Студентська математична олімпіада

ФАКС–2013

1-й курс

1. (5 балів). Для всіх значень параметра розв'яжіть систему

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

2. (5 балів). Знайдіть вектор $\overline{x}$, якщо відомо, що:

$$(\overline{x}, \overline{a}) = 1, (\overline{x}, \overline{b}) = 0, (\overline{x}, \overline{c}) = 0, (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 1,$$

де $(\overline{a}, \overline{b})$ — скалярний добуток векторів, $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ — мішаний добуток векторів

3. (5 балів). Знайдіть

$$\lim_{n\to\infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2^n}), \quad |x| < 1.$$

4. (5 балів). Побудуйте ескіз графіка функції $y = \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1-x^2}$.

5. (7 балів). Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?

6. (7 балів). Числову послідовність $a_n, n \ge 1$ задано умовами

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}, \qquad n \ge 1. \end{cases}$$

Знайдіть формулу загального члена a_n.

Студентська математична олімпіада

ФАКС – 2013

Старші курси

1. (5 балів). Обчисліть $\iint\limits_D \left| y^2 - x^2 \right| dxdy$, якщо область D — круг $x^2 + y^2 \le 1$.

2. (5 балів). Відомо два частинні розв'язки $y_1 = e^{-x} + \sin x, y_2 = xe^{-x} + \sin x$ диференціального рівняння $y'' + py' + qy = f(x), p, q \in \mathbb{R}$. Знайдіть розв'язок цього рівняння, який справджує умови $y(0) = y'(0) = 0$ і функцію $f(x)$.

3. (5 балів). Знайдіть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k!$

4. (5 балів). Обчисліть

$$\int\limits_0^{2014} x(x-1)(x-2)(x-3)...(x-2012)(x-2013)(x-2014)dx.$$

5. (7 балів). Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?

6. (7 балів). Нехай $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ та $\mathcal{H}(a_1, \dots, a_n)$ означають відповідно середнє арифметичне та середнє геометричне чисел $a_1, \dots, a_n$. Які значення може набувати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)}{\mathcal{H}(a_1, \dots, a_n)}$, якщо числова послідовність $(a_n, n \in \mathbb{N})$ є арифметичною прогресією?