ВІДКРИТА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ «КПІ» З МАТЕМАТИКИ, 2012 р.

Перший курс

Задача 1. *Обчислити в 50-річній системі числення:*

$$\sqrt{\underbrace{11\ldots11}_{\textit{2012 цифр}}-\underbrace{22\ldots22}_{\textit{1006 цифр}}}.\qquad\text{(4 бали)}$$

Задача 2. *Нехай $\vec{a},\vec{b}$ — ненульові вектори в $\mathbb{R}^3$.*

а) *При яких значеннях параметра $\lambda\in\mathbb{R}$ рівняння $\vec{a}+\vec{b}\times\vec{x}=\lambda\vec{b}$ має розв'язки?* **(2 бали)**

б) *Знайти ці розв'язки.* **(4 бали)**

Задача 3. *Про квадратну матрицю A порядку n відомо, що сума всіх елементів матриці $(E+A)^{-1}$ дорівнює 1. Знайти суму всіх елементів матриці $(E+A^{-1})^{-1}$. Вважати, що всі вказані обернені матриці існують.* **(6 балів)**

Задача 4. *Область $\mathcal{D}$ обмежена дугою параболи $y=x^2$ та відрізком прямої $y=2x+3$. Трикутник якої максимальної площі можна розмістити в $\mathcal{D}$?* **(5 балів)**

Задача 5. *В класі функцій $f\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ знайти всі розв'язки функціонального рівняння*

$$f(x)+f(y)=f(xyf(x+y)).\qquad\textbf{(6 балів)}$$

Задача 6. *Функціональна послідовність $(f_n, n\ge 1)$ задана рекурентним способом:*

$$f_1(x)=\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}},\quad f_n(x)=f_{n-1}(f_1(x)),\ n\ge 2,\ x\in\mathbb{R}.$$

Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}2^nf_n(x)$. **(8 балів)**

Задача 7. *Обчислити інтеграл*

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^2(2012x)}{\sin^2 x}\,dx.\qquad\textbf{(8 балів)}$$

Задача 8. *В місті живуть n хлопців і n дівчат. Розглянемо квадратну матрицю A порядку n з елементами*

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{якщо } i\text{-ий хлопець та } j\text{-а дівчина знайомі між собою,}\\ 0, & \text{якщо } i\text{-ий хлопець та } j\text{-а дівчина не знайомі між собою.}\end{cases}$$

а) *Довести, що якщо матриця A невироджена, то всі хлопці можуть одружитися на знайомих їм дівчатах.* **(5 балів)**

б) *Чи вірне обернене твердження?* **(2 бали)**

ВІДКРИТА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ «КПІ» З МАТЕМАТИКИ, 2012 р.

Старші курси

Задача 1. *В системах числення з якими основами число*

$$\underbrace{11\ldots11}_{\textit{2012 цифр}} - \underbrace{22\ldots22}_{\textit{1006 цифр}}$$

є повним квадратом? **(4 бали)**

Задача 2. *Знайти суму функціонального ряду та побудувати її графік:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[2^n x]} 2^{-n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Квадратними дужками позначено цілу частину числа. **(6 балів)**

Задача 3. *Про симетричну квадратну матрицю A порядку n відомо, що $\operatorname{tr} A^2 = \operatorname{tr} A^3 = \operatorname{tr} A^4 = \alpha$.*

а) *При яких значеннях α це можливо?* **(4 бали)**

б) *Чому дорівнює $\det A$?* **(2 бали)**

Задача 4. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$\begin{cases} f' = f \sin x + g \cos x, \\ g' = g \sin x + f \cos x, \\ f(0) = g(0) = 1. \end{cases}$$

(5 балів)

Задача 5. *Про многочлен $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ з комплексними коефіцієнтами відомо, що $a_0 = 1$, $a_3 = a_6 = a_9 = \ldots = 0$. Довести, що у будь-якого правильного шестикутника, вписаного в одиничне коло, знайдуться дві різні вершини z_1 та z_2 такі, що $|P(z_1)| \geq 1$, $|P(z_2)| \geq 1$.* **(8 балів)**

Задача 6. *Функціональна послідовність $(f_n, n \geq 1)$ задана рекурентним способом:*

$$f_1(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}, \quad f_n(x) = f_{n-1}(f_1(x)),\ n \geq 2,\ x \in \mathbb{R}.$$

Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx$. **(7 балів)**

Задача 7. *Обчислити інтеграл*

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2(2012x)}{\sin^2 x}\,dx.$$

(7 балів)

Задача 8. *В країні є n міст $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$, $n \geq 3$, причому між кожними двома містами є пряме авіасполучення. Розсіяний турист починає подорож в місті $\mathcal{C}_1$, потім летить в навмання обране інше місто і повторює цю процедуру, поки не повернеться в $\mathcal{C}_1$. Вважаючи, що на кожному кроці турист обирає будь-яку наступну ціль з однаковими ймовірностями, знайти*

а) *ймовірність того, що протягом подорожі турист відвідає місто C_2;* **(4 бали)**

б) *математичне сподівання кількості* різних *відвіданих міст.* **(3 бали)**