

РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ВІДКРИТОЇ СТУДЕНТСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ НТУУ «КПІ» З МАТЕМАТИКИ, 2015 р.

Перший курс

Задача 1. Побудувати графік функції

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + (2x - 2)^{2n}}.$$

Розв'язання: Розглянемо можливі випадки

1) Якщо $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{9+\sqrt{17}}{8}, \infty)$, то серед чисел 1, $|x|$, $(2x - 2)^2$ найбільшим є $(2x - 2)^2$. Тому

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x - 2)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{(2x - 2)^{2n}} + \frac{x^n}{(2x - 2)^{2n}}} = \\ &= (2x - 2)^2. \end{aligned}$$

2) Якщо $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, то серед чисел 1, x , $(2x - 2)^2$ найбільшим є 1, а тому

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1 + x^n + (2x - 2)^{2n}} \leq \sqrt[n]{3},$$

З останнього випливає, що $f(x) = 1$.

3) Якщо $x \in (1, \frac{9+\sqrt{17}}{8}]$, то серед чисел 1, x , $(2x - 2)^2$ найбільшим є x , а тому

$$f(x) = x \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^n} + \frac{(2x - 2)^{2n}}{x^n}} = x.$$

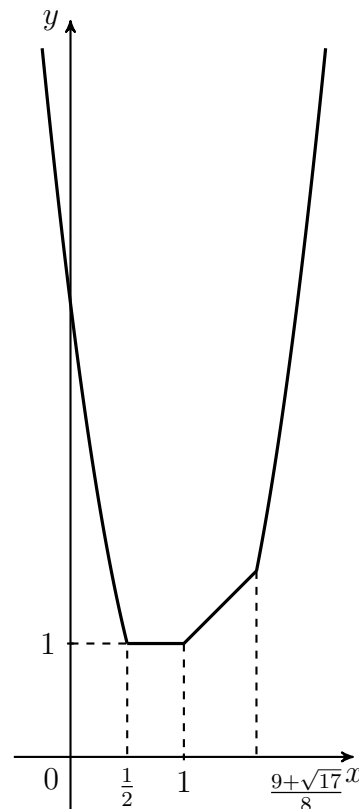


Рис. 1.

Відповідь:
$$f(x) = \begin{cases} (2x - 2)^2, & x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{9+\sqrt{17}}{8}, \infty); \\ 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1]; \\ x, & x \in (1, \frac{9+\sqrt{17}}{8}] \end{cases}.$$

Задача 2. Для будь-якої скінченної числової множини M визначимо її *знакозмінну суму* $\mathcal{S}(M)$ таким чином: впорядкуємо всі елементи множини за спаданням і, починаючи з найбільшого, будемо послідовно віднімати та додавати наступні числа. Наприклад, для множини $M = \{1, 3, 4, 6\}$ знакозмінна сума становить $\mathcal{S}(M) = 6 - 4 + 3 - 1 = 4$.

Знайти

$$\sum_{\emptyset \neq M \subset \{1, 2, \dots, n\}} \mathcal{S}(M),$$

тобто суму знакозмінних сум всіх непорожніх підмножин множини $\{1, 2, \dots, n\}$.

Розв'язання: Покладемо додатково $\mathcal{S}(\emptyset) = 0$. Всі підмножини $M \subset \{1, 2, \dots, n\}$ можна розбити на пари: перший елемент пари – якась множина M_1 , яка не містить n , а другий – $M_2 = M_1 \cup \{n\}$. Наприклад, однією з пар буде $(\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, n\})$, а ще однією $(\{\emptyset\}, \{n\})$.

Тепер зауважимо, що для кожної пари

$$\mathcal{S}(M_1) + \mathcal{S}(M_2) = (a_k - a_{k-1} + a_{k-2} - \dots) + (n - a_k + a_{k-1} - a_{k-2} + \dots) = n.$$

Загальна кількість пар становить 2^{n-1} . Тому шукана сума дорівнює $n \cdot 2^{n-1}$.

Відповідь: $n \cdot 2^{n-1}$.

Задача 3. Прямокутна матриця A має таку властивість: для деякого фіксованого $k \geq 3$ та будь-яких індексів $i_1, i_2, \dots, i_k$ справедлива рівність

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{k-1} i_k} = a_{i_1 i_k}.$$

Які значення (в залежності від k) може набувати ранг матриці A ?

Розв'язання: Будь-які два рядки такої матриці лінійно залежні. Дійсно, для рядків з номерами i та j для кожного l виконується

$$M \cdot a_{il} = a_{jl},$$

де $M = a_{ji} \cdot a_{ii}^{k-3}$. Звідси ранг матриці не може бути більшим за 1. Приклади матриць з рангом 0 та 1 – матриці з нулів та одиниць, відповідно.

Відповідь: 0 та 1.

Задача 4. Знайти всі чотирикутники мінімальної площі, вершини яких лежать відповідно на двох гілках гіперболи $xy = 1$ та на двох гілках гіперболи $xy = -1$.

Розв'язання: Позначимо через $A(a, \frac{1}{a})$, $B(-b, \frac{1}{b})$, $C(-c, -\frac{1}{c})$, $D(d, -\frac{1}{d})$, де $a, b, c, d > 0$, вершини чотирикутника, які лежать відповідно на верхній гілці гіперболи $xy = 1$, на верхній гілці гіперболи $xy = -1$, на нижній гілці гіперболи $xy = 1$, на нижній гілці гіперболи $xy = -1$. Очевидно, що

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA},$$

де O – початок координат.

Покажемо, що $S_{AOB} \geq 1$ і рівність досягається лише при $a = b$. Дійсно,

$$2S_{AOB} = \left| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & \frac{1}{a} & 0 \\ -b & \frac{1}{b} & 0 \end{vmatrix} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Аналогічно $S_{BOC} \geq 1$, рівність при $b = c$ і т.д. Таким чином,

$$S_{ABCD} \geq 4,$$

причому рівність досягається тільки при $a = b = c = d$.

Відповідь: прямокутники з вершинами $A(a, \frac{1}{a})$, $B(-a, \frac{1}{a})$, $C(-a, -\frac{1}{a})$, $D(a, -\frac{1}{a})$, де $a > 0$, площа дорівнює 4.

Задача 5. Числові послідовності $\{x_n, n \geq 0\}$ та $\{y_n, n \geq 0\}$ задовольняють рекурентні співвідношення

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \text{ та } y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}y_n}, \quad n \geq 0,$$

причому $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Довести, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$

Доведення: Оскільки

$$x_0 = 2 \cos \frac{\pi}{3}, \quad y_0 = 2,$$

то

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{6}, & y_1 &= 2 \cos \frac{\pi}{6}, \\ x_2 &= \cos \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} \cos^2 \frac{\pi}{12}, & y_2 &= 2 \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Використовуючи ці міркування, легко показати, що

$$x_n = 2 \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{12} \dots \cos^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}, \quad y_n = 2 \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{12} \dots \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}.$$

Тоді, використовуючи рівність

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{12} \dots \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} &= \\ &= \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{12} \dots \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} = \dots = \frac{1}{2^{n-1}} \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2^n} \sin \frac{\pi}{3}, \end{aligned}$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{12} \dots \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} = \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{12} \dots \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} = \\
 &= 2 \sin \frac{\pi}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}} = \boxed{\sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \sim \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}, \text{ при } n \rightarrow \infty} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}} = 2 \sin \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3}{\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.
 \end{aligned}$$

З іншого боку,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \cdot \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$

■

Задача 6. Тричі диференційовна функція $(f(x), x \in [0, 1])$ задовольняє наступні властивості:

- а) $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$;
- б) $f'''(x) \leq 1$ для будь-якого $x \in [0, 1]$.

Довести, що

$$\sum_{n=0}^{2015} f\left(\frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{5}.$$

Доведення: Для довільного $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= f''(0) + \int_0^x f'''(t) dt \leq x, \\
 f'(x) &= f'(0) + \int_0^x f''(t) dt \leq \frac{x^2}{2}, \\
 f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt \leq \frac{x^3}{6}.
 \end{aligned}$$

Тому

$$\sum_{n=0}^{2015} f\left(\frac{1}{2^n}\right) < \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8^n} = \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{7} < \frac{1}{5}.$$

■

Задача 7. Диференційовна функція f визначена на відрізку $[0, 1]$ та задовольняє умову $f(0) = f(1)$. Довести, що для будь-якого набору невід'ємних чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, таких що $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$, знайдеться набір різних точок $\xi_1, \dots, \xi_n \in (0, 1)$, для яких

$$\alpha_1 f'(\xi_1) + \dots + \alpha_n f'(\xi_n) = 0.$$

Доведення: Нехай $\alpha_i > 0$, для всіх $i = \overline{1, n}$ (в протилежному випадку, у якості ξ_i можна взяти довільну точку інтервалу $(0, 1)$).

Введемо позначення

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i, \quad k = \overline{1, n}.$$

Згідно з теоремою Лагранжа для довільного $k \in \{1, \dots, n\}$ існує $\xi_k \in (\beta_{k-1}, \beta_k)$, що

$$f'(\xi_k) = \frac{f(\beta_k) - f(\beta_{k-1})}{\beta_k - \beta_{k-1}} = \frac{f(\beta_k) - f(\beta_{k-1})}{\alpha_k}.$$

В цьому випадку всі ξ_i є різними і

$$\begin{aligned} \alpha_1 f'(\xi_1) + \dots + \alpha_n f'(\xi_n) &= \alpha_1 \frac{f(\beta_1) - f(\beta_0)}{\alpha_1} + \alpha_2 \frac{f(\beta_2) - f(\beta_1)}{\alpha_2} + \dots + \\ &+ \alpha_k \frac{f(\beta_k) - f(\beta_{k-1})}{\alpha_k} + \dots + \alpha_n \frac{f(\beta_n) - f(\beta_{n-1})}{\alpha_n} = \\ &= f(\beta_n) - f(\beta_0) = f(1) - f(0) = 0. \end{aligned}$$

■

Задача 8. Які значення може набувати величина

$$\int_0^1 (f^2(x) - f(\sqrt[3]{x})) dx,$$

якщо f пробігає множину всіх неперервних функцій на відрізку $[0, 1]$?

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f^2(x) - f(\sqrt[3]{x})) dx &= \int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 f(\sqrt[3]{x}) dx = \boxed{\text{заміна } x = t^3 \text{ в} \\ \text{другому інтегралі}} &= \\ &= \int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 3t^2 f(t) dt = \int_0^1 (f^2(x) - 3x^2 f(x)) dx = \\ &= \int_0^1 \left(f(x) - \frac{3}{2}x^2 \right)^2 dx - \int_0^1 \frac{9}{4}x^4 dx = \int_0^1 \left(f(x) - \frac{3}{2}x^2 \right)^2 dx - \frac{9}{20} \geq -\frac{9}{20}. \end{aligned}$$

При $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + a$ маємо

$$\int_0^1 \left(f(x) - \frac{3}{2}x^2 \right)^2 dx - \frac{9}{20} = a^2 - \frac{9}{20},$$

тобто інтеграл набуває всіх значень в проміжку $\left[-\frac{9}{20}, \infty\right)$.

Відповідь: $\left[-\frac{9}{20}, \infty\right)$.

Старші курси

Задача 1. Чи існує неспадна функція $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, що задовольняє такі умови:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(e^n)}{f(n)} = 1$?

Якщо існує, навести приклад такої функції, якщо ні — довести це.

Розв'язання: Розглянемо послідовність $\{a_k, k \in \mathbb{N}\}$:

$$a_1 = e, \quad a_2 = e^e, \quad a_3 = e^{e^e}, \quad \dots, \quad a_k = \overbrace{e^{e^{\dots^e}}}^{k \text{ разів}}, \quad \dots,$$

та задамо функцію f наступним чином:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, a_1); \\ 1, & x \in [a_1, a_2); \\ \dots & \dots \\ k, & x \in [a_k, a_{k+1}); \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Дана функція, очевидно, є неспадною і $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Крім того, при $n \in [a_k, a_{k+1})$, $e^n \in [a_{k+1}, a_{k+2})$, $k \in \mathbb{N}$. Це означає, що

$$\frac{f(e^n)}{f(n)} = \frac{k+1}{k},$$

а тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(e^n)}{f(n)} = 1$, тобто функція задовольняє умови задачі.

Відповідь: Так .

Задача 2. Визначити всі неперервно диференційовні функції на відрізку $[0, 1]$, які задовольняють умови:

а) $f(0) = 0$;

б) $2 \int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 (1 - x^2)(f'(x))^2 dx.$

Розв'язання: Нехай $x \in [0, 1]$. Застосуємо до рівності

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x f'(t) dt$$

нерівність Коші-Буняковського:

$$f^2(x) \leq x \int_0^x (f'(t))^2 dt.$$

Проінтегруємо останню нерівність за проміжком $[0, 1]$:

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq \int_0^1 \left(x \int_0^x (f'(t))^2 dt \right) dx = \int_0^1 x dx \int_0^x (f'(t))^2 dt. \quad (1)$$

Розглянемо окремо повторний інтеграл у правій частині, та змінимо в ньому порядок інтегрування:

$$\int_0^1 x dx \int_0^x (f'(t))^2 dt = \int_0^1 (f'(t))^2 dt \int_t^1 x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - t^2) (f'(t))^2 dt.$$

Тоді (1) перепишеться у вигляді

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - t^2) (f'(t))^2 dt.$$

Оскільки рівність в нерівності Коші-Буняковського в даному випадку буде досягається лише при

$$f'(x) \equiv c \in \mathbb{R},$$

то, враховуючи, що $f(0) = 0$, отримаємо

$$f(x) = cx, \quad x \in [0, 1].$$

Легко впевнитись, що така функція задовольняє умову задачі при всіх $c \in \mathbb{R}$.

Відповідь: $f(x) = cx, \quad x \in [0, 1], \quad c \in \mathbb{R}.$

Задача 3. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$.

Розв'язання: Помітимо, що

$$\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{n}{(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2 - n + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2 + n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді n -ту часткову суму ряду можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2 - n + 1} - \frac{1}{n^2 + n + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2 + n + 1}. \end{aligned}$$

З останнього випливає, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2 + n + 1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Задача 4. Обчислити інтеграл

$$I_n = \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{dx_1 \dots dx_n}{\max\{x_1, \dots, x_n\} - \min\{x_1, \dots, x_n\}}.$$

Розв'язання: Якщо $n = 1$, то підінтегральна функція ніде не визначена і, відповідно, інтеграл не існує.

Якщо $n = 2$, то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{|x - y|} &= 2 \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{1-a} dx \int_{x+a}^1 \frac{dy}{y - x} = \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{1-a} (\ln(1 - x) - \ln a) dx = 2 \lim_{a \rightarrow 0} \left(\int_a^1 \ln x dx - (1 - a) \ln a \right) = \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow 0} (a - a \ln a - (1 - a) \ln a) = 2 \lim_{a \rightarrow 0} (a - \ln a) = +\infty, \end{aligned}$$

тобто інтеграл є розбіжним.

Нехай $n \geq 3$. Помітимо, що інтеграл не змінюється при перестановках змінних, загальна кількість яких становить $n!$. Використовуючи це, будемо мати

$$I_n = n! \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{dx_1 \dots dx_n}{x_n - x_1} =$$

$$\begin{aligned}
&= n! \iint_{0 \leq x_1 \leq x_n \leq 1} dx_1 dx_n \int \dots \int_{x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n} \frac{dx_2 \dots dx_{n-1}}{x_n - x_1} = \\
&= n! \iint_{0 \leq x_1 \leq x_n \leq 1} \frac{1}{x_n - x_1} dx_1 dx_n \int \dots \int_{x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n} dx_2 \dots dx_{n-1} = \\
&= n! \iint_{0 \leq x_1 \leq x_n \leq 1} \frac{1}{x_n - x_1} dx_1 dx_n \frac{1}{(n-2)!} \int \dots \int_{x_2, \dots, x_{n-1} \in [x_1, x_n]} dx_2 \dots dx_{n-1} = \\
&= n! \iint_{0 \leq x_1 \leq x_n \leq 1} \frac{1}{x_n - x_1} \cdot \frac{(x_n - x_1)^{n-2}}{(n-2)!} dx_1 dx_n = n(n-1) \iint_{0 \leq x_1 \leq x_n \leq 1} (x_n - x_1)^{n-3} dx_1 dx_n = \\
&= n(n-1) \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 (x_n - x_1)^{n-3} dx_n = \frac{n(n-1)}{n-2} \int_0^1 (1-x_1)^{n-2} dx_1 = \frac{n}{n-2}.
\end{aligned}$$

Відповідь: Якщо $n = 1$, то інтеграл не існує; якщо $n = 2$, то інтеграл розбіжний; якщо $n \geq 3$, то $I_n = \frac{n}{n-2}$.

Задача 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{y}{(1+x^2)^2} = 0. \quad (2)$$

Розв'язання: Зробимо заміну $x = \operatorname{tg} t$, $t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Тоді

$$\begin{aligned}
y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t} = \cos^2 t \cdot y'_t, \quad y''_{xt} = (\cos^2 t \cdot y'_t)' = -2 \cos t \sin t \cdot y'_t + \cos^2 t \cdot y''_{tt}, \\
y''_{xx} &= -2 \cos^3 t \sin t \cdot y'_t + \cos^4 t \cdot y''_{tt}.
\end{aligned}$$

Підставляючи отримане в (2), будемо мати

$$\begin{aligned}
y''_{xx} + \frac{2x}{1+x^2}y'_x + \frac{y}{(1+x^2)^2} &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow y''_{xx} + 2 \cos t \sin t \cdot y'_x + \cos^4 t \cdot y &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow -2 \cos^3 t \sin t \cdot y'_t + \cos^4 t \cdot y''_{tt} + 2 \cos^3 t \sin t \cdot y'_t + \cos^4 t \cdot y &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \cos^4 t (y''_{tt} + y) &= 0.
\end{aligned}$$

Таким чином, залишилось розв'язати рівняння

$$y''_{tt} + y = 0.$$

Легко бачити, що розв'язком останнього рівняння є $y = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t$.

Повертаючись до початкової змінної, отримаємо

$$y = C_1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C_2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Відповідь: $y = C_1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C_2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 6. Тричі диференційовна функція $(f(x), x \in [0, 1])$ задовольняє наступні властивості:

а) $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$;

б) $f'''(x) \leq 1$ для будь-якого $x \in [0, 1]$.

Довести, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{5}.$$

Доведення: Див. розв'язок задачі 6, першого курсу. ■

Задача 7. Диференційовна функція f визначена на відрізку $[0, 1]$ та задовольняє умову $f(0) = f(1)$. Довести, що для будь-якого набору невід'ємних чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, таких що $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$, знайдеться набір різних точок $\xi_1, \dots, \xi_n \in (0, 1)$, для яких

$$\alpha_1 f'(\xi_1) + \dots + \alpha_n f'(\xi_n) = 0.$$

Доведення: Див. розв'язок задачі 7, першого курсу. ■

Задача 8. Відпочивальниця Тамара приїжджає на курорт з n сукнями. Кожного ранку вона випадково обирає одну сукню, носить її протягом дня, а ввечері повертає до шафи. В той день, коли Тамара обирає сукню, яку вже носила, вона в засмучених почуттях від'їжджає додому. Нехай $\mathcal{M}_n$ — математичне сподівання кількості днів, які вона провела на курорті. Довести, що

$$\mathcal{M}_n \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Розв'язання: Нехай τ — кількість днів, які Тамара провела на курорті (крім останнього, коли вона від'їжджає), а $p_k = P\{\tau = k\}$. Тоді

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= p_1 + 2p_2 + \dots + np_n = \\ &= (p_1 + \dots + p_n) + (p_2 + \dots + p_n) + \dots + (p_{n-1} + p_n) + p_n = \sum_{k=1}^n P\{\tau \geq k\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Знайдемо ймовірність

$$P\{\tau \geq k\} = P\{k \text{ перших днів різні сукні}\} = 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} = \frac{n!}{(n-k)!n^k}.$$

Підставляючи її в (3), будемо мати

$$\mathcal{M}_n = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!n^k} = \boxed{\begin{array}{l} \text{змінимо індекс} \\ \text{підсумовування} \\ \text{на } l = n - k \end{array}} = \frac{n!}{n^n} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{n^l}{l!} = \frac{e^n n!}{n^n} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{e^{-n} n^l}{l!}.$$

Використовуючи формулу Стірлінга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

отримуємо

$$\mathcal{M}_n \sim \sqrt{2\pi n} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{e^{-n} n^l}{l!}.$$

Для завершення доведення залишилось показати, що

$$\sum_{l=0}^{n-1} \frac{e^{-n} n^l}{l!} \sim \frac{1}{2} \text{ або } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{e^{-n} n^l}{l!} = \frac{1}{2}.$$

Цей факт простіше за все довести за допомогою ймовірнісних міркувань. Нехай випадкова величина ξ розподілена за законом Пуассона з параметром n , незалежні випадкові величини $\nu_1, \dots, \nu_n$ – за законом Пуассона з параметром 1, випадкова величина γ – за стандартним гауссівським законом. Добре відомо, що ξ та $\nu_1 + \dots + \nu_n$ є однаково розподіленими. Тому внаслідок центральної граничної теореми маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{e^{-n} n^l}{l!} &= P\{\xi < n\} = P\{\nu_1 + \dots + \nu_n < n\} = \\ &= P\left\{\frac{\nu_1 + \dots + \nu_n - n}{\sqrt{n}} < 0\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\{\gamma < 0\} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

■