РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ СТУДЕНТСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ НТУУ «КПІ» З МАТЕМАТИКИ, 2012 р.

Перший курс

Задача 1. Обчислити в 50-річній системі числення:

$$\sqrt{\underbrace{11\ldots11}_{2012\text{ цифр}}-\underbrace{22\ldots22}_{1006\text{ цифр}}}.$$

Розв'язання: В десятковій системі числення це число дорівнює

$$\sqrt{(1+50+50^2+\cdots+50^{2011})-2(1+50+50^2+\cdots+50^{1005})}=$$
$$=\sqrt{(50^{1006}-1)+(50^{1007}-50)+\cdots+(50^{2011}-50^{1005})}=$$
$$=\sqrt{(50^{1006}-1)(1+50+\cdots+50^{1005})}=$$
$$=\sqrt{\frac{(50^{1006}-1)^2}{49}}=\frac{(50^{1006}-1)}{7}=7(1+50+\cdots+50^{1005}).$$

Переводячи знову у 50-річну систему, отримаємо $\underbrace{77\ldots77}_{1006\text{ цифр}}$.

<u>**Відповідь:**</u> $\underbrace{77\ldots77}_{1006\text{ цифр}}$

Задача 2. Нехай $\vec{a},\vec{b}$ — ненульові вектори в $\mathbb{R}^3$.

а) При яких значеннях параметра $\lambda\in\mathbb{R}$ рівняння

$$\vec{a}+\vec{b}\times\vec{x}=\lambda\vec{b} \tag{1}$$

має розв'язки?

б) Знайти ці розв'язки.

Розв'язання:

а) Оскільки $\lambda\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}\times\vec{x}\perp\vec{b}$, то $(\vec{b},\lambda\vec{b}-\vec{a})=0$, звідки

$$\lambda=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|^2}.$$

Оскільки при цьому λ $\vec{b}\perp\lambda\vec{b}-\vec{a}$, то розв'язок рівняння $\vec{b}\times\vec{x}=\lambda\vec{b}-\vec{a}$ завжди існує.

б) Позначимо $\vec{c}=\lambda\vec{b}-\vec{a}$. Розглянемо два випадки.

1. $\vec{c}\neq\vec{0}$. Знайдемо розв'язок $\vec{x}_0$ рівняння (1), який є перпендикулярним до $\vec{b}$.

Оскільки $\vec{x}_0$ є також перпендикулярним до вектора $\vec{c}$ і, крім того, трійка векторів $\vec{b},\vec{x}_0,\vec{c}$ є правою, то він буде колінеарним до $\vec{c}\times\vec{b}$, тобто $\vec{x}=\alpha\vec{c}\times\vec{b}$. Оскільки $|\vec{c}|=|\vec{b}|\cdot|\vec{x}_0|=\alpha|\vec{b}|^2|\vec{c}|$, то $\alpha=\dfrac{1}{|\vec{b}|^2}$, тобто

$$\vec{x}_0=\frac{\vec{c}\times\vec{b}}{|\vec{b}|^2}=\frac{\vec{b}\times\vec{a}}{|\vec{b}|^2}.$$

З іншого боку, для довільного розв'язку $\vec{x}$ рівняння (1) виконується рівність $\vec{b} \times (\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0}$, яка означає, що $\vec{b} \parallel \vec{x} - \vec{x}_0$. З останнього отримуємо, що

$$\vec{x} = \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{b}|^2} + k\vec{b} \tag{2}$$

для деякого $k \in \mathbb{R}$.

2. $\vec{c} = \vec{0}$. Це означає, що $\vec{a} \parallel \vec{b}$, і, відповідно, $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{0}$. З іншого боку, розв'язками рівняння (1) є, очевидно, вектори $k\vec{b}$, $k \in \mathbb{R}$, тобто мають вигляд (2).

Відповідь: а) $\lambda = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|^2}$; б) $\vec{x} = \dfrac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{b}|^2} + k\vec{b}$, $k \in \mathbb{R}$.

Задача 3. Про квадратну матрицю A порядку n відомо, що сума всіх елементів матриці $(E+A)^{-1}$ дорівнює 1. Знайти суму всіх елементів матриці $(E+A^{-1})^{-1}$. Вважати, що всі вказані обернені матриці існують.

Розв'язання: Позначимо $X = (E + A)^{-1}$, $Y = (E + A^{-1})^{-1}$. Тоді

$$A = X^{-1} - E, \quad A^{-1} = Y^{-1} - E,$$

і, відповідно,

$$(X^{-1} - E)(Y^{-1} - E) = AA^{-1} = E.$$

З останньої рівності випливає, що

$$X^{-1}Y^{-1} = X^{-1} + Y^{-1}.$$

Домножаючи останню рівність на X зліва і на Y справа, отримаємо $E = X + Y$, звідки сума елементів матриць $X + Y$ дорівнює n, а отже сума елементів матриці Y дорівнює $n - 1$.

Відповідь: $n - 1$.

Задача 4. Область $\mathcal{D}$ обмежена дугою параболи $y = x^2$ та відрізком прямої $y = 2x + 3$. Трикутник якої максимальної площі можна розмістити в $\mathcal{D}$?

Розв'язання: Введемо позначення: ABC – шуканий трикутник з максимальною площею, L – відрізок прямої $y = 2x + 3$, який входить в $\mathcal{D}$, P – дуга параболи $y = x^2$, яка входить в $\mathcal{D}$.

Розглянемо можливі випадки розташування трикутника ABC.

Очевидно, що всі три вершини трикутника ABC мають лежати на границі області $\mathcal{D}$, причому, хоча б одна з них має лежати на P.

Нехай рівно одна з вершин трикутника (наприклад, A) належить L. Можливі два випадки. Якщо BC буде паралельно L, то площі всіх трикутників з цією основою й вершиною на L будуть однакові, а тому A можна взяти як один з кінців L. Якщо ж BC не паралельно L й A не співпадає з одним з кінців L, то візьмемо той кінець L, відстань від якого до BC більша, ніж відстань від A і позначимо його A' (див. Рис. 1). Тоді площа трикутника $A'BC$ буде більше площі трикутника ABC, протиріччя. Тобто в цьому випадку вершина буде лежати на одному з кінців L і, відповідно, належати P.

Якщо на L лежать дві вершини, то, легко бачити, що вони мають бути на кінцях L в силу того, що площа трикутника є найбільшою. Це означає, що вони будуть належати й P.

Таким чином, всі вершини трикутника ABC мають належить P.

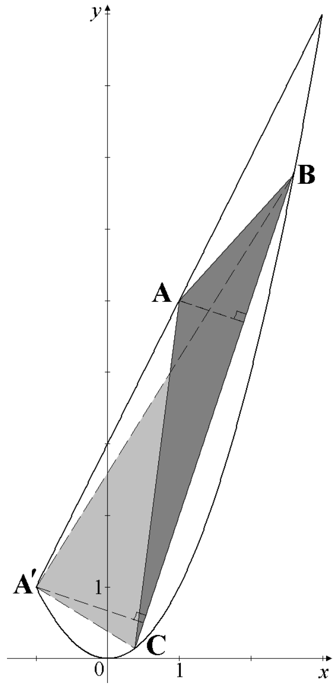

Рис. 1.

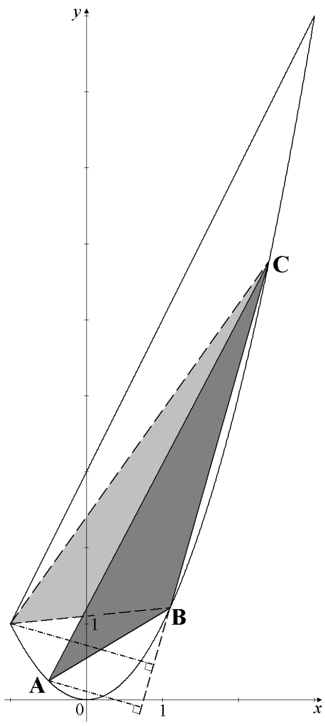

Рис. 2.

Нехай точки A, B, C розташовано в порядку зростання абсцис цих точок. Припустимо, що одна з вершин A і C (наприклад A, для C аналогічно) не лежить в кінці P. Оскільки $y = x^2$ – опукла функція, то відстань від точки A до BC буде меншою, ніж відстань від точки $(-1, 1)$ до BC (див. Рис. 2), протиріччя. Отже, вершинам A і C відповідають координати $(-1, 1)$ і $(3, 9)$.

Оскільки відстань від точки B до прямої AC (L) найбільша серед усіх точок параболи P, то дотична, проведена до P в цій точці, буде паралельна L, тобто якщо B має абсцису $x_{_B}$, то $2x_{_B} = 2$ і, відповідно, B має координати $(1, 1)$. Знайшовши, всі вершини цього трикутника неважко переконатися, що його площа $S = 8$.

Відповідь: $S = 8$.

Задача 5. В класі функцій $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ знайти всі розв'язки функціонального рівняння

$$f(x) + f(y) = f(xyf(x + y)).$$

Розв'язання: Безпосередньою перевіркою легко встановити, що функція $f(x) \equiv \dfrac{1}{x}$ є розв'язком рівняння. Покажемо, що інших розв'язків немає.

Нехай $g(x) \not\equiv \dfrac{1}{x}$ є іншим розв'язком. Тоді існує таке число $z \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, для якого $g(z) \neq \dfrac{1}{z}$. Покладемо

$$x = \frac{1}{g(z)}, \quad y = z - x.$$

Тоді $x, y \neq 0$, і для них виконується рівність з умови задачі. Оскільки $y = xyg(x+y)$, то $g(x) = 0$, що неможливо за умовою. Протиріччя.

Відповідь: $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Задача 6. Функціональна послідовність $(f_n, n \geq 1)$ задана рекурентним способом:

$$f_1(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}}, \quad f_n(x) = f_{n-1}(f_1(x)),\ n \geq 2,\ x \in \mathbb{R}.$$

Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n f_n(x)$.

Розв'язання: Нехай $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тоді

$$f_1(\operatorname{tg}\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

і тому $f_n(\operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2^n}$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n f_n(\operatorname{tg}\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2^n} = \alpha$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n f_n(x) = \operatorname{arctg} x$.

<u>**Відповідь:**</u> $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n f_n(x) = \operatorname{arctg} x$.

Задача 7. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin^2(2012x)}{\sin^2 x}\,dx.$$

Розв'язання: Спочатку обчислимо інтеграл

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\,dx,\ \ n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

При $n = 0$ маємо $\displaystyle\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{\sin x}\,dx = \pi$. Оскільки

$$\sin((2n+1)x) = \sin((2n-1)x) + 2\sin x\cos(2nx) \ \ \text{і} \ \ \int\limits_0^\pi \cos(2nx)\,dx = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

при $n \geqslant 1$ маємо

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\,dx = \int\limits_0^\pi \frac{\sin((2n-1)x)}{\sin x}\,dx + 2\int\limits_0^\pi \cos(2nx)\,dx = \int\limits_0^\pi \frac{\sin((2n-1)x)}{\sin x}\,dx,$$

звідки за індукцією $\displaystyle\int\limits_0^\pi \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\,dx = \pi$ для всіх $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Тепер обчислимо інтеграл

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin^2(2012x)}{\sin^2 x}\,dx.$$

Оскільки для всіх n виконується рівність

$$\sin^2(nx) = \sin^2((n-1)x) + \sin x \sin((2n-1)x),$$

то

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin^2(2012x)}{\sin^2 x}\,dx = \int\limits_0^\pi \frac{\sin^2(2011x)}{\sin^2 x}\,dx + \int\limits_0^\pi \frac{\sin(4023x)}{\sin x}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi \frac{\sin^2(2010x)}{\sin^2 x}\,dx + \int\limits_0^\pi \frac{\sin(4021x)}{\sin x}\,dx + \int\limits_0^\pi \frac{\sin(4023x)}{\sin x}\,dx = \ldots =$$

$$= \int\limits_0^\pi \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx + \int\limits_0^\pi \frac{\sin(3x)}{\sin x}\,dx + \int\limits_0^\pi \frac{\sin(5x)}{\sin x}\,dx + \ldots + \int\limits_0^\pi \frac{\sin(4023x)}{\sin x}\,dx = 2012\pi.$$

<u>**Відповідь:**</u> 2012π.

Задача 8. В місті живуть n хлопців і n дівчат. Розглянемо квадратну матрицю A порядку n з елементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i\text{-ий хлопець та } j\text{-а дівчина знайомі між собою,} \\ 0, & \text{якщо } i\text{-ий хлопець та } j\text{-а дівчина не знайомі між собою.} \end{cases}$$

а) Довести, що якщо матриця A невироджена, то всі хлопці можуть одружитися на знайомих їм дівчатах.

б) Чи вірне обернене твердження?

Розв'язання:

а) Якщо матриця A невироджена, то її визначник не дорівнює нулю, а отже серед добутків n елементів матриці, які знаходяться у разних рядках і стовпцях, сума яких дорівнює визначнику матриці, є принаймні один ненульовий. Оскільки матриця складається з нулів і одиниць, всі елементи цього добутку повинні дорівнювати 1, а отже відповідне розбиття хлопців і дівчат на пари буде задовольняти умові задачі.

б) Контрприкладом буде довільна матриця $n \times n$ із нулів і одиниць, визначник якої дорівнює нулю і яка містить n одиниць, які знаходяться в різних рядках і стовпцях, наприклад матриця з одиниць (всі хлопці знайомі з усіма дівчатами).

Відповідь: б) Обернене твердження не є вірним.

Старші курси

Задача 1. В системах числення з якими основами число

$$\underbrace{11\ldots11}_{2012 \text{ цифр}} - \underbrace{22\ldots22}_{1006 \text{ цифр}}$$

є повним квадратом?

Розв'язання: Переводячи це число з n-ічної системи числення в десяткову, отримаємо

$$(1+n+n^2+\cdots+n^{2011}) - 2(1+n+n^2+\cdots+n^{1005}) =$$
$$= (n^{1006}-1) + (n^{1007}-n) + \cdots + (n^{2011}-n^{1005}) =$$
$$= (n^{1006}-1)(1+n+\cdots+n^{1005}) = \frac{(n^{1006}-1)^2}{n-1}.$$

Очевидно, це число є квадратом тоді і тільки тоді, коли $n-1$ є квадратом, тобто коли $n = m^2+1$ для деякого $m \in \{2, 3, \ldots\}$. (Варіант $m = 1$ неможливий, тому що в цьому випадку $n = 2$, а в двоїчній системі числення відсутня цифра 2, яка фігурує в умові задачі).

Відповідь: Основою системи числення є число виду $n = m^2 + 1$ для деякого $m \in \{2, 3, \ldots\}$.

Задача 2. Знайти суму функціонального ряду та побудувати її графік:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[2^n x]} 2^{-n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Квадратними дужками позначено цілу частину числа.

Розв'язання: Введемо позначення

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[2^n x]}}{2^n}.$$

Функція f є періодичною з періодом 1, оскільки для кожного $n\in\mathbb{N}$ для всіх $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність

$$(-1)^{[2^n(x+1)]}=(-1)^{[2^n x]}(-1)^{2^n}=(-1)^{[2^n x]}.$$

Останнє означає, що достатньо знайти $f(x)$ для $x\in[0,1)$. Нехай x має наступний двійковий розклад

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{2^n},$$

де $\alpha_k\in\{0,1\}$. В цьому випадку

$$[2^n x]=2^{n-1}\alpha_1+2^{n-2}\alpha_2+\cdots+2\alpha_{n-1}+\alpha,$$

і, відповідно,

$$(-1)^{[2^n x]}=\begin{cases}-1, & \text{якщо } \alpha_n=1;\\ \ \ 1, & \text{якщо } \alpha_n=0,\end{cases}$$

або $(-1)^{[2^n x]}=1-2\alpha_n$. Тоді

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[2^n x]}}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2\alpha_n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{2^n}=1-2x.$$

В силу періодичності, остаточно отримуємо

$$f(x)=f(\{x\})=1-2\{x\},\ \ x\in\mathbb{R},$$

де $\{x\}$ – дробова чистина x.
Відповідь: $f(x)=1-2\{x\},\ x\in\mathbb{R}$.

Задача 3. Про симетричну квадратну матрицю A порядку n відомо, що

$$\operatorname{tr}A^2=\operatorname{tr}A^3=\operatorname{tr}A^4=\alpha.$$

а) При яких значеннях α це можливо?

б) Чому дорівнює $\det A$?

Розв'язання: Відомо, що для довільної симетричної матриці $X=(x_{ij})_{i,j=1}^n$ виконується рівність

$$\operatorname{tr}X^2=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}x_{ij}^2,$$

і, крім того, матричний многочлен $P(X)$ буде симетричним для довільного многочлена P.

Якщо покласти $X=A^2-A$, то

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}x_{ij}^2=\operatorname{tr}X^2=\operatorname{tr}A^4-2\operatorname{tr}A^3+\operatorname{tr}A^2=0.$$

Останнє означає, що всі елементи X – нулі, тобто $X=\Theta$, де Θ – нульова матриця. Таким чином, $A^2=A$, і, відповідно, $\alpha=\operatorname{tr}A$.

а) Оскільки матриця A симетрична, то для неї є вірним представлення

$$B = V^{-1}AV,$$

де B – діагональна матриця, причому $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$. Крім того,

$$B^2 = V^{-1}AVV^{-1}AV = V^{-1}A^2V = V^{-1}AV = B.$$

Оскільки B діагональна, то кожен її елемент має дорівнює 0 або 1, тобто

$$\alpha = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Очевидно, що для кожного такого α існує матриця A, яка задовольняє умову задачі (наприклад, діагональна матриця з α одиницями).

б) Якщо $\alpha \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, то на головній діагоналі матриці B буде присутній принаймні один 0, і, відповідно, $\det A = \det B = 0$. Якщо ж $\alpha = n$, то матриця B є одиничною, і $\det A = \det B = 1$.

Відповідь: а) $\alpha =\in \{0, 1, \ldots, n\}$; б) 0 або 1.

Задача 4. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} f' = f \sin x + g \cos x, \\ g' = g \sin x + f \cos x, \\ f(0) = g(0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Розв'язання: Розглянемо функцію $h(x) = f(x) - g(x)$. З (3) легко отримати, що вона задовольняє задачі Коші

$$h' = h(\sin x - \cos x), \ \ h(0) = 0.$$

Оскільки, очевидно, $h(x) \equiv 0$ є розв'язком, то в силу теореми існування та єдиності він буде й єдиним. Це означає, що $f(x) \equiv g(x)$. Тоді з (3) випливає, що

$$f' = f(\sin x + \cos x),$$

загальним розв'язком якого є $f(x) = Ce^{\sin x - \cos x}$. Використовуючи початкову умову $f(0) = 1$, отримуємо $f(x) = g(x) = e^{1 + \sin x - \cos x}$.

Відповідь: $f(x) = g(x) = e^{1 + \sin x - \cos x}$.

Задача 5. Про многочлен $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ з комплексними коефіцієнтами відомо, що

$$a_0 = 1, \ \ a_3 = a_6 = a_9 = \ldots = 0.$$

Довести, що у будь-якого правильного шестикутника, вписаного в одиничне коло, знайдуться дві різні вершини z_1 та z_2 такі, що $|P(z_1)| \geq 1$, $|P(z_2)| \geq 1$.

Розв'язання: Оскільки вершини вписаного в одиничне коло правильного шостикутика можна розділити на дві трійки вершин вписаних в одиничне коло правильних трикутників, то достатньо довести, що у кожного правильного трикутника, вписаного в одиничне коло, є принаймні одна така вершина z, для якої $|P(z)| \geqslant 1$.

Доведемо від супротивного: нехай існує правильний вписаний в одиничне коло трикутник з вершинами z_1, z_2, z_3 такий, що $|P(z_1)| < 1$, $|P(z_2)| < 1$, $|P(z_3)| < 1$. Тоді

$$|P(z_1) + P(z_2) + P(z_3)| \leqslant |P(z_1)| + |P(z_2)| + |P(z_3)| < 3.$$

Покажемо, що
$$z_1^n + z_2^n + z_3^n = 0 \text{ при } n \in \mathbb{N},\ n \neq 3k,\ k \in \mathbb{N}.$$
Оскільки $z_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} z_1,\ z_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}} z_1,\ e^{2n\pi i} = 1, e^{\frac{2n\pi i}{3}} \neq 1$ при $n \in \mathbb{N},\ n \neq 3k,\ k \in \mathbb{N}$, то
$$z_1^n + z_2^n + z_3^n = z_1^n(1 + e^{\frac{2n\pi i}{3}} + e^{\frac{4n\pi i}{3}}) = z_1^n \frac{e^{2n\pi i} - 1}{e^{\frac{2n\pi i}{3}} - 1} = 0.$$
З останньої рівності випливає, що
$$P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) = 3 + a_1(z_1 + z_2 + z_3) + a_2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) + a_4(z_1^4 + z_2^4 + z_3^4) + \ldots = 3,$$
протиріччя.

Задача 6. Функціональна послідовність $(f_n, n \geq 1)$ задана рекурентним способом:
$$f_1(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}}, \quad f_n(x) = f_{n-1}(f_1(x)),\ n \geq 2,\ x \in \mathbb{R}.$$
Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx$.

Розв'язання: З задачі 6 першого курсу випливає, що
$$\lim_{n\to\infty} 2^n f_n(x) = \operatorname{arctg} x.$$
Тому
$$\lim_{n\to\infty} 2^n \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} 2^n f_n(x)\,dx = \int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx =$$
$$= x \operatorname{arctg} x|_0^1 - \int_0^1 x\,d \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$
Відповідь: $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

Задача 7. Обчислити інтеграл
$$\int_0^\pi \frac{\sin^2(2012x)}{\sin^2 x}\,dx.$$

Розв'язання: Див розв'язок задачі 7 першого курсу.
Відповідь: 2012π.

Задача 8. В країні є n міст $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$, $n \geq 3$, причому між кожними двома містами є пряме авіасполучення. Розсіяний турист починає подорож в місті $\mathcal{C}_1$, потім летить в навмання обране інше місто і повторює цю процедуру, поки не повернеться в $\mathcal{C}_1$. Вважаючи, що на кожному кроці турист обирає будь-яку наступну ціль з однаковими ймовірностями, знайти

а) ймовірність того, що протягом подорожі турист відвідає місто C_2;

б) математичне сподівання кількості *різних* відвіданих міст.

Розв'язання:

а) Знайдемо ймовірність того, що через $k+1$ перельотів турист повернеться в місто $\mathcal{C}_1$ і при цьому не відвідає місто $\mathcal{C}_2$, $k \in \mathbb{N}$. Ймовірність того, що на першому перельоті турист не попаде в місто $\mathcal{C}_2$, дорівнює $\dfrac{n-2}{n-1}$. Ймовірність того, що на i-ому перельоті, $2 \leqslant i \leqslant k$, турист не попаде в міста $\mathcal{C}_1$ і $\mathcal{C}_2$, дорівнює $\dfrac{n-3}{n-1}$. Ймовірність того, що на $(k+1)$-ому перельоті турист потрапить до міста $\mathcal{C}_1$, дорівнює $\dfrac{1}{n-1}$. Отже, ця ймовірність дорівнює

$$\frac{n-2}{n-1} \cdot \left(\frac{n-3}{n-1}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{n-2}{(n-1)^2} \cdot \left(\frac{n-3}{n-1}\right)^{k-1}.$$

Тоді ймовірність того, що турист не відвідає місто $\mathcal{C}_2$, дорівнює сумі цих ймовірностей для всіх $k \in \mathbb{N}$, тобто

$$\frac{n-2}{(n-1)^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n-1}\right)^{k-1} = \frac{n-2}{(n-1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{n-3}{n-1}} = \frac{n-2}{2(n-1)},$$

і тому ймовірність того, що турист відвідає місто $\mathcal{C}_2$, дорівнює $1 - \dfrac{n-2}{2(n-1)} = \dfrac{n}{2(n-1)}$.

б) Нехай випадкова величина ξ – кількість відвіданих міст, а випадкові величини $\varepsilon_i,\ i = \overline{2,n}$ задано наступним чином:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо турист відвідав місто } \mathcal{C}_i, \\ 0, & \text{якщо турист не відвідав місто } \mathcal{C}_i. \end{cases}$$

Тоді

$$\xi = 1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n,$$

де перша одиниця відповідає за місто $\mathcal{C}_1$, яке турист відвідує в будь-якому випадку.

Беручи математичні сподівання зліва та справа в останній рівності, маємо:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi = 1 + \mathbb{E}\varepsilon_2 + \ldots + \mathbb{E}\varepsilon_n = 1 + \mathbb{P}\{\varepsilon_2 = 1\} + \ldots + \mathbb{P}\{\varepsilon_n = 1\} = \\ = 1 + (n-1)\frac{n}{2(n-1)} = \frac{n}{2} + 1. \end{aligned}$$

Відповідь: а) $\dfrac{n}{2(n-1)}$; б) $\dfrac{n}{2} + 1$.