Олімпіада з математики 2013 року на ФБМІ

1. Знайдіть матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{2013}$.

Розв'язання. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+6 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3^2-1 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+3\times 8 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3^3-1 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$.

За індукцією можна одержати $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{2013} = \begin{pmatrix} 1 & 3^{2013}-1 \\ 0 & 3^{2013} \end{pmatrix}$.

2. Складіть рівняння спільних дотичних до графіків функцій $y = x^2 - 2x + 5$ та $y = -x^2 + 4x$.

Розв'язання. Нехай рівняння дотичної $y = kx + b$. Пряма і кожна з парабол має лише одну спільну точку, тобто квадратні рівняння $x^2 - 2x + 5 = kx + b$ і $-x^2 + 4x = kx + b$ мають лише один корінь. Тоді дискримінанти рівнянь дорівнюють нулю: $\begin{cases} (2+k)^2 - 4(5-b) = 0 \\ (4-k)^2 - 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = 0, b_1 = 4, k_2 = 2, b_2 = 1$. **Відповідь**: $y = 4,\ y = 2x + 1$

3.(I) Знайдіть найменшу відстань між площиною $x + y + z + 3 = 0$ і поверхнею $z = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Відстань від точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ знаходять за формулою $d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$. Точка, яка належить поверхні $z = x^2 + y^2$ має координати $M(x_0, y_0, x_0^2 + y_0^2)$.

Застосуємо формулу знаходження відстані до цієї точки

$d = \left| \frac{x_0 + y_0 + x_0^2 + y_0^2 + 3}{\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{(x_0 + 1/2)^2 + (y_0 + 1/2)^2 + 5/2}{\sqrt{3}} \right|$. Очевидно, найменша відстань $d = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

3. (II) Знайдіть розв'язок задачі Коші диференціального рівняння

$$y'' + 2y' - 15y = 40e^{5x} + 30x^2 + 7x - 9, \text{ якщо } y(0) = 8,\ y'(0) = -1.$$

4. Знайдіть інтеграл $\int \frac{dx}{x\left(x^{2013} + 2013\right)}$.

$$\int \frac{dx}{x\left(x^{2013} + 2013\right)} = \int \frac{x^{2012}dx}{x^{2013}\left(x^{2013} + 2013\right)} = \frac{1}{2013} \int \frac{dx^{2013}}{x^{2013}\left(x^{2013} + 2013\right)} =$$

Розв'язання. $= \frac{1}{2013^2} \int \left(\frac{1}{x^{2013}} - \frac{1}{x^{2013} + 2013}\right) d(x^{2013}) = \frac{1}{2013^2}\left(\ln|x^{2013}| - \ln|x^{2013} + 2013|\right) + C =$

$$= \frac{1}{2013} \ln|x| - \frac{1}{2013^2} \ln|x^{2013} + 2013| + C.$$

5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?

6.(I) Числову послідовність $(a_n, n \ge 1)$ задано умовами $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = a_n + 1/a_{n+1},\ n \ge 1. \end{cases}$

Знайдіть формулу загального члена a_n.

6.(II) Нехай $\mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n)$ та $\mathrm{H}(a_1, \ldots, a_n)$ означають відповідно середнє арифметичне та середнє геометричне чисел $a_1, \ldots, a_n$. Які значення може набувати $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n)}{\mathrm{H}(a_1, \ldots, a_n)}$, якщо числова послідовність $(a_n, n \in \mathbb{N})$ є арифметичною прогресією?