно думка про професіоналізм та компетентність, позначених як головне в житті і діяльності людини, домінує як у прийнятті управлінських рішень, так і в дидактиці, в той час як духовно-моральним якостям людини особливого значення не надається. Звідси суперечки і неузгодженість дій не тільки в масштабі країни, але і в масштабі вузу.

Якщо ми запитаємо школяра, підготовлюваного вступати до вузу: «Навіщо ти йдеш до університету?». Відповідь буде однозначною: «Вчитися». Який сенс він вкладає в це дієслово? Швидше за все, дуже смутний, але він вже знає, що до навчальних закладів ходять «за знаннями». У виш приходять деколи інфантильні, не привчені до праці в навчанні, соціально незрілі молоді люди. «Теоретично» вони готові як-небудь без зусиль отримати в вузі належну їм суму знань і приступати до роботи, дивувати своїми здібностями світ. У вузі вони, часом, потрапляють до викладача, який вважає своєю метою і обов'язком будь-що «дати знання». Свого часу цей викладач, наприклад, з вищої математики, «завчив і запам'ятав» доведення теорем і масу математичних формул. Тепер «вдовблює» студентам готові знання за принципом: «Не знаєш — навчимо, не хочеш — змусимо». Віра в верховенство знань, в їх самодостатність — це одне з наймасовіших помилок вчителів і викладачів, а слідом за ними і багатьох людей взагалі. У вузі треба вчити працювати. Поки ж авторитарна система навчання у нас розглядається без системоутворюючого фактора — діяльності учня. Методологічні підстави для дидактичних розробок залишаються колишніми, хоча часто декларуються «системно — дієвий», «онтодидактичний», «системний» і інші підходи. Дидактична теорія, на жаль, не змінюється. Гуманна система навчання академіка Амонашвілі, в першу чергу, включає студента та учня в навчальну роботу, в активне засвоєння знань.

Ось і постає питання: чи вкладати студенту менторським тоном і повчаннями викладацькі знання, або захопити його дидактикою, озброїти науковим підходом, методологією, пояснити не рецепти, а принципи, не як робити, а що робити. Треба навчити у вузі вчитися, щоб потім робити це все життя. Зрозумівши принципову суть справи, молоді люди самі можуть реалізовувати дієвий підхід.

Список літератури

1. Амонашвили Ш. А. Основы гуманной педагогики. Кн. 1. Улыбка моя, где ты? — М.: Амрита, 2012. — 314 с.

2. Амонашвили Ш. А. Без сердца, что поймем. Москва: ИД Ш. Амонашвили, 2004. — 64 с.

3. Амонашвили Ш. А. Педагогические притчи. — Москва: Амрита-Русь, 2013. — 240 с.

АКТИВІЗАЦІЯ НАВЧАННЯ ЗАЛУЧЕННЯМ ЕЛЕМЕНТІВ ГРИ НА КОМП'ЮТЕРНИХ СТУДІЯХ

А. О. Приходько, О. П. Приходько
Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна, Харків, Україна
prykhodkoaa@gmail.com, o_pryhodko@ukr.net

Відповідно до основних засад педагогічної психології [1,2,3,4], найважливішими чинниками в процесі навчання є пам'ять, апперцепція (увага) і уявлення.

Сучасна педагогічна психологія стверджує, що найінтенсивніший розвиток особистості відбувається не на уроці, як вважає переважна більшість викладачів, а в сфері вільного спілкування, дозвілля, праці, улюблених занять і гри. Гра — це іскра, що запалює вогник допитливості і любові до знань. Ігри здатні в захоплюючій формі надати до сприйняття і сприяти засвоєнню системи складних наукових уявлень, створюючи цілісну картину навколишнього світу на основі сучасних наукових теорій та гіпотез.[5]

Для активізації пізнавальної діяльності кращим видом гри є гра-змагання, таким чином, навчання в комп'ютерній студії дозволяє занурити слухачів в змагальну гру, що забезпечує:

1) Утримування увагу учнів шляхом детального добору завдань і візуалізації результатів на екрані монітора.
2) Сприяння прискоренню процесу запам'ятовування й оволодіння засадами предметної галузі шляхом залучення слухового, зорового та моторного сприйняття.

Останнє дуже важливе згідно з наявністю трьох основних типів мислення і психомоторної активності, як сукупності властивостей поведінки людини [6].

Отже, для психомоторики важливі не форми й межі (фізичні чи духовні), а здатність до дії (емоційної, пізнавальної та естетичної). Звідси сутність психомоторики — закладена в матеріалізації неподільних і злитих у цілісність образів, почуттів, думок і рухів людини. Це, у свою чергу, сприяє прискореному і поглибленому розвою фахового уявлення , а отже й оволодінню засадами нової предметної галузі.

Цікаво відзначити, що запам'ятовування через моторику рук, а також, візуальних і звукових образів закарбовується глибше і міцніше ніж абстрактно-логічне опановування певних тем. Утворення рухового автоматизму, що лежить в основі навичок розв'язування вправ і задач, являє собою завершальний етап у виконанні психомоторної дії.

Відзначимо окремо, дві альтернативні форми залучення до гри-змагання: мимовільна (непряма) та довільна (явна навчаюча програма).

Хоча на перший погляд навчаючі програми мають очевидні переваги, але вони не завжди забезпечують оптимальні умови навчання, а застосування сучасних коучінг-методів педагогіки передбачає персонально-партнерський стиль спілкування з учнями і вимагає застосування мимовільного методу як більш персоналізованого і гнучкого.

Зауважимо, що творчий елемент у навчанні живиться допитливістю, проявляється при виконанні завдань і реалізується через механізм творчості: він — прижиттєве новоутворення із складових душі — мислення, почуттів та уяви й тіла людини — психомоторики і енергопотенціалу; продуктивно працює, за умови пропорційного розвою складових та синергії між ними.

Однією з найважливіших складових творчості є пам'ять як психо-фізичний процес зберігання і використання знань.

Систематизація видів пам'яті за характером психологічної активності була вперше запропонована П. П. Блонським. Всі чотири виокремлені ним види пам'яті (рухова, емоційна, образна і словесно-логічна) не існують незалежно один від одного, більше того, перебувають у тісній взаємодії.

Зауважимо, що запам'ятовуванню сприяє, залучення уяви та асоціації. Тому традиційне складання конспекту, схем — потужний засіб запам'ятовування, де задіяні декілька видів пам'яті: моторна (записування), образна (фіксація зорового образу), словесно-логічна (витворення певних асоціацій).

Однак, при роботі з комп'ютером відповідні можливості набувають небаченого розвою: від маніпуляції з мишкою і клавіатурою до систем віртуальної реальності. Зазначимо також, що для «дружнього» інтерфейсу програмні реалізації таблиць, листів, течок та ін., відтворюється згідно з їх фізичними аналогами, що також сприяє запам'ятовуванню.

Відповідно до мети діяльності пам'ять поділяють на мимовільну і довільну:

мимовільна — полягає в автоматичному, без контролю з боку свідомості запам'ятовуванні і відтворенні об'єктів;

довільна — вимагає вольових зусиль людини з метою запам'ятовування. (заучування віршів, таблиць…).

У часовому просторі виокремлюють короткотермінову і довготермінову пам'яті. Обсяг короткотермінової пам'яті особистий. Він характеризує природну людину і зберігається, зазвичай, у терміні усього життя.

В довготермінову пам'ять можна перевести набагато більше інформації, ніж дозволяє індивідуальний обсяг короткочасної пам'яті.

Щодо оптимізації процесів запам'ятовування (мнемічних процесів) важливе наступне:

Згідно з теорією діяльності [2] Леонтьєв А.М. відкрив і ретельно дослідив систему мнемічних ефектів: ефект інтерференції мнемічних та «пізнавальних» завдань; структурно-дійовий ефект (матеріал, що відповідає меті дії, запам'ятовується більш ефективно ніж аналогічний матеріал, що відноситься до умов досягнення мети); негативний ефект віку (перевага першокласників над більш старшими віковими групами в мимовільному запам'ятовуванні чисел при розв'язуванні арифметичних задач). Відзначимо окремо, «ефект генерації» (generation effect), відкритий американськими когнітивними психологами Н. Сламека(NJ Slamecka) і П. Граф (P. Graf «The generation effect: delineation of a phenomenon», 1978): краще запам'ятовується матеріал, котрий суб'єкти витворюють самостійно, в порівнянні з аналогічним матеріалом, котрий їм надається. Останній можна вкласти в структурно — діяльнісний ефект Зінченко.

Сучасний комп'ютер являє собою універсальний інформаційний пристрій, здатний задіяти візуалізацію, аудіолізацію, психомоторику та інші форми віртуальної реальності.

Отже, дозволяє будувати процес навчання у формі мимовільної гризмагання згідно наведених психологічних ефектів:

- ефект інтерференції завдань: здійснюється безпосередньо формуванням різноманітних асоційованих проблем, пов'язаних через комп'ютерні проблемно-орієнтовані пакети-оболонки або ширше через спеціалізовані мережі комп'ютерів.
- структурно–дійовий ефект: здійснюється побудовою спеціалізованих когнітивних завдань, котрі мають різні шляхи виконання.

З метою застосування «ефект генерації» важливо залучати абстрактні проблемно-орієнтовані програми-оболонки для розв'язування творчих завдань, а також графічно-анімаційні пакети та аудіо системи для моделювання складних ситуацій.

Роль викладача полягає в не директивно–командній фабулі, а в співпраці толерантного порадника, котрий дає інформацію відповідно до рівня знань учня.

Отже, для сприяння посилення інтелектуальної активності, ми маємо гармонійно розвивати всі його складові; гармонія особи закладена в оптимальному стані душі(мислення, почуття й уява) і тіла (енергопотенціал і психомоторика) [5].

Список літератури

1. Выготский Л. С. Педагогическая психология. В кн. Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. — М., МГУ, 1980. — С. 49.

2. Леонтьев А. Н. Овладение учащимися научными понятиями как проблема педагогической психологии. В кн. Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. — М.: МГУ, 1980. — С.161.

3. Зинченко П. И. О забывании и воспроизведении школьных знаний. В кн. Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. — М.: МГУ, 1980. — С. 244.

4. Клименко В. В. Механизмы психомоторики // Общая психология под ред. акад. С. Д. Максименко. — М.: Рефл-бук, — К., Ваклер, 1999. — С. 364–417.

5. Караєв Ж. А. Активизация познавательной деятельности учащихся в условиях применения компьютерной технологи обучения. Автореф. дис. на соиск. учен. степ. д-р. пед. наук / Алмаатинский университет им. Абая. – Алма-Ата, 1994. – 48с;

6. Приходько О. П. Інтенсифікація процесу навчання методам статистичного аналізу в гуманітарній освіті шляхом застосування сучасних комп'ютерних технологій. Зб. ст. Проблеми сучасної освіти. Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, 2009 р.

ДЕЯКІ ПРОБЛЕМИ СИСТЕМИ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ УКРАЇНСЬКОЇ ОСВІТИ

Н. П. Селезньова
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
Koniwa@yandex.ua

Українські школярі за результатами дослідження якості природничо-математичної освіти TIMSS увійшли до двадцятки кращих, як засвідчив заступник Міністра освіти Борис Жебровський 27 грудня 2012 року на прес-конференції «Результати участі України у міжнародному дослідженні якості природничо-математичної освіти учнів 8 класів» TIMSS-2011.

Подивимось, що ж маємо насправді у сфері шкільної математичної освіти. На перших же заняттях з першокурсниками викладачі вищої математики технічного університету виясняють, що значна частина студентів не володіє елементарними знаннями з арифметики. Багато студентів не вміють виконувати арифметичні дії не тільки над дробами, а і над від’ємними числами. При цьому дивує те, що такі студенти мають досить високі бали з математики в шкільному атестаті. Отже виникає питання об’єктивного і валідного оцінювання якості знань школярів з математики.

Так показовою є кореляційна матриця, складена на основі оцінок студентів першокурсників соціологів з алгебри та геометрії в шкільному атестаті і КРЗЗ — контрольної роботи з елементарної математики, проведеної в КПІ (при вступі на ФСП студенти не складають ЗНО з математики).

	алгебра	**геометрія**	**КРЗЗ**
алгебра	1	0.914	0.346
геометрія		1	0.230
КРЗЗ			1

Як бачимо, коефіцієнт кореляції між оцінками, отриманими в школі та на вхідному контролі в КПІ є досить низьким, що вказує на невідповідність вимог до рівня знань з математики в школі та в КПІ.

Цікавими є наступні показники отримані у вересні 2013 р. в результаті проведення вхідного контролю з елементарної математики серед студентів соціологів (ФСП).

	математика	**КРЗЗ**
Сер. бал	8.613	9.675
Sigma	1.512	16.417
Var	17.560	169.685
Moda	8	0
Mediana	8	0
Asimetria	-0.153	2.866
Ekscess	0.151	10.312

Сер. бал. — середній бал, отриманий студентом з математики в шкільному атестаті за 12-бальною шкалою. Sigma — середньоквадратичне відхилення, Var — коефіцієнт варіації:

$$Var = \frac{\sigma}{\bar{x}} 100$$

де σ — Sigma; $\bar{x}$ — середнє арифметичне значення). Коефіцієнт варіації визначається у відсотках і показує як коливається ознака у сукупності. Як видно з таблиці — маємо дуже високий показник варіації з КРЗЗ, що свідчить про досить велику різницю у рівні знань з елементарної математики у студентів (КРЗЗ — оцінювалось за 100-бальною шкалою). Суттєво великі значення коефіцієнтів асиметрії та ексцесу також свідчать про неоднорідність та скошеність оцінок з КРЗЗ.

Для порівняння наведемо кореляційну матрицю оцінок першокурсників-механіків (ММІ) з алгебри, геометрії (шкільний атестат) та ЗНО і КРЗЗ.

	алгебра	**геометрія**	**ЗНО**	**КРЗЗ**
алгебра	1	0.775	0.578	0.455
геометрія		1	0.496	0.428
ЗНО			1	0.585
КРЗЗ				1

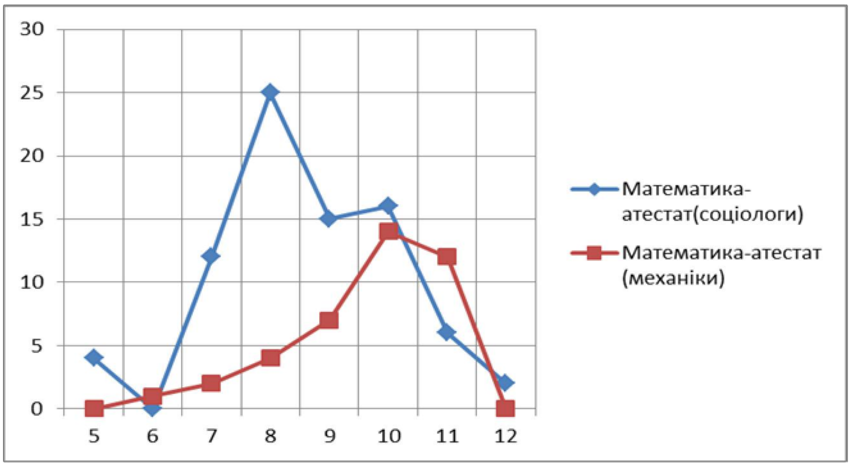
Як бачимо з цієї таблиці, коефіцієнти кореляції між оцінками з шкільного атестату, та КРЗЗ є хоч і низькими, але при цьому вищими ніж у соціологів.

Розглянемо точкові показники оцінок студентів — механіків.

	математика	**КРЗЗ**	**ЗНО**
Сер. бал	9.675	26.350	178.05
Sigma	1.273	19.893	9.546
Var	13.153	75.495	5.361
Moda	10	-	183
Mediana	10	18.5	181
Asimetria	-1.015	0.778	-0.665
Ekscess	0.602	-0.340	0.071

Середній бал механіків з математики в шкільному атестаті є трохи вищим за відповідний середній бал у соціологів, але при цьому є суттєво вищим середній бал у механіків з КРЗЗ. Коефіцієнт варіації з КРЗЗ є досить високим, але більше ніж у два рази менший за коефіцієнт варіації у соціологів.

За допомогою наступних графіків можна порівняти оцінки отримані нинішніми студентами соціологами та механіками в шкільних атестатах.



Як видно з цих графіків, оцінки механіків у шкільному атестаті є нижчими ніж оцінки соціологів і у той же час як засвідчує КРЗЗ у них знання з математики є суттєво кращими ніж у соціологів.

Показовим також є те що серед робіт з КРЗЗ у соціологів 53% нульових (тобто жоден приклад не розв'язаний). У механіків нульових робіт — 10%.

На соціологію поступали в основному випускники гуманітарних шкіл, а на ММІ (механіки) — випускники загальноосвітніх шкіл та фізико-математичних.

Отже можна зробити висновок, що при однакових оцінках з математики у школі, випускники мають суттєві відмінності у рівні математичних знань, що породжує суттєві проблеми не тільки подальшому навчанні у ВНЗ а і має певні соціальні наслідки.

СУЧАСНИЙ ДИДАКТИЧНИЙ ЗАСІБ — ЕЛЕКТРОННИЙ ІНТЕРАКТИВНИЙ ПЛАКАТ

А. Ю. Субота
ДВНЗ «Запорізький національний університет», Запоріжжя, Україна
nastya.subota@yandex.ru

У незримому майбутньому вища школа як і раніше буде залишатися класно-урочною, тому необхідно розглядати перспективи підвищення ефективності цієї системи з оснащенням кабінетів дидактичними і технічними засобами навчання, а також підвищення рівня інформаційно-технологічної культури вчителя. Актуальності набуває застосування на практиці мультимедійних та інтерактивних технологій. Їх сутність ґрунтується на постійній активній взаємодії учнів та вчителя. Термін «інтерактивність» походить від англійського слова interaction, яке в перекладі означає «взаємодію». Інтерактивність — це двосторонній діалог між викладачами та учнями, мета якого допомогти учневі перетворити інформацію загального характеру в особисте знання [5, с.1]. Взаємодію між вчителем та учнями досить зручно реалізувати з використанням комп`ютерної техніки. Мультимедійні заняття з використанням інтерактивної дошки розквітають новими гранями. До сих пір накопичилося достатньо методичного супроводу по роботі з інтерактивною дошкою. В основному її використання залишається на рівні емоцій і інтуїції. Застосування інтерактивної дошки посприяло появі наочно-дидактичних засобів більш високої, ніж традиційні, якості — інтерактивного електронного плакату.

Електронна енциклопедія Вікіпедія подає коротке визначення терміну у традиційному розумінні: плакат (нім. Plakat) — вид графіки, зображення, що впадає в око, на великому аркуші паперу з коротким супроводжувальним текстом, що створено з навчальною, агітаційною, рекламною та інформаційною метою [3].

Існують такі педагогічні програмні засоби, типу «Конструктор інтерактивних плакатів», Web 2.0, Cacoo, ThinkLink, Picstag, які призначені для створення електронних інтерактивних плакатів з метою забезпечення високого рівня наочності навчального матеріалу. Електронний плакат подає навчальний матеріал у вигляді інтерактивних елементів (зображення, тексту), до яких за допомогою гіперпосилань приєднані дидактичні матеріали, а саме: текстові документи, графічні зображення, відео та аудіо файли, презентаційні матеріали, допоміжні навчальні засоби та інші. Інформація учневі пред’являється не відразу, вона «розгортається» залежно від керуючих впливів користувача: вчителя при викладанні навчального матеріалу, учня при самостійній роботі. Зазвичай такі плакати головним фоном мають основне зображення (велике головне зображення), воно може бути як зображенням (картинкою), так і заливкою. На головному зображенні можуть розташовуватися як маленькі зображення (іконки) так і текст (надпис, назва, заголовок), які мають посилання на дидактичні матеріали. При підведенні курсору до зображення (іконки) воно збільшується та під ним з’являється короткий опис, який за необхідністю додається при створенні плакату, якщо курсор відвести від іконки, вона повертається до початкового розміру. При натисненні на зображення (іконку) або текст (надпис) відкривається файл (документ), який прикріплений до них за допомогою гіперпосилань [5, с.2].

Інтерактивний електронний плакат є сучасним багатофункціональним засобом навчання, який надає широкі можливості для організації навчального процесу. Це свого роду укрупнена дидактична одиниця, дидактичний багатомірний інструмент (за В.Е. Штейнбергом), де забезпечується багаторівнева робота з певним обсягом інформації. На відміну від мультимедійного уроку інтерактивний плакат може бути тільки багаторівневим і багатофункціональним, який забезпечує, наприклад, як вивчення нового матеріалу, так и закріплення, зворотній зв'язок і контроль за якістю засвоєння отриманої інформації [6, с.20].

Учителі-практики (Е. Африна, Г. Аствацапуров, А. Асаінова, А. Сальдіна) зазначають, що порівняно з іншими електронними навчальними засобами інтерактивний плакат більш орієнтований на педагога як активного користувача, а ефективність застосування плакату цілком залежить від професійного досвіду та методичної культури та творчості педагога. Досвід показує те, що електронна презентація на уроці не може складатися із надто великої кількості слайдів. Часта зміна кадрів призводить до зниження рівня уваги учнів. Електронний плакат дозволяє «концентрувати» навчальну інформацію кількох слайдів у вигляді «навчальної опори», опорного конспекту, який можна використовувати як на етапі вивчення нового матеріалу, так і на етапах закріплення і контролю [4].

Електронний інтерактивний плакат може містити теоретичні відомості, опорний конспект, історичну довідку, біографії вчених для розширення світогляду учнів, табличні довідкові матеріали для розв`язання задач, системи вправ для проведення математичних диктантів, письмового опитування, самостійної роботи (з можливістю друкування) тощо. Головна умова: щоб усі ці елементи були об'єднані в одне ціле. Тобто може бути одна тема, один розділ тощо [5, с. 3].

Рис. 1

Інтерактивний плакат може використовуватися протягом кількох уроків. Дидактично виправдане буде застосування такого плаката на узагальнюючому уроці, коли необхідно узагальнення, підведення підсумків, провести з учнями операції аналізу, синтезу, класифікації і т.д.

Із рисунка 1 видно, що структурно інтерактивний плакат складається з плаката першого плану і ряду підпорядкованих йому сцен. Це може бути схоже на «меню», яке, як правило, являє собою перший слайд. Це свого роду структура, з якої вимальовуються загальні контури великої теми. І в той же час окремі компоненти плаката першого рівня дозволяють отримати початкове уявлення про загальний зміст і сенс великого інформаційного блоку.

Особливості організації роботи вчителя з інтерактивним плакатом полягають в можливості застосування диференційного підходу до викладання нового матеріалу в класах з різним рівнем підготовки, та дає змогу вчителеві урізноманітнювати порядок подання матеріалу, співвідносити обсяг між теоретичного та практичного матеріалу, розширити можливість застосування мультимедії (відео, анімація) та наочних посібників в організації самостійної роботи учнів [1, с.75].

Інтерактивний плакат використовується з метою пояснення нового матеріалу, для організації повторення та узагальнення вивченого матеріалу, перевірки знань учнів, для організації індивідуальної роботи з учнями, які під час вивчення теми хворіли та не відвідували заняття. Практика застосування вчителями плаката засвідчила, що вчитель для викладу основного навчального матеріалу економить 3-5 хв. Заощаджений час використовується на цьому ж уроці для закріплення матеріалу та для перегляду цікавих фактів про параболу, що дає можливість зацікавити учнів до вивчення даної теми.

Таким чином, інтерактивний електронний плакат є педагогічним програмованим засобом, за допомогою якого дидактичні матеріали подаються у вигляді інтерактивних елементів, і реалізований засобами MS Office, VBA або спеціальними програмами. Інтерактивний електронний плакат є сучасним багатофункціональним засобом навчання, який може бути повноцінною навчальною наочністю, а також надати вчителю можливість ефективніше організувати навчальний процес.

Список літератури

1. Бєльчев П. В. Інтерактивний електронний плакат як сучасний дидактичний засіб навчання фізики в загальноосвітній школі [Текст] / П. В. Бєльчев // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету. (Педагогічні науки) / Бердян. держ. пед. ун-т. — Бердянськ : БДПУ, 2011. — № 2. — С. 73–77.

2. Бєльчев П. В. Реалізація сучасних принципів навчання математики за допомогою інтерактивної дошки Smart Board / П. В. Бєльчев, Т. І. Таблер //Гуманітарний вісник — Додаток 1 до Вип. 27, Том IV (37): Тематичний випуск «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору». — К.: Гнозис, 2012. — С. 36–42

3. Википедия — свободная общедоступная универсальная Интернет — энциклопедия [Электронный ресурс] /Джимми Уэйлс, Ларри Сенгер. — 2001. — Режим доступа к энциклопедии: http://ru.wikipedia.org/wiki/

4. Плакаты. Интерактивные версии первых пятиобразовательных плакатов для школ России [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://elementy.ru/posters.

5. Таблер Т. І. Сучасний дидактичний засіб — електронний інтерактивний плакат [Электронный ресурс]. — Режим доступа:
https://docs.google.com/file/d/0B7WH9R9G1nxueDlWSkpJSHZQYU0/edit?pli=1

6. Штейнберг В. Э. Дидактические многомерные инструменты: теория, методика, практика/ В. Э. Штейнберг. — М. : Народное образование, 2002. — С. 304

МЕТОДОЛОГИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Л. В. Фёдорова

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест, Беларусь

milaam@mail.ru

Динамично развивающееся современное общество предъявляет новые требования к системе образования. Одной из задач школьного обучения является адаптация учащихся к жизни в мире высоких технологий и постоянно возрастающего объема информации.

Одним из условий, способствующим построению такого обучения, является усиление его методологической составляющей, что предполагает включение в содержание школьного образования методологических знаний, т.е. знаний о наиболее общих методах научного познания и умения применять их в познавательной деятельности. Владение методологическими знаниями и умениями является одним из путей устранения перегрузки учащихся, т.к. применение обобщенных методов познания легко возмещает незнание многих фактов.

Мы остановимся на формирование методологических знаний средствами математики. Причем, чтобы формировать такие знания у учащихся школ необходимо существенным образом подготовить будущих учителей математики: формировать методологические знания у студентов учреждений высшего образования педагогического профиля.

Проблема формирования методологических знаний студентов является частью более общей проблемы, существующей в системе подготовки будущих учителей — повышение качества подготовки выпускников учреждений высшего образования, которое предполагает организацию обучения на основе принципов личностно-ориентированного, системного, деятельностного и компетентностного подходов, при котором студенты имеют возможность самостоятельно выстраивать траекторию своего профессионально-личностного развития, обладают необходимыми компетенциями в процессе освоения педагогической профессии.

Вопросы необходимости и возможные пути осуществления методологической подготовки учителей математики представлены в работах М. В. Архангельской, Н. Я. Виленкина, Б. В. Гнеденко, А. Л. Жохова, И. В. Магдановой, Ю. В. Романова, К. А. Рыбникова, Е. Л. Черемных и др. Так, в диссертационном исследовании Ю.В. Романова основное внимание уделено историзации геометрической подготовки учителя математики как одного из путей повышения эффективности изучения геометрии. И. В. Магданова рассмотрела вопрос о формировании методологического компонента историко-математической подготовки будущих учителей математики. М. В. Архангельская определила методологический компонент в содержании естественно-математического образования в технических вузах.

Анкетирование, проведенное нами среди студентов 4–5 курсов физико-математического факультета БрГУ им. А.С. Пушкина (80 респондентов), показало, что подготовка будущих учителей математики, позволяющая формировать методологические знания учащихся в рамках традиционной системы образования, является недостаточной. Так, большая половина студентов (79 %) даже не смогли правильно определить понятие «методологические знания»: в основном подразумевали под ними «методы обучения учащихся» или отождествляли их либо с исследовательскими умениями, либо с интеллектуальными умениями.

Методологическая подготовка будущих учителей математики включает не только знания о методах передачи научной информации, т.е. методологию обучения математике, но и знания философско-математического характера.

В процессе формирования методологических знаний студентов нами выделены следующие направления:

1) формирование методологических знаний на лекционных и практических занятиях, в ходе освоения содержания математических дисциплин;

2) формирование методологических знаний в рамках основного курса истории математики;

3) формирование методологических знаний в рамках интегрированного курса, направленного на целенаправленное формирование методологических знаний. Например, курс «Методология математики», причем предполагается, что ему будет предшествовать основной курс истории математики.

В ходе формирования методологических знаний студенты должны:

1) знакомиться с историко-научной, методологической, научно-популярной литературой;

2) осуществлять поиск, обработку информации методологического характера с целью формирования методологических знаний;

3) выполнять исследовательскую работу по методологии математики, включая методические задания, направленные на формирование методологических знаний;

4) излагать результаты своего исследования, а также рецензировать исследовательские работы однокурсников.

Методологические знания формируются не в процессе бесед или запоминания названий методов, а в процессе постепенного, последовательного, системного усвоения предметных знаний, при осознании в действии роли и значения методологических знаний. Элементы методологических знаний влияют на формирование у учащихся научного мировоззрения, творческого мышления, воспитание эмоционально-мотивационной сферы. Формирование методологических знаний у студентов является также эффективным средством реализации гуманитарной функции профессионального образования.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

В. И. Филиппенко
ИСО и П (филиал) ДГТУ, Шахты Ростовской области, Россия
filipenko@sssu.ru

Учебный процесс в техническом вузе, определяется деятельностью преподавателя и студентов. Его структура, средства, методы и формы обладают определенной спецификой, составляющих его элементов, объединенных понятием «технология», всегда обладает некоторыми дидактическими особенностями, среди которых можно выделить следующие: концептуальность (опора на научную концепцию, включающую философский и психологический аспекты); системность (логика процесса преподавания, взаимосвязь его частей, целостность); управляемость (возможность диагностического целеполагания, планирования и проектирования); эффективность (гарантированность достижения результата обучения при оптимальных затратах).

Дидактические особенности преподавания математической логики проявляются в виде определенной системы познавательных средств. Под системой средств обучения специалисты понимают совокупность объектов необходимых и достаточных для реализации процесса обучения. Системообразующим элементом всей системы средств обучения выступает содержание образования, которое должны усвоить студенты.

Первый блок указанных средств — наличие у преподавателя и студентов познавательных средств для передачи подрастающему поколению содержания образования. Этот блок базируется на следующих условиях:

1. Высокий уровень речемыслительной деятельности обучающего, который необходимо формировать в его профессиональной подготовке.

2. Наличие учебников и учебных пособий, всего необходимого для ознакомления с содержанием образования по математической логике.

3. Многовариантность дифференциации дидактического взаимодействия преподавателя и студентов в познавательной деятельности по интересам и способностям студентов, многообразие применяемых форм и методов работы с учащимися.

4. Наличие достаточного времени для усвоения студентами учебного материала, возможность выбора преподавателем наиболее целесообразного временного темпа и объема усвоения студентами учебного материала.

5. Наличие необходимых наглядных и технических средств, современных наглядных форм содержания образования.

Второй блок должен обеспечиваться наличием высокого уровня интеллектуально-эмоциональных отношений между преподавателем и студентами, нацеленных на развитие творческой личности студентов. Этот блок основывается на таких элементах — условиях:

1. Установление субъект-субъектных отношений между преподавателем и студентами, т.е. четкой прямой и обратной связи.

2. Формирование у студентов самосознания, активного отношения к познавательной деятельности, целенаправленного желания (мотивации) познавать истину.

3. Развитие интеллектуальных способностей студентов.

4. Планомерное формирование у студентов умения учиться (различным видам работы с текстовым содержанием образования), преобразовывать себя (творчески относиться к познанию мира, любой деятельности, к личной самоактуализации), созидать духовные и материальные ценности.

5. Развитие эмоциональной сферы студентов, формирование устойчивой положительной мотивации познавательной деятельности, установления ее ведущей роли в системе чувств и эмоций.

Создание вышеназванных условий эффективного осуществления процесса дидактического взаимодействия обучаемых и преподавателя зависит от комплекса обстоятельств: педагогической действительности, развития общества, уровня экономики государства. Однако, как можно отметить, предложенные условия начинаются и заканчиваются условиями, напрямую касающимися преподавателя, его специальной — профессиональной подготовки к дидактическому взаимодействию с обучаемыми, что составляет основную исследовательскую проблему современной дидактики.

По рекомендациям И. С. Якиманской [1] и В. В. Серикова [2] для обеспечения системности обучения студентов необходимо следующее:

— учебный материал должен быть субъективно значимым для студента, организация учебной деятельности студента должна учитывать актуальный уровень его развития;

— систематически стимулировать студента к самостоятельной познавательной деятельности, которая переходила бы в самообразование;

— учебный материал следует организовывать таким образом, чтобы у студента оставалось право выбора, возможность выбора учебных задач и заданий.

Управляемость учебным процессом опирается на диагностику и контроль знаний, умений и навыков студентов. Современные технологии обучения математической логике предполагают оптимальное использование диагностики и контроля различными методами на каждом этапе обучения студентов. Одним из путей решения этой проблемы является тематический контроль над учебной деятельностью за счет использования рейтинговой системы, которая позволяет расширить шкалу оценок и сделать ее более объективной, стимулировать систематическую работу студента в течение семестра, обеспечивая постоянную обратную связь. Фактически рейтинговая система успеваемости является комплексной оценкой качества работы студентов. Она повышает мотивацию студентов к освоению учебной программы.

Для повышения эффективности преподавания математической логики необходимо:

— планирование учебного процесса начинать только с четкого определения целей обучения. Потому что достижение обозначенной цели предполагает решение следующей задачи: развитие интеллектуальных способностей студентов, творческих инициатив личности, познавательного интереса к математической логике;

— на каждом аудиторном занятии необходимо использовать разнообразные формы и методы организации работы студентов, позволяющих раскрыть содержание их субъективного опыта относительно возможных практических применений булевых функций к анализу и преобразованию релейно-контактных схем, созданию простейших программ, позволяющих реализовать конкретные машины Тьюрига и т. п.;

— в связи с увеличением количества часов на самостоятельную работу необходимо ее выводить на первый план в качестве основной формы обучения;

— свободный доступ студентов к электронной версии УМКД по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов»;

— введение рейтинговой системы успеваемости.

Некоторые дидактические особенности преподавания математической логики проявляются в процессе дидактического взаимодействия преподавателя и студентов.

Процесс присвоения подрастающим поколением содержания образования опирается на одновременно протекающие «по горизонтали» процессы: содержательный и коммуникативный. Содержательный подпроцесс включает область надпредметного изучения учебного материала, где формируются информационные структуры знания и умения, и область предметного изучения учебного материала, где формируются интеллектуальные структуры знания и умения. Коммуникативный подпроцесс включает организационную сторону: педагогическое общение преподавателя и студентов и содержательную сторону: речемыслительную деятельность участников учебного процесса.

Рассматривая дидактическое взаимодействие преподавателя и студентов, можно утверждать, что это сложное образование, выступающее как результат преобразованных тесных взаимосвязей, взаимопереплетений элементов, составляющих его как систему во имя субъективных целей и объективного смысла; образование — система более высокого порядка, уровня, чем все составляющие его элементы. Согласно генетическому подходу такие сложные образования суть по своему происхождению интегральные образования. Как интегральное образование процесс дидактического взаимодействия преподавателя и студентов имеет свое внутреннее единство и целостность.

На основе системного анализа дидактического взаимодействия преподавателя и студентов можно создать соответствующую модель, включающую следующие компоненты: принципы, цели и структуру.

Основными принципами предлагаемой модели являются: антропологический, гуманистический, личностно-ориентированный, аксиологический, системный; психолого-педагогический. Кроме того, учитывается непрерывное образование; творческий характер развития личности обучающего и целостность педагогического процесса; сочетание педагогического управления с развитием инициативы и самостоятельности воспитанников; сознательность и активность учащихся в целостном педагогическом процессе; сотрудничество и сотворчество субъектов дидактического взаимодействия; единство интеллекта и эмоций в формировании личности; развитие и саморазвитие индивидуальности, индивидуального сознания.

Цели: социальная (присвоение студентами содержания образования), личностная (развитие и саморазвитие творческой личности учащихся). Конкретная цель (научить учащихся учиться на основе конкретных задач, предусмотренных рабочей программой курса математическая логика).

Структура предполагаемой модели должна состоять из подсистем, которые сами являются иерархически сложными системами (отношения: преподавание — учение; непосредственные, опосредованные, внешние).

Основой модели служит содержание образования как смыслообразующий элемент реализации важнейших сфер дидактического взаимодействия – интеллектуальной, эмоциональной и управляющей. Основными элементами структуры (системы) дидактического взаимодействия выступают деятельности определяющих его субъектов: учителя (преподавание), учащихся (учение) и присвоение учащимися содержания образования в процессе обучения, каждый из которых также имеет свои структуры.

Управление дидактическим взаимодействием происходит одновременно с управлением процессом обучения (преподавания), которое предполагает прохождение определенных этапов в соответствии с заданной структурой педагогической деятельности: планирование, организация, регулирование (стимулирование), контроль, оценка и анализ результатов.

Специфика технического вуза предполагает более полное ознакомление студентов с теми понятиями и положениями математической логики и теории алгоритмов, которые имеют определенную практическую ценность и могут оказаться полезными в их дальнейшей профессиональной деятельности: исчисление высказываний, алгоритмы проверки общезначимости и противоречивости формул, совершенные дизъюнктивные нормальные формы и совершенные конъюнктивные нормальные формы, метод резолюций, нестандартные модели арифметики, конечные автоматы.

Список литературы

1. Якиманская И. С. Развивающее обучение. — М.: Педагогика, 1979. — 144 с.

2. Сериков В. В. Личностный подход в образовании: концепция и технологии: Монография. — Волгоград: Перемена, 1994. — 150 с.

ПРЕПОДАВАНИЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Г. Г. Швачич, В. С. Коноваленков, Т. М. Заборова
Национальная металлургическая академия Украины, Днепропетровск, Украина
sggl@ukr.net

Изучению математики в образовании инженера принадлежит особая роль. По словам И. Канта, «В каждой естественной науке заключено столько истины, сколько в ней есть математики». Отечественные традиции преподавания точных наук, в частности, математики, в технических вузах всегда сочетали глубокое изучение теории и практики, закладывая тем самым фундамент для освоения прикладных наук и специальных курсов.

К сожалению, в последние годы ситуация развивается не в лучшую сторону. Предполагалось, что единое образовательное пространство в рамках Болонского процесса позволит национальной системе образования взять все лучшее, что есть у партнеров, и вывести ее на новый качественный уровень. Однако этого не случилось по ряду причин. Одна из них — перераспределение учебной нагрузки. Было сокращено количество аудиторных занятий при формальном увеличении часов на самостоятельную работу студентов. Подобные нормы уместны для студентов старших курсов, работающих над курсовыми и дипломными работами, но не для вчерашних школьников, которые вряд ли используют это время по назначению. Сами студенты признаются, что максимум полезной информации по предмету они получают на лекциях и в лабораториях. Ведь тестовая система, принятая в школе, при внешнем независимом оценивании, к сожалению, не способствовала развитию навыков самостоятельной работы: этому их еще предстоит научить на 1–2 курсах!

Для возвращения позиций, утерянных в пылу необдуманных «реформ», уже сейчас необходимо внедрять в учебный процесс и всячески поддерживать наукоемкие преподавательские технологии, позволяющие стимулировать интерес к самостоятельной работе студентов, что в нынешних условиях приобретает решающую роль, поскольку в какой-то мере компенсирует потери от уменьшения числа аудиторных занятий.

Напомним, что еще в 1970 году появилась специальность «Прикладная математика и информатика», созданная выдающимся ученым академиком А. Н. Тихоновым и его научной школой. Для этой специальности характерно сочетание фундаментального математического образования и профессиональной подготовки по использованию современных информационных технологий для решения прикладных задач, С тех пор прошли десятилетия, но потребность в таких специалистах постоянно растет, а сфера приложения подобных технологий неуклонно расширяется. Более того, в современных условиях такой подход приобретает особую актуальность.

Принимая это во внимание, группа преподавателей кафедры прикладной математики и вычислительной техники НМетАУ подготовила и издала учебник

[1], в котором при изучении классического курса высшей математики также предлагается использовать современные информационные технологии, в частности, универсальную математическую среду Mathcad. Это достигается за счет того, что, наряду с изложением материала общего курса высшей математики и большим количеством примеров, иллюстрирующих теоретические положения, почти все «классические» решения дублируются соответствующими решениями, полученными при помощи среды Mathcad.

Такой подход к изучению общего курса высшей математики стимулирует студента к освоению как общих положений курса (без этого невозможно применение вычислительной среды), так и основ Mathcad. Возможность получения решений не только классическим путем, но и с помощью компьютера, делает процесс освоения материала интересным, мотивированным, активным. Возрастает «самостоятельная составляющая» в процессе обучения, что, в принципе, является хорошим показателем вне зависимости от модели обучения.

Почему выбор был остановлен на Mathcad? С помощью Mathcad можно выполнять как численные, так и аналитические (символьные) вычисления. Среда имеет удобный интерфейс (совокупность средств, которые обеспечивают управление системой с помощью клавиатуры и мыши). К тому же он достаточно прост, и пользователь, имеющий элементарные навыки работы с Word и Excel, сможет сразу же работать и в Mathcad. Простота интерфейса среды Mathcad и широкий набор графических, аналитических и численных методов решения математических задач позволяют использовать этот пакет в учебном процессе.

Среда Mathcad успешно применяется для решения задач линейной и векторной алгебры, для отыскания пределов функций, а также производных и интегралов, при суммировании рядов, исследовании их сходимости и разложении функций в ряды Тейлора и Маклорена.

Авторы считают, что «параллельная» иллюстрация классического подхода при изложении основ высшей математики и приемов, использующих информационные технологии, является удачным «методическим ходом», стимулирующим интерес к самостоятельной работе студентов и может быть успешно использована в учебном процессе.

Список литературы

1. Вища математика із застосуванням інформаційних технологій: Підручник/ В. П. Іващенко, Г. Г. Швачич, В. С. Коноваленков, Т. М. Заборова, В. І. Христян. — Запоріжжя, 2013. — 426 с.

ПРИНЦИП ПРОФЕСІЙНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ ТА ЙОГО РЕАЛІЗАЦІЯ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

С. М. Шевченко, Ю. Д. Жданова, С. В. Темнікова
Державний університет телекомунікацій, Київ;
Державний університет телекомунікацій, Київ;
Луганський національний університет ім. Т. Шевченка, Луганськ, Україна
SN-shevchenko65@yandex.ru

Аналіз психолого-педагогічної літератури дозволив виділити два напрями до проблеми професійної спрямованості у навчанні. Перший напрям розуміє під професійною спрямованістю стійку орієнтацію системи потреб, мотивів, інтересів особистості на позитивне відношення до майбутньої професії. Другий напрям розкриває принцип професійної спрямованості через добір та побудову змісту освіти на основі міжпредметних зв'язків загальнонаукових, загально професійних та спеціальних дисциплін. У нашому дослідженні ми будемо спиратися на обидва напрями: використання педагогічних засобів (зміст математичної освіти, міжпредметні зв'язки з іншими дисциплінами, структурування та ілюстрація програмного матеріалу, методи, засоби та організація навчання), за допомогою яких забезпечується не тільки засвоєння студентами навчального матеріалу, але й успішно формується інтерес до даної професії.

У результаті такого сполучення регулюється співвідношення загального та специфічного, визначається діалектика взаємодії цілісного розвитку особистості (зокрема, аналітичного мислення).

Як відомо, вивчення математика не тільки обумовлює розвиток мислення майбутнього спеціаліста, але і є базисом для спеціальної підготовки інженерів, тому реалізація вимоги професійної спрямованості у процесі її вивчення особливо актуальна. У зв'язку з цим характерними особливостями математичної освіти в технічному університеті є неперервність вивчення математики та її застосування, фундаментальність математичної освіти, зорієнтованість курсу математики на практику. Ці вимоги не суперечать одна одній, а сприяють загальній освіченості студентів, їх професійній підготовці.

Вважаємо, що реалізація принципу є можливою через:

— побудову структурно-логічних схем, які наглядно ілюструють внутрішньо предметні та міжпредметні зв'язки;

— включення в курс математики прикладного матеріалу;

— введення понять, вивчення теорії через ряд задач геометричного, механічного, технічного характеру;

— впровадження методів наближеного розв'язання задачі, наголошення на її числову реалізацію за допомогою інформаційно-комунікаційних технологій;

— організацію навчально-дослідної роботи студентів.

Ми згодні з вченим Г. О. Михаліним щодо вивчення математичного курсу відповідно вибраній спеціальності. Перефразовуючи його вислів, не порушуючи при цьому суті, ми вважаємо, що «інженеризація» курсу математичного аналізу полягає в тому, щоб пов'язати його вивчення з профілем майбутнього фахівця, і це має здійснюватися так: усі питання програми, які мають безпосереднє відношення до спеціальних дисциплін, мають розглядатися так, щоб студент міг використати цей матеріал (хоча б неповністю) у своїй навчальній діяльності та професійній.

У зв'язку з цим ми на початку вивчення теми пропонуємо структурно-логічну схему застосування цієї теми у процесі вивчення спеціальних дисциплін технічного вузу. Це дає можливість активізувати пізнавальні мотиви, сприяє узгодженню змісту державних стандартів та особистісного саморозвитку.

Практика навчання математичних дисциплін студентів технічного університету показала, що використання професійно-прикладних задач підвищує рівень мотивації навчання, сприяє подоланню існуючих протиріч між фундаментальністю та професійною спрямованістю в навчальному процесі з математики. Їх включення активізує розумову діяльність студентів, що обумовлює розвиток їх аналітичного мислення. Вважаємо, що професійно-прикладні задачі мають задовольняти наступним вимогам: демонструвати застосування математичного апарату при розв'язанні практичних проблем; сприяти розвитку не тільки базових, але й професійно значущих математичних знань, умінь та навичок; нести змістовне навантаження, мати пізнавальну цінність; містити відповідні дійсні числові значення величин, а не абстракті; відображати по можливості істотні закони та факти з інших предметних областей.

На сьогодні неможливо уявити навчальну діяльність без застосування сучасних інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ). Всі громіздкі розрахунки (є характерним для фахівця галузі телекомунікацій) виконуються завдяки ІКТ швидко, що дозволяє більше часу приділяти на пошук інших шляхів розв'язання задачі або на аналіз одержаного результату.

Відомо, що навчально-дослідна робота студентів не лише розширює межі навчальної програми з дисциплін математичного циклу, сприяє формуванню інтересів до дисципліни, розвиває мислення, але й дозволяє ефективно реалізувати міжпредметні зв'язки у технічному університеті.

Таким чином, впровадження вище названих чинників у навчальний процес вищої технічної школи під час навчання вищої математики сприяє реалізації принципу професійної спрямованості.

ЗМІСТ

Секція 1. Застосування математики в суміжних науках

Секція 2. Методика викладання математики у вищій школі

Секція 3. Історія точних наук

Секція 4. Сучасні освітні технології у вищій школі