ВІДКРИТА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ «КПІ» З МАТЕМАТИКИ, 2015 р.

Перший курс

1. Побудувати графік функції $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + (2x-2)^{2n}}$.

2. Для будь-якої скінченної числової множини M визначимо її *знакозмінну суму* $\mathcal{S}(M)$ таким чином: впорядкуємо всі елементи множини за спаданням і, починаючи з найбільшого, будемо послідовно віднімати та додавати наступні числа. Наприклад, для множини $M = \{1, 3, 4, 6\}$ знакозмінна сума становить $\mathcal{S}(M) = 6 - 4 + 3 - 1 = 4$.

   Знайти $\sum\limits_{\emptyset \neq M \subset \{1,2,\ldots,n\}} \mathcal{S}(M)$, тобто суму знакозмінних сум всіх непорожніх підмножин множини $\{1, 2, \ldots, n\}$.

3. Прямокутна матриця A має таку властивість: для деякого фіксованого $k \geq 3$ та будь-яких індексів $i_1, i_2, \ldots, i_k$ справедлива рівність $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_{k-1} i_k} = a_{i_1 i_k}$. Які значення (в залежності від k) може набувати ранг матриці A?

4. Знайти всі чотирикутники мінімальної площі, вершини яких лежать відповідно на двох гілках гіперболи $xy = 1$ та на двох гілках гіперболи $xy = -1$.

5. Числові послідовності $\{x_n, n \geq 0\}$ та $\{y_n, n \geq 0\}$ задовольняють рекурентні співвідношення

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \text{ та } y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n},\ n \geq 0,$$

   причому $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$

6. Тричі диференційовна функція $\big(f(x), x \in [0,1]\big)$ задовольняє наступні властивості:

   (a) $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$;

   (b) $f'''(x) \leq 1$ для будь-якого $x \in [0, 1]$.

   Довести, що

$$\sum_{n=0}^{2015} f\left(\frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{5}.$$

7. Диференційовна функція f визначена на відрізку $[0, 1]$ та задовольняє умову $f(0) = f(1)$. Довести, що для будь-якого набору невід'ємних чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, таких що $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, знайдеться набір різних точок $\xi_1, \ldots, \xi_n \in (0, 1)$, для яких $\alpha_1 f'(\xi_1) + \ldots + \alpha_n f'(\xi_n) = 0$.

8. Які значення може набувати величина

$$\int\limits_0^1 \big(f^2(x) - f(\sqrt[3]{x})\big)\, dx,$$

   якщо f пробігає множину всіх неперервних функцій на відрізку $[0, 1]$?

Результати олімпіади буде опубліковано на сайті http://matan.kpi.ua/

ВІДКРИТА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ «КПІ» З МАТЕМАТИКИ, 2015 р.

Старші курси

1. Чи існує неспадна функція $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, що задовольняє такі умови:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(e^n)}{f(n)} = 1$?

   Якщо існує, навести приклад такої функції, якщо ні — довести це.

2. Визначити всі неперервно диференційовні функції на відрізку $[0,1]$, які задовольняють умови:

   (a) $f(0) = 0$;

   (b) $2\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx = \int\limits_0^1 (1-x^2)\big(f'(x)\big)^2\,dx$.

3. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^4+n^2+1}$.

4. Обчислити інтеграл
$$\int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 \frac{dx_1 \dots dx_n}{\max\{x_1,\dots,x_n\} - \min\{x_1,\dots,x_n\}}.$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння
$$y'' + \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{y}{(1+x^2)^2} = 0.$$

6. Тричі диференційовна функція $\big(f(x), x \in [0,1]\big)$ задовольняє наступні властивості:

   (a) $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$;

   (b) $f'''(x) \le 1$ для будь-якого $x \in [0,1]$.

   Довести, що
$$\sum_{n=0}^{\infty} f\Big(\frac{1}{2^n}\Big) < \frac{1}{5}.$$

7. Диференційовна функція f визначена на відрізку $[0,1]$ та задовольняє умову $f(0) = f(1)$. Довести, що для будь-якого набору невід'ємних чисел $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, таких що $\alpha_1+\ldots+\alpha_n = 1$, знайдеться набір різних точок $\xi_1,\dots,\xi_n \in (0,1)$, для яких $\alpha_1 f'(\xi_1)+\ldots+\alpha_n f'(\xi_n) = 0$.

8. Відпочивальниця Тамара приїжджає на курорт з n сукнями. Кожного ранку вона випадково обирає одну сукню, носить її протягом дня, а ввечері повертає до шафи. В той день, коли Тамара обирає сукню, яку вже носила, вона в засмучених почуттях від'їжджає додому. Нехай $\mathcal{M}_n$ — математичне сподівання кількості днів, які вона провела на курорті. Довести, що
$$\mathcal{M}_n \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}} \text{ при } n \to \infty.$$

Результати олімпіади буде опубліковано на сайті http://matan.kpi.ua/