Задача 1. Нехай $x^2 + y^2 = 1$ - нескінченний круговий циліндр. Яку множину заповнюють фокуси еліпсів, утворених перетином циліндра площинами?

Фокуси заповнюють весь циліндр

Задача 2. Довести, що об'єм опуклого многогранника, всі вершини якого мають раціональні координати, є раціональним числом.

Розглянемо розбиття на трикутні піраміди. Усі вершини – раціональні числа, тому вектори, на яких побудовані піраміди мають раціональні координати. Знаходимо об'єми пірамід за допомогою мішаного добутку. Визначники будуть раціональними, тому і об'єм раціональне число.

Задача 3. Довести, що при $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ справедлива нерівність

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} < 1.$$

Позначимо визначник через W. Достатньо довести, що $W^2 < 1$.
Маємо

$$W^2 = (y-x)^2 (z-x)^2 (z-y)^2 \le \left(\frac{(y-x)^2 + (z-x)^2 + (z-y)^2}{3} \right)^3 \le$$

$\le \left(\frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{3} \right)^3 = 1$, причому перша нерівність перетворюється в рівність тільки при $x = y = z$, а тоді $W = 0$.

Задача 4. Нехай $p(x)$ - многочлен з дійсними коефіцієнтами. Довести, що многочлен $xp(x) - p'(x)$ має хоча б один дійсний корінь.

Нехай многочлен $p(x)$ є многочленом парного степеня, тоді $xp(x)$ і $p'(x)$ - многочлени непарного степеня. Рівняння $xp(x) - p'(x) = 0$ є рівнянням непарного степеня – завжди має дійсний корінь.

Розглянемо випадок, коли многочлен $p(x)$ непарного степеня. Нехай $a_0 = 1$. Тоді існує такий його корінь x_0, що $p'(x_0) > 0$. $P(x) = xp(x) - p'(x)$.
$P(x_0) = (x_0)\, p(x_0) - p'(x_0) < 0$, тому має місце зміна знаку.