РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ СТУДЕНТСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ НТУУ «КПІ» З МАТЕМАТИКИ, 2013 р.

Перший курс

Задача 1. Які значення може приймати вираз $ab + cd$ за умови, що $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ і $ac + bd = 0$?

Розв'язання: Нехай $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \geq 0$. Якщо $p = 0$, то $a = b = c = d = 0$ і $ab + cd = 0$. Нехай $p > 0$. З умови задачі випливає існування таких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, що

$$a = p\cos\alpha,\ b = p\sin\alpha,\ c = p\cos\beta,\ d = p\sin\beta.$$

Підставляючи отримане в другу умову отримаємо,

$$0 = ac + bd = p^2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = p^2\cos(\alpha - \beta),$$

тобто $\cos(\alpha - \beta) = 0$, і тому

$$ab + cd = p^2(\cos\alpha\sin\alpha + \cos\beta\sin\beta) = \frac{p^2}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = p^2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = 0,$$

Відповідь: 0.

Задача 2. Знайти геометричне місце точок на площині, координати (x, y) яких задовольняють рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos(x+y) \\ \cos x & 1 & \cos y \\ \cos(x+y) & \cos y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язання: Доведемо, що для будь-якого $n \geqslant 3$ і $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos(a_1 - a_1) & \cos(a_2 - a_1) & \ldots & \cos(a_n - a_1) \\ \cos(a_1 - a_2) & \cos(a_2 - a_2) & \ldots & \cos(a_n - a_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos(a_1 - a_n) & \cos(a_2 - a_n) & \ldots & \cos(a_n - a_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Помітимо, що $A = B^T B$, де

$$B = \begin{pmatrix} \cos a_1 & \cos a_2 & \ldots & \cos a_n \\ \sin a_1 & \sin a_2 & \ldots & \sin a_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Потрібний результат випливає з того факту, що матриця B є виродженою, а тому й матриця A, як добуток вироджених, є виродженою.

Якщо покласти $n = 3, a_1 = 0, a_2 = x, a_3 = x + y$, отримаємо, що визначник дорівнює нулю для всіх $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, а тому шукане ГМТ є всією площиною.

Відповідь: $\mathbb{R}^2$.

Задача 3. Знайти кількість розв'язків в цілих числах рівняння

$$x^3+y^3+z^3=2012^{2014}.$$

Розв'язання: З одного боку,

$$2012^{2014}\equiv 5^{2014}\equiv 5^4\equiv 4(\mod 9).$$

З іншого боку, куб цілого числа, як неважко переконатися перебором, при діленні на 9 може давати у залишку лише -1, 0 або 1. Останнє означає, що сума трьох кубів не може давати залишок 4 при діленні на 9, а тому дане рівняння розв'язків не має.

Відповідь: 0.

Задача 4. Нехай $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ — гіперболічний тангенс x. Знайти область визначення та побудувати графік функції

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}(\operatorname{th} nx)^{2^n+n}. \tag{2}$$

Розв'язання: Розглянемо три випадки:

1) Нехай $x=0$. Тоді $f(x)=0$.

2) Нехай $x>0$. Розглянемо (2), враховуючи те, що $\operatorname{th} nx>0$,

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to\infty}(\operatorname{th} nx)^{2^n+n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{e^{2nx}+1}\right)^{2^n+n}=[1^\infty]=\\&=\boxed{\begin{array}{l}\text{Використаємо формулу:}\\ \lim\limits_{n\to\infty}u^v=[1^\infty]=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(u-1)v}\end{array}}=\lim_{n\to\infty}\exp\left(-2\cdot\frac{2^n+n}{e^{2nx}+1}\right)=\\&=\lim_{n\to\infty}\exp\left(-2e^{n(\ln 2-2x)}\cdot\frac{1+n2^{-n}}{1+e^{-2nx}}\right)=\lim_{n\to\infty}\exp\left(-2e^{n(\ln 2-2x)}\right).\end{aligned}$$

Оскільки значення границі залежить від знаку $\ln 2-2x$, легко отримати, що

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\exp\left(-2e^{n(\ln 2-2x)}\right)=\begin{cases}0, & x\in\left(0,\dfrac{\ln 2}{2}\right)\\ e^{-2}, & x=\dfrac{\ln 2}{2}\\ 1, & x\in\left(\dfrac{\ln 2}{2},\infty\right)\end{cases}. \tag{3}$$

3) Нехай $x<0$. В цьому випадку,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}(\operatorname{th} nx)^{2^n+n}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\left(1-\frac{2}{e^{2n(-x)}+1}\right)^{2^n+n}.$$

Оскільки $-x>0$, тоді в силу (3), границя буде існувати у випадку, коли $x\in\left(-\dfrac{\ln 2}{2},0\right)$, а при $x\in\left(-\infty,-\dfrac{\ln 2}{2}\right]$ границя не існує, а тому функція є не визначеною.

Підсумовуючи отримане, маємо наступний графік функції:

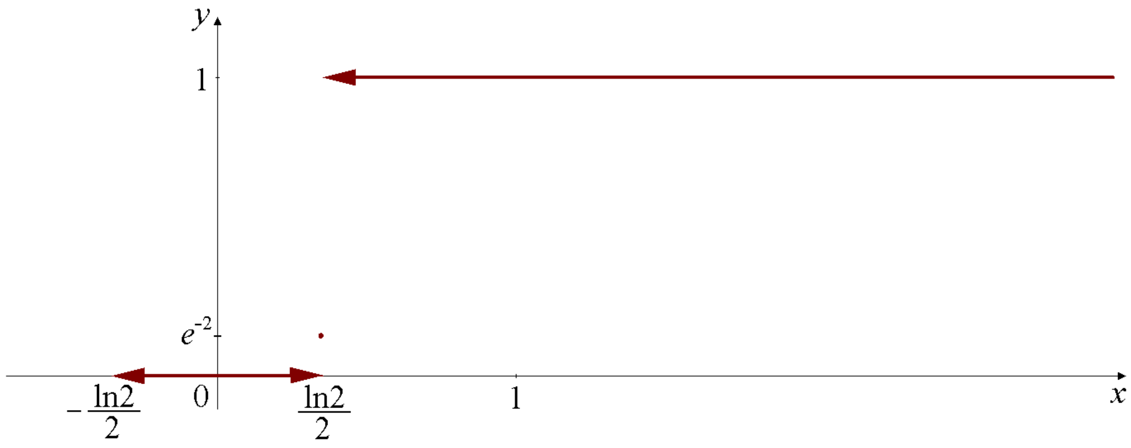

Рис. 1.

Відповідь: $D(f) = \left(-\dfrac{\ln 2}{2}, +\infty\right)$, графік функції – див. Рис. 1.

Задача 5. Числову послідовність $(a_n, n \geq 0)$ задано рівностями

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_n = a_{n-1}^3 + 3a_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{4}$$

Довести, що для деякого дійсного числа φ число a_n може бути знайдено за формулою $a_n = \left[\varphi^{3^n}\right]$, де $[\cdot]$ позначає цілу частину. Знайти число φ.

Розв'язання: Розглянемо функцію $f(x) = x^3 + 3x$. Неважко перевірити, що

$$f\left(t - \frac{1}{t}\right) = t^3 - \frac{1}{t^3}. \tag{5}$$

Знайдемо таке значення $t > 0$, для якого виконується рівність $t - \dfrac{1}{t} = a_0 = 1$. Розв'язавши відповідне квадратне рівняння, отримаємо, що $t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Використовуючи (5) та рекурентне співвідношення (4) будемо мати

$$a_0 = t - \frac{1}{t}, \quad a_1 = f(a_0) = f\left(t - \frac{1}{t}\right) = t^3 - \frac{1}{t^3}, \quad a_2 = f(a_1) = f\left(t^3 - \frac{1}{t^3}\right) = t^9 - \frac{1}{t^9}, \ \ldots,$$
$$a_n = f(a_{n-1}) = f\left(t^{3^{n-1}} - \frac{1}{t^{3^{n-1}}}\right) = t^{3^n} - \frac{1}{t^{3^n}}, \quad \ldots .$$

Підставляючи в останню рівність $t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3^n} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-3^n} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3^n} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{3^n}.$$

Враховуючи те, що $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \in (0,1)$ (відповідно, $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{3^n} \in (0,1)$) і a_n є цілим числом остаточно отримаємо

$$a_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3^n}\right].$$

Відповідь: $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Задача 6. Функцію $y(x)$, $x \geq 0$, задано неявно рівністю $x + x^p = y + y^q$, де $0 < p < q < 1$ — фіксовані параметри. Знайти

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y^q - x^q}{x^{2q-1}}.$$

Розв'язання: Введемо позначення $z = x + x^p = y + y^q$. Тоді,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{z} = 1, \quad \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{z} = 1,$$

і, відповідно, $x \sim y \sim z$ при $x \to +\infty$.

Використовуючи отриману еквівалентність, будемо мати

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{y^q - x^q}{x^{2q-1}} &= \lim_{y\to+\infty} \frac{y^q - z^q}{y^{2q-1}} + \lim_{x\to+\infty} \frac{z^q - x^q}{x^{2q-1}} = \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{y^q(1-(1+y^{q-1})^q)}{y^{2q-1}} + \lim_{x\to+\infty} \frac{x^q((1+x^{p-1})^q - 1)}{x^{2q-1}} = \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{y^q \cdot (-qy^{q-1})}{y^{2q-1}} + \lim_{x\to+\infty} \frac{x^q q x^{p-1}}{x^{2q-1}} = -q + 0 = -q.
\end{aligned}$$

Відповідь: $-q$.

Задача 7. Знайти всі неперервні функції $f(x)$, $x > 0$, які задовольняють функціональне рівняння

$$f\big(xf(y)\big) = yf(x). \tag{6}$$

Розв'язання: З (6) випливає, що $f(x) > 0,\ x > 0$ ($xf(y) > 0$ для всіх $x, y > 0$) та

$$f(f(xf(y))) = f(yf(x)) = xf(y).$$

Поклавши в останній рівності $x = \dfrac{t}{f(1)},\ y = 1$, отримаємо

$$f(f(t)) = t,\ t > 0. \tag{7}$$

Тоді підставляючи замість y $f(y)$ (6) можна переписати у вигляді

$$f(xy) = f(x)f(y). \tag{8}$$

Знайдемо функції, які задовольняють (8). Помітимо, що для функції $g(x) = \ln f(e^x)$, в силу (8), буде виконуватись рівність Коші:

$$g(x) + g(y) = \ln f(e^x) + \ln f(e^y) = \ln(f(e^x)f(e^y)) = \ln f(e^{x+y}) = g(x+y),$$

якому задовольняють лише функції вигляду $g(x) = kx, k \in \mathbb{R}$. Останнє означає, що

$$f(x) = e^{g(\ln x)} = e^{k \ln x} = x^k.$$

Для визначення підходящих значень k підставляємо цю функцію в (7) та отримуємо лише два розв'язки $f(x) = x$ і $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Легко впевнитись, що вказані функції задовольняють умову задачі.

Відповідь: $f(x) = x$ і $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Задача 8. Нехай $\mathcal{K}$ — множина всіх інтегровних функцій $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, які для будь-яких $x, y \in [0,1]$ задовольняють нерівність $xf(y) + yf(x) \le 1$. Довести, що

$$\max_{f \in \mathcal{K}} \int\limits_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}. \tag{9}$$

Розв'язання: Зробимо дві заміни змінних $x = \cos t$ та $x = \sin t$ у (9),

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin t)\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos t)\sin t\,dt,$$

звідки

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (f(\sin t)\cos t + f(\cos t)\sin t)\,dt.$$

Нерівність з умови задачі, при підстановці замість $x = \cos t$ та $y = \sin t$, запишеться у вигляді $f(\sin t)\cos t + f(\cos t)\sin t \leqslant 1$. З останнього випливає

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Можна показати, що функція $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ задовольняє умову задачі (зробити заміну $x = \sin t$), і, крім того, $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$.

Старші курси

Задача 1. Позначимо через $\nu(n)$ кількість цифр у десятковому запису числа n. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(n)^{\nu(n)}}.$$

Розв'язання: Легко бачити, що початковий ряд є знакододатнім, і його можна представити у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(n)^{\nu(n)}}=9\frac{1}{1^1}+90\frac{1}{2^2}+\ldots+9\cdot 10^{k-1}\frac{1}{k^k}+\ldots=\frac{9}{10}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{10}{k}\right)^k.$$

Помітимо, що при $k>20$

$$\left(\frac{10}{k}\right)^k<\left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

і за 1-ю ознакою порявняння початковий ряд також збігається, оскільки $\sum\limits_{k=21}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k<1$.

<u>**Відповідь:**</u> Збігається.

Задача 2. Знайти геометричне місце точок в просторі, координати (x,y,z) яких задовольняють рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos(x+y) & \cos(x+y+z) \\ \cos x & 1 & \cos y & \cos(y+z) \\ \cos(x+y) & \cos y & 1 & \cos z \\ \cos(x+y+z) & \cos(y+z) & \cos z & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Розв'язання: Підставляючи в (1), із задачі 2 першого курсу,

$$n=4, a_1=0, a_2=x, a_3=x+y, a_4=x+y+z,$$

отримаємо, що визначник завжди дорівнює нулю, а тому шукане ГМТ є всім простором.
<u>**Відповідь:**</u> $\mathbb{R}^3$.

Задача 3. Обчислити суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}i^2}.$$

Розв'язання: Оскільки

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}i^2}=6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}=6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{4}{2n+1}\right)=$$

$$=12\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}-\frac{2}{2n+1}\right).$$

Використовуючи те, що $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots\right)=\ln 2$ отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}-\frac{2}{2n+1}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)+\dots=$$

$$=-\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\dots\right)=-\frac{1}{2}+2(1-\ln 2)=\frac{3}{2}-2\ln 2.$$

Остаточно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}i^2}=12\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)=18-24\ln 2.$$

Відповідь: $18-24\ln 2$.

Задача 4. Знайти всі функції y, які задовольняють умови

$$\begin{cases}y''(x)+y(x)+y(-x)=1,\\ y(0)=0,\\ y'(0)=0.\end{cases}\tag{10}$$

Розв'язання: Підставляючи в (10) замість x $-x$, отримаємо

$$y''(-x)=y''(x).$$

Розглянемо функцію $t(x)=y(x)+y(-x)$. Для неї легко отримати наступне

$$t(0)=0,\ t'(x)=y'(x)-y'(-x),\ t'(0)=0,\ t''(x)=y''(-x)+y''(x)=2y''(x).$$

Тоді функція $t(x)$ задовольняє диференціальному рівнянню

$$\begin{cases}\frac{1}{2}t''(x)+t(x)=1,\\ t(0)=0,\\ t'(0)=0,\end{cases}$$

розв'язком якого є $t(x)=1-\cos(x\sqrt{2})$.

З (10) випливає, що

$$\begin{cases}y''(x)=1-t(x)=\cos(x\sqrt{2}),\\ y(0)=0,\\ y'(0)=0.\end{cases}.$$

Легко отримати, що останнє рівняння має розв'язком функцію $y(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(x\sqrt{2})$, яка задовольняє умові задачі.

Відповідь: $y(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(x\sqrt{2})$.

Задача 5. Послідовність многочленів $\big(P_n(x), n\geq 0\big)$ задано рівностями

$$\begin{cases}P_0(x)=x,\\ P_n(x)=P_{n-1}^3(x)+3P_{n-1}(x),\quad n\geq 1.\end{cases}$$

Довести, що для деякого дійсного числа φ суму всіх коефіцієнтів S_n многочлена $P_n(x)$ може бути знайдено за формулою $S_n=\left[\varphi^{3^n}\right]$, де $[\cdot]$ позначає цілу частину. Знайти число φ.

Розв'язання: Використати результат задачі 5 першого курсу, враховуючи те, що

$$S_n = P_n(1) = a_n,$$

де a_n задано в задачі 5 першого курсу.

<u>**Відповідь:**</u> $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Задача 6. Функцію $y(x)$, $x \geq 0$, задано неявно рівністю $x + x^p = y + y^q$, де $0 < p < q < 1$ — фіксовані параметри. Знайти

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y^q - x^q}{x^{2q-1}}.$$

Розв'язання: Див. розв'язок задачі 6 першого курсу.

Задача 7. Знайти всі неперервні функції $f(x)$, $x > 0$, які задовольняють функціональне рівняння

$$f\big(xf(y)\big) = yf(x).$$

Розв'язання: Див. розв'язок задачі 7 першого курсу.

Задача 8. Нехай $\mathcal{K}$ — множина всіх інтегровних функцій $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, які для будь-яких $x, y \in [0,1]$ задовольняють нерівність $xf(y) + yf(x) \leq 1$. Довести, що

$$\max_{f \in \mathcal{K}} \int\limits_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Розв'язання: Див. розв'язок задачі 8 першого курсу.