__Розв'язки задач 5 та 6.__

<u>Задача 5 (перший та старші курси).</u>

<u>Відповідь:</u> 521.

Позначимо через $L_n, n \geq 3,$ *кількість способів здійснити відповідне розфарбування для правильного n-кутника. Ясно, що у випадку* $n=3$ *існують 4 способи (в білий колір можна пофарбувати або першу вершину, або другу, або третю, або взагалі жодної), і тому* $L_3 = 4$. *Аналогічно* $L_4 = 7$.

Покажемо тепер, що для $n \geq 5$ *має місце співвідношення* $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$. *Дійсно, розглянемо колір n-ої вершини в правильному розфарбуванні n-кутника. Якщо він є білим, то перша та (n-1)-ша вершини мають бути чорними. Видаляючи n-ту та (n-1)-шу вершини, одержимо правильне розфарбування (n-2)-кутника, в якому перша вершина має чорний колір. Навпаки, кожному правильному розфарбуванню (n-2)-кутника з чорною першою вершиною відповідає рівно одне правильне розфарбування n-кутника з білою n-ою вершиною – достатньо після першої чорної вставити ще білу й чорну. Підсумок цим міркуванням підведемо у вигляді наступної формули*

$$\begin{aligned} &L_n(\text{з додатковою умовою, що } n-\text{та вершина є білою}) = \\ &= L_{n-2}(\text{з додатковою умовою, що перша вершина є чорною}). \end{aligned} \qquad (♀)$$

Якщо ж колір n-ої вершини в правильному розфарбуванні n-кутника був чорним, то, прибравши цю вершину, отримаємо (n-1)-кутник з першою та (n-1)-шою вершинами довільних кольорів. Якщо серед цих двох вершин є принаймні одна чорна, то розфарбування цього (n-1)-кутника є правильним. Якщо ж вони обидві є білими,то, прибравши ще й (n-1)-шу вершину, отримаємо правильне розфарбування (n-2)-кутника з білою першою вершиною. Всі ці міркування можуть бути проведені й в обернений бік. Підсумок підведемо у вигляді такої формули:

$$\begin{aligned} &L_n(\text{з додатковою умовою, що } n-\text{та вершина є чорною}) = \\ &= L_{n-1} + L_{n-2}(\text{з додатковою умовою, що перша вершина є білою}). \end{aligned} \qquad (♂)$$

Додаючи тепер співвідношення (♀) та (♂), одержуємо формулу $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$. *Отримати значення* L_{13} *тепер зовсім нескладно, записуючи послідовні значення* L_n : $L_{13} = 521$.

Задача 6 (перший курс).

Відповідь: $a_n = \frac{(n-1)!!}{(n-2)!!}$

Випишемо декілька перших значень нашої послідовності – $1, 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \frac{15}{8}, \frac{48}{15}, \frac{105}{48}, \dots$ *За цією послідовністю можна вгадати таку закономірність:* $a_n = \frac{(n-1)!!}{(n-2)!!}$ *Перевірка проводиться методом математичної індукції:*

$$a_n + \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{(n-1)!!}{(n-2)!!} + \frac{(n-1)!!}{n!!} = \frac{(n+1)!!}{n!!} = a_{n+2}.$$

Задача 6 (старші курси).

Відповідь: 1 або e/2.

Якщо всі елементи прогресії однакові, то границя, очевидно, дорівнює 1. Нехай елементи різні, і $a_n = a_1 + d(n-1)$, *причому* $d \neq 0$. *Тоді задача полягає в знаходженні границі*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + (a_1 + d(n-1))}{n\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot (a_1 + d(n-1))}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \frac{d(n-1)}{2}}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot (a_1 + d(n-1))}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{a_1}{dn}\left(\frac{a_1}{dn} + \frac{1}{n}\right) \ldots \left(\frac{a_1}{dn} + \frac{n-1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}}.$$

Позначивши через $\mathcal{L}$ *границю в знаменнику, маємо:*

$$\ln \mathcal{L} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{a_1}{dn} + \frac{k}{n}\right).$$

Якщо $a_1 = d$, *то границею буде, очевидно, інтеграл* $\int_0^1 \ln x \, dx = -1$. *Насправді, якщо навіть* $a_1 \neq d$, *відповідь буде така сама. Це випливає з того, що різниця між відповідними границями є нульовою:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{a_1}{dn} + \frac{k}{n}\right) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{1}{n} + \frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{k + a_1/d}{k+1}\right) = \lim_{k\to\infty} \ln\left(\frac{k + a_1/d}{k+1}\right) = 0.$$

В передостанній рівності використаний відомий факт: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, *якщо остання границя існує.*

Таким чином, $\ln \mathcal{L} = -1$, *і наша границя дорівнює* $\frac{e}{2}$.