

Олімпіада з математики 2013 року на ФБМІ

1. Знайдіть матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{2013}$.

2. Складіть рівняння спільних дотичних до графіків функцій $y = x^2 - 2x + 5$ та $y = -x^2 + 4x$.

3.(I) Знайдіть найменшу відстань між площиною $x + y + z + 3 = 0$ і поверхнею $z = x^2 + y^2$.

3.(II) Знайдіть розв'язок задачі Коші диференціального рівняння

$$y'' + 2y' - 15y = 40e^{5x} + 30x^2 + 7x - 9, \text{ якщо } y(0) = 8, y'(0) = -1.$$

4. Знайдіть інтеграл $\int \frac{dx}{x(x^{2013} + 2013)}$.

5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?

6.(I) Числову послідовність $(a_n, n \geq 1)$ задано умовами
$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = a_n + \frac{1}{a_{n+1}}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Знайдіть формулу загального члена a_n .

6.(II) Нехай $A(a_1, \dots, a_n)$ та $H(a_1, \dots, a_n)$ означають відповідно середнє арифметичне та середнє геометричне чисел a_1, \dots, a_n . Які значення може набувати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(a_1, \dots, a_n)}{H(a_1, \dots, a_n)}$, якщо числова послідовність $(a_n, n \in \mathbb{N})$ є арифметичною прогресією?